П.Уэст

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРСИММЕТРИЮ И СУПЕРГРАВИТАЦИЮ

Книга английского физика-теоретика содержит основные положения алгебры суперсимметрии и ее непосредственные следствия, исследование ультрафиолетовых расходимостей и вычисление других квантовых эффектов в суперсимметричных моделях в контексте суперполевой диаграммной техники, теорию супергравитации. Монография отражает современные достижения расширенной суперсимметрии и ее роль в построении реалистических моделей единой теории элементарных частиц, а также теории струны.

Для специалистов по теоретической и математической физике, аспирантов и студентов.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие автора к русскому изданию	9
Предисловие	11
Глава 1. Введение	12
Глава 2. Алгебра суперсимметрии	17
Глава 3. Альтернативные подходы к алгебре суперсимметрии	27
Глава 4. Непосредственные следствия алгебры суперсимметрии	29
Глава 5. Модель Весса — Зумино	31
Глава 6. Суперсимметричная калибровочная теория с $N = 1$: супер-КЭД	38
Глава 7. Теория Янга — Миллса с $N = 1$ и метод Нётер	41
Глава 8. Неприводимые представления группы суперсимметрии	46
Глава 9. Простая супергравитация: линеаризованная ($N = 1$) - супергравитация	57
Глава 10. Инвариантность простой супергравитации	66
Глава 11. Тензорное исчисление в глобальной суперсимметрии	69
11.1. Супермультиплеты	69
11.2. Составные супермультиплеты	72
11.3. Формулы для функционала действия	74
Глава 12. Теории с расширенной глобальной суперсимметрией	80
12.1. (N — 2)-теория Янга — Миллса	83
12.2. Поля материи *с* $N = 2$	88
12.3. Общая глобальная теория *с* $N = 2$	90
12.4. ($N = 4$) -теория Янга — Миллса	92
Глава 13. Локальное тензорное исчисление и взаимодействие супергравитации с полями материи	93
Глава 14. Суперпространство	103
14.1. Элементарное введение в ($N = 1$) - суперпространство	103
14.2. ($N = 1$) - суперпространство	105
14.3. ($N = 2$) - суперпространство	126
Глава 15. Формулировки теорий с глобальной суперсимметрией в суперпространстве	132
15.1. Теории с $N = 1$ в суперпространстве. Модель Весса — Зумино	132

15.2. Теория Янга — Миллса *с N=1* .-. 134
15.3. Геометрический подход к (N = 1) - суперсимметричной теории Янга — Миллса- 138
15.4. Теории с N = 2 в суперпространстве 14Ь
Глава 16. Формулировка (N = 1) - супергравитации в суперпространстве 152
16.1. Геометрия 152
16.2. Связи в суперпространстве 156
16.3. Анализ связей в суперпространстве 165
16.4. Вывод формулировки супер гравитации в суперпространстве из формулировки в x-пространстве 171
Глава 17. Правила Фейнмана для суперграфов *с* N = 1 180
17.1. Общий формализм 182
17.2. Мультиплет Весса — Зумино 183
17.3. Суперсимметричная теория Янга — Миллса 189
17.4. Приложения правил Фейнмана с N = 1 192
17.5. Расходимость фейнмановских суперграфов 197
17.6. Однопетлевые расходимости в общей (N = 1) - суперсимметричной теории 201
17.7. Формализм фонового поля 204
17.8. Формализм фонового поля в суперпространстве 206
Глава 18. Свойства ультрафиолетовых расходимостей теорий с расширенной глобальной суперсимметрией 211
18.1. Доказательство, основанное на аномалиях 212
18.2. Доказательство, основанное на отсутствии перенормировки 216
18.3. Конечные (N = 2) -теории с глобальной суперсимметрией 220
18.4. Явные нарушения суперсимметрии и конечность 222
Глава 19. Спонтанное нарушение суперсимметрии и реалистические модели 232
19.1. Нарушение суперсимметрии в приближении древесных диаграмм 233
19.2. Квантовое нарушение суперсимметрии 237
19.3. Проблема калибровочной иерархии 238
19.4. Замечания о построении реалистических моделей 242
Глава 20. Токи в суперсимметричных теориях 246
20.1. Общее рассмотрение 246
20.2. Токи в модели Весса — Зумино 256
20.3. Токи в (N = 1) -суперсимметричной теории Янга — Миллса 258
20.4. Квантовые аномалии 259
20.5. Токи и формулировки теории супергравитации 261
Глава 21. Двумерные суперсимметричные модели 264
21.1. Двумерные модели с глобальной суперсимметрией 264
21.2. Связь материи с супергравитацией в двумерном пространстве-времени 269
Глава 22. Калибровочно-ковариантная формулировка струны 277
22.1. Точечная частица 277
22.2. Бозонная струна 279
22.3. Осцилляторный формализм 283

22.4. Калибровочно-ковариантная теория на нижних уровнях 285
22.5. Конечный набор 291
22.6. Бесконечный набор 293
22.7. Универсальный набор 294
22.8. Спектр состояний универсального набора 302
Приложение А. Пояснение выбранных обозначений 305
Приложение Б. Список обзоров и книг 316
Литература 318
Предметный указатель 325

Предметный указатель

Алгебра *Вирасоро* 280, 281, 284
— градуированная 18, 19, 20, 22
— *Грассмана* 18
— *Клиффорда* 48, 52, 55
— суперконформная 25, 26
Амплитуда перехода вакуум — вакуум 182
Аномалии калибровочные 236, 287
— киральные 213
— суперконформные 212, 255
Векторы *Киллинга* 108
Вирасоро связи 281
Вспомогательные поля 35, 60, 65
Генераторы нечетные 18, 19, 20
— четные 18, 19, 20
Геометрическая размерность полей 156
Гипермультиплет 89, 150
— *Сониуса* 148, 149
— — ослабленный вариант 214
Группа абелева калибровочная 38
— (анти) *де-Ситтера* 25
— внутренней симметрии 17, 18, 22, 23, 54
— касательного пространства 153
— конформная 25, 69, 248
— *Лоренца* 19, 20, 23
— малая 51, 108, 123
— *Пуанкаре* 17, 18, 21, 22, 23, 46
— суперконформная 256
Действие бозонной струны 279
— гетеротической струны 275
— *Рарити — Швингера* 68
— суперструны 274
— физических полей 33, 36, 37
— *Эйнштейна* 67
Детерминант *Фаддеева—Попова* 137, 191, 208
Духи 191, 192, 209, 219
— *Нильсена—Каллош* 192, 209
— *Фаддеева—Попова* 204
Инвариантность *CPT* 49, 50
Интегрирование в суперпространстве 118, 119
Калибровка суперсимметричная *Ферми—Фейнмана* 190, 191
Каллана — Симанзика р-функция 203, 220, 259
Киральный вес мультиплета 71, 73
— мулътиплет аномалий 258, 260, 262
— ток 246, 255
Клиффордов вакуум 52 54 55, 81, 89
Ковариантные прбизводные на суперпространстве 113
Компонентные поля 69, 79
Константы перенормировки 201
Космологическая постоянная 99, 243
Кривизна суперпространства 113
Кручение суперпространства 113
Метод индуцированных представлений *Вигнера* 46, 49
— калибровочного расширения 133, 136, 145
Механизм *Файе—Илиопулоса* 235
— *Файе — О'Рэйферти* 234
Минимальная формулировка супергравитации 93

Момент тензора энергии-импульса 247
Мультиплет калибровочный 95
— — аномалий 254, 262
— кинетический 74
— киральный 71, 75, 76, 97
— линейный 72, 75, 117
— максвелловский 96
— «неприводимый» 70, 71
— «общий» 97
— общий скалярный 69, 75, 76, 77
— скалярный 97
— спиральностей 71
— эйнштейновский 97, 101
— *Янга—Миллса* 118
Нарушение суперсимметрии мягкое 223
Неминимальная формулировка *Брайтенлонера* 164
Оператор *Вирасоро* 284
— *Казимира* 29
— спина 53
— «четности» 53
Операторы рождения и уничтожения бозонов 284
— — _ — фермионов 295
Параметр обрезания 238, 239 Поле *Хиггса* 238
Представление алгебры *Клиффорда* 48, 52
Представление вне массовой поверхности 30, 33
— группы внутренней симметрии 20, 103
— — *Лоренца* 19, 22, 23, 25
— на массовой поверхности 30, 31, 33, 57
Преобразование калибровочное *Рариты — Швингера* 58, 62
— — *Эйнштейна* 58, 63
— киральное 70, 72
Преобразования *Бекки — Руэ — Стора — Тютина* (БРСТ) 205
Препотенциал 150, 218, 219
Проекторы суперпространства анти*де-Ситтера* 160, 161
Производящий функционал связных функций *Грина* 182
Процедура минимальных вычитаний 218
Регуляризация методом размерной редукции 193, 194
— — старших производных 214, 215
Репер на суперпространстве 112
Связи, сохраняющие представление 140, 165
— стандартные 158, 159, 165
— суперконформные 162, 165
Связность 64, 66, 106, 112
Спинор вейлевский 267
— голдстоуновский 233
— майорановский 267
Стандартная модель (*Глэшоу—Вайнберга—Салама*) 81
Струна бозонная замкнутая 286
— — открытая 283
Супералгебра *анти-де-Ситтера* 26
— *Пуанкаре* 102, 104
Супергруппа *Пуанкаре* 106, 107
Супердетерминант 119
Суперзаряд 24, 25, 51
Суперконформная инвариантность 91, 92
Суперконформный мультиплет токов 259
Супермультиплет аномалий 212
— киральный 100
Супермультиплет токов 252, 253
Суперполе киральное 122, 132
— скалярное 104
— спинорное 109
Суперпространство *анти-де-Ситтера* 159, 161
— *Пуанкаре* 159
Суперсимметрия глобальная 57, 62
— локальная 57, 62
Суперслед 236
Суперток 246

Тахионы 281 Теорема *Дрэгона* 155
— *Коулмена— Мандулы* 17, 18, 21, 25
— об отсутствии перенормировки 199
Теории великого объединения 90, 238
Тетрада (супертетрада) *см.* Репер
Тождества обобщенные *Якоби* 19, 20, 21, 23
Тождество *У орда* 206, 216
— *Фирца* 265
Ток нётеровский 258
Уравнение *Рариты — Швингера* 59, 173, 175
Фактор-пространство 46, 103, 105
Формализм порядка 1,5 67
Функционал *Файе—Илиопулоса* 98, 101
Функция *Грина* двухточечная 182, 185, 190
— — — вспомогательных полей 185
Центральный заряд 21, 23, 51
— — алгебры *Вирасоро* 284
Шпурион 224, 225
Эффективное действие 183

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Почти два десятилетия назад семейство принципов симметрии пополнилось еще одним важным принципом, в соответствии с которым существуют преобразования симметрии, смешивающие между собой бозонные и фермионные поля. В релятивистской теории поля наряду с генераторами группы Пуанкаре появились дополнительные фермионные генераторы Q^a $(a = 1, 2, \ldots, N)$, осуществляющие преобразования симметрии между полями различной статистики. Если имеется несколько наборов таких генераторов $(N > 1)$, то говорят о расширенной суперсимметрии. Основанные на принципе суперсимметрии новые модели физики сверхвысоких энергий открывают дополнительные пути поиска единых теорий поля, включающих все взаимодействия. Построение реалистической картины мира с привлечением суперсимметрии пока далеко от завершения, и предстоит еще привыкнуть ко многим новым и необычным концепциям. Однако уже в настоящее время возникает потребность в систематическом изложении теоретического материала. В этой связи монография известного английского физика-теоретика Питера Уэста представляет собой удачную попытку замкнутого и достаточно подробного описания полученных результатов в области суперсимметричной квантовой теории поля и супергравитации, начиная с основ и заканчивая некоторыми результатами последнего времени.

Значительные успехи перенормируемой калибровочной теории взаимодействия элементарных частиц, так называемой стандартной модели Глэшоу — Вайнберга — Салама, основанной на группе $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$, возродили надежду построить единую теорию всех взаимодействий, включая гравитацию. Обобщением стандартной модели в области сверхвысоких энергий является теория Великого объединения (простейшая такая теория известна как модель $SU(5)$ Джорджи — Глэшоу), содержащая упомянутую группу в качестве подгруппы. Несмотря на то, что с помощью теорий Великого объединения получен ряд феноменологических достижений, в значительной степени не зависящих от частного вида выбранной группы симметрии, эти теории имеют и ряд серьезных недостатков. Наиболее существенными из них являются отсутствие объяснения иерархии взаимодействий и пренебрежение гравитацией, хотя объединение в этих теориях происходит на масштабах, не очень далеких от планковских. Естественный путь объединения гравитации с полями меньших спинов предлагается супергравитацией. Модели со спонтанно нарушенной $(N = 1)$-супергравитацией явились основой для феноменологического описания физики частиц с интересными предсказаниями в области низких энергий; таким об-

разом, оказалось, что без гравитации фактически невозможно построить феноменологически удовлетворительную теорию.

В 1982—1983 гг. в экспериментах на ускорителе ЦЕРН были открыты промежуточные векторные бозоны W^+, W^- и Z^0, ответственные за слабые взаимодействия, что явилось прямым подтверждением теории Глэшоу — Вайнберга — Салама. Великое объединение кварков и лептонов возможно, если в дополнение к известным калибровочным бозонам стандартной модели имеются массивные калибровочные бозоны, ответственные за переходы между этими двумя классами частиц; открытие таких бозонов ожидается с большим нетерпением. Несмотря на предсказания, следующие из суперсимметрии в различных интервалах энергии (как правило, выше доступных для современных ускорителей), в настоящее время экспериментального подтверждения такой симметрии все еще нет. Тем не менее наличие достаточно привлекательных теоретических соображений в пользу суперсимметрии способствует продолжению экспериментальных поисков ее проявлений. Некоторые из новых суперсимметричных частиц могут быть обнаружены уже сегодня или в ближайшем будущем в опытах на ускорителях нового поколения.

Стремительное развитие теории суперсимметрии и супергравитации, интерес к этим результатам привели к необходимости создания учебников, содержащих наиболее важные аспекты этих теорий и рассчитанных на читателя, знакомого с основными положениями теории поля. К такому, еще не многочисленному, списку книг принадлежит монография П. Уэста. То, что эта книга основана на лекциях, прочитанных на различных школах и конференциях, цель которых — ознакомление широкой физической аудитории с основными вопросами суперсимметрии и супергравитации, во многом определило характер изложения фактического материала. Автор последовательно переходит от простых формулировок к более сложным, подробно объясняя вновь вводимые понятия.

В начальных главах рассмотрены основные положения алгебры суперсимметрии в релятивистской теории поля и простейшие (без взаимодействия) полевые модели с такой симметрией. Приводятся необходимые сведения о представлениях алгебры суперсимметрии, развивается соответствующее тензорное исчисление.

На протяжении всей книги автор параллельно с теоретико-полевым (или компонентным) формализмом в привычном пространстве-времени использует геометрическое описание. Для супергравитации, т. е. динамической теории локальной (калибровочной) суперсимметрии, такое описание опирается на понятие

суперпространства как фактор-пространства, возникающего при факторизации расширенной группы Пуанкаре по группе Лоренца (расширенная группа Пуанкаре имеет 14 параметров, поэтому суперпространство параметризовано четырьмя бозонными и четырьмя фермионными координатами). Построение супергравитации требует введения геометрических объектов в суперпространстве, а ее основу составляет объединяющий принцип относительности, содержащий в единой геометрической структуре как пространственно-временные, так и внутренние симметрии. Геометрические идеи супергравитации адекватны принципам общей теории относительности, которую можно рассматривать как супергравитацию с $N = 0$.

После изложения формализма классической теории в суперпространстве автор переходит к квантовой теории, рассматривая фейнмановскую диаграммную технику в суперполевом подходе, когда суперграфы содержат определенный набор обычных диаграмм Фейнмана, отвечающих компонентным бозе- и фермиполям, входящим в суперполе.

Наибольшее внимание, конечно, уделено ультрафиолетовым расходимостям и аргументации их отсутствия для специального класса теорий с расширенной суперсимметрией ($N = 2, 4$). Приводятся доказательства конечности, основанные на аномалиях и отсутствии перенормировки. Вниманию читателя предлагаются модели, в которых учитывается явное («мягкое») нарушение суперсимметрии, сохраняющее конечность.

Для получения удовлетворительного реалистического спектра частиц в суперсимметричных моделях необходимо иметь механизм спонтанного нарушения суперсимметрии, который формулируется в классическом и квантовом приближениях. Обсуждаются структуры мультиплета токов в суперсимметричных теориях, возникновение аномалий в законе сохранения супертока при квантовании, значение мультиплета токов при формулировке супергравитации.

Автор рассматривает суперсимметричные модели в двумерном пространстве-времени, которые не только помогают проиллюстрировать общие принципы, но и приводят к формулировке суперструны — наиболее многообещающему современному направлению исследований.

Завершает книгу построение калибровочно-ковариантной вторично квантованной теории релятивистской открытой бозонной струны, использующее генераторы алгебры Вирасоро.

Небольшой объем книги не позволил отразить всего многообразия исследований и методов в области суперсимметрии, что во введении отмечает и сам автор. В частности, не упоминается

формализм гармонического суперпространства, позволяющий получить формулировку ряда расширенных суперсимметричных теорий вне массовой поверхности (не на решениях уравнений движения) [62, 207].

Конечно, основная задача — использование суперсимметрии для построения общей картины мира. Но предпринимаются также серьезные попытки применения концепций суперсимметрии в различных областях физики, например при построении космологических моделей, анализе низколежащих возбужденных состояний некоторых групп ядер, при описании ряда явлений в твердом теле.

Неослабевающий интерес к суперсимметрии позволяет надеяться, что книга будет полезна как активно работающим специалистам, так и научной молодежи, живо интересующейся достижениями современной теории элементарных частиц.

П. П. Кулиш

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Прошло около двух лет с момента английского издания книги, и, по-видимому, следует прокомментировать те разнообразные направления развития теоретической физики, которые изменялись за это время в широком диапазоне. В частности, перспективы и место теории струны в физике не кажутся теперь столь очевидными, как утверждалось недавно.

Хотя стандартная модель, используемая в квантовой теории поля, успешно применяется в весьма широком интервале энергий, другая теория современной физики — общая теория относительности проверена только на масштабах, много больших характерных масштабов стандартной модели. Кроме того, начиная с 1930-х годов известно, что применение принципов квантовой теории к общей теории относительности ведет к противоречивым результатам. Это служило препятствием к объединению обеих теорий в одну, что, можно надеяться, будет осуществлено после создания единой физической теории.

До открытия теории струны и суперсимметрии не удавалось сколько-нибудь продвинуться в решении этой проблемы. Теория струны возникла при попытке объяснения адронной физики, но открытие того, что в ней естественно появляется безмассовая частица спина 2, неизбежно ведет к ее использованию в качестве теории гравитации. Суперсимметрия была обнаружена в начале 1970-х годов Гольфандом и Лихтманом в результате нетривиального соединения пространственно-временны́х и внутренних симметрий, а также независимо Жерве и Сакитой, исследовавшими суперструну Рамона — Неве — Шварца. На сегодняшний день нет прямого экспериментального подтверждения суперсимметрии или теории струны.

Несмотря на то, что суперсимметрия ведет к нетривиальному обобщению теории гравитации Эйнштейна, вряд ли на этом пути будет решена упомянутая выше проблема квантования гравитации. Кажется, объединение теории струны и суперсимметрии необходимо, что, возможно, в недалеком будущем и будет доказано. Однако это не окончательный этап, предстоит еще установить связь со стандартной моделью. Одна из проблем состоит в том, что, по-видимому, существует не единственная согласованная теория, а очень много таковых.

Возможно, наше понимание теории струны и, в частности, того, как она может быть соединена с концепциями квантовой механики, калибровочной инвариантности, суперсимметрии и общей теории относительности для формирования полной теории, только начинается. В прошлом объединение двух физических теорий приводило к появлению определенных физических концепций. Одним из последствий этого процесса является наше

представление о пространстве-времени, восприятие которого уже стало слегка изменяться с появлением суперсимметрии и теории струны.

Остается открытым вопрос о том, применима ли стандартная модель при энергиях, значительно превышающих ее характерный масштаб 100 ГэВ и приближающихся к энергиям теории струны 10^{19} ГэВ. Если это не так, то может радикально измениться наше понимание того, каким образом известная физика содержится в теории струны.

Несмотря на все эти неопределенности, кажется вполне вероятным, что изучение суперсимметрии будет продолжаться в течение многих лет как в контексте теории струны, так и в контексте низкоэнергетических теорий, которые могут быть сопоставлены с экспериментальными данными, полученными на новых ускорителях. После стольких лет усилий, направленных на создание единой теории, проявление суперсимметрии в экспериментах весьма желательно.

Питер Уэст

ЦЕРН, Швейцария
20 июля 1988 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе прочитанного мною курса лекций по суперсимметрии и супергравитации. В процессе чтения лекций я пришел к убеждению, что необходима книга, которая представляла бы собой введение в основные аспекты теорий суперсимметрии. Хотя содержание данной книги несколько ограничено областью моих научных интересов в период чтения лекций, она охватывает все основные вопросы теории, необходимые для введения в предмет, а также некоторые более сложные вопросы. Последние касаются квантовых свойств теорий суперсимметрии и построения теорий супергравитации. Заключительная глава содержит обсуждение свободной калибровочно-ковариантной теории струны.

Теории суперсимметрии оказали значительное влияние на современное поколение физиков-теоретиков. Они стимулировали поиски единой унифицированной теории физики и привели к более широкому пониманию того, как построено пространство-время, в котором мы живем. С общей точки зрения они сделали более приемлемым изучение идей, которые на первый взгляд лишь отдаленно связаны с экспериментальными данными. При изложении материала там, где это необходимо, мною были предприняты усилия, чтобы подробно вывести результаты. Тем не менее можно надеяться, что при изучении предмета читатель наряду с математическими преобразованиями воспримет также более полно концепции, лежащие в основе теорий суперсимметрии.

Мне бы хотелось выразить признательность Королевскому колледжу, Калифорнийскому технологическому институту и ЦЕРНу, где была написана и напечатана рукопись. Я хочу также поблагодарить моих коллег, совместная работа с которыми стимулировала более глубокое понимание обсуждаемых здесь проблем.

Питер Уэст

Лондон
Июнь 1986

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная книга появилась в результате цикла лекций, прочитанных на различных летних школах; она задумана как введение в суперсимметрию и супергравитацию. Книгу можно рассматривать как учебное пособие в том смысле, что почти всегда приводятся подробные доказательства. После более чем десятилетнего интенсивного развития теорий суперсимметрии всю обширную литературу по этой теме невозможно охватить в одном томе. Вместо беглого обсуждения многих вопросов мы решили ограничиться рассмотрением тех из них, которые существенны для начального изучения, важны для развития суперсимметрии в целом и достаточно полное изложение которых займет не слишком много места. Это включает почти все вопросы, связанные с глобальной суперсимметрией и с $(N = 1)$-супергравитацией. В книгу не вошли теории расширенной супергравитации, суперструнные теории, размерная редукция Калуцы — Клейна и подробное обсуждение феноменологических следствий суперсимметрии. Список литературы, включающий некоторые обзоры по этим важным темам, приведен в приложении Б.

Учитывая вводный характер книги, мы не пытались дать систематизированное описание предмета или представить полные математические обоснования, опасаясь, что читатель запутается в деталях. Часто приводятся только те черты теории, которые необходимы для последовательного вывода требуемого результата. В этом смысле данная книга не претендует на полноту и математическую строгость изложения, но мы надеемся, что она доступна для понимания. Мы ожидаем, что читатель ощутит себя на вершине айсберга, имеющего куда более значительную скрытую подводную часть. В особенности это относится, например, к гл. 12, посвященной суперпространству.

Существенная часть данной книги написана одновременно с книгой [6]. Последняя представляет собой более серьезную монографию, в которой подробно рассмотрены концептуальные и математические вопросы суперсимметрии, а затем на этой основе теория суперсимметрии выведена во всех деталях и с достаточной полнотой. Получилась довольно большая, но систематическая и содержательная по всем затронутым вопросам книга. Нами были приняты меры для избежания повторений в этих двух книгах, и мы надеемся, что они будут взаимно до-

полнять друг друга. Но в последних главах имеется некоторая близость изложения, и я рад выразить благодарность Питеру ван Ньювенхейзену за то, что он прочитал их и сделал много полезных замечаний.

Суперсимметрия была открыта Гольфандом и Лихтманом [1]. Акулов и Волков [2] построили теорию, инвариантную относительно нелинейной реализации суперсимметрии. В результате независимого исследования [7] суперсимметрия была введена как двумерная симметрия мировой поверхности в контексте теории струн. Но суперсимметрия стала широко известна только после того, как эта двумерная симметрия была обобщена на четыре измерения и использована для построения модели Весса — Зумино [3].

До настоящего времени нет надежных доказательств того, что суперсимметрия реализуется в природе. Нет также причин, вынуждающих нас верить, что суперсимметрия необходима для разрешения какого-либо из парадоксов современных физических теорий. Возможно, однако, что суперсимметрия потребуется для объяснения новых явлений, уже обнаруженных или тех, которые будут обнаружены в ближайшем будущем при исследованиях на ускорителях частиц. С точки зрения теории имеются некоторые основания ожидать, что суперсимметрия окажется необходимой. В природе имеются по крайней мере два сильно отличающихся масштаба энергии: масштаб слабого взаимодействия (100 ГэВ) и планковский масштаб (10^{19} ГэВ). Есть также некоторые основания считать, что должен существовать еще один (или более) промежуточный масштаб. Хотя происхождение этих сильно отличающихся масштабов энергии неизвестно, считается естественным, чтобы в теории явления в низшем масштабе энергий не терялись на фоне более мощных эффектов, возникающих в масштабе больших энергий. В этом смысле некоторые суперсимметричные теории естественны, и из этих рассуждений следует, что суперпартнеры наблюдаемых частиц должны иметь массы вблизи низшего масштаба энергий и, следовательно, должны быть обнаружены в недалеком будущем (см. гл. 19). Данное свойство теорий суперсимметрии является следствием того факта, что благодаря суперсимметрии состояния с нулевым спином связаны с состояниями со спином 1/2.

В стандартную модель слабого и электромагнитного взаимодействия наибольшую неопределенность вносит сектор нулевого спина. В самом деле, многие из 19 свободных параметров этой модели обусловлены неопределенностью взаимодействий полей нулевого спина как между собой, так и с полями спи-

на 1/2. Естественно надеяться, что в суперсимметричной теории некоторые из этих свободных параметров фиксированы. Это не было достигнуто в контексте суперсимметричных моделей с $(N = 1)$-суперсимметрией, но не исключено, что фиксация параметров возможна, если удастся построить реалистическую модель с расширенной суперсимметрией.

Можно надеяться, что на некотором масштабе энергий суперсимметричные теории должны обеспечить согласованное квантование гравитации и в то же время объединить тяготение со всеми другими силами природы. Наиболее обещающие кандидаты для достижения этого долгожданного результата — теории суперструн. Но в этой связи следует напомнить, что гравитация может оказаться не фундаментальной силой, а быть обусловленной динамическим механизмом.

Поразительно, что суперсимметрия, по-видимому, может дать ответы на многие важнейшие принципиальные вопросы, на которые физика частиц не дает ответа. Примечательно, что если суперсимметрия даст ответы на эти вопросы, то она свяжет явления на планковском масштабе энергий с явлениями на масштабе сил слабого взаимодействия.

Хотя суперсимметрия вначале не получила всеобщего признания, в последние годы она стала главным объектом исследований для значительного числа физиков-теоретиков. Такое широкое обращение к тематике, не имеющей явной связи с наблюдаемым миром, не является необычной чертой человеческого поведения, но для теоретической физики это новое явление. Оно обусловлено надеждами на возможность применения суперсимметрии, обрисованными выше, а также очень богатой структурой суперсимметричных теорий, приведшей к ряду достижений, которые в свою очередь возбуждали дальнейший интерес. Некоторые из этих новых результатов включают создание расширенных теорий с глобальной суперсимметрией и теорий супергравитации, теорий с суперконформной инвариантностью, т. е. конечных теорий упомянутого класса, дальнейшее развитие суперструнных теорий, а также построение реалистических суперсимметричных моделей и использование суперсимметрии для упрощения доказательств некоторых математических теорем.

Эта книга начинается с вывода алгебры суперсимметрии. Показано, что в рамках квантовой теории поля данная алгебра является естественным следствием требований Бозе — Ферми-симметрии или что в физике группа Пуанкаре и группа внутренней симметрии должны быть связаны между собой нетривиальным образом (см. гл. 2, 3, 4 и 5).

Неприводимые представления алгебры суперсимметрии (гл. 8) описывают возможные состояния суперсимметричных теорий на массовой поверхности. Объяснено, как можно систематически строить все суперсимметричные теории, зная только их состояния на массовой поверхности. Для этого надо просто найти преобразования суперсимметрии, которые осуществляют преобразования в пространстве полей в соответствии с уравнениями движения (т. е. состояниями на массовой поверхности) и переводят поля друг в друга, а затем найти инвариантное действие, построенное из полей, на которые не наложено никаких связей. Этот метод иллюстрируется для $(N=1)$-теорий с глобальной суперсимметрией в гл. 5, 6 и 7, а теории с расширенной глобальной суперсимметрией построены в гл. 12. Слово «глобальная» означает, что параметры преобразований суперсимметрии не зависят от координат пространства-времени.

В гл. 9 $(N=1)$-супергравитация сначала построена как линеаризованная теория, инвариантная только относительно глобальной суперсимметрии. Затем, используя метод Нётер, мы находим локально суперсимметричную теорию. Ее инвариантность установлена в гл. 11.

Получив эти суперсимметричные теории, мы рассматриваем затем их взаимодействие. Проще всего это сделать, используя суперсимметричное тензорное исчисление. Название исчисления напоминает по аналогии с общей теорией относительности, что нужно выбрать некоторые супермультиплеты, т. е. совокупность полей в x-пространстве, которые преобразуются друг через друга при преобразованиях суперсимметрии, и найти правила их комбинирования, чтобы образовать новые супермультиплеты. Такая процедура, а также умение строить инварианты позволяют найти наиболее общее взаимодействие. В гл. 12 и 13 это проделано для глобальной и локальной суперсимметрий соответственно.

Упомянутое суперсимметричное тензорное исчисление в x-пространстве позволяет сохранять суперсимметричный вид теорий на каждом этапе построения. Но этот метод не может быть использован для сохранения суперсимметрии в процессе квантовых вычислений. Последнее достигается на классическом и квантовом уровне с помощью суперпространственного формализма (гл. 14). Суперсимметрия возникает здесь как преобразования на 8-мерном фактор-пространстве, называемом суперпространством. Четыре координаты суперпространства коммутируют, а остальные антикоммутируют. Такая конструкция обобщает реализацию группы Пуанкаре на пространстве Минковского. Супермультиплеты задаются полями на суперпростран-

стве, называемыми суперполями. Формулировка теорий с глобальной суперсимметрией и $(N = 1)$-супергравитации дана в гл. 15 и 16.

В гл. 17 показано, как вычислять квантовые эффекты в суперпространстве; в гл. 18 установлено поведение суперсимметричных теорий в ультрафиолетовой области. Последние включают большой класс конечных квантовых теорий поля. В гл. 19 кратко рассмотрены теоретические аспекты построения реалистических моделей. Гл. 20 содержит обсуждение структуры супермультиплета, к которому принадлежат токи суперсимметричных теорий. Это позволяет найти формулировку супергравитации, а также имеет отношение к вычислению квантовых эффектов в суперсимметричных теориях.

Наконец, имея в виду интерес, вызванный в последнее время теориями струн, в гл. 21 мы обсуждаем двумерные суперсимметричные теории, лежащие в основе суперструнных теорий, а в гл. 22 приводим введение в калибровочно-ковариантную формулировку теорий струн.

2. АЛГЕБРА СУПЕРСИММЕТРИИ

В 60-е годы по мере того, как росло понимание значения внутренних симметрий, таких, как $SU(2)$, и более высоких, физики пытались обнаружить симметрию, которая бы нетривиальным образом объединяла группу Пуанкаре и группу внутренней симметрии. После многочисленных усилий было показано, что такие попытки невозможны в рамках теории групп Ли. На основе довольно общих предположений Коулмен и Мандула [4] показали, что любая группа Ли, содержащая группу Пуанкаре P, генераторы которой P_a и J_{ab} удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &[P_a,\ P_b] = 0, \quad [P_a,\ J_{bc}] = (\eta_{ab}P_c - \eta_{ac}P_b), \\ &[J_{ab},\ J_{cd}] = -(\eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bc}J_{ad}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

и группу внутренней симметрии G с генераторами T_s:

$$[T_r,\ T_s] = f_{rst}T_t, \tag{2.2}$$

должна быть прямым произведением P и G; иными словами,

$$[P_a,\ T_s] = 0 = [J_{ab},\ T_s]. \tag{2.3}$$

Они показали также, что группа G должна содержать полупростую группу и дополнительные группы $U(1)$.

Следует сделать несколько замечаний относительно статуса этой запрещающей ("no-go") теоремы. Ясно, что имеются группы Ли, включающие группу Пуанкаре и группы внутренней симметрии нетривиальным образом, но теорема утверждает, что эти группы приводят к тривиальной физике. Рассмотрим, например, рассеяние двух тел; с учетом сохранения импульса и момента импульса единственной неизвестной величиной оказывается угол рассеяния. Если бы существовали группы Ли, нетривиальным образом смешанные с группой Пуанкаре, то должны были бы существовать добавочные генераторы, связанные с преобразованиями пространства-времени. Соответствующие законы сохранения приводят к дополнительным ограничениям, накладываемым, например, на рассеяние двух тел, так что угол рассеяния может принимать только дискретные значения. Но обычно считают, что амплитуда рассеяния аналитична по углу θ, и, следовательно, мы должны сделать вывод, что процесс рассеяния не зависит от θ.

Существо теоремы состоит в том, что если мы используем группу Ли, которая содержит группу внутренней симметрии, смешанную нетривиальным образом с группой Пуанкаре, то S-матрица для всех процессов должна быть тривиальна. Кроме всего прочего в формулировке теоремы предполагается, что S-матрица существует и нетривиальна, вакуум не вырожден и нет безмассовых частиц. Важно понимать, что теорема применима лишь к преобразованиям симметрии, действующим на элементы S-матрицы, а не ко всевозможным преобразованиям симметрии, существующим в квантовой теории поля. В самом деле, нетрудно найти примеры симметрий последнего типа. Разумеется, теоремы "no-go" справедливы лишь в той мере, в какой верны предположения, используемые для их доказательства.

В важной работе Гольфанда и Лихтмана [1] показано, что если обобщить понятие группы Ли, то можно действительно найти группу симметрии, включающую нетривиальным образом группу Пуанкаре и группу внутренней симметрии. В этой главе мы обсудим такой подход к суперсимметрии. Приняв более общее определение группы, мы придем с помощью теоремы Коулмена — Мандулы и некоторых дополнительных предположений к известному понятию группы суперсимметрии.

Поскольку структура группы Ли, по крайней мере в окрестности единичного элемента, полностью определяется ее алгеброй Ли, необходимо сформулировать более общее понятие, чем алгебра Ли. Важный шаг на пути к открытию алгебры суперсимметрии — введение генераторов $Q_\alpha{}^i$, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям [1]), т. е.

$$\{Q_\alpha{}^i,\ Q_\beta{}^j\} = Q_\alpha{}^i Q_\beta{}^j + Q_\beta{}^j Q_\alpha{}^i = \text{некоторому другому генератору}. \tag{2.4}$$

Значение индексов i и α вскоре выяснится. Предположим, что группа симметрии содержит генераторы P_a, J_{ab}, T_s и, возможно, некоторые другие генераторы, удовлетворяющие коммутацион-

[1]) В силу антикоммутационных свойств нечетных генераторов $Q_A{}^i$, для того чтобы из них получать четные объекты, которые при экспоненцировании дают элементы группы, генераторы $Q_A{}^i$ следует умножать на нечетные антикоммутирующие элементы алгебры Грассмана $\Lambda(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_l \ldots)$ (ассоциативная алгебра с единицей). Последняя порождается конечным или бесконечным числом образующих $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_l \ldots$ со свойствами [52, 202*] $\varepsilon_l\varepsilon_l + \varepsilon_l\varepsilon_l = 0$, в частности, $\varepsilon_l{}^2 = 0$. В грассмановой алгебре Λ фиксирована четность. Алгебра Грассмана, как линейное пространство, разлагается в прямую сумму $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, где Λ_0 — подалгебра четных элементов (порождена единицей и мономами четных степеней по образующим ε_l), а Λ_1 — подпространство нечетных элементов (порождено мономами нечетных степеней по ε_l); тем самым в Λ задана Z_2-градуировка. — *Прим. ред.*

ным соотношениям, а также генераторы $Q_\alpha{}^i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$. Будем называть первые из них, удовлетворяющие соотношениям (2.1), (2.2) и (2.3), четными, а генераторы, удовлетворяющие соотношению (2.4), — нечетными.

Позволив джинну показаться из бутылки, мы быстро закрываем пробку; иными словами, мы требуем, чтобы алгебра имела Z_2-градуировку. Это просто означает, что четные и нечетные генераторы должны подчиняться следующим правилам:

$$\begin{gathered}[\text{четный, четный}] = \text{четный},\\ \{\text{нечетный, нечетный}\} = \text{четный},\\ [\text{четный, нечетный}] = \text{нечетный}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Должны выполняться также соотношения

$$[P_a,\ T_s] = 0 = [J_{ab},\ T_s], \tag{2.6}$$

поскольку четная (бозонная) подгруппа должна удовлетворять теореме Коулмена — Мандулы.

Рассмотрим теперь коммутатор величин J_{ab} и $Q_\alpha{}^i$. Вследствие соотношений (2.5) он должен иметь вид

$$[Q_\alpha{}^i,\ J_{ab}] = (b_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^i, \tag{2.7}$$

так как по определению $Q_\alpha{}^i$ — единственные нечетные генераторы. Здесь индекс α соответствует поворотам, осуществляемым оператором J_{ab}. По аналогии с алгеброй Ли введем обобщенные тождества Якоби. Обозначив четные генераторы буквой B, а нечетные — буквой F, найдем

$$\left\{\begin{array}{l}[[B_1,\ B_2],\ B_3] + [[B_3,\ B_1],\ B_2] + [[B_2,\ B_3],\ B_1] = 0,\\ [[B_1,\ B_2],\ F_3] + [[F_3,\ B_1],\ B_2] + [[B_2,\ F_3],\ B_1] = 0,\\ \{[B_1,\ F_2],\ F_3\} + \{[B_1,\ F_3],\ F_2\} + [\{F_2,\ F_3\},\ B_1] = 0,\\ [\{F_1,\ F_2\},\ F_3] + [\{F_1,\ F_3\},\ F_2] + [\{F_2,\ F_3\},\ F_1] = 0.\end{array}\right. \tag{2.8}$$

Читатель может проверить справедливость этих соотношений.

Используя тождество Якоби

$$[[J_{ab},\ J_{cd}],\ Q_\alpha{}^i] + [[Q_\alpha{}^i,\ J_{ab}],\ J_{cd}] + [[J_{cd},\ Q_\alpha{}^i],\ J_{ab}] = 0 \tag{2.9}$$

и уравнение (2.7), получим

$$[b_{ab},\ b_{cd}]_\alpha{}^\beta = -\eta_{ac}(b_{bd})_\alpha{}^\beta - \eta_{bd}(b_{ac})_\alpha{}^\beta + \eta_{ad}(b_{bc})_\alpha{}^\beta + \eta_{bc}(b_{ad})_\alpha{}^\beta. \tag{2.10}$$

Это значит, что матрица величин $(b_{cd})_\alpha{}^\beta$ образует представление алгебры Лоренца или, другими словами, что на генераторах $Q_\alpha{}^i$ задано представление группы Лоренца. Мы выберем гене-

раторы $Q_\alpha{}^i$, которые принадлежат представлению $(0, 1/2)\oplus$ $\oplus(1/2, 0)$ группы Лоренца, т. е.

$$[Q_\alpha{}^i, J_{ab}] = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^i. \tag{2.11}$$

Пусть $Q_\alpha{}^i$ — майорановский спинор:

$$Q_\alpha{}^i = C_{\alpha\beta}\bar{Q}^{\beta i}, \tag{2.12}$$

где $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$ — матрица зарядового сопряжения (см. приложение А). Это не приводит к потере общности, так как, если алгебра допускает комплексное сопряжение как инволюцию, мы можем преобразовать суперзаряды так, чтобы удовлетворить (2.12) (см. замечание 1 в конце главы).

Приведенные вычисления отражают более общее утверждение: генераторы $Q_\alpha{}^i$ должны определять представление четной (бозонной) подалгебры группы суперсимметрии. Это простое следствие требования, чтобы алгебра была Z_2-градуированной. Коммутатор любого четного генератора B_1 и генератора $Q_\alpha{}^i$ имеет вид

$$[Q_\alpha{}^i, B_1] = (h_1)_{\alpha j}{}^{i\beta} Q_\beta{}^j. \tag{2.13}$$

Из обобщенного тождества Якоби

$$[[Q_\alpha{}^i, B_1], B_2] + [[B_1, B_2], Q_\alpha{}^i] + [[B_2, Q_\alpha{}^i], B_1] = 0 \tag{2.14}$$

следует, что

$$[h_1, h_2]_{\alpha j}{}^{i\beta} Q_\beta{}^j = [Q_\alpha{}^i, [B_1, B_2]] \tag{2.15}$$

или, другими словами, что матрицы h определяют представление алгебры Ли четных генераторов.

Вышеприведенные рассуждения означают, что

$$[Q_\alpha{}^i, T_r] = (t_r)^i{}_j Q_\alpha{}^j + (t_r)_j{}^i (i\gamma_5)_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^j, \tag{2.16}$$

где слагаемые $(t_r)^i{}_j + i\gamma_5 (t_r)^i{}_j$ задают представление алгебры Ли группы внутренней симметрии. Это следует из того факта, что $\delta_\beta{}^\alpha$ и $(\gamma_5)_\alpha{}^\beta$ — единственные инвариантные тензоры, являющиеся скаляром и псевдоскаляром.

Остается коммутатор $[Q_\alpha{}^i, P_a]$ четного и нечетного генераторов. Обобщенные тождества Якоби, включающие группу внутренней симметрии и группу Лоренца, допускают следующее соотношение:

$$[Q_\alpha{}^i, P_a] = c(\gamma_a)_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^i. \tag{2.17}$$

Но тождество $[[Q_\alpha{}^i, P_a], P_b] + \ldots$ требует, чтобы постоянная c была равна нулю, т. е.

$$[Q_\alpha{}^i, P_a] = 0. \tag{2.18}$$

В более общем случае можно рассмотреть слагаемые $(c\gamma_a + d\gamma_a\gamma_5)Q$ в правой части (2.17), но тогда приведенное выше тождество Якоби и майорановское условие дают $c = d = 0$ (см. замечание 2 в конце главы). Рассмотрим, наконец, антикоммутатор $\{Q_\alpha{}^i, Q_\beta{}^j\}$. Он должен быть составлен из четных генераторов и должен быть симметричен относительно замен $\alpha \leftrightarrow \beta$ и $i \leftrightarrow j$. Четные генераторы — генераторы группы Пуанкаре, группы внутренней симметрии, а также генераторы, которые, согласно теореме Коулмена — Мандулы, коммутируют с элементами группы Пуанкаре, т. е. являются скалярами и псевдоскалярами. Следовательно, наиболее общая форма антикоммутатора имеет вид

$$\{Q_\alpha{}^i,\ Q_\beta{}^j\} = r(\gamma^a C)_{\alpha\beta} P_a \delta^{ij} + s(\sigma^{ab}C)_{\alpha\beta} J_{ab}\delta^{ij} + C_{\alpha\beta}U^{ij} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta}V^{ij}. \tag{2.19}$$

Мы не включили слагаемое $(\gamma^b\gamma_5 C)_{\alpha\beta}L_b{}^{ij}$, поскольку тождество Якоби, связывающее генераторы Q, Q и J_{ab}, $((Q, Q, J_{ab}))$, означает, что $L_b{}^{ij}$ смешивается с элементами группы Пуанкаре нетривиальным образом и, следовательно, упомянутое слагаемое должно быть исключено в силу теоремы "no-go".

Тот факт, что мы использовали только инвариантные относительно группы Пуанкаре тензоры, является следствием обобщенных тождеств Якоби двух нечетных и одного четного генераторов.

Четные генераторы $U^{ij} = -U^{ji}$ и $V^{ij} = -V^{ji}$ называют центральными зарядами [5]; их часто обозначают буквой Z. Вследствие обобщенных тождеств Якоби (Q, Q, Q) и (Q, Q, Z) они коммутируют со всеми генераторами, включая самих себя, т. е.

$$[U^{ij}, \text{любой генератор}] = 0 = [V^{ij}, \text{любой генератор}]. \tag{2.20}$$

Заметим, что теорема Коулмена — Мандулы допускает полупростую группу с дополнительными группами $U(1)$. Роль центральных зарядов в суперсимметричных теориях станет ясна в последующих разделах.

В общем случае мы должны записать правую часть (2.19) в виде $(\gamma^a C)_{\alpha\beta}\omega^{ij}P_a + \ldots$, где ω^{ij} — произвольная действительная симметричная матрица. Однако можно показать, что матрицу ω^{ij} невозможно привести к виду $\omega^{ij} = r\delta^{ij}$ никакими переопределениями суперзарядов (вращениями и умножениями на размерные множители), не нарушающими майорановское условие (см. замечание 3 в конце этой главы). Тождество $[P_a, \{Q_\alpha{}^i, Q_\beta{}^j\}] + \ldots = 0$ ведет к равенству $s = 0$, поэтому P_a можно нормировать, полагая $r = 2$ и получая в итоге

$$\{Q_\alpha{}^i,\ Q_\beta{}^j\} = 2(\gamma_a C)_{\alpha\beta}\delta^{ij}P^a + C_{\alpha\beta}U^{ij} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta}V^{ij}. \tag{2.21}$$

В любом случае множители r и s имеют разные размерности, и, чтобы считать их ненулевыми, потребовалось бы введение размерного параметра.

Если бы мы выбрали другое неприводимое лоренцево представление для $Q_\alpha{}^i$, отличное от $(j+1/2, j)\oplus(j, j+1/2)$, то не могли бы получить P_a, т. е. представление $(1/2, 1/2)$, в правой части (2.21). Простейшая возможность — представление $(0, 1/2)\oplus(1/2, 0)$. В действительности это единственный возможный выбор (см. замечание 4).

Наконец, необходимо рассмотреть связи, налагаемые на группу внутренней симметрии обобщенным тождеством Якоби. Рассмотрение осложняется выбранной формой записи майорановского условия (2.12). Двухкомпонентный вариант этой связи имеет вид

$$\bar{Q}_{\dot{A}i} = (Q_A{}^i)^*; \quad A, \dot{A} = 1, 2 \tag{2.22}$$

(см. приложение А по поводу двухкомпонентных обозначений). Уравнения (2.19) и (2.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \{Q_A{}^i, \bar{Q}_{\dot{B}j}\} &= -2i(\sigma^a)_{A\dot{B}}\delta^i{}_j P_a, \\ \{Q_A{}^i, Q_B{}^j\} &= \varepsilon_{AB}(U^{ij} + iV^{ij}), \\ [Q_A{}^i, J_{ab}] &= +\frac{1}{2}(\sigma_{ab})_A{}^B Q_B{}^i \end{aligned} \tag{2.23}$$

и

$$[Q_A{}^i, T_r] = (l_r + it_r)^i{}_j Q_A{}^j. \tag{2.24}$$

Переходя от (2.24) к комплексно-сопряженному уравнению и используя майорановское условие, получаем

$$[Q_{\dot{A}i}, T_r] = Q_{\dot{A}k}(U_r^\dagger)^k{}_i, \tag{2.25}$$

где $(U_r)^i{}_j = (l_r + it_r)^i{}_j$. Из тождества Якоби $(Q, \bar{Q}, T)$ следует, что $\delta^i{}_j$ — тензор, инвариантный относительно группы G, т. е.

$$U_r + U_r^\dagger = 0. \tag{2.26}$$

Следовательно, матрицы U_r антиэрмитовы, т. е. представляют собой генераторы унитарной группы $U(N)$. Но, принимая во внимание члены с центральными зарядами в тождестве Якоби (Q, Q, T), найдем, что каждому центральному заряду можно сопоставить инвариантный тензор группы внутренней симметрии, и, следовательно, возможная группа внутренней симметрии еще более сужается. Случаю, когда имеется только один центральный заряд, соответствует группа внутренней симметрии $Sp(N)$, а случаю, когда нет центрального заряда, — группа $U(N)$.

Таким образом, если мы требуем, чтобы алгебра была Z_2-градуированной и содержала алгебры группы Пуанкаре и

внутренней симметрии, то обобщенные тождества Якоби налагают очень сильные ограничения на выбор такой алгебры. В действительности, если сделать дальнейшее допущение, что $Q_\alpha{}^i$ — спиноры относительно группы Лоренца, то алгебра имеет форму, определенную соотношениями (2.1), (2.6), (2.11), (2.16), (2.18) и (2.21).

Простейшая алгебра существует при $N = 1$, она включает соотношения

$$\begin{gathered}\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma_a C)_{\alpha\beta} P^a, \quad [Q_\alpha, P_a] = 0, \\ [Q_\alpha, J_{cd}] = \frac{1}{2}(\sigma_{cd})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad [Q_\alpha, R] = i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta Q_\beta,\end{gathered} \tag{2.27}$$

а также коммутационные соотношения группы Пуанкаре. Заметим, что в этом случае нет центральных зарядов (т. е. $U'' = V'' = 0$), а группа внутренней симметрии становится просто группой кирального вращения с генератором R.

Теперь мы докажем три упомянутые выше утверждения. Это не было сделано выше, чтобы не отвлекать внимание от главной линии рассуждений. Мы воспользуемся двухкомпонентным формализмом.

Замечание 1. Предположим, что мы имеем алгебру, допускающую комплексное сопряжение как инволюцию; для суперзарядов это значит, что

$$(Q_A{}^i)^* = b_i{}^j Q_{\dot{A}j}, \quad (Q_{\dot{A}j})^* = d^i{}_k Q_A{}^k.$$

Перемешивание лоренцевых индексов отсутствует, так как $(Q_A{}^i)^*$ преобразуются так же, как суперзаряды $Q_{\dot{A}i}$, а именно по представлению (0, 1/2) группы Лоренца, но не так, как $Q_A{}^i$, преобразуемые по представлению (1/2, 0). Опускание индекса i под знаком комплексного сопряжения здесь является лишь вопросом обозначений. Две последовательные операции комплексного сопряжения не меняют результат, а это означает, что

$$(b_i{}^j)^* d^i{}_k = \delta^i{}_k \tag{2.28}$$

и, в частности, что $b_i{}^j$ — обратимая матрица. Преобразуем теперь суперзаряды

$$Q'_A{}^i = Q_A{}^i, \quad Q'_{\dot{A}i} = b_i{}^j Q_{\dot{A}j}. \tag{2.29}$$

Найдем величины, комплексно-сопряженные $Q'_{\dot{A}i}$:

$$(Q'_A{}^i)^* = (Q_A{}^i)^* = b_i{}^j Q_{\dot{A}j} = Q'_{\dot{A}j},$$

тогда как, используя (2.28), получим

$$(Q'_{\dot{A}i})^* = (b_i{}^j)^* (Q_{\dot{A}j})^* = (b_i{}^j)^* d^j{}_k Q_A{}^k = Q_A{}^i. \tag{2.30}$$

Таким образом, $Q'_A{}^i$ удовлетворяют майорановскому условию, что и требовалось. Если суперзаряды первоначально не удовлетворяют майорановскому условию, то можно просто переопределить их так, чтобы они удовлетворяли этому условию.

Замечание 2. Предположим, что коммутатор $[Q_A, P_a]$ имеет вид

$$[Q_A,\ P_a] = e(\sigma_a)_{A\dot{B}}Q^{\dot{B}}, \tag{2.31}$$

где e — комплексное число и для простоты мы опустили индекс i. Переходя к эрмитово сопряженному выражению (см. приложение А), находим

$$[Q_{\dot{A}},\ P_a] = -e^*(\sigma_a)_{B\dot{A}}Q^B. \tag{2.32}$$

Рассмотрение тождества Якоби $[[Q_A, P_a],\ P_b] + \ldots = 0$ приводит к равенству

$$-|e|^2(\sigma_a)_{A\dot{B}}(\sigma^b)^{C\dot{B}} - (a \leftrightarrow b) = 0. \tag{2.33}$$

Следовательно, $e = 0$ и мы вновь получаем тождество

$$[Q_A,\ P_a] = 0. \tag{2.34}$$

Замечание 3. Наиболее общая форма антикоммутатора величин Q^{Ai}, $Q^{\dot{B}}{}_j$ имеет вид

$$\{Q^{Ai},\ Q^{\dot{B}}{}_j\} = -2iU^i{}_j(\sigma^m)^{A\dot{B}}P_m + \text{слагаемые с другими матрицами Дирака.} \tag{2.35}$$

Переходя от (2.35) к комплексно-сопряженному уравнению и сравнивая эти уравнения, находим, что U — эрмитова матрица:

$$(U^i{}_j)^* = U^j{}_i. \tag{2.36}$$

Преобразуем суперзаряды

$$Q'^{Ai} = B^i{}_jQ^{Aj} \tag{2.37}$$

и комплексно-сопряженные суперзаряды

$$Q'^{\dot{A}}{}_i = (B^i{}_j)^*Q^{\dot{A}}{}_j. \tag{2.38}$$

После такого преобразования в выражении (2.35) матрица U заменяется матрицей

$$U'^i{}_j = B^i{}_kU^k{}_l(B^j{}_l)^* \quad \text{или} \quad U' = BUB^\dagger. \tag{2.39}$$

Поскольку U — эрмитова матрица, ее можно диагонализировать с помощью унитарной матрицы B, приведя к виду $c_i\delta^i{}_j$. Заметим, что при этом не нарушается майорановское условие для

Q^{Ai}. Наконец, после преобразования $Q^i \to (1/\sqrt{c^i})Q^i$ матрице U можно придать форму $U = d_i\delta^i{}_j$, где $d_i = \pm 1$. В действительности, положив $A = B = 1$ и $i = j = k$, приходим к выводу, что правая часть соотношения (2.35) есть положительно определенный оператор, а так как энергия $-iP_0$ принимается положительной, то находим единственное значение $d_i = +1$. Окончательный результат имеет вид

$$\{Q^{Ai},\ Q^{\dot{B}}{}_j\} = -2i\delta^i{}_j\,(\sigma^m)^{A\dot{B}}\,P_m. \tag{2.40}$$

Замечание 4. Предположим, что суперзаряды Q принадлежат другому неприводимому представлению группы Лоренца, отличному от $(0,\ 1/2)\oplus(1/2,\ 0)$, например представлению $Q_{A_1 \ldots A_n,\ \dot{B}_1 \ldots \dot{B}_m}$, где индексы A и B следует понимать как симметризованные независимо. Для того чтобы суперзаряды Q были нечетными, число $n+m$ должно быть нечетным; кроме того, должно быть $n+m>1$. Выбирая подходящим образом компоненты антикоммутатора $\{Q,\ Q^\dagger\}$, можно найти антикоммутатор, включающий суперзаряды $Q_{A_1 \ldots A_n,\ \dot{B}_1 \ldots \dot{B}_m}$ и их эрмитовы сопряжения. Рассмотрим, в частности, антикоммутатор, содержащий суперзаряд $Q = Q_{11 \ldots 1,\ \dot{1}\dot{1} \ldots \dot{1}}$, который должен быть равен элементу со спином $n+m>1$. Но согласно теореме "no-go" Коулмена — Мандулы, в алгебре не может быть такого генератора, поэтому антикоммутатор должен быть равен нулю, т. е. $QQ^\dagger + Q^\dagger Q = 0$.

Предположив, что пространство, в котором действуют генераторы Q, имеет положительно определенную норму (например, пространство состояний на массовой поверхности), мы заключаем, что суперзаряды Q равны нулю. Но если $Q_{11 \ldots 1,\ \dot{1}\dot{1} \ldots \dot{1}}$ равны нулю, то $Q_{A_1 \ldots A_n,\ \dot{B}_1 \ldots \dot{B}_m}$ также равны нулю в силу лоренцевых свойств генераторов, и остается только одно возможное представление $(0,\ 1/2)\oplus(1/2,\ 0)$.

Хотя это обсуждение начиналось с группы Пуанкаре, можно было с тем же успехом исходить из конформной или (анти) деситтеровской группы и получить суперконформную или суперсимметричную (анти) деситтеровскую алгебру. Для полноты изложения приведем перестановочные соотношения этих алгебр. Суперконформная алгебра, которая содержит генераторы P_n, J_{mn}, D, K_n, $Q^{\alpha i}$ и $S^{\alpha i}$, наряду с перестановочными соотношениями из группы Пуанкаре определяется также следующими

соотношениями:

$$[J_{mn},\ P_k]=\eta_{nk}P_m-\eta_{mk}P_n,\quad [J_{mn},\ K_k]=\eta_{nk}K_m-\eta_{mk}K_n,$$
$$[D,\ P_k]=-P_K,\quad [D,\ K_K]=+K_K,$$
$$[P_m,\ K_n]=-2J_{mn}+2\eta_{mn}D,\quad [K_n,\ K_m]=0,\quad [P_n,\ P_m]=0,$$
$$[Q^{\alpha i},\ J_{mn}]=\tfrac{1}{2}(\gamma_{mn})^{\alpha}_{\beta}Q^{\beta i},\quad [S^{\alpha i},\ J_{mn}]=\tfrac{1}{2}(\gamma_{mn})^{\alpha}_{\beta}Q^{\beta i},$$
$$\{Q^{\alpha i},\ Q^{\beta j}\}=-2(\gamma^nC^{-1})^{\alpha\beta}P_n\delta^{ij},\quad \{S^{\alpha i},\ S^{\beta j}\}=+2(\gamma^nC^{-1})^{\alpha\beta}K_n\delta^{ij},$$
$$[Q^{\alpha i},\ D]=\tfrac{1}{2}Q^{\alpha i},\quad [S^{\alpha i},\ D]=-\tfrac{1}{2}S^{\alpha i},$$
$$[Q^{\alpha i},\ K_n]=-(\gamma_n)^{\alpha}_{\beta}S^{\beta i},\quad [S^{\alpha i},\ P_n]=(\gamma_n)^{\alpha}_{\beta}Q^{\beta i},\qquad (2.41)$$
$$[Q^{\alpha i},\ T_r]=(\delta^{\alpha}_{\beta}(\tau_{r_1})^{i}_{j}+(\gamma_5)^{\alpha}_{\beta}(\tau_{r_2})^{i}_{j})Q^{\beta j},$$
$$[S^{\alpha i},\ T_r]=(\delta^{\alpha}_{\beta}(\tau_{r_1})^{i}_{j}-(\gamma^5)^{\alpha}_{\beta}(\tau_{r_2})^{i}_{j})Q^{\beta j},$$
$$[Q^{\alpha i},\ A]=-i(\gamma_5)^{\alpha}_{\beta}Q^{\beta j}\frac{4-N}{4N},\quad [S^{\alpha i},\ A]=\frac{4-N}{4N}i(\gamma_5)^{\alpha}_{\beta}S^{\beta j},$$
$$\{Q^{\alpha i},\ S^{\beta j}\}=-2(C^{-1})^{\alpha\beta}D\delta^{ij}+(\gamma^{mn}C^{-1})^{\alpha\beta}J_{mn}\delta^{ij}+4i(\gamma_5C^{-1})^{\alpha\beta}A\delta^{ij}-$$
$$-2(\tau_{r_1})^{ij}(C^{-1})^{\alpha\beta}+((\tau_{r_2})^{ij}(\gamma_5C^{-1})^{\alpha\beta})T_r.$$

Генераторы T_r и A порождают группу $U(N)$, а $\tau_1+\gamma_5\tau_2$ принадлежат фундаментальному представлению группы $SU(N)$.

Антидеситтеровская супералгебра порождается генераторами M_{mn}, T_{ij} и $Q^{\alpha i}$ с перестановочными соотношениями

$$[M_{mn},\ M_{pq}]=\eta_{np}M_{mq}+3\text{ слагаемых},$$
$$[M_{mn},\ T_{ij}]=0,\quad [Q^{\alpha i},\ M_{mn}]=\tfrac{1}{2}(\gamma_{mn}C^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}Q^{\beta i},$$
$$[Q^{\alpha i},\ T^{jk}]=-2i(\delta^{ij}Q^{\alpha k}-\delta^{ik}Q^{\alpha j}),\qquad (2.42)$$
$$\{Q^{\alpha i},\ Q^{\beta j}\}=\delta^{ij}(\gamma_{mn}C^{-1})^{\alpha\beta}iM_{mn}+(C^{-1})^{\alpha\beta}T^{ij},$$
$$[T^{ij},\ T^{kl}]=-2i(\delta^{jk}T^{il}+3\text{ слагаемых}).$$

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОДХОДЫ К АЛГЕБРЕ СУПЕРСИММЕТРИИ

Несмотря на то что в гл. 2 алгебра суперсимметрии была представлена с точки зрения возможности нетривиальной связи группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии, априори ее можно получить по меньшей мере с помощью двух других подходов.

Может быть, наиболее интуитивный из них опирается на требование существования симметрии между фермионами и бозонами. Останавливаясь на таком подходе, предположим, что имеется представление симметрии, содержащее по крайней мере один скаляр A, только один спинор χ_α, а также другие бозонные поля. При этом необходимо иметь преобразование, связывающее поля A и χ_α.

Преобразование, связывающее скаляр A и фермион χ_α, если оно линейно, должно иметь вид

$$\delta A = \bar{\varepsilon}^\alpha \chi_\alpha. \tag{3.1}$$

Анализ размерности показывает, что параметр $\bar{\varepsilon}^\alpha$ должен иметь размерность $1/2$ [1]) и быть антикоммутирующим параметром, поскольку A и χ_α подчиняются статистикам Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака соответственно. Принимая во внимание размерные соображения, лоренцеву инвариантность и четность и предполагая линейность, заключаем, что преобразование имеет следующий вид:

$$\delta\chi_\alpha = (\gamma^a)_\alpha{}^\beta \partial_a A \varepsilon_\beta + \text{слагаемое, содержащее другие поля.} \tag{3.2}$$

Конечно, чтобы получить симметрию, недостаточно просто написать ряд преобразований; надо еще убедиться, что эти преобразования образуют замкнутую алгебру. Из уравнений (3.1) и (3.2) следует

$$[\delta_1, \delta_2] A = \bar{\varepsilon}_2 \gamma^a \varepsilon_1 \partial_a A - (1 \leftrightarrow 2) + \text{другие слагаемые.} \tag{3.3}$$

Следовательно, мы находим, что требование симметрии Ферми — Бозе (при условии линейной реализации) в результате различия размерностей бозонных и фермионных полей должно приводить к появлению пространственно-временных трансляций,

---

[1]) Далее в книге, где это необходимо, указывается показатель степени n для размерности каких-либо величин в единицах массы (т. е. $\text{см}^{-1/2}$ в единицах $\hbar = c = 1$). — *Прим. ред.*

а также частиц с другим спином. Читатель может убедиться, что действие коммутатора двух преобразований суперсимметрии на спинор χ_α в случае, когда учитывается только первое слагаемое правой части (3.2), не является простой трансляцией. Это отражает тот факт, что требуются дополнительные поля с нулевым спином, отличные от поля A. Такой подход можно довести до завершения, и читатель может познакомиться с построением модели Весса — Зумино и теории Янга — Миллса с $N = 1$ в гл. 5 и 6 соответственно.

Другой подход к суперсимметрии состоит в следующем: рассмотрим общую теорию поля и потребуем, чтобы она имела улучшенные свойства в ультрафиолетовой области (отсутствие расходимостей), что, как известно, является характерным признаком суперсимметричных теорий. Например, рассмотрим вакуумную энергию частицы массы m и спина j:

$$\frac{1}{2}(-1)^{2j}(2j+1)\int d^3k\sqrt{k^2+m_j^2}=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{2j}(2j+1)\int d^3k\sqrt{k^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_j^2}{k^2}-\left(\frac{m_j^2}{k^2}\right)^2+\ldots\right).$$

Потребовав, чтобы отсутствовали расходимости четвертой степени, квадратичная и логарифмическая, получим

$$\sum_j(-1)^{2j}(2j+1)=0,\quad \sum_j(-1)^{2j}(2j+1)m_j^2=0,$$

$$\sum_j(-1)^{2j}(2j+1)m_j^4=0.$$

Первое условие требует равенства чисел фермионных и бозонных степеней свободы, а два последних выполнены, если частицы имеют одинаковые массы. Это обстоятельство давно было замечено Паули.

Приняв простейшую из упомянутых возможностей, т. е. один майорановский фермион и два поля с нулевым спином, мы можем записать наиболее общее перенормируемое взаимодействие. Требование, чтобы эта теория, первоначально имеющая десять свободных параметров, имела только один параметр перенормировки волновой функции, накладывает ограничения на константы взаимодействия и массы. В действительности мы приходим к модели Весса — Зумино, рассмотренной в гл. 5; эта модель обладает очевидной суперсимметрией. Можно также потребовать, чтобы теория содержала частицы со спином 1/2 и 1, а также имела только одну бесконечную перенормировку волновой функции. При этом мы должны получить ($N = 1$)-теорию Янга — Миллса, которая рассматривается в гл. 6.

4. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СЛЕДСТВИЯ АЛГЕБРЫ СУПЕРСИММЕТРИИ

Суперзаряды $Q_\alpha{}^i$ принадлежат представлению группы Лоренца со спином 1/2 и, следовательно, действуя на состояние со спином j, образуют в результате состояние со спином $j \pm 1/2$. Таким образом, суперсимметрия есть симметрия, которая смешивает частицы разного спина, т. е. смешивает фермионы и бозоны. Структура суперсимметрии с Z_2-градуировкой является необходимым следствием того, что бозоны и фермионы подчиняются статистикам Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака соответственно, т. е. в классическом пределе бозонное поле A и фермионное поле χ_α удовлетворяют соотношениям

$$[A,\ A] = 0, \quad [A,\ \chi_\alpha] = 0,$$
$$\{\chi_\alpha,\ \chi_\beta\} \equiv \chi_\alpha \chi_\beta + \chi_\beta \chi_\alpha = 0. \tag{4.1}$$

Другими словами, для совместности с этими соотношениями необходимо, чтобы параметр суперсимметрии ε_α был антикоммутирующим.

Соотношение $[P_a,\ Q_\alpha{}^i] = 0$ приводит к равенству

$$[P_a{}^2,\ Q_\alpha{}^i] = 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, $P_a{}^2$ — оператор Казимира алгебры суперсимметрии, поэтому частицы в любом неприводимом представлении суперсимметрии имеют одну и ту же массу. Нет необходимости долго рассматривать таблицы частиц, чтобы понять, что подобное свойство не наблюдается в природе даже приблизительно. Одна из главных трудностей в применении суперсимметрии к исследованию природы элементарных частиц состоит в нахождении путей нарушения суперсимметрии при сохранении ее привлекательных черт и предсказательной силы.

Другое свойство алгебры суперсимметрии, которое приводит к далеко идущим последствиям, — неотрицательность энергии P_0. Чтобы это увидеть, умножим (2.21) на $C^{\delta\beta}$, что дает

$$\{Q_\alpha{}^i,\ \bar{Q}^{\beta j}\} = -2\delta^{ij} (\gamma^a P_a)_\alpha{}^\beta - \delta_\alpha{}^\beta U^{ij} - (\gamma_5)_\alpha{}^\beta V^{ij}. \tag{4.3}$$

Полагая $i = j$, умножая на γ^0 и вычисляя след по индексам i и дираковским индексам, находим

$$0 \leqslant -\sum_k \operatorname{Tr} [\{Q_\alpha{}^k,\ \bar{Q}^{\beta k}\} \gamma^0] = \sum_{\alpha,\ k} Q_\alpha{}^k (Q_\alpha{}^k)^\dagger + \text{эрмит. сопр.} =$$
$$= 2N \operatorname{Tr} (\gamma^0 \gamma^a P_a) = 8NP_0.$$

Следовательно,

$$P_0 \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Наконец, установим следующую очень полезную теорему.

Теорема. В любом представлении суперсимметрии, в котором P_a — обратимый оператор, имеется равное число фермионных и бозонных степеней свободы.

Доказательство. Разложим пространство представлений суперсимметрии на два набора — фермионный и бозонный и подействуем оператором $\{Q_\alpha{}^i, Q_\beta{}^j\}$ на бозонный набор. Действие

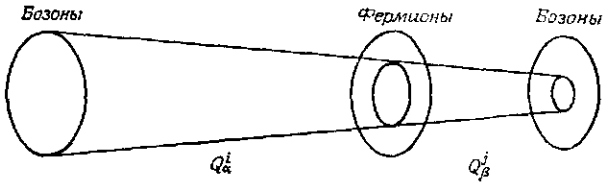

Рис. 4.1.

первых генераторов $Q_\alpha{}^i$ будет отображать бозоны на фермионный набор, а действие генераторов $Q_\beta{}^j$ будет отображать полученные фермионы обратно в бозонный набор (рис. 4.1).

Но если P_a — обратимый оператор, то антикоммутатор $\{Q_\alpha{}^i, Q_\beta{}^j\} = 2(\gamma_a C)_{\alpha\beta} P^a$ должен быть также обратимым и отображение с помощью каждого из операторов $Q_\alpha{}^i$ должно быть обратимым, поэтому мы должны иметь равное число бозонных и фермионных степеней свободы. (Строго говоря, необходимо рассматривать случай $\alpha = \beta = 1$ и $i = j = 1$.)

Эта теорема применима к представлениям как на массовой поверхности, так и вне ее, в которых $P_a = \partial_a$ — действительно обратимый оператор.

5. МОДЕЛЬ ВЕССА — ЗУМИНО

Изучение двумерных дуальных моделей [7] способствовало обнаружению Вессом и Зумино [3] первой четырехмерной модели, в которой было реализовано линейное представление группы суперсимметрии. В этой главе мы проследим возникновение суперсимметрии в соответствии с направлениями, намеченными в гл. 4, и рассмотрим модель Весса — Зумино, которая является простейшей моделью ($N = 1$)-суперсимметрии.

Предположим, что эта модель содержит один фермион χ_α, являющийся майорановским спинором, а именно

$$\chi_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{\chi}^\beta. \tag{5.1}$$

«На массовой поверхности», т. е. когда выполнено уравнение движения

$$\hat{\partial}\chi = \text{членам взаимодействия}, \tag{5.2}$$

поле χ_α имеет две степени свободы, или два состояния спиральности. Применяя сформулированное в предыдущей главе правило равенства числа фермионных и бозонных степеней свободы к состояниям, заданным на массовой поверхности, находим, что для реализации суперсимметрии следует добавить две бозонные степени свободы. Такие степени свободы могут быть либо у двух частиц с нулевым спином, либо у одной безмассовой векторной частицы, которая также имеет на массовой поверхности два состояния спиральности. Первую возможность мы рассмотрим в этой главе, а вторую, соответствующую ($N = 1$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса, проанализируем в гл. 6.

В гл. 8 мы покажем, что подобные рассуждения действительно корректны. Можно построить неприводимое представление ($N = 1$)-суперсимметрии либо с одним четным (скалярным) и одним нечетным (псевдоскалярным) состояниями с нулевыми спинами и майорановским состоянием со спином 1/2, либо с одним безмассовым состоянием со спином 1 и майорановским состоянием со спином 1/2.

Останавливаясь на первой возможности, имеем майорановский спинор χ_α и два состояния с нулевым спином, которые описываются скалярным полем A и псевдоскалярным полем B. Для простоты начнем с построения свободной теории; поля A, B

и χ_α тогда удовлетворяют уравнениям

$$\partial^2 A = \partial^2 B = \hat{\partial}\chi = 0. \tag{5.3}$$

Построим теперь преобразования суперсимметрии, задающие неприводимые представления группы симметрии. Поскольку выражение $\bar{\varepsilon}^\alpha Q_\alpha$ безразмерно, а Q_α в единицах массы имеет размерность $+1/2$, параметр $\bar{\varepsilon}^\alpha$ должен иметь размерность $-1/2$. На основании линейности теории, анализа размерности, а также из соображений лоренцевой инвариантности и четности можно записать следующие преобразования:

$$\delta A = \bar{\varepsilon} Q A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\chi, \quad \delta_\chi = \hat{\partial}(\alpha A + \beta i\gamma_5 B)\varepsilon, \tag{5.4}$$

где α и β — неизвестные коэффициенты.

Форма вариации поля A очевидна; появление же производной в вариации $\delta\chi$ — это единственный способ смешивания полей разной размерности, не выходящий за рамки линейных преобразований. Не составляет труда убедиться в том, что эти преобразования не изменяют полевых уравнений (5.3).

Можно проверить, образуют ли эти преобразования алгебру $(N = 1)$-суперсимметрии, введенную в гл. 2. Коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действующих на поле A, имеет вид

$$[\delta_1,\ \delta_2]\, A = [\bar{\varepsilon}_1 Q,\ \bar{\varepsilon}_2 Q]\, A, \tag{5.5}$$

или, после применения (2.27),

$$[\delta_1,\ \delta_2]\, A = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^a\varepsilon_1 P_a A = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^a\varepsilon_1\partial_a A,$$

так как

$$P_a = \partial_a. \tag{5.6}$$

С другой стороны, из преобразований суперсимметрии (5.4) следует

$$[\delta_1,\ \delta_2]\, A = \bar{\varepsilon}_2\hat{\partial}(\alpha A + i\gamma_5\beta B)\,\varepsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2) = 2\alpha\bar{\varepsilon}_2\hat{\partial}\varepsilon_1 A. \tag{5.7}$$

В последнем равенстве использованы свойства майорановских спиноров (см. приложение А), поэтому нет члена, содержащего поле B. Если $\alpha = +1$, то это действительно 4-трансляция, требуемая алгеброй. Следовательно, $\alpha = +1$. Вычисления для поля B аналогичны и дают $\beta = +1$. Действие коммутатора двух преобразований суперсимметрии на поле χ_α дает

$$\begin{aligned}
[\delta_{\varepsilon_1},\ \delta_{\varepsilon_2}]\,\chi &= \hat{\partial}\,[\bar{\varepsilon}_1\chi + i\gamma_5\bar{\varepsilon}_1 i\gamma_5\chi]\,\varepsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2) = \\
&= -\frac{1}{4}\,\bar{\varepsilon}_1\gamma^R\varepsilon_2\hat{\partial}\,[\gamma_R + i\gamma_5\gamma_R i\gamma_5]\,\chi - (1 \leftrightarrow 2) = \\
&= +\frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_2\gamma^a\varepsilon_1 2\hat{\partial}\gamma_a\chi = 2\bar{\varepsilon}_2\hat{\partial}\varepsilon_1\chi - \bar{\varepsilon}_2\gamma^a\varepsilon_1\gamma_a\hat{\partial}\chi.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

При вычислениях использовано преобразование Фирца (см. приложение А), а также свойства майорановских спиноров. Поле χ_α удовлетворяет уравнению движения $\hat{\partial}\chi = 0$; учитывая это, получаем окончательный ответ:

$$[\delta_1,\ \delta_2]\,\chi = 2\bar{\varepsilon}_2\hat{\partial}\varepsilon_1\chi, \tag{5.9}$$

который является следствием алгебры суперсимметрии. Читатель может без труда убедиться, что поля A, B и χ_α, заданные на массовой поверхности (т. е. $\partial^2 A = \partial^2 B = \hat{\partial}\chi = 0$), совместно с преобразованиями

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\chi, \quad \delta\chi = \hat{\partial}\,(A + i\gamma_5 B)\,\varepsilon \tag{5.10}$$

образуют представление полной алгебры суперсимметрии.

Пусть теперь поля A, B и χ_α не подчиняются более уравнениям движения. Лагранжиан, из которого следуют эти уравнения, имеет вид

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi. \tag{5.11}$$

Легко доказать, что действие $\int d^4x L$ действительно инвариантно относительно преобразований (5.10). Доказательство инвариантности *не требует использования уравнений движения*. Трудность, связанная с такой формулировкой, состоит в том, что если поля A, B и χ_α не удовлетворяют полевым уравнениям, то они не образуют представления алгебры суперсимметрии, о чем свидетельствует последний член в (5.8). Целесообразно ввести следующую терминологию. Неприводимое представление суперсимметрии, образуемое полями, удовлетворяющими уравнениям движения, будем называть *представлением на массовой поверхности*. Будем также употреблять выражение *лагранжиан физических полей*, если лагранжиан составлен из полей, образующих представление на массовой поверхности (т. е. не образующих представления вне ее), и инвариантен относительно преобразований суперсимметрии. При этом лагранжиан (5.11) — лагранжиан физических полей.

Поля A, B и χ_α не образуют представление суперсимметрии вне массовой поверхности, что можно видеть без каких-либо вычислений, поскольку они не удовлетворяют сформулированному выше правилу равенства числа фермионных и бозонных степеней свободы. Действительно, вне массовой поверхности поля A и B имеют две степени свободы, а поле χ_α — четыре. Ясно, что в зависимости от способа описания на массовой поверхности или вне ее представления суперсимметрии должны радикально изменяться.

Возможный выход из этого двойственного положения — добавление двух бозонных полей F и G, которые должны восстановить равенство фермионных и бозонных степеней свободы вне массовой поверхности. Эти дополнительные поля должны входить в лагранжиан так, чтобы не было новых состояний на массовой поверхности. Как следствие упомянутые поля должны появляться в лагранжиане в виде $+{}^1/_2F^2 + {}^1/_2G^2$, что предполагает билинейную форму свободного действия, и, следовательно, его размерность равна 2. Из соображений размерности следует, что преобразования суперсимметрии для этих полей имеют вид

$$\delta F = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi, \quad \delta G = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\chi, \tag{5.12}$$

причем подразумевается, что F и G — скаляр и псевдоскаляр соответственно. На основе анализа размерности поля F и G не содержатся в вариации δA (или δB), но вариация $\delta\chi_\alpha$ содержит их:

$$\delta\chi = [(\mu F + i\tau\gamma_5 G) + \hat{\partial}(A + i\gamma_5 B)]\,\varepsilon, \tag{5.13}$$

где μ и τ — безразмерные параметры.

Преобразования суперсимметрии можно изменить лишь таким образом, чтобы при переходе на массовую поверхность (т. е. когда $F = G = \hat{\partial}\chi = \partial^2 A = \partial^2 B = 0$) восстанавливались преобразования (5.10).

Теперь необходимо проверить, действительно ли эти новые законы преобразования образуют представление алгебры суперсимметрии. В самом деле, прямые вычисления показывают, что это так, если $\mu = \tau = +1$. Представление суперсимметрии, включающее поля A, B, χ_α, F и G, было найдено Вессом и Зумино [3]:

$$\begin{aligned} &\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\chi, \\ &\delta\chi = [F + i\gamma_5 G + \hat{\partial}(A + i\gamma_5 B)]\,\varepsilon, \\ &\delta F = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi, \quad \delta G = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\chi. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Действие, инвариантное относительно этих преобразований, имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 \right\}. \tag{5.15}$$

Как и ожидалось, поля F и G входят квадратично, без производных и, таким образом, не приводят к появлению новых состояний на массовой поверхности.

Приведенное выше построение модели Весса — Зумино типично для общей свободной суперсимметричной теории. Начиная с состояний на массовой поверхности, приведенных для любой модели в гл. 8, строим законы преобразования на массовой поверхности. Затем можно найти лагранжиан, инвариантный относительно преобразований вне массовой поверхности, но не содержащий вспомогательных полей. Далее пытаемся найти вспомогательные поля, приводящие к алгебре суперсимметрии вне массовой поверхности. После того как поля найдены, можно строить соответствующее действие вне массовой поверхности. В последующих главах обсуждаются способы построения нелинейных теорий из свободных теорий.

Первый из этих двух этапов построения (т. е. нахождение лагранжиана, инвариантного вне массовой поверхности) всегда возможен; но, за редким исключением, не существует определенного пути нахождения необходимых вспомогательных полей. Легко увидеть, что это является следствием нашего правила равенства чисел фермионных и бозонных степеней свободы в любом представлении суперсимметрии. Только состояния со спином нуль, представленные скалярами, имеют одинаковое число компонент поля на массовой поверхности и вне ее. Например, для фермиона со спином 1/2, представленного майорановским спинором χ_α, разность числа степеней свободы на массовой поверхности и вне ее равна 2, а для безмассового бозона со спином 1, представленного векторным полем A_μ, та же разность равна 1. В последнем случае важно вычесть одну калибровочную степень свободы; таким образом, вне массовой поверхности остаются 3 компоненты поля A_μ (см. гл. 6). Поскольку уход с массовой поверхности приводит к разному увеличению числа степеней свободы фермионов и бозонов, равенство, установленное для состояний массовой поверхности, нарушается вне ее. Необходимое равенство должно быть восстановлено введением полей, подобных F и G, которые не приводят к дополнительным состояниям на массовой поверхности. Эти последние поля называются *вспомогательными полями*. Вся проблема нахождения представлений суперсимметрии сводится к определению вспомогательных полей.

К сожалению, найти вспомогательные поля совсем не легко. Хотя правило равенства чисел фермионных и бозонных степеней свободы позволяет найти необходимое число вспомогательных полей, оно не говорит нам, какие эти поля и каковы их законы преобразования. Действительно, вспомогательные поля известны почти для всех $(N = 1, 2)$-суперсимметричных теорий

и для очень немногих ($N=4$)-теорий. Вспомогательные поля для теорий с более высокими N неизвестны. В частности, они неизвестны для ($N=8$)-супергравитации.

Теории, для которых вспомогательные поля неизвестны, могут тем не менее описываться так же, как модель Весса и Зумино, не содержащая вспомогательных полей F и G (5.11), а именно с помощью лагранжиана физических полей. Такие лагранжианы нетрудно построить по крайней мере в теории без взаимодействия. Как объяснено в гл. 8, легко найти соответствующие состояния на массовой поверхности. Затем остается только учесть известные кинетические члены для полей с разными спинами.

Конечно, в действительности нас интересует взаимодействие. Форма взаимодействий обычно определяется принципами симметрии, такими, как калибровочная инвариантность в вышеприведенном примере или общекоординатная инвариантность в случае теории тяготения. Когда форма взаимодействий диктуется локальной симметрией, существует прямой, хотя, возможно, очень длинный путь получения нелинейной теории из линейной. Этот метод, называемый нётеровской связью, описан в гл. 7. В том или ином виде такой метод вычислений используется для построения нелинейных «лагранжианов физических полей» для всех суперсимметричных теорий.

У читателя может возникнуть вопрос: удовлетворительны ли лагранжианы физических полей? Необходимы ли в действительности вспомогательные поля? Эти вопросы рассматриваются в гл. 6. Ниже приводится пример, который должен служить предупреждением против переоценки важности лагранжиана, инвариантного относительно преобразований, смешивающих фермиевские и бозевские поля, но не удовлетворяющих какой-либо определенной алгебре.

Рассмотрим лагранжиан

$$L=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2-\frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi, \tag{5.16}$$

которому соответствует действие, инвариантное относительно преобразований

$$\delta A=\bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta\chi=\hat{\partial}A\varepsilon. \tag{5.17}$$

Но эта теория не имеет ничего общего с суперсимметрией. Алгебра преобразований (5.17) не замкнута как на массовой поверхности, так и вне ее, если не учитывать дополнительных, порождаемых исходными преобразований, которые хотя и отражают инвариантность свободной теории, но не могут быть об-

общены на случай теории со взаимодействием. Действительно, на массовой поверхности нет даже равенства ферми- и бозе-состояний, необходимого для того, чтобы образовать неприводимое представление суперсимметрии. Этот пример показывает, что правомерность «лагранжианов физических полей» как суперсимметричных теорий основана на алгебре преобразований на массовой поверхности.

В качестве заключительного замечания в этой главе следует отметить, что проблема построения неприводимых представлений любой группы есть математическая задача, решение которой не зависит от динамической интерпретации физического контекста. Таким образом, вопрос о том, какие поля в заданном представлении суперсимметрии являются физическими, а какие вспомогательными, зависит от конкретной модели.

6. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ С $N = 1$: СУПЕР-КЭД [8]

Сначала для простоты рассмотрим абелеву калибровочную группу. Построение этой теории приводится по примеру модели Весса — Зумино, за исключением дополнительных трудностей, возникающих вследствие калибровочной инвариантности. Прежде всего надо найти неприводимое представление, задаваемое состояниями на массовой поверхности, которое содержит майорановский спинор λ_α и безмассовый вектор A_a. Поля λ_α и A_a удовлетворяют свободным уравнениям движения

$$\hat{\partial}\lambda = \partial^a f_{ab} = 0, \tag{6.1}$$

где

$$f_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a.$$

Калибровочное преобразование поля A_a имеет обычный вид

$$\delta A_a = \partial_a \Lambda, \tag{6.2}$$

в то время как

$$\delta\lambda = 0. \tag{6.3}$$

В результате майорановского условия поле λ не может быть заряженным.

Основываясь на соображениях размерности и лоренцевой инвариантности, получаем наиболее общие преобразования, связывающие A_a и λ:

$$\delta A_a = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda, \tag{6.4}$$

$$\delta\lambda = (\alpha\sigma^{ab} f_{ab} + \beta\,\partial_a A^a)\,\varepsilon, \tag{6.5}$$

где α и β — постоянные. При этом требуем, чтобы преобразования суперсимметрии (6.4) и (6.5) и калибровочные преобразования образовывали замкнутую алгебру. Коммутатор преобразования суперсимметрии и калибровочного преобразования, действующих на поле λ, есть

$$[\delta_\Lambda,\ \delta_\varepsilon]\,\lambda = \delta_\Lambda\,(\alpha\sigma^{ab} f_{ab} + \beta\,\partial_a A^a)\,\varepsilon = \beta\partial_a\,\partial^a\Lambda\varepsilon. \tag{6.6}$$

Поскольку выражение в правой части (6.6) не является ни одним из рассматриваемых преобразований, необходимо положить $\beta = 0$.

Коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действующих на поле A_a, равен

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] A_a = \bar{\varepsilon}_2 \gamma_a (\alpha \sigma^{cd} f_{cd} \varepsilon_1) - (1 \leftrightarrow 2) = -4\bar{\varepsilon}_2 \hat{\partial} \varepsilon_1 \alpha A_a + 2\partial_a (2\alpha \bar{\varepsilon}_2 \hat{A} \varepsilon_1). \tag{6.7}$$

Для получения трансляции поля A_μ, существование которой следует из алгебры суперсимметрии, необходимо выбрать $\alpha = -1/2$. Заметим, однако, что в этом случае мы получаем не только трансляцию, но также и калибровочное преобразование. Такова общая черта всех суперсимметричных калибровочных теорий, являющаяся следствием выбора калибровки (см. гл. 11).

Читатель может проверить замкнутость преобразований суперсимметрии поля λ, удовлетворяющего уравнению движения $\hat{\partial}\lambda = 0$. Таким образом, преобразования

$$\delta A_a = \bar{\varepsilon} \gamma_a \lambda, \quad \delta\lambda = -\frac{1}{2} \sigma^{cd} f_{cd} \varepsilon \tag{6.8}$$

образуют неприводимое представление суперсимметрии и оставляют инвариантными уравнения, которым удовлетворяют поля A_a и λ.

Действие, инвариантное относительно этих преобразований, имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (f_{ab})^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \hat{\partial} \lambda \right\}. \tag{6.9}$$

Найдем теперь преобразования суперсимметрии вне массовой поверхности, другими словами, для полей, не удовлетворяющих уравнениям движения. Снова наше правило равенства чисел фермионных и бозонных степеней свободы требует добавления полей. Но из выражения (6.7) видно, что коммутатор двух преобразований суперсимметрии содержит как калибровочное преобразование, так и трансляцию. Следовательно, можно без опасений применять теорему из гл. 3 только к калибровочно-инвариантным состояниям, поскольку для этих состояний $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} P^\mu$. Поле A_a имеет 3 степени свободы вне массовой поверхности (4 минус 1 калибровочная степень свободы). С другой стороны, поле λ_α имеет 4 степени свободы. Простейшая возможность — добавить одно вспомогательное поле D, размерность которого 2. Наиболее общие преобразования (в предположении, что D — псевдоскаляр), которые на мас-

совой поверхности сводятся к преобразованиям (6.8), имеют вид

$$\delta A_a = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda, \quad \delta\lambda = \left(-\frac{1}{2}\sigma^{cd}f_{cd} + ia\gamma_5 D\right)\varepsilon, \quad \delta D = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\lambda. \tag{6.10}$$

Замкнутость алгебры требует, чтобы $a = +1$, и подтверждает правильность выбора вспомогательного псевдоскалярного поля D.

Инвариантное действие дается выражением

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(f_{cd})^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\hat{\partial}\lambda + \frac{1}{2}D^2 \right\}. \tag{6.11}$$

7. ТЕОРИЯ ЯНГА — МИЛЛСА С $N = 1$ И МЕТОД НЁТЕР

Любая нелинейная теория, вид которой определяется калибровочным принципом, может быть построена с помощью метода Нётер [1]. Поскольку нётеровский метод важен для построения теорий супергравитации, воспользуемся случаем и проиллюстрируем использование его в рамках более простой суперсимметричной теории Янга — Миллса [10].

Начнем с построения собственно теории Янга — Миллса из линеаризованной (свободной) теории. Свободная теория инвариантна относительно двух различных преобразований: глобальных и абелевых локальных. Глобальные преобразования порождаются группой S с генераторами R_i, удовлетворяющими соотношениям

$$[R_i,\ R_j] = s_{ijk}R_k. \tag{7.1}$$

Структурные константы s_{ijk} можно выбрать полностью антисимметричными. В результате действия этих преобразований векторные поля $A_a{}^i$ преобразуются следующим образом:

$$\delta A_a{}^i = s^{ijk}T_j A_a{}^k, \tag{7.2}$$

где T_j — инфинитезимальные параметры группы. Другой тип преобразований — локальные абелевы преобразования

$$\delta A_a{}^i = \partial_a \Lambda^i. \tag{7.3}$$

Очевидно, что оба этих вида преобразований вместе образуют замкнутую алгебру [2]. Линеаризованная теория, инвариантная относительно преобразований (7.2) и (7.3), определяется действием

$$\mathring{\mathrm{A}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} f^i_{ab} f^i_{ab} \right\},$$

где

$$f^i_{ab} = \partial_a A_b{}^i - \partial_b A_a{}^i. \tag{7.4}$$

Нелинейная теория строится в результате выполнения ряда операций, первая из которых — замена глобального преобразо-

[1] Обсуждение процедуры Нётер в контексте теории супергравитации см. в работе [9].

[2] В частности, можно показать, что $[\delta_\Lambda,\ \delta_T] A_a{}^i = \partial_a (s^{ijk}T_j\Lambda_k)$.

вания локальным, т. е. $T_j = T_j(x)$. Теперь действие $\mathring{A}$ более не инвариантно относительно преобразований

$$\delta A_a{}^i = s^{ijk} T_j(x)\, A_{ak}, \tag{7.5}$$

но его вариация может быть записана в виде

$$\delta \mathring{A} = \int d^4x \{(\partial_a T_k(x))\, j^a{}_k\}, \tag{7.6}$$

где

$$j^a{}_k = -s_{klj} A_b{}^l f_j^{ab}. \tag{7.7}$$

Рассмотрим тем не менее действие A_1, которое имеет вид

$$A_1 = \mathring{A} - \frac{1}{2} g \int d^4x\, (A_{ai} j^{ai}), \tag{7.8}$$

где g — константа калибровочного взаимодействия. Оно инвариантно *с точностью до членов порядка* g^0 относительно комбинированного преобразования, составленного из преобразований $T_i(x)$ и $\Lambda_i(x)$, причем $\Lambda_i(x) = (1/g) T_i(x)$. Таким образом, первоначально независимые локальное и глобальное преобразования линейной теории связаны в единое локальное преобразование:

$$\delta A_a{}^i = \frac{1}{g} \partial_a T^i(x) + s^{ijk} T_j(x)\, A_a{}^k(x). \tag{7.9}$$

Первый член в преобразовании $\delta A_a{}^i$ дает как раз такой вклад в последнее слагаемое действия A_1, который уничтожает нежелательную вариацию действия $\mathring{A}$.

Продолжим процесс последовательных приближений для лагранжиана и преобразований, учитывая все более высокие члены разложения по параметру g, пока не получим инвариантный лагранжиан.

Вариация действия A_1 при преобразовании (7.9) имеет порядок g и равна

$$\delta A_1 = \int d^4x \{-g\, (A_a{}^i A_b{}^j s_{kij})\, (A_b^l \partial_a T^m s_{klm})\}. \tag{7.10}$$

Действие, инвариантное с точностью до членов порядка g^2, имеет вид

$$A_2 = A_1 + \int d^4x \frac{g^2}{4} (A_a{}^i A_b{}^j s_{kij})\, (A^{bl} A^{am} s_{klm}) = -\frac{1}{4} \int d^4x\, (F_{ab}{}^i)^2, \tag{7.11}$$

где

$$F_{ab}{}^i = \partial_a A_b{}^i - \partial_b A_a{}^i - g s^{ijk} A_a{}^j A_b{}^k. \tag{7.12}$$

Действие A_2 инвариантно относительно преобразований (7.9) во всех порядках разложения по константе g и, таким образом,

представляет собой окончательный ответ. Это, конечно, хорошо известное действие теории Янга — Миллса. Коммутатор двух преобразований полей $A_a{}^i$ имеет вид

$$[\delta_{T_1},\ \delta_{T_2}]\, A_a{}^i = s^{ijk} T_{2j} \left(\frac{1}{g} \partial_a T_{1k} + s_{klm} T_1{}^l A_a{}^m \right) - (1 \leftrightarrow 2) =$$

$$= \frac{1}{g} \partial_a T_{1\,2}{}^i + s^{ijk} T_{1\,2\,j} A_{ak}, \qquad (7.13)$$

где

$$T_{1\,2\,i} = s^{ijk} T_{2j} T_{1k},$$

таким образом, преобразования образуют замкнутую алгебру.

Для супергравитации и других локальных теорий процедура аналогична, хотя и более сложна. Существенные этапы продвижения состоят в переходе от глобальных преобразований к локальным и далее в последовательных приближениях все более высокого порядка по соответствующей константе калибровочного взаимодействия для нахождения инвариантных лагранжианов. Конечный результат получается, как правило, после добавления необходимых слагаемых не только в действие, но также и в законы преобразования полей. В последнем случае следует проверять замкнутость алгебры на каждом этапе разложения по константе калибровочного взаимодействия.

Несмотря на то, что можно использовать нётеровскую процедуру, опирающуюся на существование действия, применим также нётеровский метод, в котором используются только законы преобразования. Этот нётеровский метод для теории Янга — Миллса применяется следующим образом: заменяя глобальные преобразования локальными, подобно тому как это сделано в (7.5), найдем, что алгебра теперь не замкнута, т. е.

$$[\delta_\Lambda,\ \delta_T]\, A_a{}^i = \partial_a (s^{ijk} (T_j \Lambda_k)) - s^{ijk} (\partial_a T_j)\, \Lambda_k. \qquad (7.14)$$

Преодолеть эту трудность можно, комбинируя одновременно два преобразования, как было объяснено выше. Используя новое преобразование (7.9) для полей $A_a{}^i$, необходимо проверить замкнутость алгебры с точностью до членов порядка g^0. В действительности в данном случае замкнутость имеется во всех порядках разложения по константе g, и, таким образом, процесс вычислений заканчивается. Но в общем случае следует проверять замкнутость алгебры последовательно для каждого порядка разложения по константе взаимодействия, модифицируя в каждом порядке законы преобразования и соотношения, дающие условия замкнутости алгебры. Полный набор преобразований позволяет без труда найти окончательное действие, если оно существует.

Вернемся к суперсимметричной теории Янга — Миллса. Линеаризованная теория рассмотрена в гл. 6, посвященной супер-КЭД. Глобальные T_i и локальные $\Lambda^i(x)$ преобразования полей $A_a{}^i$, λ^i, D^i имеют следующий вид:

$$\delta A_a{}^i = s^{ijk}T_j A_{ak}, \quad \delta\lambda^i = s^{ijk}T_j\lambda_k, \quad \delta D^i = s^{ijk}T^j D^k; \tag{7.15}$$

$$\delta A_a{}^i = \partial_a \Lambda^i, \quad \delta D^i = 0, \quad \delta\lambda^i = 0. \tag{7.16}$$

Преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\delta A_a{}^i = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda^i, \quad \delta\lambda^i = -\frac{1}{2}\sigma^{cd}f_{cd}^i\varepsilon + i\gamma_5 D^i\varepsilon, \quad \delta D^i = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\lambda^i. \tag{7.17}$$

Эти преобразования образуют замкнутую алгебру и оставляют инвариантным следующий лагранжиан невзаимодействующих полей:

$$L = -\frac{1}{4}(f_{cd}^i)^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^i\hat{\partial}\lambda_i + \frac{1}{2}D_i^2. \tag{7.18}$$

Воспользуемся нётеровским методом для нахождения нелинейной теории. Заменяя глобальное преобразование полей $A_a{}^i$ локальным, необходимо, как и в случае теории Янга — Миллса, связать два типа преобразований вместе (т. е. $\Lambda^i(x) = (1/g)T^i(x)$), чтобы получить замыкание алгебры калибровочных преобразований $A_a{}^i$. Замыкание упомянутых преобразований и преобразований суперсимметрии означает, что глобальные преобразования полей λ^i и D^i также становятся локальными. Это частное замыкание требует также, чтобы все преобразования суперсимметрии модифицировались за счет включения ковариантных величин. Например, для коммутатора преобразований, действующих на поля D^i, находим

$$[\delta_T,\ \delta_\varepsilon]\, D^i = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^a s^{ijk}(\partial_a T_j)\,\lambda_k; \tag{7.19}$$

в результате имеем, что в выражении для вариации δD^i (7.17) необходимо заменить $\partial_a\lambda^i$ на $\mathscr{D}_a\lambda^i = \partial_a\lambda^i - gs^{ijk}A_{aj}\lambda_k$. Тогда коммутатор $[\delta_\Lambda,\ \delta_\varepsilon]$ равен нулю во всех порядках по константе g. Преобразования суперсимметрии принимают вид

$$\delta A_a{}^i = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda^i, \quad \delta\lambda^i = \left(-\frac{1}{2}\sigma^{cd}F_{cd}{}^i + i\gamma_5 D^i\right)\varepsilon, \quad \delta D^i = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\mathscr{D}\hat{\lambda}^i, \tag{7.20}$$

где

$$F_{ab}{}^i = \partial_a A_b{}^i - \partial_b A_a{}^i - gs^{ijk}A_a{}^j A_b{}^k.$$

Теперь необходимо убедиться в замкнутости этих преобразований суперсимметрии. Для других суперсимметричных калибровочных теорий следует добавить дополнительные члены, восстанавливающие замкнутость. Но в данном случае калибровоч-

ная инвариантность и анализ размерности гарантируют, что членов, которые можно было бы добавить к преобразованиям суперсимметрии, не существует и, следовательно, преобразования (7.20) должны быть полной системой преобразований этой теории. Читатель может убедиться во внутренней согласованности теории, проверив, что алгебра в самом деле замкнута.

Действие, инвариантное относительно этих преобразований, имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (F_{ab}{}^{l})^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^i \hat{\mathcal{D}} \lambda_i + \frac{1}{2} D_l{}^2 \right\}. \qquad (7.21)$$

Нётеровскую процедуру можно также применить к действию. В этом случае калибровочная инвариантность означает, что действие определяется выражением (7.21). Требование, чтобы калибровочно-инвариантное действие было суперсимметричным, приводит к модификации преобразований суперсимметрии, которые в конечном итоге имеют вид (7.20).

8. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ СУПЕРСИММЕТРИИ [11]

В этой главе мы построим неприводимые представления группы суперсимметрии, или, другими словами, узнаем, какие частицы могут описываться суперсимметричными теориями. Как хорошо известно, неприводимые представления группы Пуанкаре были получены с помощью метода индуцированных представлений Вигнера [12]. Этот метод состоит в нахождении представления подгруппы группы Пуанкаре и в применении к нему преобразований Лоренца, дающих в результате представление полной группы. На практике применяют следующий способ. Выбирают некоторый импульс q^μ, удовлетворяющий уравнению $P_\mu{}^2 = 0$ или $P_\mu{}^2 = -m^2$ в зависимости от рассматриваемого случая. Находят подгруппу H, относительно действия которой импульс q^μ инвариантен, и строят представление H на состояниях $|q^\mu\rangle$. Затем обычным образом с помощью метода индуцирования получают представление полной группы Пуанкаре. При таком построении имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами фактор-пространства P/H и 4-импульсом, удовлетворяющим уравнению $P_\mu{}^2 = 0$ или $P_\mu{}^2 = -m^2$. Можно показать, что построенное представление не зависит от выбора первоначального импульса q^μ.

В дальнейшем мы не станем обсуждать неприводимые представления в общем случае, а только те из них, которые относятся к покоящейся системе, т. е. представления группы H на состояниях, отвечающих системе покоя. При этом мы не допустим ошибки, так как представления группы Пуанкаре P индуцируются представлениями подгруппы H, образованными из состояний системы покоя; причем любое неприводимое представление группы Пуанкаре однозначно индуцируется из соответствующего неприводимого представления подгруппы H.

Эта процедура построения представлений имеет простую физическую интерпретацию, а именно свойства частицы полностью определяются ее поведением в данной системе отсчета (т. е. для данного q^μ). Из представления с данным q^μ образуется общее представление, если перейти с помощью преобразований Лоренца к движущейся системе отсчета или поместить наблюдателя в эту систему.

Метод индуцированных представлений, кратко изложенный выше для группы Пуанкаре, можно обобщить для любой груп-

пы вида $S \otimes T$, где символ $\otimes$ обозначает полупрямое произведение групп S и T, T — абелева группа. Метод применим также для группы суперсимметрии, и мы примем как само собой разумеющееся, что приведенная процедура построения корректна и действительно дает все неприводимые представления группы суперсимметрии.

Рассмотрим сначала безмассовый случай $q_\mu q^\mu = 0$, для которого выберем стандартный импульс в «системе покоя» $q^\mu{}_s = (m, 0, 0, m)$. Теперь нужно найти элементы группы H, относительно действия которых импульс $q^\mu{}_s = (m, 0, 0, m)$ инвариантен. Очевидно, эта подгруппа содержит $Q_\alpha{}^i$, P_μ и T_s, так как все эти генераторы коммутируют с P_μ и, следовательно, преобразуют состояния с определенными $q^\mu{}_s$ друг в друга. В безмассовом случае пренебрегаем центральными зарядами.

При преобразованиях группы Лоренца действие генератора $^1/_2\Lambda^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ порождает инфинитезимальное преобразование $q^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu + q^\mu$. Следовательно, импульс $q^\mu{}_s$ остается неизменным, если параметры преобразования удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_{30} = 0, \quad \Lambda_{10} + \Lambda_{13} = 0, \quad \Lambda_{20} + \Lambda_{23} = 0. \tag{8.1}$$

Таким образом, лоренцевы генераторы группы H имеют вид

$$T_1 = J_{10} + J_{13}, \quad T_2 = J_{20} + J_{23}, \quad J = J_{12}. \tag{8.2}$$

Эти генераторы образуют алгебру

$$[T_1, J] = -T_2, \quad [T_2, J] = +T_1, \quad [T_1, T_2] = 0. \tag{8.3}$$

Читатель может узнать в соотношениях (8.3) алгебру Ли группы E_2, т. е. группы трансляций и вращений в двумерной плоскости.

Напомним, что генераторы T_1 и T_2 для конечномерного унитарного представления группы E_2 могут быть только тривиальными:

$$T_1 | q^\mu{}_s \rangle = T_2 | q^\mu{}_s \rangle = 0. \tag{8.4}$$

Это следует из теоремы, согласно которой все нетривиальные унитарные представления некомпактных групп бесконечномерны. Нас будут интересовать только конечномерные представления подгруппы H.

В результате для безмассовых частиц представления подгруппы H группы Пуанкаре следуют из представлений группы E_2, поэтому они находятся с помощью единственного генератора J. Выберем состояния таким образом, что

$$J | \lambda \rangle = i\lambda | \lambda \rangle \tag{8.5}$$

(считаем генераторы антиэрмитовыми). В самом деле, J — оператор спиральности, поэтому выбираем λ целым или полуцелым (т. е. при $q=(0,0,0,m)$ имеем $J=\mathbf{q}\times\mathbf{J}/|\mathbf{q}|$, где $J_i=\varepsilon_{ijk}J_{jk}$, $i, j, k=1, 2, 3$).

Рассмотрим теперь действие суперзарядов $Q_\alpha{}^i$ на состояние системы покоя $|q^\mu{}_s\rangle$. Вычисления проще производить в двухкомпонентном формализме алгебры суперсимметрии (2.23). В системе покоя имеем

$$\{Q^{Ai},\ Q^{\dot B}{}_j\}=-2\delta^i_j(\sigma_\mu)^{A\dot B}q^\mu{}_s=-2\delta^i_j(\sigma_0+\sigma_3)^{A\dot B}m=$$
$$=+4m\delta^i_j\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^{A\dot B}. \tag{8.6}$$

В частности, отсюда следуют соотношения

$$\{Q^{1i},\ Q^j{}_j\}=0,\quad \{Q^{2i},\ Q^{\dot 2}{}_j\}=4m\delta^i{}_j,$$
$$\{Q^{\dot 1}{}_i,\ Q^{2j}\}=\{Q^{\dot 1}{}_i,\ Q^{2j}\}=0. \tag{8.7}$$

Из первого соотношения следует

$$\langle q^\mu_s|\,(Q^{1i}(Q^{1i})^*+(Q^{1i})^*Q^{\dot 1i})\,|q^\mu{}_s\rangle=0. \tag{8.8}$$

Требование, чтобы норма физических состояний была положительно определена, дает

$$Q_2{}^i\,|q^\mu{}_s\rangle=Q_{\dot 2i}\,|q^\mu{}_s\rangle=0. \tag{8.9}$$

Следовательно, все генераторы группы H, кроме J, T_s, P_μ, $Q_1{}^i$ и $Q_{\dot 1i}$, действуя на состояния системы покоя, дают нулевой результат. Используя (2.23), находим

$$[Q_1{}^i,\ J]=\frac{1}{2}(\sigma_{12})_1{}^1Q_1{}^i=-\frac{i}{2}Q_1{}^i. \tag{8.10}$$

Аналогично для комплексно-сопряженного выражения имеем

$$[(Q_1{}^i)^*,\ J]=+\frac{i}{2}(Q_1{}^i)^*. \tag{8.11}$$

Соотношения между остальными генераторами (8.7), (8.10), (8.11) и (2.24) позволяют в итоге утверждать, что $Q_1{}^i$ и $(Q_1{}^i)^*$ образуют алгебру Клиффорда операторов рождения и уничтожения (увеличивая или уменьшая спиральность состояния на 1/2) и преобразуются по представлениям N и $\bar N$ группы $SU(N)$.

Найдем представления этой алгебры обычным образом. Выберем состояние с данной максимальной спиральностью, например λ, и пусть оно будет вакуумным состоянием для оператора

$(Q_1{}^i)$, т. е.

$$(Q_1{}^i)\,|\,\lambda\rangle = 0, \quad J\,|\,\lambda\rangle = i\lambda\,|\,\lambda\rangle. \tag{8.12}$$

Тогда состояния этого представления имеют вид

$$|\,\lambda\rangle = |\,\lambda\rangle, \quad |\,\lambda - 1/2,\ i\rangle = (Q_1{}^i)^*\,|\,\lambda\rangle,$$
$$|\,\lambda - 1,\ [ij]\,\rangle = (Q_1{}^i)^*\,(Q_1{}^j)^*\,|\,\lambda\rangle \tag{8.13}$$

и т. д. Такие состояния имеют указанные спиральности и принадлежат антисимметричному представлению $[ijk...]$ группы $SU(N)$. Ряд оборвется после значения спиральности, равного $\lambda - (N/2)$, поскольку следующее состояние антисимметрично по отношению к перестановкам $N+1$ индексов [1]). Значения спиральности меняются от λ до $\lambda - (N/2)$, и имеется $N!/(m!\,(N - m)!)$ состояний со спиральностью $\lambda - (m/2)$.

Для получения ряда состояний, отвечающих частицам со спиральностями обоих знаков, необходимо добавить к множеству представлений, рассмотренному выше, такие, для которых значение спиральности меняется от $-\lambda$ до $-\lambda + (N/2)$. Исключения составляют так называемые CPT-самосопряженные наборы состояний, которые содержат состояния со спиральностями обоих знаков.

Представления полной группы суперсимметрии получаются с помощью лоренцевых преобразований упомянутых выше состояний в соответствии с методом индуцированных представлений Вигнера.

Следовательно, безмассовое неприводимое представление $(N = 1)$-суперсимметрии содержит лишь два состояния со спиральностями λ и $\lambda - 1/2$:

$$|\,\lambda\rangle, \quad \left|\,\lambda - \frac{1}{2}\right\rangle = (Q_1)^*\,|\,\lambda\rangle. \tag{8.14}$$

Так как выполняется равенство

$$Q_1^* Q_1^*\,|\,\lambda\rangle = 0, \tag{8.15}$$

то других состояний нет.

Для получения CPT-инвариантной теории необходимо добавить состояния с противоположными спиральностями, т. е. $-\lambda$ и $-\lambda + 1/2$ (операция CPT обращает знак спиральности). Например, если $\lambda = 1/2$, то на массовой поверхности имеем состояния со спиральностями 0 и 1/2, а также их CPT-сопряженные состояния со спиральностями $-1/2$, 0, что дает теорию, состоящую из двух бесспиновых и одной майорановской час-

[1]) Поскольку имеется только N значений спиральности, состояние со значением, отличным от данных, нулевое.

тицы со спином 1/2. Если же $\lambda = 2$, то на массовой поверхности получаем состояния со спиральностями 3/2 и 2 и их CPT-сопряженные состояния со спиральностями $-3/2$ и -2. Это дает теорию, содержащую одну частицу спина 2 и одну частицу спина 3/2. Указанные теории соответствуют модели Весса — Зумино и $(N = 1)$-супергравитации. Ниже при детальном обсуждении представлений суперсимметрии будет дано полное описание этих теорий.

Для $N = 4$ и $\lambda = 1$ получаем безмассовые состояния

$$|1\rangle,\ \left|\frac{1}{2}, i\right\rangle,\ |0, [ij]\rangle,\ \left|-\frac{1}{2}, [ijk]\right\rangle,\ |-1, [ijkl]\rangle. \quad (8.16)$$

Имеем CPT-самосопряженную теорию, содержащую частицу со спином 1, четыре частицы со спином 1/2 и шесть бесспиновых частиц.

В табл. 8.1 приведена мультиплетность безмассовых неприводимых представлений, имеющих максимальную спиральность 1 или меньше. Мы видим, что с ростом N число состояний с данным спином (мультиплетность) и число различных

Таблица 8.1. **Мультиплетности безмассовых неприводимых представлений с максимальной спиральностью 1 или меньше**

Спин \ N	1	1	2	2	4
1	—	1	1	—	1
1/2	1	1	2	2	4
0	2	—	2	4	6

спинов увеличиваются. Простейшим теориям отвечает $N = 1$. Первая из них, приведенная в первом столбце таблицы, — модель Весса — Зумино; во втором столбце представлена $(N = 1)$-суперсимметричная теория Янга — Миллса. Эта последняя содержит две частицы со спинами 1 и 1/2 в соответствии с формулой для наименьшей спиральности $\lambda - (N/2)$, которая в данном случае дает $1 - 1/2 = 1/2$. Мультиплет с $N = 4$ является CPT-самосопряженным, так как в этом случае имеем $\lambda - (N/2) = 1 - 4/2 = -1$. Таблица заканчивается значением $N = 4$, поскольку для $N > 4$ теория должна содержать частицы со спином больше 1 (очевидно, $N > 4$ означает, что $\lambda - (N/2) = 1 - (N/2) < -1$). Все это ведет к хорошо известному утверждению, что $(N = 4)$-суперсимметричная теория представляет собой максимально расширенную теорию Янга — Миллса.

Содержание безмассовых представлений (на массовой поверхности) с максимальной спиральностью 2 приведено в табл. 8.2.

$(N=1)$-супергравитация содержит только гравитон, спин которого равен 2, и гравитино со спином 3/2. Ее часто называют простой теорией супергравитации. Для $(N=8)$-супергравитации имеем $\lambda-(N/2)=2-8/2=-2$. Следовательно, это CPT-самосопряженная теория, содержащая частицы со всеми спинами

Таблица 8.2. **Мультиплетность безмассовых представлений на массовой поверхности с максимальной спиральностью 2**

Спин \ N	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3/2	1	2	3	4	5	6	8	8
1		1	3	6	10	16	28	28
1/2			1	4	11	26	56	56
0				2	5	30	70	70

от 2 до 0. Очевидно, что в теориях, для которых $N>8$, появляются частицы со спином больше 2. Таким образом, теория с $N=8$ является максимально расширенной теорией супергравитации.

Утверждается, что эта теория действительно является наибольшей возможной (по числу N) теорией супергравитации. Подобное утверждение покоится на широко распространенном мнении, что построить непротиворечивую теорию взаимодействия частиц спина 5/2 с другими частицами невозможно.

Рассмотрим теперь массивное неприводимое представление суперсимметрии. В качестве фиксированного импульса в системе покоя выберем

$$q^{\mu}{}_{s}=(m,\ 0,\ 0,\ 0). \tag{8.17}$$

Соответствующая малая группа порождается генераторами

$$P_m,\ Q^{\alpha i},\ T^{r},\ Z_1{}^{ij},\ Z_2{}^{ij},\ J_m\equiv\frac{1}{2}e_{mnr}J^{nr}, \tag{8.18}$$

где $m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3$. Генераторы J_m порождают группу $SU(2)$. Предположим сначала, что центральные заряды нулевые.

Суперзаряды, действующие на состояния покоя, удовлетворяют алгебре

$$\{Q^{Ai},\ (Q^{Bj})^{*}\}=2\delta^{A}{}_{B}\delta^{i}{}_{j}m,\quad \{Q^{Ai},\ Q^{Bj}\}=0. \tag{8.19}$$

Генераторы T^r соответствуют группе $U(N)$, а генераторы $SU(2)$-вращений удовлетворяют соотношениям

$$[J_m,\ J_n]=\varepsilon_{mnr}J_r,\quad [Q^{Ai},\ J_m]=i(\sigma_m)^A{}_BQ^{Bi}, \tag{8.20}$$

где (σ_m) — матрицы Паули. Заметим, что в группе $SU(2)$ нет различия между спинором $Q^{\dot Ai}$ и спинором Q_{Ai}.

Мы видим, что в отличие от безмассового случая ни один из суперзарядов не обращается в нуль тождественно, так что клиффордова алгебра, которую они образуют, содержит $4N$ элементов, т. е. вдвое больше, чем в безмассовом случае. Единственное неприводимое представление алгебры Клиффорда находится обычным образом. Рассмотрим клиффордов вакуум $|q^\mu{}_s\rangle$, определяемый условием

$$Q_A{}^i\,|q^\mu{}_s\rangle=0,\quad \forall=A,\ i. \tag{8.21}$$

Тогда представление алгебры задано на состояниях

$$|q^\mu{}_s\rangle,\quad (Q_A{}^i)^*\,|q^\mu{}_s\rangle,\quad (Q_A{}^i)^*(Q_B{}^j)^*\,|q^\mu{}_s\rangle,\ \ldots. \tag{8.22}$$

Вследствие антикоммутационных свойств генераторов $(Q_A{}^i)^*$ этот ряд обрывается после члена, содержащего $2N$ генераторов Q^*.

Структура приведенного выше представления не очень ясна, так как не очевидно, как много частиц данного спина оно содержит.

Значительно проще получить свойства алгебры Клиффорда, определив эрмитовы генераторы

$$\Gamma^i_{2A-1}=\frac{1}{2m}(Q^{Ai}+(Q^{Ai})^*),\quad \Gamma^i_{2A}=\frac{i}{2m}(Q^{Ai}-(Q^{Ai})^*), \tag{8.23}$$

где

$$\Gamma_p{}^i=(\Gamma_1{}^i,\ \Gamma_2{}^i,\ \Gamma_3{}^i,\ \Gamma_4{}^i). \tag{8.24}$$

Для алгебры Клиффорда антикоммутационные соотношения (8.19) принимают вид

$$\{\Gamma_p{}^i,\ \Gamma_q{}^j\}=\delta^{ij}\delta_{pq}. \tag{8.25}$$

$4N$ элементов алгебры Клиффорда связаны с группой $SO(4N)$ стандартным образом, а именно $4N(4N-1)/2$ генераторов группы $SO(4N)$ определяются выражением

$$O^{ij}_{mn}=\frac{1}{2}[\Gamma_m{}^i,\ \Gamma_n{}^j]. \tag{8.26}$$

Поскольку в базисе алгебры Клиффорда четное число элементов, можно определить оператор «четности» (ср. с матрицей γ_5

в алгебре матриц Дирака)

$$\Gamma_{4N+1} = \prod_{p=1}^{4} \prod_{i=1}^{N} \Gamma_p{}^i, \tag{8.27}$$

удовлетворяющий соотношениям

$$(\Gamma_{4N+1})^2 = +1, \quad \{\Gamma_{4N+1}, \ \Gamma_p{}^i\} = 0. \tag{8.28}$$

Действительно, 2^{2N} состояний неприводимого представления (8.22) образуют спинорное представление группы $SO(4N)$. Это спинорное представление содержит два неприводимых представления, соответствующих двум собственным значениям ± 1 оператора Γ_{4N+1}, каждое размерности 2^{2N-1}. Любое линейное преобразование генераторов Q, Q^* (например, $\delta Q = rQ$) можно представить генератором, образованным из коммутатора Q и Q^* (например, $r[Q, Q^*]$). В частности, генераторы $SU(2)$-вращений (операторы спина) даются выражением

$$s_k = -\frac{i}{4m}(\sigma_k)^A{}_B [Q^{jB}, \ (Q^{jA})^*]. \tag{8.29}$$

Легко убедиться, что

$$[Q^{jA}, \ s_k] = i(\sigma_k)^A{}_B Q^{Bj}. \tag{8.30}$$

Состояния с данным спином классифицируются той подгруппой $SO(4N)$, которая коммутирует с соответствующей подгруппой $SU(2)$-вращений группы $SO(4N)$. Такой подгруппой является подгруппа, порождаемая всеми генераторами, билинейными по Q, Q^*, для которых при вычислении соответствующих коммутаторов выполнено свертывание по двухкомпонентным индексам, т. е.

$$\Lambda^i{}_j = \frac{i}{2m}[Q^{Ai}, \ (Q^{Aj})^*], \quad k^{ij} = \frac{i}{2m}[Q^{Ai}, \ Q_A{}^j] \tag{8.31}$$

и $(k^{ij})^\dagger = k_{ij}$. Легко проверить, что генераторы $\Lambda^i{}_j$, k^{ij} и k_{ij} порождают группу $USp(2N)$, таким образом, состояния данного спина параметризованы представлениями группы $USp(2N)$. Что это группа $USp(2N)$, нетрудно заключить, если положить

$$Q_A{}^a = \begin{cases} Q_A{}^i \delta_i{}^a, & a = 1, \ \ldots, \ N, \\ \varepsilon_{AB}(Q^{Bi})^* & a = N+1, \ \ldots, \ 2N, \end{cases} \tag{8.32}$$

так как в этом случае генераторы $\Lambda^i{}_j$, k^{ij} и k_{ij} определяются выражением

$$s^{ab} = \frac{i}{2m}[Q^{Aa}, \ Q_A{}^b]. \tag{8.33}$$

Пользуясь тем, что

$$\{Q_A{}^a, \ Q_B{}^b\} = \varepsilon_{AB}\Omega^{ab}, \tag{8.34}$$

где

$$\Omega^{ab}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

можно убедиться в справедливости соотношения

$$[s^{ab},\ s^{cd}]=\Omega^{ac}s^{cd}+\ldots, \tag{8.35}$$

а это и есть как раз соотношение алгебры $USp(2N)$.

Состав частиц массивного неприводимого представления приведен ниже.

Теорема [21]. Если вакуум Клиффорда является скаляром относительно спинорной группы $SU(2)$ и группы внутренней симметрии, то состав частиц неприводимого массивного представления группы суперсимметрии определяется выражением

$$2^{2N}=\left[\frac{N}{2},\ (0)\right]+\left[\frac{N-1}{2},\ (1)\right]+\ldots+\left[\frac{N-k}{2},\ (k)\right]+\ldots+[0,\ (N)], \tag{8.36}$$

где первое число в квадратных скобках обозначает спин, а второе, например (k), — k-мерное антисимметричное бесследовое неприводимое представление группы $USp(2N)$, которому принадлежит данный спин [1]).

Рассмотрим пример с двумя суперзарядами. В этом случае группа, классифицирующая состояния, есть $USp(4)$. Имеем 2^4 состояний, среди которых одно со спином 1, четыре со спином 1/2 и пять со спином 0, что соответствует 1-, 4-, 5-мерным представлениям группы $USp(4)$. Прочие примеры приведены в табл. 8.3.

Если клиффордов вакуум — состояние со спином и принадлежит нетривиальному представлению группы внутренней симметрии $U(N)$, то неприводимые представления получатся тензорным умножением этого вакуума на представление, фигурирующее в приведенной выше теореме.

Введение нетривиальных центральных зарядов существенно изменяет массивное неприводимое представление. Очевидно, центральные заряды изменяют алгебру суперзарядов Q, действующих на состояние покоя, а именно эта клиффордова алгебра определяет число состояний в соответствующих неприво-

[1]) Как упоминалось выше, спинорное представление группы $SO(4N)$ содержит два неприводимых представления, отвечающих бозонным (целые спины) и фермионным (полуцелые спины) состояниям, которые разлагаются согласно сформулированной теореме в сумму неприводимых представлений $SU(2)\otimes USp(2N)$. Алгебра (8.19) допускает также форму записи, в которой очевидна группа симметрии $SU(2)\otimes USp(2N)$. Антикоммутационные соотношения (8.34) инвариантны относительно этой группы. — *Прим. ред.*

димых представлениях суперсимметрии. В безмассовом случае значения спиральности лежат в пределах от 0 до $N/2$ (до $N/4$ в CPT-самосопряженной теории), и представление имеет размерность $2^{N+1}(2^N)$, соответствующую N нетривиально реализованным элементам вакуума Клиффорда. В самом деле, легко

Таблица 8.3. **Некоторые массивные представления (без центральных зарядов), параметризованные представлениями группы $USp(2N)$**

Спин \ N	1	2	3	4
2	1	1	1	1
3/2	1 2	1 4	1 6	8
1	1 2 1	1 4 5+1	6 14+1	27
1/2	1 2 1	4 5+1 4	14 14′+6	48
0	2 1	5 4 1	14′ 14	42

показать, что в безмассовом случае нетривиальные центральные заряды ведут к состояниям с отрицательной массой. В массивном же случае без центральных зарядов значения спинов лежат в пределах от 0 до $N/2$, а размерность представления равна 2^{2N}, что соответствует $4N$-мерной алгебре Клиффорда. К тому же

Таблица 8.4. **Некоторые массивные представления с одним центральным зарядом ($|Z| = m$); все состояния комплексные**

Спин \ N	2	4	6	8
2			1	1
3/2		1	1 6	8
1	1	1 4	6 14+1	27
1/2	1 2	4 5+1	14 14′+6	48
0	2 1	5 4	14′ 14	42

выводу можно прийти и при наличии центральных зарядов, за исключением того специального примера, когда центральный заряд равен массе. При этом алгебра Клиффорда, содержащая $4N$ элементов, сводится к алгебре с $2N$ элементами, точно такими же, как в безмассовом случае. Размерность представления и пределы, в которых изменяются значения спинов соответствующих неприводимых представлений, уменьшились вдвое и

стали такими же, как в безмассовом случае (примеры приведены в табл. 8.4). Неприводимые представления с центральным зарядом часто возникают в результате спонтанного нарушения симметрии.

Обзор неприводимых представлений суперсимметрии с центральными зарядами см. в книге [21]. Приведенное здесь описание массивных неприводимых представлений группы суперсимметрии аналогично изложению, содержащемуся в обзоре Феррара и Савойи [21].

9. ПРОСТАЯ СУПЕРГРАВИТАЦИЯ: ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ($N = 1$)-СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

Построим теперь теорию супергравитации, следуя методу, который использовался для модели Весса — Зумино и $(N = 1)$-супер-КЭД. В этой главе мы рассмотрим сначала состояния на массовой поверхности и построим линеаризованную теорию без вспомогательных полей, а затем с ними. Поскольку теории супергравитации сложны, особенно полезно рассмотреть значительно более простую линеаризованную теорию, которая отражает многие черты полной нелинейной теории.

Неприводимые представления суперсимметрии, включающие гравитон со спином 2, содержат фермион, спин которого равен либо 3/2, либо 5/2. Для частицы со спином 5/2 возникают значительные проблемы при построении взаимодействия поля, соответствующего этой частице, с другими полями, поэтому выберем частицу со спином 3/2.

Как и в случае теории Янга — Миллса, линеаризованная теория обладает глобальной суперсимметрией и инвариантна относительно локальных абелевых калибровочных преобразований. Последние необходимы для того, чтобы поля действительно описывали безмассовые состояния на массовой поверхности и в их состав не входили ду́хи [1]).

Эти состояния на массовой поверхности представлены симметричным тензором второго ранга $h_{\mu\nu}(h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu})$ и майорановским спин-вектором $\psi_{\mu\alpha}$. Поля, соответствующие частицам со спином 2 и 3/2, должны удовлетворять инфинитезимальным калибровочным преобразованиям

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x), \quad \partial \psi_{\mu\alpha} = \partial_\mu \eta_\alpha(x). \tag{9.1}$$

Единственными свободными от полей ду́хов калибровочно-инвариантными линейными уравнениями движения являются уравнения

$$E_{\mu\nu} = 0, \quad R^\mu = 0, \tag{9.2}$$

---

[1]) Напомним, что параметры глобальной суперсимметрии не зависят от пространственно-временных переменных, тогда как калибровочные параметры локальной суперсимметрии от этих переменных зависят.

где $E_{\mu\nu} = R^{L}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{L}$, $R^{Lab}{}_{\mu\nu}$ — линеаризованный тензор Римана:

$$R^{Lab}{}_{\mu\nu} = -\partial_a\partial_\mu h_{b\nu} + \partial_b\partial_\mu h_{a\nu} + \partial_a\partial_\nu h_{b\mu} - \partial_b\partial_\nu h_{a\mu},$$
$$R^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} i\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\varkappa, \quad R^{Lb}_{\mu} = R^{Lab}{}_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{a}, \quad R^{L} = R^{La}{}_{\mu}\delta^{\mu}_{a}. \tag{9.3}$$

Подробное разъяснение последних равенств можно найти в работе Ньювенхейзена [13].

Теперь необходимо построить преобразования суперсимметрии, образующие алгебру на массовой поверхности, относительно которых инвариантны полевые уравнения. Из соображений размерности получаем наиболее общий вид этих преобразований:

$$\delta h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\psi_\nu + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\psi_\mu) + \delta_1\eta_{\mu\nu}\bar{\varepsilon}\gamma^\varkappa\psi_\varkappa,$$
$$\delta\psi_\mu = +\delta_2\sigma^{ab}\partial_a h_{b\mu}\varepsilon + \delta_3\partial_\nu h^{\nu}{}_{\mu}\varepsilon. \tag{9.4}$$

Если выполняются уравнения движения (9.2), то параметры δ_1, δ_2 и δ_3 определяются однозначно из требования замкнутости алгебры преобразований суперсимметрии (9.4) и калибровочных преобразований (9.1). В линеаризованной теории преобразования суперсимметрии представляют собой линейные глобальные преобразования, т. е. преобразования *первого порядка* по полям $h_{\mu\nu}$ и $\psi_{\mu\alpha}$, и параметризованы *постоянными* величинами ε^{α}.

Вычисляя коммутатор калибровочного преобразования Рариты — Швингера ($\eta_\alpha(x)$ в уравнении (9.1)) и преобразования суперсимметрии (параметр ε в (9.4)), действующий на поле $h_{\mu\nu}$, получаем

$$[\delta_\eta,\ \delta_\varepsilon]\, h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\partial_\nu\eta + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\partial_\mu\eta) + \delta_1\eta_{\mu\nu}\bar{\varepsilon}\hat{\partial}\eta. \tag{9.5}$$

Таким образом, это — калибровочное преобразование поля $h_{\mu\nu}$ с параметром $^1/_2\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\eta$, если выполнено дополнительное условие $\delta_1 = 0$. Аналогично вычисление действия коммутатора калибровочного преобразования и преобразования суперсимметрии на поле $h_{\mu\nu}$ автоматически приводит к правильному нулевому результату. Однако вычисление коммутатора преобразования суперсимметрии и калибровочного преобразования Эйнштейна, действующего на поле $\psi_{\mu\alpha}$, дает

$$[\delta_{\xi_\mu},\ \delta_\varepsilon]\,\psi_\mu = +\delta_2\sigma^{ab}\partial_a(\partial_\mu\xi_b)\,\varepsilon + \delta_3\partial_\nu\partial^\nu\xi_\mu\varepsilon + \delta_3\partial_\nu\partial_\mu\xi^\mu\varepsilon. \tag{9.6}$$

Но это не что иное, как калибровочное преобразование Рариты — Швингера поля ψ_μ при условии $\delta_3 = 0$. Следовательно, положим $\delta_1 = \delta_3 = 0$.

Необходимо также вычислить коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действующих на поле $h_{\mu\nu}$:

$$[\delta_{\varepsilon_1},\ \delta_{\varepsilon_2}]\, h_{\mu\nu} = +\frac{1}{2}\{\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\delta_2\sigma^{ab}\partial_a h_{b\nu}\varepsilon_1 + (\mu \leftrightarrow \nu)\} - (1 \leftrightarrow 2) =$$
$$= \delta_2\{\bar{\varepsilon}_2\gamma^b\varepsilon_1\partial_\mu h_{b\nu} - \bar{\varepsilon}_2\gamma^a\varepsilon_1\partial_a h_{\mu\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)\}. \qquad (9.7)$$

Это калибровочное преобразование поля $h_{\mu\nu}$ с параметром $\delta_2\bar{\varepsilon}_2\gamma^b\varepsilon_1 h_{b\nu}$, которое одновременно является пространственно-временной трансляцией. Последняя не противоречит групповым свойствам суперсимметрии, если $\delta_2 = -1$, поэтому мы выберем данное значение этого параметра.

Важно подчеркнуть, что линеаризованная теория супергравитации отличается от модели Весса — Зумино тем, что в ней для получения замкнутой алгебры необходимо наряду с глобальными преобразованиями суперсимметрии (9.4) учитывать еще и калибровочные преобразования (9.1). В результате образуется алгебра $(N = 1)$-суперсимметрии, дополненная калибровочными преобразованиями. Эта алгебра редуцируется до алгебры $(N = 1)$-суперсимметрии только на калибровочно-инвариантных состояниях.

Для коммутатора двух преобразований суперсимметрии, действующих на поле ψ_μ, находим

$$[\delta_{\varepsilon_1},\ \delta_{\varepsilon_2}]\,\psi_\mu = -\sigma^{ab}\partial_a\varepsilon_2\frac{1}{2}(\varepsilon_1\gamma_b\psi_\mu + \bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu\psi_b) - (1 \leftrightarrow 2) =$$
$$= +\frac{1}{2\cdot 4}\bar{\varepsilon}_1\gamma_R\varepsilon_2\sigma^{ab}\partial_a\gamma^R(\gamma_b\psi_\mu + \gamma_\mu\psi_b) - (1 \leftrightarrow 2) =$$
$$= \frac{1}{8}\bar{\varepsilon}_1\gamma_R\varepsilon_2\sigma^{ab}\gamma^R\left(\gamma_b\psi_{a\mu} + \frac{1}{2}\gamma_\mu\psi_{ab}\right) +$$
$$+ \partial_\mu\left(\frac{1}{8}\bar{\varepsilon}_1\gamma_R\varepsilon_2\sigma^{ab}\gamma^R\gamma_b\psi_a\right) - (1 \leftrightarrow 2), \qquad (9.8)$$

где $\psi_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu$. Используя различные формы уравнения движения Рариты — Швингера

$$R^\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \gamma^\mu\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \Leftrightarrow \psi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}i\gamma_5\varepsilon_{\mu\nu\varrho\varkappa}\psi^{\varrho\varkappa} = 0, \qquad (9.9)$$

получаем окончательный ответ:

$$[\delta_{\varepsilon_1},\ \delta_{\varepsilon_2}]\,\psi_\mu = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^c\varepsilon_1\partial_c\psi_\mu + \partial_\mu\left(-\bar{\varepsilon}_2\gamma^c\varepsilon_1\gamma\psi_c + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\bar{\varepsilon}_1\gamma_R\varepsilon_2\sigma^{ab}\gamma^R\gamma_b\psi_a\right) - (1 \leftrightarrow 2). \qquad (9.10)$$

Это как раз требуемый результат: трансляция и калибровочное преобразование поля ψ_μ.

Читатель может убедиться, что относительно преобразований (9.4), параметры которых принимают значения $\delta_1 = \delta_3 = 0$, $\delta_2 = -2$, уравнения движения полей $h_{\mu\nu}$ и $\psi_{\mu\alpha}$ действительно инвариантны.

Неприводимое представление суперсимметрии, осуществляемое полями $h_{\mu\nu}$ и $\psi_{\mu\alpha}$, удовлетворяющими уравнениям движения, позволяет найти лагранжиан физических полей. Действие [14, 15], из которого следуют полевые уравнения (9.2), имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu R^\mu \right\}. \qquad (9.11)$$

Оно инвариантно относительно преобразований (9.4), если значения параметров δ_1, δ_2 и δ_3 соответствуют сделанному выше выбору. Как и для модели Весса — Зумино, действие инвариантно и вне массовой поверхности.

Желательно найти формулировку линеаризованной теории, основанную на полях, реализующих представление суперсимметрии без наложения каких-либо связей (т. е. исключая уравнения движения), а именно ввести вспомогательные поля. Для их определения мы можем воспользоваться нашим правилом равенства ферми-бозе состояний; поскольку алгебра содержит калибровочные преобразования, это правило следует применять только к калибровочно-инвариантным состояниям. На массовой поверхности поле $h_{\mu\nu}$, так же как и поле $\psi_{\mu\alpha}$, имеет две спиральности. Но вне массовой поверхности $h_{\mu\nu}$ имеет $(5 \times 4)/2 = 10$ степеней свободы минус 4 калибровочные степени свободы, что дает 6 бозонных степеней свободы. С другой стороны, поле $\psi_{\mu\alpha}$ вне массовой поверхности имеет $4 \times 4 = 16$ степеней свободы минус 4 калибровочные степени свободы, что дает в результате 12 фермионных степеней свободы. Следовательно, вспомогательные поля должны содержать 6 бозонных степеней свободы. Таким образом, если имеется n вспомогательных фермионных полей, то следует ввести $4n + 6$ вспомогательных бозонных полей.

Предположим, что существует минимальное описание, т. е. вспомогательных фермионных полей (спиноров) нет. Предположим также, что лагранжиан содержит квадраты вспомогательных бозонных полей, размерность которых 2, и не содержит их производных (подобно полям F и G). Следовательно, имеем 6 вспомогательных бозонных полей, и остается только найти их лоренцевы свойства и преобразования. Предположим, что такими полями являются скаляр M, псевдоскаляр N и псевдовектор b_μ, а не антисимметричный тензор или 6 полей со спинами 0. Мотивированные аргументы в пользу такого выбора будут приведены ниже.

Другая возможность — введение полей A_μ и $a_{\varkappa\lambda}$, удовлетворяющих калибровочным преобразованиям $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, $\delta a_{\varkappa\lambda} = \partial_\varkappa \Lambda_\lambda - \partial_\lambda \Lambda_\varkappa$. Вклад в действие слагаемого $\varepsilon_{\mu\nu\rho\varkappa} A^\mu \partial^\nu a^{\rho\varkappa}$ не приводит к появлению распространяющихся степеней свободы.

При переходе к массовой поверхности преобразования полей $h_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\alpha}$, M, N и b_μ должны претерпевать изменения и совпадать с найденными ранее преобразованиями на массовой поверхности. Это ограничение, соображения размерности, а также тот факт, что если вспомогательные поля исключаются на массовой поверхности, то они должны удовлетворять уравнениям движения, приводят к следующим преобразованиям [16, 17]:

$$\begin{aligned}
\delta h_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}(\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi_\nu + \bar\varepsilon\gamma_\nu\psi_\mu),\\
\delta\psi_{\mu\alpha} &= -\sigma^{ab}\partial_a h_{b\mu}\varepsilon - \tfrac{1}{3}\gamma_\mu(M + i\gamma_5 N)\varepsilon + b_\mu i\gamma_5\varepsilon + \delta_6\gamma_\mu \hat b i\gamma_5\varepsilon, \qquad (9.12)\\
\delta M &= \delta_4\bar\varepsilon\gamma\cdot R, \quad \delta N = \delta_5 i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot R,\\
\delta b_\mu &= +\delta_7 i\bar\varepsilon\gamma_5 R_\mu + \delta_8 i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot R.
\end{aligned}$$

Требование, чтобы преобразования (9.12) и калибровочные преобразования (9.1) образовывали замкнутую алгебру, позволяет определить значения параметров δ_4, δ_5, δ_6, δ_7 и δ_8. Например, коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действуя на поле M, дает

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] M = \delta_4\{-\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu M + 16\bar\varepsilon_2\sigma^{\mu\nu} i\gamma_5\varepsilon_1(1+3\delta_6)\partial_\mu b_\nu\}, \qquad (9.13)$$

т. е. искомый результат при условии, что $\delta_4 = -1/2$ и $\delta_6 = -1/3$. Действуя коммутатором двух преобразований суперсимметрии на все поля, найдем условия замкнутости алгебры:

$$\delta_4 = -1/2, \quad \delta_5 = -1/2, \quad \delta_6 = -1/3, \quad \delta_7 = 3/2, \quad \delta_8 = -1/2. \qquad (9.14)$$

В дальнейшем мы будем использовать эти значения параметров. Действие, содержащее поля $h_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\alpha}$, M, N и b_μ и инвариантное относительно преобразований (9.12), при выбранных выше значениях параметров имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\tfrac{1}{2} h_{\mu\nu} E^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\bar\psi_\mu R^\mu - \tfrac{1}{3}(M^2 + N^2 - b_\mu^2)\right\}. \qquad (9.15)$$

Это свободное действие ($N = 1$)-супергравитации. Исключая вспомогательные поля M, N и b_μ, получаем лагранжиан физических полей, которому соответствует действие (9.11).

Нелинейная теория. Полную нелинейную теорию супергравитации можно получить из линеаризованной теории, рассмотренной выше, применяя метод Нетёр, описанный в гл. 7. Чита-

тель может заметить, что аналогично теории Янга — Миллса линеаризованная теория обладает локальной абелевой инвариантностью (9.1) и, кроме того, инвариантна относительно глобальных (т. е. содержащих постоянные параметры) преобразований суперсимметрии (9.4).

Будем действовать так же, как в случае теории Янга — Миллса, и сделаем параметр глобального преобразования зависящим от пространственно-временных переменных, т. е. положим в преобразованиях (9.4) $\varepsilon = \varepsilon(x)$ [1]). Теперь линеаризованное действие (9.15) не инвариантно, но его вариация должна иметь вид

$$\delta A_0 = \int d^4x \partial_\mu \bar{\varepsilon}^\alpha j^\mu{}_\alpha, \tag{9.16}$$

поскольку действие инвариантно при постоянных $\bar{\varepsilon}^\alpha$. Величина $j^\mu{}_\alpha$ пропорциональна полю $\psi_{\mu\alpha}$ и линейна по бозонным полям $h_{\mu\nu}$, M или N и b_μ. Ее можно восстановить из соображений размерности:

$$j_{\mu\alpha} \sim \partial_\tau h_{\rho\mu} \psi_{\nu\beta} + \ldots .$$

Рассмотрим теперь действие вида

$$A_1 = A_0 - \frac{\varkappa}{4} \int d^4x \bar{\psi}^\mu j_\mu, \tag{9.17}$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная. Если объединить ставшие теперь локальными преобразования (9.12) и локальное абелево калибровочное преобразование Рариты — Швингера (9.1) с параметрами $\eta(x) = (2/\varkappa)\varepsilon(x)$, то действие A инвариантно относительно этого комбинированного преобразования с точностью до членов порядка $\varkappa^0$. Это означает, что мы имеем преобразование

$$\delta\psi_\mu = \frac{2}{\varkappa} \partial_\mu \varepsilon(x) - \partial_a h_{b\mu} \sigma^{ab} \varepsilon(x) - \frac{1}{3} \gamma_\mu (M + i\gamma_5 N) \varepsilon(x) + \\ + i\gamma_5 \left(b_\mu - \frac{1}{3} \gamma_\mu \hat{b} \right) \varepsilon(x), \tag{9.18}$$

а остальные поля преобразуются как и раньше, но с параметром ε, зависящим от координат пространства-времени.

Точно так же, как и для теории Янга — Миллса, два типа преобразований, оставляющих инвариантным линеаризованное действие, связаны вместе и образуют единое преобразование, причем роль калибровочной константы в данном случае иг-

[1]) Параметр $\varepsilon(x)$ — функция с антикоммутирующими значениями из алгебры Грассмана (см. примечание на с. 18). — *Прим. ред.*

рает гравитационная постоянная $\varkappa$. Добавление слагаемого $(-\varkappa/4)\bar{\psi}^{\mu}j_{\mu}$ к действию A_0 приводит к цели; его вариация имеет вид

$$-\frac{\varkappa}{4}\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{\varkappa}\right)(\partial_{\mu}\bar{\varepsilon})\,j^{\mu}+\text{слагаемые порядка }\varkappa. \qquad (9.19)$$

Слагаемые порядка $\varkappa$ нас пока не интересуют. (Заметим, что величина $j_{\mu\alpha}$ линейна по полю $\psi_{\mu\alpha}$, поэтому вариация $\delta\psi_{\mu\alpha}$ дает множитель 2.)

В самом деле, можно использовать нётеровскую процедуру в контексте чистой гравитации, где имеются преобразование глобальной трансляции свободных полей

$$\delta h_{\mu\nu}=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\mu\nu} \qquad (9.20)$$

и локальное калибровочное преобразование

$$\delta h_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\xi_{\nu}+\partial_{\nu}\xi_{\mu}. \qquad (9.21)$$

Они объединяются на первом же этапе нётеровской процедуры, что в результате дает

$$\delta h_{\mu\nu}=\frac{1}{\varkappa}\partial_{\mu}\zeta_{\nu}+\frac{1}{\varkappa}\partial_{\nu}\zeta_{\mu}+\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\mu\nu}, \qquad (9.22)$$

так как $\xi_{\nu}=(1/\varkappa)\zeta_{\nu}$. Эта вариация поля $h_{\mu\nu}$ содержит первые несколько членов эйнштейновского общекоординатного преобразования тетрады $e_{\mu}{}^{a}$, для которой справедливо разложение

$$e_{\mu}{}^{a}=\eta_{\mu}{}^{a}+\varkappa h_{\mu}{}^{a}. \qquad (9.23)$$

Действуем аналогично тому, как поступали в теории Янга — Миллса. Получим последовательно в каждом порядке разложения по параметру $\varkappa$ инвариантный лагранжиан, добавляя к нему и к преобразованиям полей соответствующие члены. Например, если мы добавим слагаемое к вариации $\delta\psi_{\mu}$, допустим $\delta\bar{\psi}_{\mu}=$ $=\ldots+\bar{\varepsilon}X_{\mu}\varkappa$, то при варьировании свободного действия по полю ψ_{μ} получим вклад $-\varkappa\bar{\varepsilon}X_{\mu}R^{\mu}$. На каждом этапе (т. е. в каждом порядке разложения по параметру $\varkappa$) необходимо проверять, образуют ли преобразования полей замкнутую алгебру. В действительности все неоднозначности, которые возникают при такой процедуре, разрешаются с помощью требования замкнутости алгебры.

Окончательные преобразования имеют вид [16, 17]

$$\delta\varepsilon_\mu{}^a = \varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu,$$

$$\delta\psi_\mu = 2\varkappa^{-1}D_\mu(w(e,\psi))\varepsilon + i\gamma_5\left(b_\mu - \frac{1}{3}\gamma_\mu\hat{b}\right)\varepsilon - \frac{1}{3}\gamma_\mu(M + i\gamma_5 N)\varepsilon,$$

$$\delta M = -\frac{1}{2}e^{-1}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu R^\mu - \frac{\varkappa}{2}i\bar{\varepsilon}\gamma_5\psi_\nu b^\nu - \varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^\nu\psi_\nu M + \\ + \frac{\varkappa}{2}\bar{\varepsilon}(M + i\gamma_5 N)\gamma^\mu\psi_\mu,$$

$$\delta N = -\frac{e^{-1}}{2}i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu R^\mu + \frac{\varkappa}{2}\bar{\varepsilon}\psi_\nu b^\nu - \varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^\nu\psi_\nu N - \\ - \frac{\varkappa}{2}i\bar{\varepsilon}\gamma_5(M + i\gamma_5 N)\gamma^\mu\psi_\mu,$$

$$\delta b_\mu = \frac{3i}{2}e^{-1}\bar{\varepsilon}\gamma_5\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu\right)R^\nu + \varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^\nu b_\nu\psi_\mu - \frac{\varkappa}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\nu\psi_\nu b_\mu - \\ - \frac{\varkappa}{2}i\bar{\psi}_\mu\gamma_5(M + i\gamma_5 N)\varepsilon - \frac{i\varkappa}{4}\varepsilon_\mu{}^{bcd}b_b\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_c\psi_d, \qquad (9.24)$$

где

$$R^\mu = e^{\mu\nu\rho\varkappa}i\gamma_5\gamma_\nu D_\rho(w(e,\psi))\psi_\varkappa, \qquad D_\mu(w(e,\psi)) = \partial_\mu + w_{\mu ab}\frac{\sigma^{ab}}{4}$$

и

$$w_{\mu ab} = \frac{1}{2}e^\nu{}_a(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}) - \frac{1}{2}e_b{}^\nu(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) - \\ - \frac{1}{2}e_a{}^\rho e_b{}^\sigma(\partial_\rho e_{\sigma c} - \partial_\sigma e_{\rho c})e_\mu{}^c + \\ + \frac{\varkappa^2}{4}(\bar{\psi}_\mu\gamma_a\psi_b + \bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_b - \bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_a). \qquad (9.25)$$

Они образуют замкнутую алгебру, причем коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действующих на любое поле, имеет вид

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_{\text{суперсимметрии}}(-\varkappa\xi^\nu\psi_\nu) + \delta_{\text{общекоординатное}}(2\xi_\mu) + \\ + \delta_{\text{локальн. лоренц}}\left(-\frac{2\varkappa}{3}\varepsilon_{ab\lambda\rho}b^\lambda\xi^\rho - \frac{2\varkappa}{3}\bar{\varepsilon}_2\sigma_{ab}(M + i\gamma_5 N)\varepsilon_1 + 2\xi^d w_d{}^{ab}\right), \qquad (9.26)$$

где

$$\xi_\mu = \bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1.$$

Преобразования (9.24) оставляют инвариантным действие

$$A = \int d^4x\left\{\frac{e}{2\varkappa^2}R - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu R^\mu - \frac{1}{3}e(M^2 + N^2 - b_\mu b^\mu)\right\}, \qquad (9.27)$$

где

$$R = R_{\mu\nu}{}^{ab} e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu}, \qquad R_{\mu\nu}{}^{ab} \frac{\sigma_{ab}}{4} = [D_\mu, D_\nu].$$

Вспомогательные поля M, N и b_μ можно исключить для получения нелинейного лагранжиана физических полей. В таком виде супергравитация впервые была получена в работах [14, 15].

Как обсуждалось в гл. 7, нелокальную теорию можно также построить, используя только алгебру преобразования полей.

10. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРОСТОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

На первый взгляд присутствие слагаемых, содержащих четвертые степени поля $\psi_{\mu\alpha}$ в действии супергравитации (9.27), должно указывать на трудность доказательства его инвариантности относительно преобразований (9.24). Эти вызывающие затруднение слагаемые возникают потому, что связность $w_\mu{}^{ab}$ зависит от $e_\mu{}^a$ и $\psi_\mu{}^\alpha$. Непосредственное доказательство инвариантности [18, 19] можно получить, учитывая правильно члены $e_\mu{}^a$ и $\psi_\mu{}^\alpha$ в выражении для $w_\mu{}^{ab}$. Вместо того чтобы просто полагать действие функционалом, зависящим от полей $e_\mu{}^a$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N и b_μ, удобнее считать, что оно зависит от $e_\mu{}^a$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N, b_μ и $w_\mu{}^{ab}$, где поле $w_\mu{}^{ab}$ само является функцией от $e_\mu{}^a$ и $\psi_\mu{}^\alpha$ вида (9.25), т. е. $A(e_\mu{}^a, \psi_\mu{}^\alpha, M, N, b_\mu, w_\mu{}^{ab}(e, \psi))$. При этом вариация действия принимает вид

$$\delta A = \int d^4x \left\{ \frac{\delta A}{\delta e_\mu{}^a}\delta e_\mu{}^a + \frac{\delta A}{\delta \psi_\mu{}^\alpha}\delta\psi_\mu{}^\alpha + \frac{\delta A}{\delta M}\delta M + \frac{\delta A}{\delta N}\delta N + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta A}{\delta b_\mu}\delta b_\mu + \frac{\delta A}{\delta w_\mu{}^{ab}}\delta w_\mu{}^{ab} \right\}, \qquad (10.1)$$

где $\delta w_\mu{}^{ab}$ — вариация поля $w_\mu{}^{ab}$, полученная при варьировании $e_\mu{}^a$ и $\psi_\mu{}^\alpha$ в соответствии с (9.25). Преимущество такого подхода состоит в том, что последний член в (10.1) обращается в нуль, так как

$$\frac{\delta A}{\delta w_{\mu ab}}\Big|_{w_{\mu ab} = w_\mu{}^{ab}(e,\,\psi)} = 0. \qquad (10.2)$$

Тождество (10.2) является следствием того, что функциональная форма связности $w_\mu{}^{ab}$, данная формулой (9.25), есть просто алгебраическое решение уравнения движения для $w_\mu{}^{ab}$ в формализме первого порядка, т. е.

$$\frac{\delta A}{\delta w_{\mu ab}} = 0. \qquad (10.3)$$

Отсюда следует результат

$$\delta A = \int d^4x \left\{ \frac{\delta A}{\delta e_\mu{}^a}\delta e_\mu{}^a + \frac{\delta A}{\delta \psi_\mu{}^\alpha}\delta\psi_\mu{}^\alpha + \frac{\delta A}{\delta N}\delta N + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta A}{\delta M}\delta M + \frac{\delta A}{\delta b_\mu}\delta b_\mu \right\} \qquad (10.4)$$

или эквивалентное утверждение: поле $\omega_\mu{}^{ab}$ в действии не следует варьировать. Иногда подход, изложенный выше, называют формализмом порядка 1,5, хотя это скорее прием, чем формализм. Опираясь на него, покажем теперь инвариантность простой супергравитации.

Рассмотрим сначала вариации, не содержащие вспомогательных полей. Вариация эйнштейновской части лагранжиана имеет вид

$$\delta \int \frac{e}{2\varkappa^2} (e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab})\, d^4x = \int d^4x \left\{ \frac{1}{\varkappa} \{\bar\varepsilon \gamma^\mu \psi_a\} \left\{ - R_\mu{}^a + \frac{1}{2} e_\mu{}^a R \right\} \right\}. \tag{10.5}$$

Вариация рарита-швингеровской части дает следующие три слагаемых:

$$\delta \int \left(- \frac{i}{2} \bar\psi_\mu \gamma_5 e_\nu{}^a \gamma_a D_\rho \psi_\varkappa \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} \right) d^4x =$$

$$= \int d^4x \left\{ - \frac{i}{\varkappa} \bar\varepsilon \overleftarrow{D}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\varkappa \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} - \frac{i}{\varkappa} \bar\psi_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \overrightarrow{D}_\rho D_\varkappa \varepsilon \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa}{2} i \bar\varepsilon \gamma^a \psi_\nu \bar\psi_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\rho \psi_\varkappa \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} \right\}. \tag{10.6}$$

Второе слагаемое в этом выражении можно преобразовать, учитывая соотношения, приведенные сразу после формулы (9.27); при этом оно принимает вид

$$\frac{-i}{2 \cdot 4\varkappa} \bar\psi_\mu \gamma_5 \gamma_\nu R_{\rho\varkappa}{}^{cd} \sigma_{cd} \varepsilon \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} = \frac{-i}{2 \cdot 4\varkappa} \bar\varepsilon \sigma_{cd} \gamma_\nu \gamma_5 \psi_\mu R_{\rho\varkappa}{}^{cd} \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa}. \tag{10.7}$$

Интегрируя первое слагаемое в (10.6) по частям и пренебрегая поверхностными членами, найдем

$$+ \frac{i}{\varkappa} \bar\varepsilon \gamma_5 [D_\mu, \gamma_\nu] D_\rho \psi_\varkappa \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} + \frac{i}{\varkappa} \bar\varepsilon \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu D_\rho \psi_\varkappa \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa}. \tag{10.8}$$

Второй из этих двух членов можно переписать следующим образом:

$$+ \frac{i}{2 \cdot 4\varkappa} \bar\varepsilon \gamma_5 \gamma_\nu R_{\rho\varkappa}{}^{cd} \sigma_{cd} \psi_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa}. \tag{10.9}$$

Складывая выражения (10.9) и (10.7), получаем

$$\frac{+i}{2 \cdot 4\varkappa} \bar\varepsilon \gamma_5 (\gamma_\nu \sigma_{cd} + \sigma_{cd} \gamma_\nu) \psi_\mu R_{\rho\varkappa}{}^{cd} \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} =$$

$$= \frac{1}{4\varkappa} \bar\varepsilon \gamma_f \psi_\mu \varepsilon^{f\nu cd} \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} R_{\rho\varkappa}{}^{cd} = - \frac{1}{2\varkappa} \bar\varepsilon \gamma^a \psi_\mu \{ e_a{}^\mu R - 2 R_a{}^\mu \}. \tag{10.10}$$

Выражение (10.10) в точности уничтожает вариацию эйнштейновского действия (10.5). Следовательно, остается лишь первое

слагаемое (10.8), т. е.

$$+\frac{i}{\varkappa}\bar{\varepsilon}\gamma_5[D_\mu,\ \gamma_\nu]D_\rho\psi_\varkappa e^{\mu\nu\rho\varkappa}, \tag{10.11}$$

и последнее слагаемое формулы (10.6), а именно

$$-\frac{\varkappa}{2}i\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_a D_\rho\psi_\varkappa e^{\mu\nu\rho\varkappa}. \tag{10.12}$$

После применения преобразования Фирца (10.12) принимает вид

$$-\frac{\varkappa}{2\cdot 4}i\bar{\varepsilon}\gamma^a\gamma_R\gamma_a\gamma_5 D_\rho\psi_\varkappa e^{\mu\nu\rho\varkappa}\bar{\psi}_\mu\gamma_R\psi_\nu =$$

$$=+\frac{\varkappa}{4}i\bar{\varepsilon}\gamma_c\gamma_5 D_\rho\psi_\varkappa e^{\mu\nu\rho\varkappa}\bar{\psi}_\mu\gamma^c\psi_\nu. \tag{10.13}$$

Выражение (10.11) проще вычислить, перейдя к инерциальным координатам, т. е. положив $\partial_\mu e_\nu^{\ a}=0$; при этом оно преобразуется к виду

$$+\frac{i}{4\varkappa}\bar{\varepsilon}\gamma_5[\sigma^{cd},\ \gamma_\nu]\omega_{\mu cd}D_\rho\psi_\varkappa e^{\mu\nu\rho\varkappa}=\frac{i}{\varkappa}\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^c D_\rho\psi_\varkappa\omega_{\mu c\nu}e^{\mu\nu\rho\varkappa}=$$

$$=+\frac{\varkappa}{4}i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma^c D_\rho\psi_\varkappa\bar{\psi}_\mu\gamma_c\psi_\nu e^{\mu\nu\rho\varkappa}. \tag{10.14}$$

Этот член взаимно уничтожается с выражением (10.13).

Остается только показать, что вариации, содержащие вспомогательные поля, взаимно сокращаются. Варьирование членов действия, содержащих вспомогательные поля, дает

$$\delta\int d^4x\left\{-\frac{1}{3}(M^2+N^2-b_\mu^2)\right\}=$$

$$=\int d^4x\bar{\varepsilon}\left\{(M+i\gamma_5 N)\frac{1}{3}\gamma_\mu+\left(b_\mu-\frac{1}{3}\hat{b}\gamma_\mu\right)i\gamma_5\right\}R^\mu. \tag{10.15}$$

Единственное другое выражение такого вида составляют из вспомогательных полей при варьировании гравитино, входящего в действие Рариты — Швингера; оно имеет вид

$$\int\left\{-\bar{\varepsilon}\left[\frac{1}{3}(M+i\gamma_5 N)\gamma_\mu+i\left(b_\mu-\frac{1}{3}\hat{b}\gamma_\mu\right)\gamma_5\right]R^\mu\right\}d^4x. \tag{10.16}$$

Выражения (10.16) и (10.15) взаимно уничтожаются; таким образом, мы показали инвариантность действия супергравитации во всех порядках по параметру $\varkappa$.

11. ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ГЛОБАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ

Для любой группы симметрии существуют правила, согласно которым по любым двум представлениям группы можно образовать третье. В сочетании с законами образования инвариантов эти правила позволяют последовательно строить функционалы действия для той или иной теории. Это справедливо не только для групп внутренней симметрии, но также для пространственно-временных групп, таких, как группа Пуанкаре или конформная группа. В случае группы Пуанкаре мы пользуемся 4-векторами и тензорами более высокого ранга. Правила комбинирования тензоров для получения тензоров высших рангов очевидны. Инварианты образуются в результате свертывания величин с метрическим тензором Минковского $\eta_{\mu\nu}$.

Аналогичный анализ можно выполнить для группы суперсимметрии; он известен под названием тензорного исчисления. Для теорий с глобальной суперсимметрией тензорное исчисление было разработано Вессом и Зумино [20]. Правила тензорного исчисления эквивалентны правилам вычислений в суперпространстве, описанным в гл. 14. Хотя формулировка в формализме суперпространства более изящна и определенно более полезна на квантовом уровне, именно тензорное исчисление особенно выгодно для построения классического действия и, в частности, взаимодействия супергравитации с материей. Причина заключается в том, что в процессе тензорного исчисления поля группируются в наборы (супермультиплеты), имеющие хорошо определенные правила преобразований суперсимметрии. Поэтому результат любой операции с супермультиплетами легко представить в виде выражений, содержащих компонентные поля.

11.1. Супермультиплеты

Основной компонентный супермультиплет, называемый общим скалярным мультиплетом, есть набор полей

$$C = (C,\ \zeta_\alpha,\ H,\ K,\ A_\mu,\ \lambda_\alpha,\ D). \tag{11.1}$$

Этот супермультиплет определен так, что имеет следующие преобразования суперсимметрии и киральные преобразования с па-

раметрами ε и α соответственно:

$$\delta C = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\zeta, \tag{11.2а}$$

$$\delta\zeta = (\hat{A} - i\gamma_5\hat{\partial}C + H + i\gamma_5 K)\,\varepsilon - \alpha i\gamma_5\zeta, \tag{11.2б}$$

$$\delta H = \bar{\varepsilon}\lambda + \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\zeta + 2\alpha K, \tag{11.2в}$$

$$\delta K = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\zeta - 2\alpha H, \tag{11.2г}$$

$$\delta A_a = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda + \bar{\varepsilon}\partial_a\zeta, \tag{11.2д}$$

$$\delta\lambda = \left(-\frac{1}{2}\sigma^{cd}f_{cd} + i\gamma_5 D\right)\varepsilon + i\alpha\gamma_5\lambda, \tag{11.2е}$$

$$\delta D = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\lambda, \tag{11.2ж}$$

где участвует также напряженность векторного поля A_μ:

$$f_{cd} = d_c A_d - \partial_d A_c.$$

Эти преобразования можно получить следующим образом. Начнем с псевдоскаляра C, инвариантного относительно киральных преобразований, и запишем общую форму вариации δC (11.2а). Затем запишем наиболее общую форму вариации $\delta\zeta$, не противоречащую условию Майорана, а именно

$$\delta\zeta = (H + i\gamma_5 K + \hat{A} + i\gamma^\mu\gamma^5 U_\mu + \sigma^{\mu\nu}t_{\mu\nu}) - i\alpha\gamma_5\zeta', \tag{11.3}$$

и потребуем, чтобы преобразования $(\delta_1, \delta_2)C$ удовлетворяли алгебре суперсимметрии. В результате найдем, что $U_\mu = \partial_\mu C$, $t_{\mu\nu} = 0$ и $\zeta' = \zeta$. Таким образом, получаем (11.2б) как наиболее общее выражение для вариации $\delta\zeta$, не противоречащее алгебре. Далее проведем аналогичные преобразования для вариаций δH, δK и δA_μ и потребуем, чтобы вариации ζ удовлетворяли алгебре суперсимметрии, и так далее до тех пор, пока не получим законы преобразования для всего мультиплета (11.2).

Такой же метод можно применить для того, чтобы поля, составляющие мультиплет, удовлетворяли более сложной алгебре супергравитации.

В действительности общий скалярный мультиплет представляет собой «приводимое» представление суперсимметрии. Необходимо пояснить слово «приводимое». Как мы видели в гл. 8, неприводимое представление суперсимметрии содержит компонентные поля на массовой поверхности, следовательно, нет необходимости строить действия. Под «неприводимым» в данном контексте, а часто и при обсуждении суперпространства мы понимаем мультиплет, множество полей которого не содержит ни одного подмножества со следующими свойствами:

а) его поля преобразуются друг через друга при преобразованиях суперсимметрии;

б) ни одно из этих полей не удовлетворяет уравнениям движения (т. е. они не лежат на массовой поверхности), хотя некоторые из них могут удовлетворять другим дифференциальным уравнениям. Для того чтобы отметить необычное употребление слова «неприводимый» (или «приводимый»), мы будем помещать его в кавычки.

Один «неприводимый» суперсимметричный подмультиплет, набор полей которого есть подмножество полного набора, называют *мультиплетом спиральностей*, причем его поля таковы:

$$\lambda = (\lambda_\alpha,\ f_{cd},\ D). \tag{11.4}$$

Антисимметричный тензор f_{cd}, входящий в супермультиплет, удовлетворяет условию

$$\varepsilon^{abcd}\partial_b f_{cd} = 0 \tag{11.5}$$

и имеет вид

$$f_{cd} = \partial_c A_d - \partial_d A_c. \tag{11.6}$$

Этот супермультиплет использован для построения суперсимметричной теории Янга — Миллса с $N = 1$ в гл. 6. Мы можем также записать его в виде

$$\mathrm{Y} = (A_\mu,\ \lambda_\alpha,\ D), \tag{11.7}$$

где поле A_μ удовлетворяет калибровочному преобразованию

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \tag{11.8}$$

Другой суперсимметричный подмультиплет мультиплета C называют *киральным мультиплетом*. Его можно получить, положив супермультиплет λ равным нулю. Это значит, что

$$\lambda_\alpha = A_\mu - \partial_\mu v = D = 0.$$

В результате получаем супермультиплет S вида

$$S = (v,\ C,\ \zeta,\ H,\ K), \tag{11.9а}$$

который можно записать как скалярный мультиплет, т. е.

$$S = (C,\ \zeta,\ M,\ N,\ \partial_\mu v,\ 0,\ 0). \tag{11.9б}$$

Очевидно, что это тот самый мультиплет, который использовался при построении лагранжиана модели Весса — Зумино в гл. 5.

Другой киральный подмультиплет, который имеет отличный от предыдущего киральный вес, есть набор полей

$$\mathrm{H} = (H,\ K,\ \lambda + \partial\!\!\!/\zeta,\ \partial_a A^a,\ D + \partial^2 C). \tag{11.10}$$

Первые компоненты $A + iB$ кирального мультиплета образуют комплексное поле, поэтому он, вообще говоря, может иметь

произвольный киральный вес n. Соответствующие киральные преобразования мультиплета с компонентами

$$A = (A,\ B,\ \chi_\alpha,\ F,\ G) \tag{11.11}$$

имеют вид

$$\delta_c A = \alpha n B, \quad \delta_c B = -\alpha n A, \quad \delta_c \chi = \alpha (n-1) i\gamma_5 \chi,$$
$$\delta_c F = \alpha (2-n) G, \quad \delta G = -\alpha (2-n) F. \tag{11.12}$$

Преобразования суперсимметрии не зависят от кирального веса:

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\chi,$$
$$\delta\chi = (F + i\gamma_5 G + \hat{\partial}(A + i\gamma_5 B))\,\varepsilon,$$
$$\delta F = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi \quad \delta G = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\chi.$$

В приведенных выше киральных мультиплетах (11.9) и (11.10) киральные веса равны соответственно 0 и 2.

Наконец, можно получить другой подмультиплет, полагая супермультиплет H равным нулю. Такой супермультиплет называют *линейным мультиплетом*; он состоит из компонентных полей

$$L = (C,\ \zeta,\ v_\mu), \tag{11.13}$$

где поле v_μ удовлетворяет условию

$$\partial^\mu v_\mu = 0. \tag{11.14}$$

В действительности большинство общих неприводимых супермультиплетов можно получить из супермультиплета (11.1), поля которого имеют лоренцевы индексы. В случае мультиплета с одним векторным индексом имеем

$$C_\mu = (C_\mu,\ \zeta_{\mu\alpha},\ H_\mu,\ K_\mu,\ A_{\mu\nu},\ \lambda_{\mu\alpha},\ D_\mu). \tag{11.15}$$

Преобразования суперсимметрии те же, что и для C, но поля имеют дополнительный индекс μ, который тривиальным образом содержится и в преобразованиях, т. е.

$$\delta C_\mu = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\zeta_\mu. \tag{11.16}$$

11.2. Составные супермультиплеты

Объединим теперь два супермультиплета, чтобы получить третий супермультиплет. Эта операция аналогична составлению из двух векторов тензора второго ранга. Возможны следующие комбинации:

а) Можно объединить два общих супермультиплета симметричным образом для нахождения третьего:

$$C_1 \cdot C_2 = C_3 \tag{11.17}$$

с компонентами

$$C_3 = C_1C_2, \quad \zeta_3 = C_2\zeta_1 + C_1\zeta_2, \quad H_3 = H_1C_2 + H_2C_1 - \frac{i}{2}\bar{\zeta}_1\gamma_5\zeta_2,$$

$$K_3 = K_1C_2 + K_2C_1 - \frac{1}{2}\bar{\zeta}_1\zeta_2, \quad A_{\mu 3} = A_{\mu 1}C_2 + A_{\mu 2}C_1 + \frac{i}{2}\bar{\zeta}_1\gamma_\mu\gamma_5\zeta_2,$$

$$\lambda_3 = \lambda_1C_2 + \left[+\frac{1}{2}(K_1 + i\gamma_5H_1) + \frac{i}{2}\hat{A}_1\gamma_5 - \frac{1}{2}(\hat{\partial}C_1)\right]\zeta_2 + (1 \leftrightarrow 2),$$

$$D_3 = C_2D_1 + C_1D_2 + H_1H_2 + K_1K_2 - \partial^\mu C_1\partial_\mu C_2 - A^\mu{}_1A_{\mu 2} - \bar{\lambda}_1\zeta_2 - \\ - \bar{\lambda}_2\zeta_1 - \bar{\zeta}_1\hat{\partial}\zeta_2 - \bar{\zeta}_2\hat{\partial}\zeta_1. \qquad (11.18)$$

Этот результат получается при варьировании произведения $C_1C_2 = C_3$. При этом преобразования суперсимметрии позволяют получить следующую компоненту:

$$\delta(C_1C_2) = i\bar{\varepsilon}\gamma_5(C_1\zeta_2 + C_2\zeta_1).$$

Затем операция повторяется в применении к выражению $C_1\zeta_2 + C_2\zeta_1$ для получения следующей компоненты и т. д.

б) Можно объединить два киральных мультиплета симметричным образом, чтобы образовать третий с киральным весом $n_3 = n_1 + n_2$:

$$\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3 \qquad (11.19)$$

с компонентами

$$A_3 \equiv A_1A_2 - B_1B_2, \quad B_3 = A_1B_2 + B_1A_2,$$
$$\chi_3 = (A_1 - i\gamma_5B_1)\zeta_2 + (A_2 - i\gamma_5B_1)\zeta_2,$$
$$F_3 = A_1F_2 + B_1G_2 + A_2F_1 + B_2G_1 - \bar{\chi}_1\chi_2,$$
$$G_3 = A_1G_2 - B_1F_2 + A_2G_1 - B_2F_1 + i\bar{\chi}_1\gamma_5\chi_2. \qquad (11.20)$$

Перемножая мультиплет A с двумя постоянными мультиплетами

$$\mathbf{1}_+ = (1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{1}_- = (0, 1, 0, 0, 0), \qquad (11.21)$$

получим $\mathrm{A}\cdot\mathbf{1}_+ = \mathrm{A}$ и $A\cdot\mathbf{1}_- = (-B, A, -i\gamma_5\chi, G, -F)$ — киральный мультиплет с «измененной четностью».

в) Можно объединить два киральных мультиплета одного кирального веса $n_1 = n_2$ симметричным образом, чтобы образовать общий мультиплет

$$\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 = \mathrm{C} \qquad (11.22)$$

с компонентами

$$C \equiv A_1A_2 + B_1B_2, \quad \zeta = (B_1 - i\gamma_5 A_1)\chi_2 + (B_2 - i\gamma_5 A_2)\chi_1,$$
$$H = +F_1B_2 + F_2B_1 + A_1G_2 + A_2G_1,$$
$$K = -F_1A_2 - F_2A_1 + B_1G_2 + B_2G_1,$$
$$A_\mu = B_1 \overleftrightarrow{\partial_\mu} A_2 + B_2 \overleftrightarrow{\partial_\mu} A_1 - i\bar{\chi}_1\gamma_5\gamma_\mu\chi_2,$$
$$\lambda = +(G_1 + i\gamma_5 F_1)\chi_2 + (G_2 + i\gamma_5 F_2)\chi_1 - \partial_a (B_1 + i\gamma_5 A_1)\gamma^a\chi_2 -$$
$$- \partial_a (B_2 + i\gamma_5 A_2)\gamma^a\chi_1,$$
$$D = 2F_1F_2 + 2G_1G_2 - 2\partial_\mu A_1 \partial^\mu A_2 - 2\partial_\mu B_1 \partial^\mu B_2 - \bar{\chi}_1\hat{\partial}\chi_2 - \bar{\chi}_2\hat{\partial}\chi_1. \tag{11.23}$$

г) Можно объединить мультиплеты, чтобы получить комбинацию

$$\mathrm{A}_1 \wedge \mathrm{A}_2 \equiv (\mathbf{1}_- \cdot \mathrm{A}_1) \times \mathrm{A}_2, \tag{11.24}$$

антисимметричную по полям мультиплетов A_1 и A_2 и имеющую низшую компоненту $C = A_1B_2 - A_2B_1$.

Конечно, можно выбрать любую комбинацию полей и образовать из двух мультиплетов третий путем последовательного варьирования. Но наиболее полезные комбинации те, которые приведены выше.

Следующий этап тензорного исчисления основан на использовании компонентных полей для образования из них мультиплета. В частности полезным оказывается мультиплет, который получается, если в качестве первых компонентов берутся поля F и G кирального мультиплета. Так как

$$\delta F = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi, \tag{11.25}$$

получаем киральный супермультиплет $T\mathrm{A}$, имеющий вид

$$T\mathrm{A} = (F,\ G,\ \hat{\partial}\chi,\ \partial^2 A,\ \partial^2 B). \tag{11.26}$$

Заметим, что при этом

$$TT\mathrm{A} = \partial^2 \mathrm{A}.$$

Мультиплет $T\mathrm{A}$ иногда называют *кинетическим мультиплетом.*

11.3. Формулы для функционала действия

Если известны мультиплеты суперсимметрии и правила обращения с ними, то остается только строить инвариантное действие. Мы сделаем это отдельно для общего и кирального мультиплетов.

Для общего супермультиплета интеграл от его высшей компоненты, обозначенный следующим образом:

$$\int d^4x\,[\mathrm{C}]_D \equiv \int d^4x D, \tag{11.27}$$

инвариантен относительно преобразований суперсимметрии, поскольку вариация поля есть полная 4-дивергенция и поэтому $\delta \int d^4x\,[\mathrm{C}]_D = 0$.

Если имеем киральный мультиплет, то можем построить инвариант, интегрируя его F-компоненту:

$$\int d^4x\,[\mathrm{A}]_F \equiv \int d^4x F, \tag{11.28}$$

так как вариация поля F сводится к дивергенции. Заметим, однако, что компонента $[\mathrm{A}]_F$ кирально инвариантна только в том случае, если киральный вес мультиплета A равен 2.

Примеры. а) Модель Весса и Зумино [3] содержит один киральный мультиплет. В качестве лагранжиана выберем наиболее общий «инвариант», который можно построить, не прибегая к константам взаимодействия с отрицательными размерностями:

$$L_{\text{ВЗ}} = -\tfrac{1}{4}[\mathrm{A}\times\mathrm{A}]_D - \tfrac{m}{2}[\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}]_F - \tfrac{\lambda}{3}[\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}]_F. \tag{11.29}$$

Дополнительное слагаемое $[\mathrm{A}\cdot T\mathrm{A}]_F$ не приводит к новому результату, поскольку оно отличается лишь на полную дивергенцию от $-\frac{1}{2}[\mathrm{A}\times\mathrm{A}]_D$; слагаемое $[\mathrm{A}]_F$ всегда можно устранить с помощью комбинации сдвигов $\mathrm{A}\to\mathrm{A}+\alpha\mathbf{1}_+ + \beta\mathbf{1}_-$ и постоянных киральных преобразований.

Читатель может использовать приведенные выше правила для вычисления действия и в итоге получить результат

$$L_{\text{ВЗ}} = \left\{-\tfrac{1}{2}(\partial_a A)^2 - \tfrac{1}{2}(\partial_a B)^2 - \tfrac{1}{2}\bar\chi\hat\partial\chi + \tfrac{1}{2}F^2 + \tfrac{1}{2}G^2\right\} -$$
$$- m\left\{AF + GB - \tfrac{1}{2}\bar\chi\chi\right\} - \lambda\{(A^2 - B^2)F + 2GAB - \bar\chi(A - i\gamma_5 B)\chi\}. \tag{11.30}$$

б) Рассмотрим линейный мультиплет (11.13); инвариантное действие имеет вид

$$\int d^4x \tfrac{1}{2}[\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}]_D. \tag{11.31}$$

Преобразование такого выражения с помощью формул, приведенных выше, дает

$$\int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu C)^2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi - v_\mu{}^2 \right\}. \qquad (11.32)$$

Это альтернативное описание [47] суперсимметричных состояний $(0^+, 0^-, 1/2)$ полей, которые содержит лагранжиан Весса — Зумино.

в) Супер-КЭД [20]. Рассмотрим два киральных мультиплета S_1 и S_2 с калибровочными преобразованиями вида

$$\delta S_1 = gSS_2, \quad \delta S_2 = -gSS_1, \qquad (11.33)$$

где S — киральный мультиплет, являющийся параметром калибровочных преобразований. Калибровочное поле входит в общий супермультиплет V, калибровочное преобразование которого имеет вид

$$\delta V = \partial S. \qquad (11.34)$$

Здесь ∂S — общее суперполе (11.9б).

Очевидно, можно выбрать калибровку, в которой компоненты C, ζ, H и K мультиплета V равны нулю, а A_μ по-прежнему абелево калибровочно-инвариантное поле. Но фиксировав калибровку, необходимо оценить, всегда ли возможно выполнение условий

$$C = \zeta = H = K = 0. \qquad (11.35)$$

В этой калибровке преобразование суперсимметрии поля ζ имеет вид

$$\delta\zeta = \hat{A}\varepsilon, \qquad (11.36)$$

а калибровочное преобразование ζ имеет вид

$$\delta\zeta = \chi. \qquad (11.37)$$

Таким образом, можно сохранить выбранное значение $\zeta = 0$ с помощью компенсирующего калибровочного преобразования с $\chi = -\hat{A}\varepsilon$. Такая же процедура требуется для полей H и K. Окончательный эффект этой компенсации для остальных полей A_μ, λ и D состоит в том, что коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действуя на поля, дает не только пространственно-временную трансляцию, но также калибровочное преобразование, как обсуждалось в гл. 7.

Определим теперь два общих скалярных мультиплета

$$V_I = \frac{1}{2}(S_I \times S_I + S_2 \times S_2), \quad V_{II} = (S_I \wedge S_2). \qquad (11.38)$$

При калибровочном преобразовании данные мультиплеты трансформируются следующим образом:

$$\delta V_{\mathrm{I}} = -2gV_{\mathrm{II}} \cdot \partial S, \quad \delta V_{\mathrm{II}} = -2gV_{\mathrm{I}} \cdot \partial S. \tag{11.39}$$

Эти формулы являются следствием таких легко устанавливаемых тождеств:

$$\begin{aligned}(S \cdot S_1) \times S_2 - (S \cdot S_2) \times S_1 &= 2(S_1 \wedge S_2) \cdot \partial S,\\ (S \cdot S_1) \times S_1 &= -(S_1 \times S_1) \cdot \partial S.\end{aligned} \tag{11.40}$$

Общий скалярный мультиплет, инвариантный относительно калибровочных преобразований, имеет вид

$$\tfrac{1}{4}[V_{\mathrm{I}} \cdot (e^{2gV} + e^{-2gV}) + V_{\mathrm{II}} \cdot (e^{2gV} - e^{-2gV})]. \tag{11.41}$$

Следовательно, действие, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии и калибровочных преобразований, есть

$$A^{\text{с. кэд}} = \int d^4x \tfrac{1}{4}[V_{\mathrm{I}} \cdot (e^{2gV} + e^{-2gV}) + V_{\mathrm{II}} \cdot (e^{2gV} - e^{-2gV})]_D. \tag{11.42}$$

Используя калибровку Весса — Зумино и изложенное выше тензорное исчисление, можно получить следующее выражение для действия $A^{\text{с. кэд}}$:

$$\begin{aligned}A^{\text{с. кэд}} = \int d^4x \Big\{ &\Big[-\tfrac{1}{2}(\mathscr{D}_a A_1)^2 - \tfrac{1}{2}(\mathscr{D}_a B_1)^2 - \tfrac{1}{2}\bar{\chi}_1 \hat{\mathscr{D}} \chi_1 + (1 \leftrightarrow 2)\Big] +\\ &+ \Big[-\tfrac{1}{4} f_{\mu\nu}^2 - \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}\hat{\partial}\lambda + \tfrac{1}{2}D^2\Big] + [+gD(A_1 B_2 - A_2 B_1) -\\ &- g\bar{\lambda}[(A_1 + i\gamma_5 B_1)\chi_2 - (A_2 + i\gamma_5 B_2)\chi_1]]\Big\},\end{aligned} \tag{11.43}$$

где

$$\mathscr{D}_a A_1 = \partial_a A_1 - g A_a A_2, \quad \mathscr{D}_a A_2 = \partial_a A_2 + g A_a A_1,$$

и аналогичные выражения для B_1 и B_2, а также

$$\mathscr{D}_a \chi_1 = \partial_a \chi_1 + g A_a \chi_2.$$

Применяя тензорное исчисление в нётеровском методе, описанном в гл. 7, можно найти наиболее общую перенормируемую суперсимметричную теорию с $N=1$. Инвариантное действие имеет вид

$$A = A^{\text{ям}} + A^{\text{материя}} + A^{\text{масса}} + A^{\text{взаим}} + A^{\text{линейн}},$$

где

$$A^{\text{ЯМ}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}{}^s)^2 - \bar{\lambda}^s \hat{\mathcal{D}} \lambda_s + \frac{1}{2} D_s{}^2 \right\},$$

$$A^{\text{материя}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu z)^2 - \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \hat{\mathcal{D}} \chi_L + |f|^2 + \right.$$

$$\left. + g (T^s)^a{}_b (\chi_{La} z^b \lambda_s - \bar{\lambda}_s z_a{}^* \chi_L{}^b + D_s z_a{}^* z^b) \right\},$$

$$A^{\text{масса}} = -\int d^4x m_{ab} \{ f^a z^b - \frac{1}{4} \chi_L{}^{ca} \chi_L{}^b + \text{эрмит. сопр.} \},$$

$$A^{\text{взаим}} = -\int d^4x d_{abe} \{ z^a z^b f^e - \frac{1}{2} \chi_L{}^{cn} z^b \chi_L{}^e + \text{эрмит. сопр.} \},$$

$$A^{\text{линейн}} = \int d^4x (D_s \xi^s + \mu_a f^a + \text{эрмит. сопр.}). \qquad (11.44)$$

В этих выражениях

$$F_{\mu\nu}{}^s = \partial_\mu A_\nu{}^s - \partial_\nu A_\mu{}^s - g f^{srt} A_\mu{}^r A_\nu{}^t,$$

$$\mathcal{D}_\mu \lambda^s = \partial_\mu \lambda^s - g f^{srt} A_{r\mu} \lambda^t,$$

$$\mathcal{D}_\mu z^a = \partial_\mu z^a - g (A_\mu)^a{}_b z^b,$$

$$\mathcal{D}_\mu \chi_L = \partial_\mu \chi_L - g (A_\mu)^a{}_b \chi_L{}^b,$$

$$\chi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\chi, \quad \chi_L{}^{ca} = C^{-1} \chi_L{}^a$$

и $(A_\mu)^a{}_b = A_\mu{}^s (T_s)^a{}_b$, где $(T_s)^a{}_b$ — представление генераторов калибровочной группы G, которой принадлежат киральные поля материи. Это действие будет калибровочно-инвариантным, если выполнены следующие условия:

$$m_{ab} (T^s)^a{}_c + m_{ab} (T^s)^b{}_c = 0,$$

$$d_{abe} (T^s)^e{}_c + d_{aec} (T^s)^e{}_b + d_{ebc} (T^s)^e{}_a = 0,$$

$$\mu_a (T_s)^a{}_b = 0, \quad \xi^s f_{rst} = 0. \qquad (11.45)$$

Два последних равенства означают, что линейные члены образуют соответственно киральный синглет и $U(1)$-инвариантный калибровочный мультиплет.

Преобразования, относительно которых приведенное выше действие инвариантно, имеют вид

$$\delta A^s = \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda^s, \quad \delta \lambda^s = \left(-\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} + i\gamma_5 D^s \right) \varepsilon, \quad \delta D^s = i \bar{\varepsilon} \gamma_5 \hat{\mathcal{D}} \lambda^s,$$

$$\delta z^a = \bar{\varepsilon} \chi_L{}^a, \quad \delta \chi_L{}^a = 2 f^a \varepsilon_L + 2 \hat{\mathcal{D}} z^a \varepsilon_R,$$

$$\delta f^a = \bar{\varepsilon} \hat{\mathcal{D}} \chi_L{}^a. \qquad (11.46)$$

Тот факт, что в законы преобразования киральных полей материи входят и поля Янга — Миллса, является следствием выбора калибровки Весса — Зумино и соответствующих компенсирующих преобразований. Связь между этими полями и обычным описанием мультиплета Весса — Зумино устанавливается с помощью равенств

$$z=\frac{1}{2}(A-iB),\quad \chi_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi,\quad f=F+iG. \tag{11.47}$$

Читатель, желающий проверить эту инвариантность, может воспользоваться соотношениями

$$\mathscr{D}_\mu z_a{}^*=\partial_\mu z_a{}^*+gz_b{}^*(A_\mu)^b{}_a,$$

$$\delta\bar{\chi}_{La}=\bar{\varepsilon}_L 2f_a{}^*-\bar{\varepsilon}_R 2\hat{\mathscr{D}}z_a{}^*,\quad \delta f_a{}^*=-\bar{\chi}_{La}\overleftarrow{\hat{D}}e. \tag{11.48}$$

Уравнения движения для вспомогательных полей имеют вид

$$f_a{}^*=+m_{ab}z^b+d_{abc}z^bz^c+\mu_a,\quad D^s=-g(T^s)^a{}_b z_a{}^*z^b+\xi^s, \tag{11.49}$$

а вид классического потенциала такой:

$$V=|f_a|^2+\frac{1}{2}(D^s)^2. \tag{11.50}$$

Заметим, что вспомогательные поля можно выразить через суперпотенциал:

$$W(\phi_a)=\mu_a\phi^a+\frac{1}{2}m_{ab}\phi^a\phi^b+\frac{d_{abc}}{3}\phi^a\phi^b\phi^c, \tag{11.51}$$

а именно

$$f_a{}^*=\frac{\partial W}{\partial z^a}, \tag{11.52}$$

а взаимодействие с полями $\chi_L{}^{ca}$, $\chi_L{}^b$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial z_a{}^*\partial z_b{}^*}. \tag{11.53}$$

Эти выражения, в которых поля записаны в терминах суперпотенциала, являются простым следствием разложения действия в суперпространстве по компонентным полям.

12. ТЕОРИИ С РАСШИРЕННОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

В этой главе мы построим теории с расширенной глобальной суперсимметрией в x-пространстве; их суперполевая формулировка будет дана позднее. Возможные состояния на массовой поверхности суперсимметричных безмассовых теорий частиц со спинами 1 и меньше определяются неприводимыми представлениями суперсимметрии, которые обсуждались в гл. 8 и приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1. **Мультиплетности безмассовых неприводимых представлений с максимальной спиральностью 1 или меньше.**

Спин \ N	1	1	2	2	4
1	—	1	—	1	1
1/2	1	1	2	2	4
0	2	—	4	2	6

Как отмечалось выше, теории более чем с четырьмя суперзарядами должны содержать спины, значения которых больше единицы. В контексте пересмотренной для суперсимметрии теоремы „no-go" упомянутые выше теории со спинами, не превосходящими единицы, обладают наибольшей симметрией. Они являются согласованными в смысле перенормируемости и унитарности. Добавление поля со спином 3/2 требует для построения теории, удовлетворяющей принципу причинности, введения дополнительного поля спина 2. Но в настоящее время существование перенормируемых теорий супергравитации кажется весьма маловероятным. Считается тем не менее, что некоторые теории струн перенормируемы и унитарны.

Первая из теорий при $N = 2$ (см. табл. 12.1) содержит 2 майорановских состояния со спином 1/2, являющиеся синглетами при преобразованиях $SU(2)$, и 4 состояния с нулевым спином, которые являются комплексным дублетом относительно $SU(2)$. Мы называем этот мультиплет гипермультиплетом или мультиплетом полей материи с $N = 2$. Вторая теория при том же значении $N = 2$ включает одно состояние со спином 1,

два майорановских состояния со спином 1/2 и 2 состояния с нулевым спином. Перечисленные состояния являются $SU(2)$-синглетом, дублетами и синглетами соответственно. Этот мультиплет называется мультиплетом Янга — Миллса с $N = 2$.

Единственный мультиплет с $N = 4$ содержит одно состояние со спином 1, четыре майорановских состояния со спином 1/2 и 6 бесспиновых состояний. Первое из них является синглетом, а остальные принадлежат векторному и самодуальному антисимметричному тензорному представлению группы $SU(4)$.

Вышеупомянутые мультиплеты Янга — Миллса должны принадлежать присоединенному представлению калибровочной группы, а мультиплет полей материи с $N = 2$ может принадлежать любому действительному представлению калибровочной группы. Важным свойством этих расширенных теорий является то, что они подобны векторным, т. е. содержат левые и правые фермионы, принадлежащие одному и тому же представлению калибровочной группы. Это неизбежное следствие того факта, что суперзаряды коммутируют со всеми элементами калибровочной группы. В «системе покоя» $(m, 0, 0, m)$ клиффордов вакуум гипермультиплета — состояние со спиральностью $+1/2$. Действие двух суперзарядов связывает это состояние с состоянием со спиральностью $-1/2$. Следовательно, оба состояния со спиральностями $\pm 1/2$ должны принадлежать одному представлению калибровочной группы. Для суперсимметричных теорий Янга — Миллса все поля принадлежат тому же представлению, что и калибровочные поля, а именно присоединенному представлению. Это означает, что если эти теории содержат частицы стандартной модели (теория Глэшоу — Вайнберга — Салама), то любому киральному фермиону стандартной модели можно сопоставить в том же представлении группы фермион противоположной спиральности (так называемые зеркальные частицы). Конечно, для построения реалистической модели необходимо найти способ расщепления масс, позволяющий отделить наблюдаемые фермионы от зеркальных частиц. Наличие зеркальных частиц — общая черта всех расширенных теорий. Их появления можно избежать только с помощью нелинейных реализаций, что вызывает определенные трудности, или путем добавления полей с высшими спинами, преобразующихся нетривиальным образом относительно калибровочной группы.

Для построения моделей с $N = 2$ требуется написать майорановские условия на суперзаряды, параметры суперсимметрии и т. п. Обычное майорановское свойство спинора имеет вид

$$\bar{\lambda}_{ai} = \lambda^{\beta}{}_{i} C_{\beta a}.$$

Преобразование из группы максимальной внутренней симметрии $U(N)$, совместное с таким свойством, реализуется следующим образом:

$$\delta\lambda^{\alpha i} = ((S')^i{}_j \delta^\alpha{}_\beta + (S'')^i{}_j (\gamma_5)^\alpha{}_\beta)\,\lambda^{\beta j},$$

где S' — действительный и антисимметричный множитель (т. е. $\Lambda_2 i\sigma_2$ для $N=2$), а S'' — комплексный и симметричный множитель (т. е. $S'' = i\sigma_2(\Lambda_3\sigma_1,\ \Lambda_0 i\sigma_2,\ \Lambda_1\sigma_3)$ для $N=2$). Доказательство этого утверждения просто и по существу совпадает с приведенным в гл. 2 для алгебры суперсимметрии.

В случае $N=2$ существует антисимметричный тензор второго ранга $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ с компонентами ± 1, и часто удобнее использовать альтернативное майорановское условие, которое получается из приведенного выше с помощью соответствующего преобразования полей. (Напомним, что любое условие действительности поля можно привести к указанному выше виду с помощью преобразования.) Выполним такое преобразование:

$$\lambda'^{\alpha i} = e\varepsilon^{ji}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^\alpha{}_\beta \lambda^{\beta i} + d\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)^\alpha{}_\beta \lambda^{\beta j},$$

где

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = +1.$$

Если выбрать $+ie^* = d$, то майорановское условие принимает вид [22, 66]

$$\lambda'^{\alpha i} = (i\gamma_5 C)^{\alpha\beta}\,\varepsilon^{ij}\bar{\lambda}'_{\beta j},$$

где операция комплексного сопряжения опускает верхний индекс i или j.

Преобразование симметрии поля λ' можно вывести, пользуясь его определением и преобразованием поля $\lambda^{\alpha i}$, которое имеет вид

$$\delta\lambda'^{\alpha i} = ((C_1)_j{}^i\,\delta^\alpha{}_\beta + (\gamma_5)^\alpha{}_\beta\,(C_2)^i{}_j)\,\lambda'^{\beta j},$$

где

$$C_2 = 1\Lambda_0, \quad C_1 = i\,(\Lambda_1\sigma_1,\ \Lambda_2\sigma_2,\ \Lambda_3\sigma_3).$$

Становится ясным преимущество майорановского условия такого типа. Представление группы $SU(2)$ (порождаемой преобразованием C_1) не содержит матрицы γ_5, а так как ε_{ij} — $SU(2)$-инвариантный тензор, новое майорановское условие, очевидно, допускает эту симметрию. Но преобразования, включающие матрицу γ_5, образуют представление $U(1)$. Ситуация с первоначальным майорановским условием противоположна. Несмотря на то, что для обоих условий допустима симметрия $U(2)$, симметрия $U(1)$ очевидным образом реализуется в первоначальном майорановском условии. Понятно, что в двухкомпонентном фор-

мализме эти различия несущественны. Читатель может убедиться в согласованности нового майорановского условия при комплексном сопряжении.

В последующем обсуждении теорий с $N=2$ мы примем майорановское условие в виде

$$\varepsilon_{\alpha i}=(i\gamma_5 C)_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}^{\beta j}.$$

Ясно, что использование параметра $\varepsilon_{\alpha i}$ и пренебрежение майорановским условием эквивалентно рассмотрению теории суперсимметрии с $N=4$ вместо теории с $N=2$.

Теперь станем последовательно строить теории с глобальной $(N=2)$-суперсимметрией, начиная с $(N=2)$-теории Янга — Миллса. Будем следовать процедуре, которую использовали для модели Весса — Зумино в гл. 5, т. е. начнем с состояний на массовой поверхности, найдем связывающие их преобразования суперсимметрии и построим инвариантное действие «физических полей». Затем найдем описание вне массовой поверхности, т. е. вспомогательные поля и соответствующее инвариантное действие.

12.1. $(N=2)$-теория Янга — Миллса [23]

I. Состояния на массовой поверхности, принадлежащие представлениям (глобальной) симметрии $SU(2)$, можно представить полями A, B, A_μ и $\lambda_{\alpha i}$. Действительные поля A, B и A_μ являются синглетами относительно $SU(2)$-преобразований, а поле со спином $1/2$ — дублетом. Для того чтобы остался лишь один дублет спина $1/2$, как это требуется на массовой поверхности, необходимо наложить майорановское условие. Это условие имеет вид

$$\lambda_{\alpha i}=(i\gamma_5 C)_{\alpha\beta}\varepsilon_{ij}\bar{\lambda}^{\beta j}. \tag{12.1}$$

Тензор $\varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ji}=\varepsilon^{ij}$ можно использовать для поднятия и опускания $SU(2)$-индексов согласно правилам

$$\lambda_\alpha{}^i=\varepsilon^{ij}\lambda_{\alpha j},\quad \lambda_\alpha{}^i\varepsilon_{ij}=\lambda_{\alpha j}. \tag{12.2}$$

Предоставляем читателю в качестве упражнения получить весовые множители полей A, B, $\lambda_{\alpha i}$ и A_μ при преобразованиях $U(1)$. Так как эти поля задают состояния на массовой поверхности, они удовлетворяют уравнениям движения (членами взаимодействия мы пренебрегаем)

$$\partial^2 A=\partial^2 B=(\hat{\partial}\lambda_i)\,\alpha=\partial^\nu f_{\mu\nu}=0, \tag{12.3}$$

где

$$f_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{12.4}$$

Рассмотрим сначала линеаризованную, или свободную, теорию как полностью согласованную и в то же время значительно более простую, чем теория со взаимодействием.

II. Найдем преобразования суперсимметрии, связывающие состояния на массовой поверхности. Исходя из соображений размерности и линейности, эти преобразования должны иметь вид

$$\delta A = i\bar{\varepsilon}^i\lambda_i, \quad \delta B = \bar{\varepsilon}^i\gamma_5\lambda_i, \quad \delta A_\mu = +\bar{\varepsilon}^i\gamma_\mu\lambda_i,$$

$$\delta\lambda_i = -\frac{1}{2}c_1 f^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_i - ic_2\hat{\partial}(A - i\gamma_5 B)\varepsilon_i + c_3\partial_\mu A^\mu\varepsilon_i, \quad (12.5)$$

где c_1, c_2 и c_3 — постоянные. Линеаризованная теория должна быть инвариантной относительно абелевых калибровочных преобразований

$$\delta A^s{}_\mu = \partial_\mu\Lambda^s, \quad \delta A^s = \delta B^s = \delta\lambda^s_{\alpha i} = 0 \quad (12.6)$$

и глобальных преобразований группы G_1 с параметрами T^r (т. е. T^r не зависят от x^μ):

$$\delta A^r = f^{rst}T^s A^t, \quad \delta A_\mu{}^r = f^{rst}T^s A_\mu{}^t \text{ и т. д.} \quad (12.7)$$

Здесь f^{rst} — структурные константы группы G_1, которая становится калибровочной группой в теории со взаимодействием. Все поля принадлежат присоединенному представлению группы G_1, поскольку они должны преобразовываться так же, как поле A_μ. Это является следствием того, что группа суперсимметрии и калибровочная группа G_1 коммутируют. В приведенных выше преобразованиях суперсимметрии и в последующих соотношениях групповые индексы не выписаны, но подразумеваются.

Но преобразования суперсимметрии должны образовывать замкнутую алгебру. В частности, действие коммутатора локального калибровочного преобразования и преобразования суперсимметрии на поле $\lambda_{\alpha i}$ имеет вид

$$[\delta_\Lambda, \delta_\varepsilon]\lambda_{\alpha i} = c_3(\partial_\mu\partial^\mu\Lambda)\varepsilon_{\alpha i}. \quad (12.8)$$

Это не похоже ни на одно из преобразований симметрии теории, поэтому следует положить $c_3 = 0$. Коммутатор двух преобразований суперсимметрии, действующий на поле A, есть

$$[\delta_1, \delta_2]A = 2c_2\bar{\varepsilon}_2{}^i\gamma^\mu\varepsilon_{1i}\partial_\mu A, \quad (12.9)$$

так что для согласия с алгеброй суперсимметрии выбираем значение $c_2 = +1$. Сюда не входят поля B и $F_{\mu\nu}$, так как правая часть получена после вычитания выражения с измененным порядком индексов $(1 \leftrightarrow 2)$ и использования свойств майорановских спиноров. При действии коммутатора двух преобразо-

ваний суперсимметрии на поле A_μ получаем правильную величину преобразования симметрии, полагая $c_1 = +1$, а также калибровочное преобразование. Подобная ситуация возникает и в теории Янга — Миллса с $N = 1$, которая содержит только поля $(A_\mu, \lambda_\alpha, D)$. Это результат использования калибровки Весса — Зумино [13]; он является следствием компенсирующих преобразований, необходимых для сохранения калибровки при преобразованиях суперсимметрии. В теории Янга — Миллса с $N = 2$ — аналогичное положение. Мы нашли, что алгебра преобразований, действующих на поле $\lambda_{\alpha i}$, замкнута, если удовлетворяются уравнения движения. Приведенные выше преобразования суперсимметрии образуют «алгебру на массовой поверхности».

III. Инвариантное действие, которое необходимо построить, может иметь только следующий вид:

$$A = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^i \hat{\partial} \lambda_i \right]. \quad (12.10)$$

Если учесть уравнения движения, то действие инвариантно, и, таким образом, оно является «действием физических полей».

На данном этапе нужно сделать замечания о недостатках формулировок теорий, опирающихся на «действия физических полей». Хотя с такими действиями можно производить вычисления, их довольно трудно использовать для получения общих результатов. Пусть, например, мы хотим найти все возможные теории с взаимодействием. Но добавление членов взаимодействия модифицирует уравнения движения и, следовательно, требует новых преобразований суперсимметрии на массовой поверхности. В результате построение каждого нового члена взаимодействия будет даваться с огромным трудом. Это не слишком важная проблема для теорий с расширенной глобальной суперсимметрией, так как перенормируемых взаимодействий немного. Но это очень серьезная трудность при попытках найти наиболее общее взаимодействие полей материи с супергравитацией.

Другая трудность касается квантования суперсимметричных теорий. Значительно проще квантовать теорию, учитывая ее симметрии, если она явно симметрична. Ясно, что это не так, когда при вычислениях используются «действия физических полей».

IV. Учитывая проведенное обсуждение, построим теперь супермультиплет, поля которого реализуют представление алгебры суперсимметрии без использования классических уравнений движения. Это означает, что необходимо найти вспомогательные поля. Полезным руководством в определении числа вспомогательных полей служит требование, чтобы их добавление вне

массовой поверхности давало мультиплет с равным числом бозонных и фермионных степеней свободы. Поле $\lambda_{\alpha i}$ со спином 1/2 имеет 8 степеней свободы, а поля A, B и A_μ — соответственно только $1+1+3=5$ степеней свободы. Векторное поле A_μ имеет лишь 3 степени свободы, поскольку правило равенства бозонных и фермионных степеней свободы доказано с помощью соотношения $\{Q, Q\} \sim P_\mu$ из алгебры суперсимметрии. Как было отмечено выше, это соотношение справедливо только для калибровочно-инвариантных состояний, и, следовательно, необходимо вычесть калибровочную степень свободы для A_μ. Поэтому нам требуется 3 степени свободы вспомогательных бозонных полей. Одна из возможностей заключается в том, что имеется $SU(2)$-триплет вспомогательных полей $X^{ij}=X^{ji}$ с размерностью 2. Предположим, что это так. Тогда необходимо построить преобразования суперсимметрии полей

$$A,\ B,\ A_\mu,\ \lambda_{\alpha i} \quad \text{и} \quad X^{ij}, \tag{12.11}$$

где

$$(X^{ij})^* \equiv X_{ij} = X^{kl}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{lj}.$$

Требуя линейности преобразований, согласования размерностей и используя редукцию алгебры на массовой поверхности при $X^{ij}=0$ к алгебре, рассмотренной выше, найдем, что преобразования полей

$$\delta A,\ \delta B \quad \text{и} \quad \delta A_\mu$$

должны быть такими же, как прежде. Для остальных полей имеем

$$\begin{aligned} \delta\lambda_i &= -\tfrac{1}{2}F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_i - i\hat{\partial}(A - i\gamma_5 B)\varepsilon_i - i(\underline{\tau})_i{}^j\varepsilon_j\underline{X}, \\ \delta\underline{X} &= +ic_4\tilde{\varepsilon}^i(\underline{\tau})_i{}^j\hat{\partial}\lambda_j, \end{aligned} \tag{12.12}$$

где $X_i{}^j = (\underline{\tau})_i{}^j\underline{X}$, $(\underline{\tau})_i{}^j$ — матрицы Паули. Значение $c_4=+1$ следует из требования замкнутости алгебры преобразований суперсимметрии.

Соответствующее инвариантное действие имеет вид

$$\begin{aligned} A = \int d^4x \Big\{ &-\tfrac{1}{4}F^2_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \\ &-\tfrac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}^i\hat{\partial}\lambda_i + \tfrac{1}{2}X^2\Big\}. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Построив линеаризованную теорию, мы найдем отвечающую ей нелинейную теорию, т. е. теорию, инвариантную относительно теперь уже локальной калибровочной группы G_1. Поэтому параметр T^r необходимо сделать зависящим от координат пространства-времени, т. е. $T^r(x)$. Для восстановления калибровоч-

ной инвариантности нужно ввести ковариантные производные и связать локальные абелевы преобразования свободных полей со ставшими также локальными преобразованиями группы G_1, положив

$$\Lambda^r(x) = \frac{1}{g} T^r(x). \tag{12.14}$$

Детальное обсуждение нётеровского метода дано в гл. 9. В результате получаем следующее калибровочно-инвариантное действие:

$$A^1 = \mathrm{Tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^i \hat{D} \lambda_i - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} (D_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (D_\mu B)^2 + \frac{1}{2} X^2 \right\}, \tag{12.15}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu],$$
$$D_\mu A = \partial_\mu A - g[A_\mu, A] \text{ и т. д.} \tag{12.16}$$

В этих выражениях $A_\mu = A_\mu{}^s T_s$, где T_s — генераторы группы G_1 в присоединенном представлении.

Но действие A^1 теперь не суперсимметрично. Можно восстановить суперсимметрию, добавляя калибровочно-инвариантные слагаемые к действию A^1 и к законам преобразований суперсимметрии. К действию могут быть добавлены только слагаемые четвертой степени по полям A и B с нулевыми спинами и члены юкавского типа.

Окончательный результат для законов преобразования имеет следующий вид:

$$\delta A = i\bar{\varepsilon}^i \lambda_i, \quad \delta B = \bar{\varepsilon}^i \gamma_5 \lambda_i, \quad \delta A_\mu = \bar{\varepsilon}^i \gamma_\mu \lambda_i,$$

$$\delta\lambda_i = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \varepsilon_i - i\gamma^\mu D_\mu (A - i\gamma_5 B)\varepsilon_i + ig[A, B]\gamma_5 \varepsilon_i - i(\underline{\tau})_i{}^j \varepsilon_j \underline{X}, \tag{12.17}$$

$$\delta \underline{X} = i\bar{\varepsilon}^i (\underline{\tau})_i{}^j \{\gamma^\mu D_\mu \lambda_j + g[A - i\gamma_5 B, \lambda_j]\},$$

а суперсимметричное действие имеет вид

$$A^{N=2\text{ЯМ}} = \mathrm{Tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (D_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (D_\mu B)^2 + \frac{1}{2} \underline{X}^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^i \gamma^\mu D_\mu \lambda_i - \frac{ig}{2} \bar{\lambda}^i [A - i\gamma_5 B, \lambda_i] - \frac{g^2}{2} ([A, B])^2 \right\}. \tag{12.18}$$

Приведенное выше описание теории Янга — Миллса с $N = 2$ не включает центральный заряд, поскольку вне массовой поверхности поля задают представление супералгебры (полученной в гл. 2) с нулевым зарядом. Альтернативное описание тео-

рии Янга — Миллса с $N = 2$, где одно из полей с нулевым спином представлено сохраняющимся вектором, читатель может найти в работе [24].

12.2. Поля материи с $N = 2$ [25]

Повторим кратко изложенную выше процедуру для полей материи с $N = 2$.

I. Состояния на массовой поверхности представлены полями A^{ia}, ψ^a и комплексно-сопряженными полями $(A^{ia})^* = A_{ia}$ и ψ_a. Поля с нулевым спином являются комплексным дублетом относительно преобразований $SU(2)$, а ψ^a — синглетом. Поля A^{ia} и ψ^a могут принадлежать любому представлению R группы G_2, а комплексно-сопряженные поля принадлежат, конечно, представлению $\bar{R}$, причем индекс a играет роль группового индекса.

II. Законы преобразования, определенные условиями линейности, согласования размерностей и замкнутости алгебры, имеют вид

$$\delta A^{ia} = + \bar{\varepsilon}^i \psi^a, \quad \delta\psi^a = + 2\gamma^\mu \partial_\mu A^{ia} \varepsilon_i. \tag{12.19}$$

Заметим, что при вычислении коммутатора двух преобразований суперсимметрии, действующих на поле A^{ia}, получаем правильный результат, а именно

$$[\delta_1, \delta_2] A^{ia} = + 2\bar{\varepsilon}_2{}^i \gamma^\mu \partial_\mu A^{ja} \varepsilon_{1j} - (1 \leftrightarrow 2) = 2\bar{\varepsilon}_2{}^k \hat{\partial} \varepsilon_{1k} A^{ia}. \tag{12.20}$$

Здесь использовались тождество

$$\delta_i^k \delta_j^l = \frac{1}{2} \delta_i^l \delta_j^k + \frac{1}{2} (\underline{\tau})_i{}^l (\underline{\tau})_j{}^k \tag{12.21}$$

и тот факт, что выражение $\varepsilon^{ki} (\tau)_i{}^l$ симметрично по индексам k и l, а $\bar{\varepsilon}^k \gamma_\mu \varepsilon^l$ антисимметрично, что обусловлено матрицей $i\gamma_5$, входящей в майорановское условие. Читатель может проверить, что преобразования, действующие на поле ψ, замкнуты, если выполнено условие $\hat{\partial}\psi = 0$.

III. Действие физических полей имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ - | \partial_\mu A^{ia} |^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \hat{\partial} \psi^a \right\}. \tag{12.22}$$

IV. Для того чтобы найти формулировку вне массовой поверхности, потребуется вклад четырех вспомогательных бозонных степеней свободы. Имеется несколько способов достижения этого. Рассмотрим различные возможные формулировки теории вне массовой поверхности.

а. Можно добавить комплексный дублет вспомогательных полей F^{ia} равномерности 2. Преобразования суперсимметрии

[15] имеют вид

$$\delta A^{ia} = +\bar{\varepsilon}^i \psi^a, \quad \delta\psi^a = +2\gamma^\mu \partial_\mu A^{ia}\varepsilon_i - 2\gamma_5 F^{ia}\varepsilon_i,$$
$$\delta F^{ia} = +\bar{\varepsilon}^i \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a. \qquad (12.23)$$

В этом случае алгебра замыкается вне массовой поверхности, но содержит центральный заряд, т. е.

$$[\delta_1, \delta_2] A^i = \bar{\varepsilon}_2{}^i 2\hat{\partial} A^j \varepsilon_{1j} + \bar{\varepsilon}_2{}^i 2i\gamma_5 F^j \varepsilon_{1j} - (1 \leftrightarrow 2) =$$
$$= 2\bar{\varepsilon}_2{}^j \hat{\partial} \varepsilon_{1j} A^i + 2i\bar{\varepsilon}_2{}^j \gamma_5 \varepsilon_{1j} F^i.$$

Преобразования мультиплета под действием центрального заряда имеют следующий вид:

$$\delta A^i = wF^i, \quad \delta\psi = iw\gamma_5 \hat{\partial}\psi, \quad \delta F^i = w\partial^2 A^i.$$

Читатель может проверить, что преобразования суперсимметрии и центрального заряда коммутируют, например

$$[\delta_\varepsilon, \delta_w] A^i = wi\bar{\varepsilon}^i \gamma_5 \hat{\partial}\psi - \bar{\varepsilon}^i wi\gamma_5 \hat{\partial}\psi = 0.$$

Вне массовой поверхности алгебра включает центральный заряд [24], обращающийся в нуль, если удовлетворяются уравнения движения, которые в этом случае имеют вид

$$\delta_w A^{ia} = \delta_w \psi^a = \delta_w F^{ia} = 0.$$

Соответствующее инвариантное действие имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -|\partial_\mu A^{ia}|^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a + |F^{ia}|^2 \right\}. \qquad (12.24)$$

Очевидно, $(N=2)$-гипермультиплет составлен из двух $(N=1)$-мультиплетов Весса — Зумино. Можно было бы также рассмотреть образование полей материи с $N=2$ из мультиплета Весса — Зумино $(A, B, \chi_\alpha, F, G)$ и линейного мультиплета (C, ζ_α, V_μ) с $\partial^\mu V_\mu = 0$. Хотя нет гарантии, что такая конструкция может быть суперсимметричной, в действительности это не исключено, и она представляет собой следующую возможную формулировку.

б. В этой формулировке [26] состояния на массовой поверхности принадлежат различным представлениям группы $SU(2)$, которые обсуждались в гл. 2. Если выбрать дублет, клиффордов вакуум $|1/2, i\rangle$ со спиральностью $1/2$, то состояния на массовой поверхности представляют собой $SU(2)$-дублет майорановских фермионов со спином $1/2$ и четыре бесспиновые частицы, состоящие из триплета и синглета. Теперь сопоставим частице спина $1/2$ $SU(2)$-майорановское поле $\lambda_{\alpha i}$, триплету с нулевым спином — поле $L^{ij}=L^{ji}$, а синглету с нулевым спином — поле V_μ,

удовлетворяющее условию $\partial_\mu V^\mu = 0$. В теории вне массовой поверхности теперь необходимы только два вспомогательных фермиона; обозначим их S и P. Результирующее действие принимает вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu L^{ij})^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^i \hat{\partial} \lambda_i + \frac{1}{2} V_\mu{}^2 + \frac{1}{2} S^2 + \frac{1}{2} P^2 \right\}. \quad (12.25)$$

Преобразования можно вывести как и раньше (например, $\delta L^{ij} = \varepsilon^i \lambda^j + \varepsilon^j \lambda^i$); вне массовой поверхности супералгебра замкнута и не содержит центрального заряда.

в. Имеется другая формулировка теории вне массовой поверхности, которая является расширением формулировки, изложенной в предыдущем пункте. Отличие состоит в том, что она содержит ослабленное условие $\partial^\mu V_\mu = 0$, которое выполняется теперь с помощью набора суперсимметричных множителей Лагранжа. Эта формулировка довольно сложна [50], но она важна для квантования в суперпространстве.

г. Имеется также обобщение формулировки теории вне массовой поверхности, представленной в пункте а, которое не требует включения центрального заряда [27].

В теории полей материи с $N = 2$ не должно появляться какого-либо самодействия [28] (заметим, что в формулировке, представленной в пункте а, юкавский член имеет вид $\bar{\psi} A_i \psi$, не инвариантный относительно преобразований $SU(2)$).

12.3. Общая глобальная теория с $N = 2$

Теперь мы можем построить взаимодействие $(N = 2)$-материи с полями теории Янга — Миллса. Обычно для объединения двух мультиплетов необходимо вводить дополнительные константы взаимодействия. Но в данном случае такие константы взаимодействия являются калибровочными. Это следует из того факта, что взаимодействие поля A_μ с $(N = 2)$-материей определяется калибровочной константой взаимодействия g. Однако вследствие $(N=2)$-суперсимметрии взаимодействие любой компоненты $(N = 2)$-мультиплета Янга — Миллса с $(N = 2)$-гипермультиплетом определяется калибровочной константой взаимодействия. Эти теории имеют важное свойство: они содержат только одну константу взаимодействия, т. е. являются действительно теориями великого объединения. Взаимодействие между мультиплетами легко найти, исходя из линеаризованной теории, действие которой есть сумма линеаризованных действий каждой из теорий. Сделаем теперь теорию калибровочно-ковариантной в соответствии с тем, что $(N = 2)$-поля материи принадлежат представлению $R(\bar{R})$ группы, и восстановим суперсимметрию, добавив необходимые члены к действию и законам преобразова-

ния. Поля $(N=2)$-суперсимметричной теории Янга — Миллса имеют те же преобразования (12.17), что и выше. Законы преобразования полей материи с $N=2$ имеют вид

$$\delta A^{ia} = \bar{\varepsilon}^i \psi^a,$$

$$\delta \psi^a = +2\gamma^\mu D_\mu A^{ia} \varepsilon_i - 2\gamma_5 F^{ia} \varepsilon_i - 2ig\,(T_s)^a{}_b A^{ib}\,(A_s - i\gamma_5 B_s)\,\varepsilon_i, \tag{12.26}$$

$$\delta F^{ia} = \bar{\varepsilon}^i \gamma_5 \gamma^\mu D_\mu \psi^a - 2g\bar{\varepsilon}^i \gamma_5 \lambda_{js} A^{jb}\,(T_s)^a{}_b + g\bar{\varepsilon}^i\,(i\gamma_5 A_s - B_s)\,(T^s)^a{}_b\,\psi^b,$$

где

$$D_\mu A^{ia} = \partial_\mu A^{ia} - g\,(A_\mu)^a{}_b\,A^{ib}, \quad D_\mu A^*_{ia} = \partial_\mu A^*_{ia} + g\,(A_\mu)^b{}_a A^*_{ib}, \tag{12.27}$$

а инвариантное действие есть

$$A = A^{\text{ЯМ}} + A^{\text{материя}} + A^{\text{взаимод}} + A^{\text{масса}}, \tag{12.28}$$

где

$$A^{\text{ЯМ}} = \mathrm{Tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(D_\mu B)^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^i \gamma^\mu D_\mu \lambda_i + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} X^2 - \frac{ig}{2}\bar{\lambda}^i\,[A - i\gamma_5 B,\ \lambda_i] - \frac{g^2}{2}([A,\ B])^2 \right\},$$

$$A^{\text{материя}} = \int d^4x \left\{ -D_\mu A^{ia} D^\mu A^*_{ia} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_a \gamma^\mu D_\mu \psi^a + |F^{ia}|^2 \right\}, \tag{12.29}$$

$$A^{\text{взаимод}} = \int d^4x \left\{ -g\bar{\lambda}^{is}\,(T_s)^a{}_b A^*_{ia} \psi^b + \right.$$
$$+ g\bar{\psi}_a A^{ib}\,(T_s)^a{}_b\,\lambda_{is} + \frac{ig}{2}\,(T_s)^a{}_b\,\bar{\psi}_a\,(B_s - i\gamma_5 A_s)\,\gamma_5 \psi^b +$$
$$\left. + g^2 A^*_{ia} A^{ic}\,(T_s T_t)^a{}_c\,(A_t A_s + B_t B_s) + 4g X^{ij} A^*_{ic} A_j{}^d\,(T_s)^c{}_d \right\},$$

$$A^{\text{масса}} = m \int d^4x \left\{ iF^{ia} A^*_{ia} - iF^*_{ia} A^{ia} + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a \gamma_5 \psi^a + 2igB_s\,(T^s)^a{}_b A^*_{ia} A^{bi} \right\}. \tag{12.30}$$

Это действие при $m=0$, очевидно, инвариантно относительно преобразований группы $U(2)$, дилатаций, а также, как и ожидалось, $(N=2)$-суперконформно инвариантно.

В теориях, где X^{ij} — калибровочный синглет, можно добавить слагаемое, линейное по X^{ij}. Это происходит, когда вспомогательные поля X^{ij}, входящие в мультиплет Янга — Миллса с $N=2$, инварианты относительно преобразований группы $U(1)$. Такой мультиплет может взаимодействовать с $(N=2)$-мультиплетом материи, имеющим нетривиальные $U(1)$-весовые множители; но этот член нарушает $U(2)$-симметрию.

12.4. [$N = 4$]-теория Янга — Миллса [29]

Мультиплет Янга — Миллса с $N = 4$ на массовой поверхности имеет одно состояние со спином 1, четыре со спином 1/2 и шесть со спином 0. Очевидно, он составлен из мультиплета полей Янга — Миллса с $N = 2$ и мультиплета материи с $N = 2$ в присоединенном представлении некоторой калибровочной группы. Так как в безмассовом случае взаимодействие этих полей единственно, действие для $(N = 4)$-теории Янга — Миллса должно иметь вид (12.25) с $(N = 2)$-материей в присоединенном представлении. Остается только записать это действие явно в $SU(4)$- или $O(4)$-инвариантной форме и найти преобразования $(N = 4)$-суперсимметрии на массовой поверхности. Эта теория не обладает $U(4)$-симметрией, поскольку набор составляющих ее полей является CPT-самосопряженным мультиплетом и, кроме того, генераторы $U(1)$ при $N = 4$ коммутируют с суперзарядами.

В $O(4)$-инвариантной формулировке имеются поля A_μ, $\lambda_{\alpha i}$, A_{ij} и B_{ij}, где $\lambda_{\alpha i}$ — $O(4)$-инвариантный майорановский спинор, т. е.

$$\lambda_{\alpha i} = C_{\alpha\beta}\bar{\lambda}^{\beta}{}_{i},$$

а поля A_{ij} и B_{ij} принадлежат триплетному представлению группы $O(4)$. Это значит, что они являются действительными антисимметричными самодуальными тензорами второго ранга:

$$A_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}A_{kl}, \quad B_{ij} = +\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}B_{kl}.$$

В $SU(4)$-инвариантной формулировке поля имеют вид: A_μ, $\lambda'_{\alpha i}$ и ϕ_{ij}. Здесь $\lambda'_{\alpha i}$ — киральный спинор в фундаментальном представлении группы $SU(4)$, а ϕ_{ij} — антисимметричный самодуальный тензор второго ранга в представлении **6** группы $SU(4)$:

$$\phi_{ij} = -\phi_{ji}, \quad (\phi_{ij})^* \equiv \phi^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\phi_{kl}.$$

Мы оставляем в качестве упражнения для читателя вывод законов преобразования и действия физических полей суперсимметричной теории с $N = 4$. Эта теория суперконформно-инвариантна; для нее не известна формулировка вне массовой поверхности, которая не содержала бы полей со связями [30]. Формулировка вне массовой поверхности дана в работе [24].

13. ЛОКАЛЬНОЕ ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СУПЕРГРАВИТАЦИИ С ПОЛЯМИ МАТЕРИИ

Наиболее распространенный метод построения реалистических моделей суперсимметрии связан с супергравитацией (см. гл. 19). Для построения этих моделей важно знать самое общее взаимодействие супергравитации с полями материи. В определенном смысле создается впечатление, что это взаимодействие завещано нам с «библейских времен». На самом деле оно было построено с помощью локального тензорного исчисления, которое обобщает в случае супергравитации глобально суперсимметричное тензорное исчисление, изложенное в гл. 11. Различные взаимодействия полей материи с супергравитацией были ранее построены методом Нётер [31].

Локальное тензорное исчисление, развитое в работах [32—35], использует в качестве элементов представления вне массовой поверхности. В частности, требуется представление супергравитации вне массовой поверхности. В целом на протяжении всей книги мы будем использовать для супергравитации первоначальную минимальную формулировку с полями $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N и b_μ. Их преобразования приведены в гл. 9, а соотношения алгебры минимальной супергравитации имеют вид

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \delta_{GC}(2\xi^\mu) + \delta_{SS}(-\varkappa\xi^\nu\psi_\nu) +$$

$$+ \delta_{LL}\left(-\frac{2\varkappa}{3}\varepsilon_{ab\lambda\rho}b^\lambda\xi^\rho + 2\xi^d\omega_d{}^{ab} - \frac{2\varkappa}{3}\bar{\varepsilon}_2\sigma^{ab}(M + i\gamma_5 N)\varepsilon_1\right), \quad (13.1)$$

где $\xi^\mu = \bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1$. Для мультиплетов материи также должны быть преобразования, ведущие к этой замкнутой алгебре.

Первая задача — построение локального эквивалента общего мультиплета $(C, \xi_\alpha, H, K, A_\mu, \lambda_\alpha, D)$. Имеются два пути ее решения. Можно использовать нётеровский метод для получения связи общего мультиплета с супергравитацией. При таком подходе можно либо от массивной КЭД перейти к супергравитации, либо обобщить действие с глобальной суперсимметрией $\int d^4xD$, построив супергравитацию. Позднее мы вернемся к этой последней возможности. Более приемлемый с педагогической точки зрения метод нахождения общего локального мультиплета — включение нётеровской связи в алгебру преобразований. Начнем с мультиплета глобальной суперсимметрии, законы преобразований для которого приведены в гл. 11 и имеют вид (11.2).

Заменим ε_α на $\varepsilon_\alpha(x)$ в этих преобразованиях. Алгебра теперь не замкнута; например,

$$[\delta_1, \delta_2]\zeta = 2\bar{\varepsilon}_1\hat{\partial}\varepsilon_2\zeta + [(\partial_\mu i\bar{\varepsilon}_1)\gamma_5\zeta i\gamma^\mu\gamma_5\varepsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2)]. \quad (13.2)$$

Это последнее слагаемое можно сократить введением суперковариантной производной псевдоскаляра C, которая возникает в $\delta\zeta$, т. е.

$$\delta\zeta = (\hat{A} + H + i\gamma_5\varkappa + i\gamma^\mu\gamma_5\tilde{\mathscr{D}}_\mu C)\varepsilon, \quad (13.3)$$

где

$$\tilde{\mathscr{D}}_\mu C = \partial_\mu C - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\zeta. \quad (13.4)$$

Поскольку

$$\delta(\tilde{\mathscr{D}}_\mu C) = i\bar{\varepsilon}\gamma_5(\partial_\mu\zeta) + O(\varkappa), \quad (13.5)$$

мы находим, что с точностью до членов порядка $\varkappa^0$ преобразования, действующие на поле ζ, образуют замкнутую алгебру. Точно такое же положение с замкнутостью преобразований, действующих на другие поля. В целом алгебра будет замкнута с точностью до членов порядка $\varkappa^0$, если заменить все пространственно-временны́е производные на суперковариантные. Если супервариация поля F есть $\delta F = \varepsilon^\alpha f_\alpha$, то суперковариантная производная F имеет вид

$$\mathscr{D}_\mu F = \partial_\mu F - \frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_\mu{}^\alpha f_\alpha. \quad (13.6)$$

Алгебра преобразований принимает вид

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = 2\bar{\varepsilon}_1(x)\gamma^\mu\varepsilon_2(x)\partial_\mu + O(\varkappa), \quad (13.7)$$

что согласуется с алгеброй супергравитации в пределе $\varkappa \to 0$.

Теперь мы будем последовательно замыкать алгебру в каждом порядке разложения по константе $\varkappa$, добавляя члены к преобразованиям полей из общего мультиплета и видоизменяя замыкание так, чтобы в каждом порядке по $\varkappa$ алгебра согласовалась с выражением (13.1). Поскольку законы преобразования включают поле $\psi_\mu{}^\alpha$, а его супервариации приводят к появлению полей M, N и b_μ, мы ожидаем появления в законах преобразования полей материи вспомогательных полей.

Окончательный результат этих длинных вычислений имеет вид

$$\delta C = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\zeta, \quad \delta\zeta = (\hat{A} - i\gamma_5\tilde{\hat{\mathscr{D}}}C + H + i\gamma_5 K)\varepsilon,$$

$$\delta H = \bar{\varepsilon}\lambda + \bar{\varepsilon}\tilde{\hat{\mathscr{D}}}\zeta - \varkappa\bar{\eta}\zeta, \quad \delta K = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + i\bar{\varepsilon}\gamma_5\tilde{\hat{\mathscr{D}}}\zeta + i\varkappa\bar{\eta}\gamma_5\zeta,$$

$$\delta A_a = \bar{\varepsilon}\gamma_a\lambda + \bar{\varepsilon}\tilde{\mathscr{D}}_a\zeta + \frac{\varkappa}{2}\bar{\eta}\gamma_a\zeta,$$

$$\delta\lambda = \left(-\frac{1}{2}\sigma^{ab}\tilde{F}_{ab} + i\gamma_5 D\right)\varepsilon, \quad \delta D = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\tilde{\hat{\mathscr{D}}}\lambda,$$

где

$$\tilde{\mathcal{D}}_a C = \partial_a C - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\gamma_5\zeta,$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_a\zeta = D_a\zeta - \frac{\varkappa}{2}(\hat{A} - i\gamma_5\hat{\mathcal{D}}C + H + i\gamma_5\varkappa)\psi_a - \frac{i\varkappa}{2}b_a\gamma_5\zeta,$$

$$\tilde{F}_{ab} = \left[D_a A_b - \frac{\varkappa}{2}(\bar{\psi}_a\gamma_b\lambda + \bar{\psi}_a\tilde{D}_b\zeta - \bar{\zeta}\tilde{D}_a\psi_b)\right] - (a \leftrightarrow b), \qquad (13.8)$$

$$\tilde{D}_a\psi_b = D_a\psi_b + \frac{i\varkappa}{2}\gamma_5 b_a\psi_b,$$

$$\tilde{D}_a\lambda = D_a\lambda + \frac{i\varkappa}{2}\gamma_5 b_a\lambda - \frac{\varkappa}{2}\left(-\frac{\sigma^{cd}}{2}\tilde{F}_{cd} + i\gamma_5 D\right)\psi_a,$$

$$\eta = -\frac{1}{3}(M + i\gamma_5 N + i\hat{b}\gamma_5)\varepsilon.$$

Эти преобразования замыкают алгебру (13.1).

Наличие поля b_μ в производных свидетельствует о том, что общий мультиплет является мультиплетом суперконформной гравитации.

Так же как в случае глобальной суперсимметрии, общий супермультиплет не является «неприводимым». Но в локальном случае разложение на неприводимые представления несколько сложнее. Рассмотрим сначала максвелловский мультиплет. Поле A_α преобразуется не только в поля λ_α, D и градиентный член. Однако поле

$$A'_a = A_a + \frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\zeta \qquad (13.9)$$

преобразуется следующим образом:

$$\delta A'_\mu = \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda + \partial_\mu(\bar{\varepsilon}\zeta), \qquad (13.10)$$

т. е. в сумму поля λ_α и градиентного члена. Напряженность поля можно записать в виде

$$\tilde{F}_{ab} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu\left(\partial_\mu A'_\nu - \frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu)\right), \qquad (13.11)$$

Очевидно, что мультиплет

$$\boldsymbol{\lambda}_a = (\lambda_a,\ \tilde{F}_{ab},\ D) \qquad (13.12)$$

задает неприводимое представление локальных преобразований суперсимметрии; роль калибровочного поля играет поле A'_μ. Калибровочный мультиплет

$$Y = (A'_\mu,\ \lambda,\ D) \qquad (13.13)$$

образует представление алгебры локальных преобразований совместно с калибровочными преобразованиями ($\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$).

Киральный супермультиплет получается, если максвелловский мультиплет положить равным нулю. Мы находим, что $\lambda = D = 0$, а $A'_\mu = \partial_\mu A$. Остающийся киральный супермультиплет имеет вид

$$(A,\ B,\ \chi_\alpha,\ F,\ G), \tag{13.14}$$

где $B = C$, $\chi_\alpha = \zeta_\alpha$, $F = H$, $G = K$, с преобразованиями компонентных полей

$$\begin{gathered}\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta B = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\chi, \quad \delta\chi = [F + i\gamma_5 G + \tilde{\tilde{D}}(A + i\gamma_5 B)]\,\varepsilon, \\ \delta F = \bar{\varepsilon}\tilde{\tilde{\mathscr{D}}}\chi - \varkappa\bar{\eta}\chi, \quad \delta G = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\tilde{\tilde{\mathscr{D}}}\chi + i\varkappa\bar{\eta}\gamma_5\chi,\end{gathered} \tag{13.15}$$

где

$$\tilde{D}_a A = \partial_a A - \frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\chi, \quad \tilde{D}_a B = \partial_a B - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\gamma_5\chi,$$

$$\tilde{D}_a\chi = \left(D_a - \frac{i\varkappa}{2}b_a\gamma_5\right)\chi - \frac{\varkappa}{2}(\tilde{D}(A + i\gamma_5 B) + F + i\gamma_5 G)\,\psi_a.$$

Аналог мультиплета глобальной суперсимметрии H, представленного выражением (11.10), не может иметь в качестве первых компонент поля H и K, поскольку они не образуют один и тот же спинор при преобразованиях суперсимметрии. Решение этой дилеммы состоит в том, чтобы добавить к полям H и K слагаемые, пропорциональные $-{}^2/_3 CN$ и $+{}^2/_3 CM$ соответственно. Оба этих новых поля, в состав которых входят указанные слагаемые, образуют при преобразованиях суперсимметрии спинор

$$\psi = \lambda + \tilde{\tilde{\mathscr{D}}}\zeta + \frac{i\varkappa}{3}\hat{b}\gamma_5\zeta + \frac{\varkappa}{3}(M - i\gamma_5 N)\zeta + \frac{2}{3}i\gamma_5 C\xi. \tag{13.16}$$

Определение величины ξ будет дано ниже. При преобразовании суперсимметрии этого спинора получаем последние две компоненты искомого нового мультиплета. Окончательный результат имеет вид

$$\mathrm{H} \equiv \mathrm{H}(V) = \left(H - \frac{2}{3}CN,\ K + \frac{2}{3}CM,\ \psi,\ P,\ Q\right). \tag{13.17}$$

где

$$P = \partial_a A^a - \frac{\varkappa^2}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma \cdot \psi A^\mu - \frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_a(\gamma^a\lambda + \tilde{D}^a\zeta) - \frac{2}{3}gC + \\ + \frac{2\varkappa}{3}b^a\tilde{D}_aC + \varkappa(MH + \varkappa N) - \frac{1}{6}\varkappa^2\bar{\psi}_a(M + i\gamma_5 N)\gamma^a\zeta + \\ + \frac{\varkappa}{4}\bar{\zeta}\gamma \cdot R + \frac{\varkappa^2}{12}i\bar{\psi} \cdot \gamma\hat{b}\gamma_5\zeta + \frac{i\varkappa^2}{12}b^a\bar{\psi}_a\gamma_5\zeta, \qquad (13.18)$$

$$Q = D + \partial_a\Big(\partial^a C - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\gamma_5\zeta - \frac{\varkappa^2}{2}\bar{\psi}_a\gamma \cdot \psi\tilde{D}^aC - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\gamma_5\tilde{D}_a\zeta + \\ + \frac{2}{3}Cf - \frac{2}{3}\varkappa b_a A^a + \frac{\varkappa}{3}(HN - KM) - \frac{i\varkappa^2}{6}\bar{\psi}_a(M + i\gamma_5 N)\gamma_5\gamma^a\zeta - \\ - \frac{i\varkappa}{12}\bar{\zeta}\gamma_5\gamma \cdot R + \frac{\varkappa}{12}\bar{\psi}_a\hat{b}\gamma^a\zeta + \frac{\varkappa^2}{12}\bar{\psi}_a\zeta b^a\Big).$$

Поля ξ, f и g образуют часть кирального мультиплета, полностью составленного из полей супергравитации. Он называется эйнштейновским мультиплетом и представляет собой набор полей

$$U = (-M,\ -N,\ \xi,\ f,\ g), \qquad (13.19)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}(e\gamma \cdot R + \gamma^a(M + i\gamma_5 N)\psi_a + i\gamma_5 b^a\psi_a),$$

$$f = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu R^\nu - \frac{1}{4}\bar{\psi}^\mu(M + i\gamma_5 N)\psi_\mu + \\ + \frac{i}{4}\bar{\psi}_\mu b^\mu\gamma_5\gamma \cdot \psi - \frac{2}{3}\Big(M^2 + N^2 + \frac{1}{2}b_a{}^2\Big), \qquad (13.20)$$

$$g = -e^{-1}\partial_\mu(eb^\mu) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_5 R^\mu - \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 R_\nu - \\ - \frac{i}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma_5(M + i\gamma_5 N)\psi^\mu + \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu b^\mu\gamma \cdot \psi.$$

Компоненты этого мультиплета получены с помощью последовательных варьирований его первых компонент M и N.

Локальный линейный мультиплет получается, если положить супермультиплет $\mathrm{M} = 0$; он равен

$$\mathrm{L} = (C,\ \zeta,\ A_a), \qquad (13.21)$$

где поле A_a удовлетворяет условию $P = 0$.

Скалярный мультиплет $S = (A, B, \chi_\alpha, F, G)$ позволяет образовать «общий мультиплет»

$$\tilde{D}S = (B,\ \chi_a,\ F,\ G,\ \tilde{D}_a A,\ 0,\ 0). \qquad (13.22)$$

Подставляя $\tilde{D}S$ в мультиплет $H(\tilde{D}S)$, заданный выражением (13.17), получаем локальный аналог мультиплета TS, т. е.

$$T(S) = H(\tilde{D}S). \tag{13.23}$$

Полезный киральный супермультиплет может быть построен из калибровочного мультиплета λ_α:

$$W^2 = \lambda^a \cdot \lambda_a - \Big(\bar{\lambda}\lambda,\ i\bar{\lambda}\gamma_5\lambda,\ 2\Big(-\frac{1}{2}\sigma^{ab}F_{ab} + i\gamma_5 D\Big)\lambda,$$

$$\Big(-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2\bar{\lambda}\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}\lambda + 2D^2\Big),\quad \Big(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa}F_{\mu\nu}F_{\rho\varkappa} + i\tilde{\mathcal{D}}^\mu(\bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda)\Big)\Big).$$

Объединим теперь два супермультиплета, чтобы получить третий супермультиплет. Построение производится точно так же, как в случае глобальной суперсимметрии; выбираем некоторое выражение, билинейное по компонентным полям, и последовательно варьируем его для нахождения других компонент составного супермультиплета. Результат комбинирования киральных супермультиплетов A_1 и A_2, обозначаемый $A_1 \cdot A_2$, идентичен полученному в случае глобальной суперсимметрии мультиплету (11.20). Конечные результаты для комбинаций мультиплетов $C_1 \cdot C_2$, $A_1 \times A_2$ и $A_1 \wedge A_2$, где C_1 и C_2 — общие мультиплеты, также совпадают с выражениями (11.18), (11.22) и (11.24), если заменить все пространственно-временные производные ковариантными, т. е. если провести замены

$$\begin{gathered}\partial_\mu C \to \tilde{D}_\mu C,\quad \partial_\mu A \to \tilde{D}_\mu A,\quad \partial_\mu B \to \tilde{D}_\mu B,\\ \partial_\mu \chi \to \tilde{D}_\mu \chi,\quad \partial_\mu \xi \to \tilde{D}_\mu \xi.\end{gathered} \tag{13.24}$$

В этих формулах не появляются производные других компонентных полей.

Последний раздел тензорного исчисления позволяет находить формулы для инвариантной плотности, которые являются обобщением формул для плотностей в теориях с глобальной суперсимметрией:

$$[S]_F = \int d^4x F,\quad [V]_D = \int d^4x D. \tag{13.25}$$

Эти формулы могут быть найдены с помощью нётеровского метода. Рассмотрим вариацию интеграла $\int d^4x D$:

$$\delta\Big(\int d^4x D\Big) = \int d^4x\,(-\partial_\mu\bar{\varepsilon})\,i\gamma_5\gamma^\mu\lambda + O(\varkappa). \tag{13.26}$$

Члены разложения инвариантного действия порядка $\varkappa^0$ имеют вид

$$\int d^4x\Big\{D + \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\mu\lambda + O(\varkappa)\Big\}. \tag{13.27}$$

Как было объяснено выше, теперь необходимо добавить к действию слагаемые, восстанавливающие инвариантность в каждом порядке разложения по $\varkappa$; локальные преобразования полей $D, \lambda, \ldots$ уже были установлены и приведены в (13.8). Аналогично выводится формула для F-плотности. Окончательные выражения имеют вид

$$[V]_D = \int d^4xe \Big\{ D - \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\gamma_5\lambda - \frac{2}{3}\varkappa NH + \frac{2}{3}\varkappa MK - \\ - \frac{2}{3}\varkappa A_a\Big(b^a + \frac{3}{8}e^{-1}\varkappa\varepsilon^{\mu\rho\alpha\tau}\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\Big) - \\ - \frac{\varkappa}{3}\bar{\zeta}\Big(i\gamma_5\gamma\cdot R + \frac{3}{8}\varkappa\varepsilon^{\mu\rho\alpha\tau}\psi_\alpha\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\Big) - \frac{2}{3}\varkappa^2 cL_{S-G}\Big\}, \quad (13.28)$$

где L_{S-G} — лагранжиан $(N=1)$-супергравитации, и

$$[S]_F = \int d^4xe\Big\{F + \frac{1}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\chi + \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}(A + i\gamma_5 B)\psi_\nu - (NB + MA)\Big\}. \quad (13.29)$$

Это завершает построение локального тензорного исчисления в суперсимметричных теориях.

Теперь открыт прямой путь к построению любого взаимодействия с супергравитацией. Сначала заметим, что действие супергравитации имеет вид

$$A^{S-G} = -\frac{3}{2\varkappa^2}[1]_D = \frac{1}{3}[U]_F. \quad (13.30)$$

Космологическая постоянная равна

$$m[1]_F = -em\Big\{M - \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu\Big\}.$$

Кинетический член действия A^C, отвечающий супермультиплету киральных полей материи S, может быть найден двумя способами:

$$A^C = \frac{1}{4}[S\times S]_D = \frac{1}{4}[S\cdot T(S)]_F. \quad (13.31)$$

После коротких вычислений получаем следующее выражение в терминах компонентных полей:

$$A^C = \int d^4xe\Big\{-\frac{1}{2}\tilde{D}_a A\tilde{D}_a A - \frac{1}{2}\tilde{D}_a B\tilde{D}_a B - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\mathcal{D}}\chi + \\ + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{i\varkappa}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\mu(G + i\gamma_5 F - \tilde{D}_a(B + i\gamma_5 A)\gamma^a)\chi - \\ - \frac{2}{3}\varkappa N(FB + GA) + \frac{2}{3}e\varkappa(GB - FA)M -$$

$$-\frac{2\varkappa}{3}\left(b^a+\frac{3}{8}\varkappa e^{-1}\varepsilon^{\mu\rho\alpha\tau}\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right)\left((B\tilde{D}_aA-A\tilde{D}_aB)-\frac{i}{2}\bar{\chi}\gamma_5\gamma_a\chi\right)-$$
$$-\frac{\varkappa}{3}\bar{\chi}(B-i\gamma_5A)\left(i\gamma_5\gamma\cdot R+\frac{3}{8}\varkappa^2\varepsilon^{\mu\rho\alpha\tau}\psi_a\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right)-$$
$$-\frac{\varkappa^2}{3}(A^2+B^2)L_{S-G}\Big\}. \qquad (13.32)$$

Видно, что присутствует слагаемое $(A^2+B^2)R$, и в этом смысле взаимодействие не минимально. Обычный член взаимодействия имеет вид

$$A'=\left[\frac{m}{2}S\cdot S+\frac{\lambda}{3!}S\cdot S\cdot S\right]_F. \qquad (13.33)$$

Вычисление его компонент мы оставляем читателю.

Наиболее общее взаимодействие скалярного мультиплета с супергравитацией дается выражением

$$[f(S)\times S]_D+[g(S)]_F, \qquad (13.34)$$

где f и g — произвольные функции S. Первое слагаемое можно переписать в виде $[f(S)\times T(S)]_F$. Длинные, но непосредственные вычисления позволяют выразить это слагаемое в терминах компонентных полей. Результаты приведены в работе [39]. Хотя на первый взгляд действие зависит от двух функций f и g, в действительности оно зависит только от одной функции, составленной из f и g. Это утверждение следует из возможности изменения масштабов полей супергравитации. При определенном выборе функции $f(S)$ можно даже перед изменением масштабов найти теорию, содержащую член $(A^2+B^2)R$, нарушающий минимальность взаимодействия.

Максвелловское действие имеет вид

$$[W^2]_F=\int d^4xe\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\bar{\lambda}\tilde{\tilde{D}}\lambda+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}D^2-\frac{\varkappa}{4}\bar{\psi}_\tau\sigma^{\mu\nu}\gamma^\tau\lambda F_{\mu\nu}-\frac{i\varkappa}{4}\bar{\lambda}\gamma^a\gamma_5\psi_aD\right\}. \qquad (13.35)$$

Снова можно указать более сложные варианты действия; например, $[h(S)W^2]_F$, где h — произвольная функция S.

Рассмотрим теперь связь максвелловских полей с киральными мультиплетами. Калибровочные поля содержатся в общем мультиплете V, калибровочное преобразование которого имеет вид

$$\delta V=\tilde{D}\Lambda, \qquad (13.36)$$

где Λ — киральный супермультиплет. Поле A_a не преобразуется как калибровочное; но поле $A'_a=A_a+(\varkappa/2)\psi_a\xi$ преобразуется с помощью приведенного выше калибровочного преоб-

разования, имеющего чисто градиентный вид. Это согласуется с приведенным выше обсуждением максвелловской части супермультиплета. Калибровочные преобразования двух данных скалярных мультиплетов S_1 и S_2 мы определяем следующим образом:

$$\delta S_1 = g\Lambda S_1, \quad \delta S_2 = -g\Lambda S_2. \tag{13.37}$$

Калибровочно-инвариантное взаимодействие мультиплетов S_1 и S_2 с супергравитацией дается формулой

$$\left[\frac{1}{8}(S_1 \times S_1 + S_2 \times S_2)(e^{2gV} + e^{-2gV}) + (S_1 \wedge S_2)(e^{2gV} - e^{-2gV})\right]_D . \tag{13.38}$$

Вычисления в компонентном формализме можно найти в работе [35].

Рассмотрим теперь обобщение функционала Файе — Илиопулоса $\left(\int d^4xD\right)$ на случай локальной суперсимметрии. Поскольку формула для локальной D-плотности включает все компонентные поля мультиплета V, выражение $[V]_D$ не калибровочно-инвариантно. В действительности локальное обобщение этой величины есть [35]

$$[e^V]_D. \tag{13.39}$$

Такое выражение не выглядит калибровочно-инвариантным, тем не менее можно показать, что имеются компенсирующие преобразования полей супергравитации. Преобразование, компенсирующее калибровочное преобразование поля A_μ, — локальное киральное преобразование. Можно также показать, что локальный функционал Файе — Илиопулоса добавляется к локально R-инвариантному действию [36, 37]. Наиболее общее взаимодействие, включающее поля Янга — Миллса, мультиплеты киральных полей материи и супергравитацию, дано в работах [38—40].

Наконец, рассмотрим возможные контрчлены на массовой поверхности $(N = 1)$-супергравитации. В этом случае $M = N = b_\mu = 0$, так что эйнштейновский мультиплет обращается в нуль. Первая компонента $t_{(ABC)}$ единственного отличного от нуля супермультиплета W_{ABC} имеет вид

$$t_{(ABC)} \approx (\sigma^\mu)_A{}^{\dot{D}} (\sigma^\nu)_{B\dot{D}} (D_\mu \psi_{\nu C} - D_\nu \psi_{\mu C}) \tag{13.40}$$

(см. гл. 15). Поскольку $t_{(ABC)}$ не содержит выражения, совпадающего на массовой поверхности с уравнением движения гравитино, этот мультиплет не обращается в нуль на массовой поверхности. Следующая компонента супермультиплета W_{ABC}

включает вейлевский тензор. Супермультиплет W_{ABC} — киральный, так что

$$W_1{}^2 = W_{ABC}W^{ABC}.$$

В самом деле, суперконформное действие имеет вид

$$[W_1{}^2]_F. \tag{13.41}$$

Контрчлен, содержащий поля на массовой поверхности, в трехпетлевом приближении равен [34, 41]

$$[W^2 \times W^2]_D, \tag{13.42}$$

а для петлевого разложения порядка $(4k-1)$ имеем

$$[(W^2 \times W^2)^4]_D. \tag{13.43}$$

В действительности контрчлены существуют при любом нечетном числе петель выше двух. Легко построить общий член, т. е.

$$[(W^2)^n \times W^2]_F. \tag{13.44}$$

Может возникнуть вопрос, приводит ли локальное тензорное исчисление для других формулировок, включающих вспомогательные поля, к результатам, отличным от приведенных, т. е. к иному виду взаимодействия суперматерии с супергравитацией. Очевидно, что взаимодействия можно сравнивать только после исключения соответствующих вспомогательных полей. В действительности тензорное исчисление [42] в новой минимальной формулировке допускает лишь взаимодействие R-инвариантной материи. Было показано [43], что эти новые виды минимального взаимодействия материи входят в R-инвариантное подмножество взаимодействий, содержащихся в первоначальной минимальной формулировке супергравитации.

Представленное выше локальное тензорное исчисление основано на локальной супералгебре Пуанкаре. Альтернативный метод [44] состоит в применении тензорного исчисления, основанного на локальной суперконформной алгебре и использовании подходящих компенсирующих мультиплетов для построения неконформно-инвариантных взаимодействий. Преимущество этого метода в том, что суперконформная алгебра содержит больше симметрий, поэтому, например, калибровочные принципы накладывают большие ограничения на появление полей в ковариантных производных. Этот подход был использован в $(N=2)$-супергравитации [45].

14. СУПЕРПРОСТРАНСТВО [46]

В этой главе мы хотим найти метод построения суперсимметричных теорий, явно сохраняющий суперсимметрию на каждом этапе вычислений. Это особенно полезно при квантовании суперсимметричных теорий.

14.1. Элементарное введение в $(N = 1)$-суперпространство

В следующем разделе мы дадим теоретико-групповой вывод суперпространства и его свойств. Здесь же мы рассмотрим элементарное введение в $(N = 1)$-суперпространство для читателя, который хочет использовать суперпространство в своей работе, но не желает разбираться в концепциях, необходимых для получения его как фактор-пространства.

Суперпространство представляет собой 8-мерное многообразие, параметризованное координатами x^μ, θ^α, удовлетворяющими соотношениям

$$x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = 0, \quad x^\mu \theta_\alpha - \theta_\alpha x^\mu = 0, \quad \theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\alpha = 0,$$

т. е. θ_α — антикоммутирующие координаты, являющиеся майорановскими спинорами $\theta_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta$. Преобразования суперсимметрии и трансляции задаются на этом многообразии следующим образом:

$$x'^\mu = x^\mu - \bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta + a^\mu, \quad \theta'_\alpha = \theta_\alpha + \varepsilon_\alpha,$$

где ε_α — антикоммутирующий майорановский спинор. Преобразования Лоренца и трансляции имеют вид

$$x'^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \theta'_\alpha = \theta_\alpha - \omega_{\mu\nu}\frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \theta_\beta.$$

Теперь мы убедимся, что преобразования суперсимметрии действительно задают представление алгебры суперсимметрии и приводят в результате к трансляции соответствующей величины. Выполняя последовательно два суперпреобразования с параметрами ε_2 и ε_1, получаем

$$x_{12} = x_1 - \bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(\theta + \varepsilon_2), \quad \theta_{12\alpha} = \theta_\alpha + \varepsilon_{1\alpha} + \varepsilon_{2\alpha}.$$

Меняя местами члены, отмеченные индексами 1 и 2, находим, как и следовало ожидать,

$$x_{12} - x_{21} = -2\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2, \quad \theta_{12} - \theta_{21} = 0.$$

Суперполя $\phi(x^\mu, \theta_\alpha)$ являются функциями, заданными на суперпространстве. Их компонентное содержание можно найти с помощью разложения Тейлора по степеням θ_α:

$$\phi(x^\mu, \theta_\alpha) = C(x) + i\bar{\theta}\gamma_5\zeta(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta K(x) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_5\theta H(x) - \\ - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta A^\nu(x) - \bar{\theta}\theta\bar{\theta}^{i\gamma_5}\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\hat{\partial}\zeta(x)\right) + \\ + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\partial^2 C(x)\right).$$

В этом разложении слагаемое, пропорциональное $\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma\theta_\delta\theta_\varepsilon$, отсутствует, поскольку оно является 5-индексным, антисимметричным по всем индексам. Билинейные по θ_α слагаемые $^1/_2\theta_\alpha\theta_\beta N^{\alpha\beta}$ можно переписать, разлагая $N^{\alpha\beta}$ по полной системе:

$$N^{\alpha\beta} = (C^{-1})^{\alpha\beta}K - (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}H + (\gamma^\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}A_\mu.$$

Следовательно, $\phi(x^\mu, \theta^\alpha)$ содержит компонентные поля $(C, \zeta_\alpha, H, K, A_\mu, \lambda_\alpha, D)$.

Перемножая два суперполя ϕ_1 и ϕ_2, получаем третье суперполе

$$\phi_3 = \phi_1\phi_2 = C_1C_2 + \bar{\theta}(C_1\zeta_{2\alpha} + C_2\zeta_{1\alpha}) + \ldots,$$

содержащее компонентные поля $(C_1C_2, C_1\zeta_{2\alpha} + C_2\zeta_{1\alpha}, \ldots)$.

Определим скалярное суперполе как поле, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии

$$\phi'(x', \theta') = \phi(x, \theta).$$

Для вариации суперполя имеем

$$\delta\phi = \phi(x', \theta') - \phi(x, \theta) = \phi(x^\mu - \bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta, \theta + \varepsilon) - \phi(x, \theta) = +\bar{\varepsilon}Q\phi;$$

следовательно, суперзаряд Q_α принимает вид

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\gamma_\mu\theta)_\alpha\partial^\mu.$$

Преобразования компонентных полей рассматриваются в следующем разделе, поскольку им отвечают представления, определяемые другими генераторами супералгебры Пуанкаре.

Для построения действия желательно сначала найти ковариантные производные. Несмотря на то что оператор $\partial_m = P_m$

коммутирует с суперзарядом $[Q_\alpha, P_m]=0$, спинорная производная $\partial/\partial\bar\theta^\alpha$ не преобразуется ковариантным образом:

$$\frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha}=\frac{\partial\bar\theta'^\beta}{\partial\bar\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta'^\beta}+\frac{\partial x'^\nu}{\partial\bar\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial}{\partial\bar\theta'^\alpha}+(\gamma^\mu\varepsilon)_\alpha\frac{\partial}{\partial x'^\mu}.$$

Но производная, имеющая вид

$$D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha}+(\hat\partial\theta)_\alpha,$$

преобразуется ковариантно. В этом можно убедиться, показав, что антикоммутатор суперзаряда Q_α и этой производной обращается в нуль, т. е.

$$\{Q_\alpha,\ D_\beta\}=0.$$

Читатель, не интересующийся подробными выводами, при желании может сразу перейти к формулам (14.40) следующего раздела.

14.2. $(N=1)$-суперпространство

Общий формализм. Все свойства суперпространства можно систематически получить, рассматривая его как фактор-пространство. Изложим кратко этот формализм. Пусть имеются любая группа G и ее подгруппа H. Можно определить некоторое отношение эквивалентности между двумя элементами g_1 и g_2 группы G:

$$g_1\sim g_2,\ \text{если и только если}\ g_2^{-1}g_1\in H.$$

Это отношение таково, что при объединении эквивалентных элементов из G в один класс группа G разбивается на непересекающиеся классы. Множество таких классов и есть фактор-пространство, обозначаемое G/H. Данное фактор-пространство можно параметризовать выбором какого-либо элемента в каждом классе смежности в качестве представителя данного класса. Действие группы G на фактор-пространстве задается естественным действием G на выбранного представителя. Иными словами, если $g\in G$, то результат его действия на класс смежности, представленный элементом g_1, есть класс смежности, содержащий элемент gg_1. Легко убедиться, что это действие не зависит от выбранного представителя.

Фактор-пространство G/H можно параметризовать координатами ξ^π $(\pi=1,\ \ldots,\ \dim G-\dim H)$, так что представители могут быть записаны в виде $L(\xi^\pi)$. В качестве одной из пара-

метризаций используется экспоненциальное отображение. Любой элемент группы можно представить в следующем виде:

$$g = \exp(\xi^n K_n) \exp(w^i H_i),$$

где H_i — генераторы подгруппы H, а K_n — остальные генераторы. Удобная параметризация фактор-пространства получается при $w^i = 0$.

Построив фактор-пространство G/H, естественно рассмотреть на нем геометрические объекты, такие, как тетрады, спиновые связности и т. д. Желательно, чтобы эти объекты отражали симметрии фактор-пространства. Инвариантные тетрады $e^n{}_\pi$ и спиновые связности $w^i{}_\pi$ в случае редуктивных фактор-пространств определяются формулой

$$L^{-1}(\xi)\,\partial_\pi L(\xi) = e_\pi{}^n K_n + w_\pi{}^i H_i.$$

Ковариантная производная имеет вид

$$D_N = e_N{}^\pi(\partial_\pi + w_\pi{}^i T_i),$$

где T_i — генераторы подгруппы H, отвечающие полям, на которые они действуют. Более детальное обсуждение этих вопросов можно найти в работе [6].

Для простоты мы начнем рассмотрение с $(N=1)$-супергруппы Пуанкаре, обозначаемой SP, и построим фактор-пространство SP/L, где L — группа Лоренца.

Общий элемент группы SP можно записать в виде

$$g_0 = \exp\{a^\mu P_\mu + \varepsilon^A Q_A + \varepsilon^{\dot A} Q_{\dot A}\} \exp\left\{\frac{1}{2} w^{mn} J_{mn}\right\}. \qquad (14.1)$$

Фактор-пространство SP/L, называемое $(N=1)$-суперпространством, параметризовано координатами $(x^\mu, \theta^A, \theta^{\dot A}) = z^\pi$, где точка z^π соответствует элементу группы

$$e^{z^\pi K_\pi} = \exp\{x^\mu P_\mu + \theta^A Q_A + \theta^{\dot A} Q_{\dot A}\}; \qquad (14.2)$$

здесь $K_\pi = (P_\mu, Q_A, Q_{\dot A})$.

Под действием элемента группы g_0 (14.1) точка с координатой z^π преобразуется в точку z'^π, где точка z'^π определяется равенством

$$g_0 e^{z^\pi K_\pi} = e^{z'^\pi K_\pi} e^{1/2 w'^{mn} J_{mn}}. \qquad (14.3)$$

В низшем порядке разложения по a^μ, w^{mn} и ε_α находим

$$e^{z'^\pi K_\pi} = \exp\left\{z^\pi K_\pi + a^\mu P_\mu + \varepsilon^A Q_A + \varepsilon^{\dot A} Q_{\dot A} + \frac{1}{2}\left[a^\mu P_\mu + \varepsilon^A Q_A + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varepsilon^{\dot A} Q_{\dot A} + w^{mn} J_{mn},\ z^\pi K_\pi\right] + \ldots\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} w^{mn} J_{mn}\right\}. \qquad (14.4)$$

При этом мы использовали соотношение

$$e^{\varepsilon A}e^{B}=\exp\left\{B+\varepsilon A+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{[\ldots[A,B]\ldots,B]}_{n\text{ коммутаторов}}+O(\varepsilon^2)\right\};$$

таким образом,

$$\begin{aligned}
x'^{\mu}&=x^{\mu}+a^{\mu}+i\varepsilon^{A}(\sigma^{\mu})_{A\dot{A}}\,\theta^{\dot{A}}-i\theta^{A}(\sigma^{\mu})_{A\dot{A}}\,\varepsilon^{\dot{A}}+\omega^{\mu\nu}x_{\nu},\\
\theta'^{\underline{A}}&=\theta^{\underline{A}}+\varepsilon^{\underline{A}}+\frac{1}{4}(\sigma^{mn})^{\underline{A}}_{\ \underline{B}}\,\theta^{\underline{B}}\omega_{mn},\\
\theta'^{\underline{\dot{A}}}&=\theta^{\underline{\dot{A}}}+\varepsilon^{\underline{\dot{A}}}-\frac{1}{4}\theta^{\underline{\dot{B}}}(\bar{\sigma}^{mn})^{\underline{\dot{A}}}_{\ \underline{\dot{B}}}\,\omega_{mn}.
\end{aligned}\tag{14.5}$$

Для упрощения обозначений в большинстве последующих уравнений мы будем писать индексы искривленного пространства $\theta^{\underline{A}}$ в виде θ^{A}. Поскольку Q_A и P_μ коммутируют, эти преобразования представляют собой преобразования суперсимметрии во всех порядках по ε^A. Вычисляя коммутатор двух преобразований суперсимметрии, находим, что преобразования действительно реализуют представление $(N=1)$-супергруппы Пуанкаре. Например, в случае двух преобразований суперсимметрии получаем

$$g_1g_2=\exp\{\varepsilon_1{}^{A}Q_A+\varepsilon_1{}^{\dot{A}}Q_{\dot{A}}\}\exp\{\varepsilon_2{}^{B}Q_B+\varepsilon_2{}^{\dot{B}}Q_{\dot{B}}\}= \tag{14.6}$$

$$=\exp\{(\varepsilon_1{}^{A}+\varepsilon_2{}^{A})Q_A+(\varepsilon_1{}^{\dot{A}}+\varepsilon_2{}^{\dot{A}})Q_{\dot{A}}-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1{}^{\dot{A}}\varepsilon_2{}^{B}\{Q_{\dot{A}},Q_B\}-\frac{1}{2}\varepsilon_1{}^{A}\varepsilon_2{}^{\dot{B}}\{Q_A,Q_{\dot{B}}\}+\ldots\}. \tag{14.7}$$

С другой стороны, действуя двумя последовательными преобразованиями на $e^{z\cdot K}$, а именно $g_1(g_2e^{z\cdot K})=e^{z_{12}\cdot K}$, находим

$$\begin{aligned}
x_{12}{}^{m}&=x_2{}^{m}+i\varepsilon_1{}^{A}(\sigma^{m})_{A\dot{A}}(\theta^{\dot{A}}+\varepsilon_2{}^{\dot{A}})-i(\theta^{A}+\varepsilon_2{}^{A})(\sigma^{m})_{A\dot{A}}\,\varepsilon_1{}^{\dot{A}},\\
\theta_{12}{}^{A}&=\theta^{A}+\varepsilon_1{}^{A}+\varepsilon_2{}^{A},\quad \theta_{12}{}^{\dot{A}}=\theta^{\dot{A}}+\varepsilon_1{}^{\dot{A}}+\varepsilon_2{}^{\dot{A}}.
\end{aligned}\tag{14.8}$$

Сравнивая слагаемые вида $\varepsilon_1\varepsilon_2$ и вычитая слагаемое с переставленными индексами 1 и 2, получаем соотношение

$$\{Q_{\dot{A}},Q_B\}=-2i(\sigma^{m})_{\dot{A}B}\,P_m. \tag{14.9}$$

Рассмотрим теперь функции (суперполя), определенные на $(N=1)$-суперпространстве. Скалярное суперполе определено уравнением

$$\phi'(z')=\phi(z). \tag{14.10}$$

Для согласования с обычным методом вычисления коммутаторов, применяемым в суперсимметрии, который мы кратко рас-

смотрим ниже, примем пассивную интерпретацию действия преобразований группы, а именно

$$U(g)\,\phi(z)=\phi(\tau(g)\,z), \tag{14.11}$$

где $\tau(g)z=z'$. Для пассивной интерпретации преобразований находим

$$\delta\phi=\phi(z+\delta z)-\phi(z)=+\delta g^N f_N{}^\pi\partial_\pi\phi(z)=+\,\delta g^N X_N\phi(z), \tag{14.12}$$

где для элемента малой группы δg^N точка z^π отображается в точку $z'^\pi=z^\pi+\delta g^N f^\pi{}_N$. Поэтому инфинитезимальные операторы (векторы Киллинга), соответствующие преобразованию суперсимметрии в суперпространстве, имеют вид

$$X_N=f_N{}^\pi\partial_\pi=(l_m,\ l_A,\ l_{\dot A},\ l_{mn}). \tag{14.13}$$

Буква l обозначает конкретную реализацию генераторов P_m, Q_A, $Q_{\dot A}$, J_{mn} в терминах дифференциальных операторов. Рассматривая преобразования (14.5), получаем

$$l_m=\partial_m=\delta_m{}^\mu\partial_\mu,\quad l_A=\frac{\partial}{\partial\theta^A}+i(\sigma^m)_{A\dot A}\,\theta^{\dot A}\partial_m,\quad l_{\dot A}=\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}}+$$
$$+\,i(\sigma^m)_{A\dot A}\,\theta^A\partial_m, \tag{14.14}$$

$$l_{mn}=-(x_m\partial_n-x_n\partial_m)-\frac{1}{2}\theta^B(\sigma^{mn})_B{}^A\frac{\partial}{\partial\theta^A}+\frac{1}{2}\theta^{\dot B}(\bar\sigma^{mn})_{\dot B}{}^{\dot A}\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}}. \tag{14.15}$$

Мы примем следующие правила дифференцирования по антикоммутирующим переменным (см. приложение):

$$\frac{\partial}{\partial\theta^A}\theta^B=\delta_A{}^B,\quad \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}}\theta^{\dot B}=\delta_{\dot A}{}^{\dot B}. \tag{14.16}$$

Производная $\partial/\partial\theta^A$ должна антикоммутировать с переменными θ; например,

$$\frac{\partial}{\partial\theta^A}(\theta^B\theta^C)=\delta_A{}^B\theta^C-\theta^B\delta_A{}^C. \tag{14.17}$$

Свойства оператора $\partial/\partial\theta^A$ при комплексном сопряжении приведены в приложении.

Операторы (14.14), (14.15) удовлетворяют соотношениям алгебры

$$\{l_A,\ l_B\}=0,\quad \{l_A,\ l_{\dot A}\}=2i(\sigma^m)_{A\dot A}\,l_m,$$
$$[l_m,\ l_A]=0,\quad [l_A,\ l_{mn}]=+\frac{1}{2}(\sigma_{mn})_A{}^B\,l_B. \tag{14.18}$$

Эти соотношения согласуются с требованием представления алгебры инфинитезимальными операторами. При вычислении коммутатора двух преобразований, действующих на суперполе $\phi(z)$, заметим, что нам необходимо пронести вариацию δ_1 за δ_2; таким образом, вариация δ_2 выполняется первой. По определению преобразование суперсимметрии имеет вид

$$\delta\phi = (\varepsilon^A l_A + \varepsilon^{\dot A} l_{\dot A})\,\phi,$$

а действие двух таких преобразований можно записать, используя соотношения (14.18), в следующем виде:

$$\begin{aligned}
[\delta_1,\ \delta_2]\,\phi &= \delta_1\left[(\varepsilon_2{}^A l_A + \varepsilon_2{}^{\dot A} l_{\dot A})\,\phi\right] - (1 \leftrightarrow 2) = \\
&= \left[\varepsilon_2{}^A l_A + \varepsilon_2{}^{\dot A} l_{\dot A},\ \varepsilon_1{}^B l_B + \varepsilon_1{}^{\dot B} l_{\dot B}\right]\phi = \\
&= -\varepsilon_2{}^A\varepsilon_1{}^{\dot B}\left\{l_A,\ l_{\dot B}\right\}\phi - \varepsilon_2{}^{\dot A}\varepsilon_1{}^B\left\{l_{\dot A},\ l_B\right\}\phi = \\
&= \left(-\varepsilon_2{}^A\varepsilon_1{}^{\dot B} 2i\,(\sigma^m)_{A\dot B}\,\partial_m - (1 \leftrightarrow 2)\right)\phi = \\
&= -2i\varepsilon_2{}^A\varepsilon_1{}^{\dot B}\,(\sigma^m)_{A\dot B}\,\partial_m\phi + \text{эрмит. сопр.} \qquad (14.19)
\end{aligned}$$

При другом варианте вычислений используем алгебру суперсимметрии

$$\begin{aligned}
\left[\varepsilon_1{}^A Q_A + \varepsilon_1{}^{\dot A} Q_{\dot A},\ \varepsilon_2{}^B Q_B + \varepsilon_2{}^{\dot B} Q_{\dot B}\right]\phi &= -\varepsilon_1{}^A\varepsilon_2{}^{\dot B}\left\{Q_A,\ Q_{\dot B}\right\}\phi - (1 \leftrightarrow 2) = \\
&= +\varepsilon_2{}^A\varepsilon_1{}^{\dot B}\left(-2i(\sigma^m)_{A\dot B}\right)P_m\phi + \text{эрмит. сопр.} \qquad (14.20)
\end{aligned}$$

Эти формулы совпадают, так как для малых a^m имеем

$$\delta_{a_m}\phi = \left(U\left(e^{a^m P_m}\right) - 1\right)\phi = a^m l_m\phi = a^m\partial_m\phi. \qquad (14.21)$$

Мы можем рассмотреть более общее пространство представлений, чем скалярные суперполя, приписывая суперполю индексы, соответствующие представлению группы Лоренца, которому оно принадлежит. Для суперполя ϕ_p получаем

$$U(g)\,\phi_p(z) = D_p{}^q\left(e^{-\omega^{mn} I_{mn}{}^{1/2}}\right)\phi_q(\tau(g)\,z), \qquad (14.22)$$

где g определяется формулой (14.1), а $D_p{}^q$ — матрица, отвечающая представлению, параметризованному индексом q. Поскольку генераторы $(N=1)$-суперсимметрии сами образуют представление группы Лоренца, подгруппа вращений в (14.22) не зависит от z. Спинорное суперполе преобразуется следующим образом:

$$U(g)\,\phi^A(z) = \left[\exp\left(-\frac{1}{4}\,\omega^{mn}\sigma_{mn}\right)\right]^A{}_B\,\phi^B(\tau(g)\,z). \qquad (14.23)$$

Действие инфинитезимальных генераторов на ϕ_p имеет тот же вид, что и раньше, но оператор l_{mn} вследствие лоренцева вращения приобретает дополнительное слагаемое; например,

$$l_{mn}\phi^C = \Big\{ -(x_m\partial_n - x_n\partial_m) - \frac{1}{2}\theta^B(\sigma^{mn})_B{}^A\frac{\partial}{\partial\theta^A} + \\ + \frac{1}{2}\theta^{\dot B}(\bar\sigma^{mn})_{\dot B}{}^{\dot A}\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}}\Big\}\phi^C - \frac{1}{2}(\sigma_{mn})^C{}_B\phi^B. \quad (14.24)$$

Мы можем разложить суперполе $\phi(x^\mu, \theta^A, \theta^{\dot A})$ в ряд Тейлора по степеням θ^A и $\theta^{\dot A}$; при этом коэффициенты разложения будут функциями x^μ:

$$\phi(x^\mu, \theta^A, \theta^{\dot A}) = C(x) + \theta^A\chi_A(x) + \theta^{\dot A}\chi_{\dot A}(x) + \frac{1}{2}\theta^A\theta_A f(x) + \\ + \frac{1}{2}\theta^{\dot A}\theta_{\dot A}k(x) + \theta^A\theta^{\dot B}A_{A\dot B}(x) + \frac{1}{2}\theta^A\theta_A\theta^{\dot B}\lambda_{\dot B}(x) + \\ + \frac{1}{2}\theta^{\dot A}\theta_{\dot A}\theta^B\lambda_B'(x) + \frac{1}{4}\theta^A\theta_A\theta^{\dot B}\theta_{\dot B}D(x). \quad (14.25)$$

Ряд обрывается на слагаемом, пропорциональном $(\theta^A)^2(\theta^{\dot B})^2$, так как $\theta^A\theta^B\theta^C = 0$.

Если суперполе скалярное, то можно найти суперпреобразования компонентных полей. Вспоминая преобразование (14.12), получаем

$$\delta\phi = \delta C + \theta^A\delta\chi_A + \ldots = (\varepsilon^A Q_A + \varepsilon^{\dot A}Q_{\dot A})\phi = \quad (14.26)$$

$$= \phi(x^\mu + i\varepsilon^A(\sigma^\mu)_{A\dot A}\theta^{\dot A} - i\theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot A}\varepsilon^{\dot A},\ \theta^A + \varepsilon^A,\ \theta^{\dot A} + \varepsilon^{\dot A}) - \\ - \phi(x^\mu, \theta^A, \theta^{\dot A}) = \varepsilon^A\chi_A + \varepsilon^{\dot A}\chi_{\dot A} + i\varepsilon^A(\sigma^\mu)_{A\dot A}\theta^{\dot A}\partial_\mu C - \\ - i\theta^A(\sigma^\mu)_{A\dot A}\varepsilon^{\dot A}\partial_\mu C + \theta^A\varepsilon_A f + \theta^{\dot A}\varepsilon_{\dot A}k + \varepsilon^A\theta^{\dot B}A_{A\dot B} + \\ + \theta^A\varepsilon^{\dot B}A_{A\dot B} + \ldots. \quad (14.27)$$

Сравнивая коэффициенты при θ, θ^2 и т. д., имеем

$$\delta C = \varepsilon^A\chi_A + \varepsilon^{\dot A}\chi_{\dot A},$$

$$\delta\chi_A = +f\varepsilon_A + A_{A\dot B}\varepsilon^{\dot B} - i(\sigma^\mu)_{A\dot A}\varepsilon^{\dot A}\partial_\mu C,$$

$$\delta\chi_{\dot A} = +k\varepsilon_{\dot A} - A_{A\dot B}\varepsilon^B - i(\sigma^\mu)_{A\dot A}\varepsilon^A\partial_\mu C,$$

$$\delta f = +\varepsilon^{\dot A}\lambda_{\dot A} - i\varepsilon^{\dot B}(\sigma^\mu)_{B\dot B}\partial_\mu\chi^B,$$

$$\delta k = +\varepsilon^B\lambda_B - i\varepsilon^B(\sigma^\mu)_{B\dot B}\partial_\mu\chi^{\dot B}, \quad (14.28)$$

$$\delta A_{A\dot B} = \varepsilon_{\dot B}\lambda_A - i\varepsilon^B(\sigma^\mu)_{A\dot B}\partial_\mu\chi^{\dot B} + i\varepsilon^{\dot C}(\sigma^\mu)_{A\dot C}\partial_\mu\chi_{\dot B} - \varepsilon_A\lambda_{\dot B},$$

$$\delta\lambda_A = -i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\,\varepsilon^{\dot{A}}\partial_\mu k + D\varepsilon_A + i(\sigma^\mu)_C{}^{\dot{B}}\,\partial_\mu A_{A\dot{B}}\varepsilon^C,$$
$$\delta\lambda_{\dot{A}} = -i\partial_\mu f(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\,\varepsilon^A + D\varepsilon_{\dot{A}} - i(\sigma^\mu)^C{}_{\dot{C}}\,\partial_\mu A_{C\dot{A}}\varepsilon^{\dot{C}},$$
$$\delta D = -i\varepsilon^B(\sigma^\mu)_{B\dot{B}}\,\partial_\mu\lambda^{\dot{B}} - i\varepsilon^{\dot{A}}(\sigma^\mu)_{C\dot{A}}\,\partial_\mu\lambda^C.$$

Полезно также найти правила преобразования скалярного супермультиплета в 4-компонентной форме. Используя приведенные в приложении обозначения и переопределяя некоторые поля для большего согласия с употребляемыми в литературе обозначениями, находим

$$\begin{aligned}
&\delta C = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\zeta, \quad \delta\zeta = (H + i\gamma_5 K - i\gamma_5\hat{\partial}C + \hat{A})\,\varepsilon,\\
&\delta H = \bar{\varepsilon}\lambda' + \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\zeta, \quad \delta K = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda' + i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\zeta,\\
&\delta A_\mu = \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda' + \bar{\varepsilon}\partial_\mu\zeta, \quad \delta\lambda' = (-\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + i\gamma_5 D')\,\varepsilon,\\
&\delta D' = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\lambda',
\end{aligned} \tag{14.29}$$

где

$$\begin{aligned}
&\zeta = -i\gamma_5\chi, \quad H = \frac{i}{2}(-f + k), \quad K = -\frac{1}{2}(f + k),\\
&A^{A\dot{B}} = (\sigma^\mu)^{A\dot{B}}\,A_\mu, \quad \lambda' = -2i\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}\hat{\partial}\chi, \quad D' = 2D + \frac{1}{2}\partial^2 C.
\end{aligned} \tag{14.30}$$

На заключительном этапе вычислений проверим замкнутость алгебры преобразований, действующих на поля в x-пространстве:

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\,C &= -i\varepsilon_2{}^A(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\,\varepsilon_1{}^{\dot{A}}\partial_\mu C - i\varepsilon_2{}^{\dot{A}}(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\,\varepsilon_1{}^A\partial_\mu C - (1 \leftrightarrow 2) =\\
&= -2i\varepsilon_2{}^A(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\,\varepsilon_1{}^{\dot{A}}\partial_\mu C + \text{эрмит. сопр.},
\end{aligned} \tag{14.31}$$

что находится в согласии с (14.19) и (14.20) при $\theta = 0$.

Конечно, мы могли бы воспользоваться активной интерпретацией действия преобразований группы, но тогда потребовалась бы другая интерпретация коммутации. В этом случае мы нашли бы, например,

$$\delta C = -(\varepsilon^A\chi_A + \varepsilon^{\dot{A}}\chi_{\dot{A}}),$$

и коммутатор преобразований должен быть вычислен без изменений порядка вариаций δ_1 и δ_2. При таком подходе следует сначала преобразовать мультиплет, т. е.

$$(C, \chi, \ldots) \to (C - \varepsilon_2{}^A\chi_A - \varepsilon_2{}^{\dot{A}}\chi_{\dot{A}}, \ldots),$$

а затем, вычисляя коммутатор, подставить этот новый мультиплет в закон преобразования, отвечающий вариации δ_1, т. е.

$$
\begin{aligned}
[\delta_1,\ \delta_2]\,C = \{&-\varepsilon_1{}^A\,(+\,i\,(\widehat{\partial})_{A\dot{A}}\,C\cdot\varepsilon_2{}^{\dot{A}} - f\varepsilon_{2A} - A_{A\dot{B}}\,\varepsilon_2{}^{\dot{B}}) - \\
&- \varepsilon_1{}^{\dot{A}}\,(+\,i\,(\widehat{\partial})_{A\dot{A}}\,\varepsilon_2{}^A - k\varepsilon_{2\dot{A}} + A_{B\dot{A}}\varepsilon_2{}^B)\} - (1 \leftrightarrow 2) = \\
= &-\,2i\varepsilon_1{}^A\,(\widehat{\partial})_{A\dot{A}}\,\varepsilon_2{}^{\dot{A}}C + \text{эрмит. сопр.} = \\
= &+\,2i\varepsilon_1{}^A\sigma^{\mu}{}_{A\dot{A}}\,\varepsilon_2{}^{\dot{A}}\partial_{\mu}C + \text{эрмит. сопр.} = \\
= &-\,2i\varepsilon_2{}^A\sigma^{\mu}{}_{A\dot{A}}\,\varepsilon_1{}^{\dot{A}}\partial_{\mu}C + \text{эрмит. сопр.}
\end{aligned}
$$

Результат действительно находится в согласии с формулой (14.31).

Реперы, связности и ковариантные производные. Реперы и связности можно получить из обычных соотношений

$$
1 + \delta z^n e_n{}^r K_r + \delta z^n \omega_n{}^{mn}\,\frac{1}{2}\,J_{mn} = \exp\{-x^{\mu}P_{\mu} - \theta^{\underline{A}}Q_{\underline{A}} - \theta^{\underline{\dot{A}}}\dot{Q}_{\underline{\dot{A}}}\}\times
$$

$$
\times\exp\{(x^{\mu} + \delta x^{\mu})\,P_{\mu} + (\theta^{\underline{A}} + \delta\theta^{\underline{A}})\,Q_{\underline{A}} + (\theta^{\underline{\dot{A}}} + \delta\theta^{\underline{\dot{A}}})\,Q_{\underline{\dot{A}}}\} = \qquad (14.32)
$$

$$
= 1 + \delta x^{\mu}P_{\mu} + \delta\theta^{\underline{A}}Q_{\underline{A}} + \delta\theta^{\underline{\dot{A}}}Q_{\underline{\dot{A}}} + \delta\theta^{\underline{\dot{A}}}\theta^{\underline{A}}i\,(\sigma^{\mu})_{\underline{A}\underline{\dot{A}}}\,P_{\mu} + \delta\theta^{\underline{A}}\,(i\sigma^{\mu})_{\underline{A}\underline{\dot{A}}}\,\theta^{\underline{\dot{A}}}P_{\mu}. \qquad (14.33)
$$

Результат легко находится, если воспользоваться формулой

$$
e^{-A}\,de^A = \left(\frac{e^{-A}-1}{-A}\right)\wedge dA = dA - \frac{1}{2}\,A\wedge dA + \ldots,
$$

где $1\wedge dA = dA$, $A\wedge dA = [A, dA]$, $A^2\wedge dA = [A, [A, dA]]$ и т. д. Поскольку $[Q, P] = 0$, этот ряд обрывается после второго члена. Следовательно, мы находим

$$
\begin{aligned}
&e_{\mu}{}^m = \delta_{\mu}{}^m, \quad e_{\mu}{}^A = e_{\mu}{}^{\dot{A}} = 0, \\
&e_{\dot{A}}{}^m = \theta^A i\,(\sigma^m)_{A\dot{A}}, \quad e_A{}^m = i\,(\sigma^m)_{A\dot{A}}\,\theta^{\dot{A}}, \qquad (14.34) \\
&e_{\dot{A}}{}^B = \delta_{\dot{A}}{}^B, \quad e_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} = \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}, \quad e_A{}^{\dot{B}} = e_B{}^A = 0,
\end{aligned}
$$

а связность $\omega_{\pi}{}^{mn}$ обращается в нуль. В матричной форме этот результат принимает вид

$$
E_{\pi}{}^M = \begin{Vmatrix} \delta_{\mu}{}^m & 0 & 0 \\ i\,(\sigma^m)_{A\dot{A}}\,\theta^{\dot{A}} & \delta_A{}^B & 0 \\ i\,(\sigma^m)_{A\dot{A}}\,\theta^A & 0 & \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \end{Vmatrix}. \qquad (14.35)
$$

Обратная матрица определена на суперпространстве соотношением

$$E_\Lambda{}^M E_M{}^\pi = \delta_\Lambda{}^\pi \quad \text{или} \quad E_M{}^\Lambda E_\Lambda{}^N = \delta_M{}^N \tag{14.36}$$

и может быть записана в следующем виде:

$$E_M{}^\Lambda = \begin{Vmatrix} \delta_m{}^\mu & 0 & 0 \\ -i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\theta^{\dot{A}} & \delta_A{}^B & 0 \\ -i(\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\theta^A & 0 & \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \end{Vmatrix}. \tag{14.37}$$

Используя этот репер и спиновую связность, мы можем построить ковариантную производную. Она имеет вид

$$D_M = E_M{}^\Lambda \left(\partial_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda{}^{mn} J_{mn}\right) = (D_m,\ D_A,\ D_{\dot{A}}), \tag{14.38}$$

где

$$D_m = \partial_m, \quad D_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i(\sigma^m)_{A\dot{A}}\theta^{\dot{A}}\partial_m, \quad D_{\dot{A}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{A}}} - i(\sigma^m)_{A\dot{A}}\theta^A\partial_m. \tag{14.39}$$

Ковариантные производные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} [\partial_m,\ D_A] = [\partial_m,\ D_{\dot{A}}] = 0, \\ \{D_A,\ D_{\dot{B}}\} = -2i(\sigma^m)_{A\dot{B}}\partial_m, \quad \{D_A,\ D_B\} = \{D_{\dot{A}},\ D_{\dot{B}}\} = 0. \end{gathered} \tag{14.40}$$

Они совершенно аналогичны, за исключением общего знака, соотношениям алгебры операторов l_A, $l_{\dot{A}}$, которые определены соотношениями (14.18).

Читатель может проверить, что построенная ковариантная производная выполняет те функции, которых мы от нее ожидали. Явное вычисление показывает, что

$$[D_A,\ l_n] = \{D_A,\ Q_B\} = \{D_A,\ Q_{\dot{B}}\} = 0, \quad [D_A,\ l_{mn}] = 0. \tag{14.41}$$

Кручение и кривизну в $(N = 1)$-суперпространстве, отвечающие реперу и спиновой связности (14.35), можно найти из соотношения

$$[D_M,\ D_N] = T_{MN}{}^R D_R + \frac{1}{2} R_{MN}{}^{mn} J_{mn}. \tag{14.42}$$

Это значит, что

$$R_{MN}{}^{rs} = 0 \tag{14.43}$$

и все компоненты кручения равны нулю, за исключением

$$T_{A\dot{A}}{}^m = -2i(\sigma^m)_{A\dot{A}}. \tag{14.44}$$

Следовательно, $(N=1)$-суперпространство есть многообразие без кривизны, но с кручением и по определению не является римановым многообразием. Отсюда следует, что любая теория с локальной суперсимметрией, основанная на римановом супермногообразии, не может содержать в качестве предельного случая теорию с глобальным суперпространством.

Важное свойство ковариантных производных состоит в том, что они не образуют неприводимого представления группы суперсимметрии. Например, каждое из суперполей

$$D_A\phi,\ D_{\dot A}\phi,\ \partial_m\phi \tag{14.45}$$

преобразуется в себя же и, следовательно, как мы увидим ниже, может использоваться для наложения ковариантных связей на ϕ.

Ковариантные производные можно применять для вывода законов преобразования компонентных полей в x-пространстве. Преобразование суперсимметрии низшей компоненты $C=\phi|_{\theta=0}$ произвольного суперполя ϕ имеет вид

$$\delta\phi|_{\theta=0}=\delta C=\left[(\varepsilon^A l_A+\varepsilon^{\dot A} l_{\dot A})\,\phi\right]|_{\theta=0}=\left[(\varepsilon^A D_A+\varepsilon^{\dot A} D_{\dot A})\,\phi\right]|_{\theta=0}. \tag{14.46}$$

Это равенство справедливо, поскольку при $\theta=0$ действия производной D_A и заряда Q_A на суперполе совпадают. Высшие компоненты суперполя в результате использования ковариантной производной могут стать низшими компонентами другого суперполя. Рассмотрим суперполя

$$\phi,\ D_A\phi,\ D_{\dot A}\phi,\ -\tfrac{1}{2}D^A D_A\phi,\ -\tfrac{1}{2}D^{\dot A}D_{\dot A}\phi,\ \tfrac{1}{2}[D_{\dot B},\ D_A]\,\phi,\ \ldots. \tag{14.47}$$

Их компоненты при $\theta=0$ соответственно равны

$$C,\ \chi_A,\ \chi_{\dot A},\ f,\ k,\ A_{A\dot B},\ \ldots. \tag{14.48}$$

Преобразования суперсимметрии данных компонентных полей можно найти с помощью ковариантной производной, используя только соотношения (14.40):

$$\delta C=(\varepsilon^A D_A+\varepsilon^{\dot A}D_{\dot A})\,\phi|_{\theta=0}=\varepsilon^A\chi_A+\varepsilon^{\dot A}\chi_{\dot A}, \tag{14.49}$$

$$\delta\chi_A=\left[(\varepsilon^B D_B+\varepsilon^{\dot B}D_{\dot B})\,D_A\phi\right]_{\theta=0}=$$

$$=\left[-\tfrac{1}{2}\varepsilon_A D^C D_C\phi+\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\dot B}\{D_{\dot B},\ D_A\}\,\phi+\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\dot B}[D_{\dot B},\ D_A]\,\phi\right]_{\theta=0}= \tag{14.50}$$

$$=f\varepsilon_A-i(\sigma^m)_{A\dot B}\varepsilon^{\dot B}\partial_m C+A_{A\dot B}\varepsilon^{\dot B} \tag{14.51}$$

и т. д. При выводе этих преобразований мы учли тот факт, что

$$D^C\theta_A|_{\theta=0} = \varepsilon^{CB}D_B\theta_A|_{\theta=0} = -\delta^C{}_A. \tag{14.52}$$

Скалярное суперполе $\phi(z)$ содержит поля со спином 0, 1/2 и 1. Но простейшая суперсимметричная модель Весса — Зумино не содержит поле со спином 1. Для преодоления этой трудности нужно найти подмультиплеты скалярного супермультиплета, которые при преобразованиях суперсимметрии преобразуются в себя же и не удовлетворяют уравнениям движения. Такие мультиплеты можно получить, накладывая на ϕ условия с помощью ковариантной производной. Ковариантная связь низшей размерности имеет вид

$$D_{\dot A}\phi = 0. \tag{14.53}$$

Заметим, что канонические размерности ковариантных производных и координат равны

$$\dim[D_A] = \dim[d\theta] = \frac{1}{2}, \quad \dim[\theta] = -\frac{1}{2},$$

а размерность производных равна

$$\dim[\partial_\mu] = \dim[x_\mu^{-1}] = 1.$$

С помощью приведенного выше метода можно получить в x-пространстве компонентные поля и законы их преобразования. Компонентные поля имеют вид

$$z = \phi|_{\theta=0}, \quad \chi_A = D_A\phi|_{\theta=0}, \quad f = -\frac{1}{2}D^AD_A\phi|_{\theta=0}. \tag{14.54}$$

Ясно, что в x-пространстве нет других компонент, следующих за полем f. Применение производной $D_{\dot B}$ приводит к пространственно-временны́м производным приведенных выше полей. Законы преобразования имеют следующий вид:

$$\delta z = [(\varepsilon^AD_A + \varepsilon^{\dot A}D_{\dot A})\phi]_{\theta=0} = \varepsilon^A\chi_A, \tag{14.55}$$

$$\delta\chi_A = [(\varepsilon^BD_B + \varepsilon^{\dot B}D_{\dot B})D_A\phi]_{\theta=0} = f\varepsilon_A - 2i(\sigma^\mu)_{A\dot B}\varepsilon^{\dot B}\partial_\mu z, \tag{14.56}$$

$$\delta f = \left[(\varepsilon^BD_B + \varepsilon^{\dot B}D_{\dot B})\left(-\frac{1}{2}D^AD_A\phi\right)\right]_{\theta=0} = -2i\varepsilon^{\dot B}(\sigma^\mu)_{A\dot B}\partial_\mu\chi^A, \tag{14.57}$$

где использован тот факт, что $D_AD_BD_C = 0$.

Эти правила преобразований в 4-компонентных обозначениях принимают вид

$$\delta A = \bar\varepsilon\chi, \quad \delta B = i\bar\varepsilon\gamma_5\chi, \quad \delta\chi = [F + i\gamma_5G + \hat\partial(A + i\gamma_5B)]\varepsilon, \tag{14.58}$$

$$\delta F = \bar\varepsilon\hat\partial\chi, \quad \delta G = i\bar\varepsilon\gamma_5\hat\partial\chi, \tag{14.59}$$

где

$$f = F + iG, \quad z = -\frac{1}{2}(A + iB), \quad \chi^a = \begin{pmatrix} \chi^A \\ (\chi_A)^* \end{pmatrix}. \qquad (14.60)$$

Читатель узнает в этих выражениях представление, которое используется для построения модели Весса — Зумино; мы будем называть такой набор полей киральным мультиплетом или мультиплетом Весса — Зумино.

Выбрав удобный базис, можно найти состав полей указанного мультиплета, не изменяющийся после наложения связи $D_{\dot A}\phi = 0$.

Рассмотрим новые координаты [67]

$$y^\mu = x^\mu - i\theta^A (\sigma^\mu)_{A\dot B}\theta^{\dot B}, \quad \zeta^A = \theta^A, \quad \zeta^{\dot A} = \theta^{\dot A}, \qquad (14.61)$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}} = \frac{\partial\zeta^{\dot B}}{\partial\theta^{\dot A}}\frac{\partial}{\partial\zeta^{\dot B}} + \frac{\partial y^\mu}{\partial\theta^{\dot A}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial\zeta^{\dot A}} + \zeta^A(\sigma^\mu)_{A\dot A}\frac{\partial}{\partial y^\mu},$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta^A} = \frac{\partial}{\partial\zeta^A} - i(\sigma^\mu)_{A\dot B}\zeta^{\dot B}\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \qquad (14.62)$$

Используя формулы приложения, можно убедиться, что y^μ не является действительной координатой. В новых координатах связь $D_{\dot A}\phi = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\zeta^{\dot B}}\phi(y, \zeta^A, \zeta^{\dot B}) = 0. \qquad (14.63)$$

Это свидетельствует о независимости ϕ от $\zeta^{\dot A}$, поэтому суперполе должно быть записано в виде

$$\phi = z(y) + \zeta^A\chi_A(y) + \frac{1}{2}\zeta^A\zeta_A f(y) =$$
$$= \exp\left\{-\theta^A(\sigma_\mu)_{A\dot B}\theta^{\dot B}\partial^\mu\right\}\left\{z(x) + \theta^A\chi_A(x) + \frac{1}{2}\theta^A\theta_A f(x)\right\}. \qquad (14.64)$$

Последнее равенство получено после замены переменной по формуле (14.61) и разложения в ряд Тейлора, т. е. $f(x+a) = (\exp a^\mu\partial_\mu)f(x)$.

Добавочная связь

$$D_A\phi = 0 \qquad (14.65)$$

в дополнение к связи (14.53) (последнее уравнение фактически следует из (14.53) после комплексного сопряжения, если ϕ — действительное поле) приводит к соотношению

$$\{D_A, D_{\dot B}\}\phi = -2i(\sigma^\mu)_{A\dot B}\partial_\mu\phi = 0$$

или

$$\partial_\mu \phi = 0. \tag{14.66}$$

Это уравнение означает, что все компонентные поля суперполя ϕ постоянные. Из законов преобразования компонент следует, что единственное подходящее суперполе содержит поля

$$C = \text{const}, \quad \chi_\alpha = f = k = A_\mu = \lambda_\alpha = D = 0. \tag{14.67}$$

Следующая после условия $D_{\dot A}\phi = 0$ связь минимальной размерности, которую мы накладываем на ϕ, имеет вид

$$D^A D_A \phi = 0. \tag{14.68}$$

Но в этом случае можно также потребовать, чтобы ϕ было действительно, и поэтому $D^{\dot A} D_{\dot A}\phi = 0$. В результате получим компоненты суперполя:

$$\begin{gathered} \phi\,|_{\theta=0} = C, \quad D_A\phi\,|_{\theta=0} = \chi_A, \quad D_{\dot A}\phi\,|_{\theta=0} = \chi_{\dot A}, \\ \frac{1}{2}[D_A,\ D_{\dot B}]\,\phi\,|_{\theta=0} = A_{A\dot B} = A_\mu (\sigma^\mu)_{A\dot B}. \end{gathered} \tag{14.69}$$

Очевидно, что спинорные производные высших порядков приводят лишь к компонентным полям в x-пространстве, которые являются пространственно-временными производными приведенных выше полей. Законы преобразования имеют вид

$$\begin{gathered} \delta C = \varepsilon^A \chi_A + \varepsilon^{\dot A}\chi_{\dot A}, \quad \delta\chi_A = -i\,(\sigma^\mu)_{A\dot B}\,\varepsilon^{\dot B}\partial_\mu C + A_{A\dot B}\varepsilon^{\dot B}, \\ \delta A_{A\dot B} = i\varepsilon^{\dot C}(\sigma_\mu)_{A\dot C}\,\partial^\mu \chi_{\dot B} + i\varepsilon_{\dot B}\,(\sigma^\mu)_{A\dot C}\partial_\mu \chi^{\dot C} - i\varepsilon_A\,(\sigma^\mu)_{C\dot B}\partial_\mu \chi^C - \\ - i\varepsilon^B\,(\sigma^\mu)_{B\dot B}\,\partial^\mu \chi_A. \end{gathered} \tag{14.70}$$

Подействовав оператором $D^A D^{\dot B}$ на уравнение (14.68), получим

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \tag{14.71}$$

В 4-компонентных обозначениях эти законы преобразования записываются в терминах полей (14.30) в следующем виде:

$$\delta C = i\bar\varepsilon\gamma_5\zeta, \quad \delta\zeta = (-i\gamma_5\partial C + \hat A)\,\varepsilon, \quad \delta A_\mu = -\bar\varepsilon\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu\zeta. \tag{14.72}$$

Этот мультиплет называют линейным; в действительности он приводит к альтернативной формулировке модели Весса — Зумино [47].

Другую связь размерности 1

$$\frac{1}{2}[D_A,\ D_{\dot B}]\,\phi = 0 \tag{14.73}$$

нельзя использовать для определения нового суперполя. Оказывается, что для выбора $A_\mu = 0$ в (14.72) и (14.29) требуется постоянство суперполя ($C = \text{const}$, остальные компоненты равны нулю).

Выясним, можно ли потребовать, чтобы суперполе ϕ, определенное выражением (14.25), удовлетворяло связи размерности 3/2, т. е.

$$D_{\dot B} D^A D_A \phi = 0. \tag{14.74}$$

Такая связь приводит к равенству нулю компоненты λ' в (14.30). Соответствующий набор компонент суперполя определяется формулами (14.29) и имеет следующий вид:

$$(C,\ \zeta,\ H,\ K,\ A_\mu,\ \lambda' = 0,\ D' = 0), \tag{14.75}$$

причем $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$, т. е. $A_\mu = \partial_\mu A$. Конечно, это не что иное, как мультиплет Весса — Зумино.

Наконец, можно рассмотреть мультиплет, который начинается с поля λ'. Для этого рассмотрим не связи, а частный вид суперполя

$$W_A = D_A \bar D^2 \phi, \tag{14.76}$$

где суперполе ϕ действительное и

$$\bar D^2 = D^{\dot A} D_{\dot A}.$$

Такой мультиплет включает только поля

$$(f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ \lambda',\ D') \tag{14.77}$$

и не содержит мультиплета (14.75). Мы назовем его мультиплетом Янга — Миллса.

Все предыдущие рассуждения можно также повторить для суперполей, снабженных лоренцевыми индексами. Но эти индексы не вносят существенных изменений, поскольку они преобразуются с помощью величин, которые не являются функциями на суперпространстве.

Интегрирование в суперпространстве и δ-функции. Прежде чем построить инвариантное интегрирование, необходимо решить, как интегрировать по антикоммутирующим переменным. В случае одной антикоммутирующей переменной θ мы определим [52]

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta\, \theta = 1. \tag{14.78}$$

Пределы интегрирования не указаны, но предполагается, что они не существенны. Это единственное возможное определение, инвариантное относительно сдвига $\theta \to \theta + \varepsilon$. Поэтому интегри-

рование идентично дифференцированию. Для произвольной функции $f(\theta) = a + \theta b$ имеем

$$\int d\theta f(\theta) = b = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta). \tag{14.79}$$

Это довольно примитивное определение интегрирования, по-видимому, не ведет к топологически интересным результатам.

Определение непосредственно обобщается на случай интегрирования по многим антикоммутирующим переменным. Так, для двух переменных θ_1, θ_2 получаем

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = 1,$$

тогда как

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{14.80}$$

Теперь мы построим инвариантное интегрирование по фактор-пространству SP/L, используя супердетерминант [1]) репера. Пользуясь формулой (14.35) и определением супердетерминанта, находим

$$\det E_\pi{}^M = 1. \tag{14.81}$$

Следовательно, элемент объема равен

$$d^8z = d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}, \tag{14.82}$$

где

$$\int d^2\theta\theta^2 = 1, \quad \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}^2 = 1, \tag{14.83}$$

или иначе

$$\int d^2\theta = -\frac{1}{4}\partial^2 \equiv -\frac{1}{4}\partial^A\partial_A, \quad \int d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\bar{\partial}^2 \equiv -\frac{1}{4}\partial^{\dot{A}}\partial_{\dot{A}}, \tag{14.84}$$

где

$$\partial_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A}, \quad \partial_{\dot{A}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{A}}}.$$

Под знаком интеграла по пространству-времени производные ∂_A и $\partial_{\dot{A}}$ мы можем заменить на D_A и $D_{\dot{A}}$ соответственно. Следовательно, используя приведенное выше определение интегрирования, получаем равенства

$$\int d^4x\, d^4\theta D_A\phi = \int d^4x\, d^4\theta Q_A\phi = \int d^4x\, d^4\theta\, \partial_A\phi = 0 \tag{14.85}$$

и аналогичные формулы для $D_{\dot{A}}$. Интегрирование по частям производится следующим образом:

$$\int d^4x\, d^4\theta\, (D_A\phi_1)\,\phi_2 = -\int d^4x\, d^4\theta\phi_1 D_A\phi_2. \tag{14.86}$$

[1]) См., например, [52, 202]. — *Прим. ред.*

Это позволяет строить выражения, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии.

В случае скалярного суперполя инвариант имеет вид

$$\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\phi = \int d^4x\, \frac{D^2\bar{D}^2}{16}\phi = \frac{1}{4}\int D(x)\, d^4x. \qquad (14.87)$$

Инвариантность этого интеграла можно показать иначе. Заметим, что $D(x)$ — поле высшей размерности, а поскольку размерность параметра преобразования суперсимметрии ε равна $-1/2$, супервариация $D(x)$, которая является линейной, должна быть пространственно-временной дивергенцией.

Для кирального суперполя $(D_{\dot{A}}\phi = 0)$ $\int d^4x\, d^4\theta\phi = 0$; тем не менее, интегрируя по подпространству суперпространства, найдем следующий инвариант:

$$\left\{\int d^4x\, d^2\theta\phi + \text{эрмит. сопр.}\right\} = \int d^4x\, \frac{1}{2}(f + f^*). \qquad (14.88)$$

Киральный интеграл можно записать как интеграл по всему суперпространству, если воспользоваться соотношением

$$\bar{D}^2D^2\phi = +16\partial^2\phi. \qquad (14.89)$$

В таком случае имеем

$$\int d^4x\, d^2\theta\phi = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}D^2\phi\right] = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}D^2\right)\left(+\frac{\bar{D}^2D^2}{16\partial^2}\phi\right) =$$
$$= -\int d^4x\, d^4\theta\left(\frac{D^2\phi}{4\partial^2}\right). \qquad (14.90)$$

Эту формулу можно получить иначе, если учесть для связи $D_{\dot{A}}\phi = 0$ решение

$$\phi = -\frac{1}{4}\bar{D}^2U. \qquad (14.91)$$

При этом мы находим

$$\int d^4x\, d^2\theta\phi = \int d^4x\, d^4\theta U. \qquad (14.92)$$

По аналогии с обычным x-пространством можно определить δ-функцию в θ-пространстве. Возвращаясь к случаю одномерной антикоммутирующей переменной θ, определим $\delta(\theta - \theta')$ следующим образом:

$$\int d\theta f(\theta)\,\delta(\theta - \theta') = f(\theta') \qquad (14.93)$$

для любых функций f. В частности, имеем

$$\int d\theta\delta(\theta-\theta')=1=\frac{\partial}{\partial\theta}\delta(\theta-\theta'). \tag{14.94}$$

Поскольку переменная θ по определению антикоммутирующая, δ-функция есть не что иное, как

$$\delta(\theta-\theta')=\theta-\theta'. \tag{14.95}$$

В случае $(N=1)$-суперпространства определим $\delta^4(\theta_1-\theta_2)\equiv\delta_{12}$ с помощью соотношения

$$\int d\theta_1 f(\theta_1)\,\delta(\theta_1-\theta_2)=f(\theta_2), \tag{14.96}$$

которое выполняется для любых функций f. В частности, это означает, что

$$\int d^4\theta_1\delta^4(\theta_1-\theta_2)=1=\frac{\partial_1^2\bar\partial_1^2}{16}\delta^4(\theta_1-\theta_2). \tag{14.97}$$

Под знаком интеграла по пространству-времени мы можем использовать формулу

$$D_1^2\bar D_1^2\delta_{12}=+16. \tag{14.98}$$

Представим δ-функцию следующим выражением:

$$\delta_{12}=4(\theta_1-\theta_2)^2(\bar\theta_1-\bar\theta_2)^2. \tag{14.99}$$

Приведем некоторые свойства δ-функции, весьма полезные при вычислениях с помощью фейнмановских правил для суперграфов:

$$\delta_{12}\delta_{12}=\delta_{12}D_A\delta_{12}=\delta_{12}D_{\dot A}\delta_{12}=\delta_{12}\bar D^2\delta_{21}=\delta_{12}D_{\dot A}D^2\delta_{12}=$$
$$=\delta_{12}D^2\delta_{12}=\delta_{12}\bar D^2D_A\delta_{12}=0, \tag{14.100}$$

$$\delta_{12}D^2\bar D^2\delta_{21}=\delta_{12}\bar D^2D^2\delta_{21}=\delta_{12}D^A\bar D^2D_A\delta_{12}=\delta_{12}. \tag{14.101}$$

Эти формулы легко получить, используя явный вид δ-функции (14.99).

Теперь можно определить функциональное дифференцирование по суперполям. Для скалярного суперполя ϕ имеем

$$\frac{\delta\phi(x',\theta')}{\delta\phi(x,\theta)}=\delta^4(x-x')\,\delta^4(\theta-\theta')=\delta^8(z-z') \tag{14.102}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x,\theta)}\int f(\phi)\,d^8z=\frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi(x,\theta)). \tag{14.103}$$

Полезно также определить функциональную производную по киральным суперполям. Она должна быть такой, чтобы выполнялось определяющее условие $D_{\dot{A}}\phi = 0$, т. е.

$$D_{\dot{A}} \frac{\delta\phi(x', \theta')}{\delta\phi(x, \theta)} = 0. \tag{14.104}$$

Поэтому примем следующее определение производной:

$$\frac{\delta\phi(x', \theta')}{\delta\phi(x, \theta)} = -\frac{1}{4} D^2\delta^4(x - x')\,\delta^4(\theta - \theta'). \tag{14.105}$$

В результате находим

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x, \theta)} \int d^4x'\, d^2\theta' f(\phi(x', \theta')) = \int d^4x'\, d^2\theta' f'(\phi) \frac{\delta\phi(x', \theta')}{\delta\phi(x, \theta)} =$$

$$= \int d^4x'\, d^2\theta' f'(\phi) \left(-\frac{D^2}{4}\delta^4(x - x')\,\delta^4(\theta - \theta')\right) =$$

$$= \int d^4x'\, d^2\theta' \left(-\frac{D^2}{4}\right) f'(\phi)\,\delta^8(z - z') = f'(\phi(x, \theta)). \tag{14.106}$$

Расширенное суперпространство: общий формализм. Построим теперь фактор-пространство — расширенное суперпространство: расширенная супергруппа Пуанкаре/группа Лоренца. Напомним перестановочные соотношения алгебры расширенной суперсимметрии, приведенные в гл. 2; наряду с коммутаторами группы Пуанкаре имеем следующие соотношения:

$$\{Q^{Ai}, Q^{Bj}\} = 2i\varepsilon^{AB}(\Omega^e)^{ij} Z_e,$$

$$\{Q^{\dot{A}}_i, Q^{\dot{B}}_j\} = 2i\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}(\Omega^e)_{ij} Z_e,$$

$$\{Q^{Ai}, Q^{\dot{B}}_j\} = -2i(\sigma^\mu)^{A\dot{B}} P_\mu \delta^i_j, \tag{14.107}$$

$$[Q^{Ai}, J_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^A{}_B Q^{Bi}, \tag{14.108}$$

$$[Q^{Ai}, P_\mu] = 0, \tag{14.109}$$

$$[Q^{Ai}, T^r] = (t^r)^i{}_j Q^{Aj}, \tag{14.110}$$

где

$$(\Omega^e)^{ij} = -(\Omega^e)^{ji},\ i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$(\Omega^e)_{ij} = [(\Omega^e)^{ij}]^*, \tag{14.111}$$

причем центральные заряды Z_e выбраны действительными. Действительность компонент связности Ω^e следует из майорановского свойства генератора Q. Общий элемент группы имеет вид

$$g = \exp\left\{a^\mu P_\mu + \varepsilon^A{}_i Q_A{}^i + \varepsilon^{\dot{A}i} Q_{\dot{A}i} + w^e Z_e + \frac{1}{2} w^{mn} J_{mn}\right\}, \tag{14.112}$$

а элементы фактор-пространства параметризуются элементами группы вида

$$e^{z^\pi K_\pi} = \exp\{x^\mu P_\mu + \theta^A{}_i Q_A{}^i + \theta^{\dot{A}i} Q_{\dot{A}i} + z^e Z_e\}. \tag{14.113}$$

Следовательно, параметры фактор-пространства таковы:

$$z^{\pi} = (x^{\mu},\ \theta^{A}{}_{i},\ \theta^{\dot{A}i},\ z^{e}).$$

Под действием элемента группы g точка фактор-пространства z^{π} переходит в точку с координатой z'^{π}, причем

$$g e^{z^{\pi} K_{\pi}} = e^{z'^{\pi} K_{\pi}}. \tag{14.114}$$

Сравнивая обе части равенства (14.114), найдем изменение координат при преобразовании суперсимметрии

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + i\varepsilon^{A}{}_{i} (\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\, \theta^{\dot{B}i} - i\theta^{A}{}_{i} (\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\, \varepsilon^{\dot{B}i}, \\ \theta'^{A}{}_{i} &= \theta^{A}{}_{i} + \varepsilon^{A}{}_{i}, \quad \theta'^{\dot{A}i} = \theta^{\dot{A}i} + \varepsilon^{\dot{A}i}, \\ z'^{e} &= z^{e} + i\varepsilon^{A}{}_{i}\, \theta_{Aj} (\Omega^{e})^{ij} + i\varepsilon^{\dot{A}i} \theta_{\dot{A}}{}^{j} (\Omega^{e})_{ij}, \end{aligned} \tag{14.115}$$

в то время как действию лишь центрального заряда отвечает преобразование $z^{e} \to z'^{e} + w^{e}$, а координаты x и θ остаются без изменений.

Скалярные суперполя в расширенном суперпространстве имеют вид

$$\phi(z') \equiv \phi(z) = \phi(x^{\mu},\ \theta^{A}{}_{i},\ \theta^{\dot{A}i},\ z^{e}), \tag{14.116}$$

а действие группы суперсимметрии определено следующим образом:

$$U(g)\, \phi(z) = \phi(z'). \tag{14.117}$$

Инфинитезимальные генераторы алгебры суперсимметрии определяются из соотношений

$$\delta g^{N} f_{N\Lambda}\, \partial_{\Lambda} \phi = \delta g^{N} X_{N} \phi, \tag{14.118}$$

где для элемента малой группы δg^{N} имеем

$$z'^{\pi} \equiv z^{\pi} + \delta g^{N} f_{N}{}^{\pi}. \tag{14.119}$$

Инфинитезимальные операторы имеют вид

$$\begin{aligned} l_{\mu} &= \partial_{\mu}, \quad l_{A}{}^{i} = \frac{\partial}{\partial \theta^{A}{}_{i}} + i (\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\, \theta^{\dot{B}i} + i (\Omega^{e})^{ij} \theta_{Aj} \frac{\partial}{\partial z^{e}}, \\ l_{\dot{A}i} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}i}} + i (\sigma^{\mu})_{A\dot{A}}\, \theta^{A}{}_{i} + i\theta_{\dot{A}}{}^{j} (\Omega^{e})_{ij} \frac{\partial}{\partial z^{e}}, \quad l^{e} = \frac{\partial}{\partial w^{e}}, \\ l_{mn} &= -(x_{m}\partial_{n} - x_{n}\partial_{m}) - \frac{1}{2} \theta^{B} (\sigma^{mn})_{B}{}^{A} \frac{\partial}{\partial \theta^{A}} + \frac{1}{2} \theta^{\dot{B}} (\bar{\sigma}^{mn})_{\dot{B}}{}^{\dot{A}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}}}, \\ l_{r} &= -\theta^{A}{}_{i} (t_{r})^{i}{}_{j} \frac{\partial}{\partial \theta^{A}{}_{j}} - \theta^{\dot{A}i} [(t^{r})^{i}{}_{j}]^{*} \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}i}}. \end{aligned} \tag{14.120}$$

Коэффициенты разложения произвольного суперполя в ряд Тейлора по степеням z^e, $\theta^A{}_i$, $\theta^{\dot{B}j}$ зависят только от x^μ. Тем не менее имеется бесконечный набор таких полей в x-пространстве, поскольку z^e — бозонные координаты и разложение по ним в общем случае не обрывается на конечном числе членов. Разложение по переменной θ обрывается на слагаемом, содержащем $(\theta^A{}_i)^4\,(\theta^{\dot{B}j})^4$. Разложение имеет вид

$$\phi\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j},\ z^e\right)=\phi^{(0)}\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j}\right)+\phi^{(1)}_{(e)}\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j}\right)z^{(e)}+\ldots,$$

где

$$\phi^{(0)}\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j}\right)\equiv\phi\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j},\ 0\right)=C^{(0)}\left(x^\mu\right)+\theta^A{}_i\chi_A{}^{(0)\,i}+\ldots,$$

$$\phi^{(1)}_{(e)}\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j}\right)\equiv\frac{d\phi}{dz^e}\left(x^\mu,\ \theta^A{}_i,\ \theta^{\dot{B}j},\ z^2\right)\Big|_{z^e=0}= \tag{14.121}$$

$$=C^{(1)}_{(e)}\left(x^\mu\right)+\theta^A{}_i\chi^{(1)\,i}_{(e)\,A}+\ldots \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы избежать бесконечного ряда компонентных полей в x-пространстве, будем проводить вычисления с помощью ковариантных производных.

Супертетрада и спиновая связность определены соотношением

$$e^{-z\cdot T}e^{(z+\delta z)\cdot T}=\delta z^\pi\left(e_\pi{}^m P_m+e_{\pi i}{}^A Q_A{}^i+e_\pi{}^{\dot{B}j}Q_{\dot{B}j}+e_\pi{}^e z_e\right)+\delta z^\pi\frac{1}{2}\Omega_\pi{}^{mn}J_{mn}. \tag{14.122}$$

Прямые вычисления приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned}
&e_\mu{}^m=\delta_\mu{}^m,\quad e_\mu{}^A{}_i=0,\quad e_\mu{}^{\dot{B}j}=0,\quad e_\mu{}^e=0,\\
&e_{\underline{A}}{}^{iB}{}_j=\delta_A{}^B\delta_j{}^i,\quad e_{\underline{A}}{}^{i\dot{B}j}=0,\\
&e_{\underline{A}}{}^{im}=+\,i\left(\sigma^m\right)_{A\dot{B}}\theta^{\dot{B}i},\quad e_{\underline{A}}{}^{ie}=+\,i\left(\Omega^e\right)^{ij}\theta_{Aj},\\
&e_{\underline{\dot{A}i}}{}^B{}_j=0,\quad e_{\underline{\dot{A}i}}{}^{\dot{B}j}=\delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}\delta_i{}^j,\\
&e_{\underline{\dot{A}i}}{}^m=i\left(\sigma^m\right)_{A\dot{A}}\theta^A{}_i,\quad e_{\underline{\dot{A}i}}{}^e=+\,i\left(\Omega^e\right)_{ij}\theta_{\dot{A}}{}^j,\\
&e_{\underline{e}}{}^m=e_{\underline{e}}{}^A{}_j=e_{\underline{e}}{}^{\dot{B}j}=0,\quad e_{\underline{e}}{}^{e'}=\delta_e{}^{e'}
\end{aligned} \tag{14.123}$$

и

$$\Omega_\pi{}^{mn}=0. \tag{14.124}$$

Обратная тетрада имеет следующие ненулевые компоненты:

$$e_m{}^{\mu} = \delta_m{}^{\mu}, \quad e_A{}^{i\mu} = -i(\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\,\theta^{\dot{B}i}, \quad e_A{}^{iB}{}_{\underline{j}} = \delta_A{}^{B}\delta_j{}^{i},$$
$$e_{\dot{B}i}{}^{\mu} = -i(\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\,\theta^{A}{}_{i}, \quad e_{\dot{A}i}{}^{\dot{B}j} = \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}\delta_i{}^{j}, \qquad (14.125)$$
$$e_A{}^{ie}{}_{\underline{e}} = -i(\Omega^e)^{ij}\,\theta_{Aj}, \quad e_{\dot{B}i}{}^{e}{}_{\underline{e}} = -i(\Omega^e)_{ij}\,\theta_{\dot{B}}, \quad e_{e}{}^{e'}{}_{\underline{e}'} = \delta_e{}^{e'}.$$

Следовательно, ковариантная производная дается выражением

$$D_M = \left(E_M{}^{\pi}\left(\partial_{\pi} + \frac{1}{2}\,\Omega_{\pi}{}^{mn}J_{mn}\right)\right), \qquad (14.126)$$

что равно

$$D_M = (D_m,\ D_A{}^{i},\ D_{\dot{B}j},\ D_e),$$

где

$$D_m = \partial_m, \quad D_A{}^{i} = \frac{\partial}{\partial\theta^{A}{}_{i}} - i(\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\,\theta^{\dot{B}i}\partial_{\mu} - i(\Omega^e)^{ij}\,\theta_{Aj}\frac{\partial}{\partial z^e}, \qquad (14.127)$$
$$D_{\dot{A}i} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{A}i}} - i(\sigma^{\mu})_{B\dot{A}}\,\theta^{B}{}_{i}\partial_{\mu} - i(\Omega^e)_{ij}\,\theta_{\dot{A}}{}^{j}\frac{\partial}{\partial z^e}, \quad D_e = \frac{\partial}{\partial z^e}.$$

Ковариантные производные коммутируют с суперзарядами $Q_A{}^{i}$ и $Q_{\dot{B}}{}^{j}$ и со всеми генераторами группы суперсимметрии; они также удовлетворяют соотношениям

$$\{D_A{}^{i},\ D_B{}^{j}\} = +2i(\Omega^e)^{ij}\,\varepsilon_{AB}D_e, \quad \{D_{\dot{A}i},\ D_{\dot{B}j}\} = +2i(\Omega^e)_{ij}\,\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}D_e,$$
$$\{D_A{}^{i},\ D_{\dot{B}j}\} = -2i(\sigma^{\mu})_{A\dot{B}}\,\delta_j{}^{i}\partial_{\mu}, \quad [\partial_{\mu}, D_A{}^{i}] = [\partial_{\mu},\ D_{\dot{B}j}] = 0 = [\partial_{\mu},\ D_z], \qquad (14.128)$$
$$[D_z,\ \text{любая производная}] = 0.$$

Теперь мы можем применить ковариантные производные для наложения ковариантных связей на общее суперполе. Потребуем выполнения связи

$$D_z\phi = \frac{\partial}{\partial z^e}\,\phi = 0. \qquad (14.129)$$

Это значит, что суперполе не зависит от z^e и, таким образом, не содержит бесконечного набора компонентных полей в x-пространстве.

Связь низшей размерности, которую можно использовать, имеет вид

$$D_{\dot{A}}{}^{i}\phi = 0. \qquad (14.130)$$

Она приводит к соотношению

$$\{D_{\dot{A}i},\ D_{\dot{B}j}\}\,\phi = +2i\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,(\Omega^e)_{ij}\,D_e\phi = 0, \qquad (14.131)$$

или, другими словами, $D_e\phi = 0$. В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial z^e}\phi = 0 \tag{14.132}$$

и, следовательно, ϕ не зависит от z^e. Компоненты суперполя ϕ в x-пространстве проще выделить с помощью ковариантных производных; компоненты суперполей

$$\phi,\ D_A{}^i\phi,\ D_A{}^iD_B{}^j\phi,\ D_A{}^iD_B{}^jD_C{}^k\phi,\ D_A{}^iD_B{}^jD_C{}^kD_D{}^l\phi,\ \ldots \tag{14.133}$$

при $\theta = 0$ соответственно равны

$$z,\ \chi_A{}^i,\ C_{AB}{}^{ij},\ \lambda_{ABC}{}^{ijk},\ d_{ABCD}{}^{ijkl},\ \ldots. \tag{14.134}$$

Их трансформационные свойства можно получить при помощи соотношений алгебры производных D. Приведенные выше тензоры обладают различными свойствами симметрии. Например, $C_{AB}{}^{ij} = -C_{BA}{}^{ji}$, что следует из перестановочных соотношений алгебры ковариантных производных.

В общем случае можно рассмотреть суперполя с лоренцевыми индексами и индексами внутренней симметрии:

$$\phi_{ij\ldots;\,AB\ldots;\,\dot A\dot B\ldots}. \tag{14.135}$$

Их трансформационные свойства очевидны.

При построении фактор-пространства расширенного суперпространства можно было бы добавить к группе изотропии центральные заряды. Но это приводит к тем же результатам вследствие абелевости (коммутативности) этих генераторов. Если же их включить в группу изотропии, то у суперполей появятся дополнительные индексы, соответствующие центральным зарядам. Эквивалентность этих двух формулировок устанавливается с помощью преобразования Фурье, т. е.

$$\phi(\ldots, z) = \int \phi_k(\ldots)e^{ikz}dk. \tag{14.136}$$

14.3. ($N = 2$)-суперпространство

В этом разделе рассмотрим некоторые примеры важных суперполей с $N = 2$. На первый взгляд может показаться, что достаточно иметь два центральных заряда:

$$(\Omega^e)^{ij}Z_e = \varepsilon^{ij}Z^{(1)} + i\varepsilon^{ij}Z^{(2)}. \tag{14.137}$$

Но один из них можно исключить с помощью кирального вращения. В этом случае $(\Omega^e)^{ij} = -i\varepsilon^{ij}$, где матрица ε^{ij} имеет те же свойства относительно поднятия и опускания индексов, что и ε^{AB}. В результате имеется только один центральный заряд, и

мы находим

$$\{D_A{}^i,\ D_B{}^j\} = 2\varepsilon_{AB}\varepsilon^{ij}D_z. \tag{14.138}$$

Такое преобразование невозможно в теориях, не обладающих киральной симметрией, и в этом случае возможно существование двух центральных зарядов. Начнем с рассмотрения кирального мультиплета W:

$$D_{\dot{A}i}W = 0, \tag{14.139}$$

который, как отмечалось выше, не должен зависеть от центрального заряда:

$$D_zW = 0. \tag{14.140}$$

Компонентные поля в x-пространстве заданы $(\theta = 0)$-компонентами следующих суперполей:

$$W,\ D_A{}^iW,\ D^{(ij)}W,\ D_{(AB)}W,\ D_A{}^iD_B{}^jD_C{}^kW;\ D_A{}^iD_B{}^jD_C{}^kD_D{}^lW, \tag{14.141}$$

которые обозначены как

$$Z,\ \chi_A{}^i,\ C^{ij},\ F_{AB},\ t^{ijk}_{ABC},\ t^{ijkl}_{ABCD}, \tag{14.142}$$

где

$$D^{ij} = D^{Ai}D_A{}^j,\ D_{AB} = D_A{}^iD_{Bi}. \tag{14.143}$$

В приведенных выше выкладках в третьем и четвертом членах использовано обращение в нуль производной центрального заряда:

$$D^i{}_iW = D_zW = 0. \tag{14.144}$$

Для пятого поля находим

$$t^{Ai}{}_{AiC}{}^k = 0,\ t^{ijk}_{ABC} = -t^{jik}_{BAC}; \tag{14.145}$$

аналогичные равенства имеем для шестого поля

$$t^{ijkl}_{ABCD}. \tag{14.146}$$

Используя тот факт, что

$$t^{ijk}_{(ABC)} = t^{(ijk)}_{ABC}, \tag{14.147}$$

приходим к соотношению

$$t^{ijk}_{ABC} = \varepsilon_{AB}S_C{}^j\varepsilon^{ik} + \varepsilon_{AB}\varepsilon^{jk}S_C{}^i + \varepsilon^{ij}\varepsilon_{AC}\lambda_B{}^k + \varepsilon^{ij}\varepsilon_{BC}\lambda_A{}^k. \tag{14.148}$$

Учитывая формулы (14.145), получаем равенство

$$S_C{}^l = -\lambda_B{}^k. \tag{14.149}$$

Вычисляя далее след от $\varepsilon_{jl}\,\varepsilon^{CB}$, имеем

$$t_A{}^{lB}{}_{lB}{}^k = +6\lambda_A{}^k. \tag{14.150}$$

Аналогично можно показать, что единственная ненулевая компонента тензора $t^{ij\,kl}_{ABCD}$ имеет вид

$$d = D^{ij}D_{ij}W. \tag{14.151}$$

Преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta z &= \left(\varepsilon^A{}_i D_A{}^i + \varepsilon^{\dot A i} D_{\dot A i}\right) W = \varepsilon^A{}_i \chi_A{}^i,\\
\delta\chi_A{}^i &= \left(\varepsilon^B{}_j D_B{}^j + \varepsilon^{\dot B j} D_{\dot B j}\right) D_A{}^i W =\\
&= -\frac{1}{2} F_{AB}\varepsilon^{Bi} - 2i\,(\partial)_{A\dot B}\, z\varepsilon^{\dot B i} - \frac{1}{2} C^{ij}\varepsilon_{Aj},\\
\delta C^{ik} &= \left(\varepsilon^B{}_i D_B{}^i + \varepsilon^{\dot B i} D_{\dot B i}\right) D^{ik} W =\\
&= 2\left(\varepsilon^{Bj}\lambda_B{}^k + \varepsilon^{Bk}\lambda_B{}^j\right) - 2i\varepsilon^{\dot B j}\,(\partial)^A{}_{\dot B}\,\chi_A{}^k - 2i\varepsilon^{\dot B k}\,(\partial)^A{}_{\dot B}\,\chi_A{}^j,\\
\delta F_{AB} &= \left(\varepsilon_i{}^c D_c{}^i + \varepsilon^{\dot B i} D_{\dot B i}\right)\left(D^k{}_A D_{Bk}\right) W =\\
&= -2i\varepsilon^{\dot B i}\,(\partial)_{A\dot B}\,\chi_{Bi} - 2i\varepsilon^{\dot B i}\,(\partial)_{B\dot B}\,\chi_{Ai} + 2\left(\varepsilon_{Ai}\lambda^i{}_B + \varepsilon_{Bi}\lambda^i{}_A\right),\\
\delta\lambda_A{}^k &= +\frac{1}{6}\left(\varepsilon^c{}_j D_c{}^j + \varepsilon^{\dot c j} D_{\dot c j}\right) D_A{}^i D_i{}^k W =\\
&= \frac{1}{6\cdot 4}\varepsilon_A{}^k d + \frac{i}{2}\,(\partial)^B{}_{\dot c}\,\varepsilon^{\dot c k} F_{AB} - \frac{i}{2}\,(\partial)_{\dot c A}\,\varepsilon^{\dot c j} c_j{}^k,\\
\delta d &= \left(\varepsilon_k{}^A D_A{}^k + \varepsilon^{\dot A k} D_{\dot A k}\right) D^{ij} D_{ij} W = -6\cdot 8\varepsilon^{\dot A k} i\,(\partial)_{\dot A}{}^B\,\lambda_{Bk}.
\end{aligned} \tag{14.152}$$

В действительности этот мультиплет приводим; мы можем положить $\operatorname{Im} C^{jk} = 0$, т. е.

$$C^{jk} = (C^{jk})^* = \varepsilon^{jl'} C^*_{l'k'} \varepsilon^{kk'}. \tag{14.153}$$

Из приведенных преобразований суперсимметрии следует

$$\lambda_B{}^k + i\,(\partial)_B{}^{\dot A}\,\chi_{\dot A}{}^k = 0,\quad d - 6\cdot 4\cdot 4\partial^2 z = 0,\quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa}\partial^\nu F_{\rho\varkappa} = 0, \tag{14.154}$$

где

$$F_{AB} = (\sigma^{\mu\nu})_{AB}\mathcal{F}_{\mu\nu},\quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{F}^*_{\mu\nu}\right).$$

После наложения этих связей остаются следующие поля [58]:

$$z,\ \chi_A{}^i,\ C^{jk}\ \text{(действительное)},\ F_{\mu\nu}, \tag{14.155}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Это поля $(N = 2)$-теории Янга — Миллса.

Связь (14.153), выраженная в терминах суперполей, принимает вид

$$D^{jk}W = \overline{D}^{jk}\overline{W}. \tag{14.156}$$

Можно также наложить связь $\mathrm{Re}\, C^{ik} = 0$. Переход к такой связи производится с помощью формальной замены $W \to iW$, а это ведет просто к переопределению полей мультиплета (14.155). Анализ показывает, что C^{ij} — поле наименьшей размерности, на которое можно наложить связь, не прибегая к уравнениям движения полей мультиплета.

Интересным примером мультиплета, содержащего центральный заряд, является гипермультиплет [49]. Данный мультиплет описывается суперполем ϕ_i $(i = 1, 2)$, которое удовлетворяет связям

$$D_A{}^i \phi_j = \frac{1}{2} \delta_j{}^i D_A{}^k \phi_k, \quad D_{\dot{A}i} \phi_j + D_{\dot{A}j} \phi_i = 0. \tag{14.157}$$

С помощью тензора ε^{ij} эти связи могут быть записаны в следующем виде:

$$D_{Ai} \phi_j + D_{Aj} \phi_i = 0 \quad \text{или} \quad D_{Ai} \phi_j = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} D_A{}^k \phi_k,$$

$$D_{\dot{A}i} \phi_j = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} D_{\dot{A}}{}^k \phi_k. \tag{14.158}$$

Сначала мы выполним некоторые преобразования, используя соотношения алгебры операторов D, и выясним, каков набор независимых компонент мультиплета, а затем приведем преобразования суперсимметрии.

Рассмотрим действие операторов $D_A{}^i$ на $D_B{}^k \phi_k$:

$$D_A{}^i D_B{}^k \phi_k = 2i\varepsilon^{ik} \varepsilon_{AB} D_z \phi_k - D_B{}^k D_A{}^i \phi_k = 2i\varepsilon_{AB} D_z \phi^i - \frac{1}{2} D_B{}^i \phi_A{}^k \phi_k. \tag{14.159}$$

В результате находим

$$D_{(A}{}^i D_{B)}{}^k \phi_k = 0, \quad D^{ik} \phi_k = -8i D_z \phi^i = -2D^k{}_k \phi^i, \tag{14.160}$$

где

$$D^{ik} = D^{Ai} D_A{}^k. \tag{14.161}$$

Аналогичным образом получим

$$D_{(\dot{A}}{}^i D_{\dot{B})}{}^k \phi_k = 0, \quad \bar{D}^{ik} \phi_k = -8i D_z \phi^i = -2\bar{D}^k{}_k \phi^i. \tag{14.162}$$

Подействовав теперь операторами $D_{\dot{A}}{}^i$ на $D_B{}^k \phi_k$:

$$D_{\dot{A}}{}^i D_B{}^k \phi_k = -2i (\sigma^\mu)_{\dot{A}B} \partial_\mu \phi^i - D_B{}^k D_{\dot{A}}{}^i \phi_k =$$

$$= -2i (\sigma^\mu)_{\dot{A}B} \partial_\mu \phi^i - \frac{1}{2} D_B{}^i D_{\dot{A}}{}^k \phi_k = -i (\partial)_{\dot{A}B} \phi^i + \frac{1}{4} D_{\dot{A}}{}^i D_B{}^k \phi_k, \tag{14.163}$$

найдем

$$D_{\dot{A}}{}^i D_B{}^k \phi_k = -\frac{4}{3} i (\partial)_{\dot{A}B} \phi^i. \tag{14.164}$$

Точно так же получаем соотношение

$$D_A{}^i D_{\dot{B}}{}^k \phi_k = \frac{4}{3} i (\partial)_{A\dot{B}} \phi^i. \tag{14.165}$$

Наконец, остается найти ковариантные производные выражения $D_z\phi^i$, действуя на него операторами $D_A{}^k$ и используя тот факт, что оператор D_z коммутирует с $D_A{}^k$ и $D_{\dot{A}}{}^k$. Они имеют вид

$$D_A{}^k D_z \phi_k = D_z D_A{}^k \phi_k = -iD_A{}^k \left(\frac{1}{4} \overline{D}^i{}_j \phi_k\right) = (\partial)_A{}^{\dot{B}} D_{\dot{B}}{}^k \phi_k \tag{14.166}$$

и аналогично

$$D_{\dot{B}}{}^k D_z \phi_k = D_z D_{\dot{B}}{}^k \phi_k = -iD_{\dot{B}}{}^k \left(\frac{1}{4} D^j{}_j \phi_k\right) = (\partial)_{\dot{B}}{}^A D_A{}^k \phi_k. \tag{14.167}$$

Дойдя в наших преобразованиях до того момента, когда последовательное применение ковариантных производных приводит к пространственно-временным производным полей, с которыми мы уже встречались, можно перечислить поля, входящие в гипермультиплет. Обозначим компоненты суперполей

$$\phi_i,\ D_A{}^k \phi_k,\ D_{\dot{A}}{}^k \phi_k,\ iD_z \phi_i \tag{14.168}$$

при $\theta = 0$ соответственно следующим образом:

$$A_i,\ \psi_A,\ \psi_{\dot{A}},\ f_i. \tag{14.169}$$

Преобразования суперсимметрии этих компонентных полей имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta\phi_i &= \left(\varepsilon^A{}_k D_A{}^k + \varepsilon^{\dot{A}k} D_{\dot{A}k}\right) \phi_i = \frac{1}{2} \varepsilon^A{}_i \psi_A - \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{A}}{}_i \psi_{\dot{A}}, \\
\delta\psi_A &= \left(\varepsilon^B{}_j D_B{}^j + \varepsilon^{\dot{B}j} D_{\dot{B}j}\right) D_A{}^k \phi_k = \\
&= \varepsilon_{Aj} \left(iD_z \phi^j\right) + \frac{4}{3} i (\partial)_{A\dot{B}} \phi^j \varepsilon^{\dot{B}}{}_j = \\
&= f^j \varepsilon_{Aj} + \frac{4}{3} i (\partial)_{A\dot{B}} A^j \varepsilon_j{}^{\dot{B}}, \\
\delta f_j &= \left(\varepsilon^A{}_k D_A{}^k + \varepsilon^{\dot{A}k} D_{\dot{A}k}\right) (iD_z) \phi_j = \\
&= \varepsilon^A{}_j i (\widehat{\partial})_A{}^{\dot{B}} \psi_{\dot{B}} + i\varepsilon^{\dot{A}}{}_j (\partial)_{\dot{A}}{}^B \psi_B.
\end{aligned} \tag{14.170}$$

Линейный мультиплет с $N = 2$ [59] описывается действительным суперполем L^{ij}, которое является $SU(2)$-триплетом и определяется условием

$$\sum_{(ijk)} D^i L^{jk} = 0. \tag{14.171}$$

Легко видеть, что этот мультиплет не зависит от центрального заряда, а его компонентное содержание таково: $L^{ij}(x)$, $\lambda^i{}_\alpha$, S, P и V_μ, где поле V_μ удовлетворяет уравнению

$$\partial^\mu V_\mu = 0. \tag{14.172}$$

В гл. 15 мы найдем, как эти суперполя можно использовать для описания моделей в x-пространстве, приведенных в гл. 13.

15. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРИЙ С ГЛОБАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

15.1. Теории с $N = 1$ в суперпространстве. Модель Весса — Зумино

Компонентные поля $(A, B, \chi_\alpha, F, G)$, составляющие модель Весса — Зумино, содержатся в киральном суперполе $\phi(x, \theta)$ [46]

$$D_{\dot{A}}\phi = 0. \tag{15.1}$$

Отождествление с полями в x-пространстве производится с помощью соотношений

$$\phi\,(\theta = 0) = z,\ D_A\phi\,(\theta = 0) = \chi_A,\ -\frac{1}{2}D^2\phi\,(\theta = 0) = f. \tag{15.2}$$

Суперсимметричное действие имеет вид

$$A^{\text{ВЗ}} = \int d^4x d^4\theta \bar{\phi}\phi + \left\{\int d^4x d^2\theta \left(\mu\phi + \frac{m\phi^2}{2} + \frac{\lambda\phi^3}{3!}\right) + \text{эрмит. сопр.}\right\}. \tag{15.3}$$

Составное суперполе $\bar{\phi}\phi$ не кирально, и для того, чтобы построить инвариант, необходимо проинтегрировать по $d^4\theta$; но ϕ, ϕ^2, ϕ^3 — киральные суперполя, и соответствующее интегрирование включает только $\int d^2\theta$. Интеграл по всему пространству $\int d^4x d^4\theta$ от кирального суперполя обращается в нуль.

Первое слагаемое в действии — кинетический член, который может быть выражен через компонентные поля следующим образом. Его можно получить, полагая $\theta = 0$ в выражении

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4}D^2\right)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\right)\bar{\phi}\phi = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}D^2\right)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\bar{\phi}\right)\phi =$$

$$= \frac{1}{16}\int d^4x \left\{(D^2\bar{D}^2\bar{\phi})\,\phi + 2\,(D^B\bar{D}^2\bar{\phi})\,D_B\phi + (\bar{D}^2\bar{\phi})\,D^2\phi\right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{(+\partial^2\bar{\phi})\,\phi - \frac{i}{2}(\hat{\partial})^{B\dot{B}}\left(D_{\dot{B}}\bar{\phi}\right)D_B\phi + \frac{1}{16}(\bar{D}^2\bar{\phi})\,(D^2\phi)\right\}. \tag{15.4}$$

Используя (15.2), получаем результат

$$\int d^4x \left\{-\left|\partial_\mu z\right|^2 - \frac{i}{2}\bar{\chi}_{\dot{B}}\,(\hat{\partial})^{B\dot{B}}\chi_B + \frac{1}{4}|f|^2\right\}. \tag{15.5}$$

Члены взаимодействия этой модели имеют наиболее общий вид, согласующийся с ее перенормируемостью. Линейный член

$\mu\phi$ можно устранить, сдвигая поле ϕ ($\phi \to \phi + \text{const}$). В терминах компонентных полей члены взаимодействия имеют вид

$$\int d^4x \left(\frac{\mu}{2} f + m\left(-\frac{1}{4}\chi^A\chi_A + \frac{1}{2} fz\right) + \right.$$
$$\left. + \lambda\left(+\frac{1}{4} fz^2 - \frac{1}{4} z\chi^A\chi_A\right) + \text{эрмит. сопр.}\right). \qquad (15.6)$$

Хотя суперпространственный формализм вполне очевиден для модели Весса — Зумино, для более сложных теорий он не столь прозрачен. Тем не менее имеется очень простой метод, называемый методом «калибровочного расширения», позволяющий легко перейти от формулировки в x-пространстве к суперпространственной формулировке [48]. Проиллюстрируем метод на примере модели Весса — Зумино. Поля (z, χ_A, f), входящие в состав этой модели, имеют следующие законы преобразования в двухкомпонентных обозначениях:

$$\delta z = \varepsilon^A \chi_A, \quad \delta\chi_A = f\varepsilon_A - 2i\left(\sigma^\mu\right)_{A\dot{B}} \varepsilon^{\dot{B}} \partial_\mu z,$$
$$\delta f = -2i\varepsilon^{\dot{B}} \left(\sigma^\mu\right)_{A\dot{B}} \partial_\mu \chi^A. \qquad (15.7)$$

Будем рассматривать z как первую компоненту комплексного суперполя $\phi\left(x, \theta_A, \theta_{\dot{A}}\right)$; другими словами,

$$\phi\left(x, \theta_A, \theta_{\dot{A}}\right)\big|_{\theta=0} = z(x). \qquad (15.8)$$

Супервариация поля z дается выражением

$$\delta z = \left(\varepsilon^A Q_A + \varepsilon^{\dot{A}} Q_{\dot{A}}\right)\phi\big|_{\theta=0} = \left(\varepsilon^A D_A + \varepsilon^{\dot{A}} D_{\dot{A}}\right)\phi\big|_{\theta=0}. \qquad (15.9)$$

Оказывается, что при $\theta = 0$ обращается в нуль член $\left(\hat{\partial}\right)_{A\dot{B}} \theta^{\dot{B}}$, содержащийся в Q_A и D_A. Следовательно, при $\theta = 0$ операторы D и Q эквивалентны. Очевидна тождественность их действия на низшую компоненту любого суперполя. Поэтому

$$\delta z = \left(\varepsilon^A D_A + \varepsilon^{\dot{A}} D_{\dot{A}}\right)\phi\big|_{\theta=0} = \varepsilon^A \chi_A. \qquad (15.10)$$

Таким образом, поскольку δz не содержит $\varepsilon^{\dot{A}}$, имеем

$$D_{\dot{A}}\phi\big|_{\theta=0} = 0. \qquad (15.11)$$

Но любое суперполе с нулевой первой компонентой равно нулю, и, следовательно, мы приходим к хорошо известному результату, что мультиплет Весса — Зумино содержится в комплексном суперполе, удовлетворяющем уравнению

$$D_{\dot{A}}\phi = 0. \qquad (15.12)$$

На него, конечно, могут быть наложены и другие связи, и для их однозначного определения необходимо рассмотреть набор полей, составляющих суперполе ϕ, удовлетворяющее уравнению $D_{\dot{A}}\phi = 0$. Набор образуют поля в x-пространстве, которые являются $(\theta = 0)$-компонентами суперполей

$$\phi,\ D_A\phi,\ -\frac{1}{2}D^2\phi, \tag{15.13}$$

где $D^2 = D^A D_A$. Ясно, что использование оператора $D_{\dot{A}}$ приводит к полям, которые являются пространственно-временны́ми производными приведенных выше.

Набор полей в (15.6) — не что иное, как мультиплет Весса — Зумино, поэтому мы приходим к заключению, что других связей в суперпространстве нет. Можно проверить, что поля (15.6) в самом деле имеют правильные трансформационные свойства. Например, для вспомогательного поля f находим

$$\delta f = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon^A D_A + \varepsilon^{\dot{A}} D_{\dot{A}}\right)\left(D^2\phi\right)\Big|_{\theta=0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,2\varepsilon^{\dot{A}}\left\{D_{\dot{A}},\ D^B\right\} D_B\phi\Big|_{\theta=0} = -2i\varepsilon^{\dot{A}}\left(\sigma^\mu\right)_{B\dot{A}}\partial_\mu\chi^B. \tag{15.14}$$

15.2. Теория Янга — Миллса с $N = 1$ [10]

Компонентные поля в x-пространстве $(A_\mu, \lambda_\alpha, D)$ суперсимметричной теории Янга — Миллса с $N = 1$ являются полями с наибольшей размерностью, содержащимися в суперполе $V(x^\mu, \theta^\alpha)$ [53]. Присутствие других компонентных полей в x-пространстве вполне естественно, поскольку калибровочное преобразование поля A_μ $(\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda + \ldots)$, обеспечивающее в физических процессах отсутствие продольной части A_μ, должно принадлежать супермультиплету. Такой мультиплет — киральный супермультиплет $\Lambda\left(D_{\dot{A}}\Lambda = 0\right)$; его можно использовать для того, чтобы выбором калибровки обратить в нуль все компоненты суперполя V с низшими размерностями, сохранив лишь поля (A_μ, λ, D) и калибровочное преобразование A_μ.

Для простоты рассмотрим сначала абелев случай; калибровочное преобразование суперполя V имеет вид

$$\delta V = (\bar{\Lambda} - \Lambda). \tag{15.15}$$

Суперполе V действительно: $V^+ = V$, но $\Lambda^+ \equiv -\bar{\Lambda}$. Для построения действия необходимы калибровочно-ковариантные выражения вида

$$W_A = \bar{D}^2 D_A V,\ W_{\dot{A}} = D^2 D_{\dot{A}} V, \tag{15.16}$$

причем $(W_{\dot{A}})^{+}=W_{A}$. При калибровочном преобразовании имеем

$$\delta W_{A}=-\bar{D}^{2}D_{A}\Lambda=-2i\bar{D}^{\dot{B}}(\hat{\partial})_{A\dot{B}}\Lambda=0. \tag{15.17}$$

Очевидно, W_A — киральное поле, т. е.

$$D_{\dot{B}}W_{A}=0. \tag{15.18}$$

Поскольку суперполе V действительно, получаем

$$D^{A}W_{A}-D^{\dot{A}}W_{\dot{A}}=\left(D^{A}\bar{D}^{2}D_{A}-D^{\dot{A}}D^{2}D_{\dot{A}}\right)V=0. \tag{15.19}$$

Киральность поля W_A означает, что суперсимметричное калибровочно-инвариантное действие дается выражением

$$\frac{1}{64g^{2}}\int d^{4}xd^{2}\theta W^{A}W_{A}. \tag{15.20}$$

Обычно к киральным интегралам необходимо добавлять их эрмитовы сопряжения, чтобы действие было действительным; но связь (15.19) уже предполагает действительность, так что нет необходимости добавлять эрмитово-сопряженные слагаемые. Для того чтобы это увидеть, заметим, что действие имеет вид

$$-\frac{1}{16g^{2}}\int d^{4}xd^{4}\theta D^{A}V\bar{D}^{2}D_{A}V.$$

Рассматривая его комплексное сопряжение и используя равенство (15.19), получаем

$$\int d^{4}xd^{4}\theta\left(D^{A}V\bar{D}^{2}D_{A}V\right)^{+}=\int d^{4}xd^{4}\theta D^{2}D_{\dot{A}}V\left(-D^{\dot{A}}V\right)=$$

$$=\int d^{4}xd^{4}\theta V\left(-D^{\dot{A}}D^{2}D_{\dot{A}}V\right)=\int d^{4}xd^{4}\theta V\left(-D^{A}\bar{D}^{2}D_{A}V\right)=$$

$$=\int d^{4}xd^{4}\theta\left(D^{A}V\bar{D}^{2}D_{A}V\right).$$

Читатель может легко проверить, что это действие имеет правильные размерности полей (V должно быть безразмерно, поскольку $[W_A]=\dim[\lambda_A]=3/2$) и определенно является действием $(N=1)$-суперсимметричной абелевой калибровочной теории (см. гл. 6). Отсутствие в нем полей низших размерностей, содержащихся в суперполе V, гарантируется его калибровочной инвариантностью.

Обобщение этих результатов на случай полей Янга — Миллса начнем с обобщения калибровочного преобразования

$$e^{V'}=e^{\bar{\Lambda}}e^{V}e^{-\Lambda}, \tag{15.21}$$

где $V \equiv V^i T_i$, $\Lambda \equiv \Lambda^i T_i$, а T_i — антиэрмитовы генераторы калибровочной группы. Поскольку T_i антиэрмитовы, суперполе V^i мнимое, а условие $\bar{\Lambda} \equiv \bar{\Lambda}^i T_i \equiv -\Lambda^+$ приводит к следующему свойству кирального параметра: $\Lambda^{i+} = \Lambda^i$. Заметим, что в абелевом случае $T_i = i$ и $V = V^i i$, что приводит, как и должно быть для абелевой калибровочной группы, к выражению (15.15). Хотя в неабелевом случае это преобразование сложнее, тем не менее используем киральный параметр, чтобы выбором калибровки исключить компоненты (C^i; $\zeta^i{}_\alpha$, H^i, K^i) суперполя V. Калибровочно-ковариантная напряженность поля имеет вид

$$W_A = \bar{D}^2 (e^{-V} D_A e^V). \tag{15.22}$$

При калибровочном преобразовании она изменяется следующим образом:

$$W'_A = e^{\bar{\Lambda}} W_A e^{-\Lambda} \tag{15.23}$$

и является киральной, т. е.

$$D_{\dot{B}} W_A = 0. \tag{15.24}$$

Условие действительности имеет более сложный вид:

$$\{\mathscr{D}'^A,\ W_A\} = \{\mathscr{D}'^{\dot{A}},\ W_{\dot{A}}\}, \tag{15.25}$$

где мы определим специально для этого случая производные со штрихом

$$\mathscr{D}'^A = e^{-V} D^A e^V = D^A + (e^{-V} D^A e^V),$$
$$\mathscr{D}'^{\dot{A}} = e^V D^{\dot{A}} e^{-V} = D^{\dot{A}} + (e^{+V} D^{\dot{A}} e^{-V}).$$

Выражение для действия

$$A^{\text{ЯМ}} = \frac{1}{64 g^2 C_2(G)} \int d^4x d^2\theta \operatorname{Tr} W^A W_A \tag{15.26}$$

можно переписать в виде

$$A^{\text{ЯМ}} = -\frac{1}{16 g^2 C_2(G)} \int d^4x d^4\theta \operatorname{Tr} \{(e^{-V} D^A e^V)\, \bar{D}^2 (e^{-V} D_A e^V)\}. \tag{15.27}$$

Эти результаты могли быть легко получены методом калибровочного расширения. Короче говоря, в абелевом случае мы отождествляем λ_A с $(\theta = 0)$-компонентой суперполя W_A. Поскольку супервариация поля λ_A включает ε_B, но не $\varepsilon_{\dot{B}}$, можно заключить, что

$$D_{\dot{B}} W_A = 0. \tag{15.28}$$

Поле D является $(\theta = 0)$-компонентой суперполя $-2D^A W_A$; поскольку оно действительно, находим

$$D^A W_A - D^{\dot{A}} W_{\dot{A}} = 0. \tag{15.29}$$

Дальнейший анализ показывает, что единственное другое независимое компонентное поле в x-пространстве, содержащееся в суперполе V, имеет вид

$$F_{AB} = D_{(A} W_{B)} |_{\theta=0}. \tag{15.30}$$

Данное поле и его комплексное сопряжение $F_{\dot{A}\dot{B}}$ можно отождествить с F_{mn}. Приведенные выше связи (15.28) и (15.29) означают, что F_{mn} удовлетворяет тождеству Бьянки

$$D_{[r} F_{mn]} = 0. \tag{15.31}$$

Киральный мультиплет ϕ^a преобразуется по представлению R калибровочной группы следующим образом:

$$\phi^a \to \phi'^a = (e^{\Lambda})^a{}_b \phi^b, \tag{15.32}$$

где $\Lambda^a{}_b = \Lambda^i (T_i)^a{}_b$, а $(T_i)^a{}_b$ — генераторы калибровочной группы в представлении R. Условие киральности поля ϕ^a, а именно $D_{\dot{A}} \phi^a = 0$, все еще ковариантно, так как это следует из тождества $D_{\dot{A}} \Lambda = 0$. Калибровочно-инвариантное суперсимметричное действие, обобщающее действие Весса — Зумино, имеет вид

$$\int d^4x d^4\theta \bar{\phi}_a (e^V)^a{}_b \phi^b, \tag{15.33}$$

где $(V)^a{}_b = V^i (T_i)^a{}_b$. Взаимодействие

$$\int d^4x d^2\theta \left(\frac{m_{ab}}{2} \phi^a \phi^b + \frac{d_{abc}}{3!} \phi^a \phi^b \phi^c + \text{эрмит. сопр.} \right) \tag{15.34}$$

также калибровочно-инвариантно, если выполняются равенство

$$0 = d_{ebc} (T^i)^e{}_a + d_{aec} (T^i)^e{}_b + d_{abe} (T^i)^e{}_c \tag{15.35}$$

и аналогичное равенство для слагаемого, пропорционального m_{ab}. Выражение этих функционалов действий в терминах компонентных полей дано в гл. 11.

Наконец, получим в замкнутой форме вариацию суперполя V при калибровочном преобразовании [54]. Этот результат необходим для нахождения детерминанта Фаддеева — Попова. Из уравнения $[e^V, V] = 0$ и калибровочного преобразования (15.21) следует равенство

$$\delta V e^V + V e^{\bar{\Lambda}} e^V e^{-\Lambda} - e^V \delta V - e^{\bar{\Lambda}} e^V e^{-\Lambda} V = 0. \tag{15.36}$$

Умножая его слева и справа на $e^{-V/2}$, находим

$$e^{V/2}\,\delta V e^{-V/2} - e^{-V/2}\,\delta V e^{V/2} - e^{-V/2}[V, \bar{\Lambda}]\,e^{V/2} + e^{V/2}[V, \Lambda]\,e^{-V/2} = 0 \tag{15.37}$$

в низшем порядке по Λ и $\bar{\Lambda}$.

Введем обозначение

$$V \wedge X = [V, X], \quad V^2 \wedge X = [V, [V, X]] \tag{15.38}$$

и примем определение $1 \wedge X = X$. Следовательно, получаем равенства

$$e^V X e^{-V} = e^V \wedge X, \tag{15.39}$$

$$f(V) \wedge (g(V) \wedge X) = (f(V)\,g(V) \wedge X). \tag{15.40}$$

Равенство (15.37), записанное в этих обозначениях, принимает вид

$$2\left(\operatorname{sh}\frac{V}{2}\right) \wedge \delta V = \left(\operatorname{ch}\frac{V}{2}\right) \wedge V \wedge (\bar{\Lambda} - \Lambda) - \left(\operatorname{sh}\frac{V}{2}\right) \wedge \wedge V \wedge (\Lambda + \bar{\Lambda}), \tag{15.41}$$

а также

$$\delta V = \frac{V}{2} \wedge \left\{ -(\Lambda + \bar{\Lambda}) + \operatorname{cth}\frac{V}{2} \wedge (\bar{\Lambda} - \Lambda) \right\} = = \bar{\Lambda} - \Lambda - \frac{1}{2}[V, \Lambda + \bar{\Lambda}] + O(V^2). \tag{15.42}$$

На этом заканчивается вывод формул, которые будут использованы ниже.

15.3. Геометрический подход к ($N = 1$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса

Интересный альтернативный подход к суперсимметричной теории Янга — Миллса найден в результате копирования обычных методов построения теории Янга — Миллса [55]. Введем суперсвязность $A_\pi{}^i$, которая преобразуется следующим образом:

$$(\partial_\pi + A_\pi)' = e^{+K}(\partial_\pi + A_\pi)\,e^{-K}, \tag{15.43}$$

где $K = K^i T_i$ и $A_\pi = T_j A^j{}_\pi$, причем матрицы T_i представляют собой генераторы группы G в любом представлении. В равенстве (15.43) и в последующих формулах производная ∂_π действует на поля, стоящие справа, т. е. после множителя e^{-K}. Поэтому правую часть можно переписать в виде

$$(e^{+K}(\partial_\pi + A_\pi)\,e^{-K}) + \partial_\pi,$$

где в первом слагаемом ∂_π действует только в пределах скобок. Заметим, что величины ∂_π, A_π и $K = K^i T_i$ антиэрмитовы и, сле-

довательно, $A_\pi{}^i$ и K^i действительны. Ковариантные производные определены как

$$\mathbf{D}_\pi = \partial_\pi + A_\pi{}^i (T_i)^a{}_b, \tag{15.44}$$

где теперь T_i — матрицы, действующие на соответствующие поля. В частности, если имеем суперполе ψ^a, которое преобразуется следующим образом:

$$\psi'^a = (e^K)^a{}_b \psi^b, \tag{15.45}$$

то $\mathbf{D}_\pi\psi$ — калибровочно-ковариантное суперполе. Мы определим напряженности полей суперсимметричной теории Янга — Миллса с помощью соотношения

$$[\mathbf{D}_N, \mathbf{D}_M\} = T_{NM}{}^R \mathbf{D}_R + F_{NM}{}^i T_i, \tag{15.46}$$

где $\mathbf{D}_N = E_N{}^\pi \mathbf{D}_\pi$, а $T_{NM}{}^R$ — тензор кручения в плоском пространстве, т. е. $T_{NM}{}^R$ равен нулю, за исключением компонент $T_{A\dot{B}}{}^n = -2i\,(\sigma^n)_{A\dot{B}}$.

Для напряженностей находим

$$F_{NM} = F_{NM}^i T_i = + D_N A_M - (-1)^{NM} D_M A_N + [A_N, A_M\} - T_{NM}{}^R A_R. \tag{15.47}$$

Так же как в случае теории Янга — Миллса, имеем тождества Бьянки, которые следуют из тождества

$$[\mathbf{D}_M, [\mathbf{D}_N, \mathbf{D}_R\}\} - [[\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_N\}, \mathbf{D}_R\} + (-1)^{RN} [[\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_R\}, \mathbf{D}_N\} = 0. \tag{15.48}$$

Наконец, получаем

$$I_{NMR} = [-(-1)^{(M+N)R} \mathbf{D}_R F_{MN} + T_{MN}{}^S F_{SR}] - $$
$$- (-1)^{NR} (R \to N,\ N \to R,\ M \to M \text{ в первом слагаемом}) -$$
$$- (-1)^{(N+R)M} (M \to N,\ N \to R,\ R \to M \text{ в первом слагаемом}). \tag{15.49}$$

Рассмотрим теперь, к каким следствиям приводит наличие киральных суперполей в подходе, где имеется суперсимметричная теория Янга — Миллса. Первоначальное условие киральности $D_A\phi = 0$ должно быть изменено для того, чтобы оно стало калибровочно-ковариантным. Единственно возможное обобщение имеет вид $\mathbf{D}_A\phi = 0$. Но такая связь ведет к соотношению

$$\{\mathbf{D}_A, \mathbf{D}_B\}\,\phi = F_{AB}{}^i T_i \phi = 0, \tag{15.50}$$

и, следовательно, поскольку при $\theta = 0$ ϕ произвольно, мы вынуждены заключить, что выполняются равенства

$$F_{AB} = 0, \quad F_{A\dot{B}} = 0. \tag{15.51}$$

С этими ограничениями совместны также все другие представления суперсимметрии при наличии полей Янга — Миллса. Такие связи часто называют связями, «сохраняющими представление» [56, 57].

Мы будем пользоваться также термином «стандартная связь» [56, 57]. Рассмотрев напряженность поля

$$F_{A\dot{B}} = +D_A A_{\dot{B}} + D_{\dot{B}} A_A + \{A_A, A_{\dot{B}}\} + 2i(\sigma^n)_{A\dot{B}} A_n, \quad (15.52)$$

найдем, что поле A_n, как связность, излишне, поскольку оно преобразуется точно так же, как первые три члена в $F_{A\dot{B}}$, взятые с обратным знаком. Полагая $F_{A\dot{B}} = 0$, выразим A_n через A_A и $A_{\dot{B}}$:

$$A_n = \frac{i}{4}(+D_A A_{\dot{B}} + D_{\dot{B}} A_A - \{A_A, A_{\dot{B}}\})(\sigma_n)^{A\dot{B}}. \quad (15.53)$$

Это напоминает переход от формализма первого порядка к формализму второго порядка в общей теории относительности.

Подводя итоги, запишем связи в виде

$$F_{AB} = F_{\dot{A}\dot{B}} = F_{A\dot{B}} = 0. \quad (15.54)$$

В рамках этого подхода имеются теперь два способа дальнейших вычислений. Мы могли бы просто разрешить связи (15.54), или «решить тождества Бьянки». Воспользуемся сначала вторым способом. Хотя тождества Бьянки — всего лишь тождества, но коль скоро мы требуем выполнения приведенных выше связей, тождества становятся нетривиальными и могут быть использованы для получения следствий из этих связей. Наилучший подход к решению тождеств Бьянки состоит в оценке входящих в них величин в порядке возрастания их размерности. Из определения напряженностей полей Янга — Миллса найдем их размерности

$$[F_{\alpha\beta}] = 1, \quad [F_{n\alpha}] = \frac{3}{2}, \quad [F_{nm}] = 2. \quad (15.55)$$

Единственное нетривиальное тождество Бьянки, снабженное только фермионными индексами, имеет вид

$$I_{A\dot{B}C} = 0 = T_{A\dot{B}}{}^n F_{nC} + T_{C\dot{B}}{}^n F_{nA}. \quad (15.56)$$

Следовательно, приходим к тождеству

$$F_{A\dot{B}C} + F_{C\dot{B}A} = 0, \quad (15.57)$$

где $F_{A\dot{B}C} = (\sigma^n)_{A\dot{B}} F_{nC}$. По существу имеем

$$F_{A\dot{B}C} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{AC} F^D{}_{\dot{B}D} = -\frac{i}{4}\varepsilon_{AC} W_{\dot{B}}. \quad (15.58)$$

Комплексно-сопряженное выражение имеет вид

$$F_{B\dot{C}\dot{D}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}F_B{}^{\dot{A}}{}_{\dot{A}} = +\frac{i}{4}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}W_B,$$

где

$$F_{B\dot{C}\dot{D}} = (\sigma^n)_{B\dot{C}}F_{n\dot{D}}. \tag{15.59}$$

Заметим, что

$$(F_{An})^* = -F_{\dot{A}n}, \quad (W_A)^* = +W_{\dot{A}}, \tag{15.60}$$

поскольку

$$[(\sigma^m)_{A\dot{B}}]^* = (\bar{\sigma}^m)_{\dot{A}B} = (\sigma^m)_{B\dot{A}}.$$

Обратим внимание на то, что $W_A(W_{\dot{A}})$ — ненулевая напряженность поля наинизшей размерности.

Рассмотрим далее тождество Бьянки

$$I_{ABn} = \mathbf{D}_A F_{Bn} + \mathbf{D}_B F_{An} = 0, \tag{15.61}$$

из которого следует

$$\mathbf{D}_A\varepsilon_{BC}W_{\dot{C}} + \mathbf{D}_B\varepsilon_{AC}W_{\dot{C}} = 0. \tag{15.62}$$

Умножая последнее тождество на ε^{BC}, находим

$$\mathbf{D}_A W_{\dot{C}} = 0 \tag{15.63}$$

и комплексно-сопряженное уравнение

$$\mathbf{D}_{\dot{C}} W_B = 0. \tag{15.64}$$

Из тождества

$$I_{A\dot{B}n} = +T_{\dot{B}A}{}^m F_{mn} + D_A F_{\dot{B}n} + T_{\dot{B}A}{}^m F_{mn} + D_{\dot{B}}F_{An} = 0 \tag{15.65}$$

следует результат

$$-\varepsilon_{\dot{C}\dot{B}}\mathbf{D}_A W_C + \varepsilon_{CA}\mathbf{D}_{\dot{B}}W_{\dot{C}} + 16F_{A\dot{B}C\dot{C}} = 0, \tag{15.66}$$

где $F_{A\dot{B}C\dot{C}} = (\sigma^n)_{A\dot{B}}(\sigma^m)_{C\dot{C}}F_{nm}$. Свертывание по индексам $\dot{C}\dot{B}$ и CA приводит к уравнению

$$-\mathbf{D}^A W_A + \mathbf{D}^{\dot{A}}W_{\dot{A}} = 0. \tag{15.67}$$

Но свертывая только по $\dot{C}\dot{B}$, получаем $\mathbf{D}_{(A}W_{C)} = -8(\sigma^{nm})_{AC}F_{nm}$. Соответствующее комплексно-сопряженное уравнение имеет вид

$$\mathbf{D}_{(\dot{A}}W_{\dot{C})} = 8(\bar{\sigma}^{nm})_{\dot{A}\dot{C}}F_{nm}. \tag{15.68}$$

В действительности эти три уравнения полностью образуют тождество Бьянки, поскольку симметризация $F_{A\dot{B}C\dot{C}}$ по AC и $\dot{B}C$ автоматически дает нулевой результат.

Тождество Бьянки, содержащее I_{Amn}, приводит к соотношению

$$\mathbf{D}_A F_{nm} = \frac{i}{8}(\sigma^n)_A{}^{\dot{C}}\mathbf{D}_m W_{\dot{C}} - \frac{i}{8}(\sigma^m)_A{}^{\dot{C}}\mathbf{D}_n W_{\dot{C}}, \qquad (15.69)$$

в котором спинорная производная F_{nm} просто выражается через пространственно-временную производную $W_{\dot{A}}$. Аналогичный результат можно получить для комплексно-сопряженных величин. На самом деле (15.69) является следствием соотношений (15.67), (15.63) и (15.64), и в этом смысле излишне было решать тождество Бьянки $I_{Amn} = 0$.

Остающееся тождество Бьянки $I_{nmr} = 0$ — обычное тождество такого рода, выражающее тот факт, что F_{nm} — ротор поля A_n:

$$F_{nm} = +\partial_n A_m - \partial_m A_n + [A_n, A_m]. \qquad (15.70)$$

Подводя итоги, заметим, что ненулевые напряженности поля F_{An}, F_{nm} и комплексно-сопряженные им величины можно выразить через одно суперполе W_A, его комплексно-сопряженное поле $W_{\dot{A}}$ и их спинорные производные. Суперполе W_A удовлетворяет условиям

$$\mathbf{D}_B W_{\dot{A}} = 0 = \mathbf{D}_{\dot{B}} W_A, \qquad (15.71)$$

$$\mathbf{D}^A W_A - \mathbf{D}^{\dot{B}} W_{\dot{B}} = 0. \qquad (15.72)$$

Как мы увидим ниже, другие результаты анализа тождеств Бьянки, т. е. соотношений (15.69) и (15.70), являются следствиями таких условий.

Из этих формул можно получать состав компонентных полей суперсимметричной теории Янга — Миллса. Независимые компоненты кирального суперполя $W_A(W_{\dot{A}})$ в x-пространстве при $\theta = 0$ являются компонентами выражений

$$W_A, \quad \mathbf{D}_{(B}W_{A)}, \quad -\frac{1}{2}\mathbf{D}^B W_B, \quad \mathbf{D}^2 W_A, \qquad (15.73)$$

которые обозначим соответственно

$$\lambda_A, \quad F_{BA}, \quad D, \quad \zeta_A. \qquad (15.74)$$

Но условие (15.72) означает, что поле D действительно и

$$\mathbf{D}^C(\mathbf{D}^B W_B) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{CB}\mathbf{D}^2 W_B = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^2 W^C =$$

$$= -\mathbf{D}^C\mathbf{D}^{\dot{B}} W_{\dot{B}} = -2i\hat{\mathbf{D}}^{C\dot{B}} W_{\dot{B}}. \qquad (15.75)$$

Следовательно, при $\theta = 0$ имеем

$$\zeta^C = -4i(\hat{\mathbf{D}})^{C\dot{B}}\lambda_{\dot{B}}. \qquad (15.76)$$

Дальнейшие вычисления показывают, что напряженность F_{mn} удовлетворяет обычному тождеству Бьянки и поэтому может быть представлена при $\theta = 0$ в виде (15.70), где F_{mn} связана с напряженностями F_{AB} и $F_{\dot{A}\dot{B}}$ соотношениями

$$F_{AB} = \frac{1}{4}(\sigma^{mn})_{AB}F_{mn}, \quad F_{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{4}(\sigma^{mn})_{\dot{A}\dot{B}}F_{mn}. \tag{15.77}$$

Таким образом, $(N = 1)$-суперсимметричная теория Янга — Миллса содержит поля λ_α, A_μ и D. Их преобразования суперсимметрии можно найти с помощью обычных рассуждений из приведенных выше соотношений; например,

$$\delta\lambda_B = \varepsilon^A \mathbf{D}_A W_B|_{\theta=0} = D\varepsilon_B + \frac{1}{2}(\sigma^{mn})_{BA}F_{mn}\varepsilon^A = D\varepsilon_B + F_{AB}\varepsilon^A. \tag{15.78}$$

Обратимся теперь к альтернативному подходу, а именно просто разрешим связи. Это значит, что надо решить уравнения

$$F_{AB} = F_{\dot{A}\dot{B}} = 0. \tag{15.79}$$

Наиболее общие решения имеют вид

$$\mathbf{D}_A = e^{-\Omega}D_A e^{\Omega}, \quad \mathbf{D}_{\dot{A}} = \bar{e}^{\bar{\Omega}}D_{\dot{A}}e^{+\bar{\Omega}}, \tag{15.80}$$

где $\Omega = \Omega^i T_i$ и $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^i T_i$. В этих выражениях производные действуют направо, таким образом,

$$\{\mathbf{D}_A, \mathbf{D}_B\} = \{e^{-\Omega}D_A e^{\Omega}, e^{-\Omega}D_B e^{\Omega}\} = e^{-\Omega}\{D_A, D_B\}e^{\Omega} = 0;$$

для $F_{\dot{A}\dot{B}}$ имеется аналогичное соотношение. Это не чисто калибровочное условие, поскольку $(\Omega^i)^* \neq \Omega^i$. Поэтому мы выразили A_B и $A_{\dot{B}}$ через Ω и $\bar{\Omega}$. Для того чтобы воспроизвести трансформационные свойства полей A_A, потребуем выполнения равенства

$$e^{\Omega'} = e^{\Omega}e^{-K} \quad (\text{или} \quad e^{\bar{\Omega}'} = e^{\bar{\Omega}}e^{-K}). \tag{15.81}$$

Можно также найти преобразование поля Ω, при котором остаются неизменными ковариантные производные, а именно

$$e^{\Omega'} = e^{\bar{\Lambda}}e^{\Omega} \quad (\text{или} \quad e^{\bar{\Omega}'} = e^{+\Lambda}e^{\bar{\Omega}}), \tag{15.82}$$

где $D_A\bar{\Lambda} = 0$. Следует ожидать появления такой дополнительной калибровочной инвариантности всякий раз, когда разрешается любая ковариантная связь.

При инфинитезимальном преобразовании имеем

$$\delta\Omega = -K + \bar{\Lambda}. \tag{15.83}$$

Можно использовать действительную величину K^i, чтобы выбором калибровки исключить действительную часть Ω^i. Это

легче всего сделать, определив K-инвариантную действительную величину V с помощью соотношения

$$e^V = e^{\Omega} e^{-\overline{\Omega}}. \tag{15.84}$$

Если мы выбираем K^i и калибровку так, что при этом поля Ω^i действительные, то $V = 2\Omega\,(\Omega = -\overline{\Omega})$. Соответствующее Λ-преобразование поля V имеет вид

$$e^{V'} = e^{\overline{\Lambda}} e^V e^{-\Lambda}, \tag{15.85}$$

или для инфинитезимального преобразования

$$\delta V = (\overline{\Lambda} - \Lambda) + O\,(V,\ \Lambda,\ \overline{\Lambda}). \tag{15.86}$$

К этому результату можно также прийти, устраняя с помощью калибровки действительную часть Ω и производя соответствующее компенсирующее преобразование величины K для каждого преобразования $\Lambda(\overline{\Lambda})$, с тем чтобы сохранить выбранную калибровку.

Если компонентные поля суперполя V обозначим $(C, \zeta, H, K, A_\mu, \lambda, D)$, то, как обсуждалось в гл. 11, можно использовать киральное поле Λ для устранения с помощью выбора калибровки компонент C, ζ, H и K, сохраняя калибровочное преобразование поля A_μ. Выбрав таким образом калибровку Весса — Зумино, необходимо сделать соответствующее компенсирующее преобразование, чтобы не нарушить это калибровочное условие. Следовательно, у нас остаются снова компонентные поля в x-пространстве A_μ, λ и D.

Часто оказывается полезно переопределить киральные поля и ковариантные производные. Если имеется киральное поле ϕ, т. е.

$$\mathbf{D}_{\dot{A}} \phi = 0, \tag{15.87}$$

то можно определить новое поле $\phi_0 = e^{-\overline{\Omega}} \phi$, которое теперь удовлетворяет условию

$$\mathbf{D}_{0\dot{A}} \phi_0 = 0, \tag{15.88}$$

где $\mathbf{D}_{0\dot{A}} = D_{\dot{A}}$, и преобразуется так же, как поле ϕ: $\phi'_0 = e^{i\Lambda} \phi_0$. Для антикиральных полей выполняются преобразования $\psi = e^{-\overline{\Omega}} \psi_0$. Такие поля удовлетворяют условию

$$\mathbf{D}_{0A} \psi_0 = 0, \tag{15.89}$$

где $\mathbf{D}_{0A} = e^{-V} D_A e^V$, и преобразуются следующим образом: $\psi'_0 = e^{\Lambda} \psi_0$. Важно заметить, что, как и в случае кирального базиса, преобразования спинорных производных не унитарны и, сле-

довательно, не обладают свойствами действительности. Но эти новые поля, которые часто оказываются заданными в киральном представлении, бывают полезны при вычислениях или построении действий. Новые производные согласуются с определением

$$\mathbf{D}_{0N} = e^{+\overline{\Omega}} \mathbf{D}_N e^{-\overline{\Omega}}. \tag{15.90}$$

Напряженность кирального поля можно определить следующим образом:

$$\{\mathbf{D}_{0N}, \mathbf{D}_{0M}\} = T_{NM}{}^R \mathbf{D}_{0R} + F_{0NM}. \tag{15.91}$$

Ясно, что

$$F_{0NM} = e^{+\overline{\Omega}} F_{NM} e^{-\overline{\Omega}}, \tag{15.92}$$

поэтому связи принимают вид

$$F_{0AB} = F_{0A\dot{B}} = F_{0\dot{A}\dot{B}} = 0, \tag{15.93}$$

а суперполе —

$$W_{0A} = e^{+\overline{\Omega}} W_A e^{-\overline{\Omega}}. \tag{15.94}$$

Вычисления поля W_{0A} в терминах суперполя V производится довольно просто:

$$\{\mathbf{D}_{0A}, \mathbf{D}_{0\dot{A}}\} = \{D_A + A_{0A}, D_{\dot{A}}\} = \\ = T_{A\dot{A}}{}^n \mathbf{D}_{0n} + \{+ D_{\dot{A}} A_{0A} + 2i (\sigma^n)_{A\dot{A}} A_n\}, \tag{15.95}$$

а так как $F_{0A\dot{A}} = 0$, находим

$$A_n = + \frac{i}{4} (D_{\dot{A}} A_{0A}) (\sigma_n)^{A\dot{A}}. \tag{15.96}$$

Наконец, получаем

$$W_{0A} = -2iF_0{}^{\dot{B}}{}_{A\dot{B}} = -2i [\mathbf{D}_0{}^{\dot{B}}, \mathbf{D}_{0n}] (\sigma^n)_{A\dot{B}} = D^{\dot{B}} D_{\dot{B}} (e^{-V} D_A e^V). \tag{15.97}$$

Поскольку

$$\operatorname{Tr} W^A W_A = \operatorname{Tr} W_0{}^A W_{0A}, \tag{15.98}$$

мы снова приходим к действию Янга — Миллса (15.26).

15.4. Теории с $N = 2$ в суперпространстве

Теперь мы повторим предыдущее обсуждение $(N = 1)$-теорий в суперпространстве для случая $N = 2$. Начнем с вывода формулировки в суперпространстве $(N = 2)$-теории Янга — Миллса [58]. Останавливаясь на формулировке в x-пространстве, данной в гл. 12, воспользуемся методом «калибровочного расширения». Суперполе составляют следующие компонентные поля в

x-пространстве:

$$(z,\ \lambda_{Ai},\ F_{\mu\nu},\ C^{ij}), \tag{15.99}$$

где $z = A + iB$. Преобразование суперсимметрии поля z имеет вид

$$\delta z = \varepsilon^A{}_i \lambda_A{}^i. \tag{15.100}$$

Поскольку преобразование не содержит $\varepsilon^{\dot{A}i}$, можно заключить, что если z является $(\theta = 0)$-компонентой комплексного суперполя $W\left(x^\mu,\ \theta_i^A,\ \theta^{\dot{B}j},\ z\right)$, то W должно быть киральным суперполем

$$D_{\dot{A}i} W = 0. \tag{15.101}$$

Эта связь означает, что

$$\left\{D_{\dot{A}i},\ D_{\dot{B}j}\right\} W = 2\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon_{ij} D_z W = 0, \tag{15.102}$$

или

$$D_z W = \frac{\partial}{\partial z} W = 0, \tag{15.103}$$

поэтому W не зависит от бозонной координаты z центрального заряда.

Теперь необходимо определить, не должно ли суперполе W иметь еще какие-нибудь связи в суперпространстве, чтобы описывать $(N = 2)$-теорию Янга — Миллса. Набор полей в x-пространстве комплексного кирального суперполя W можно найти, действуя на него операторами $D_A{}^i$ и вычисляя все возможные независимые суперполя при $\theta = 0$. После этого приходим к полям z, $\lambda^i{}_A$, $t^{ij}{}_{AB}$, $t^{ijk}{}_{ABC}$, $t^{ijkl}{}_{ABCD}$, которые являются $(\theta = 0)$-компонентами соответственно следующих суперполей:

$$W,\ D_A^i W,\ D_A^i D_B^j W,\ D_A^i D_B^j D_C^k W,\ D_A^i D_B^j D_C^k D_D^l W. \tag{15.104}$$

Поскольку W не содержит центрального заряда, имеются свойства симметрии

$$t^{ij}{}_{AB} = -t^{ji}{}_{BA} \quad \text{и т. д.} \tag{15.105}$$

Используя эти свойства, можно выразить поля $t^{ij}{}_{AB}$ следующим образом:

$$t^{ij}{}_{AB} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij} F_{(AB)} - \frac{1}{2} C^{(ij)}\varepsilon_{AB}. \tag{15.106}$$

Выполняя этот анализ для всех полей, найдем, что киральное суперполе W содержит в x-пространстве следующие компонентные поля:

$$z,\ \lambda_A{}^i,\ C^{ij},\ F_{AB},\ \zeta_A{}^i,\ d. \tag{15.107}$$

По существу требуется наложить дополнительную связь в суперпространстве, сокращая набор компонентных полей W так, чтобы он соответствовал $(N=2)$-теории Янга — Миллса.

Компонента с наименьшей размерностью, т. е. поле C^{ij}, является комплексной вопреки действительности полей теории Янга — Миллса с $N=2$. Следовательно, мы должны потребовать, чтобы поле C^{ij} было действительным; это соответствует следующему условию в суперпространстве:

$$D^{ij}W = \bar{D}^{ij}\bar{W}, \tag{15.108}$$

где $D^{ij} = D^{Ai}D_A{}^j$. Читатель может убедиться, что такое условие означает следующее:

$$\zeta_A{}^i = -(\hat{\partial})_A{}^{\dot{B}}\lambda_{\dot{B}}{}^i, \quad d = 16\cdot 6\,(-\partial^2 z), \tag{15.109}$$

а также

$$\partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0. \tag{15.110}$$

Подводя итог полученным результатам [22], можно сказать, что поля $(N=2)$-теории Янга — Миллса содержатся в комплексном суперполе W, удовлетворяющем условиям

$$D_{\dot{A}i}W = 0, \quad D^{ij}W = \bar{D}^{ij}\bar{W}. \tag{15.111}$$

Приведенные выше вычисления выполнены для свободной теории Янга — Миллса с $N=2$. Результаты для полной неабелевой теории должны содержать те же связи в пределе, когда калибровочное взаимодействие обращается в нуль; следовательно, эти связи должны иметь вид

$$\mathbf{D}_{\dot{A}i}W = 0, \quad \mathbf{D}^{ij}W = \bar{\mathbf{D}}^{ij}\bar{W}, \tag{15.112}$$

где $\mathbf{D}_N$ — калибровочно-ковариантная производная, которая может быть выражена через потенциал калибровочного поля A_N с помощью соотношения

$$\mathbf{D}_N = (D_N + gA_N) = E_N^{\pi}(\partial_{\pi} + gA_{\pi}). \tag{15.113}$$

С геометрическими аспектами суперпространственного описания $(N=2)$-теории Янга — Миллса можно ознакомиться в конце этого раздела.

Обратим теперь наше внимание на сектор $(N=2)$-материи. В формулировке, основанной на гипермультиплете Сониуса [49], набор полей в x-пространстве имеет вид

$$(A_i,\ \psi_A,\ \psi_A^*,\ f_i). \tag{15.114}$$

Для низшей компоненты мультиплета A^i имеет место закон преобразования

$$\delta A^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{Ai}\psi_A - \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{A}i}\psi_{\dot{A}}. \tag{15.115}$$

Поэтому, если мы будем рассматривать поле A^i в качестве первой компоненты суперполя ϕ^i, то ϕ^i должно удовлетворять условиям

$$D_A{}^i\phi_j = \frac{1}{2}\delta^i{}_j D_A{}^k\phi_k, \quad D_{\dot{A}}{}^i\phi_j = \frac{1}{2}\delta^i{}_j D_{\dot{A}}^k\phi_k. \tag{15.116}$$

Поднимая индекс j с помощью тензора ε^{ij}, можно переписать эти условия в виде

$$D_A{}^{(i}\phi^{j)} = 0 = D_{\dot{A}}{}^{(i}\phi^{j)}. \tag{15.117}$$

Нетрудно показать (см. гл. 14), что независимые компонентные поля в x-пространстве, входящие в ϕ^i, являются низшими компонентами суперполей

$$\phi_i, \quad D_A{}^k\phi_k, \quad D^j{}_j\phi_i \tag{15.118}$$

и комплексно-сопряженных полей. Но этот набор компонентных полей такой же, как для гипермультиплета Сониуса; следовательно, можно заключить, что на поле ϕ_i наложены только связи (15.117).

Рассмотрим теперь альтернативную формулировку, основанную на гипермультиплете, который состоит из набора полей $(L^{ij}, \lambda^i{}_A, S, P, V_\mu)$, где $\partial^\mu V_\mu = 0$. Преобразование суперсимметрии действительного поля L^{ij} должно иметь вид

$$\delta L^{ij} = \varepsilon^{Ai}\lambda_A{}^j + \varepsilon^{\dot{A}i}\lambda_{\dot{A}}{}^j + (i \leftrightarrow j); \tag{15.119}$$

в результате если L^{ij} является первой компонентой действительного суперполя, обозначенного также L^{ij}, то оно должно удовлетворять уравнениям [59]

$$D_A{}^{(i}L^{jk)} = 0, \quad D_{\dot{A}}{}^{(i}L^{jk)} = 0. \tag{15.120}$$

Читатель может убедиться, что других связей в суперпространстве не требуется.

Мы можем ослабить условие (15.30) и, следовательно, связь $\partial_\mu V^\mu = 0$, введя суперполе $L^{ijkl} = L^{(ijkl)}$ [50], удовлетворяющее соотношению

$$D_A{}^{(i}L^{jk)} = D_{Al}L^{ijkl}. \tag{15.121}$$

Этот мультиплет не содержит сохраняющегося вектора или какой-либо другой величины с подобным условием сохранения, его можно использовать для описания $(N=2)$-материи. Конечно, это ведет к включению большого числа дополнительных полей, но они не приводят к лишним состояниям на массовой по-

верхности, если введено дополнительное суперполе G, компонентные поля которого действуют как множители Лагранжа. Суперполе G удовлетворяет условиям

$$D_A{}^i D_{\dot{B}i} G = 0 = [D_A{}^i,\ D_{\dot{B}i}]\, G. \tag{15.122}$$

Описание этого мультиплета, содержащего поля материи, принадлежащие комплексному представлению, дано в работе [60]. Более детальное суперпространственное описание $(N=2)$-материи можно найти в работе [16].

Теперь мы хотим построить действия для рассмотренных выше теорий в суперпространстве. Для общего $(N=2)$-суперполя ϕ, для которого $\partial_2 \phi = 0$, инвариантная величина имеет вид

$$\int d^4x d^8\theta \phi. \tag{15.123}$$

Но для того, чтобы эта величина была действием, поле ϕ должно иметь нулевую размерность.

Поэтому действия для обсуждавшихся выше теорий должны быть интегралами только по некоторому подпространству суперпространства или должны быть построены из суперполей, размерность которых ниже канонической.

В случае $(N=2)$-теорий Янга — Миллса действие должно содержать только производные $D_A{}^i$, но не производные $D_A{}^i$, действующие на W, и единственный кандидат правильной размерности имеет вид [58]

$$A^{\text{ЯМ}} = \int d^4x D^{ij} D_{ij} W^2 + \text{эрмит. сопр.} \tag{15.124}$$

Ясно, что это инвариант, поскольку

$$\delta A^{\text{ЯМ}} = \int d^4x \left(\varepsilon^A{}_k D_A{}^k + \varepsilon^{\dot{A}i} D_{\dot{A}i}\right) D^{ij} D_{ij} W^2 = 0. \tag{15.125}$$

Для гипермультиплета Сониуса соответствующее действие в суперпространстве [49] имеет вид

$$\int d^4x D^{ij} (\bar{\phi}_i D^k{}_k \phi_j), \tag{15.126}$$

а для варианта, когда сохраняется вектор V_μ, действие выглядит следующим образом [61]:

$$\int d^4x D^{(ij} D^{kl)} (L_{(ij} L_{kl)}). \tag{15.127}$$

Инвариантность этого действия не очевидна, но может быть проверена, если использовать антикоммутационные свойства операторов D.

Действие для теории с ослабленной формулировкой гипермультиплета имеет довольно сложный вид.

Интересная альтернативная формулировка $(N=2)$-теории, основанная на другом, отличном от рассмотренного здесь типе суперпространства, дана в работе [62].

При квантовании теории обычно работают с полями без связей. В случае суперпространства это означает, что вычисления проводятся с суперполями без связей. По существу необходимо прежде разрешить приведенные выше связи. Важным исключением из этого правила является, конечно, киральное суперполе ϕ, но в этом случае также можно воспользоваться соотношением

$$\phi = \bar{D}^2 U \tag{15.128}$$

и проводить квантование с препотенциалом U без связей.

Напомним, что связи для $(N=1)$-теории Янга — Миллса

$$\mathscr{D}_A W_{\dot{B}} = 0, \quad \mathscr{D}^A W_A = \mathscr{D}^{\dot{B}} W_{\dot{B}} \tag{15.129}$$

разрешались в виде

$$W_{\dot{B}} = D^2 (e^{-gV} D_{\dot{B}} e^{gV}). \tag{15.130}$$

Решение связей в суперпространстве для суперполей теории с расширенной суперсимметрией довольно сложно, и решения в нелинейном случае не известны. В работе [63] приведено решение связей для суперполя W в линеаризованной $(N=2)$-теории Янга — Миллса. Оно выражено в терминах суперполя V^{ij} без связей, имеющего размерность —2, т. е.

$$W = D^{ij} D_{ij} \bar{D}^{kl} V_{kl}. \tag{15.131}$$

Решение связей для гипермультиплета в ослабленной формулировке включает препотенциал ρ_{Ai} и поле X^{ijkl}, размерности которых —3/2 и —1 соответственно [65]. Как было показано, имеется итерационная процедура, использующая линеаризованные связи для того, чтобы разрешить связи в неабелевой теории [64, 65].

Рассмотрим теперь $(N=2)$-теорию Янга — Миллса с геометрической точки зрения [55]. Как в обычной теории Янга — Миллса, введем потенциалы A_N, которые определяют ковариантные суперпространственные производные:

$$\mathbf{D}_N = D_N + g A_N \cdot Y; \tag{15.132}$$

здесь Y — генераторы калибровочной группы, а $A_N = (A_A{}^i, A_{\dot{B}i}, A_C)$. Затем мы можем определить напряженности полей суперсимметричной теории Янга — Миллса с помощью соотношения

$$[\mathbf{D}_N, \mathbf{D}_M\} = T_{NM}{}^R \mathbf{D}_R + F_{NM} \cdot Y, \tag{15.133}$$

где $T_{NM}{}^{R}$ — кручение глобального суперпространства, причем единственная ненулевая компонента этого тензора имеет вид

$$T_{A\dot{B}} = -2i\,(\sigma^m)_{A\dot{B}}. \tag{15.134}$$

Суперполе F_{MN} должно удовлетворять тождествам Бьянки

$$\sum_{(MNR)} (\mathbf{D}_M F_{NR} + T_{MN}{}^{S} F_{SR}) = 0, \tag{15.135}$$

где символ $\sum_{(MNR)}$ обозначает соответствующую симметризацию. Рассмотрим теперь $(N=2)$-материю, например, в формулировке (а), которая следует ниже. В этой формулировке для сохранения калибровочной инвариантности необходимо модифицировать определяющее условие:

$$\mathbf{D}_A{}^{(i}\phi^{j)} = 0 = \mathbf{D}_{\dot{A}}{}^{(i}\phi^{j)} = 0. \tag{15.136}$$

Следовательно, мы найдем, что

$$\sum_{(ijk)} \{\mathbf{D}_A{}^{i},\ \mathbf{D}_{\dot{B}}{}^{j}\}\phi^k = 0 = \sum_{(ijk)} F_A{}^{(i}{}_{\dot{B}}{}^{j)}\phi^k \tag{15.137}$$

и аналогично для других подобных соотношений. Поэтому необходимо заключить, что выполняются условия

$$F_A{}^{(i}{}_{\dot{B}}{}^{j)} = F_{A}{}^{(i}{}_{B}{}^{j)} = F_{\dot{A}}{}^{(i}{}_{\dot{B}}{}^{j)} = 0. \tag{15.138}$$

Таким образом, мы нашли, что для существования суперсимметричной теории, содержащей $(N=2)$-материю и калибровочные поля, нужно наложить связи на напряженности полей Янга — Миллса [57]. Анализ $(N=2)$-полей материи в формулировке (б) требует выполнения равенства

$$\mathbf{D}_A{}^{(i}L^{jk)} = \mathbf{D}_{\dot{B}}{}^{(i}L^{jk)} = 0, \tag{15.139}$$

и мы получаем такие же связи на поле F_{MN}, как и выше.

С помощью ковариантной связи можно исключить потенциал A_m [57], выразив его через A_{Bi} и $A_{\dot{C}j}$. Соответствующая связь имеет вид

$$F_A{}^{i}{}_{\dot{B}}{}^{i} = 0. \tag{15.140}$$

Это аналогично переходу от формализма первого порядка к формализму второго порядка в общей теории относительности. Остающаяся напряженность с наименьшей размерностью, равной 1, есть

$$W = F^{Ai}{}_{Ai}. \tag{15.141}$$

Благодаря тождествам Бьянки из связей (15.138) и (15.140) следуют формулы

$$\mathscr{D}_{\dot{A}i} W = 0, \quad \mathscr{D}^{ij} W = \bar{\mathscr{D}}^{ij} \bar{W}, \tag{15.142}$$

совпадающие с полученными нами выше.

16. ФОРМУЛИРОВКА ($N = 1$)-СУПЕРГРАВИТАЦИИ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

16.1. Геометрия

Геометрическая форма [68] суперпространственной формулировки супергравитации содержит многие элементы общей теории относительности, но требует также дополнительных построений. Полезным руководством в конструировании локального суперпространства служит требование, чтобы оно содержало глобальное суперпространство как предельный случай.

Начнем с восьмимерного многообразия $z^\pi = (x^\mu, \theta^{\underline{\alpha}})$ (x^μ — коммутирующая координата, а $\theta^{\underline{\alpha}}$ — антикоммутирующая координата), для которого общекоординатное преобразование суперпространства имеет вид

$$z^\pi \to z'^\pi = z^\pi + \xi^\pi, \tag{16.1}$$

где $\xi^\pi = (\xi^\mu, \xi^{\underline{\alpha}})$ — произвольные функции от z^π.

Так же как в общей теории относительности, можно рассмотреть скалярные суперполя, т. е. поля, для которых

$$\phi'(z') = \phi(z), \tag{16.2}$$

и поля с суперпространственными мировыми индексами ϕ_Λ, например

$$\phi_\Lambda = \partial\phi/\partial z^\Lambda. \tag{16.3}$$

Последние преобразуются по закону

$$\phi'_\Lambda(z') = \frac{\partial z^\pi}{\partial z'^\Lambda}\,\phi_\pi(z). \tag{16.4}$$

Трансформационные свойства тензоров высших рангов очевидны.

Теперь необходимо конкретизировать геометрическую структуру многообразия. По причинам, которые станут очевидными ниже, суперпространственная формулировка по существу аналогична тетрадной формулировке в общей теории относительности. Введем супертетрады $E_\pi{}^N$, которые при общекоординатных преобразованиях суперпространства изменяются следующим образом:

$$\delta E_\pi{}^N = \xi^\Lambda \partial_\Lambda E_\pi{}^N + \partial_\pi \xi^\Lambda E_\Lambda{}^N. \tag{16.5}$$

Верхний индекс N преобразуется под действием группы преобразований касательного пространства, в качестве которой выбираем группу Лоренца; поэтому $\delta E_\Pi{}^N = E_\Pi{}^M \Lambda_M{}^N$, где

$$\Lambda_M{}^N = \begin{pmatrix} \Lambda_m{}^n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(\sigma_{mn})_A{}^B \Lambda^{mn} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{4}(\sigma_{mn})_{\dot A}{}^{\dot B} \Lambda^{mn} \end{pmatrix}. \quad (16.6)$$

Матрица $\Lambda_M{}^N$ является произвольной функцией на суперпространстве, и с ее помощью преобразуются не только векторные, но и спинорные индексы. Поскольку мы имеем дело с восьмимерным многообразием, можно выбрать гораздо более широкую группу касательного пространства. Например, $\Lambda_M{}^N$ может быть произвольной матрицей, сохраняющей метрику

$$g_{NM} = a_1 \eta_{mn} + a_2 \varepsilon_{AB} + a_3 \varepsilon_{\dot A \dot B}, \quad (16.7)$$

где a_1, a_2 и a_3 — ненулевые произвольные постоянные. Требование действительности метрики означает выполнение равенства $a_2{}^* = a_3$, и один из масштабных факторов можно исключить. Это соответствует выбору группы $Osp(4, 1)$ в качестве группы касательного пространства. В такой формулировке можно ввести метрику $g_{\Pi\Lambda} = E_\Pi{}^N g_{NM} E_\Lambda{}^M$, и мы получаем теорию, копирующую на каждом этапе построения общую теорию относительности Эйнштейна [69].

Но такая формулировка не приводит к рассмотренной выше ($N = 1$)-супергравитации в x-пространстве. Чтобы понять это, заметим, что введенная выше группа касательного пространства не совпадает с группой глобального суперпространства (суперпространство есть фактор-пространство: супергруппа Пуанкаре/группа Лоренца), которое имеет в качестве группы касательного пространства группу Лоренца, заданную соотношением (16.6) с постоянной матрицей $\Lambda_m{}^n$. Так как линеаризованная супергравитация в формализме суперпространства должна включать формулировку суперпространства с глобальной суперсимметрией в качестве предельного случая, любая теория, основанная на касательной группе $Osp(4, 1)$, не будет совпадать с линеаризованной супергравитацией. В действительности теория, основанная на группе $Osp(4, 1)$, содержит высшие производные в действии.

Важное следствие выбора этой ограниченной группы касательного пространства состоит в том, что касательные супервекторы $V^N = V^\Pi E_\Pi{}^N$ принадлежат приводимому представлению группы Лоренца. Это позволяет записать много дополнительных

инвариантов. Каждый из объектов $V^m V_m$, $V^A V^B \varepsilon_{AB}$, $V^{\dot A} V^{\dot B} \varepsilon_{\dot B \dot A}$ в отдельности инвариантен.

Другими словами, при выборе метрики (16.7) постоянные a_1, a_2, a_3 могут принимать любые значения, в том числе и нулевые.

Определим спиновую связность со значениями в пространстве представлений группы Лоренца:

$$\Omega_{\Lambda m}{}^N = \begin{pmatrix} \Omega_{\Lambda m}{}^n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\Omega_\Lambda{}^{mn}(\sigma_{mn})_A{}^B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\Omega_\Lambda{}^{mn}(\bar\sigma_{mn})_{\dot A}{}^{\dot B} \end{pmatrix}. \quad (16.8)$$

Эта связность при общекоординатных суперпреобразованиях видоизменяется следующим образом:

$$\delta\Omega_{\Lambda M}{}^N = \xi^\pi \partial_\pi \Omega_{\Lambda M}{}^N + \partial_\Lambda \xi^\pi \Omega_{\pi M}{}^N, \quad (16.9)$$

а при вращениях в касательном пространстве преобразуется как

$$\delta\Omega_{\Lambda M}{}^N = -\partial_\Lambda \Omega_M{}^N + \Omega_{\Lambda M}{}^s \Lambda_s{}^N + \Omega_{\Lambda R}{}^N L_M{}^R (-1)^{(M+R)(N+R)} - \\ - \partial_\Lambda L_M{}^N + \Omega_{\Lambda M}{}^s L_s{}^N. \quad (16.10)$$

При этом ковариантные производные определены соотношением

$$D_\Lambda = \partial_\Lambda + \frac{1}{2}\Omega_\Lambda{}^{mn} J_{mn}, \quad (16.11)$$

где J_{mn} — соответствующие лоренцевы генераторы (см. приложение A). Ковариантная производная с индексами касательного пространства есть

$$D_N = E_N{}^\Lambda D_\Lambda, \quad (16.12)$$

где $E_N{}^\Lambda$ — обратная тетрада, определенная с помощью соотношений

$$E_N{}^\Lambda E_\Lambda{}^M = \delta_N{}^M \quad (16.13)$$

или

$$E_\Lambda{}^M E_M{}^\pi = \delta_\Lambda{}^\pi. \quad (16.14)$$

Рассмотрев супертетраду и спиновую связность, мы обычным образом определим тензоры кручения и кривизны

$$[D_N, D_M\} = T_{NM}{}^R D_R + \frac{1}{2} R_{NM}{}^{mn} J_{mn}. \quad (16.15)$$

Используя соотношения (16.11) и (16.12), находим

$$T_{NM}{}^{R} = E_M{}^{\Lambda}\partial_{\Lambda}E_N{}^{\pi}E_{\pi}{}^{R} + \Omega_{MN}{}^{R} - (-1)^{MN}(M \leftrightarrow N), \tag{16.16}$$

$$R_{MN}{}^{rs} = E_M{}^{\Lambda}E_N{}^{\pi}(-1)^{\Lambda(N+\pi)} \times$$
$$\times \{\partial_{\Lambda}\Omega_{\pi}{}^{rs} + \Omega_{\Lambda}{}^{rk}\Omega_{\pi k}{}^{s} - (-1)^{\Lambda\pi}(\Lambda \leftrightarrow \pi)\}. \tag{16.17}$$

С помощью этих тензоров общекоординатные суперпреобразования можно записать в виде

$$\delta E_{\Lambda}{}^{M} = -E_{\Lambda}{}^{R}\xi^{N}T_{NR}{}^{M} + D_{\Lambda}\xi^{M}, \tag{16.18}$$

$$\delta\Omega_{\Lambda M}{}^{N} = E_{\Lambda}{}^{R}\xi^{N}R_{NRM}{}^{N}, \tag{16.19}$$

где $\xi^{N} = \xi^{\Lambda}E_{\Lambda}{}^{N}$ и опущено преобразование Лоренца.

Тензоры кручения и кривизны удовлетворяют тождествам Бьянки, которые следуют из тождества

$$[\mathbf{D}_M, [\mathbf{D}_N, \mathbf{D}_R\}] - [[\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_N\}, \mathbf{D}_R] + (-1)^{RN}[[\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_R\}, \mathbf{D}_N] = 0. \tag{16.20}$$

Тождества Бьянки имеют вид

$$0 = I^{(1)}{}_{RMN}{}^{F} = [-(-1)^{(M+N)R}\mathbf{D}_R T_{MN}{}^{F} + T_{MN}{}^{S}T_{SR}{}^{F} + R_{MNR}{}^{F}] +$$
$$+ [+(-1)^{MN}\mathbf{D}_N T_{MR}{}^{F} - (-1)^{NR}T_{MR}^{S}T_{SN}^{F} - (-1)^{NR}R_{MRN}{}^{F}] +$$
$$+ [-\mathbf{D}_M T_{NR}{}^{F} + (-1)^{(N+R)M}T_{NR}{}^{S}T_{SM}{}^{F} + (-1)^{(N+R)M}R_{NRM}{}^{F}] \tag{16.21}$$

и

$$I^{(2)}{}_{RMN}{}^{mn} = [-(-1)^{(M+N)R}\mathbf{D}_R R_{MN}{}^{mn} + T_{MN}{}^{S}R_{SR}{}^{mn}] -$$
$$-(-1)^{NR}(R \to N,\ N \to R,\ M \to M \text{ в первой скобке}) -$$
$$-(-1)^{(N+R)M}(M \to N,\ N \to R,\ R \to M$$
$$\text{в первой скобке}) = 0. \tag{16.22}$$

Можно показать, что если справедливо тождество (16.21), то тождество (16.22) выполняется автоматически. Этот результат верен при наличии связей, наложенных на $T_{MN}{}^{R}$ и $R_{MN}{}^{mn}$, и является следствием ограниченного выбора касательных пространств. Мы будем называть это утверждение теоремой Дрэгона [70]. В случае когда все индексы фермионные, находим

$$I_{ABC}{}^{N} = -\mathbf{D}_A T_{BC}{}^{N} + T_{AB}{}^{S}T_{SC}{}^{N} + R_{ABC}{}^{N} - \mathbf{D}_C T_{AB}{}^{N} + T_{CA}{}^{S}T_{SB}{}^{N} +$$
$$+ R_{CAB}{}^{N} - \mathbf{D}_B T_{CA}{}^{N} + T_{BC}{}^{S}T_{SA}{}^{N} + R_{BCA}{}^{N} = 0; \tag{16.23}$$

для фермионных и одного бозонного индексов имеем

$$I_{ABr}{}^{N} = -\mathbf{D}_A T_{Br}{}^{N} + T_{AB}{}^{S}T_{Sr}{}^{N} + R_{ABr}{}^{N} - \mathbf{D}_r T_{AB}{}^{N} + T_{rA}^{S}T_{SB}^{N} +$$
$$+ R_{rAB}{}^{N} + \mathbf{D}_B T_{rA}{}^{N} - T_{Br}{}^{S}T_{SA}{}^{N} - R_{BrA}{}^{N} = 0, \tag{16.24}$$

а для двух бозонных индексов получаем

$$I_{Anr}{}^{N} = -\mathbf{D}_A T_{nr}{}^{N} + T_{An}{}^{s} T_{sr}{}^{N} + R_{Anr}{}^{N} - \mathbf{D}_r T_{An}{}^{N} + T_{rA}{}^{s} T_{sn}{}^{N} + R_{rAn}{}^{N} - \mathbf{D}_n T_{rA}{}^{N} + T_{nr}{}^{s} T_{sA}{}^{N} + R_{nrA}{}^{N} = 0. \qquad (16.25)$$

Ясно, что любой индекс без точки можно заменить индексом с точкой; при этом знаки останутся теми же. Напомним, что в случае глобального суперпространства все компоненты тензора кручения и кривизны равны нулю, кроме $T_{A\dot{B}}{}^{n} = -2i(\sigma^n)_{A\dot{B}}$. Очевидно, что это не согласуется с группой касательного пространства $Osp(4, 1)$.

Размерности кручений и кривизны можно получить из размерностей ковариантных производных D_N. Если F и B обозначают фермионные и бозонные индексы соответственно, то

$$[D_F] = \frac{1}{2}, \quad [D_B] = 1 \qquad (16.26)$$

и

$$[T_{FF}{}^{B}] = 0, \quad [T_{FF}{}^{F}] = [T_{FB}{}^{B}] = \frac{1}{2},$$

$$[T_{FB}{}^{F}] = [T_{BB}{}^{B}] = 1, \quad [T_{BB}{}^{F}] = \frac{3}{2}, \qquad (16.27)$$

а размерности кривизны

$$[R_{FF}{}^{mn}] = 1, \quad [R_{FB}{}^{mn}] = \frac{3}{2}, \quad [R_{BB}{}^{mn}] = 2. \qquad (16.28)$$

Полезно рассмотреть понятие геометрической размерности полей. Это размерность поля, с которой оно появляется в выражениях для тензоров кручения и кривизны. Такие выражения никогда не содержат гравитационной постоянной $\varkappa$, и поскольку они нелинейны по некоторым бозонным полям, таким, как тетрада $e_\mu{}^n$, эти поля должны иметь нулевые геометрические размерности. Размерности других полей определяются по их соотношениям с тетрадой $e_\mu{}^n$, например по преобразованиям суперсимметрии. Таким образом, получаем

$$[e_\mu{}^n] = 0, \quad [\psi_\mu{}^a] = \frac{1}{2}, \quad [M] = [N] = [b_\mu] = 1. \qquad (16.29)$$

Заметим, что эти размерности отличаются на единицу от канонических.

16.2. Связи в суперпространстве

Проведенное выше рассмотрение почти полностью идентично тетрадной формулировке общей теории относительности. Но имеется и одно принципиальное отличие, состоящее в выборе

ограниченной группы касательного пространства, так что суперкасательные векторы принадлежат ее приводимому представлению. Для построения супергравитации требуются дополнительные понятия. Тетрада $E_A{}^N$ и спиновая связность $\Omega_A{}^{mn}$ содержат много степеней свободы. Простой подсчет приводит к следующему результату:

$$8(8\times 8+8\times 6)-8(8+6)=8\times 7\times 7\times 2. \qquad (16.30)$$

Это гораздо больше, чем число степеней свободы полей супергравитации $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N и b_μ за вычетом калибровочных симметрий $(12+12)$. Более того, некоторые из полей имеют спин 3, т. е.

$$E_\mu{}^m = \ldots + \theta^A\theta^{\dot B}h_\mu{}^m{}_{A\dot B} + \ldots \qquad (16.31)$$

Эти черты являются симптомами скрытого недостатка. Пусть имеется киральное суперполе $\phi(x,\theta)$ в глобальном суперпространстве; можно потребовать, чтобы это представление сохранялось и в случае, когда возникает супергравитация. Определяющее условие для теории с глобальной суперсимметрией $(D_A\phi=0)$ необходимо обобщить так, чтобы оно стало ковариантным по отношению к общекоординатным суперпреобразованиям. Простейшее обобщение имеет вид

$$\mathbf{D}_A\phi = E_A{}^m\partial_m\phi = 0. \qquad (16.32)$$

Уравнение (16.32) означает, что выполняется соотношение

$$\{\mathbf{D}_A,\ \mathbf{D}_B\}\,\phi = 0 = T_{AB}{}^N\mathbf{D}_N\phi. \qquad (16.33)$$

Поскольку при $\theta=0$ ϕ является произвольной функцией x, из соотношения (16.33) следует [56, 57]

$$T_{AB}{}^{\dot C} = T_{AB}{}^n = 0. \qquad (16.34)$$

Комплексно-сопряженные равенства имеют вид

$$T_{\dot A\dot B}{}^C = T_{\dot A\dot B}{}^n = 0. \qquad (16.35)$$

Проводимый нами анализ имеет много общего с методами вычислений в теории Янга — Миллса с глобальной суперсимметрией, и прежде чем идти дальше, проще всего (но не обязательно) наложить стандартные связи [56, 57]. Спиновая связность $\Omega_r{}^{mn}$ может быть выражена через супертетраду $E_M{}^A$. Например,

$$0 = T_{mn}{}^r = C_{mn}{}^r + \Omega_{mn}{}^r - (m\leftrightarrow n),$$

где связь

$$C_{MN}{}^R = E_M{}^A\left(\partial_A E_N{}^\pi\right)E_\pi{}^R - (-1)^{MN}(M\leftrightarrow N) \qquad (16.36)$$

может быть решена так же, как это делается при переходе от формализма первого порядка к формализму второго порядка в общей теории относительности. Аналогично связь

$$0 = T_{AB}{}^{C} = C_{AB}{}^{C} + \Omega_{AB}{}^{C} + (A \leftrightarrow B) \tag{16.37}$$

можно использовать для решения относительно $\Omega_{AB}{}^{C}$. Решение имеет вид

$$\Omega_{ABC} = -\frac{1}{2}(C_{ABC} + C_{CBA} - C_{BCA}). \tag{16.38}$$

Связь, которая выражает $\Omega_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}}$ через $E_{M}{}^{\Lambda}$, имеет вид

$$T_{A(\dot{B}}{}^{\dot{C})} = 0. \tag{16.39}$$

Напомним, что спиновая связность принимает значения в пространстве представлений группы Лоренца, следовательно, $\Omega_{NA}{}^{\dot{B}} = 0$ и т. д. Спиновые связности $\Omega_{\dot{A}\dot{B}}{}^{\dot{C}}$ и $\Omega_{\dot{A}B}{}^{C}$ могут быть найдены путем решения комплексно-сопряженных по отношению к приведенным выше связей $(T_{\dot{A}\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0 = T_{\dot{A}(B}{}^{C)})$. Важно отметить, что при решении этих связей не возникают дифференциальные уравнения; $\Omega_{N}{}^{mn}$ выражается через $E_{\Lambda}{}^{N}$ после решения алгебраических уравнений.

Две менее очевидные связи выражают $E_{m}{}^{\Lambda}$ через $E_{A}{}^{\Lambda}$ и $E_{\dot{A}}{}^{\Lambda}$. Эти связи имеют вид

$$T_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}} - \frac{1}{4} T_{Am}{}^{n} (\sigma_{m}{}^{n})_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0, \tag{16.40}$$

$$T_{A\dot{B}}{}^{n} = -2i(\sigma^{n})_{A\dot{B}}. \tag{16.41}$$

Второй член уравнения (16.40) нужен, чтобы исключить из него спиновую связность. Заметим, что тетрада $E_{m}{}^{\Lambda}$ имеет 4×8 степеней свободы, в то время как каждое из этих двух уравнений содержит $4 \times 2 \times 2$ таких членов. Детальное обсуждение решения этих связей можно найти в работах [6, 56].

Имеется некоторый произвол в выборе стандартной связи; например, вместо того чтобы разрешить связь $T_{A(\dot{B}}{}^{\dot{C})} = 0$ относительно $\Omega_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}}$, мы можем использовать соотношение

$$T_{Am}{}^{n} (\bar{\sigma}^{m}{}_{n})_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0. \tag{16.42}$$

Разные варианты выбора связаны между собой переопределением полей, и все они равноправны. Мы наложили стандартные связи, приведенные в следующей таблице:

Связь	Суперполе, относительно которого разрешается связь
$T_{mn}{}^{r} = 0$	$\Omega_{mn}{}^{r}$
$T_{A(\dot{B}}{}^{\dot{C})} = 0$	$\Omega_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}}$
$T_{AB}{}^{C} = 0$	$\Omega_{AB}{}^{C}$
$T_{A\dot{B}}{}^{n} = -2i\,(\sigma^{n})_{A\dot{B}}$ $T_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}} - \frac{1}{4} T_{Am}{}^{n}\,(\bar{\sigma}^{m}{}_{n})_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0$	$E_{n}{}^{\pi}$

Рассмотрим теперь, как другие представления глобальной суперсимметрии обобщаются при переходе к супергравитации. Конечно, мы должны конкретизировать, какое глобальное суперпространство имеется в виду. Глобальное суперпространство анти-де-Ситтера (фактор-пространство: супергруппа анти-де-Ситтера/группа $SO(3,1)$) в пределе радиуса R, стремящегося к бесконечности, превращается в суперпространство Пуанкаре. В действительности не все представления в суперпространстве Пуанкаре обобщаются до представлений в суперпространстве анти-де-Ситтера (АдС); один из примеров дает соотношение $D_A\phi_B = 0$, которое теперь принимает вид

$$D_A{}^{S}\phi_B = 0, \tag{16.43}$$

где $D_A{}^{S}$ — ковариантная производная в пространстве анти-де-Ситтера. Причина состоит в том, что в пространстве анти-де-Ситтера производные удовлетворяют другой алгебре, в частности

$$\{D_A{}^{S},\ D_B{}^{S}\} = \frac{1}{2} R^{S}{}_{AB}{}^{mn} J_{mn}, \tag{16.44}$$

где

$$R^{S}_{ABCD} = \frac{1}{6}\,(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD} + \varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD})\,m, \quad T^{S}{}_{AB}{}^{N} = 0, \tag{16.45}$$

в то время как $R^{S}_{AB\dot{C}\dot{D}} = 0$. Другие компоненты $R^{S}{}_{AB}{}^{mn}$ можно найти с помощью комплексного сопряжения, а параметр массы m связан с радиусом R соотношением $m = \text{const}/R$.

Представление (16.43) не обобщается на суперпространство АдС [71, 72], поскольку

$$0 = \{D_A{}^{S},\ D_B{}^{S}\}\,\phi_C = R^{S}{}_{ABC}{}^{D}\phi_D = \frac{m}{6}\,(\varepsilon_{AC}\phi_B + \varepsilon_{BC}\phi_A) \neq 0.$$

Но представление $D_{(A}\phi_{B)}=0$ обобщается, принимая вид

$$\sum_{(ABC)}\{D_A{}^S,\ D_B{}^S\}\,\phi_C=\sum_{(ABC)}R^S{}_{AB}{}^D{}_C\phi_D=0. \qquad (16.46)$$

Имеет смысл обобщать только те представления, которые существуют в суперпространстве АдС, чтобы это суперпространство было включено в качестве предельного случая в общее суперпространство супергравитации.

Наиболее общие неприводимые представления в суперпространстве АдС — киральное и линейное представления, соответствующие связям [71]

$$D^S{}_{(A}\phi_{BC\ldots)(\dot A\dot B\ldots)}=0, \qquad (16.47)$$

$$D^{SA}\phi_{(AB\ldots)(\dot A\dot B\ldots)}=0. \qquad (16.48)$$

Если нет спинорных индексов без точек, первое уравнение принимает вид $D_A\phi_{(\dot A\dot B\ldots)}=0$, а второе $D^A\phi_{(\dot A\dot B\ldots)}=0$. Проекторы, отвечающие этим представлениям, равны соответственно [71]

$$\Pi_C(p,\ q)=+\frac{\left(D_A{}^SD^{SA}+mp/6\right)}{(1+p)\,m/3}, \qquad (16.49)$$

$$\Pi_L(p,\ q)=-\frac{\left(D_A{}^SD^{SA}-(p/2+1)\,m/3\right)}{(1+p)\,m/3}, \qquad (16.50)$$

где p и q — числа индексов без точек и с точками суперполя, на которое действует проектор. В качестве примера рассмотрим суперполе без спинорных индексов. Киральное и линейное представления имеют вид

$$D_A{}^SD^{SA}\phi=0, \qquad (16.51)$$

$$\left(D_A{}^SD^{SA}-\frac{m}{3}\right)\phi=0. \qquad (16.52)$$

Действуя еще раз оператором $D^S{}_A$ на левые части этих уравнений и используя соотношение (16.47), найдем, что первое из них приводится к обычному виду:

$$D_A{}^S\phi=0, \qquad (16.53)$$

а второе тождественно обращается в нуль. Проекторы удовлетворяют соотношениям

$$\Pi_C(p,\ q)\,\Pi_C(p,\ q)=\Pi_C(p,\ q),\quad \Pi_C(p,\ q)\,\Pi_L(p,\ q)=0,$$
$$\Pi_L(p,\ q)\,\Pi_L(p,\ q)=\Pi_L(p,\ q),\quad \Pi_L(p,\ q)\,\Pi_C(p,\ q)=0, \qquad (16.54)$$
$$\Pi_C(p,\ q)+\Pi_L(p,\ q)=1.$$

Потребуем теперь, чтобы все неприводимые представления в суперпространстве анти-де-Ситтера (16.47) и (16.48) обоб-

щались на случай локального суперпространства. Так как одним из таких представлений является киральное представление $D_A\phi = 0$, мы получаем $T_{AB}{}^n = T_{AB}{}^{\dot{C}} = 0$. Из линейного представления нельзя получить какие-либо новые связи, поскольку определяющее его условие содержит производную со свернутым индексом. Другие киральные представления на самом деле не ведут к новым связям [57]. Это следует из того факта, что стандартные связи и связи $T_{AB}{}^n = T_{AB}{}^{\dot{C}} = 0$ в сочетании с тождествами Бьянки (см. следующий раздел) приводят к условиям

$$R_{ABC\dot{D}} = \frac{1}{6}(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{B\dot{D}} + \varepsilon_{B\dot{C}}\varepsilon_{A\dot{D}})\,R,$$

$$R_{AB\dot{C}\dot{D}} = 0, \qquad \mathbf{D}_A R = 0. \tag{16.55}$$

Проекторы (16.54) обобщаются на локальное суперпространство следующим образом:

$$\pi_L(p, q) = -\frac{\left(\mathbf{D}_A\mathbf{D}^A - {}^1\!/_3\,(1 + p/2)\,R\right)}{(1 + p)\,R/3}, \tag{16.56}$$

$$\pi_C(p, q) = +\frac{\left(\mathbf{D}_A\mathbf{D}^A + (p/6)\,R\right)}{(1 + p)\,R/3}. \tag{16.57}$$

Условия (16.55) достаточны для того, чтобы такие проекторы также удовлетворяли соотношениям (16.54). Эти проекторы построены таким образом, что представление локальной суперсимметрии удовлетворяет тем же определяющим условиям, что и для проекторов (16.49) и (16.50), с точностью до замены $D_A{}^S \to \mathbf{D}_A$.

В качестве примера, иллюстрирующего использование проекторов, рассмотрим суперполе ϕ без спинорных индексов. Киральная и линейная части этого суперполя даются соответственно уравнениями

$$\mathbf{D}^2\phi = 0, \tag{16.58}$$

$$(\mathbf{D}^2 - R/3)\,\phi = 0, \tag{16.59}$$

где $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}^A\mathbf{D}_A$.

Эти условия можно упростить так же, как в случае пространства анти-де-Ситтера. Рассмотрим соотношение

$$\mathbf{D}_A\mathbf{D}^2\phi = \{\mathbf{D}_A, \mathbf{D}^B\}\,\mathbf{D}_B\phi - \mathbf{D}^B\mathbf{D}_A\mathbf{D}_B\phi =$$

$$= R_A{}^B{}_B{}^C\mathbf{D}_C\phi - \mathbf{D}^B\left(-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{AB}\mathbf{D}^2\phi\right). \tag{16.60}$$

Здесь учтена связь $T_{AB}{}^N = 0$. Используя (16.55), находим

$$\mathbf{D}_A\mathbf{D}^2\phi = +\tfrac{1}{2}R\mathbf{D}_A\phi - \tfrac{1}{2}\mathbf{D}_A\mathbf{D}^2\phi, \tag{16.61}$$

поэтому имеем

$$\mathbf{D}_A\mathbf{D}^2\phi = +\frac{1}{3}R\mathbf{D}_A\phi. \tag{16.62}$$

Действуя оператором $\mathbf{D}_A$ на уравнение (16.58) и выделяя слагаемое, содержащее R, получаем

$$\mathbf{D}_A\phi = 0. \tag{16.63}$$

Но действие оператора $\mathbf{D}_A$ на уравнение (16.59) не приводит к новому результату, так как

$$\mathbf{D}_A(\mathbf{D}^2 - R/3)\,\phi = 0$$

тождественно.

Вероятно, читатель озадачен тем, что обобщение глобальных представлений на локальный случай не единственно. Но можно показать, что другие определяющие условия ведут точно к тем же связям.

В отличие от теории Янга — Миллса необходимо также наложить дополнительный тип связи [57]. При суперконформном преобразовании получаем

$$E_A{}^\Lambda \to e^L E_A{}^\Lambda, \quad E_{\dot A}{}^\Lambda = e^{L^*} E_{\dot A}{}^\Lambda,$$

где L — общее суперполе. Трансформационные свойства тетрады $E_m{}^\Lambda$ и связности $\Omega_\Lambda{}^{mn}$ выводятся из свойств $E_A{}^\Lambda(E_{\dot A}{}^\Lambda)$ с помощью стандартных связей, выражающих первую из упомянутых величин через вторую. Следовательно, стандартные связи по определению инвариантны относительно суперконформных преобразований.

Связи $T_{AB}{}^n = T_{AB}{}^{\dot C} = 0$, сохраняющие представление, также инвариантны относительно суперконформных преобразований, что можно проверить, например, рассмотрев их явное выражение через $E_A{}^\Lambda(E_{\dot A}{}^\Lambda)$. Детальное вычисление трансформационных свойств тензоров кручения и кривизны читатель может найти в работе [57].

Чтобы убедиться в необходимости суперконформных связей, рассмотрим теперь действие для $(N = 1)$-супергравитации. Оно должно иметь вид

$$A = \frac{1}{2\varkappa^2}\int d^4x d^4\theta E f(E_A{}^\Lambda, E_{\dot A}{}^\Lambda),$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная, а

$$E = \det E_\Lambda{}^m.$$

Множитель $1/2\varkappa^2$ необходим для того, чтобы воспроизвести коэффициент $1/2\varkappa^2$ перед эйнштейновским действием.

По соображениям размерности функция f должна быть ковариантным тензором нулевой размерности. Однако таких ненулевых ковариантных тензоров не существует, и, следовательно, действие может иметь только следующий вид:

$$A = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x\, d^4\theta E.$$

Далее, если нет суперконформной связи, то тетраду можно параметризовать

$$E_A{}^m = \psi E'_A{}^m,$$

где ψ — произвольное суперполе. Варьирование действия по полю ψ дает

$$\frac{\delta E_A{}^\Lambda}{\delta \psi} \frac{\delta A}{\delta E_A{}^\Lambda} = 0,$$

что в свою очередь означает

$$E_A{}^\pi \frac{\delta E}{\delta E_A{}^\pi} = 2E = 0. \tag{16.64}$$

Это полевое уравнение неприемлемо, поскольку из него следует, что тетрада $E_N{}^\Lambda$ необратима на массовой поверхности. Наложение суперконформных связей ведет к тому, что ψ — не самое общее суперполе, а уравнение движения включает, как и требуется, проекционный оператор.

Читатель, хорошо знакомый с новой минимальной формулировкой супергравитации, заметит слабое место в приведенном рассуждении, но последнее заключение, а именно необходимость суперконформных связей, всегда справедливо. Очевидно, не следует полностью нарушать суперконформную группу симметрии, поскольку того же результата можно достичь выбором суперконформной калибровки, и в этом случае мы получим набор полей конформной супергравитации $(e_\mu{}^n, \psi_\mu{}^\alpha, b_\mu)$.

Если надо выбрать связи, нарушающие суперконформную инвариантность, то для этого имеются лишь две возможности. Мы можем редуцировать суперполе $L(L^*)$, сделав его киральным или линейным. Это требует связей, размерность которых 1/2 и 1 соответственно. Рассмотрев трансформационные свойства, найдем, что имеются два вида соотношений, претендующих на это [57], а именно

$$\delta T_{Am}{}^m = LT_{Am}{}^m - 2\mathbf{D}_A(2L + L^*), \tag{16.65}$$

$$\delta R = -6\left(\mathbf{D}_A\mathbf{D}^A - \frac{1}{3}R\right)L. \tag{16.66}$$

В действительности $T_{Am}{}^{m}$ — единственный остающийся ненулевым тензор размерности 1/2.

Можно показать, что вследствие стандартных и сохраняющих представление связей справедливо уравнение

$$\mathbf{D}_{(A}T_{B)} = 0. \tag{16.67}$$

Решение уравнения (16.67), напоминающее выражения, полученные нами при обсуждении проекторов, имеет вид

$$T_B = \mathbf{D}_B T. \tag{16.68}$$

Следовательно, мы можем выбрать суперконформную калибровку, в которой

$$T_B = 0. \tag{16.69}$$

Остающаяся суперконформная инвариантность дается киральным параметром $\Sigma^* = (-2)(2L + L^*)$:

$$\mathbf{D}_A \Sigma^* = 0. \tag{16.70}$$

Найдем явное выражение для L:

$$L = -(2\Sigma^* - \Sigma). \tag{16.71}$$

Тогда преобразование супертетрады имеет вид

$$\delta E_A{}^{\Lambda} = -(2\Sigma^* - \Sigma) E_A{}^{\Lambda}. \tag{16.72}$$

Связь $T_B = 0$ ведет, как мы увидим ниже, к первоначальной минимальной формулировке $(N = 1)$-супергравитации, которая, как одна из возможных, рассмотрена в этой книге (поля $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N и b_μ). Остающаяся суперконформная группа известна как группа Хау — Такера.

Мы могли использовать линейную часть L, чтобы положить тензор $R = 0$. Остающаяся суперконформная инвариантность дается линейным суперполем $S = L$:

$$\mathbf{D}^A \mathbf{D}_A \mathbf{S} = 0, \tag{16.73}$$

а преобразование супертетрады имеет вид

$$\delta E_A{}^{\Lambda} = S E_A{}^{\Lambda}. \tag{16.74}$$

Условие $R = 0$ ведет к совокупности из $(20 + 20)$ полей (бозонных + фермионных) неминимальной формулировки Брайтенлонера [74] с упомянутой выше суперконформной группой [75].

На самом деле можно принять более сложную суперконформную связь

$$Q = R + \zeta(\mathbf{D}^A T_A + \tfrac{\zeta}{3} T^A T_A) = 0, \tag{16.75}$$

где ζ — параметр. Частные значения ζ ведут к первоначальному минимальному, новому минимальному и брайтенлонеровскому наборам вспомогательных полей.

Подводя итоги, можно сказать, что первоначальная минимальная формулировка супергравитации содержит следующие связи:

стандартную

$$0 = T_{mn}{}^{r} = T_{AB}{}^{C} = T_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}},$$

$$0 = T_{A\dot{B}}{}^{n} - 2i(\sigma^{n})_{A\dot{B}} = T_{Am}{}^{n}(\bar{\sigma}_{m}{}^{n})^{\dot{B}}{}_{\dot{C}},$$

сохраняющую представление

$$T_{AB}{}^{\dot{C}} = T_{AB}{}^{n} = 0,$$

суперконформную

$$T_{Am}{}^{m} = 0$$

и аналогичные для комплексно-сопряженных величин.

Если мы имеем дело с конформной супергравитацией, то можно использовать суперконформную инвариантность для выбора $T_A = R = 0$.

16.3. Анализ связей в суперпространстве

Для супергравитации со связями имеются два варианта дальнейших действий. Мы можем просто решить связи [76, 77] или воспользоваться другой возможностью и проанализировать следствия этих связей, используя тождества Бьянки [78]. Это положение очень похоже на ситуацию, которая имеется в суперсимметричной теории Янга — Миллса (см. гл. 15), но в случае супергравитации все много сложнее.

Наметим сначала, как использовать тождества Бьянки для того, чтобы заключить, к каким последствиям приводят связи. Рассмотренные в предыдущем разделе связи[1]) (стандартная, сохраняющая представление и суперконформная) имеют вид

$$T_{A\dot{B}}{}^{n} - 2i(\sigma^{n})_{A\dot{B}} = T_{AB}{}^{m} = 0,$$

$$T_{Am}{}^{m} = T_{AB}{}^{C} = T_{A\dot{B}}{}^{\dot{C}} = T_{Am}{}^{n}(\bar{\sigma}^{m}{}_{n})_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0, \qquad (16.76)$$

$$T_{mn}{}^{r} = 0$$

и аналогичные соотношения для комплексно-сопряженных величин. Лучший способ анализа тождеств Бьянки — рассмотрение

[1]) Впервые эти связи были рассмотрены в работе [79].

их в порядке увеличения размерности. Этот прием особенно эффективен, поскольку позволяет пользоваться линейными соотношениями до тех пор, пока не встречаются тождества Бьянки размерности 2 (см. ниже).

Все тождества Бьянки размерности 1/2 удовлетворяются автоматически, кроме тождества $I_{AB\dot{C}}{}^{m} = 0$. Последнее имеет вид

$$0 = -\mathbf{D}_A T_{B\dot{C}}{}^{m} + T_{AB}{}^{F} T_{F\dot{C}}{}^{m} + R_{AB\dot{C}}{}^{m} - \mathbf{D}_{\dot{C}} T_{AB}{}^{m} + T_{\dot{C}A}{}^{F} T_{FB}{}^{m} + \\ + R_{\dot{C}AB}{}^{m} - \mathbf{D}_B T_{\dot{C}A}{}^{m} + T_{B\dot{C}}{}^{F} T_{FA}{}^{m} + R_{B\dot{C}A}{}^{m}. \qquad (16.77)$$

Кривизна принимает значения в пространстве представлений группы Лоренца, поэтому все приведенные выше слагаемые, содержащие ее, обращаются в нуль. Производная тензора $T_{B\dot{C}}{}^{n}$ также равна нулю, поскольку это постоянный тензор. Используя связь $T_{AB}{}^{m} = 0$, мы приходим к тождеству

$$T_{AB\dot{C}D\dot{D}} + T_{BA\dot{C}D\dot{D}} = 0, \qquad (16.78)$$

где

$$T_{AB\dot{C}D\dot{D}} = T_{Am}{}^{n} (\sigma^{m})_{B\dot{C}} (\sigma_{n})_{D\dot{D}}.$$

Следовательно,

$$T_{AB\dot{C}D\dot{D}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{AB} T^{E}{}_{E\dot{C}D\dot{D}}. \qquad (16.79)$$

Связь $T_{Am}{}^{n} (\bar{\sigma}^{m}{}_{n})_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = 0$ в этих обозначениях принимает вид

$$T_{AE\dot{B}}{}^{E}{}_{\dot{C}} + T_{AE\dot{C}}{}^{E}{}_{\dot{B}} = 0, \qquad (16.80)$$

и в результате получаем

$$T_{AE\dot{B}}{}^{E}{}_{\dot{C}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{B}\dot{C}} T_{AE}{}^{\dot{D}E}{}_{\dot{D}}. \qquad (16.81)$$

Тогда из соотношения (16.79) следует

$$T^{C}{}_{C\dot{B}A\dot{C}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{B}\dot{C}} T^{C}{}_{C}{}^{\dot{D}}{}_{A\dot{D}},$$

и, подставляя этот результат в (16.79), находим

$$T_{AB\dot{C}D\dot{D}} = +\frac{1}{4} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{\dot{D}\dot{C}} T^{C}{}_{C}{}^{\dot{D}}{}_{D\dot{D}}. \qquad (16.82)$$

Свертывая по индексам BC и $\dot{C}\dot{D}$, получаем

$$T_{A}{}^{B\dot{C}}{}_{B\dot{C}} = -\frac{1}{2} T^{C}{}_{C}{}^{\dot{D}}{}_{A\dot{D}} \qquad (16.83)$$

Но $T_{Am}{}^{m}$ эквивалентна компоненте $T_{A}{}^{B\dot{B}}{}_{B\dot{B}}$, удовлетворяющей тождеству

$$T_{A}{}^{B\dot{B}}{}_{B\dot{B}} = 0, \qquad (16.84)$$

следовательно, $T^C{}_{C\dot{D}A\dot{D}} = 0$ и $T_{Am}{}^m = 0$. По существу компоненты кручения с размерностью 1/2 или 0 равны нулю, за исключением $T_{A\dot{B}}{}^n = -2i(\sigma^n)_{A\dot{B}}$. Поэтому низшая размерность, в которой ненулевые напряженности содержат билинейные члены $T_{RS}{}^F T_{FT}{}^N$, равна 2. Это оправдывает приведенное выше утверждение, касающееся нелинейностей в анализе тождеств Бьянки.

Для тождеств Бьянки размерности 1 члены вида DT обращаются в нуль, и член T^2 равен нулю, если он не имеет вида $T2i(\sigma^n)_{A\dot{B}}$. Например, тождество $I_{A\dot{B}m}{}^n = 0$ означает, что

$$0 = R_{A\dot{B}m}{}^n + T_{mA}{}^C(-2i\sigma^n)_{\dot{B}C} - T_{\dot{B}n}{}^C(-2i\sigma^m)_{C\dot{A}}. \quad (16.85)$$

Умножая это выражение на матрицы $(\sigma^m)_{C\dot{C}}$ и $(\sigma^n)_{D\dot{D}}$ и переходя, таким образом, к спинорным индексам, находим

$$R_{A\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} + 4iT_{C\dot{C}A\dot{D}}\varepsilon_{\dot{D}\dot{B}} + 4iT_{C\dot{C}\dot{B}D}\varepsilon_{\dot{D}A} = 0. \quad (16.86)$$

Свойства лоренцева тензора $R_{PQm}{}^n$ позволяют выразить его через $R_{PQA}{}^B$ и $R_{PQA}{}^{\dot{B}}$. Рассмотрим тензор

$$R_{PQC\dot{C}}{}^{D\dot{D}} \equiv R_{PQm}{}^n(\sigma_m)_{C\dot{C}}(\sigma_n)_{D\dot{D}}. \quad (16.87)$$

Заметим, что симметризация по индексам C и D автоматически приводит к антисимметризации по $\dot{C}$ и $\dot{D}$. Тем не менее имеем

$$(\sigma_m)_{(C|\dot{C}}(\sigma_n)_{|D)\dot{D}} - (m \leftrightarrow n) = -\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}(\sigma_{mn})_{CD},$$

в то время как

$$(\sigma_m)_{C(\dot{C}|}(\sigma_n)_{D|\dot{D})} - (m \leftrightarrow n) = \varepsilon_{CD}(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{C}\dot{D}}; \quad (16.88)$$

следовательно, в итоге для тензора кривизны получаем

$$R_{PQC\dot{C}D\dot{D}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}R_{PQm}{}^n(\sigma_{mn})_{CD} + \frac{1}{2}\varepsilon_{CD}R_{PQm}{}^n(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{C}\dot{D}} = 2\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}R_{PQCD} + 2\varepsilon_{CD}R_{PQ\dot{C}\dot{D}}. \quad (16.89)$$

Разложим теперь $T_{nA}{}^D$ на неприводимые относительно группы Лоренца части

$$T_{C\dot{C}A\dot{D}} = \varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{C}\dot{A}}i\frac{R^*}{12} + \varepsilon_{CD}T_{(\dot{C}\dot{A})} + \varepsilon_{\dot{C}\dot{A}}T_{(CD)} + T_{(CD)(\dot{C}\dot{A})}. \quad (16.90)$$

Подстановка соотношений (16.89) и (16.90) в (16.85) и умножение на $\varepsilon^{\dot{C}\dot{D}}\varepsilon^{CD}$ дает

$$T_{(\dot{C}\dot{A})} = 0. \quad (16.91)$$

Симметризуя по индексам DC и умножая на $\varepsilon^{\dot{C}\dot{A}}$, получаем

$$R_{\dot{D}\dot{B}CD} + 6i\varepsilon_{\dot{D}\dot{B}} T_{(CD)} + 2iT_{(CD)(\dot{D}\dot{B})} = 0, \tag{16.92}$$

откуда следует $T_{(CD)} = 0$.

Симметризуя по индексам CD и антисимметризуя по $\dot{C}\dot{D}$, имеем

$$R_{\dot{D}\dot{B}CD} - 2iT_{(CD)(\dot{D}\dot{B})} = 0. \tag{16.93}$$

Сравнивая соотношения (16.92) и (16.93), находим

$$R_{\dot{A}\dot{B}CD} = 0, \tag{16.94}$$

$$T_{(CD)(\dot{A}\dot{B})} = 0. \tag{16.95}$$

Тогда тождество Бьянки приводится к виду

$$R_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{\dot{D}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{C}\dot{A}} + \varepsilon_{\dot{C}\dot{B}}\varepsilon_{\dot{D}\dot{A}}\right) R^*; \tag{16.96}$$

таким образом, получаем

$$T_{C\dot{C}\dot{A}D} = \frac{1}{12}\, i\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{C}\dot{A}} R^*. \tag{16.97}$$

Анализ можно продолжить, придерживаясь той же последовательности вычислений, но он длинен и несколько утомителен. Основной результат [78] состоит в том, что все компоненты кручения и кривизны могут быть выражены в терминах трех суперполей и их спинорных производных. Эти суперполя — приведенные выше поля R, а также $G_{A\dot{B}}$ и $W_{(ABC)}$. Суперполя $G_{A\dot{B}}$ и W_{ABC} выражаются через суперкручения следующим образом:

$$T_{C\dot{C}DE} = +\frac{i}{4}\left(\varepsilon_{CE}G_{D\dot{C}} + 3\varepsilon_{CD}G_{E\dot{C}} - 3\varepsilon_{DE}G_{C\dot{C}}\right),$$

$$T_{A\dot{A}B\dot{B}\dot{C}} = \varepsilon_{AB}\left(W_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{A}\dot{C}}\mathbf{D}^E G_{E\dot{B}} - \right. \tag{16.98}$$

$$\left. - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{B}\dot{C}}\mathbf{D}^E G_{E\dot{A}}\right) + \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\mathbf{D}_{(B}G_{\dot{C})A},$$

где

$$T_{C\dot{C}D}{}^E = (\sigma^n)_{C\dot{C}} T_{nD}{}^E,$$

$$T_{C\dot{C}D\dot{D}}{}^E = (\sigma^n)_{C\dot{C}}\,(\sigma^m)_{D\dot{D}} T_{nm}{}^E. \tag{16.99}$$

Эти суперполя удовлетворяют следующим связям:

$$\mathbf{D}_{\dot{A}} R^* = 0, \quad \mathbf{D}_{\dot{A}} W_{(ABC)} = 0, \quad \mathbf{D}^{\dot{B}} G_{A\dot{B}} = -\frac{1}{24}\mathbf{D}_A R^*,$$

$$\mathbf{D}^A W_{(ABC)} = -i\left(\mathbf{D}_{B\dot{D}} G_C{}^{\dot{D}} + \mathbf{D}_{C\dot{D}} G_B{}^{\dot{D}}\right); \tag{16.100}$$

поле G_n действительно: $G_{A\dot{B}} = (\sigma^n)_{A\dot{B}} G_n = (G_{B\dot{A}})^*$.

Как уже говорилось выше, в соответствии с соображениями размерности действие простой супергравитации имеет вид

$$\frac{1}{2\varkappa^2}\int d^8zE, \tag{16.101}$$

где $E = \det E_n^N$. Поскольку на супертетрады наложена связь, форма уравнений движения не очевидна. Однако можно показать [80], что из этого действия и связей в суперпространстве (16.76) следуют уравнения

$$R = G_{A\dot{B}} = 0.$$

В следующем разделе будет показано, что это действительно правильная форма полевых уравнений в том смысле, что они ведут в x-пространстве к уравнениям движения ($N = 1$)-супергравитации.

Взаимодействие супергравитации с киральным полем материи ϕ, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{D}_A\phi = 0, \tag{16.102}$$

имеет вид

$$\int d^8zEK(\phi, \bar{\phi}), \tag{16.103}$$

где K — производная функция, разложение которой имеет вид $K(\phi, \bar{\phi}) = \phi\bar{\phi} + \ldots$. Члены взаимодействия строят, используя киральную плотность [80]

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4}\bar{\mathbf{D}}^2\left(\frac{E}{R^*}\right), \tag{16.104}$$

в виде

$$\int d^4x d^2\theta \mathrm{E} f(\phi), \tag{16.105}$$

где f — аналитическая функция поля ϕ. Инвариантность этого действия устанавливается следующим образом. Функция f киральная, поэтому она может быть записана в виде

$$f(\phi) = \left(\bar{\mathbf{D}}^2 - \frac{1}{3}R^*\right)U, \tag{16.106}$$

где U — произвольное суперполе. Выражение

$$-\frac{1}{3}\int d^8zEU \tag{16.107}$$

инвариантно, и его можно записать в следующем виде:

$$-\int d^8z\frac{E}{R^*}\bar{\mathbf{D}}^2U + \int d^8z\frac{E}{R^*}f(\phi) = \int d^4x d^2\theta \mathrm{E} f(\phi). \tag{16.108}$$

Первое слагаемое обращается в нуль, так как имеет форму дивергенции, т. е.

$$\int d^8zE\mathbf{D}_{\dot{A}}V^{\dot{A}}=0. \tag{16.109}$$

Это следует после интегрирования по частям и использования связей, накладываемых на кручение (см. конец этого раздела).

Введение полей Янга — Миллса производится так же, как в случае теории с глобальной суперсимметрией. Мы рассмотрим суперполе V, калибровочное преобразование которого имеет вид

$$e^{V'}=e^{\bar{\Lambda}}e^{V}e^{-\Lambda}, \tag{16.110}$$

где Λ — локально-киральное поле: $\mathbf{D}_{\dot{A}}\bar{\Lambda}=0$. Ковариантная напряженность поля равна

$$W_A=\left(\bar{\mathbf{D}}^2-\frac{1}{3}R^*\right)(e^{-V}\mathbf{D}_A e^V). \tag{16.111}$$

Поскольку поле W_A кирально $(\mathbf{D}_{\dot{B}}W_A=0)$, соответствующее действие [80] имеет вид

$$A=\frac{1}{64C_2(G)g^2}\int d^4xd^2\theta\varepsilon\,\mathrm{Tr}\,W^AW_A. \tag{16.112}$$

Взаимодействие с материей задается функционалом

$$\int d^4xd^4\theta\bar{\phi}e^V\phi. \tag{16.113}$$

Альтернативным подходом к построению теории супергравитации является решение связей [76]. Это довольно сложная процедура. После выполнения соответствующих калибровочных преобразований, устраняющих определенные суперполя, мы найдем, что все тетрады и спиновые связности могут быть выражены через одно суперполе $\mathbf{H}_\mu$. Если компоненты суперполя $\mathbf{H}_\mu$ обозначить $(C_\mu, \zeta_\mu, M_\mu, N_\mu, e_\mu{}^n, \psi_\mu{}^\alpha, b_\mu)$, то калибровочную инвариантность, которой обладает данное суперполе, можно использовать для исключения полей C_μ и ζ_μ. Поля M_μ и N_μ преобразуются следующим образом:

$$\delta M_\mu=\partial^2 e_\mu-\partial_\mu\partial^\nu e_\nu,\quad \delta N_\mu=\partial^2 t_\mu-\partial_\mu\partial^\nu t_\nu, \tag{16.114}$$

что гарантирует их появление в действии в виде $\partial_\mu M^\mu=M'$ и $\partial_\nu N^\nu=N'$. Остальные калибровочные преобразования представляют собой обычные преобразования полей $e_\mu{}^n$ и $\psi_\mu{}^\alpha$. Детальное обсуждение разрешения связей дано в работах [6, 76]. Следуя и далее этому способу вычислений, мы найдем, что связи ведут к первоначальной минимальной формулировке супергравитации. Зная решение связей в терминах $\mathbf{H}_\mu$, можно выразить

действие, а также ненулевые компоненты кручения и кривизны через $\mathbf{H}_\mu$. Следовательно, мы получим отдельные компоненты кручения и кривизны, выраженные через $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^A$, M', N' и b_μ.

Для нахождения компонентных полей в x-пространстве в контексте «решения тождеств Бьянки» следует сначала в этом пространстве идентифицировать независимые компонентные поля, содержащиеся в суперполях R, $G_{A\dot{B}}$ и $W_{ABC} = W_{(ABC)}$, учитывая связи (16.100). Все эти независимые поля можно получить, вычисляя компоненты суперполей $T_{mn}{}^A$ и $R_{mn}{}^{rs}$ при $\theta = 0$, не рассматривая $(\theta = 0)$-компоненты R и $G_{A\dot{B}}$. Обозначим компоненты суперполей R и $G_{A\dot{B}}$ при $\theta = 0$ через $M + iN$ и $b_{A\dot{B}} = (\sigma^n)_{A\dot{B}} b_n$. Тогда найдем, что $T_{mn}{}^A$ и $R_{mn}{}^{rs}$ при $\theta = 0$ можно выразить через $E_\mu{}^n(\theta = 0) \equiv e_\mu{}^n(x)$ и $E_\mu{}^A(\theta = 0) \equiv \frac{1}{2}\psi_\mu{}^A$, а также M, N и b_μ. Следовательно, суперполя R, $G_{A\dot{B}}$ и W_{ABC}, а также кручение и кривизна содержат компонентные поля $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^A$, M, N и b_μ в x-пространстве. Детали вывода этого утверждения можно найти в конце следующего раздела.

Докажем теперь один из результатов, который использовали выше.

Лемма [88]: $\int d^8zE\mathbf{D}_N V^N (-1)^N = 0$.

Доказательство: $\int d^8zEE_N{}^\Lambda \partial_\Lambda V^N (-1)^N =$

$$= \int d^8z V^N \left(-E_N{}^\Lambda \partial_\Lambda E - (-1)^{\Lambda(\Lambda+N)} \partial_\Lambda E_N{}^\Lambda\right) =$$

$$= \int d^8z V^N \left(E_N{}^\Lambda \left(\partial_\Lambda E_M{}^\pi\right) E_\pi{}^M (-1)^M - \right.$$

$$\left. - (-1)^{NM} E_M{}^\Lambda \partial_\Lambda E_N{}^\pi E_\pi{}^M (-1)^M\right) =$$

$$= \int d^8z V^N T_{NM}{}^M (-1)^M = 0.$$

Последнее выражение обращается в нуль, поскольку выполняются условия

$$T_{nr}{}^s = 0 \quad \text{и} \quad T_{nA}{}^A + T_{n\dot{A}}{}^{\dot{A}} = 0.$$

16.4. Вывод формулировки супергравитации в суперпространстве из формулировки в x-пространстве

В этом разделе мы получим связи в суперпространстве, а также другие результаты на основе известной формулировки супергравитации в x-пространстве.

А. Поля на массовой поверхности

Любая теория супергравитации на массовой поверхности, т. е. когда поля удовлетворяют уравнениям движения, может быть построена только на основе известного числа состояний частиц данного спина на массовой поверхности. Такую теорию можно получить, записав в x-пространстве линейные уравнения движения для свободных от дýхов полей, однозначно соответствующие каждому из состояний на массовой поверхности, а затем учитывая взаимодействие с помощью нётеровского метода (см. гл. 9). Это длинная процедура. Результат проще всего получить с помощью формулировки в суперпространстве, используя размерный анализ и, конечно, баланс состояний с определенными спинами на массовой поверхности. Проиллюстрируем этот порядок действий для $(N=1)$-супергравитации.

Состояния на массовой поверхности представлены полями $h_{\mu\nu}(h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu})$ и $\psi_\mu{}^\alpha$, калибровочные преобразования которых имеют вид

$$\delta h_{\mu\nu}=\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu,\quad \delta\psi_{\mu\alpha}=\partial_\mu\eta_\alpha. \tag{16.115}$$

Мы опустили нелинейные члены, так как важна только общая структура. Геометрическая размерность поля $h_{\mu\nu}$ нулевая, а поле $\psi_\mu{}^\alpha$ имеет размерность 1/2. Калибровочно-ковариантные объекты низшей размерности имеют вид

$$\partial\psi \quad \text{и} \quad \partial\partial h; \tag{16.116}$$

их размерности равны 3/2 и 2 соответственно.

Рассмотрим теперь суперкручение и суперкривизну; эти суперполя при $\theta=0$ должны соответствовать ковариантным величинам в x-пространстве. Если нет таких величин, то соответствующий тензор должен обращаться в нуль при $\theta=0$ и, следовательно, во всех порядках по θ. Единственными тензорами нулевой размерности являются $T_{AB}{}^n$ и $T_{A\dot B}{}^n$. Ковариантные величины нулевой размерности отсутствуют, кроме постоянного тензора $(\sigma^n)_{A\dot B}$. Следовательно, необходимо заключить, что

$$T_{AB}{}^n=0,\quad T_{A\dot B}{}^n=c\,(\sigma^n)_{A\dot B}, \tag{16.117}$$

где c — постоянная. Мы выбираем $c\neq 0$, чтобы получить согласие с теорией, использующей формулировку глобального суперпространства. Из действительности тензора $T_{A\dot B}{}^n$ следует, что c — мнимая постоянная, а из условия нормировки находим $c=-2i$.

Поскольку в x-пространстве ковариантных тензоров размерности 1/2 не существует, имеем

$$T_{A\dot B}{}^{\dot C}=T_{AB}{}^C=T_{Am}{}^n=0. \tag{16.118}$$

Ковариантных тензоров размерности 1 в x-пространстве не существует. Это было бы не так, если бы имелась независимая спиновая связность $\omega_\mu{}^{rs}$, поскольку при этом величина $de + w + \ldots$ должна быть ковариантной. Если связность $\omega_\mu{}^{rs}$ не является независимой величиной, она может быть выражена через $e_\mu{}^n$ и $\psi_\mu{}^\alpha$ таким образом, чтобы приведенная выше ковариантная величина размерности 1 обращалась в нуль. Следовательно, для зависимой спиновой связности, т. е. в формализме второго порядка, имеем

$$T_{nA}{}^{\dot{B}} = T_{nA}{}^{B} = R_{AB}{}^{mn} = 0 = R_{A\dot{B}}{}^{mn}. \tag{16.119}$$

Другими словами, все компоненты кручения и кривизны размерности 0, 1/2, 1, за исключением $T_{A\dot{B}}{}^{n} = -2i(\sigma^n)_{A\dot{B}}$, равны нулю.

Сравнивая этот набор связей со связями супергравитации вне массовой поверхности, приведенными в разд. 16.2 или ниже в этом разделе, мы видим, что дополнительные связи имеют вид $T_{nA}{}^{B} = T_{nA}{}^{\dot{B}} = 0 = R_{AB}{}^{AB}$. В терминах суперполей R, $W_{(ABC)}$ и $G_{A\dot{B}}$ это эквивалентно равенству

$$R = G_{A\dot{B}} = 0.$$

Тензоры размерности 3/2 могут включать при $\theta = 0$ выражение $\partial\psi$ со спином 3/2, поэтому не все они равны нулю. Единственными ненулевыми тензорами являются $T_{mn}{}^{A}$, $R_{Ar}{}^{mn}$ и $R_{st}{}^{mn}$ и, конечно, $T_{A\dot{B}}{}^{n} = -2i(\sigma^n)_{A\dot{B}}$. Однако, как мы теперь покажем, приведенных выше связей (16.117)—(16.119) достаточно для полного определения теории. Первое нетривиальное тождество Бьянки размерности 3/2 имеет вид

$$I_{nB\dot{D}}{}^{\dot{C}} = -\mathbf{D}_n T_{B\dot{D}}{}^{\dot{C}} + T_{nB}{}^{F} T_{F\dot{D}}{}^{\dot{C}} + R_{nB\dot{D}}{}^{\dot{C}} + \mathbf{D}_{\dot{D}} T_{nB}{}^{\dot{C}} - T_{\dot{D}n}{}^{F} T_{FB}{}^{\dot{C}} - R_{\dot{D}nB}{}^{\dot{C}} - \mathbf{D}_B T_{\dot{D}n}{}^{\dot{C}} + T_{B\dot{D}}{}^{F} T_{Fn}{}^{\dot{C}} + R_{B\dot{D}n}{}^{\dot{C}} = 0. \tag{16.120}$$

Используя приведенные выше условия, его можно упростить и привести к виду

$$-2i(\sigma^m)_{B\dot{D}} T_{mn}{}^{\dot{C}} - R_{nB\dot{D}}{}^{\dot{C}} = 0. \tag{16.121}$$

Свертывание по индексам $\dot{D}$ и $\dot{C}$ приводит к уравнению

$$(\sigma^m)_{B\dot{D}} T_{mn}{}^{\dot{D}} = 0. \tag{16.122}$$

Как будет показано немного ниже, это не что иное, как уравнение Рариты — Швингера.

Уравнение для поля спина 2 должно иметь размерность 2 и содержаться в тождестве Бьянки

$$I_{Bmn}{}^{A} = -\mathbf{D}_B T_{mn}{}^{A} + T_{Bm}{}^{F} T_{Fn}{}^{A} + R_{Bmn}{}^{A} - \mathbf{D}_n T_{Bm}{}^{A} + T_{nB}{}^{F} T_{Fm}{}^{A} + \\ + R_{nBm}{}^{A} - \mathbf{D}_m T_{nB}{}^{A} + T_{mn}{}^{F} T_{FB}{}^{A} + R_{mnB}{}^{A} = 0. \qquad (16.123)$$

Использование связей приводит к соотношению

$$-\mathbf{D}_B T_{mn}{}^{A} + R_{mnB}{}^{A} = 0. \qquad (16.124)$$

Умножая последнее соотношение на матрицу $(\sigma^m)_{\dot{B}A}$, находим

$$(\sigma^m)_{\dot{B}A} \mathbf{D}_B T_{mn}{}^{A} = 0 = R_{mnB}{}^{A} (\sigma^m)_{\dot{B}A}. \qquad (16.125)$$

Воспользовавшись тем, что $R_{mnB}{}^{A} = -{}^1/_4 R_{mn}{}^{pq} (\sigma_{pq})_B{}^{A}$, получаем уравнение

$$R_{mn} - \frac{1}{2} \eta_{mn} R = 0,$$

или

$$R_{mn} = 0, \quad \text{где} \quad R_{mn} = R_{msn}{}^{s}. \qquad (12.126)$$

Теперь мы покажем, что это уравнения полей со спином 3/2 и 2. Компоненты суперполей $E_\mu{}^n$ и $E_\mu{}^A$ при $\theta = 0$ обозначим следующим образом:

$$E_\mu{}^n (\theta = 0) = e_\mu{}^n, \quad E_\mu{}^A (\theta = 0) = \frac{1}{2} \psi_\mu{}^A. \qquad (16.127)$$

На данном этапе вычислений эти выражения служат просто определением полей $e_\mu{}^n$ и $\psi_\mu{}^A$. Используя калибровочную инвариантность, можно исключить $(\theta = 0)$-компоненты суперполя $E_A{}^n$, выполнив соответствующее общекоординатное суперпреобразование. Поскольку

$$\delta E_A{}^n (\theta = 0) = \xi^\pi \partial_\pi E_A{}^n |_{\theta=0} + \partial_A \xi^\pi E_\pi{}^n |_{\theta=0} = \dots \\ \dots + \partial_A \xi^\mu e_\mu{}^n + \dots, \qquad (16.128)$$

очевидно, мы можем выбрать $\partial_A \xi^\mu$ так, что $E_A{}^n = 0$. Аналогично можно выбрать

$$E_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} = \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}, \quad E_A{}^B = \delta_A{}^B, \quad E_A{}^{\dot{B}} = 0. \qquad (16.129)$$

В результате получим

$$E_\pi{}^m (\theta = 0) = \begin{pmatrix} e_\mu{}^n & \frac{1}{2} \psi_\mu{}^A & \frac{1}{2} \psi_\mu{}^{\dot{A}} \\ 0 & \delta_B{}^A & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\dot{B}}{}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \qquad (16.130)$$

Спиновую связность $\Omega_\mu{}^{mn}$ при $\theta = 0$ определим следующим образом:

$$\Omega_\mu{}^{mn}(\theta = 0) = \omega_\mu{}^{mn}. \tag{16.131}$$

Воспользовавшись преобразованием Лоренца, получим

$$\Omega_\alpha{}^{mn}(\theta = 0) = 0. \tag{16.132}$$

Положив $\theta = 0$, найдем

$$T_{\mu\nu}{}^{\dot A} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \psi_\nu{}^{\dot A} + \Omega_{\mu\nu}{}^{\dot A} - (\mu \leftrightarrow \nu) = -\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}{}^{\dot A}, \tag{16.133}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{\mu\nu}{}^{\dot A} &\equiv D_\mu \psi_\nu{}^{\dot A} - (\mu \leftrightarrow \nu), \\ D_\mu \psi_\nu{}^{\dot A} &= \partial_\mu \psi_\nu{}^{\dot A} - \psi_\nu{}^{\dot B}\omega_{\mu\dot B}{}^{\dot A}. \end{aligned} \tag{16.134}$$

Здесь мы использовали равенства

$$\Omega_{\mu\nu}{}^{\dot A} = E_\nu{}^N \omega_{\mu N}{}^{\dot A} = \frac{1}{2}\psi_\nu{}^{\dot B}\omega_{\mu\dot B}{}^{\dot A}. \tag{16.135}$$

Кручение со всеми индексами касательного пространства можно выразить через $T_{\mu\nu}{}^{\dot A}$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^{\dot A}(\theta = 0) &= E_\mu{}^N(\theta = 0)\, E_\nu{}^M(\theta = 0)\, T_{NM}{}^{\dot A}(\theta = 0)(-1)^{NM} = \\ &= e_\mu{}^n e_\nu{}^m T_{nm}{}^{\dot A}(\theta = 0), \end{aligned} \tag{16.136}$$

где мы использовали связи $T_{Bn}{}^{\dot A} = T_{\dot B C}{}^{\dot A} = 0$. Следовательно,

$$0 = (\sigma^m)_{A\dot B} T_{mn}{}^{\dot B}(\theta = 0) = -\frac{1}{2}(\sigma^m)_{A\dot B} e_m{}^\mu e_n{}^\nu \psi_{\mu\nu}{}^{\dot B}, \tag{16.137}$$

и мы узнаем уравнение Рариты — Швингера.

Чтобы вывод уравнений поля спина 2 и 3/2 был строго последовательным, необходимо показать, что $\omega_\mu{}^{mn}$ является спиновой связностью, выраженной через $e_\mu{}^n$ и $\psi_\mu{}^A$. В действительности это следует из условия $T_{nm}{}^r = 0$. Заметим, что

$$T_{\mu\nu}{}^r(\theta = 0) = -\partial_\mu e_\nu{}^r + \omega_{\mu\nu}{}^r - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{16.138}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^r(\theta = 0) &= E_\mu{}^N(\theta = 0)\, E_\nu{}^M(\theta = 0)\, T_{NM}{}^r(\theta = 0)(-1)^{MN} - \\ &- \frac{1}{4}\psi_\mu{}^A \psi_\nu{}^{\dot B} T_{A\dot B}{}^r(\theta = 0) - \psi_\mu{}^{\dot B}\psi_\nu{}^A T_{\dot B A}{}^r(\theta = 0) = \\ &= +\frac{1}{2} i \psi_\nu{}^{\dot B}(\sigma^r)_{A\dot B}\psi_\mu{}^A - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \tag{16.139}$$

Поэтому находим уравнение

$$w_{\mu n}{}^{m} e_{\nu}{}^{n} - \partial_{\nu} e_{\mu}{}^{m} - (\mu \leftrightarrow \nu) = + \frac{i}{2} \psi_{\nu}{}^{\dot{B}} (\sigma^{m})_{A\dot{B}} \psi_{\mu}{}^{A} - (\mu \leftrightarrow \nu), \tag{16.140}$$

которое можно решить и получить правильное выражение для $w_{\mu n}{}^{m}$.

С уравнением для поля спина 2 следует поступить аналогичным образом:

$$R_{\mu\nu}{}^{mn}(\theta = 0) = \partial_{\mu} w_{\nu}{}^{mn} + w_{\mu}{}^{mr} w_{\nu r}{}^{n} - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{16.141}$$

Однако имеем

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^{nm}(\theta = 0) &= E_{\mu}{}^{N}(\theta = 0)\, E_{\nu}{}^{M}(\theta = 0)\, R_{NM}{}^{mn}(\theta = 0)\,(-1)^{mN} = \\ &= e_{\mu}{}^{p} e_{\nu}{}^{q} R_{pq}{}^{nm}(\theta = 0) + \frac{1}{2}\left(\psi_{\mu}{}^{\dot{A}} e_{\nu}{}^{p} R_{\dot{A}p}{}^{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\mu}{}^{A} e_{\nu}{}^{p} R_{Ap}{}^{nm}(\theta = 0) - (\mu \leftrightarrow \nu)\right). \end{aligned} \tag{16.142}$$

Поле $R_{Ap}{}^{nm}$ можно найти из тождества Бьянки

$$\begin{aligned} 0 = I_{Anr}{}^{s} = &- \mathbf{D}_{A} T_{nr}{}^{s} + T_{An}{}^{F} T_{Fr}{}^{s} + R_{Anr}{}^{s} - \mathbf{D}_{r} T_{An}{}^{s} + T_{rA}{}^{F} T_{Fn}{}^{s} + \\ &+ R_{rAn}{}^{s} - \mathbf{D}_{n} T_{rA}{}^{s} + T_{nr}{}^{F} T_{FA}{}^{s} + R_{nrA}{}^{s}. \end{aligned} \tag{16.143}$$

Используя связи, найдем

$$R_{Anr}{}^{s} + R_{rAn}{}^{s} = + 2i T_{nr}{}^{\dot{B}} (\sigma^{s})_{A\dot{B}}. \tag{16.144}$$

Из (16.137) следует уравнение

$$R_{Anr}{}^{s} + R_{rAn}{}^{s} = - i (\sigma^{s})_{A\dot{B}} e_{n}{}^{\mu} e_{r}{}^{\nu} \psi_{\mu\nu}{}^{\dot{B}}. \tag{16.145}$$

Умножая соотношение (16.142) на $e^{\nu}{}_{m}$, получаем

$$\begin{aligned} e_{m}{}^{\nu} R_{\mu\nu}{}^{nm}(\theta = 0) \equiv R_{\mu}{}^{n} &= e_{\mu}{}^{p} R_{pm}{}^{nm} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\psi_{\mu}{}^{A} R_{Am}{}^{nm} + \psi_{\mu}{}^{\dot{A}} R_{\dot{A}m}{}^{nm}\right). \end{aligned} \tag{16.146}$$

Тогда уравнение (16.145) дает

$$e_{\mu}{}^{p} R_{pm}{}^{nm} = R_{\mu}{}^{n} - \left(\frac{i}{2} \psi_{\mu}{}^{A} (\sigma^{m})_{A\dot{B}} e_{m}{}^{\lambda} e^{n\tau} \psi_{\lambda\tau}{}^{\dot{B}} + \text{эрмит. сопр.}\right). \tag{16.147}$$

При этом уравнение (16.126) ($R_{mn} = 0$) становится уравнением ($N = 1$)-супергравитации для поля спина 2, которое стоит в левой части (16.147).

На первый взгляд кажется, что задача далека от завершения, так как надо еще проанализировать все остальные тождества Бьянки и доказать, что они не ведут к противоречиям. Но

можно показать, что другие тождества Бьянки удовлетворяются автоматически [70, 81].

Этот метод можно использовать для построения *любой* теории супергравитации на массовой поверхности. Единственная новая особенность — появление скалярных полей в случае $N \geqslant 4$. К счастью, эти поля всегда возникают в фактор-пространстве, которое можно представить в виде: группа G/группа H. Это значит, что на них реализуется алгебра суперсимметрии с элементами $P_\mu{}^n$ и $Q_\mu{}^i$, где

$$e^{-\xi\cdot T}\partial_\mu e^{\xi\cdot T} = P_\mu{}^n K_n + Q_\mu{}^i H_i \tag{16.148}$$

(H_i — генераторы группы H, а K_i — остальные генераторы). Поскольку размерность $P_\mu{}^n$ и $Q_\mu{}^i$ равна 1, все еще имеется возможность, исходя из соображений размерности, найти достаточное число связей.

Последним применением этого метода было построение ($N = 2$, $D = 10$)-киральной супергравитации [81]. Ряд других работ, в которых использовался этот метод, можно найти в списке литературы статьи [82].

Б. Поля вне массовой поверхности

Теория супергравитации вне массовой поверхности в формализме суперпространства может быть получена из теории супергравитации в x-пространстве [48]. Конечно, вид получаемой теории в суперпространстве зависит от того, из какой теории в x-пространстве мы исходили. Проиллюстрируем это на примере первоначальной минимальной теории, представленной в гл. 9, которая содержит поля $e_\mu{}^n$, $\psi_\mu{}^\alpha$, M, N и b_μ. Их преобразования суперсимметрии приведены в гл. 9.

Компоненты суперполей $E_\mu{}^n$ и $E_\mu{}^\alpha$ при $\theta = 0$ могут быть однозначно отождествлены с полями $e_\mu{}^n$ и $\psi_\mu{}^\alpha$ в x-пространстве:

$$E_\alpha{}^n(\theta = 0) = e_\mu{}^n, \tag{16.149}$$

$$E_\mu{}^\alpha(\theta = 0) = \frac{1}{2}\psi_\mu{}^\alpha. \tag{16.150}$$

Компоненту суперполя $\Omega_\mu{}^{rs}$ при $\theta = 0$ мы отождествляем со спиновой связностью:

$$\Omega_\mu{}^{rs}(\theta = 0) = w_\mu{}^{rs}(x).$$

Как мы увидим ниже, это единственные поля с правильной размерностью и правильными трансформационными свойствами. Компоненты суперпараметра ξ^π с $\theta = 0$ можно отождествить с общей координатой $\zeta^\mu(x)$ и параметрами преобразования су-

персимметрии $\varepsilon^{\alpha}(x)$:

$$\xi^{\mu}(\theta=0)=\zeta^{\mu}(x), \quad \xi^{\alpha}(\theta=0)=\varepsilon^{\alpha}(x). \tag{16.151}$$

Сравним теперь преобразования полей левой и правой частей равенства (16.149). После преобразования левая часть этого равенства при $\theta=0$ принимает вид

$$\delta E_{\pi}{}^{M}=\mathbf{D}_{\pi}\varepsilon^{M}-E_{\pi}{}^{s}\xi^{N}T_{NR}{}^{M}, \tag{16.152}$$

где

$$\mathbf{D}_{\pi}\varepsilon^{M}=\partial_{\pi}\varepsilon^{M}+\Omega_{\pi}{}^{M}{}_{N}\varepsilon^{N}.$$

Для тетрады получаем выражение

$$\delta E_{\mu}{}^{n}(\theta=0)=\delta e_{\mu}{}^{n}=\mathbf{D}_{\mu}\xi^{n}-e_{\mu}{}^{r}\zeta^{m}T_{mr}{}^{n}-e_{\mu}{}^{r}\varepsilon^{a}T_{ar}{}^{n}-$$
$$-\frac{1}{2}\psi_{\mu}{}^{a}\zeta^{r}T_{ra}{}^{n}-\frac{1}{2}\psi_{\mu}{}^{a}\varepsilon^{\beta}T_{\beta a}{}^{n}. \tag{16.153}$$

Сравним этот результат с известным преобразованием суперсимметрии поля $e_{\mu}{}^{n}$:

$$\delta e_{\mu}{}^{n}=\varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^{n}\psi_{\mu}; \tag{16.154}$$

тогда получаем следующие условия:

$$T_{ar}{}^{n}=0, \quad T_{\alpha\beta}{}^{n}=2(c\gamma^{n})_{\alpha\beta}. \tag{16.155}$$

Используя эти два условия и выражение для связности $w_{\mu}{}^{mn}(x)$ в терминах полей $e_{\mu}{}^{n}$ и $\psi_{\mu}{}^{\alpha}$, найдем, что $T_{mn}{}^{r}=0$. Этот результат мы получили, рассматривая соотношения (16.138)—(16.140).

Для поля Рариты — Швингера имеем

$$\frac{1}{2}\delta\psi_{\mu}{}^{\alpha}=\delta E_{\mu}{}^{\alpha}(\theta=0)=\mathbf{D}_{\mu}\varepsilon^{\alpha}-e_{\mu}{}^{n}\xi^{m}T_{mn}{}^{\alpha}-e_{\mu}{}^{n}\varepsilon^{\beta}T_{\beta n}{}^{\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2}\psi_{\mu}{}^{\gamma}\zeta^{n}T_{n\gamma}{}^{\alpha}-\frac{1}{2}\psi_{\mu}{}^{\gamma}\varepsilon^{\beta}T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}. \tag{16.156}$$

Сравнивая эту формулу с известным преобразованием суперсимметрии поля $\psi_{\mu}{}^{\alpha}$ в x-пространстве

$$\delta\psi_{\mu}=\frac{2}{\varkappa}\mathbf{D}_{\mu}\varepsilon+(i\gamma_5 b_{\mu}+\gamma_{\mu}\eta)\varepsilon, \tag{16.157}$$

где

$$\eta=-\frac{1}{3}(M+i\gamma_5 N+\hat{b}i\gamma_5),$$

находим

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=0, \quad T_{n\beta}{}^{\alpha}(\theta=0)=\frac{\varkappa}{2}[(i\gamma_5)b_n+\gamma_n\eta]^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{16.158}$$

Следовательно, мы нашли связи

$$T_{mn}{}^{r}=T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=0=T_{\alpha n}{}^{s}=T_{\alpha\beta}{}^{n}-2(c\gamma^{n})_{\alpha\beta}. \tag{16.159}$$

Читатель узнает в них найденные выше связи для $(N = 1)$-супергравитации.

Для любого данного преобразования $\omega_{\mu}{}^{mn}$ в x-пространстве можно применять в точности ту же процедуру нахождения связей, накладываемых на $R_{MN}{}^{mn}$. При этом надо использовать соотношение (16.132); мы оставляем это в качестве упражнения для читателя. В действительности компоненты $R_{MN}{}^{mn}$ находятся из связей (16.159); тем самым уже определено тождество Бьянки.

Если мы имеем связи, то можно обратить представленную выше процедуру и, опираясь на суперпространственное описание, находить законы преобразования компонентных полей в x-пространстве.

17. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ СУПЕРГРАФОВ С $N = 1$

Суперполевое описание суперсимметричных теорий, возможно, находит главное применение при вычислении квантовых эффектов. Суперполя позволяют вычислить квантовые состояния суперсимметричных теорий, сохраняя явно их суперсимметричный вид. Это преимущество суперполевого описания аналогично тому, которое имеется в обычных теориях при вычислении в лоренц-ковариантной формулировке. В самом деле, вычисление суперграфов по фейнмановским правилам в некоторых случаях может быть легко выполнено; оно даже проще, чем соответствующие вычисления в x-пространстве однокомпонентной теории.

Фейнмановские правила для суперграфов впервые были сформулированы Саламом и Стратди [83] для модели Весса — Зумино и в работе [84] для $(N = 1)$-теории Янга — Миллса. В действительности отсутствие перенормировки для членов взаимодействия в модели Весса — Зумино, вытекающее из наличия только одной логарифмической константы перенормировки для каждого поля, было обнаружено при использовании представления компонентных полей [85—87] и позднее показано с помощью первоначальных суперполевых вычислений по фейнмановским правилам [88]. Эти правила также применялись для доказательства обращения в нуль квантового эффективного потенциала при условии, что суперсимметрия не нарушается на уровне древесных диаграмм [89]. Сравнительно недавно фейнмановские правила для суперграфов были переформулированы [90]. Хотя, согласно этим улучшенным правилам, связь с компонентными полями в x-пространстве менее прозрачна, новые правила существенно упрощают вычисления суперграфов. Все прежние результаты были воспроизведены вновь с помощью более коротких доказательств [90], и были получены новые результаты. Поэтому в данной главе мы обсудим только улучшенные фейнмановские правила.

Но прежде чем вывести эти правила, напомним некоторые свойства интегрирования и функционального дифференцирования в суперпространстве, изложенные в гл. 14. Интегрирование в суперпространстве [52], как его определяют в настоящее время, полностью эквивалентно дифференцированию. Полный

интеграл по суперпространству записывается в виде

$$\int d^8z = \int d^4x d^4\theta = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}D^2\right)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\right), \qquad (17.1)$$

где $D^2 = D^A D_A$ и $\bar{D}^2 = D^{\dot{A}} D_{\dot{A}}$. Киральный внутренний интеграл дается выражением

$$\int d^4x d^2\theta = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}D^2\right). \qquad (17.2)$$

Общая δ-функция в суперпространстве обладает свойством

$$\int d^8z' f(z')\,\delta^8(z - z') = f(z) \qquad (17.3)$$

и может быть записана в виде

$$\delta^8(z - z') = \delta^4(x - x')\,\delta^4(\theta - \theta'). \qquad (17.4)$$

Функция $\delta^4(\theta)$ имеет форму $\sim\theta^2\bar{\theta}^2$. Для общего суперполя V мы определяем

$$\frac{\delta V(x, \theta)}{\delta V(x', \theta')} \equiv \delta^8(z - z') = \delta^4(x - x')\,\delta^4(\theta - \theta'), \qquad (17.5)$$

тогда как для кирального суперполя имеем

$$\frac{\delta\phi(x, \theta)}{\delta\phi(x', \theta')} = -\frac{\bar{D}^2}{4}\delta^4(x - x')\,\delta^4(\theta - \theta') = -\frac{\bar{D}^2}{4}\delta^8(z - z'). \qquad (17.6)$$

Это обеспечивает выполнение условия киральности $\bar{D}_{\dot{A}}\phi = 0$. Отметим следующие формулы для ковариантных производных:

$$D^2\bar{D}^2D^2 = 16\partial^2D^2, \quad \bar{D}^2D^2\bar{D}^2 = 16\partial^2\bar{D}^2, \qquad (17.7)$$

$$\bar{D}^2D^2\phi = 16\partial^2\phi \qquad (17.8)$$

для кирального суперполя ϕ. Мы можем записать киральный интеграл как полный интеграл по суперпространству в следующем виде:

$$\int d^2\theta d^4x\phi \cdot j = \int d^2\theta d^4x\phi\left(\frac{\bar{D}^2D^2j}{16\partial^2}\right) =$$

$$= \int d^2\theta\left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\right)d^4x\phi\left(\frac{-D^2j}{4\partial^2}\right) = -\int d^4\theta d^4x\phi\frac{\bar{D}^2j}{4\partial^2}, \qquad (17.9)$$

где ϕ и j — киральные суперполя.

Операторы D и δ-функции удовлетворяют соотношению $\delta_{12}D_1^2\bar{D}_1^2\delta_{12} = 16\delta_{12}$ под знаком интеграла $\int d^4x$, причем член, имеющий менее четырех операторов D, стоящих между δ-функциями, равен нулю.

17.1. Общий формализм

Построение фейнмановских правил для суперграфов аналогично построению обычных фейнмановских правил, которые следуют из вычисления функционального интеграла по теории возмущений. Общее суперполевое действие имеет вид

$$S = \int d^4x d^4\theta \mathscr{L}(V, \phi, \bar{\phi}) + \left\{ \int d^4x d^2\theta W(\phi) + \text{эрмит. сопр.} \right\}, \tag{17.10}$$

где V — общее суперполе, а ϕ — киральный мультиплет. Например, V может включать компонентные поля Янга — Миллса с $N = 1$ в x-пространстве, тогда как ϕ может содержать компонентные поля модели Весса — Зумино.

Мы определим амплитуду перехода из вакуумного состояния в вакумное (вакуум — вакуум) в присутствии внешних источников J для суперполя V и в присутствии источников j для ϕ (j — киральное суперполе с той же киральностью, что и ϕ):

$$Z[J, j] = N \int [DV\, D\phi\, D\bar{\phi}] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (S + V \cdot J + \phi \cdot j) \right\}, \tag{17.11}$$

где

$$V \cdot J = \int d^4x d^4\theta V \cdot J, \quad \phi \cdot j = \int d^4x d^2\theta \phi j + \text{эрмит. сопр.}, \tag{17.12}$$

$$N = [Z(J = 0, j = 0)]^{-1}.$$

Тогда имеем обычный результат

$$\frac{\delta^m Z[J, j]}{\delta J(1) \ldots \delta J(n) \ldots \delta j(m)}\Big|_{\substack{J=0 \\ j=0}} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^m G'_m(1, \ldots, n, n+1, \ldots, m), \tag{17.13}$$

где

$$G'_m(1, \ldots, n, n+1, \ldots, m) = \langle 0 | T V(1) \ldots V(n) \phi(n+1) \ldots \phi(m) | 0 \rangle \tag{17.14}$$

— функции Грина.

Определим далее производящий функционал $W[J, j]$ связных функций Грина $G_m(1, \ldots, n, n+1, \ldots, m)$

$$\frac{i}{\hbar} W[J, j] = \ln Z[J, j], \tag{17.15}$$

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\delta^m W[J, j]}{\delta J(1) \ldots \delta J(n)\, \delta j(n+1) \ldots \delta j(m)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^m G_m(1, \ldots, n, n+1, \ldots, m). \tag{17.16}$$

Поля Φ и v определяются соотношениями

$$\Phi = \delta W/\delta j, \quad \bar{\Phi} = \delta W/\delta \bar{j}, \quad v = \delta W/\delta J, \tag{17.17}$$

причем эти соотношения можно обратить и представить j и J как функции Φ и v. Эффективное действие $\Gamma(\Phi, v)$ или производящий функционал одночастично неприводимых графов $\Gamma^m(1, \ldots, m)$ дается выражением

$$\Gamma(\Phi, v) = W[j[\Phi, v], J[\phi, v]] - (j \cdot \phi + J \cdot v). \tag{17.18}$$

В этих формулах $W[J, j]$ понимают как величину, зависящую от J, $\bar{j}$ и j, хотя зависимость от $\bar{j}$ на самом деле часто отсутствует.

Мы разделяем действие на свободную часть и взаимодействие:

$$S = S^0 + S^{\text{int}}. \tag{17.19}$$

Тогда, полагая для удобства $\hbar = 1$, можем написать

$$Z[J, j] = \exp\left\{iS^{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right) Z_0[j, J]\right\}, \tag{17.20}$$

где

$$Z_0[j, J] = N_0 \int D\phi\, D\bar{\phi}\, DV \exp\{i(S_0 + J \cdot V + j \cdot \phi)\}. \tag{17.21}$$

Выполняя полностью интегрирование в $Z_0[j, J]$, мы получаем пропагаторы теории. Эти интегралы имеют форму

$$I[y] = \int \exp i\left(\frac{1}{2} x^T A x + x^T y\right) dx\, d\bar{x}. \tag{17.22}$$

Они гауссовы и после сдвига переменной интегрирования могут быть вычислены:

$$I[y] = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{i}{2} y^T A^{-1} y\right). \tag{17.23}$$

На языке свободной двухточечной связной функции Грина находим

$$Z_0[j, J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int J(x_1) G(x_1, x_2) J(x_2)\, dx_1\, dx_2 + \right.$$
$$\left. + \text{слагаемые, включающие } j \text{ и } \bar{j}\right). \tag{17.24}$$

17.2. Мультиплет Весса — Зумино

Вклад мультиплета Весса — Зумино ϕ в Z_0 имеет вид

$$Z_0[j] = \int [D\phi\, D\bar{\phi}] \exp i\left\{\int d^8z \bar{\phi}\phi + \int d^4x d^2\theta (j\phi + m\phi^2 + \right.$$
$$\left. + \text{эрмит. сопр.})\right\}. \tag{17.25}$$

Используя тот факт, что

$$\bar{D}^2 D^2 \phi = +16\partial^2 \phi, \tag{17.26}$$

можно записать интеграл как полный интеграл по суперпространству:

$$Z_0[j] = \int D\phi\, D\bar{\phi} \exp i \int d^8z \left(\bar{\phi}\phi - \frac{1}{2}\frac{m}{4}\phi \frac{D^2}{\partial^2}\phi - \frac{1}{2}\frac{m}{4}\bar{\phi}\frac{\bar{D}^2}{\partial^2}\bar{\phi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\phi}{4}\frac{D^2}{\partial^2} j - \frac{\bar{\phi}}{4}\frac{\bar{D}^2}{\partial^2}\bar{j} \right) = \int D\phi\, D\bar{\phi} \exp i \int d^8z \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2}(\phi, \bar{\phi}) \begin{bmatrix} -\frac{m}{4}\frac{D^2}{\partial^2} & 1 \\ 1 & -\frac{m}{4}\frac{\bar{D}^2}{\partial^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} - (\phi, \bar{\phi}) \begin{bmatrix} \frac{D^2}{4\partial^2} j \\ \frac{\bar{D}^2}{4\partial^2}\bar{j} \end{bmatrix} \right\}. \tag{17.27}$$

Это интеграл вида (17.22); он равен

$$\exp\left\{ -i \int d^8z \frac{1}{2} \left(\frac{D^2}{4\partial^2} j, \frac{\bar{D}^2}{4\partial^2}\bar{j} \right) A^{-1} \begin{bmatrix} \frac{D^2}{4\partial^2} j \\ \frac{\bar{D}^2}{4\partial^2}\bar{j} \end{bmatrix} \right\}, \tag{17.28}$$

где матрица A^{-1} обратна матрице

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{m}{4}\frac{D^2}{\partial^2} & 1 \\ 1 & -\frac{m}{4}\frac{\bar{D}^2}{\partial^2} \end{bmatrix}. \tag{17.29}$$

Используя соотношения

$$D^2\bar{D}^2 D^2 = 16\partial^2 D^2 \tag{17.30}$$

и

$$\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = 16\partial^2 \bar{D}^2, \tag{17.31}$$

можно убедиться, что

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m\bar{D}^2}{4(\partial^2 - m^2)} & 1 + \frac{m^2\bar{D}^2 D^2}{16\partial^2(\partial^2 - m^2)} \\ 1 + \frac{m^2 D^2 \bar{D}^2}{16\partial^2(\partial^2 - m^2)} & \frac{mD^2}{4(\partial^2 - m^2)} \end{bmatrix}. \tag{17.32}$$

Амплитуда перехода вакуум — вакуум для свободной теории имеет вид

$$Z_0[j] = \exp\left\{ -i \int d^8z \left[j \frac{1}{\partial^2 - m^2}\bar{j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\bar{j} \frac{m\bar{D}^2}{4\partial^2(\partial^2 - m^2)}\bar{j} + j \frac{mD^2}{4\partial^2(\partial^2 - m^2)} j \right) \right] \right\}. \tag{17.33}$$

Для этой свободной теории производящий функционал связных функций Грина равен

$$W_0[j] = -\int d^8z \left[j \frac{1}{\partial^2 - m^2} \bar{j} + \frac{1}{2} \bar{j} \frac{m\bar{D}^2}{4\partial^2(\partial^2 - m^2)} \bar{j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} j \frac{mD^2}{4\partial^2(\partial^2 - m^2)} j \right]. \quad (17.34)$$

Следовательно, единственными ненулевыми связными функциями Грина являются двухточечные функции, для которых, используя уравнение (17.16), находим

$$\langle \phi(1)\, \bar{\phi}(2) \rangle = \langle 0 \,|\, T\phi(1)\, \bar{\phi}(2) \,|\, 0 \rangle = + \frac{i}{16} \frac{\bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}}{(\partial^2 - m^2)}, \quad (17.35)$$

$$\langle \phi(1)\, \phi(2) \rangle = \langle 0 \,|\, T\phi(1)\, \phi(2) \,|\, 0 \rangle = + \frac{i}{4} \frac{m\bar{D}_1^2 \delta_{12}}{(\partial^2 - m^2)}. \quad (17.36)$$

Выделяя в равенстве (17.35) $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$-компоненты, находим обычный результат в x-пространстве:

$$\langle 0 \,|\, Tz(1)\, \bar{z}(2) \,|\, 0 \rangle = \frac{i}{\partial^2 - m^2} \delta^4(x_1 - x_2). \quad (17.37)$$

Применение ковариантных производных позволяет получить выражения для высших компонент. Действуя на пропагатор операторами D_{A1}, $D_{\dot{B}2}$ и выбирая $\theta_1 = \theta_2 = 0$, получаем

$$\langle 0 \,|\, T\chi_A(1)\, \chi_{\dot{B}}(2) \,|\, 0 \rangle = + \frac{i}{16} D_{A1} \frac{\bar{D}_1^2 D_{\dot{B}2} D_2^2 \delta_{12}}{(\partial^2 - m^2)} = \frac{2(\hat{\partial}_1)_{A\dot{B}}\, \delta^4(x_1 - x_2)}{\partial^2 - m^2}. \quad (17.38)$$

Наконец, найдем пропагатор для вспомогательных полей

$$\langle 0 \,|\, Tf(1)\, \bar{f}(2) \,|\, 0 \rangle = + \frac{1}{4} \cdot \frac{i}{16} \cdot \frac{D_1^2 \bar{D}_1^2 \bar{D}_2^2 D_2^2 \delta_{12}}{(\partial^2 - m^2)} = \frac{4i\partial^2}{(\partial^2 - m^2)} \delta^4(x_1 - x_2). \quad (17.39)$$

Напомним, что $f = -\frac{1}{2}(D^2\phi)\,(\theta = 0)$.

Модель Весса — Зумино с взаимодействием имеет вид (17.10), где

$$W(\phi) = + \frac{\lambda\phi^3}{3!}. \quad (17.40)$$

Следовательно, необходимо вычислить члены типа

$$S_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)[ij(1)\cdot ij(2)\cdot ij(3)] =$$
$$= +\frac{i\lambda}{3!}\int d^4x_4 d^2\theta_4 \frac{\delta^3}{i^3\delta^3 j(4)}[ij(1)\cdot ij(2)\cdot ij(3)] =$$
$$= +i\lambda\int d^4x_4 d^2\theta_4\left\{-\frac{\overline{D}_4^2}{4}\delta_{14}\right\}\left\{-\frac{\overline{D}_2^2}{4}\delta_{24}\right\}\left\{-\frac{\overline{D}_3^2}{4}\delta_{34}\right\} =$$
$$= +i\lambda\int d^8z_4\delta_{14}\left\{-\frac{\overline{D}_2^2}{4}\delta_{24}\right\}\left\{-\frac{\overline{D}_3^2}{4}\delta_{34}\right\}. \qquad (17.41)$$

Анализируя выражение (17.41), приходим к выводу, что при формулировке фейнмановских правил имеется возможность выбора. Мы можем сопоставить каждой вершине интеграл по переменной $d^2\theta$, например интеграл в предпоследней строке выражения (17.41), и считать, что пропагаторы заданы равенствами (17.35) и (17.36). Множители D^2 появляются в результате функционального дифференцирования. Но предпочтительнее использовать последнюю строку выражения (17.41) и сопоставить интегрирование по $d^4\theta$ каждой вершине, следовательно, исключить множитель D^2 в одном из трех пропагаторов, выходящих из вершины. Мы примем этот последний подход.

Перейдем в импульсное пространство, выполняя преобразование Фурье

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x}\phi(k) \qquad (17.42)$$

и полагая, что $\phi(+k)$ соответствует полю с импульсом $+k$, выходящим из вершины. В результате действию оператора $i\partial_\mu$ на функцию $\phi(x)$ в импульсном пространстве соответствует произведение $k_\mu\phi(k)$, так что действие ковариантных производных $D_A\phi(x)$ и $D_{\dot A}\phi(x)$ в импульсном пространстве имеет вид

$$D_A\phi(k) = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^A} - (\sigma^\mu)_{A\dot A}\theta^{\dot A}k_\mu\right\}\phi(k), \qquad (17.43)$$

$$D_{\dot A}\phi(k) = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot A}} - (\sigma^\mu)_{A\dot A}\theta^A k_\mu\right\}\phi(k). \qquad (17.44)$$

При этом антикоммутатор двух ковариантных производных равен

$$\{D_A, D_{\dot A}\}\phi(k) = -2(\sigma^\mu)_{A\dot A}k_\mu\phi(k). \qquad (17.45)$$

Поскольку

$$\delta^8(z_1 - z_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}\delta^4(\theta_1 - \theta_2), \qquad (17.46)$$

в результате действия оператора D_A на $\delta^8(z_1 - z_2)$ получаем

$$D_{1A}\delta^4(\theta_1 - \theta_2) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1^A} - (\sigma^\mu)_{A\dot{A}}\theta_1^{\dot{A}}k_\mu\right)\delta^4(\theta_1 - \theta_2) = -D_{2A}\delta^4(\theta_1 - \theta_2), \tag{17.47}$$

подразумевая наличие множителя $\delta^4(x_1 - x_2)$. В последнем равенстве (17.47) мы воспользовались тем, что в импульсном пространстве

$$D_{2A} = \frac{\partial}{\partial\theta_2^A} - (\sigma^\mu)_{A\dot{A}}(-k_\mu)\theta_2^{\dot{A}}. \tag{17.48}$$

При действии операторов на δ_{12} этот результат соответствует нашему соглашению, что импульс k направлен из точки, отмеченной цифрой 1, в точку 2.

Правила Фейнмана для суперграфов в импульсном пространстве таковы:

I. Пропагаторы можно найти, переходя в полученных выше уравнениях к импульсному представлению. Они имеют вид

$$\langle\phi(1)\bar{\phi}(2)\rangle = \frac{-i}{p^2 + m^2}\delta_{12}, \tag{17.49}$$

$$\langle\phi(1)\phi(2)\rangle = \frac{imD^2}{4p^2(p^2 + m^2)}\delta_{12}. \tag{17.50}$$

II. Вершины содержат множитель $i\lambda$ (или эквивалентный множитель, извлекаемый из действия S), а также множитель $-{}^1/_4\bar{D}^2(-{}^1/_4D^2)$ для двух из трех (или в общем случае для $n-1$ из n) киральных (антикиральных) линий. Если одна или более линий являются внешними, то приписываем вершине множитель $-{}^1/_4\bar{D}^2(-{}^1/_4D^2)$, соответствующий каждой такой линии.

III. Сопоставляем интегрирование

а) $\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ каждой независимой петле,

б) $\prod\limits_{p_{\text{внеш}}}\int\frac{d^4p_{\text{внеш}}}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\,\delta\left(\sum\limits_{\text{внеш}}p_{\text{внеш}}\right)$ внешним импульсам,

в) $\int d^4\theta_{\text{верш}}$ каждой вершине.

IV. Наконец, имеются комбинаторные множители в обычном пространстве [1]).

Происхождение этих правил очевидно из приведенного выше обсуждения. Пропагаторы образуются из свободных пропага-

[1]) Они приведены в работе [201]. Их можно вычислить с помощью (17.11)—(17.13). — *Прим. ред.*

торов без множителей $\bar{D}^2(D^2)$. Множители $\bar{D}^2(D^2)$, упоминаемые в п. II, следуют из киральной функциональной производной. Устранение одного из них требуется для того, чтобы превратить вершинный интеграл по θ-пространству в полный интеграл по суперпространству (см. (17.1)). Внешние линии не содержат дифференцирований, так что мы должны убрать лишние множители $\bar{D}^2(D^2)$.

Эти правила приводят к производящему функционалу $Z[j]$, из которого можно вычислить связные функции Грина.

Приведенные выше правила можно переформулировать для евклидова пространства. Переход к евклидову пространству эквивалентен развороту Вика, который конкретизируется заменой $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$ в пропагаторах. Определим $x_E = (x_4, \mathbf{x})$, где $x_4 = ix_0$. Отсюда следует

$$d^4x = -id^4x_E, \quad x_E^2 = x_4^2 + \mathbf{x}^2. \tag{17.51}$$

Как обычно, $k_E = (k_4, \mathbf{k})$, где $k_4 = -ik_0$, так что

$$d^4k = id^4k_E, \quad k_E^2 = k_4^2 + \mathbf{k}^2. \tag{17.52}$$

Часто фейнмановские правила формулируют после перехода в евклидово пространство. Произведя упомянутые выше изменения, связанные с этим переходом, найдем правила для евклидовой теории:

I. Пропагаторы имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \phi(1)\,\bar{\phi}(2)\rangle &= \frac{\delta_{12}}{p^2+m^2}, \\ \langle \phi(1)\,\phi(2)\rangle &= \frac{mD^2}{4p^2(p^2+m^2)}\,\delta_{12}. \end{aligned} \tag{17.53}$$

II. Вершины включают множитель λ и множитель $-{}^1/_4\bar{D}^2(-{}^1/_4D^2)$ для каждой киральной (антикиральной) внутренней линии, кроме одной (если линии являются внешними, то включаем в вершину упомянутые выше множители, для каждой такой линии). Значит, внешние линии множителей $-{}^1/_4\bar{D}^2(-{}^1/_4D^2)$ не содержат.

III. Сопоставляем интегрирование

а) $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ каждой петле,

б) $\prod\limits_{p_{\text{внеш}}} \int \frac{d^4p_{\text{внеш}}}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\,\delta\left(\sum\limits_{\text{внеш}} p_{\text{внеш}}\right)$ внешним импульсам,

в) $\int d^4\theta_{\text{верш}}$ каждой вершине.

IV. Обычные комбинаторные множители.

Выше использовалось соотношение (для числа петель) $L = I - V + 1$, чтобы исключить множители i из пропагаторов, вершин, интегралов по петлям и, наконец, δ-функции, связывающей начальное и конечное состояния. В этих правилах опущен множитель $-i$ для каждого пропагатора, $+i$ для каждой вершины, $+i$ для каждого петлевого интеграла и $-i$ для каждой δ-функции. В итоге опущен множитель $(i)^{(-I+V+L-1)}$, равный единице.

Эффективное действие можно найти, применив приведенные выше правила к одночастично-неприводимым графам. При этом интегрирование по петлям должно содержать внешние импульсы, соответствующие фоновым полям, а также необходимые коэффициенты, учитывающие симметрию.

17.3. Суперсимметричная теория Янга — Миллса

Перейдем теперь к супермультиплету Янга — Миллса, который содержится в суперполе V. Действие имеет вид

$$A^{\text{ЯМ}} = \frac{1}{64g^2} \operatorname{Tr} \int d^4x d^2\theta W^A W_A, \tag{17.54}$$

где

$$W_A = \bar{D}^2 (e^{-gV} D_A e^{+gV}). \tag{17.55}$$

Подразумевается, что след содержит множитель $1/C_2(G)$. Хотя обычно к киральным интегралам добавляют эрмитово-сопряженные слагаемые, этот интеграл при данном W_A действителен. Его можно переписать в виде

$$A^{\text{ЯМ}} = -\frac{\operatorname{Tr}}{16g^2} \int d^8z W^A (e^{-gV} D_A e^{gV}), \tag{17.56}$$

$$A^{\text{ЯМ}} = \frac{\operatorname{Tr}}{16} \int d^8z \Big\{ V D^A \bar{D}^2 D_A V + \frac{1}{16} gV \{D^A V, \bar{D}^2 D_A V\} - \\ - \frac{g^2}{16} \Big(\frac{1}{4} [V, D^A V] \bar{D}^2 [V, D_A V] + \frac{1}{3} (D^A V) \bar{D}^2 [V, [V, D_A V]] \Big) + \\ + O(V^5) \Big\}. \tag{17.57}$$

В действие, квантуемое по теории возмущений, мы должны добавить член, фиксирующий калибровку. Он имеет вид (ниже мы обсудим проблему дýхов)

$$-\frac{1}{\alpha} \operatorname{Tr} \int d^8z \frac{1}{2} V \Pi_0 \partial^2 V = -\frac{1}{16\alpha} \operatorname{Tr} \int d^8z D^2 V \bar{D}^2 V, \tag{17.58}$$

где Π_0 — один из проекторов $\Pi_i = (\Pi_{0+}, \Pi_{1/2}, \Pi_{0-})$, $i = 1, 2, 3$:

$$\Pi_{0+} \equiv \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\partial^2}, \quad \Pi_{0-} \equiv \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\partial^2}, \tag{17.59}$$

$$\Pi_0 = \Pi_{0+} + \Pi_{0-} \tag{17.60}$$

и

$$\Pi_{1/2} = -\frac{D^A \bar{D}^2 D_A}{8\partial^2} = -\frac{D^{\dot{A}} D^2 D_{\dot{A}}}{8\partial^2}. \tag{17.61}$$

Приведенные проекторы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{3} \Pi_i = 1, \quad \Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j. \tag{17.62}$$

В формализме компонентных полей член, фиксирующий калибровку, содержит выражение $(\partial_\mu A^\mu)^2$, а также слагаемые, в которые входят суперпартнеры поля A_μ.

С этим фиксирующим калибровку членом квадратичная по суперполю V часть действия принимает вид

$$A^{\text{ям}}_{(2)} = \mathrm{Tr} \int d^8z \left[\frac{1}{2} V \left\{ -\Pi_{1/2} - \frac{\Pi_0}{\alpha} \right\} \partial^2 V\right]. \tag{17.63}$$

В суперсимметричной калибровке Ферми — Фейнмана, $\alpha = +1$, это действие имеет особенно простой вид

$$A^{\text{ям}}_{(2)} = -\mathrm{Tr} \int d^8z \frac{1}{2} V \partial^2 V. \tag{17.64}$$

Итак, амплитуда перехода вакуум — вакуум в присутствии источника имеет вид

$$Z^0[J] = N_0 \int [dV] \exp i \left\{ A^{\text{ям}}_{(2)} + J \cdot V \right\}. \tag{17.65}$$

Интегрируя по V, находим

$$Z^0[J] = \exp\left\{ +\frac{i}{2} \int d^8z J [\Pi_{1/2} + \alpha\Pi_0] \frac{1}{\partial^2} J \right\}. \tag{17.66}$$

Двухточечная связная функция Грина равна

$$G(1, 2) = -(\Pi_{1/2} + \alpha\Pi_0) \frac{i}{\partial^2} \delta^8(z_1 - z_2), \tag{17.67}$$

а в импульсном представлении она принимает вид

$$G(p) = (+\Pi_{1/2} + \alpha\Pi_0) \frac{i}{p^2} \delta_{12}. \tag{17.68}$$

Переходя, как и выше, к евклидову пространству, получаем пропагатор

$$G(p) = -(\Pi_{1/2} + \alpha\Pi_0)\frac{1}{p^2}\delta_{12}, \tag{17.69}$$

который в суперсимметричной калибровке Ферми — Фейнмана имеет простой вид

$$G(p) = -\frac{1}{p^2}\delta_{12}. \tag{17.70}$$

Вершины легко получить из действия.

Наконец, мы должны добавить ду́хи для восстановления унитарности. Это можно сделать непосредственно, используя обычные методы [91]. Члены, фиксирующие калибровку, выражаем в соответствии с калибровочными преобразованиями, содержащими киральный параметр

$$D^2V - \bar{f} = 0, \quad \bar{D}^2V - f = 0. \tag{17.71}$$

Детерминант Фаддеева — Попова Δ определен условием

$$\Delta \int [\mathscr{D}\Lambda\mathscr{D}\bar{\Lambda}]\,\delta(D^2V^{\lambda} - \bar{f})\,\delta(\bar{D}^2V^{\lambda} - f) = 1, \tag{17.72}$$

где суперполе V^{λ} есть преобразованное поле V с параметрами $(\Lambda, \bar{\Lambda})$, т. е.

$$V^{\lambda} = V + \frac{V}{2} \wedge \{-(\Lambda + \bar{\Lambda}) + (\operatorname{cth} V/2) \wedge (\bar{\Lambda} - \Lambda) + \ldots\} =$$
$$= V + H(V)\Lambda + \bar{H}(V)\bar{\Lambda} + \ldots. \tag{17.73}$$

Амплитуда перехода вакуум — вакуум дается выражением

$$Z[j] = \int \mathscr{D}V \exp(iA^{\text{ЯМ}} + j \cdot V) \cdot \Delta\delta(D^2V - \bar{f})\,\delta(\bar{D}^2V - f). \tag{17.74}$$

Так как в это выражение Δ и δ-функции входят в качестве сомножителей, мы лишь требуем, чтобы детерминант имел некоторое отличное от нуля значение Δ' при $D^2V = \bar{f}$ и $\bar{D}^2V = f$. Единственный вклад в величину Δ' возникает от интегрирования по переменным Λ, $\bar{\Lambda}$ в (17.74), когда Λ, $\bar{\Lambda}$ близки к нулю. Поэтому мы можем использовать приведенные выше уравнения для V^{λ} и пренебречь членами порядка Λ^2, что в результате дает

$$\Delta' \int [\mathscr{D}\Lambda\mathscr{D}\bar{\Lambda}]\,\delta(D^2(H(V)\Lambda + \bar{H}(V)\bar{\Lambda})) \cdot \delta(\bar{D}^2(H(V)\Lambda + \bar{H}(V)\bar{\Lambda})) = 1. \tag{17.75}$$

Используя свойства δ-функции, найдем, что детерминант Δ' может быть представлен в виде

$$\Delta' = \int [\mathscr{D}c\mathscr{D}c'\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\bar{c}'] \exp i \left\{ \int d^4x d^2\theta c' \bar{D}^2 (H(V)c + \bar{H}(V)\bar{c}) + \right.$$

$$\left. + \int d^4x d^2\bar{\theta} \bar{c}' D^2 (H(V)c + \bar{H}(V)\bar{c}) + \text{эрмит. сопр.} \right\} \equiv$$

$$\equiv \int [\mathscr{D}c\mathscr{D}c'\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\bar{c}'] \exp(iA_{FP}) =$$

$$= \int [\mathscr{D}c\mathscr{D}c'\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\bar{c}'] \exp i \int d^8z \left\{ (c' + \bar{c}') \cdot \left\{ \left(-\frac{V}{2} \right) \Lambda (c + \bar{c}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\operatorname{cth} \frac{V}{2} \right) \Lambda (c - \bar{c}) \right\} \right\}. \qquad (17.76)$$

Духовые поля c и c' киральные $(D_{\dot{A}} c = 0 = D_{\dot{A}} c')$, а поля $\bar{c}$ и $\bar{c}'$ антикиральные. Наконец, интегрируя, можно усреднить по возможным калибровкам

$$\int [\mathscr{D}f\mathscr{D}\bar{f}] \exp \left(-\frac{i}{16} \left(\int \bar{f} f d^8z \right) \right). \qquad (17.77)$$

Поскольку это выражение не зависит от полей, вводить духи Нильсена — Каллош не требуется.

Окончательный ответ имеет вид

$$Z[j] = \int [\mathscr{D}V\mathscr{D}c\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}c'\mathscr{D}c'] \exp \left\{ iA^{\text{ЯМ}} + iA_{FP} + ij \cdot V - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{16} \int d^8z V (D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) V \right\}. \qquad (17.78)$$

Из такого действия легко получить вершины теории Янга — Миллса. Взаимодействие полей Янга — Миллса с полями материи описывает слагаемое

$$\int d^8z \bar{\phi}_a (e^{gV})^a{}_b \phi^b, \qquad (17.79)$$

и отвечающие этому действию вершины непосредственно получаются из него.

17.4. Приложения правил Фейнмана с $N = 1$

В качестве первого примера применения фейнмановских правил с $N = 1$ для суперграфов вычислим однопетлевую поправку к пропагатору в безмассовой модели Весса — Зумино, действие которой имеет вид

$$A = \int d^4x d^4\theta \phi\bar{\phi} + \frac{\lambda}{3!} \left\{ \int d^4x d^2\theta \phi^3 + \text{эрмит. сопр.} \right\}. \qquad (17.80)$$

Соответствующая диаграмма показана на рис. 17.1. Поперечной чертой отмечено поле $\bar{\phi}$, входящее в пропагатор $\langle\phi\bar{\phi}\rangle$. Используя

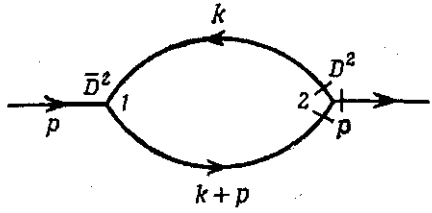

Рис. 17.1.

приведенную выше формулировку фейнмановских правил в евклидовом пространстве, для этого графа находим

$$\frac{1}{2}(\lambda^2)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,d^4\theta_1 d^4\theta_2\phi(-p,\,\theta_1)\left(-\frac{D_1^2}{4}\right)\left(-\frac{D_2^2}{4}\right)\times$$
$$\times\frac{\delta_{12}}{(p+k)^2}\frac{\delta_{12}}{k^2}\bar{\phi}(p,\,\theta_2). \qquad (17.81)$$

Учитывая равенства

$$D_2^2\delta_{12} = D_1^2\delta_{12}, \quad \delta_{12}\bar{D}_1^2 D_1^2\delta_{12} = 16\delta_{12} \qquad (17.82)$$

и выполняя интегрирование по θ_2, получаем

$$\frac{1}{2}\lambda^2\int\frac{d^4p\,d^4\theta_1}{(2\pi)^4}\,\phi(-p,\,\theta_1)\,A(p)\,\bar{\phi}(p,\,\theta_1), \qquad (17.83)$$

где

$$A(p) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(p+k)^2}. \qquad (17.84)$$

Коэффициент 1/2 представляет собой комбинаторный множитель графа $(1/2 = (3\times 3\times 2)/(3!3!))$.

Поскольку этот граф логарифмически расходится, теорию необходимо регуляризовать. Мы используем метод размерной редукции [92—94]. При этом алгебраические операции с γ-матрицами и операторами D выполняются как в четырехмерном пространстве, в то время как интегрирование по импульсам производится в $\nu = 4 - 2\varepsilon$ измерениях. Это означает, что если σ изменяется в интервале от $4 - 2\varepsilon$ до 4 и при этом i изменяется от 1 до $4-2\varepsilon$, то мы полагаем k_σ и ∂_σ равными нулю. Это отличает размерную редукцию от размерной регуляризации [95], где алгебра γ-матриц и интегрирование по импульсам задаются в ν измерениях. Поскольку при изменении размерности пространства числа состояний фермионов и бозонов изменяются по-разному, метод размерной регуляризации, очевидно, не со-

храняет явно суперсимметрию. На самом деле размерная редукция также не сохраняет явно суперсимметрию, так что для ее сохранения необходимо нарушить тождество Фирца (см. последнюю статью в [93]). Но отсутствие суперсимметрии не проявляется на уровне низших членов разложения по числу петель. Обсуждение аномалий в супертоке дано в работах [96].

Регуляризация методом размерной редукции означает использование алгебры операторов D в четырех измерениях, но интегрирование по импульсам в ν измерениях. Следовательно, в рассмотренном выше примере $A(p)$ принимает вид

$$A(p) = (\mu)^{2\varepsilon} \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p+k)^2} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\nu/2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{\nu}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\right)^2 (p^2)^{\nu/2-2}}{\Gamma(\nu-2)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^0). \tag{17.85}$$

При вычислении в формализме компонентных полей можно либо использовать непосредственно поля A_μ при $\mu = 1, \ldots, 4$, либо произвести разбиение A_μ на набор полей $\{A_i, S_\sigma\}$, где S_σ — так называемые ε-скаляры. Выполнив это разбиение, найдем, что в общем случае действие, записанное в компонентном формализме, содержит калибровочно-ковариантные кинетические члены $-1/2(D_i S^\sigma)^2$ и члены взаимодействия

$$-S_\sigma^2(A^2+B^2) \quad \text{и} \quad \bar{\chi}\gamma_\sigma S^\sigma \chi. \tag{17.86}$$

Но действие не содержит члена вида $S^\sigma \partial_\sigma A$, так как $\partial_\sigma A = 0$. Различие между схемами размерной редукции и размерной регуляции состоит во вкладе «скалярных» полей S_σ.

В общем виде безмассовая перенормируемая $(N=1)$-суперсимметричная теория имеет вид

$$A = \frac{1}{64g^2} \int d^4x d^2\theta \operatorname{Tr} W^A W_A + \int d^4x d^4\theta \bar{\phi}_a (e^{gV})^a{}_b \phi^b +$$

$$+ \left\{ \int d^4x d^2\theta d_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c + \text{эрмит. сопр.} \right\} +$$

$$+ \text{члены, фиксирующие калибровку} + \text{духи}, \tag{17.87}$$

где $V^a{}_b = V^s (T_s)^a{}_b$ и $(T_s)^a{}_b$ — генераторы калибровочной группы G в представлении R, которому принадлежит киральное поле материи. В калибровке Весса — Зумино это стандартная перенормируемая теория поля. Ее перенормировка в суперпространстве затруднена из-за неполиномиального вида членов взаимодействия, включающих суперполе V [97].

Вычислим теперь вклад поля Янга — Миллса с $N = 1$ в пропагатор $\phi\bar{\phi}$ и предположим для простоты, что представление R

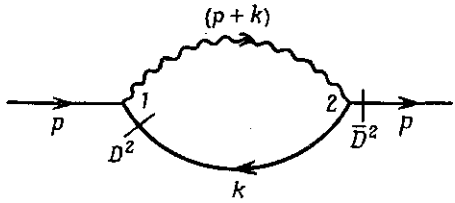

Рис. 17.2.

является неприводимым. Соответствующий граф изображен на рис. 17.2. Этот граф дает

$$g^2 (T^s)_a{}^b (T^s)_b{}^c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi^a(-p, \theta_1) \times$$

$$\times \left(-\frac{\delta_{12}}{(p+k)^2}\right)\left(-\frac{D_1^2}{4}\right)\left(-\frac{D_2^2}{4}\right)\left(\frac{\delta_{12}}{k^2}\right)\bar{\phi}_c(p, \theta_2). \quad (17.88)$$

Используя те же соотношения, что и выше, мы придем к результату

$$-g^2 C(R) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 \phi^a(-p, \theta_1)\, \bar{\phi}_a(p, \theta_1)\, A(p), \quad (17.89)$$

где

$$(T^s)_a{}^b (T^s)_b{}^c = \delta_a{}^c C(R). \quad (17.90)$$

Отрицательный знак интеграла (17.89) связан с тем, что пропагатор $\langle VV \rangle$ равен пропагатору $\bar{\phi}\phi$ с противоположным знаком.

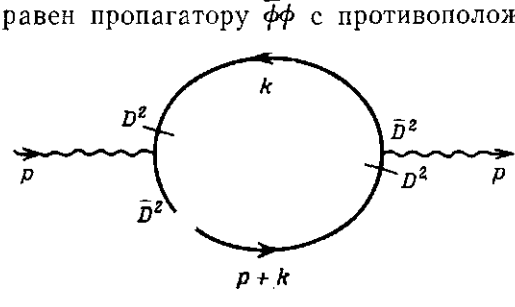

Рис. 17.3.

Рассмотрим чуть более сложный пример. Найдем однопетлевую поправку к пропагатору VV, которая представлена графом с внутренними ϕ-линиями на рис. 17.3.

Результирующий вклад в эффективное действие равен

$$\frac{g^2}{2}T(R)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}d^4\theta_1 d^4\theta_2 V^s(-p,\theta_1)\times$$

$$\times\frac{\bar D_1^2 D_1^2}{16}\frac{\delta_{12}}{(p+k)^2}\frac{D_1^2\bar D_1^2}{16}\frac{\delta_{12}}{k^2}V^s(p,\theta_2), \quad (17.91)$$

где $(T^s)^a{}_b(T^t)_a{}^b=\delta^{st}T(R)$. Множитель 1/2 необходим, поскольку интеграл содержит V^2. Проинтегрируем теперь это выражение по частям, перенося действие оператора $\bar D_1^2$ с первой функции δ_{12} на $V^s(-p,\theta_1)$ и вторую функцию δ_{12}. Этот прием приводит к выражению

$$+\frac{g^2}{2}T(R)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}d^4\theta_1 d^4\theta_2\frac{1}{k^2(p+k)^2}\frac{1}{(16)^2}\times$$

$$\times\{\bar D_1^2 V^s(-p,\theta_1)D_1^2\delta_{12}D_1^2\bar D_1^2\delta_{12}V^s(p,\theta_2)+$$

$$+2D_1^{\dot B}V^s(-p,\theta_1)D_1^2\delta_{12}D_{1\dot B}D_1^2\bar D_1^2\delta_{12}V^s(p,\theta_2)+$$

$$+V^s(1)D_1^2\delta_{12}\bar D_1^2 D_1^2\bar D_1^2\delta_{12}V^s(p,\theta_2)\}. \quad (17.92)$$

Проинтегрируем снова по частям, перенося оператор D_1^2 за первую функцию δ_{12} в первом слагаемом последней формулы. При интегрировании мы должны помнить, что оператор $D^2\bar D^2$ отличен от нуля. Это утверждение следует из соотношений

$$\delta_{12}D^2\bar D^2\delta_{12}=16\delta_{12}, \quad (17.93)$$

$$\delta_{12}D_A\bar D^2\delta_{12}=\delta_{12}\bar D^2\delta_{12}=\delta_{12}D_{\dot B}\delta_{12}=\delta_{12}D_{\dot B}D^2\delta_{12}=$$

$$=\delta_{12}D^2\delta_{12}=\delta_{12}D_A\delta_{12}=\delta_{12}D_{\dot B}D_A\delta_{12}=0. \quad (17.94)$$

Вклад, соответствующий этому графу, теперь равен

$$+\frac{g^2}{2}\frac{T(R)}{(16^2)}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4\theta_1 d^4\theta_2}{k^2(p+k)^2}[D_1^2\bar D_1^2V^s(-p,\theta_1)\delta_{12}D_1^2\bar D_1^2\delta_{12}V^s(2)+$$

$$+8D_1^{\dot B}V^s(1)D_1^2\delta_{12}(+k)^A{}_{\dot B}D_A D_1^2\delta_{12}V^s(2)-$$

$$-V^s(1)D_1^2\delta_{12}16k^2\bar D_1^2\delta_{12}V^s(2)]. \quad (17.95)$$

Данное выражение содержит результат вычисления произведения более чем двух операторов D или $\bar D$, который получен на основе антикоммутационных свойств D. Аналогичные приемы вычислений позволяют явно выделить множитель δ_{12} и затем проинтегрировать по переменной θ_2, что в результате дает

$$\frac{1}{2}T(R)g^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4\theta_1}{16p^2(p+k)^2}\times$$

$$\times[V^s(-p,\theta_1)(\bar D^2D^2+8D_{\dot B}D_A(k)^{A\dot B}-16k^2)V^s(p,\theta_1)]. \quad (17.96)$$

Используя равенство

$$\int d^{\nu}k \frac{1}{p^2} \frac{k^2}{(p+k)^2} = 0 = \int d^{\nu}k \frac{(p_\mu + 2k_\mu)}{p^2 (p+k)^2}, \tag{17.97}$$

получаем

$$\frac{1}{2} T(R) g^2 \int d^4p d^4\theta A(p) V(1) \Pi_{1/2} p^2 V(1), \tag{17.98}$$

где

$$\Pi_{1/2} = \frac{D^A D^2 D_A}{8p^2}. \tag{17.99}$$

Другие вклады в пропагатор VV, соответствующие петлям поля V и дýхов, представлены в виде графов на рис. 17.4. Их

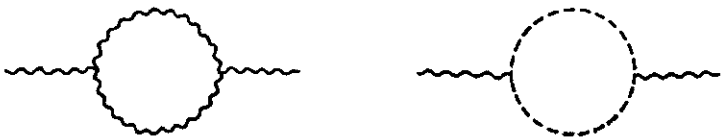

Рис. 17.4.

вычисление дает следующее выражение:

$$\frac{1}{2} C_2(G) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta V^s(-p, \theta) \left[\left(-\frac{5}{2} \Pi_{1/2} + \frac{1}{2} \Pi_0 \right) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{1}{2} \Pi_{1/2} - \frac{1}{2} \Pi_0 \right) \right] V^s(p, \theta) A(p) =$$
$$= -\frac{3}{2} C_2(G) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta V^s(-p, \theta) p^2 \Pi_{1/2} V^s(p, \theta) A(p), \tag{17.100}$$

где

$$f_{rst} f_{r'st} = \delta_{rr'} C_2(G).$$

17.5. Расходимость фейнмановских суперграфов

Используя приведенные выше фейнмановские правила для суперграфов, можно вычислить степень расходимости любого суперграфа. Рассмотрим суперграф (L-петлевой интеграл) с P пропагаторами, V вершинами какого-либо вида и E внешними ϕ- или $\bar{\phi}$-линиями, а также с некоторым числом внешних V-линий. Мы замечаем, что в каждой вершине графа независимо от ее вида имеются четыре множителя D. Вершина V^n содержит произведение четырех множителей D, тогда как вершины $\phi\phi V^n$ или ϕ^3 содержат то же число множителей D из-за дифференцирования киральных источников. Единственное исключение из этого правила — когда вершина имеет внешнюю киральную линию. Множители D отсутствуют на внешних киральных линиях,

так как по внешним полям функциональное дифференцирование не производится. Массивный пропагатор $\bar{\phi}\bar{\phi}$ или $\phi\phi$ имеет дополнительный множитель $D^2/q^2 \sim 1/q$, следовательно, полная степень расходимости графа равна

$$D = 4L - 2P + 2V - C - E - 2L, \tag{17.101}$$

где C — число пропагаторов $\bar{\phi}\bar{\phi}$ или $\phi\phi$. Для каждой петли требуются четыре множителя D, чтобы получить ненулевой ответ при окончательном интегрировании по θ; этим и оправданна необходимость добавления последнего слагаемого в (17.101). Используя топологическую формулу $L - P + V = 1$, получим хорошо известный результат [84]

$$D = 2 - C - E. \tag{17.102}$$

Такая степень расходимости не соответствует ситуации, при которой графы имеют все внешние линии лишь V-типа ($E = 0$), поэтому в соответствии с условиями калибровочной инвариантности на этих внешних линиях должны быть четыре множителя D. Следовательно, если имеются только внешние V-линии, то степень расходимости в действительности равна

$$D = -C,$$

т. е. возможна самое большее логарифмическая расходимость (при $C = 0$); если $C \neq 0$, графы не расходятся. Таким образом, пропагатор VV может иметь лишь логарифмическую расходимость.

Графы с двумя внешними линиями, киральность которых противоположна, т. е. имеется пропагатор $\bar{\phi}\phi$ и $C = 0$, могут логарифмически расходиться. Эти два результата согласуются с предыдущими явными однопетлевыми вычислениями.

Но если мы имеем только линии с данной киральностью, то интегрирование по переменной θ приводит к нулевому ответу, если нет хотя бы еще двух множителей D на внешних линиях. Таким образом, окончательное выражение имеет вид

$$\int d^4x d^4\theta\, (\phi)^n\, D^2\phi, \tag{17.103}$$

что отличается от интеграла $\int d^4x d^4\theta \phi^{n+1}$, который равен нулю. Степень расходимости соответствующего графа равна

$$D = 1 - C - (n + 1), \tag{17.104}$$

так что при $n > 1$ графы конечны. Это означает, что графы, вершины которых содержат внешние линии с одинаковой ки-

ральностью, не расходятся. Иначе говоря, добавлять бесконечные контрчлены вида $m\phi^2$ или $\lambda\phi^3$ нет необходимости.

Теперь мы получим тот же результат иным путем, доказав следующую теорему.

Теорема об отсутствии перенормировки (теорема о «неперенормировке») [90]. *Любой вычисляемый по теории возмущений* квантовый вклад в эффективное действие можно выразить в виде интеграла по всему $(N = 1)$-суперпространству. Иными словами, вклад должен иметь вид

$$\Gamma = \sum_n \int d^4x_1 \ldots d^4x_n d^4\theta G(x_1, \ldots, x_n) f(\phi(x_1, \theta), V(x_1, \theta), \ldots$$

$$\ldots, D^A\phi(x_1, \theta), D^A V(x_1, \theta), \ldots). \quad (17.105)$$

Заметим, что такой функционал включает лишь одно интегрирование по переменной θ функций, локально от нее зависящих.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из приведенных выше фейнмановских правил для суперграфов. Рассмотрим зависимость от θ любого суперграфа. В подынтегральном выражении имеем: от пропагаторов — функции δ_{ij}, от вершин — интегрирование $\int d^4\theta_i$, множители D и (или) множители D, действующие на функции δ_{ij}. Сосредоточим внимание на определенном пропагаторе, связывающем вершины i_1 и i_2. Интегрируя по частям, мы можем перенести действие операторов D или $\bar{D}$ с множителей $\delta_{i_1 i_2}$ на другие внутренние пропагаторы или на внешние поля (или источники, если мы вычисляем $W[J, j]$).

После выполнения этих интегрирований остается свободный множитель $\delta_{i_1 i_2}$ и можно проинтегрировать по переменной θ в вершине i_1. Это приводит к замене i_1 на i_2 во всех других точках суперграфа, что эквивалентно в θ-пространстве простому стягиванию петли в точку.

Эту процедуру вычислений можно использовать для всех пропагаторов, принадлежащих петле, кроме одного, и упростить выражение в θ-пространстве для данной петли:

$$\int d^4\theta_{j_2} \int d^4\theta_{j_1} \delta_{j_1 j_2} \bar{D}_{j_1} \ldots D_{j_1} \ldots \delta_{j_1 j_2} \ldots. \quad (17.106)$$

Это означает, что петля выглядит просто и содержит только две вершины. Если это выражение или любое аналогичное, какие встречались выше, содержит менее двух множителей D и двух множителей $\bar{D}$, то в целом вклад графа равен нулю. Если встречается более двух операторов D или $\bar{D}$, мы можем использовать коммутационные соотношения для D и $\bar{D}$, чтобы преоб-

разовать выражение, выделив два множителя D и два множителя $\bar{D}$, а также множители, зависящие от импульса. Для оставшихся двух множителей D и двух множителей $\bar{D}$ можно использовать соотношение

$$\delta_{j_1 j_2}\bar{D}^2_{j_1}D^2_{j_1}\delta_{j_1 j_2} = 16\delta_{j_1 j_2}, \tag{17.107}$$

позволяющее упростить подынтегральное выражение, которое затем проинтегрируем по $d^4\theta_{j_1}$, сохранив лишь интегрирование по $d^4\theta_{j_2}$.

Выполнив эти вычисления для всех петель, мы получим выражение, содержащее импульсы, внешние поля, операторы D и $\bar{D}$, действующие на внешнее поле, и одно окончательное интегрирование, соответствующее вершине; другими словами, мы получим выражение вида (17.105), что и требовалось доказать.

Применяя эту теорему к общей $(N = 1)$-суперсимметричной теории, найдем, что массовый контрчлен и контрчлен взаимодействия, имеющие вид $\int d^4x d^2\theta\,(m\phi^2 + \lambda\phi^3) + \text{эрмит. сопр.}$, в теории не содержатся, поскольку являются интегралами по подпространству, а не интегралами по всему суперпространству. Следовательно, независимые расходящиеся поправки к массе и взаимодействию отсутствуют. Эти результаты содержатся в работах [85—87].

Другая теорема, имеющая важное значение для построения реалистических моделей, является простым следствием теоремы об отсутствии перенормировки; она гласит:

Теорема [89]. Эффективный потенциал равен нулю для тех суперсимметричных полевых конфигураций, которые не нарушают суперсимметрию в классическом приближении.

Доказательство. Полевая конфигурация, совместная с требованиями суперсимметрии в классическом приближении, имеет нулевую энергию вакуума. Поскольку классический потенциал есть сумма вспомогательных полей, он должен обращаться в нуль.

Квантовые добавки в эффективный потенциал, который представляет собой независящую от координат часть эффективного действия, должны иметь вид

$$\int d^4\theta d^4x V f(\langle\phi\rangle, \langle V\rangle, \langle D_l\rangle, \ldots).$$

Но для классических конфигураций, удовлетворяющих требованиям суперсимметрии, $\langle\phi\rangle$ и $\langle V\rangle$ не зависят от θ, поскольку спиноры, входящие в эти величины, имеют нулевые вакуумные средние, и по предположению средние значения вспомогательных полей равны нулю. Следовательно, приведенный выше ин-

теграл, а также эффективный потенциал равны нулю, что и требовалось доказать.

Этот результат означает, что если суперсимметрия не нарушена в классическом приближении, то квантовый эффективный потенциал может достичь того же абсолютного минимума, что и в классической суперсимметричной теории. В частности, любые вырождения минимума классического потенциала, т. е. вакуумные конфигурации, имеющие те же абсолютные значения минимума потенциала, не устраняются квантовыми поправками. Эти вырождения в действительности являются общей чертой суперсимметричных теорий.

Этот результат также означает, что, если суперсимметрия не нарушена на древесном уровне, она не будет нарушена за счет квантовых поправок. Это простое следствие приведенного выше утверждения, а именно если квантовый эффективный потенциал нарушает суперсимметрию, он должен иметь минимум, лежащий ниже нулевого значения. Как только квантовый эффективный потенциал достигает нулевого значения, такой более низкий минимум приводит к искажению классического эффективного потенциала, что лежит за пределами применимости теории возмущений [98]. Обсуждение нарушения суперсимметрии вне рамок теории возмущений см. в работе [99].

17.6. Однопетлевые расходимости в общей $(N = 1)$-суперсимметричной теории

Наиболее общая $(N=1)$-суперсимметричная перенормируемая теория, инвариантная относительно калибровочной группы G, включает киральные суперполя ϕ^a в представлении R группы G и $(N = 1)$-поля Янга — Миллса, содержащие в общем случае суперполе V. Действие этой теории равно

$$A = \int d^4x d^4\theta\, [\bar{\phi}_a (e^{gV})^a{}_b \phi^b] + \frac{\mathrm{Tr}}{64g^2} \int d^4x d^2\theta W^A W_A +$$
$$+ \left[\int d^4x d^2\theta \left(\frac{m_{ab}}{2!} \phi^a \phi^b + \frac{1}{3} d_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c \right) + \text{эрмит. сопр.} \right] +$$
$$+ \text{члены, фиксирующие калибровку} + \text{духи}. \quad (17.108)$$

Групповые индексы a могут быть записаны в виде $\{i, A\}$, где A параметризует неприводимое представление, а i — его элементы.

Возможные перенормировочные константы в предположении, что суперсимметрия сохраняется, имеют вид

$$\phi_0^a = Z^{a/2}{}_b \phi^b, \quad V_0 = Z_V^{1/2} V, \quad g_0 = Z_g g,$$
$$d^0_{abc} = Z_{abc}{}^{a'b'c'} d_{a'b'c'}, \quad m^0_{ab} = Z_{ab}{}^{a'b'} m_{a'b'}. \quad (17.109)$$

Теорема о «неперенормировке» в суперсимметричной теории с $N=1$ гарантирует отсутствие расходимостей в поправках к массе и взаимодействию ϕ^3, так что

$$Z_{abc}{}^{a'b'c'} Z_{a'}{}^{1/2a''} Z_{b'}{}^{1/2b''} Z_{c'}{}^{1/2c''} = \delta_{(a}{}^{a''} \delta_b{}^{b''} \delta_{c)}{}^{c''} \tag{17.110}$$

и

$$Z_{ab}{}^{a'b'} Z_{a'}{}^{1/2a''} Z_{b'}{}^{1/2b''} = \delta_{(a}{}^{a''} \delta_{b)}{}^{b''}. \tag{17.111}$$

В формализме фонового поля (см. ниже) имеем

$$Z_g Z_V{}^{1/2} = 1. \tag{17.112}$$

Если не работать в формализме фонового поля, то условие (17.112) может не выполняться, но правильное соотношение

Рис. 17.5.

будет отличаться от приведенного выше на бесконечные слагаемые, зависящие от калибровки.

В результате единственные возможные расходимости содержатся в $Z'_a{}^b$ и Z_V, т. е. с каждым полем связана единственная

Рис. 17.6.

расходимость. Вычислим теперь эти перенормировочные константы, начиная с $Z'_a{}^b$. Однопетлевые поправки к пропагатору $\phi^b \bar{\phi}_a$ показаны на рис. 17.5. Вклад этих диаграмм имеет вид

$$g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta A(p) \phi^b(-p, \theta)(S_b{}^a - C_A \delta_b{}^a) \bar{\phi}_a(p, \theta), \tag{17.113}$$

где

$$d^{bce} \bar{d}_{ace} = 2S^b{}_a g^2. \tag{17.114}$$

Это выражение конечно тогда и только тогда, когда $C_A \delta^a{}_b = S^a{}_b$.

Однопетлевой вклад в пропагатор VV схематически представлен в виде графов на рис. 17.6 и дается выражением

$$\frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} V^s \Pi_{1/2} p^2 V^s \left[-3C_2(G) + \sum_A T_A \right] A(p), \tag{17.115}$$

где

$$\sum_A T_A \delta^{rs} = (T^r)_a{}^b (T^s)_b{}^a. \tag{17.116}$$

Оно конечно, тогда и только тогда, когда

$$3C_2(G) = \sum_A T_A. \tag{17.117}$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия конечности теории [100, 101] в однопетлевом приближении даются равенствами (17.114) и (17.117). Заметим, что если в однопетлевом приближении пропагаторы конечны, то конечные однопетлевые вклады равны нулю.

Исходя из этих выражений, мы можем найти одопетлевые β-функции

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g = -\frac{1}{16\pi^2}\left[3C_2(G) - \sum_A T_A(R)\right], \tag{17.118}$$

$$\beta_{abc} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d_{abc} = 3 d_{c(eb} \gamma_{a)}{}^e, \tag{17.119}$$

где $\gamma_a{}^b$ — аномальная размерность поля ϕ_a, равная

$$\gamma_a{}^b = Z^{-1/2}{}_a{}^c \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z^{+1/2}{}_c{}^b = \frac{1}{16\pi^2}(S_a{}^b - C_A \delta_a{}^b). \tag{17.120}$$

Равенства (17.119) являются простым следствием соотношения (17.110).

Поскольку существуют $(N = 1)$-суперсимметричные, конечные в однопетлевом приближении теории, то возникает вопрос: сохраняется ли конечность в высших порядках теории возмущений? Существует следующая замечательная теорема.

Теорема. Конечность однопетлевого приближения в $(N = 1)$-суперсимметричной теории гарантирует конечность в следующем двухпетлевом приближении.

Этот результат был получен прямым вычислением [100], а краткий вывод на основе аномалий приведен в работах [101, 102]. Результат для трехпетлевого приближения неизвестен.

Двухпетлевые β-функции для общей $(N = 1)$-суперсимметричной теории вычислены в работах [102, 103].

Сравнительно недавно было показано, что следствием конечности двухпетлевого приближения является равенство нулю трехпетлевой калибровочной β-функции [104] [1]).

---

[1]) В настоящее время получено общее выражение для трехпетлевых β-функций юкавских зарядов [203] и установлено, что конечность в однопетлевом приближении не гарантирует конечность в высших порядках теории возмущений. Существует метод построения конечных во всех порядках суперсимметричных теорий с $N = 1$, основанный на точной подстройке юкавских зарядов [204, 205]. — *Прим. ред.*

17.7. Формализм фонового поля [105]

Поясним сначала формализм фонового поля на примере теории Янга — Миллса. Начнем с классического действия $A[A_\mu]$ и запишем векторный потенциал A_μ в виде суммы классического (фонового) $A_\mu{}^c$ и квантового $A_\mu{}^q$ слагаемых:

$$A_\mu = A_\mu{}^c + A_\mu{}^q. \tag{17.121}$$

Действие $A = A[A_\mu{}^c + A_\mu{}^q]$ содержит теперь вершины, включающие как классические, так и квантовые поля. Как мы увидим ниже, удобно рассматривать диаграммную технику, в которой графы содержат лишь внутренние $A_\mu{}^q$-линии и внешние $A_q{}^c$-линии. Калибровочное преобразование поля A_μ, оставляющее инвариантным действие, имеет обычный вид

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda + [A_\mu,\ \Lambda]. \tag{17.122}$$

Выразим теперь это преобразование в терминах преобразований полей $A_\mu{}^c$ и $A_\mu{}^q$. Поскольку в действительности имеется только одно уравнение для δA_μ, в котором два неизвестных $\delta A_\mu{}^c$ и $\delta A^q{}_\mu$, эта задача не решается единственным образом. Тем не менее одна из возможных систем преобразований имеет вид

$$\delta A_\mu{}^c = \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda + [A_\mu{}^c,\ \Lambda] \equiv D_\mu{}^c \Lambda,\ \delta A_\mu{}^q = [A_\mu{}^q,\ \Lambda]. \tag{17.123}$$

Мы будем называть этот вариант фоновым калибровочным преобразованием.

Вычислим теперь квантовые поправки, пользуясь действием $A[A_\mu{}^c + A_\mu{}^q]$, но квантуя только поле $A_\mu{}^q$. Для этого мы выберем такую калибровку, чтобы воспроизвести соотношение (17.122), но так, чтобы для члена, фиксирующего калибровку, сохранилось фоновое калибровочное преобразование (17.123). Примером такого члена, фиксирующего калибровку, может служить выражение

$$F = D_\mu{}^c A_\mu{}^q \equiv \partial_\mu A^{q\mu} + g[A_\mu{}^c,\ A^{q\mu}]. \tag{17.124}$$

В этом случае необходимо добавить соответствующие ду́хи Фаддеева — Попова $S_{\text{ФП}}$ [201*]. Заметим, что ду́хи включают поле $A_\mu{}^c$, поскольку его содержит слагаемое, фиксирующее калибровку. Все это равносильно вычислению амплитуды перехода вакуум — вакуум в присутствии фонового поля $A_\mu{}^c$ и источника j_μ поля $A_\mu{}^q$:

$$Z[A_\mu{}^c,\ j_\mu] = \int [dA_\mu{}^q] \exp i\left(A + \frac{1}{2\alpha}\int F^2 d^4x + S_{\text{ФП}} + j^\mu \cdot A_\mu{}^q\right),$$

где

$$j^{\mu} \cdot A_{\mu}{}^{q} = \int d^4x j^{\mu}(x) A_{\mu}{}^{q}(x). \tag{17.125}$$

Хотя приведенная процедура несколько более сложна, чем прямое вычисление, она имеет одно огромное преимущество. Именно: любой граф, содержащий только классические поля $A_{\mu}{}^{c}$ во внешних линиях, будет явно инвариантным относительно калибровочных преобразований фонового поля. Это утверждение находится в противоречии с обычной ситуацией, когда слагаемое, фиксирующее калибровку, нарушает калибровочную инвариантность, и поэтому приходится использовать инвариантность относительно совокупности преобразований Бекки — Руэ — Стора — Тютина (БРСТ), которые не определяются явным образом. В этом случае отдельные графы, вообще говоря, не калибровочно-инвариантны. Конечно, в методе фонового поля калибровочная инвариантность нарушается квантовыми поправками, но все эти эффекты скрыты в графах.

Из функционала Z можно получить производящий функционал Γ одночастично-неприводимых графов

$$\Gamma[A_{\mu}{}^{c}, \tilde{A}_{\mu}] = W - j^{\mu} \cdot \tilde{A}_{\mu}, \tag{17.126}$$

где

$$Z = \exp iW \tag{17.127}$$

и

$$\tilde{A}_{\mu} = \frac{\delta W}{\delta j_{\mu}}. \tag{17.128}$$

Одночастично-неприводимые графы, все внешние линии которых являются только линиями фонового поля, можно получить из функционала $\Gamma[A_{\mu}{}^{c}]$, и они должны быть явно калибровочно-инвариантными. Приведенное выше эффективное действие связано с обычным эффективным действием в том отношении, что оба они приводят к одинаковым предсказаниям для калибровочно-инвариантных величин, и они равны, если в обычной формулировке калибровку выбрать специальным образом [106].

Применим теперь метод фонового поля для вычисления расходимостей в теориях Янга — Миллса. Теории должны быть локальными, и единственно возможный их вид

$$\int -\tfrac{1}{4} Z \operatorname{Tr}\{F_{\mu\nu}{}^{c}\}^2 d^4x, \tag{17.129}$$

где

$$F_{\mu\nu}{}^{c} = \partial_{\mu} A_{\nu}{}^{c} - \partial_{\nu} A_{\mu}{}^{c} - g[A_{\mu}{}^{c}, A_{\nu}{}^{c}]. \tag{17.130}$$

Эти формулы следуют из того, что напряженность $F_{\mu\nu}{}^{c}$ — единственно возможная величина, ковариантная относительно кали-

бровочных преобразований фонового поля. Поэтому, если мы имеем условия перенормировки

$$A_{\mu 0} = Z_{A_\mu}^{1/2} A_\mu, \quad g_0 = Z_g g, \tag{17.131}$$

то для получения согласия с контрчленом (17.129) необходимо, чтобы параметры удовлетворяли соотношению

$$Z_{A_\mu}^{1/2} Z_g = 1. \tag{17.132}$$

При вычислениях, не использующих метод фонового поля, параметры Z_{A_μ} и Z_g, вообще говоря, не связаны соотношением (17.132); тем не менее характер расходимостей определяется тождествами Уорда.

17.8. Формализм фонового поля в суперпространстве [107]

В отличие от теории Янга — Миллса в обычном пространстве в суперпространстве не желательно производить линейное разделение препотенциала Янга — Миллса. Дело в том, что калибровочное преобразование поля V существенно нелинейно относительно V, и, таким образом, разделение не должно приводить к простым трансформационным свойствам квантовой и классической частей. Более полное разделение можно построить, имитируя решение связей. Мы разделяем общее суперполе V_T на фоновые суперполя Ω и $\bar{\Omega}$ и квантовое поле V следующим образом:

$$e^{V_T} = e^{\Omega} e^{V} e^{-\bar{\Omega}}. \tag{17.133}$$

Трансформационные свойства этих полей относительно квантовых преобразований симметрии имеют следующий вид:

$$e^{V'} = e^{\bar{\Lambda}} e^{V} e^{-\Lambda}, \quad e^{\Omega'} = e^{\Omega}, \quad e^{\bar{\Omega}'} = e^{\bar{\Omega}}, \tag{17.134}$$

а свойства относительно фоновых (классических) преобразований симметрии имеют вид

$$V' = e^{K} V e^{-K}, \quad e^{\Omega'} = e^{\bar{\Lambda}_0} e^{\Omega} e^{-K}, \quad e^{\bar{\Omega}'} = e^{K} e^{-\bar{\Omega}} e^{-\Lambda_0}. \tag{17.135}$$

В этих преобразованиях Λ_0 — киральное суперполе,

$$D_{\dot{A}} \Lambda_0 = 0. \tag{17.136}$$

Параметр Λ — фоновое ковариантное киральное поле,

$$\mathscr{D}_{\dot{A}} \Lambda = 0, \tag{17.137}$$

где ковариантные производные фоновых полей определены соотношениями

$$\mathscr{D}_A = e^{-\Omega} D_A e^{\Omega}, \quad \mathscr{D}_{\dot{A}} = \bar{e}^{\bar{\Omega}} D_{\dot{A}} e^{\bar{\Omega}}. \tag{17.138}$$

Мы замечаем, что как квантовые, так и классические преобразования воспроизводят правильные преобразования общего суперполя V_T. В квантовом случае находим

$$e^{V_T'} = \exp\left(e^{\Omega}\bar{\Lambda}e^{-\Omega}\right)\exp\left(V_T\right)\exp\left(-e^{-\bar{\Omega}}\Lambda e^{\bar{\Omega}}\right) = \\ = \exp\bar{\Lambda}_0 \exp V_T \exp\left(-\Lambda_0\right), \tag{17.139}$$

где $\Lambda_0 = \bar{e}^{\bar{\Omega}}\Lambda e^{\bar{\Omega}}$. В классическом случае получаем

$$e^{V_T'} = \left(e^{\bar{\Lambda}_0} e^{\Omega} e^{-K}\right)\left(e^{K} e^{V} e^{-K}\right)\left(e^{K} e^{-\bar{\Omega}} e^{-\Lambda_0}\right) = e^{\Lambda_0} e^{V_T} e^{-\Lambda_0}. \tag{17.140}$$

Особенно полезно рассмотреть ковариантные производные в киральном представлении:

$$\nabla_A = e^{-V_T} D_A e^{V_T}, \quad \nabla_{\dot{A}} = D_{\dot{A}}. \tag{17.141}$$

Подставляя сюда соотношение, связывающее V_T с Ω, $\bar{\Omega}$ и V, найдем

$$\nabla_A = e^{\bar{\Omega}} e^{-V} \mathscr{D}_A e^{V} e^{-\bar{\Omega}}. \tag{17.142}$$

Удобно производить вычисления с производными, симметричными по фоновому полю, поэтому, выполнив неунитарное преобразование

$$\nabla_N \to e^{-\bar{\Omega}} \nabla_N e^{\bar{\Omega}}, \tag{17.143}$$

получим выражение для ковариантных производных

$$\nabla_N = \left(e^{-V}\mathscr{D}_A e^{V},\ \mathscr{D}_{\dot{A}},\ \nabla^n\right), \tag{17.144}$$

где

$$\left\{\nabla_A,\ \nabla_{\dot{A}}\right\} = -2i\left(\sigma^n\right)_{A\dot{A}} \nabla_n. \tag{17.145}$$

Эти производные имеют особенно простые трансформационные свойства:

$$\begin{aligned} &\text{в квантовом случае } \nabla_N \to e^{\Lambda} \nabla_N e^{-\Lambda}, \\ &\text{в случае фоновых (классических) полей } \nabla_N \to e^{K} \nabla_N e^{-K}. \end{aligned} \tag{17.146}$$

Ненулевая напряженность поля наинизшей размерности может быть записана, как обычно, в виде

$$W_A = -2i\left[\nabla^{\dot{B}},\ \left\{\nabla_A,\ \nabla_{\dot{B}}\right\}\right]. \tag{17.147}$$

Прежде всего умножим киральные поля ϕ_T на $e^{-\overline{\Omega}}$, чтобы они удовлетворяли фоновой киральной связи

$$\mathscr{D}_{\dot{A}}\phi_T = 0. \tag{17.148}$$

Поскольку поля ϕ_T преобразуются линейно, мы можем представить их в виде двух слагаемых:

$$\phi_T = \phi_B + \phi_Q. \tag{17.149}$$

Оба слагаемых преобразуются под действием квантовых преобразований следующим образом:

$$\phi_Q \to e^{\Lambda}\phi_Q, \tag{17.150}$$

где величина $\Lambda^i T_i$ принадлежит соответствующему представлению калибровочной группы, причем она ковариантна относительно фоновых киральных преобразований. Под действием фоновых преобразований эти поля преобразуются как

$$\phi_Q \to e^{K}\phi_Q. \tag{17.151}$$

Наиболее общее перенормируемое действие имеет вид

$$A = \frac{1}{64g^2}\int d^4x d^2\theta\, \mathrm{Tr}\, W^A W_A + \int d^4x d^4\theta \bar{\phi}_{Ta}(e^{gV})^a{}_b\,\phi_T{}^b + \\ + \left\{\int d^4x d^2\theta \frac{1}{3!} d_{abc}\phi_T{}^a\phi_T{}^b\phi_T{}^c + \frac{m_{ab}}{2}\phi_T{}^a\phi_T{}^b + \text{эрмит. сопр.}\right\}. \tag{17.152}$$

Для квантования теории мы выбираем слагаемое, фиксирующее калибровку (по отношению к фоновым преобразованиям), например, следующим образом:

$$\mathscr{D}^2 V - \bar{f} = 0, \quad \overline{\mathscr{D}}^2 V - f = 0. \tag{17.153}$$

Соответствующий детерминант Фаддеева — Попова Δ определяется из соотношения

$$\Delta\int d\Lambda d\bar{\Lambda}\,\delta(\mathscr{D}^2 V^\lambda - \bar{f})\,\delta(\overline{\mathscr{D}}^2 V^\lambda - f) = 1. \tag{17.154}$$

Амплитуда перехода вакуум — вакуум равна

$$Z[j] = \int [\mathscr{D}V\mathscr{D}\phi_Q\mathscr{D}\bar{\phi}_Q]\exp\left\{iA + i\int d^8z jV + \right. \\ \left. + \left(\int d^4x d^2\theta j\phi_Q + \text{эрмит. сопр.}\right)\right\}\{\Delta\delta(\mathscr{D}^2 V^\lambda - f)\,\delta(\overline{\mathscr{D}}^2 V^\lambda - \bar{f})\}. \tag{17.155}$$

Детерминант Δ может быть представлен следующим функциональным интегралом:

$$\int [\mathscr{D}c\mathscr{D}c'\mathscr{D}\bar{c}\mathscr{D}\bar{c}'] \exp i \int d^8z \left\{(\bar{c}' + c') \wedge \left(-\frac{V}{2}\right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left[(c + \bar{c}) + \left(\operatorname{cth} \frac{V}{2}\right) \wedge (c - \bar{c})\right]\right\}. \qquad (17.156)$$

Хотя это выражение выглядит так же, как и раньше, заметим, что теперь ду́хи являются фоновыми ковариантными киральными полями.

Интегрируя, мы можем усреднить по всем возможным калибровкам:

$$\int [\mathscr{D}f\mathscr{D}\bar{f}\mathscr{D}b\mathscr{D}\bar{b}] \exp\left(-\frac{i}{16}(f\bar{f} + b\bar{b})\right). \qquad (17.157)$$

Ковариантные фоновые киральные поля b и $\bar{b}$ — ду́хи Нильсона — Каллош, которые антикоммутируют и дают вклад только в однопетлевом приближении.

Часть действия, соответствующая теории Янга — Миллса, имеет вид

$$\frac{1}{16C_2(G)} \int d^8z \operatorname{Tr}\left\{-e^{-V}\mathscr{D}^A e^V \overline{\mathscr{D}}^2 e^{-V}\mathscr{D}_A e^V - \frac{1}{2} V \left(\mathscr{D}^2\overline{\mathscr{D}}^2 + \overline{\mathscr{D}}^2\mathscr{D}^2\right) V\right\}. \qquad (17.158)$$

а билинейная по полю V часть, отвечающая всем однопетлевым графам, дается выражением

$$\frac{1}{16C_2(G)} \int d^8z \operatorname{Tr}\left\{V\left(\mathscr{D}^A\overline{\mathscr{D}}^2\mathscr{D}_A - \frac{1}{2}\left(\mathscr{D}^2\overline{\mathscr{D}}^2 + \overline{\mathscr{D}}^2\mathscr{D}^2\right)\right) V\right\}. \qquad (17.159)$$

Нетрудно убедиться, что оно равно

$$-\frac{1}{16C_2(G)} \int d^8z \operatorname{Tr}\left\{V\left(\mathscr{D}^n\mathscr{D}_n - \frac{1}{16} W^A\mathscr{D}_A - \frac{1}{16\cdot 2}\left(\mathscr{D}^A W_A\right)\right) V\right\}. \qquad (17.160)$$

Читатель может заметить, что в этом выражении имеется только одна ковариантная спинорная производная. Поскольку в каждой петле необходимы четыре спинорные производные по внутренним переменным, чтобы отвечающее ей выражение было ненулевым, первый ненулевой однопетлевой граф с внутренними линиями, соответствующими полям Янга — Миллса, содержит четыре внешние линии и имеет вид $W^2\overline{W}^2$.

В общем случае эффективное действие Γ должно быть калибровочно-инвариантным функционалом фоновых потенциалов A_N. Кроме того, оно удовлетворяет $(N = 1)$-теореме о «непере-

нормировке» и, таким образом, может быть выражено в виде интеграла по всему $(N=1)$-суперпространству.

Следовательно, контрчлены должны иметь вид

$$Z\int d^4xd^4\theta f\left(A_B^c,\ \mathscr{D}_A^c A_B^c,\ \ldots\right). \tag{17.161}$$

Из соображений размерности следует, что единственно возможное выражение имеет вид

$$Z\int d^4xd^4\theta A_B^c\bar{D}^c A^{cB}+\ldots. \tag{17.162}$$

Его можно переписать в виде

$$Z\int d^4xd^2\theta W^{cB}W_B^c, \tag{17.163}$$

где $W_B^c=\bar{D}^cA_B^c$. Это свидетельствует о том, что теория Янга — Миллса с $N=1$ может содержать бесконечную перенормировку волновой функции. По тем же причинам, что и в случае обычной теории Янга — Миллса, расходимости, отвечающие взаимодействию и волновой функции, должны удовлетворять соотношению $Z_gZ_V=1$. Эти результаты, конечно, согласуются с нашими явными вычислениями там, где возникают такие расходимости.

18. СВОЙСТВА УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ ТЕОРИЙ С РАСШИРЕННОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

В гл. 17 мы заметили, что модель Весса — Зумино, содержащая члены взаимодействия, имеет даже меньше бесконечных констант перенормировки, чем можно было ожидать, исходя из требования сохранения суперсимметрии в рамках процедуры ренормализации. В самом деле, в этой модели имеется только одна бесконечная константа перенормировки, как в теории Янга — Миллса с $N = 1$ (в формализме фонового поля или в специальной калибровке). При исследовании теорий с расширенной суперсимметрией можно ожидать еще более замечательного поведения в ультрафиолетовой области.

Наиболее впечатляющие ренормализационные свойства — конечность большого класса теорий расширенной глобальной суперсимметрии. Сначала внимание исследователей было полностью обращено к максимально расширенной суперсимметричной теории Янга — Миллса с $N = 4$. Было показано, что β-функция в этой теории равна нулю в одно- [108], двух- [109] и трехпетлевом приближениях [110]. Вскоре после появления трехпетлевых вычислений стали высказываться соображения в пользу конечности во всех порядках теории возмущений [111] [1]). Эти соображения основывались на структуре аномалий суперсимметричных теорий. Позднее были найдены еще два аргумента в пользу конечности теории Янга — Миллса с $N = 4$. Один из них опирается на обобщение теоремы об отсутствии перенормировок для $N = 1$ на теории с расширенной суперсимметрией [112, 113], а другой основан на использовании $(N = 4)$-теории Янга — Миллса в калибровке на световом конусе [114, 115].

При применении результатов работы [116] было замечено [2]), что β-функция теории Янга — Миллса с $N = 2$ равна нулю вплоть до двухпетлевого приближения. Затем на основе соображений о «неперенормируемости» было показано, что теория Янга — Миллса с $N = 2$ конечна за пределами однопетлевого приближения [112]. Пересмотр доводов, основанных на аномалиях, привел также к пониманию конечности за пределами однопетлевого приближения любой $(N = 2)$-теории с глобальной

[1]) S. Ferrara, B. Zumino, неопубликованная работа.
[2]) D. Freedman, частное сообщение.

суперсимметрией [117]. Современное изложение аргументов, основанных на аномалиях, в форме, применимой к теориям с $N=2$, можно найти в работе [118][1]); результаты, связанные с отсутствием перенормировок [112, 113] в теориях с $N=2$, также содержатся в работе [118]. В последующем обсуждении мы рассмотрим только доводы, основанные на аномалиях и отсутствии перенормировок.

Эти результаты были подтверждены прямым вычислением с использованием $(N=1)$-суперполевого формализма. Было обнаружено, что двухпетлевая β-функция любой $(N=2)$-теории с глобальной суперсимметрией равна нулю [119].

18.1. Доказательство, основанное на аномалиях [111]

Стратегия доказательства опирается на тот факт, что в любой суперсимметричной теории тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$, некоторые внутренние токи $j_\mu{}^i{}_j$ и суперток $j_{\mu\alpha i}$ принадлежат одному супермультиплету. Следовательно, любые суперконформные аномалии этих токов также должны принадлежать супермультиплету. Этот последний супермультиплет аномалий может включать $\theta_\mu{}^\mu$, $(\gamma^\mu j_{\mu i})_\alpha$ и $\partial^\mu j_\mu{}^i{}_j$, причем индексы i, j соответствуют нарушению масштабной инвариантности, определенной суперсимметрии и некоторым из внутренних токов соответственно. Понятно, что, когда некоторые из внутренних симметрий не нарушены (т. е. $\partial_\mu j^{\mu i}{}_j = 0$ для некоторых i, j), мультиплет, содержащий аномалии, если он неприводим, должен быть равен нулю и, следовательно, $\theta_\mu{}^\mu = 0$. Но тензор $\theta_\mu{}^\mu$ пропорционален выражению $(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \ldots)$, умноженному на β-функцию; следовательно, β-функция должна обращаться в нуль. Из этого результата можно получить доказательство конечности рассматриваемой теории, используя какой-либо специальный формализм, например формализм фонового поля (см. ниже).

Чтобы проиллюстрировать ход доказательства, покажем сначала конечность теории Янга — Миллса с $N=4$, используя упрощенный вариант аргументации, основанной на аномалиях. Для этого необходимо сделать следующее предположение.

Квантовые поправки к $(N=4)$-теории Янга — Миллса сохраняют суперсимметрию с $N=1$ и внутреннюю $SU(4)$-симметрию.

Установим сохранение всех киральных токов теории. Максимальная симметрия есть $U(4) = SU(4) \times U(1)$. Для общего N

[1]) Работа [118] содержит обзор свойств конечности суперсимметричных теорий и, в частности, аргументацию, основанную на аномалиях, применительно к теориям с $N=2$. Это последнее исследование выполнено автором совместно с P. Howe.

генератор B группы $U(1)$ имеет с генераторами $Q^i{}_A$ следующие коммутационные соотношения:

$$[Q_A{}^i,\ B] = \frac{i\,(N-4)}{4}\,Q_A{}^i. \tag{18.1}$$

В случае $N=4$ генераторы B и $Q_A{}^i$ коммутируют, и, следовательно, генератор B, который является оператором киральных вращений, на все состояния мультиплета действует одинаково. Однако набор полей Янга — Миллса с $N=4$ есть CPT-самосопряженный мультиплет; поэтому оператор B должен одинаково действовать на состояния со спиральностями $+1/2$ и $-1/2$, что возможно только в том случае, если действие B приводит к нулевому результату. Следовательно, рассматриваемая модель имеет лишь $SU(4)$-симметрию, представление которой разбивается по представлениям $O(4)$ следующим образом:

$$\mathbf{15}\ SU(4) = (\mathbf{6}+\mathbf{9})\ O(4), \tag{18.2}$$

где представление 9 группы $O(4)$ связано с киральными токами, тогда как представление $\mathbf{6}$ — с остальными токами, не содержащими γ_5-матрицы. Следовательно, если $SU(4)$-симметрия не нарушена, то сохраняется 9 киральных токов, т. е. все киральные токи сохраняются.

В формулировке, основанной на группе $O(4)$, имеются представления $\mathbf{4}$ для майорановских спиноров $\chi_{\alpha i}$, $\mathbf{9}$ — для киральных токов, включающих член $\bar{\chi}^{(i}\gamma^\mu\gamma^5\chi^{j)}$, а $\mathbf{6}$ — для токов, содержащих член $\bar{\chi}^{[i}\gamma^\mu\chi^{j]}$.

Рассмотрим теперь $(N=4)$-теорию Янга — Миллса, разложенную по представлениям с $N=1$. R-ток $j_\mu{}^{(5)}$ будет одним из 9 киральных токов и будет сохраняющейся величиной, т. е. $\partial_\mu j^{\mu(5)} = 0$.

Теперь необходимо рассмотреть уравнение для аномалии. Оно содержит правую часть, куда входят напряженность W поля Янга — Миллса с $N=1$ и киральные поля материи ϕ^i. Из соображений размерности уравнение должно иметь вид (см. гл. 20)

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = -\frac{1}{3}\frac{\beta(g)}{g} D_A W^2 + \text{члены, зависящие от } \phi^i. \tag{18.3}$$

Однако, как уже говорилось, первое слагаемое соответствует киральной аномалии и поэтому содержит $\theta_\mu{}^\mu$ и $\partial_\mu j_\mu{}^{(5)}$. Так как $\partial_\mu j^{\mu(5)} = 0$, мы должны сделать вывод, что $\beta(g) = 0$.

Аналогичное, но несколько более строгое доказательство [111] может быть проведено исходя из предположения, что в $(N=4)$-квантовой теории Янга — Миллса сохраняются супер-

симметрия с $N=1$ и симметрия $O(4)$. В этом случае следует рассматривать мультиплеты аномалий с $N=2$.

Применим теперь доводы, основанные на аномалиях [118], к $(N=2)$-теориям с глобальной суперсимметрией и докажем следующую теорему.

Теорема [117]. β-функция $(N=2)$-теорий с глобальной суперсимметрией равна нулю во всех порядках выше однопетлевого.

Доказательство. Сначала установим, что в квантовой теории сохраняются $(N=2)$-суперсимметрия и внутренняя симметрия $U(2)$. В классической теории $(N=2)$-суперсимметрия выражается явно при использовании данной выше формулировки $(N=2)$-супермультиплета материи. Но чтобы непосредственно проквантовать теорию, рассмотрим формулировки, не использующие связей в x-пространстве. Иными словами, мы можем рассмотреть формулировку, использующую ослабленный гипермультиплет, состоящий из суперполей L, L^{ij}, L^{ijkl}, или мы можем использовать новый ослабленный вариант гипермультиплета Сониуса, о котором говорится в гл. 15.

Теперь нам потребуется метод регуляризации, сохраняющий эти симметрии; самый надежный — метод старших производных [120]. Это значит, что мы рассматриваем действие, которое содержит компонентные поля вида

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2-\frac{1}{4}\frac{1}{\Lambda^{2r}}F^{\mu\nu}(\partial^2)^r F_{\mu\nu}+$$

$+$ слагаемые, необходимые для сохранения суперсимметрии. (18.4)

В этом выражении r — целое число, которое обычно равно 1 или 2. Этот метод, очевидно, не нарушает суперсимметрию с $N=2$ и симметрию $U(2)$, а также позволяет регуляризовать все графы, за исключением примитивно-расходящихся однопетлевых диаграмм. В общем случае введение старших производных в теорию изменяет структуру расходимостей на однопетлевом уровне, т. е. «β-функция» до предельного перехода, обращающего в нуль старшие производные, существенно отличается от первоначальной. Но для теорий с $N=2$, выраженных в приведенном формализме, дополнительные массивные состояния, введенные старшими производными, должны принадлежать к супермультиплетам с $N=2$, содержащим один спин 1, четыре спина 1/2 и пять нулевых спинов. Это следует из того, что мультиплет, рассмотренный выше, является единственно приемлемым массивным мультиплетом, не имеющим центрального

заряда и включающим спины, не превосходящие 1. Следовательно, если «β-функция» на однопетлевом уровне для теории со старшими производными дается формулой [121, 122]

$$\beta(g) = \frac{g^5}{96\pi^2} \sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} C_\lambda (1 - 12\lambda^2), \tag{18.5}$$

где суммирование производится по всем состояниям с различными спиральностями, то β-функция такая же, как в теории без старших производных. В работе [123] доказано, что эта формула в самом деле верна.

Следовательно, если теория конечна в однопетлевом приближении, то после регуляризации с помощью старших производных она может быть сделана конечной и во всех порядках теории возмущений.

Такая конечная в однопетлевом приближении теория с $N=2$ может сохранять $(N=2)$-суперсимметрию и симметрию $U(2)$ в полной квантовой теории.

Остается лишь установить, что мультиплет токов в суперсимметричных теориях с $N=2$ имеет требуемую форму. Супертоκ J теории с $N=2$ имеет размерность 2; уравнение аномалии для него имеет вид

$$D^{ij} J = \text{аномалии}, \tag{18.6}$$

где $D^{ij} \equiv D^{A(i} D_A^{j)}$. Правая часть этого уравнения должна иметь размерность 3 и должна быть построена из калибровочно-инвариантных суперполей W теории Янга — Миллса с $N=2$, $(N=2)$-суперполей материи и ковариантных производных этих полей. Обратим внимание на слагаемое, содержащее поля Янга — Миллса W с $N=2$. Уравнение может иметь единственный вид:

$$D^{ij} J = -\frac{1}{3} \frac{\beta(g)}{g} \bar{D}^{ij} \overline{W}^2 + \text{слагаемые, содержащие поля материи,} \tag{18.7}$$

где $\beta(g)$ — β-функция, зависящая от константы калибровочного взаимодействия g. Первое слагаемое включает в себя аномальные члены, содержащие вклады в θ^{μ}_{μ}, а также в дивергенцию одного из киральных $U(2)$-токов. Но эти киральные токи сохраняются, следовательно, $\beta(g) = 0$.

С другой стороны, если теория имеет расходимости на однопетлевом уровне, то они должны быть регуляризованы отдельно. При этом естественно ожидать, что $U(2)$-токи будут

сохраняться за пределами однопетлевого приближения, и, следуя приведенному выше доказательству, можно найти, что β-функция обращается в нуль во всех порядках выше однопетлевого.

Существует вариант доказательства конечности теории, основанный на аномалиях, который не опирается непосредственно на сохранение кирального тока [124], а использует теорему Адлера — Бардина о киральном токе. Это доказательство [125] применялось также для того, чтобы убедиться в конечности теорий с $N = 2$ за пределами однопетлевого приближения.

18.2. Доказательство, основанное на отсутствии перенормировки

Теперь мы можем представить доказательство конечности, основанное на отсутствии перенормировки. Сначала приведем расширенную формулировку теоремы об отсутствии перенормировки.

Теорема [112]. Эффективное действие Γ для любой расширенной суперсимметричной теории, представленной в суперполевом формализме без связей, может быть записано в виде интеграла по расширенному суперпространству:

$$\Gamma = \int d^4x_1 \ldots d^4x_n d^{4N}\theta f(\phi(x_1, \theta_1), \ldots$$

$$\ldots, \phi(x_n, \theta_n), D\phi(x_1, \theta_1), \ldots) g(x_1, \ldots, x_n), \qquad (18.8)$$

где ϕ — общее суперполе.

Доказательство. Если теория допускает суперполевое описание без связей, то мы можем выбрать пропагаторы в виде δ_{12}, а вершинам необходимо сопоставить интегрирования $\int d^{4N}\theta$. На линиях, выходящих из вершин, должны быть также различные множители D. Теперь можно следовать в точности тем же аргументам, которые использовались для доказательства теоремы об отсутствии перенормировки при $N = 1$: устраняем производные D, действующие на δ-функции с помощью интегрирования по частям, и стягиваем θ-пространственные петли до тех пор, пока не останется только один интеграл по θ.

Известно, что контрчлены локальны, следовательно, их вклад в действие Γ имеет вид

$$\Gamma = \int d^4x d^{4N}\theta f(\phi, D\phi, \ldots). \qquad (18.9)$$

Конечно, эффективное действие в отсутствие каких-либо аномалий должно также удовлетворять тождествам Уорда, соот-

ветствующим имеющимся в теории симметриям. Простейший способ описания, который бы не нарушил эти симметрии, — формализм фонового поля. Для расширенных теорий формализм вполне аналогичен тому методу, который использовался для теории Янга — Миллса с $N=1$, за исключением процедуры фиксации калибровки и введения соответствующих дýхов. Это последнее замечание, которое обсуждается ниже, ведет к исключению однопетлевого приближения в следующей теореме.

Теорема [112]. Рассмотрим любую суперсимметричную теорию в суперполевой формулировке без связей. Используя формализм фонового поля, можно выразить квантовые вклады в эффективное действие *выше однопетлевого* в виде интеграла по всему суперпространству от калибровочно-инвариантной функции фоновых потенциалов и полей материи.

Следовательно, контрчлены должны иметь вид

$$\Gamma = \int d^4x d^{4N}\theta f\left(A_N^c,\ X^c,\ D_M^c A_N^c,\ D^c X^c\right), \qquad (18.10)$$

где f — калибровочно-инвариантная функция фонового калибровочного потенциала $A_N{}^c$ и полей материи X^c. Ниже мы вернемся к обсуждению однопетлевого вклада.

План доказательства, основанного на отсутствии перенормировки [112], состоит просто в том, чтобы выяснить, допускает ли анализ размерностей существование контрчленов вида (18.10). Если нет размерных констант взаимодействия, это маловероятно, поскольку размерность меры $-4+2N$. Было показано [112], что теория Янга — Миллса с $N=2$ конечна во всех порядках теории возмущений выше однопетлевого; теория Янга — Миллса с $N=4$ должна быть конечна, если существует суперполевой формализм для $N=4$. В работе [113] доказана конечность теорий Янга — Миллса с $N=4$, что является результатом применения расширенного до $N=2$ суперполевого формализма, который обсуждался в гл. 15. Конечность ($N=2$)-теорий с глобальной суперсимметрией в порядках выше однопетлевого и критерий конечности в однопетлевом приближении были установлены в работе [117].

Теперь мы используем доводы об отсутствии перенормировки для ($N=2$)-теорий с глобальной суперсимметрией. Как говорилось в гл. 15, теория Янга — Миллса с $N=2$ представлена калибровочными потенциалами A_N, которые имеют ту же размерность, что и D_N, а именно 1, если $N=m$, и 1/2 в остальных случаях. Материя с $N=2$ представлена полями L, L^{ij}, $L^{ij|kl}$, которые имеют одинаковую размерность 1. Применяя приведенную теорему, мы найдем, что в приближениях более высоких, чем однопетлевое, локальные контрчлены в формализме фоно-

вого поля имеют вид

$$\Gamma = \int d^8\theta d^4x f(A_N,\ D_{Bl}A_N,\ L,\ L^{ij},\ L^{ijkl},\ \ldots) =$$

$$= \int d^8\theta d^4x\,(A_{Bi}D_{Aj}\ldots D_{Ck}A_{Dl} + LD_{Al}\ldots D_{Ck}L + \ldots). \qquad (18.11)$$

Однако по соображениям размерности все эти слагаемые недопустимы, и мы должны заключить, что $(N=2)$-теории с глобальной суперсимметрией конечны во всех порядках теории возмущений выше однопетлевого и имеют там соответственно нулевую β-функцию.

При интерпретации этого утверждения необходима осторожность в тех случаях, когда теории имеют однопетлевые расходимости, т. е. ненулевую однопетлевую β-функцию. При этом в высших членах разложения по петлям неизбежно будут присутствовать полюса вида $1/\varepsilon^n$, где $n>1$, которые являются следствием полюса $1/\varepsilon$ в однопетлевом приближении. Необходимо использовать процедуру минимальных вычитаний, чтобы высшие члены разложения по петлям не давали вкладов в β-функцию, поскольку вклады могут возникать за счет конечных контрчленов, включенных в расходящиеся однопетлевые графы.

Для того чтобы обсуждение было более конкретным, произведем в суперпространстве подсчет степеней слагаемых действия теории Янга — Миллса с $N=2$ и убедимся в конечности во всех порядках теории возмущений выше однопетлевого[1]). Препотенциал теории есть V^{ij}, а его размерность равна -2. В этом случае действие должно иметь вид

$$A = \int d^4x d^8\theta\,(VD^8V + V^2D^{12}V^2 + \ldots). \qquad (18.12)$$

Следовательно, пропагаторы имеют вид $D^{-8}\delta_{12}$, а вершины содержат множитель D^{12}, степень которого такая же, как у меры интегрирования по всему суперпространству. Внешние линии диаграмм в формализме фонового поля содержат выражения $A_{Bi} = D_{Bi}D^4V$ в приближениях выше однопетлевого. Пусть имеется E внешних линий, P пропагаторов и V кубических вершин.

Степень расходимости графа, содержащего только *кубические* вершины, равна

$$D = 4L - 4P - E\left(2+\frac{1}{2}\right) + 6V - 4L. \qquad (18.13)$$

Наличие последнего слагаемого объясняется тем, что каждая внутренняя петля включает восемь множителей D. Исполь-

[1]) P. Howe, P. West, неопубликованная работа.

зуя соотношение $3V = 2P + E$, находим

$$D = -E/2. \tag{18.14}$$

Приходим к заключению, что все графы, содержащие только кубические вершины, конечны во всех порядках теории возмущений выше однопетлевого. Читатель легко может обобщить этот результат, рассмотрев графы с любым типом вершин.

Вернемся к обсуждению упомянутого выше исключительного случая — однопетлевого приближения. Оно следует из того факта, что в расширенных теориях приходится обычно вводить поля дýхов, но в этих теориях действие с дýхами имеет некоторую остаточную инвариантность. Фиксируя такую инвариантность и вводя дополнительные дýхи для дýхов, найдем, что новые дýхи все еще обладают калибровочной инвариантностью. Этот процесс продолжается неограниченно, и мы имеем бесконечное число полей дýхов. К счастью, для суперсимметричных теорий Янга — Миллса дýхи второго и более высоких поколений взаимодействуют только с фоновыми полями; что касается полей материи, то даже их дýхи первого поколения не взаимодействуют с квантовыми полями. Следовательно, проблема затрагивает только однопетлевые графы. Чтобы сделать теорию определенной, следует оборвать бесконечную последовательность дýхов для дýхов. Это достигается ценой введения фонового калибровочного препотенциала, и, таким образом, его необходимость становится очевидной.

В теориях Янга — Миллса с $N = 2$ связь напряженности поля с препотенциалом дается формулой

$$W = \bar{\mathscr{D}}^{kl}\bar{\mathscr{D}}_{kl}\mathscr{D}^{ij}V_{ij}. \tag{18.15}$$

Следствием калибровочной инвариантности

$$\delta V^{ij} = \mathscr{D}_{Ak}\chi^{ijkA} + \mathscr{D}_{\dot{A}k}\chi^{ijk\dot{A}} \tag{18.16}$$

является инвариантность W, поскольку

$$D_{(i}{}^{A}D_{j}{}^{B}D_{k)}{}^{C} = 0. \tag{18.17}$$

Любой член, фиксирующий калибровку, в который входит потенциал V^{ik}, должен быть также инвариантным относительно калибровочного преобразования

$$\delta\chi^{(ijk)A} = \mathscr{D}_{Bl}\chi^{(ijkl)(AB)} \tag{18.18}$$

и так далее. Первоначально необходимость выделения однопетлевого исключения была отмечена в работе [112]; детальное обсуждение дано в работе [113].

18.3. Конечные ($N = 2$)-теории с глобальной суперсимметрией [117]

В предыдущем разделе мы видели, что ($N = 2$)-теории с глобальной суперсимметрией конечны, если они имеют нулевые однопетлевые β-функции. Для теории с $N = 1$, содержащей поля Янга — Миллса и мультиплеты Весса — Зумино ϕ_σ в представлении R_σ калибровочной группы, однопетлевая β-функция имеет вид [126]

$$\beta(g) = \frac{1}{(4\pi)^2} g^3 \left(\sum_\sigma T(R_\sigma) - 3C_2(G) \right). \qquad (18.19)$$

($N = 2$)-теория с глобальной суперсимметрией включает ($N = 2$)-теорию Янга — Миллса и ($N = 2$)-материю. В свою очередь ($N = 2$)-теория Янга — Миллса содержит калибровочные поля Янга — Миллса с $N = 1$ и один мультиплет Весса — Зумино ϕ в присоединенном представлении. С другой стороны, поля материи с $N = 2$ состоят из мультиплетов Весса — Зумино X_σ и Y_σ в представлениях R_σ и $\bar{R}_\sigma$ соответственно. Используя результат для однопетлевой β-функции (18.19), мы найдем, что для теорий с глобальной ($N = 2$)-суперсимметрией эта функция имеет вид

$$\beta(g) = \frac{2g^3}{(4\pi)^2} \left(\sum_\sigma T(R_\sigma) - C_2(G) \right). \qquad (18.20)$$

Имеется много случаев, когда $\beta(g)$ обращается в нуль. Например, в случае симметрии $SU(N)$ $C_2(N) = N$, а для фундаментального представления имеем $T(R) = 1/2$. Следовательно, теория будет конечна, если имеется $2N$ фундаментальных представлений.

Интересно, что большинство групп, которые были предложены для теории Великого объединения, принадлежат одной групповой последовательности [127]. Действительно, из пяти последовательностей, на которые были разделены Картаном все группы Ли [1]), это единственная конечная последовательность. Эта последовательность такова: E_8, E_7, E_6, $E_5 = SO(10)$, $E_4 = SU(5)$ и $E_3 = SU(3) \times SU(2)$. Тот факт, что группа $E_3 \times U(1)$ характерна для низкоэнергетической физики, весьма интересен, поскольку группа $U(1)$ является типичным остатком нарушения некоторых более высоких групп симметрий. Выясним теперь, какие из теорий с $N = 2$, имеющих приведенные выше калибровочные группы симметричны, конечны [128]. Для $E_4 = SU(5)$ имеем: $p + 3q + 7r = 10$, где p, q и r — числа гипермультипле-

[1]) Речь идет о классических сериях простых алгебр Ли $A_n \sim sl(n+1)$, $B_n \sim so(2n+1)$, $C_n \sim sp(2n)$, $D_n \sim so(2n)$ и исключительной серии E_8, E_7, E_6, F_4, G_2. — *Прим. ред.*

тов в представлениях $\mathbf{5}+\overline{\mathbf{5}}$, $\mathbf{10}+\overline{\mathbf{10}}$ и $\mathbf{15}+\overline{\mathbf{15}}$ соответственно. Для группы $SO(10)$ имеется p и q гипермультиплетов в представлениях $\mathbf{10}+\overline{\mathbf{10}}$ и $\mathbf{16}+\overline{\mathbf{16}}$ соответственно, причем $p+2q=8$. Группа E_6 приводит к конечной теории, если использовать четыре гипермультиплета в представлении $\mathbf{27}+\overline{\mathbf{27}}$, а для группы E_7 требуются три гипермультиплета в представлении $\mathbf{56}+\overline{\mathbf{56}}$. Для группы E_8 представление низшей размерности — присоединенное, в котором разрешены только три киральных поля. Заметим, что для групп $SO(10)$, E_6, E_7 и E_8 соответствующие конечные теории содержат наблюдаемые фермионы. В действительности они содержат три или более поколений частиц, а также их зеркальные партнеры. Конечно, не ясно, каким образом много поколений частиц могут оставаться безмассовыми, когда калибровочные симметрии спонтанно нарушены. Недавно было указано, что имеются другие возможные конечные теории, в которых поля материи с $N=2$ образуют CPT-самосопряженный мультиплет [145].

В работе [129] показано, что массовый член с $N=2$ не вносит расходимостей.

На данном этапе следует обсудить силу и слабости приведенных выше аргументов. Доказательство, основанное на аномалиях в его наиболее строгой форме, опирается на использование метода регуляризации с помощью старших производных. Но применение этого метода к теориям с $(N=2)$-суперпространством не разработано во всех деталях. Имеется вариант доказательства, основанный на аномалиях, использующий теорему Адлера — Бардина [125]. Этот вариант применялся для установления конечности класса суперсимметричных теорий с $N=1$ вплоть до двухпетлевого приближения [100, 101] [1]). В этом смысле аргументация, основанная на аномалиях, в сравнении с другими доводами имеет более широкую применимость.

Доказательства, основанные на отсутствии перенормировок, а в более детальной форме — на аномалиях, опираются на правила Фейнмана для суперграфов с $N=2$. Детальное описание этих правил не было дано, но ясно, что они должны привести к сильным инфракрасным расходимостям *вне массовой поверхности*, т. е. расходимостям вида $\int d^4k/k^4$. Для того чтобы придать смысл этому формализму, такие расходимости должны быть сначала регуляризованы, а затем устранены. В процессе вычислений можно потерять некоторые из симметрий теории. Например, добавление массовых членов нарушает калибровочную инвариантность, в то время как для системы, помещенной в пе-

[1]) См. примечание на с. 203. — *Прим. ред.*

риодический «ящик» [1]), нарушается лоренцева инвариантность. Не ясно, что инфракрасные расходимости не приведут к отклонению от теоремы об отсутствии перенормировки [130].

Другая проблема связана с тем, что, если поля материи с $N = 2$ принадлежат комплексному представлению, их необходимо удвоить для того, чтобы удовлетворить суперпространственной формулировке с ослабленным гипермультиплетом [117]. Однако прямым вычислением было установлено [119], что теории конечны в двухпетлевом приближении даже при нечетном числе комплексных представлений. Наконец, отсутствует детальное изучение того, как регуляризация однопетлевых расходимостей вне суперсимметричных схем может испортить диаграммы высших порядков, содержащие такие расходимости. Эти последние возражения относятся к аргументациям, основанным на аномалиях и на теореме об отсутствии перенормировки.

Недостаточно обсуждались трудности, возникающие при описании в формализме светового конуса. Далеко не ясно, как восстановить лоренцеву инвариантность. Вероятно, следует убедиться, что справедливы нелинейные тождества Уорда, соответствующие лоренцевой инвариантности. Но это может потребовать добавления в теорию конечных локальных контрчленов. Подобную аргументацию необходимо еще распространить на теории с $N = 2$.

Мы подчеркнули отдельные не разработанные вопросы не потому, что доводы в пользу конечности теории вызывают сомнения, а чтобы показать, что утверждения не являются доказательством в математическом смысле и что есть простор для дальнейшей работы.

Возможно, аргументация, основанная на отсутствии перенормировки и аномалиях, будет применена к двумерным расширенным σ-моделям, которые также обладают замечательными свойствами конечности [131]. Но, с другой стороны, упомянутая аргументация использует размерный анализ, и легко видеть, что для теорий супергравитации, содержащих размерные константы взаимодействия, она может отказать. Обзор свойств расходимостей в теориях супергравитации см. в работах [118, 132]. Интересные сравнительно недавние результаты в этом контексте получены в работе [133].

18.4. Явные нарушения суперсимметрии и конечность

Выясним теперь для большого класса конечных теорий, о которых речь шла в предыдущем разделе, может ли по-прежнему

[1]) L. Susskind, частное сообщение.

сохраниться конечность при добавлении членов, мягко нарушающих симметрию. Под «мягкими» слагаемыми мы понимаем слагаемые размерности 3 или меньше, являющиеся калибровочно-инвариантными и сохраняющими четность. Включение «мягкой» добавки в любой граф снижает его степень расходимости, но дополнительные члены также явно нарушают суперсимметрию и внутреннюю симметрию, которые ответственны за конечность этих весьма особых теорий. Мы найдем, что не все «мягкие» слагаемые сохраняют конечность, а только их определенные комбинации.

Первыми обнаруженными «мягкими» слагаемыми, сохраняющими конечность, были $(N=1)$-суперсимметричные массовые члены к теории Янга — Миллса с $N=4$ [134]. Общий анализ, дающий необходимые и достаточные условия конечности при добавлении мягкого слагаемого в теорию Янга — Миллса с $N=4$, представлен в работе [135], где использовалась шпурионная техника. Но некоторые авторы [136], используя при вычислениях формализм светового конуса, независимо обнаружили члены, мягко нарушающие суперсимметрию и сохраняющие конечность в теории Янга — Миллса с $N=4$; анализ компонентных полей, также приведший к некоторым мягким добавкам, сохраняющим конечность, дан в работе [137].

Мягкое слагаемое вида (A^2-B^2), обнаруженное в работах [135, 136], позднее также было найдено в работе [138], где использовалось обобщение формализма светового конуса, представленного в работе [136].

Анализ необходимых и достаточных условий того, что мягкая добавка сохраняет конечность в классе теорий с $N=2$, проведен в работе [128] с помощью шпурионной техники. Некоторые из этих результатов были также обнаружены при помощи вычислений в формализме компонентных полей [139].

Мы будем следовать вычислениям, приведенным в работах [128, 135], и воспользуемся техникой шпурионов [140] для изучения расходимостей, вызванных мягкими слагаемыми. Начнем с общей $(N=1)$-суперсимметричной теории, состоящей из полей Янга — Миллса с $N=1$, V и мультиплета Весса — Зумино ϕ. Обозначим компонентные поля мультиплета ϕ в x-пространстве через $(A,\ B,\ \chi_A,\ F,\ G)$, а поля мультиплета Янга — Миллса с $N=1$ через $(A_\mu,\ \lambda,\ D)$.

В качестве примера рассмотрим добавление слагаемого $\mu^2(A^2-B^2)$ к суперсимметричному действию. Для того чтобы использовать суперполевой формализм, в частности правила Фейнмана для суперграфов, запишем эту добавку в суперпространстве, введя суперполе шпуриона

$$S=\mu^2\theta^2, \tag{18.21}$$

где $\theta^2 = \theta^4\theta_A$, а μ^2 — постоянная. Суперполе S киральное в том смысле, что $D_A S = 0$, но это не скалярное суперполе, так как оно не преобразуется правильным образом при преобразованиях суперсимметрии. Добавление члена $\mu^2(A^2 - B^2)$ обусловлено включением в действие слагаемого

$$\int d^4x d^2\theta S\phi^2 + \text{эрмит. сопр.} = \int d^4x \mu^2 (A^2 - B^2). \qquad (18.22)$$

Теперь можно вычислять квантовые эффекты, используя фейнмановские правила для суперграфов, которые применялись выше. Имеем те же пропагаторы и вершины, что и раньше, кроме добавочной вершины, заданной выражением (18.22). Суперполе S представляет собой только внешнее поле, а дополнительная вершина имеет лишь один множитель $-\frac{1}{4}\bar{D}^2$, связанный с одной из двух киральных линий, как показано на рис. 18.1. Назначение множителей $\bar{D}^2$ в том, чтобы вершине сопоставить интегрирование по всему $(N = 1)$-суперпространству. Следовательно, теорема о «неперенормировке» еще верна. Вычисляя размерности, найдем, что размерность суперполя S равна 1. Шпурионы, необходимые для введения всех других возможных слагаемых, мягко нарушающих суперсимметрию, перечислены в табл. 18.1.

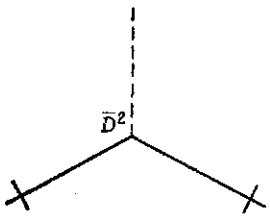

Рис. 18.1.

В табл. 18.1 μ_1, m, n, ξ и e — постоянные; групповые индексы не приведены, но подразумеваются. Суперполя V необходимы для сохранения калибровочной инвариантности и важны для получения правильных ответов при вычислениях в суперпространстве. Их компонентные выражения для простоты вычисляются в калибровке Весса — Зумино.

Все приведенные выше вставки порождают новые вершины, которые могут быть использованы для построения фейнмановских суперграфов. Например, вставка $\chi^A\chi_A$ дает дополнительные вершины, изображенные на рис. 18.2.

Любые расходимости, вызванные этими вставками, будут удовлетворять теореме о «неперенормировке» и, следовательно, будут иметь общий вид

$$\int d^4x d^4\theta S\,(D^2S)^r\,U\,(D^2\bar{D}^2U)^p\,f(\phi,\ V,\ D\phi,\ \ldots), \qquad (18.23)$$

где S — киральное суперполе шпуриона, $S = s\theta^2$, U — общее суперполе шпуриона, $U = u\theta^2\bar{\theta}^2$, а f — калибровочно-инвариантная функция от ϕ и V.

Таблица 18.1

Шпурион	Добавка к действию	Размерность шпуриона
$U_1 = \mu_1^2\theta^2\bar{\theta}^2$	$\int d^4x d^4\theta U_1 \bar{\phi}(e^{gV})\,\phi = \int d^4x \mu_1^2\,(A^2 + B^2)$	0
$S_1 = \theta^2\xi$	$\int d^4x\, d^4\theta S_1\phi^3 +$ эрмит. сопр. $= \int d^4x \xi\,(A^3 - 3AB^2)$	0
$M = \theta^2\bar{\theta}^2 m$	$\int d^4x\, d^4\theta M \mathscr{D}^A\phi \mathscr{D}_A\phi +$ эрмит. сопр. $=$ $= \int d^4x m\chi^A\chi_A +$ эрмит. сопр.	-1
$N = \theta^2\eta$	$\int d^4x\, d^2\theta N W^A W_A +$ эрмит. сопр. $=$ $= \int d^4x \eta\lambda^A\lambda_A +$ эрмит. сопр.	0
$E = \theta^2\bar{\theta}^2 e$	$\int d^4x\, d^4\theta E\,(e^{gV}\phi e^{-gV}\bar{\phi}^2) +$ эрмит. сопр. $=$ $= \int d^4x eA\,(A^2 + B^2)$	-1

Для детального пояснения вернемся к случаю добавки вида $A^2 - B^2$. Индуцированная расходимость имеет следующий вид:

$$\int d^4x d^4\theta S\,(D^2S)^r f(\phi, V,\ D\phi,\ \ldots). \tag{18.24}$$

Так как размерность суперполя S равна 1, единственно возможная расходимость имеет вид

$$\int d^4x d^4\theta S\bar{\phi}. \tag{18.25}$$

Но это слагаемое калибровочно-инвариантно только в том случае, когда ϕ является калибровочным синглетом. Следовательно, поскольку калибровочные синглеты отсутствуют, вставка A^2—B^2 не приводит к новым типам расходимостей. Воспользовавшись аргументацией Вайнберга [156], основанной на доказательстве по индукции, предположим, что для n петель отсутствуют индуцированные расходимости; тогда индуцированные расходимости в $n+1$ петле возникают либо как примитивная расходимость всей диаграммы, либо как расходимость поддиаграмм. Последние отсутствуют по предположению, в то время как первый тип расходимостей отсутствует, так как нет зависящих от S расходимостей. Поэтому приходим к следующему результату.

Теорема. В любой суперсимметричной теории с $N=1$ член A^2-B^2 не приводит к добавочным расходимостям, если в теории нет калибровочных синглетов.

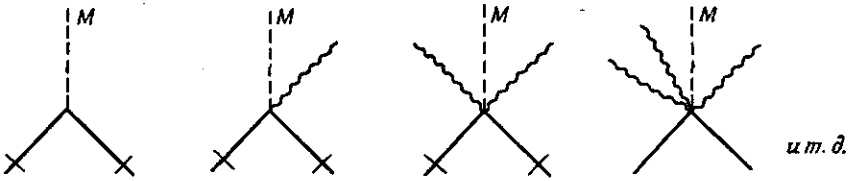

Рис. 18.2.

Рассмотрим теперь добавку A^2+B^2. Результирующая индуцированная расходимость может иметь только вид

$$\int d^4x d^4\theta U\bar{\phi}\phi + \left(\int d^4x d^4\theta U\phi^2 + \text{эрмит. сопр.}\right) \qquad (18.26)$$

Составляющие ее расходимости имеют вид A^2+B^2 и A^2-B^2, но последняя разность часто запрещена соображениями симметрии.

Вставка $\bar{\chi}\chi$ может приводить в общей теории к расходимостям вида

$$\int d^4x d^4\theta\,[U(\phi\bar{\phi}^2) + U\phi D^2\phi + U(\phi^3) + U(D^2\bar{D}^2U)\,\bar{\phi}\phi + \\ + U(D^2\bar{D}^2U)\,\bar{\phi}^2 + \text{эрмит. сопр.}] \qquad (18.27)$$

и возможным линейным слагаемым.

Читатель может ознакомиться с расходимостями, производимыми другими добавками, по работе [135].

Вернемся теперь к нашей задаче и выясним, какие из мягких слагаемых сохраняют конечность ($N=2$)-теорий с глобальной суперсимметрией. При описании с помощью ($N=1$)-суперполевого формализма теорию Янга — Миллса с $N=2$ составляют поле Янга — Миллса с $N=1$, V и один мультиплет Весса — Зумино ϕ в присоединенном представлении. В то же время ($N=2$)-материя состоит из σ-киральных мультиплетов $X^a{}_\sigma$ в представлении R_σ и $Y_{a\sigma}$ в представлении $\bar{R}_\sigma$. Индекс a параметризует элементы пространства представления R_σ. Действие ($N=2$)-теории с глобальной суперсимметрией, записанное в этих ($N=1$)-суперполях, имеет вид

$$A = \mathrm{Tr}\int d^4x d^2\theta \frac{W^A W_A}{64g^2} + \int d^4x d^4\theta\,[\bar{\phi}^s (e^{gV})_s{}^t \phi_t + \bar{X}_{a\sigma}(e^{gV^\sigma})_b{}^a X_\sigma{}^b + \\ + Y_{a\sigma}(e^{-gV^\sigma})^a{}_b\,\bar{Y}^b{}_\sigma] + g\int d^4x d^2\theta \phi_s (R^\sigma{}_s)^a{}_b X^b{}_\sigma Y_{a\sigma} + \text{эрмит. сопр.} + \\ + \text{слагаемые, фиксирующие калибровку,} + \text{духи.} \qquad (18.28)$$

В этом выражении $(V^\sigma)^a{}_b = V^s (R_s{}^\sigma)^a{}_b$ и $(R_s{}^\sigma)^a{}_b$ — генераторы группы G в представлении R^σ. Для присоединенного представления, например, генераторы T_s имеют вид

$$(T_s)_{lk} = -f_{slk}, \tag{18.29}$$

где f_{slk} — структурные константы группы G. Напомним, что эти теории конечны тогда и только тогда, когда $C_2(G) = \sum_\sigma T(R^\sigma)$.

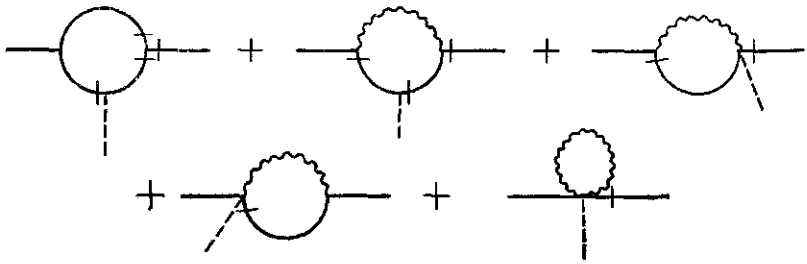

Рис. 18.3.

Из нашего предыдущего рассуждения ясно, что добавление слагаемого вида $A^2 - B^2$ сохраняет конечность. Рассмотрим добавление члена $A^2 + B^2$, который образуется за счет слагаемых

$$\int d^4x d^4\theta \left[U_1 \bar{\phi}^s (e^{gV})_s{}^k \phi_k + U_{2\sigma} \bar{X}_{a\sigma} (e^{gV^\sigma})^a{}_b X^b{}_\sigma + U_{3\sigma} Y_{a\sigma} (e^{-gV^\sigma})^a{}_b \bar{Y}^b{}_\sigma\right], \tag{18.30}$$

где шпурионные суперполя имеют вид

$$U_1 = \mu_1 \theta^2 \bar{\theta}^2, \quad U_{i\sigma} = \mu_{i\sigma} \theta^2 \bar{\theta}^2, \quad i = 2, 3. \tag{18.31}$$

Индуцированная расходимость может иметь только следующий общий вид:

$$\int d^4x d^4\theta U (\bar{\phi}\phi + \bar{X}X + Y\bar{Y}), \tag{18.32}$$

поскольку исключаются члены ϕ^2, X^2 или Y^2, не инвариантные относительно преобразований симметрии

$$\phi \to e^{2i\alpha}\phi, \quad X \to e^{-i\alpha}X, \quad Y \to e^{-i\alpha}Y. \tag{18.33}$$

Действие с $N = 2$ и шпурионная вставка (18.30) инвариантны относительно преобразований (18.33).

Рассмотрим теперь эти индуцированные расходимости на однопетлевом уровне. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 18.3. Такие графы проще всего вычислить, пользуясь следующими рассуждениями. Рассмотрим любой пропагатор, содержащий вставку U и являющийся частью большего графа (рис. 18.4). Используя правила Фейнмана для суперграфов,

можно вычислить эту часть графа и найти, что она дает вклад

$$\int d^4\theta_2 \left(-\frac{1}{4}\bar{D}_1^2\right)\left(-\frac{1}{4}D_2^2\right)\frac{\delta_{12}}{k^2}U(2)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}_2^2\right)\frac{\delta_{23}}{k^2} \quad (18.34)$$

в полное выражение для графа. Интегрируя по частям и пользуясь тем, что никакое бесконечное выражение не может содержать операторы D, действующие слева на U, найдем бесконечную часть графа, которая содержит интегрирование

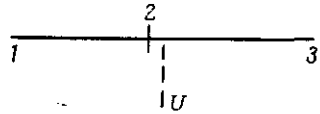

Рис. 18.4.

$$\int d^4\theta_2 \frac{\delta_{12}}{k^2}U(2)\frac{\bar{D}_2^2 D_2 \bar{D}_2^2}{16\cdot(-4)}\frac{\delta_{23}}{k^2} = -\int d^4\theta_2\delta_{12}U(2)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}_2^2\right)\frac{\delta_{23}}{k^2} =$$

$$= -U(1)\left(-\frac{1}{4}\bar{D}_1^2\right)\frac{\delta_{13}}{k^2}. \quad (18.35)$$

Иными словами, граф с U-вставкой равен полю $(-U)$, умноженному на граф без U-вставки.

Аналогично найдем, что U-вставка в вершину $\bar{\phi}(gV)^n\phi$ дает граф, который равен полю $(+U)$, умноженному на граф без U-вставки.

Для внешних линий $X\bar{X}$ однопетлевые графы приведены на рис. 18.5. Используя приведенные выше соображения и условие

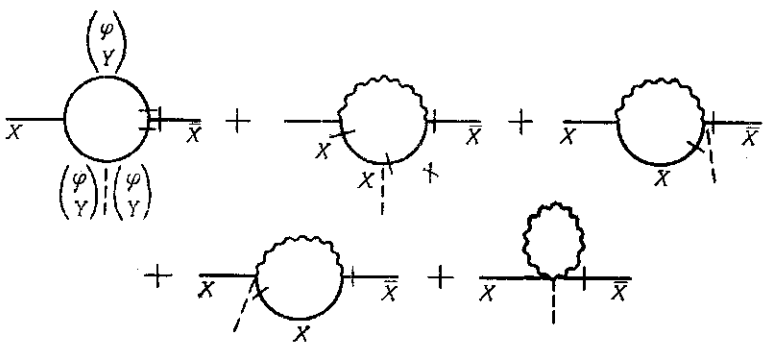

Рис. 18.5.

однопетлевой конечности, которое представлено ниже в виде диаграмм на рис. 18.6, найдем индуцированную расходимость,

имеющую вид

$$C(R)\int d^4xd^4\theta X_{a\sigma}\bar{X}^{a\sigma}[(-U_1-U_{3\sigma})-(-U_{2\sigma})-(U_{2\sigma})-(U_{2\sigma})+(0)]=$$
$$=-C(R)\int d^4xd^4\theta X_{a\sigma}\bar{X}^{a\sigma}\{U_1+U_{2\sigma}+U_{3\sigma}\}. \qquad (18.36)$$

Заметим, что последний граф с векторной петлей обращается в нуль, поскольку не содержит четырех множителей D. Следо-

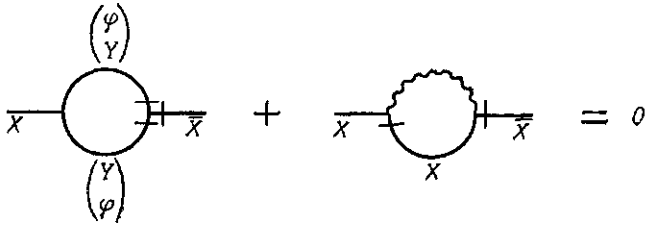

Рис. 18.6.

вательно, графы с внешними линиями $X\bar{X}$ не имеют расходимостей в однопетлевом приближении, если выполнено условие

$$U_1+U_{2\sigma}+U_{3\sigma}=0, \quad \forall\sigma. \qquad (18.37)$$

Графы с внешними линиями $\bar{Y}Y$ также не содержат расходимостей вследствие симметрии $X\leftrightarrow Y$, $U_{2\sigma}\leftrightarrow U_{3\sigma}$. На самом деле однопетлевые расходимости отсутствуют и для графов с внешними линиями $\bar{\phi}\phi$, когда выполнены условие (18.37) и условия конечности для теорий с $N=2$ (они приведены ниже).

Мы можем подвести итог всему сказанному, утверждая, что добавка A^2+B^2 сохраняет конечность на однопетлевом уровне тогда и только тогда, когда справедливы преобразования (12.17). Непосредственно обобщая это обсуждение, можно показать, что слагаемое A^2+B^2 сохраняет конечность во всех порядках теории возмущений, если выполнено условие (18.37). Доказательство читатель найдет в работе [128].

Для теорий Янга — Миллса с $N=4$ имеем только один тип полей материи с $N=2$ в присоединенном представлении. Условие конечности принимает вид $U_1+U_2+U_3=0$, что эквивалентно равенству

$$S\,\mathrm{Tr}\,m^2=\sum_i m_i^2(-1)^{2i+1}=0.$$

Но в теориях с $N=2$ в общем случае $S\,\mathrm{Tr}\,m^2$ не равно нулю.

Добавление всех возможных слагаемых, мягко нарушающих суперсимметрию, и вызываемые ими однопетлевые расходимости, включая расходимости, обусловленные смешанными вставками, рассмотрены в работе [107]. Ниже приведено схематиче-

ское описание этого анализа. Однопетлевые расходимости представлены в табл. 18.2, где использованы следующие обозначения: A, B, χ — физические компонентные поля каких-либо киральных полей $X^a{}_\sigma$, $Y_{a\sigma}$, ϕ, а λ — спинор в мультиплете Янга — Миллса. Галочками отмечено появление расходимостей. Рассмотрим добавление вставки $\bar{\chi}\chi$; это порождает расходимость $A(A^2+B^2)$. Единственный способ устранить расходимость — добавить подходящее мягкое слагаемое $A(A^2+B^2)$ и выбрать коэффициент перед ним так, чтобы бесконечности взаимно уничтожились. Если это сделано, то мы обнаружим, что расходимости вида A^2-B^2 автоматически сокращаются. Остающиеся расходимости A^2+B^2 не сокращаются, но их можно уничтожить добавлением подходящего мягкого слагаемого A^2+B^2. Результирующий набор мягких вставок, не порождающий расходимостей, имеет вид

Таблица 18.2

Вставка	Порождаемые расходимости					
	A^2-B^2	A^2+B^2	$\bar{\chi}\chi$	$\bar{\lambda}\lambda$	$A(A^2+B^2)$	A^3-3AB^2
A^2-B^2						
A^2+B^2		V				
$\bar{\chi}\chi$	V	V			V	
$\bar{\lambda}\lambda$	V	V				V
$A(A^2+B^2)$	V	V			V	
A^3-3AB^2	V	V				V

$$m^2(A^2+B^2)+m\bar{\chi}\chi+mA(A^2+B^2).$$

Проверка коэффициентов показывает, что это не что иное, как $(N=1)$-суперсимметричный массовый член, который может быть записан в виде

$$m\int d^2\theta d^4x\,\mathrm{Tr}\,\phi^2+\text{эрмит. сопр.} \tag{18.38}$$

для поля ϕ и аналогично для полей X_σ и Y^σ.

Альтернативный набор мягких вставок, также не приводящий к появлению расходимостей, получают при добавлении массового слагаемого к калибрино [1]) $\bar{\lambda}\lambda$. Возникающая расходи-

[1]) Автор использует термин «калибрино» для суперпартнера калибровочного бозона. Суперпартнеры известных частиц (называемые так же, как обычные частицы, с добавлением окончания «ино») имеют те же квантовые числа по группе внутренней симметрии, но отличаются от них лишь спином. — *Прим. ред.*

мость $A^3 - 3AB^2$ может быть устранена только добавлением члена того же вида, т. е. $A^3 - 3AB^2$ с точно подобранным коэффициентом. Расходимость $A^2 - B^2$ снова автоматически устраняется, и остается расходимость $A^2 + B^2$, которую можно сократить добавлением подходящего слагаемого $A^2 + B^2$. Результирующая комбинация членов имеет общий вид

$$m\bar{\lambda}\lambda + m^2(A^2 + B^2) + m(A^3 - 3AB^2). \qquad (18.39)$$

Хотя это не массовый член с $N = 1$, но он подобен ему в том смысле, что связан с массовым слагаемым (12.30) соотношением $O(2)$-инвариантности. Поэтому можно ожидать, что указанная добавка сохраняет конечность.

Суперсимметричные массовые слагаемые с $N = 1$ сохраняют конечность во всех порядках теории возмущений. Это следует из того факта, что слагаемое вида $\int d^4x d^2\theta m\phi^2$ и аналогичные слагаемые для полей X и Y не могут быть образованы, поскольку противоречат теореме о «неперенормировке». Можно также не сомневаться, что добавки $(N = 1)$-теории, подобные массовым, сохраняют конечность во всех порядках теории возмущений, поскольку их связывают с $(N = 1)$-массовыми слагаемыми преобразования $O(2)$-вращений.

Подведем итоги результатам этого раздела, перечислив необходимые и достаточные условия сохранения конечности $(N = 2)$-теорий. Мягкие добавки должны выражаться в виде следующих линейных комбинаций:

1) суперсимметричных массовых слагаемых с $N = 1$,
2) слагаемых, подобных массовым, с $N = 1$ (т. е. $(m\bar{\lambda}\lambda + \ldots)$),
3) любых массовых слагаемых вида $A^2 - B^2$,
4) массовых слагаемых вида $A^2 + B^2$, если выполнено условие конечности

$$U_1 + U_{2\sigma} + U_{3\sigma} = 0, \quad \forall\sigma. \qquad (18.40)$$

Можно также рассмотреть, сохраняют ли мягкие слагаемые конечность теорий с $N = 1$, для которых конечность в двухпетлевом приближении была показана в работах [100, 101]. Используя аргументы, аналогичные представленным здесь для случая $N = 2$, найдем, что из перечисленных выше слагаемых слагаемые первого, третьего и четвертого типов сохраняют конечность в двухпетлевом приближении [100], а совсем недавно было показано, что слагаемые третьего типа сохраняют конечность в однопетлевом приближении [157]. Реалистические модели с мягко нарушенной $(N = 2)$-суперсимметрией рассмотрены в работе [158].

19. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ И РЕАЛИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В этой главе мы рассмотрим некоторые общие свойства современных реалистических моделей суперсимметрии. В частности, мы хотим объяснить, почему суперсимметрия должна быть нарушена при некотором промежуточном масштабе энергий (порядка 10^{10} ГэВ) и почему так желательно включить в теорию супергравитацию. Мы сделаем это, обсуждая возможные пути нарушения суперсимметрии; оказывается, что имеются жесткие теоретические ограничения на то, как может быть нарушена суперсимметрия, и на результирующий спектр масс. Определенная форма современных реалистических моделей объясняется необходимостью построения теории, в которой механизм нарушения суперсимметрии приводит к достаточно большим массам не обнаруженных экспериментально скалярных суперпартнеров кварков и лептонов.

Суперсимметрия нарушена тогда и только тогда, когда суперзаряд Q_α не уничтожает вакуумное состояние:

$$Q_\alpha |0\rangle \neq 0. \tag{19.1}$$

Для вариации данного поля ϕ можно написать

$$\langle 0 | \delta\phi | 0\rangle = \langle 0 | [\phi, Q_\alpha\} | 0\rangle, \tag{19.2}$$

поэтому суперсимметрия нарушена тогда и только тогда, когда

$$\langle 0 | \delta\phi | 0\rangle \neq 0 \quad \text{для некоторых } \delta\phi. \tag{19.3}$$

Рассмотрим поля (A, B, χ_α, F, G) модели Весса — Зумино; лоренц-инвариантность вакуума означает, что $\langle\chi_\alpha\rangle = \langle\partial_\mu A\rangle = \langle\partial_\mu B\rangle = 0$, поэтому единственная вариация поля с ненулевым вакуумным средним имеет вид

$$\langle 0 | \delta\chi_\alpha | 0\rangle = ((\langle F\rangle + i\gamma_5\langle G\rangle)\varepsilon)_\alpha. \tag{19.4}$$

Аналогично для полей суперсимметричной теории Янга — Миллса с $N = 1$ единственная вариация поля с ненулевым вакуумным средним имеет вид

$$\langle 0 | \delta\lambda_\alpha | 0\rangle = i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta \varepsilon_\beta \langle 0 | D | 0\rangle. \tag{19.5}$$

Следовательно, в любой теории глобальная суперсимметрия нарушена тогда и только тогда, когда одно или более из вспомога-

тельных полей (F, G или D) приобретают ненулевое вакуумное среднее.

Как и в случае спонтанного нарушения любой глобальной симметрии, можно установить существование безмассовой (голдстоуновской) моды, в данном случае голдстоуновского спинора. Если известны вакуумные средние вспомогательных полей, то может быть выделен и голдстоуновский спинор. Спиноры можно переопределить так, чтобы только один из них имел ненулевое вакуумное среднее; именно он и является голдстоуновским спинором. Это рассмотрение справедливо в случае нарушения суперсимметрии как в квантовом, так и в классическом приближении. Рассмотрим теперь более подробно последний случай.

19.1. Нарушение суперсимметрии в приближении древесных диаграмм

Наиболее общая перенормируемая модель с глобальной ($N = 1$)-суперсимметрией представлена в терминах компонентных полей в (11.44). Потенциал на уровне древесных графов имеет вид

$$V = |f^a|^2 + \frac{1}{2}(D^s)^2, \tag{19.6}$$

где

$$f_a{}^* = m_{ab}z^b + d_{abc}z^bz^c + \mu_a, \quad D^s = -g(T^s)^a{}_b z_a{}^* z^b + \xi^s. \tag{19.7}$$

Для добавления в f^a и D^s членов, не зависящих от полей, требуется соответственно, чтобы существовал синглет киральных полей или чтобы калибровочная группа содержала группы $U(1)$. Ясно, что потенциал V неотрицательно определен, поэтому, вспоминая обсуждение предыдущего раздела, заключаем, что суперсимметрия нарушена тогда и только тогда, когда V больше нуля. К этому результату можно прийти и непосредственно, используя алгебру суперсимметрии. Энергию P_0 можно представить в следующем виде:

$$\sum_A \{(Q^{Ai})^* Q^{Ai} + Q^{Ai}(Q^{Ai})^*\} = 2P_0, \quad \forall i. \tag{19.8}$$

Поэтому вакуумная энергия дается выражением

$$V = \langle 0|P_0|0\rangle = \sum_A \{\|Q^{Ai}|0\rangle\|^2 + \|(Q^{Ai})^*|0\rangle\|^2\}, \tag{19.9}$$

и суперсимметрия нарушена тогда и только тогда, когда $V > 0$.

Анализируя выражение (19.9), заключаем, что если хотя бы одна из симметрий не нарушена, т. е. $Q^{A1}|0\rangle = 0$, то вакуумная энергия обращается в нуль (т. е. $\langle 0|P_0|0\rangle = 0$). Но в этом

случае

$$Q^{Ai}|0\rangle = 0, \quad \forall i, \tag{19.10}$$

и все суперзаряды не нарушают суперсимметрию. Этот результат резюмирует следующая теорема.

Теорема [98]. В любой теории с расширенной глобальной суперсимметрией либо нарушены все суперсимметрии, либо не нарушена ни одна из них.

Исследуя равенства (19.7), мы видим, что если в действии нет линейных по вспомогательным полям членов (т. е. $\mu^\alpha = \xi^S = 0$), то абсолютный минимум потенциала можно найти, положив равными нулю вакуумные средние всех полей с нулевым спином (т. е. $\langle z^a \rangle = 0$). По существу суперсимметрия не нарушена в этих моделях. Часто случается, что абсолютный минимум вырожден. Другими словами, существуют полевые конфигурации с ненулевыми вакуумными средними, которые также дают $V = 0$. В этом последнем случае, хотя суперсимметрия не нарушена, может быть нарушена калибровочная инвариантность.

Ясно, что добавление линейного по вспомогательному полю слагаемого к действию не ведет в общем случае к нарушению суперсимметрии. Нередко поля материи могут приобретать вакуумные средние, что, однако, не приводит к появлению ненулевых средних от вспомогательных полей.

Тем не менее суперсимметрию можно нарушить, выбирая разумно представления полей материи и добавляя подходящие линейные слагаемые. Для этого имеются два хорошо известных механизма, приведенные ниже, которые соответствуют возможности добавления линейных слагаемых в секторе полей материи или в секторе калибровочных полей.

Механизм Файе — О'Рэйферти [141]

Рассмотрим модель Весса — Зумино, содержащую только три киральных мультиплета ϕ_i $(i = 1, 2, 3)$ и имеющую суперпотенциал

$$W(\phi_i) = \lambda\phi_1\phi_2 + g\phi_3(\phi_2^2 - m^2). \tag{19.11}$$

Очевидно, суперсимметрия должна быть нарушена, так как

$$f_1 = \frac{\partial W}{\partial z_1} = \lambda z_2, \quad f_2 = \frac{\partial W}{\partial z_2} = \lambda z_1 + g z_2 z_3, \quad f_3 = \frac{\partial W}{\partial z_3} = g(z_2^2 - m^2) \tag{19.12}$$

и невозможно выбрать такие z_i, чтобы все f_i были одновременно равны нулю для любого i. Потенциальная энергия дается вы-

ражением

$$V = \lambda^2 |z_2|^2 + g^2 |z_2^2 - m^2|^2 + |\lambda z_1 + 2g z_2 z_3|^2. \quad (19.13)$$

Она имеет минимум, когда выполнены условия

$$\lambda^2 z_2 + 2g^2 z_2^* (z_2^2 - m^2) = 0, \quad (\lambda z_1 + 2g z_2 z_3) = 0. \quad (19.14)$$

Ясно, что значение минимума вырождено и определено соотношением

$$\lambda z_1 + 2g z_2 z_3 = 0, \quad (19.15)$$

где величина z_2 удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 z_2 + 2g^2 z_2^* (z_2^2 - m^2) = 0. \quad (19.16)$$

Случай вырождения минимума потенциальной энергии в суперсимметричной теории не является необычным. Хотя квантовые поправки не снимают это вырождение при условии, что суперсимметрия не нарушена на древесном уровне [89], в данном случае мы ожидаем устранения вырождения, поскольку на древесном уровне суперсимметрия нарушена. Было высказано предположение [98, 142, 143], что значения вакуумных средних вырожденных полей могут быть очень велики, а это может быть использовано для решения проблемы иерархии.

Такой механизм можно использовать в калибровочной теории для получения спонтанного нарушения калибровочной инвариантности.

Механизм Файе — Илиопулоса [144]

Рассмотрим действие суперсимметричной квантовой электродинамики (11.43). Добавим к нему массовый член и член Файе — Илиопулоса

$$\left[-\frac{m}{2}(S_1 \cdot S_1) + (1 \leftrightarrow 2)\right]_F + [\xi V]_D =$$

$$= \int d^4x \left\{\left[m\left(F_1 A_1 + G_1 B_1 - \frac{1}{2}\bar{\chi}_1 \chi_1\right) + (1 \leftrightarrow 2)\right] + \xi D\right\}. \quad (19.17)$$

Последнее слагаемое инвариантно, поскольку поле D не меняется при калибровочных преобразованиях. Выражения для вспомогательных полей имеют вид

$$F_i = -mA_i, \quad G_i = -mB_i, \quad i = 1, 2,$$
$$D = -(g(A_1 B_2 - B_2 A_1) + \xi). \quad (19.18)$$

В этом случае также нет значений полей нулевого спина, при которых вспомогательные поля обращались бы в нуль; таким образом, суперсимметрия должна быть нарушена. Рекомендуем читателю ознакомиться со спектром масс в этих двух моделях по оригинальным работам.

Выскажем теперь некоторые общие соображения, касающиеся масс, рождающихся благодаря этим механизмам нарушения суперсимметрии. Важную роль играет величина [1])

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 = \sum_j (-1)^{2j}(2j+1)\,m_j^2, \tag{19.19}$$

представляющая собой сумму расщепленных масс в каждом супермультиплете. В теории, где единственные вспомогательные поля, имеющие ненулевые вакуумные средние, принадлежат киральным мультиплетам, имеем соотношение

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 = 0. \tag{19.20}$$

Этот результат [145] является следствием того факта, что в таких теориях расщепление масс вызвано слагаемыми вида

$$\int d^4x d^2\theta \langle\phi\rangle \phi^2 + \text{эрмит. сопр.} = \int \langle F\rangle (A^2 - B^2)\, d^4x, \tag{19.21}$$

поэтому оно в каждом мультиплете обращается в нуль. С такими мультиплетами связана трудность, заключающаяся в том, что масса одного из скаляров меньше массы фермиона, а масса другого больше.

В общей теории имеем равенство [145]

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 = -2\xi_a \langle D^a\rangle\,\mathrm{Tr}\,Y_a. \tag{19.22}$$

Здесь Y_a — генераторы дополнительной группы $U(1)$, которую содержит калибровочная группа, $\langle D^a\rangle$ — вакуумные средние соответствующих калибровочных вспомогательных полей, а $\mathrm{Tr}\,Y_a$ — сумма зарядов группы $U(1)$ кирального мультиплета. Эти расщепления масс вызывает слагаемое

$$\sum_a \int d^8z \bar{\phi}\langle V^a\rangle \phi Y_a = \int \sum_a Y_a \langle D^a\rangle (A^2 + B^2)\, d^4x. \tag{19.23}$$

Проблема, которая возникает в связи с механизмом Файе — Илиопулоса, состоит в появлении аномалий, связанных с группами $U(1)$, необходимыми для нарушения суперсимметрии. Калибровочных аномалий не будет, если выполняется соотношение

$$\mathrm{Tr}\,Y_a^3 = 0. \tag{19.24}$$

Но имеются также смешанные аномалии, возникающие из треугольного графа с одной калибровочной и двумя гравитационными вершинами. Эти аномалии исчезают, если и только если выполнено условие

$$\mathrm{Tr}\,Y_a = 0. \tag{19.25}$$

---

[1]) В этой формуле фигурирует суперслед — сумма диагональных элементов матрицы со знаками + и — для бозонных (четных) и фермионных (нечетных) индексов соответственно (см., например, [52, 202]). — *Прим. ред.*

Для группы $U(1)$ стандартной модели имеем $\operatorname{Tr} Y_a = 0$, что позволяет избежать смешанных калибровочных аномалий групп $U(1)$ и $SU(2)$, а также смешанных гравитационных и $U(1)$-аномалий. Следовательно, группа $U(1)$, если она свободна от аномалий, не дает вклада в $S \operatorname{Tr} M^2$, и приведенное выше обсуждение показывает, что для свободных от аномалий теорий в приближении древесных графов выполняется равенство

$$S \operatorname{Tr} M^2 = 0. \tag{19.26}$$

Заметим, что естественно иметь $\operatorname{Tr} Y_a = 0$, так как это гарантирует, что квантовые поправки не приводят к возникновению члена D [146].

19.2. Квантовое нарушение суперсимметрии

Ввиду ограниченного характера распределения масс, образующегося в результате нарушения суперсимметрии в древесном приближении, можно было бы надеяться на возможность нарушения суперсимметрии квантовыми поправками. Однако, как уже обсуждалось в гл. 17, можно показать, что [89, 98]: «Если суперсимметрия не нарушена в классическом приближении, то она не будет нарушена никакими поправками теории возмущений». Из доказательства этой теоремы следует, что квантовый эффективный потенциал должен иметь вид

$$V \sim |\langle f \rangle|^2 g(\langle z \rangle) + \langle D \rangle^2 h(\langle z \rangle), \tag{19.27}$$

где g и h — произвольные функции.

Следовательно, необходимо либо нарушить суперсимметрию в древесном приближении, либо найти некоторый механизм нарушения вне рамок теории возмущений. Как будет пояснено ниже, равенство $S \operatorname{Tr} M^2 = 0$ феноменологически неприемлемо. Так как нарушение суперсимметрии в древесном приближении обязательно ведет к равенству $S \operatorname{Tr} M^2 = 0$, то нам остается надеяться, что квантовые поправки изменят величину $S \operatorname{Tr} M^2$. К счастью, так и получается: когда суперсимметрия нарушена на древесном уровне, величина $S \operatorname{Tr} M^2$ меняется за счет квантовых поправок. Понятно, что эти поправки должны быть пропорциональны параметру нарушения суперсимметрии, и, поскольку вклад в эффективное действие является интегралом по всему суперпространству (см. гл. 17), они имеют вид

$$S \operatorname{Tr} M^2 \sim \left(\frac{\langle F \rangle^2 + \langle D \rangle^2}{M^2} \right) \lambda^n, \tag{19.28}$$

где M — доминирующая в процессе масса, а λ — соответствующая константа связи.

19.3. Проблема калибровочной иерархии [147, 148]

Рассмотрим сначала теорию с импульсом обрезания Λ. Все величины в теории, включая параметры (массы, константы связи и т. п.), являются функциями, которые можно выразить через Λ. Если теория перенормируема, то при стремлении Λ к бесконечности единственные расходящиеся члены могут быть «поглощены» параметрами теории в результате перенормировки. Из соображений размерности следует, что поправки к константам взаимодействия и волновой функции могут расходиться

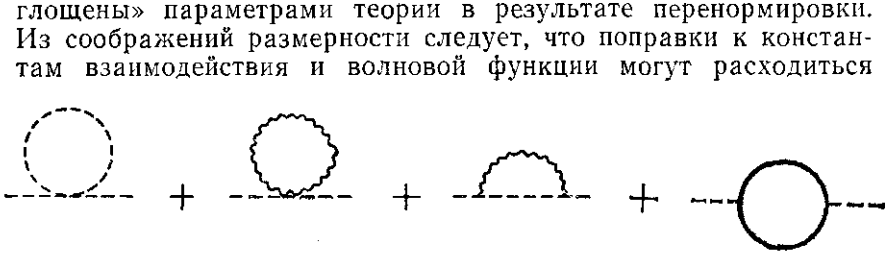

Рис. 19.1.

только как $\ln \Lambda$. То же верно для масс фермионов; в результате киральных преобразований поправки к массам фермионов должны быть пропорциональны самим массам. В общей теории нет симметрии, предотвращающей расходимость масс скалярных частиц, и они, вообще говоря, расходятся как Λ^2. Примеры однопетлевых графов, имеющих этот тип расходимости, приведены на рис. 19.1, где штриховой, волнистой и сплошной линиями обозначены скалярный, векторный и фермионный пропагаторы соответственно. Вычисление этих диаграмм приводит к результату

$$\mu^2(\Lambda) = \mu^2{}_0 + \Lambda^2(c_1\lambda + c_2 g^2 + \ldots). \qquad (19.29)$$

Рассмотрим теперь теорию с двумя параметрами обрезания Λ_1 и Λ_2, где $\Lambda_1 \gg \Lambda_2$ и $\Lambda_2 \sim 0$. Массы, полученные с этими разными параметрами обрезания, связаны соотношением

$$\mu^2(\Lambda_1) \sim \mu^2(\Lambda_2 \sim 0) + \Lambda_1{}^2(c_1\lambda + c_2 g^2 + \ldots). \qquad (19.30)$$

Из этого соотношения следует, что скалярные массы, вычисленные с учетом и без учета влияния эффектов высоких энергий, различаются на величину $\sim\Lambda^2$ (в теориях Великого объединения естественно иметь $\Lambda^2 \sim 10^{26}$ (ГэВ)^2). Далее величина $\mu^2(\Lambda_2 \sim 0)$ должна быть порядка масштаба энергии слабых взаимодействий, если за нарушение симметрии $SU(2)\times U(1) \to U(1)$ ответственно поле Хиггса. Поэтому необходимо очень точно «подстроить» $\mu^2(\Lambda_1)$ так, чтобы почти полностью скомпенсировать член Λ^2. Необходимость точной «подстройки» микроскопических параметров теории, чтобы воспроизвести макроско-

пический мир, каким мы его видим, представляется неестественной. Это техническая проблема калибровочной иерархии. Более глубокий вопрос состоит в том, почему в природе должны существовать такие несоразмерные масштабы. Как мы увидим ниже, суперсимметрия может решить проблему калибровочной иерархии.

Приведенное выше обсуждение можно сформулировать иначе, без использования возможно нефизических параметров обрезания Λ. Рассмотрим изменение масс Δm^2 в области высоких энергией. Хотя этот эффект подавлен за счет параметра Λ^{-2}, $\Delta\mu^2$ имеет следующий вид:

$$\Delta\mu^2 \sim \Lambda^2 \frac{\Delta m^2}{\Lambda^2} \sim \Delta m^2. \qquad (19.31)$$

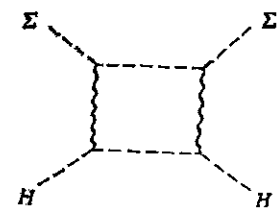

Рис. 19.2.

Следовательно, на поправки $\Delta\mu^2$ существенно влияет поведение теории при высоких энергиях. Другими словами, проблема состоит в том, что для данной теории отсутствует систематическая теория возмущений. Иначе говоря, если величина $\mu^2(0)$ мала в классическом приближении, то однопетлевые поправки к ней велики.

Конечно, обычно мы устремляем параметр обрезания Λ к бесконечности и устраняем всякую связь с этим параметром наблюдаемых величин, перенормируя теорию. Тем не менее, как мы сейчас увидим, приведенное выше обсуждение сохраняет смысл. Для определенности рассмотрим группу $SU(5)$ и примем, что Σ — представление **24**, а H — представление **5** этой группы. В древесном приближении $\langle\Sigma\rangle = M_x/g$. Однопетлевое эффективное действие содержит слагаемое $\lambda\bar{H}\Sigma^2 H$, соответствующее графу, приведенному на рис. 19.2. Полагая импульсы внешних H-линий равными μ^2 и M_x^2 соответственно, найдем

$$\lambda(\mu^2) \sim \lambda(M_x^2) + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln\frac{M_x^2}{\mu^2}. \qquad (19.32)$$

Индуцированная H-масса равна $\lambda\langle\Sigma\rangle^2$. Даже если величина $\lambda(\mu^2)$ очень мала в древесном приближении, она порядка g^4 в однопетлевом приближении, поэтому если не подстроить очень точно $\lambda(M_x^2)$. то индуцированная хиггсовская масса будет неприемлемо велика.

В суперсимметричных теориях скаляры входят в один супермультиплет со спинорами. Так как графы, отвечающие спинорам, дают только логарифмические расходимости, вклады, соответствующие скалярам, должны также приводить к лога-

рифмическим или более слабым расходимостям. Это обусловлено тем, что графы, ведущие к квадратичным расходимостям, частично сокращаются добавочными графами. В приведенном выше примере уничтожают друг друга графы, показанные на рис. 19.3. В этом случае находим

$$\lambda(\mu^2) \sim \lambda\ (M_x^2) \ln\left(\frac{\mu^2}{M_x^2}\right).$$

Теоретической причиной такого сокращения являются хорошо известные ренормализационные свойства суперсимметричных

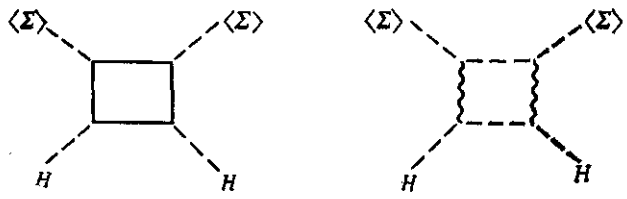

Рис. 19.3.

теорий. В частности, суперпотенциал не перенормируется, и, следовательно, перенормировки масс и констант взаимодействия должны уравновешивать соответствующие перенормировки киральных полей, которые являются только логарифмическими.

Конечно, вообще говоря, мы не ожидаем, что такие свойства останутся справедливыми и для энергий, много меньших масштаба, на котором нарушается любая суперсимметрия. Это связано с тем, что приведенные выше графы не будут более взаимно уничтожаться и дадут в результате вклады, пропорциональные масштабу нарушения суперсимметрии. Но мы хотим сохранить возможность решения технической проблемы калибровочной иерархии при нарушенной суперсимметрии. Это накладывает ограничения как на масштабы, так и на возможные способы нарушения суперсимметрии.

В первом приближении хиггсовская масса равна 10^2 ГэВ, и мы ожидаем, что вклад от радиационных поправок составляет $g^2 M_s$, где M_s — масштаб нарушения суперсимметрии. Для стабилизации величины хиггсовской массы необходимо принять, что $M_s \sim 10^3$ ГэВ для теории с $g^2 \sim 10^{-1}$. Но этот упрощенный анализ может оказаться не верен, если сектор теории, который нарушает суперсимметрию, изолирован от сектора стандартной модели с помощью специального механизма. Теперь мы более детально рассмотрим, как масштаб нарушения суперсимметрии определяется, исходя из требования решения технической проблемы калибровочной иерархии.

Если нарушение суперсимметрии приводит к расщеплению масс суперпартнеров Δm (т. е. калибровочного бозона и калибрино), распространяющихся по петле в приведенной выше диаграмме, то индуцированная хиггсовская масса имеет вид

$$\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Delta m. \tag{19.33}$$

Подобный результат справедлив, если имеется расщепление в киральном супермультиплете, связанном с хиггсовским полем

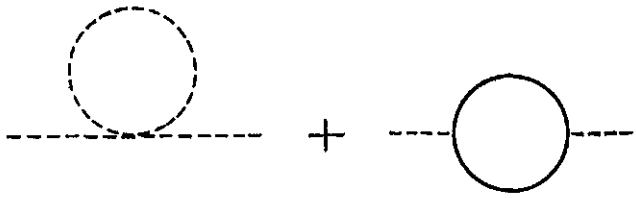

Рис. 19.4.

юкавским взаимодействием. Соответствующие графы приведены на рис. 19.4. Так как величина хиггсовской массы не превосходит 1 ТэВ, находим

$$\Delta m \leqslant 1\ \text{ТэВ}\ \frac{(4\pi)^2}{g^2}. \tag{19.34}$$

Поэтому, если Δm обозначает эффективный масштаб нарушения суперсимметрии, мы ожидаем, что $\Delta m \sim m_W$, чтобы избе-

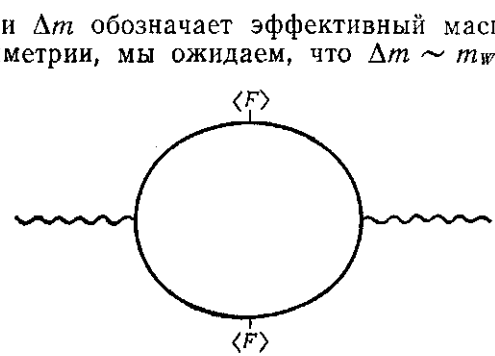

Рис. 19.5.

жать необходимости неестественно точной подстройки констант теории.

Тем не менее суперсимметрия должна быть нарушена в некотором секторе теории на классическом уровне. Для любого кирального супермультиплета с ненулевым вакуумным средним $\langle F\rangle$ мы найдем отвечающий ему вклад в расщепление масс калибровочных полей, возникающий из суперграфа, приведен-

ного на рис. 19.5. Этот вклад имеет вид

$$g^2 \frac{\langle F\rangle^2}{M^2} = g^2 \frac{M_S^4}{M^2}. \tag{19.35}$$

Согласно нашему обсуждению, такое расщепление масс не может быть слишком велико. Имеются два способа обойти указанную трудность: либо мы выберем массу M очень большой ($\sim M_x$) [142], либо не позволим киральному мультиплету взаимодействовать с калибровочными полями [143]. Это приводит к выводу, что если масштаб нарушения суперсимметрии велик, то нарушающий суперсимметрию сектор должен быть изолирован от наблюдаемого сектора теории [149].

19.4. Замечания о построении реалистических моделей

В предыдущих разделах мы видели, что для полного нарушения суперсимметрии необходимо ее нарушение уже в древесном приближении. Чтобы избежать аномалий в древесном приближении, нужно положить $S\,\mathrm{Tr}\,M^2=0$. Однако, исследуя спектр обнаруженных частиц и учитывая отсутствие в нем фермионных партнеров скаляров с массой меньше 20 ГэВ, мы должны сделать вывод, что в наблюдаемом секторе

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 > (20\ \text{ГэВ})^2. \tag{19.36}$$

Эта оценка довольно чувствительна к величине массы хиггсовских скаляров.

Далее, в механизме Файе — О'Рэйферти в древесном приближении массы скаляров расщеплены так, что одна из них больше, а другая меньше массы спинора в том же мультиплете. Очевидно, что это феноменологически неприемлемо. В механизме Файе — О'Рэйферти условия, гарантирующие отсутствие аномалий, очень затрудняют нахождение суперпотенциала, свидетельствующего о нарушении суперсимметрии более определенно, чем электрический заряд или цвет.

К счастью, квантовые поправки к величине $S\,\mathrm{Tr}\,M^2$ вычисляются, когда суперсимметрия нарушена в классическом приближении. Напомним, что эти поправки имеют вид

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 \sim \lambda^n \frac{M_S^4}{M^2}, \tag{19.37}$$

где $M^4{}_S \sim \langle F\rangle^2 + \langle G^2\rangle + \langle D\rangle^2$. Если мы выберем M порядка $M_x \sim 10^{15}$ ГэВ, $\lambda^n \sim 10^{-8}$ и $S\,\mathrm{Tr}\,M^2 \sim (20\ \text{ГэВ})^2$, то $M_S \sim 10^{10}$ ГэВ. В действительности 10^{10} ГэВ — типичный масштаб нарушения глобальной суперсимметрии в реалистических моделях. Можно

установить взаимодействие между массивными частицами сектора, в котором нарушается суперсимметрия, и наблюдаемого сектора [142]. Но лучше, если это возможно, образовать в секторе, где нарушается суперсимметрия, калибровочный синглет, связав его с полями наблюдаемого мира за счет слабого юкавского взаимодействия [143]. В последнем случае можно сделать взаимодействие сколь угодно малым. Следовательно, чтобы получить реалистический спектр масс, необходимо нарушить суперсимметрию не при энергии порядка 10^3 ГэВ, а при 10^{10} ГэВ. Как обсуждалось в предыдущем разделе, это не мешает решению проблемы калибровочной иерархии, поскольку сектор, в котором нарушается суперсимметрия, изолирован от сектора стандартной модели. Нарушение суперсимметрии влияет на сектор наблюдаемых, где оно приводит к эффективному масштабу нарушения суперсимметрии порядка 10^3 ГэВ.

Поучительно рассмотреть космологическую постоянную в этих моделях. Чтобы она сократилась, необходимо добавить к действию слагаемое

$$em_{3/2}\left\{Mm_{pl}+\frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu\right\}, \tag{19.38}$$

где $\varkappa^{-1}=m_{pl}$, а $m_{3/2}$ — произвольный параметр. Исключение вспомогательного поля M приводит к космологической постоянной $\sim m^2_{pl}m^2_{3/2}$. Для сокращения космологической постоянной, индуцированной полем материи, которая имеет вид M_S^4, мы требуем [150]

$$m_{3/2}\sim\frac{M_S^2}{M_{pl}}. \tag{19.39}$$

Учитывая значения параметров $m_S\sim 10^{10}$ ГэВ, $m_{pl}\sim 10^{19}$ ГэВ, найдем $m_{3/2}\sim m_W$.

Появление значительной массы у частицы со спином 3/2 вызывает подозрение, что, может быть, остались незамеченными какие-то другие эффекты супергравитации. Рассматривая в рамках тензорного исчисления формулу для плотности F, найдем члены $\varkappa N$ и $\varkappa M$, умноженные на наинизшую компоненту кирального мультиплета, для которого вычислено действие. Кинетический член в действии, записанный в виде $[S\cdot T(S)]_F$, имеет в качестве низшей компоненты выражения $FA-GB$ и $GA+FB$.

Исключение полей F и G приводит к слагаемым

$$\frac{\varkappa^2}{2}(BM-AN)^2+\frac{\varkappa^2}{2}(BN+AM)^2. \tag{19.40}$$

Заменяя M на $m_{3/2}m_{pl}$, находим для массы скалярных частиц выражение

$$m^2_{3/2}(A^2+B^2). \tag{19.41}$$

Так как каждое поле имеет кинетический член, это — универсальное свойство всех полей с нулевым спином. Эффекты супергравитации непренебрежимы и становятся существенными при $M_S \sim 10^{10}$ ГэВ.

Поскольку такие результаты удовлетворяют предъявляемым требованиям, можно было бы начать построение теории с супергравитации, взаимодействующей с полями материи. Хотя такая теория неперенормируема, она имеет определенные преимущества; в присутствии супергравитации вспомогательные поля появляются в действии в виде

$$V = -\frac{1}{3}M^2 - \frac{1}{3}N^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}D^2 \qquad (19.42)$$

плюс члены взаимодействия. Это выражение не положительно определено! В результате довольно легко нарушить суперсимметрию. Рассмотрим, например, простой суперпотенциал Полония [151]

$$W = de + f, \qquad (19.43)$$

где d и f — постоянные. Применение тензорного исчисления приводит к взаимодействию бозонов

$$e\{d(F - (MA + NB)) - fM\}. \qquad (19.44)$$

Исключая вспомогательные поля, находим нарушающий суперсимметрию потенциал в виде

$$\frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}|dA + f|^2 - \frac{3}{4}(dB)^2. \qquad (19.45)$$

Критерий нарушения суперсимметрии в теориях супергравитации отличен от критерия в теориях с глобальной суперсимметрией; тем не менее читатель может проверить, рассмотрев спектр масс, что указанный выше потенциал действительно нарушает суперсимметрию и может быть использован для сокращения космологической постоянной.

Формула для суперследа M^2 также выглядит более многообещающей; было найдено [152], что она имеет вид

$$S\,\mathrm{Tr}\,M^2 = 2(N-1)\,m_{3/2}^2, \qquad (19.46)$$

где N — число киральных мультиплетов материи и мы приняли $\langle D^a \rangle = 0$. Имея в виду приведенное здесь обсуждение, легко понять, почему эта формула принимает такой вид.

В результате новейшие реалистические модели включают супергравитацию с самого начала. Суперсимметрия нарушена в приближении древесных диаграмм в некотором «скрытом»

секторе, и это нарушение переносится эффектами супергравитации в наблюдаемый сектор. Дальнейшее развитие привело к интересному выводу, что первоначально положительная хиггсовская масса может изменить знак при некотором более низком значении энергии, так что радиационные эффекты нарушают $SU(2)\times U(1)$-симметрию [153].

Здесь приведено эвристическое изложение довольно сложной проблемы реалистических моделей; более полную информацию на эту тему читатель может найти в работах [154].

20. ТОКИ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ

20.1. Общее рассмотрение

Возникновение и развитие алгебры токов в суперсимметричных теориях началось со статьи Феррары и Зумино [159], которые вычислили суперток, тензор энергии-импульса и киральный ток в модели Весса — Зумино. Они нашли, что эти токи принадлежат одному супермультиплету. В этой главе мы хотим рассмотреть возможные структуры (т. е. супермультиплеты), в которые входят мультиплеты токов суперсимметричных теорий. Мы начнем с исследования токов в суперконформных теориях, а затем выясним, каким образом возникают суперконформные аномалии различных токов.

Такой подход целесообразен, поскольку суперконформные токи просты, и, как увидим, строение их мультиплета фактически однозначно. Хотя структура токов в пуанкаре-суперсимметричных теориях не однозначна, она может быть найдена во всех известных случаях путем добавления к суперконформным токам соответствующих мультиплетов суперконформных аномалий.

Возможные структуры мультиплета токов мы можем получить, не обращаясь к частной модели, а потребовав, чтобы токи и их преобразования приводили к правильной алгебре, а именно к алгебре суперсимметрии. Приведенное ниже обсуждение токов сходно с рассмотрением, приведенным в работе [160].

Любой непрерывной симметрии действия соответствует сохраняющийся ток $j_\mu{}^k$, который в свою очередь порождает сохраняющийся заряд

$$Q^k = \int d^3x j_0{}^k. \tag{20.1}$$

Если преобразования симметрии образуют замкнутую алгебру, то справедливо соотношение

$$[Q^k, Q^l] = f^{klm}Q^m. \tag{20.2}$$

Вариация тока при преобразовании симметрии может быть записана в виде

$$\delta j_\mu{}^l = [Q^k, j_\mu{}^l]. \tag{20.3}$$

Но, положив $\mu = 0$ и интегрируя, мы находим

$$\int d^3x \delta j_0{}^l = \int d^3x [Q^k, j_0{}^l] = [Q^k, Q^l] = f^{klm}Q^m = \int d^3x f^{klm} j_0{}^m. \tag{20.4}$$

Очевидно, что эти уравнения накладывают ограничения на вариацию $\delta j_\mu{}^l$.

В случае группы внутренней симметрии мы имеем по одному току для каждого генератора, а так как преобразования токов не содержат пространственно-временных производных, то знак интеграла можно опустить, и единственное решение уравнения имеет вид

$$\delta j_\mu{}^l = f^{klm} j_\mu{}^m. \tag{20.5}$$

Следовательно, токи принадлежат присоединенному представлению группы внутренней симметрии.

Для иллюстрации более сложных аспектов теории, которые могут иметь место для пространственно-временных групп, рассмотрим группу Пуанкаре с генераторами P_μ и $J_{\rho\varkappa}$. Ток, отвечающий генератору P_μ, представляет собой симметричный тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$. Преобразование $\theta_{\mu\nu}$ при трансляциях имеет вид $\delta\theta_{\mu\nu} = \partial_\rho \theta_{\mu\nu}$. Используя это соотношение, находим

$$[P_\mu, P_\nu] = \int d^3x\, [P_\mu, \theta_{0\nu}] = \int d^3x \partial_\mu \theta_{0\nu} =$$

$$= \int d^3x \partial_0 \theta_{0\nu} = -\int d^3x \partial_i \theta^i{}_\nu = 0. \tag{20.6}$$

По отношению к лоренцевым вращениям $J_{\mu\nu}$ тензор энергии-импульса второго ранга, т. е. он преобразуется следующим образом:

$$\delta_{J_{\rho\varkappa}} \theta_{\mu\nu} = -(x_\rho \partial_\varkappa - x_\varkappa \partial_\rho)\theta_{\mu\nu} - [+(\eta_{\rho\nu}\theta_{\mu\varkappa} - \eta_{\varkappa\nu}\theta_{\mu\rho}) + (\mu \leftrightarrow \nu)]. \tag{20.7}$$

Эта вариация позволяет вывести соотношение

$$[P_\mu, J_{\rho\varkappa}] = \eta_{\mu\rho} P_\varkappa - \eta_{\mu\varkappa} P_\rho. \tag{20.8}$$

Рассмотрим ток, отвечающий генератору $J_{\rho\varkappa}$. В действительности это момент тензора $\theta_{\mu\nu}$, а именно

$$L_{\rho\mu\nu} = -x_\nu \theta_{\rho\mu} + \varkappa_\mu \theta_{\rho\nu}. \tag{20.9}$$

Момент сохраняется в силу свойства симметрии $\theta_{\mu\nu}$. Из вариации $\theta_{\mu\nu}$ при лоренцевых вращениях мы можем вывести окончательное коммутационное соотношение для генераторов группы Пуанкаре:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\varkappa}] = (\eta_{\mu\rho} J_{\nu\varkappa} + \ldots). \tag{20.10}$$

Рассмотрим теперь случай, когда тензор $\theta_{\mu\nu}$ не только симметричен, но и имеет нулевой след $\theta_\mu{}^\mu = 0$. Теперь мы имеем новые сохраняющиеся токи $d_\mu = x^\nu \theta_{\nu\mu}$ и $K_{\mu\nu} = 2x_\nu x^\lambda \theta_{\lambda\mu} - x^2 \theta_{\mu\nu}$. Эти токи приводят к новым зарядам D и K_μ. Используя вариации $\theta_{\mu\nu}$, можно вычислить коммутаторы новых генераторов D, K_μ

с генераторами P_ρ, $J_{\rho\varkappa}$. Заметим, что $\theta_\mu{}^\mu = 0$ — единственное алгебраическое условие, которое мы наложили на $\theta_\mu{}^\mu$.

Например, находим

$$[D,\ P_\nu] = \int d^3x\,[x^\varkappa\theta_{\varkappa 0},\ P_\nu] = +\int d^3x x^\varkappa \partial_\nu \theta_{\varkappa 0} = -\int d^3x \theta_{\nu 0} = -P_\nu, \tag{20.11}$$

а для других коммутаторов имеем

$$\begin{gathered}[D,\ J_{\rho\mu}] = 0, \quad [K_\mu,\ J_{\rho\varkappa}] = \eta_{\mu\rho}K_\varkappa - \eta_{\mu\varkappa}K_\rho, \\ [K_\mu,\ P_\nu] = -2\eta_{\mu\nu}D + 2J_{\mu\nu}.\end{gathered} \tag{20.12}$$

Остается найти коммутаторы $[D, K_\nu]$ и $[K_\mu, K_\nu]$. Используя лоренц-инвариантность, а также тождество Якоби для искомых коммутаторов с генераторами $J_{\mu\nu}$, заключаем

$$[D,\ K_\nu] = aK_\nu + bP_\nu, \quad [K_\mu,\ K_\nu] = cJ_{\mu\nu}, \tag{20.13}$$

где a, b и c — постоянные.

Используя тождество Якоби для (D, K, P), находим, что $a = +1$, а из тождества Якоби для (D, J, K) получаем $b = 0$, $c = 0$; в результате имеем

$$[D,\ K_\nu] = K_\nu, \quad [K_\mu,\ K_\nu] = 0. \tag{20.14}$$

Следовательно, мы получаем группу с генераторами P_ν, $J_{\rho\varkappa}$, D и K_μ, которая, конечно, является конформной. Таким образом, теория с $\theta_\mu{}^\mu = 0$ удовлетворяет конформной симметрии.

Можно рассуждать и в обратном порядке. Исходя из конформной группы с генераторами P_μ, $J_{\mu\nu}$, D и K_ρ и их коммутационными соотношениями, можно задать вопрос: какого вида токи образуют такую алгебру? Нетрудно получить, что генератору трансляции P_μ отвечает ток $\theta_{\mu\nu}$, который является симметричным и бесследовым тензором, а другим генераторам отвечают токи, которые могут быть выражены через $\theta_{\mu\nu}$ с помощью приведенных выше уравнений. Этот результат основан на следующих соображениях. Токи, генерирующие такие заряды, должны:

а) принадлежать представлениям конформной группы,

б) иметь трансформационные свойства, приводящие к правильной алгебре в том смысле, как это обсуждалось выше.

Представления конформной группы известны. В частности, они могут быть построены на основании теории индуцированных представлений. В этом случае используется фактор-пространство вида

$$\frac{\text{конформная группа}}{(P_\nu,\ D,\ K_\rho)}.$$

Это пространство четырехмерное и содержит хорошо известные преобразования группы Пуанкаре пространства Минковского. Исходя из любого представления величин $J_{\mu\nu}$, D и K_ρ, мы можем построить представление всей группы.

Приведем теперь простой метод получения результатов действия генераторов на поля, принадлежащие этим индуцированным представлениям [161]. Действуя на поля в начале координат, генераторы ($J_{\mu\nu}$, D, K_ρ) образуют представление группы. Мы принимаем, что действия этих генераторов имеют следующий вид:

$$J_{\mu\nu}\phi(0)=\Sigma_{\mu\nu}\phi(0),\quad D\phi(0)=\Delta\phi(0),\quad K_\mu\phi(0)=k_\mu\phi(0), \tag{20.15}$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ — матричные представления генераторов $J_{\mu\nu}$, отвечающие спинам рассматриваемых полей ϕ, Δ — масштабный вес. Из равенства $[J_{\mu\nu}, D]=0$ следует

$$[\Delta, \Sigma]=0, \tag{20.16}$$

если Σ — неприводимое представление, а из леммы Шура мы должны сделать вывод, что Δ — числовой множитель. Тензор k_μ обычно не встречается в приложениях, но мы сохраним его для полноты. Поле в произвольной точке x дается формулой

$$\phi(x)=\exp(x^\mu P_\mu)\,\phi(0).$$

Действие любого генератора S принимает теперь вид

$$S\phi(x)=\exp(+x^\mu P_\mu)\exp(-x^\mu P_\mu)\,S\exp(x^\mu P_\mu)\,\phi(0)=$$
$$=\exp(x^\mu P_\mu)\left\{S+[S, x^\mu P_\mu]+\frac{1}{2}[[S, x^\mu P_\mu], x^\nu P_\nu]+\ldots\right\}\phi(0). \tag{20.17}$$

Оно может быть вычислено с помощью только групповых коммутационных соотношений и соотношений (20.15). Например, для генератора дилатаций имеем

$$D\phi(x)=\exp(x^\mu P_\mu)[D-x^\mu P_\mu]\,\phi(0)=$$
$$=\exp(x^\mu P_\mu)[\Delta-x^\mu P_\mu]\,\phi(0)=$$
$$=\Delta\phi(x)-x^\mu P_\mu\phi(x)=-x^\mu\partial_\mu\phi(x)+\Delta\phi(x). \tag{20.18}$$

Для генератора K_ρ находим

$$K_\mu\phi(x)=(2x_\mu x^\nu\partial_\nu-x^2\partial_\mu)\,\phi-x_\mu\Delta\phi-2x^\nu\Sigma_{\mu\nu}\phi+k_\mu\phi. \tag{20.19}$$

Лоренцевы вращения принимают стандартный вид:

$$J_{\rho\varkappa}\phi(0)=\exp(x^\mu P_\mu)(\Sigma_{\rho\varkappa}+[J_{\rho\varkappa}, x^\mu P_\mu])\,\phi(0)=$$
$$=(\Sigma_{\rho\varkappa}+(x_\varkappa\partial_\rho-x_\rho\partial_\varkappa))\,\phi(x).$$

Применяя этот подход к $\theta_{\mu\nu}$ и выбирая подходящую лоренцеву матрицу $\Sigma_{\mu\nu}$, найдем

$$\delta\theta_{\mu\nu} = K_\rho\theta_{\mu\nu} = (2x_\rho x^\tau\partial_\tau\theta_{\mu\nu} - x^2\partial_\rho\theta_{\mu\nu}) - 2\Delta x_\rho\theta_{\mu\nu} - \\ - 2x^\kappa(\eta_{\rho\kappa}\theta_{\mu\nu} - \eta_{\kappa\mu}\theta_{\rho\nu} + \eta_{\rho\nu}\theta_{\mu\kappa} - \eta_{\kappa\nu}\theta_{\mu\rho}), \quad (20.20)$$

где Δ — масштабный вес тензора $\theta_{\mu\nu}$. Мы опустили слагаемые, содержащие k_μ, согласно замечанию, сделанному выше. Учитывая закон сохранения $\partial^\mu\theta_{\mu\nu} = 0$, получаем

$$\tfrac{1}{2}(2\Delta - 8)(\theta_{\rho\nu} + \theta_{\nu\rho}) + \tfrac{1}{2}[\theta_{\rho\nu} - \theta_{\nu\rho}] - 2\eta_{\rho\nu}\theta_\mu{}^\mu = 0. \quad (20.21)$$

Выбирая масштабный вес Δ тензора $\theta_{\mu\nu}$ равным -4, получаем соотношения

$$\theta_{\rho\nu} - \theta_{\nu\rho} = 0 = \theta_\mu{}^\mu. \quad (20.22)$$

Остается только показать, что токи, отвечающие $J_{\mu\nu}$, D и K_ρ, являются соответствующими моментами тензора $\theta_{\mu\nu}$. Рассмотрим коммутатор P_ν и K_ρ:

$$[P_\nu, K_\rho] = \Big[\int d^3x\theta_{0\nu}, K_\rho\Big] = \int d^3x\,(2x_\rho x^\tau\partial_\tau\theta_{0\nu} - x^2\partial_\rho\theta_{0\nu} - \\ - 2\Delta x_\rho\theta_{0\nu} + 2x^\kappa\eta_{\rho 0}\theta_{\kappa\nu} - 2x_0\theta_{\rho\nu} + 2x^\kappa\eta_{\rho\nu}\theta_{0\kappa} - 2x_\nu\theta_{0\rho}). \quad (20.23)$$

Интегрируя по частям и используя сохранение тензора $\theta_{\mu\nu}$, находим

$$[P_\nu, K_\rho] = +2\eta_{\nu\rho}D - 2J_{\nu\rho}, \quad (20.24)$$

где генераторам $J_{\nu\rho}$ и D соответствуют токи, которые являются моментами тензора $\theta_{\mu\nu}$ и представлены в уравнениях, приведенных выше. Ток, отвечающий генератору K_ρ, можно получить, рассматривая коммутатор $[J_{\mu\nu}, K_\rho]$. Таким образом, мы пришли к результату, которого ожидали: генератору P_μ отвечает ток $\theta_{\mu\nu}$, представляющий собой симметричный сохраняющий тензор; всем другим генераторам D, K_ρ, $J_{\mu\nu}$ отвечают соответствующие моменты тензора $\theta_{\mu\nu}$.

Следовательно, структура токов для пространственно-временных групп сложнее, чем в случае групп внутренней симметрии, для которых имеется по одному независимому току для каждого генератора.

Имея в виду приведенное выше обсуждение, рассмотрим группу $(N = 1)$-суперсимметрии с генераторами P_μ, Q_α, R и $J_{\mu\nu}$. Токи, отвечающие P_μ, Q_α и R, — тензор $\theta_{\mu\nu}$ (симметричный), $j_{\mu\alpha}$ и $j_\mu{}^{(5)}$ соответственно. Как и раньше, генератору $J_{\mu\nu}$ соответствует ток, являющийся моментом тензора $\theta_{\mu\nu}$ (20.9). Рассмотрим теперь соотношение

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = +2(\gamma^\nu C)_{\alpha\beta}P_\nu. \quad (20.25)$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\int d^3x \{Q_\alpha, j_{0\beta}\} = 2(\gamma^\nu C)_{\alpha\beta} \int d^3x \theta_{0\nu}, \tag{20.26}$$

так что вариация $j_{\mu\beta}$ должна иметь вид

$$\delta_{\varepsilon_\alpha} j_{\mu\beta} = 2(\gamma^\nu C)_{\alpha\beta} \theta_{\mu\nu} + \partial^\rho R_{\mu\rho\alpha\beta}, \tag{20.27}$$

где $R_{\mu\rho\alpha\beta} = -R_{\rho\mu\alpha\beta}$. Последнее слагаемое при $\mu = 0$ после интегрирования по переменной $\int d^3x$ должно обращаться в нуль, поскольку оно не дает вклада в соотношение (20.26). Не очевидно, что оно должно иметь именно такой вид, как в (20.27), но обычно это так для величин, которые ведут к сохраняющимся зарядам.

Аналогично из соотношения

$$[Q_\alpha, R] = i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta Q_\beta \tag{20.28}$$

следует

$$\delta_{\varepsilon_\alpha} j_\mu^{(5)} = i(\gamma_5)_\alpha{}^\beta j_{\mu\beta} + \partial^\nu R_{\mu\nu\alpha}, \tag{20.29}$$

где $R_{\mu\nu\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha}$. Таким образом, мы получили, что токи $j_\mu^{(5)}$, $j_{\mu\alpha}$ и $\theta_{\mu\nu}$ должны принадлежать супермультиплету.

Как и выше, рассмотрим теперь случай, когда некоторые из токов удовлетворяют алгебраическим связям. Рассмотрим пример, когда

$$\theta_\mu{}^\mu = 0, \quad (\gamma^\mu j_\mu)_\alpha = 0. \tag{20.30}$$

В действительности это единственно возможные алгебраические связи. Тогда, как и раньше, имеем новые сохраняющиеся токи d_μ и $K_{\nu\mu}$ и, кроме того,

$$S_{\mu\alpha} = (\hat{x} j_\mu)_\alpha. \tag{20.31}$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды — D, K_ν и S_α. Токи, образующие эту новую алгебру, должны принадлежать ее представлению, в частности представлению подалгебры супералгебры Пуанкаре.

Рассмотрим токи, которые мы обсуждали выше:

$$\theta_{\mu\nu}, \quad J_{\mu\alpha}, \quad j_\mu^{(5)}, \tag{20.32}$$

удовлетворяющие связям (20.30), а также их моменты. Подсчитывая число степеней свободы для каждого из этих токов, найдем значения 5, 8 и 3 соответственно. Такое перемешивание фермионных и бозонных степеней свободы вызывает предположение, что эта совокупность токов образует супермультиплет, в котором нет других компонент. Записав наиболее общие линейные преобразования, подобрав необходимые размерности и

потребовав, чтобы они образовывали правильную алгебру, получим

$$\delta j_\mu^{(5)} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 j_\mu,$$

$$\delta j_\mu = \left(+2\gamma^\nu\theta_{\mu\nu} - ia_1\gamma_5\partial j_\mu^{(5)} - \frac{ia_3}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\varkappa}\gamma^\nu\partial^\rho j^{\varkappa(5)}\right)\varepsilon, \quad (20.33)$$

$$\delta\theta_{\mu\nu} = -\frac{a_2}{2}(\bar{\varepsilon}\sigma^{\mu\varkappa}\partial_\varkappa j^\nu + \bar{\varepsilon}\sigma^{\nu\varkappa}\partial_\varkappa j^\mu),$$

где a_1, a_2 и a_3 — постоянные.

Данные преобразования в самом деле объединяют все токи, если $a_1 = +1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = -1$. По построению эти токи приводят к соотношениям $\{Q, Q\} \sim P$, $\{Q, R\} \sim Q$, но можно также убедиться в справедливости других соотношений супералгебры Пуанкаре, например

$$[P_\mu, Q_\alpha] = \int d^3x\delta\theta_{0\mu} = 0. \quad (20.34)$$

Используя известные преобразования токов из супергруппы Пуанкаре, а также тождества Якоби, построим аналогичным образом все (анти)коммутаторы генераторов. Это достигается следующим образом. Можно показать, что

$$[Q, K_\mu] = \int d^3x\,(2x_\mu x^\nu\delta_Q\theta_{\nu 0} - x^2\delta_Q\theta_{\mu 0}). \quad (20.35)$$

Подставляя найденное выше выражение для $\delta_Q\theta_{\mu\nu}$ в (20.35), получаем

$$[Q, K_\mu] = -\gamma_\mu S, \quad (20.36)$$

где S_α — приведенный выше момент тока $j_{\mu\alpha}$. Используя тождества Якоби, из соотношений конформной алгебры, супералгебры Пуанкаре и преобразований (20.33) можно вывести полную суперконформную алгебру перестановочных соотношений. Таким образом, найдем, что генераторы

$$P_\mu,\ Q^\alpha,\ R,\ J_{\mu\nu},\ S^\alpha,\ D \text{ и } K_\mu \quad (20.37)$$

удовлетворяют $(N = 1)$-суперконформной алгебре, приведенной в гл. 2. Следовательно, мы показали, что теория со связями вида (20.30) для тензора энергии-импульса и супертока суперконформно-инвариантна.

Далее мы обнаружили, что токи [159]

$$(j_\mu^{(5)},\ j_{\mu\alpha},\ \theta_{\mu\nu}) \quad (20.38)$$

и соответствующие им моменты принадлежат супермультиплету, который, согласно (20.33), неприводим.

Как и для группы Пуанкаре, эту процедуру вычислений можно обратить. Действительно, исходя из суперконформной

алгебры с $N=1$, можно показать [1]) при весьма общих предположениях, что упомянутый выше мультиплет суперконформных токов единственный. Доказательство этого утверждения основано на том факте, что токи должны принадлежать представлению полной суперконформной группы, так же как и генерирующей ее алгебре.

Рассмотрим теперь теорию с суперсимметрией Пуанкаре с $N=1$, но не инвариантную относительно полной суперконформной группы. В частности, теория может не быть инвариантной относительно дилатаций ($\theta_\mu{}^\mu \neq 0$), S-суперсимметричной ($\gamma^\mu j_\mu \neq 0$) или R-инвариантной ($\partial_\mu j^{\mu(5)} \neq 0$) или может быть не инвариантной относительно любой комбинации этих симметрий. Ослабив связи, накладываемые на токи суперконформной теории, мы нарушаем баланс между фермионами и бозонами в мультиплете, поэтому нужно добавить дополнительные степени свободы. В результате находим супермультиплет токов, который состоит из мультиплета суперконформных токов и мультиплета аномалий, обозначаемых соответственно A и B. Преобразования суперсимметрии этих мультиплетов должны быть такими, что при $B=0$ восстанавливаются законы преобразования суперконформных токов, т. е.

$$\delta A = A\varepsilon + B\varepsilon, \quad \delta B = B\varepsilon. \tag{20.39}$$

Рассмотрим случай, когда $\theta^\mu{}_\mu \neq 0$, $\gamma^\mu j_\mu \neq 0$ и $\partial^\mu j_\mu^{(5)} \neq 0$. Для восстановления баланса между фермионами и бозонами требуются еще две бозонные степени свободы. Минимально возможный мультиплет аномалий представляет собой киральный супермультиплет P, Q, χ_α, F, G, причем

$$F = 2\theta_\mu{}^\mu, \quad \chi_\alpha = (\gamma^\mu j_\mu)_\alpha, \quad G = -3\partial^\mu j_\mu^{(5)}, \tag{20.40}$$

а P и Q — новые величины размерности 3. Новый мультиплет токов можно образовать, добавляя аномалии в преобразования токов наиболее общим образом в согласии с требованиями размерности и линейности и так, чтобы эти преобразования порождали $(N=1)$-супералгебру Пуанкаре. Например,

$$\delta j_\mu^{(5)} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 j_\mu + ia\varepsilon\gamma_5\gamma^\mu\gamma\cdot j \quad \text{и т. д.} \tag{20.41}$$

Возникающие постоянные могут быть определены из требования расширенного мультиплета токов или проще из требования, чтобы мультиплет аномалий был киральным. Например, мы

[1]) M. Sohnius, P. West, лекции, прочитанные в Триесте на школе по супергравитации, 1981 г.

найдем

$$\delta(\partial^\mu j_\mu^{(5)}) = \delta\left(\frac{G}{-3}\right) = ia\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\gamma\cdot j = -\frac{1}{3}i\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\chi \qquad (20.42)$$

и, следовательно, $a = -1/3$.

Получаемые преобразования имеют вид [159]

$$\delta j_\mu^{(5)} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 j_\mu - \frac{1}{3}i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu\gamma\cdot j,$$

$$\delta j_\mu = \Big[+2\gamma^\nu\theta_{\mu\nu} - i\gamma_5\hat{\partial}j_\mu^{(5)} + i\gamma_5\gamma_\mu\partial_\nu j^{\nu\,(5)} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\varkappa}\gamma^\nu\partial^\rho j^{\varkappa\,(5)} +$$

$$+\frac{i}{3}\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu(P + i\gamma_5 Q)\Big]\varepsilon, \qquad (20.43)$$

$$\delta\theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}\sigma^{\mu\varkappa}\partial_\varkappa j^\nu + \bar{\varepsilon}\sigma^{\nu\varkappa}\partial_\varkappa j^\mu),$$

$$\delta P = \bar{\varepsilon}\gamma\cdot j, \quad \delta Q = i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma\cdot j.$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\theta_\mu{}^\mu \neq 0, \quad (\gamma^\mu j_\mu)_\alpha \neq 0, \qquad (20.44)$$

но R-инвариантность сохраняется (т. е. $\partial^\mu j_\mu^{(5)} = 0$). В этой ситуации требуются три бозонные степени свободы для восстановления баланса между фермионами и бозонами. Минимальная возможность выбора — линейный мультиплет аномалий $(\xi, C, t_{\mu\nu})$, где $\partial^\nu t_{\mu\nu} = 0$, причем мы примем, что $C = {}^1/_2\theta_\mu{}^\mu$ и $\xi_\alpha = (\gamma^\mu j_\mu)_\alpha$.

Читатель должен помнить, что линейный мультиплет содержит поля $(c, a_{\mu\nu}, \chi_\alpha)$ в x-пространстве, где поле $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$ удовлетворяет калибровочному преобразованию $\delta a_{\mu\nu} = \partial_\mu\Lambda_\nu - \partial_\nu\Lambda_\mu$. Так называемый линейный мультиплет аномалий включает поля $(\xi_\alpha, d, t_{\mu\nu})$, $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$, которые дуальны набору полей $(c, a_{\mu\nu}, \chi_\alpha)$ в том смысле, что действие

$$\int d^4x\,(cd + \bar{\chi}^\alpha\xi_\alpha + a^{\mu\nu}t_{\mu\nu})$$

суперсимметрично. Заметим, что в соответствии с калибровочной инвариантностью поля $a_{\mu\nu}$ имеем $\partial^\nu t_{\mu\nu} = 0$.

Окончательный мультиплет токов $j_\mu^{(5)}$, $j_{\mu\alpha}$, $\theta_{\mu\nu}$ и $t_{\mu\nu}$ имеет следующие трансформационные свойства [160, 162]:

$$\delta j_\mu^{(5)} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 j_\mu,$$

$$\delta j_\mu = \Big(+2\gamma^\nu\theta_{\mu\nu} - i\gamma_5\hat{\partial}j_\mu^{(5)} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\varkappa}\gamma^\nu\partial^\rho j^{\varkappa\,(5)} + 2\gamma^\nu t_{\mu\nu}\Big)\varepsilon, \qquad (20.45)$$

$$\delta\theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}\sigma^{\mu\varkappa}\partial_\varkappa j^\nu + \bar{\varepsilon}\sigma^{\nu\varkappa}\partial_\varkappa j^\mu),$$

$$\delta t_{\mu\nu} = +\frac{i}{4}\bar{\varepsilon}\gamma_5\partial_\varkappa\gamma_\lambda\gamma\cdot j\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}.$$

В действительности имеются другие пути достижения указанного баланса фермионов и бозонов с помощью значительно больших мультиплетов аномалий.

Рассмотрим теперь формулировку приведенных выше мультиплетов супертоков в суперпространстве. Суперконформные токи $(j_\mu{}^{(5)}, j_{\mu\alpha}, \theta_{\mu\nu})$ имеют в качестве своей низшей компоненты киральный ток $j_{A\dot{A}}{}^{(5)}$, который мы отождествляем с $(\theta=0)$-компонентой действительного супертока $J_{A\dot{A}}$. Связи $(\gamma^\mu j_\mu)_\alpha = 0$ отвечает в суперпространстве связь

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = 0. \tag{20.46}$$

Читатель может проверить, что других связей в суперпространстве не требуется и суперток $J_{A\dot{A}}$ содержит только суперконформные токи, подчиненные соответствующим связям.

Следовательно, для токов, имеющих суперконформные аномалии, должно выполняться неравенство

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} \neq 0. \tag{20.47}$$

Для кирального мультиплета аномалий у нас было соотношение $(\gamma^\mu j_\mu)_A = \chi_A$. Отождествляя χ_A со спинором в киральном супермультиплете S (т. е. $D_{\dot{A}} S = 0$), находим

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = D_A S. \tag{20.48}$$

Линейный мультиплет аномалий, согласно аналогичному рассмотрению, должен определяться выражением

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = L_A, \tag{20.49}$$

где $D_{\dot{B}} L_A = 0$ и $D^A L_A = D^{\dot{A}} L_{\dot{A}}$. Читатель, конечно, узнает суперполе L_A, поскольку оно имеет тот же состав полей в x-пространстве, что и напряженность максвелловского суперполя W_A, удовлетворяющая тем же связям. Эту связь можно разрешить с помощью соотношения $L_A = \bar{D}^2 D_A T$, где T — суперполе без связей. В качестве упражнения полезно показать, что R-инвариантность действительно сохраняется:

$$\{D^A,\ D^{\dot{A}}\} J_{A\dot{A}} = -2i (\partial)^{A\dot{A}} J_{A\dot{A}} = D^A L_A - D^{\dot{A}} L_{\dot{A}} =$$
$$= (D^A \bar{D}^2 D_A - D^{\dot{A}} D^2 D_{\dot{A}}) T = 0. \tag{20.50}$$

Обсуждение в этом разделе могло быть более доступным для понимания, если бы мы исходили из токов, принадлежащих общему супермильтиплету, первой компонентой которого является киральный ток. Если следующая компонента есть $\zeta_{\mu\alpha}$, то

можно потребовать, чтобы выражение $j_{\mu\alpha} = \zeta_{\mu\alpha} - c(\gamma_\mu \gamma^\nu \zeta_\nu)_\alpha$, где c — постоянная, было супертоком и, следовательно, сохранялось. Как следствия этого условия сохранения получаем киральную и линейную аномалии, а также другие возможные аномалии. Рассмотренные здесь методы могут быть обобщены для нахождения токов в теориях с расширенной суперсимметрией. Конформный суперток [163] для теорий с $N = 2$ есть действительное суперполе J размерности 2, подчиняющееся условию

$$D^{ik} J = 0. \tag{20.51}$$

Конформные супертоки для теорий с $N = 3$ и 4 приведены в работе [164]. Здесь также можно показать, что для $N \leqslant 4$ эти суперконформные токи единственны.

Получив суперконформные токи, можно затем, как и в случае $N = 1$, вычислить аномалии.

20.2. Токи в модели Весса — Зумино [159]

Действие безмассовой модели Весса — Зумино имеет вид

$$A = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \right.$$

$$\left. + \lambda\,[F(A^2 - B^2) + 2ABG - \bar{\chi}(A - i\gamma_5 B)\chi] \right\} \equiv \int d^4x L. \tag{20.52}$$

Эта теория, учитывающая взаимодействие полей, инвариантна относительно полной суперконформной группы с $N = 1$, которая содержит обычную супергруппу Пуанкаре $J_{\mu\nu}$, P_μ, Q_α, киральные преобразования R, дилатации D, специальные трансляции K_μ и специальные преобразования суперсимметрии S_α.

Преобразования суперсимметрии даны в гл. 5, а преобразования трансляции и лоренцевы вращения имеют обычный вид. Например, для поля A имеем

$$\delta_{P_\mu} A = \partial_\mu A, \quad \delta_{J_{\mu\nu}} A = -(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) A. \tag{20.53}$$

Суперконформные преобразования можно найти так же, как конформные, рассмотренные выше. Но в этом случае соответствующее фактор-пространство есть (суперконформная группа)/($J_{\mu\nu}$, D, S_α, K_μ, R). Более детальный анализ трансформационных свойств этой модели при преобразованиях полной суперконформной группы приведен в работе [165].

Используя хорошо известную процедуру Нётер, мы можем вычислить токи, соответствующие этим преобразованиям. На-

пример, найдем

$$\theta_{\mu\nu} = \partial_\mu A \partial_\nu A + \partial_\mu B \partial_\nu B - \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma_\mu \partial_\nu \chi + \eta_{\mu\nu} L + \\ + a_1 (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2)(A^2 + B^2),$$

$$j_{\mu\alpha} = -\hat{\partial}(A - i\gamma_5 B)\gamma^\mu \chi_\alpha - \lambda (A^2 - B^2 + 2iAB\gamma_5)\gamma_\mu \chi_\alpha + \\ + a_2 \sigma_{\mu\nu}\partial^\nu (A + i\gamma_5 B)\chi_\alpha, \qquad (20.54)$$

$$j_\mu^{(5)} = \frac{2}{3} i \left(B\partial_\mu A - A\partial_\mu B - \frac{i}{4}\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\mu \chi \right).$$

К тензору энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ и к супертоку $j_{\mu\alpha}$ мы явно добавили некоторые слагаемые, чтобы улучшить свойства этих объектов. Такие слагаемые с произвольными коэффициентами тождественно сохраняются, т. е. имеют нулевую дивергенцию. Выбирая значения $a_1 = -1/6$ и $a_2 = -2/3$, получаем

$$\theta_\mu{}^\mu = 0, \quad \gamma^\mu j_\mu = 0. \qquad (20.55)$$

Как обсуждалось выше, это позволяет определить новые сохраняющиеся токи, являющиеся моментами тензора $\theta_{\mu\nu}$. Они фактически соответствуют нётеровским токам, отвечающим симметриям D, K_ρ, $J_{\mu\nu}$ и S_α.

Имея явные выражения (20.54) для токов $\theta_{\mu\nu}$, $j_{\mu\alpha}$ и $j_\mu^{(5)}$, мы можем использовать вариации полей при преобразованиях суперсимметрии для нахождения вариаций токов. Результат вычисления такой же, как и найденный ранее, а именно

$$\delta j_\mu^{(5)} = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 j_\mu,$$

$$\delta j_{\mu\alpha} = \left(2\gamma^\nu \theta_{\mu\nu} - i\gamma_5 \hat{\partial} j_\mu^{(5)} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda}\gamma^\nu \partial^\varkappa j^{\lambda(5)} \right)\varepsilon_\alpha, \qquad (20.56)$$

$$\delta\theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}\sigma^{\mu\varkappa}\partial_\varkappa j^\nu + \bar{\varepsilon}\sigma^{\nu\varkappa}\partial_\varkappa j^\mu).$$

Этот супермультиплет токов реализует неприводимое представление не только супергруппы Пуанкаре, но и более широкой суперконформной группы. Преобразования, соответствующие дилатациям, и специальные конформные преобразования полей теории имеют обычный вид, а преобразования, отвечающие симметриям S_α, аналогичны преобразованиям суперсимметрии, но вместо параметра ε_α фигурирует $(\hat{x}\eta)_\alpha$, т. е. $\delta_S A = -\bar{\eta}\hat{x}\chi$. В то время как обычные преобразования суперсимметрии включают производные полей, преобразования S-суперсимметрии содержат дополнительные слагаемые, пропорциональные η, т. е. $\delta_S\chi = [F + i\gamma_5 G + \hat{\partial}(A + i\gamma_5 B)](\hat{x}\eta) + 2(A + i\gamma_5 B)\eta$. Можно проверить, что соответствующими токами являются как раз моменты θ_μ и $j_{\mu\alpha}$, о которых говорилось выше.

К действию модели Весса — Зумино со взаимодействием (20.52) можно добавить пуанкаре-суперсимметричный массовый член

$$\int d^4x\, m\left(AF + GB - \frac{1}{2}\bar{\chi}\chi\right). \tag{20.57}$$

Теория теперь не инвариантна относительно дилатаций D, конформных киральных преобразований R, специальных трансляций K_μ и преобразований суперсимметрии S_α. При этом имеем

$$\begin{gathered}\partial^\mu S_{\mu\alpha} = \partial^\mu (\hat{x} j_\mu)_\alpha = (\gamma^\mu J_\mu)_\alpha \neq 0, \\ \partial^\mu (x^\nu \theta_{\mu\nu}) = \theta_\mu{}^\mu \neq 0\end{gathered} \tag{20.58}$$

и аналогично $\partial^\mu j_\mu{}^{(5)} \neq 0$.

Нётеровские токи имеют вид

$$j_\mu = \delta\phi \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi)} - k_\mu, \tag{20.59}$$

где $\delta\phi$ — вариация поля ϕ, отвечающая соответствующему преобразованию симметрии. Лагранжиан, вариация которого равна $\delta L = \partial^\mu k_\mu$, получает теперь вклады, пропорциональные массе m, что ведет к киральному мультиплету аномалий:

$$\begin{gathered}\theta_\mu{}^\mu = -m\left[(A^2 + B^2)\right] - \frac{m}{2}\bar{\chi}\chi, \quad \partial^\mu j_\mu{}^{(5)} = +i\frac{m}{3}(\bar{\chi}_1\gamma_5\chi_2), \\ \gamma \cdot j = 2m(A - i\gamma_5 B)\chi, \quad P = m(A^2 - B^2), \quad Q = 2mAB.\end{gathered} \tag{20.60}$$

Мультиплет токов преобразуется в соответствии с (20.27).

Мультиплет супертоков можно записать в терминах суперпространства:

$$J_{A\dot{A}} = -\frac{1}{3} D_{\dot{A}} \bar{\phi} D_A \phi - \frac{2}{3} \bar{\phi} i \overleftrightarrow{(\partial)}_{A\dot{A}} \phi, \tag{20.61}$$

где $\overleftrightarrow{\partial} = \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}$. Читатель может проверить справедливость равенства

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = -\frac{m}{6} D_A \phi^2. \tag{20.62}$$

20.3. Токи в $(N = 1)$-суперсимметричной теории Янга — Миллса

Поскольку теория содержит в качестве физических полей только A_μ и $\lambda_A(\lambda_{\dot{A}})$, R-преобразования могут действовать лишь на спиноры, и, следовательно, киральный ток может иметь вид только

$$j^{(5)}{}_{A\dot{A}} = \lambda_A \lambda_{\dot{A}}. \tag{20.63}$$

Суперток, имеющий в качестве низшей компоненты $j^{(5)}{}_{A\dot{A}}$, должен тогда иметь вид

$$J_{A\dot{A}} = W_A W_{\dot{A}}. \tag{20.64}$$

Читатель может убедиться, что в классической теории токи образуют суперконформный мультиплет, т. е.

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = -W_A D^{\dot{A}} W_{\dot{A}} + (D^{\dot{A}} W_A) W_{\dot{A}} = 0. \tag{20.65}$$

Это утверждение следует из связей

$$D_{\dot{B}} W_A = 0 \tag{20.66}$$

и классического уравнения движения (т. е. вспомогательное поле $D = 0$)

$$D^{\dot{A}} W_{\dot{A}} = 0.$$

20.4. Квантовые аномалии

Как хорошо известно, даже если теория конформно-инвариантна на классическом уровне, квантовые поправки в общем случае могут нарушить конформную инвариантность. Это является следствием перенормировки; для регуляризации расходимостей приходится вводить некоторый масштаб, чтобы теория имела смысл. Следовательно, находим, что вследствие квантовых поправок след тензора $\theta_{\mu\nu}$ может стать отличным от нуля. Например, хорошо известно, что в безмассовой КХД [166]

$$\theta_\mu{}^\mu = \frac{\beta(g)}{g}\left(+\frac{1}{2} F^2_{\mu\nu}\right), \tag{20.67}$$

где $\beta(g)$ — β-функция Каллана — Симанзика. Другая симметрия, часто нарушаемая квантовыми поправками, — инвариантность относительно γ_5-преобразований. В суперсимметричных теориях расходящаяся часть кирального тока и тензор энергии-импульса с ненулевым следом часто принадлежат одному и тому же мультиплету аномалий, и, таким образом, мы ожидаем, что суперсимметрия будет связывать друг с другом аномалии, порожденные квантовыми эффектами. Примером могут служить квантовые поправки к $(N = 1)$-теории Янга — Миллса. Напомним приведенное в разд. 20.3 выражение для супертока

$$J_{A\dot{A}} = W_A W_{\dot{A}}. \tag{20.68}$$

Полагаем, что в квантовой теории $\theta_\mu{}^\mu \neq 0$ и (или) $\partial_\mu j^{\mu(5)} \neq 0$, поэтому в суперпространстве имеем уравнение

$$D^{\dot{A}} J_{A\dot{A}} = N_A. \tag{20.69}$$

Правая часть этого уравнения, т. е. N_A, образована из поля $W_A(W_{\dot A})$. Суперполе W_A имеет размерность 3/2, а размерности $J_{A\dot A}$ и N_A должны быть 3 и 7/2 соответственно. Если это киральный мультиплет аномалий, то $N_A = D_A S$, где $D_{\dot A} S = 0$, а размерность S равна 3. Очевидно, что единственным кандидатом на роль S является свертка $W_A W^A$. В действительности, поскольку суперток $J_{A\dot A}$ калибровочно-инвариантен, он должен

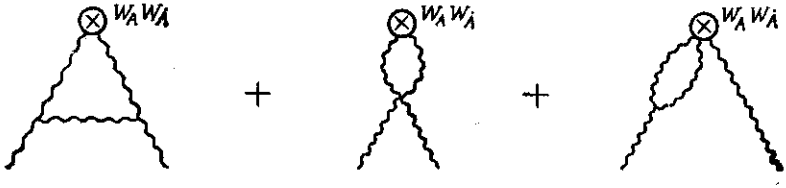

Рис. 20.1.

быть составлен из W^2 или $W\overline{W}$; поэтому приведенный выше киральный мультиплет аномалий является единственно возможным. В данном случае, например, не существует линейного набора аномалий.

Остается только найти коэффициент перед N_A. Для этого следует вычислить графы со вставкой $J_{A\dot A}$; например, надо вычислить суперграфы, приведенные на рис. 20.1. Позаботившись о том, чтобы вставить в диаграммы выражение для тока регуляризованной теории, получим результат [167, 170]

$$D^{\dot A} J_{A\dot A} = -\frac{1}{3}\frac{\beta(g)}{g} D_A (W^B W_B). \tag{20.70}$$

В случае размерной регуляризации следует проводить вычисления с током в пространстве размерности $4-2\varepsilon$.

Выполняя последовательно в этом уравнении ковариантное дифференцирование по антикоммутирующим переменным, а затем вычисляя полученные величины при $\theta = 0$, приходим к следующим формулам в x-пространстве:

$$\begin{gathered}
(\gamma^\mu j_\mu)_\alpha = \frac{-2\beta(g)}{g}\left[\frac{-1}{2}(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + i\gamma_5 D\right]\lambda_\alpha, \\
\theta_\mu{}^\mu = -2\frac{\beta(g)}{g}\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar\lambda\hat\partial\lambda + \frac{1}{2}D^2\right), \\
\partial_\mu j^{\mu(5)} = \frac{+2}{3}\frac{\beta(g)}{g}\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu *}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu(\bar\lambda\gamma_\mu\gamma_5\lambda)\right], \\
P = -\beta(g)\bar\lambda\lambda, \quad Q = -i\beta(g)\bar\lambda\gamma_5\lambda.
\end{gathered} \tag{20.71}$$

Заметим, что полученное выражение для $\theta_\mu{}^\mu$ согласуется с хорошо известными результатами, касающимися тензора энергии-импульса.

Ситуация для мультиплета Весса — Зумино несколько более сложная; подробные вычисления читатель найдет в работах [167, 170].

20.5. Токи и формулировки теории супергравитации

Между мультиплетом токов и супергравитацией имеется очень полезная и интересная связь [171], позволяющая получить формулировку супергравитации. Уравнения Эйнштейна для поля тяготения, связанного с материей, имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa \theta_{\mu\nu}, \tag{20.72}$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная, а $\theta_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса полей материи. Линеаризованное взаимодействие между материей и гравитацией имеет вид

$$2\varkappa \theta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \tag{20.73}$$

где $2\varkappa h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$.

В суперсимметричной теории $\theta_{\mu\nu}$ принадлежит мультиплету токов, содержащему $j_{\mu\alpha}$, $j_\mu{}^{(5)}$ и другие токи. Поэтому должны существовать полевые уравнения супергравитации для каждого из этих токов, и линеаризованное взаимодействие имеет следующий вид:

$$\varkappa (2\theta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \bar{j}^{\mu\alpha} \psi_{\mu\alpha} + b^\mu j_\mu{}^{(5)} + \ldots). \tag{20.74}$$

Следовательно, для каждого набора токов мы можем написать соответствующий набор полей супергравитации.

Как правило, это ведет к формулировке супергравитации; однако может случиться, что из полученных полей супергравитации построить действие невозможно. Очевидный пример, где это может происходить, — случай, когда имеется лишь один вспомогательный фермион. В этом случае нужно добавить еще необходимое число мультиплетов аномалий или соответствующие поля супергравитации.

Связи, которым удовлетворяют токи, приводят к появлению соответствующих калибровочных преобразований полей супергравитации. Например, трансляционной инвариантности ($\partial^\mu \theta_{\mu\nu} = 0$) отвечает калибровочное преобразование

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \tag{20.75}$$

а сохранение суперсимметрии ($\partial^\mu j_{\mu\alpha} = 0$) означает, что

$$\delta\psi_{\mu\alpha} = \partial_\mu \eta_\alpha(x). \tag{20.76}$$

Применим теперь этот прием вычисления к найденному выше супермультиплету токов. ($N = 1$)-суперконформные токи ($\theta_{\mu\nu}$, $j_{\mu\alpha}$, $j_\mu^{(5)}$) приводят к соответствующим полям

$$(h_{\mu\nu},\ \psi_{\mu\alpha},\ b^{(5)}). \tag{20.77}$$

Калибровочные преобразования даны соотношениями (20.75) и (20.76), а также соотношениями

$$\delta h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} d(x), \quad \delta\psi_\mu = \gamma_\mu e(x), \quad \delta b^{(5)} = \partial_\mu \Lambda(x), \tag{20.78}$$

отвечающими соответственно связям

$$\theta_\mu{}^\mu = 0 = (\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta j_{\mu\beta} = \partial^\mu J_\mu^{(5)}. \tag{20.79}$$

Это поля ($N = 1$)-конформной супергравитации [172], которая обсуждалась в гл. 13.

Для токов, входящих в киральный мультиплет аномалий

$$(\theta_{\mu\nu},\ j_{\mu\alpha},\ j_\mu^{(5)},\ P,\ Q), \tag{20.80}$$

получаем соответствующие поля супергравитации [173]:

$$(h_{\mu\nu},\ \psi_{\mu\alpha},\ b_\mu,\ M,\ N). \tag{20.81}$$

Теперь имеются только калибровочные преобразования (20.75) и (20.76). Это приводит к формулировке ($N = 1$)-супергравитации с минимальным числом вспомогательных полей b_μ, M и N.

Супертоки Пуанкаре с линейным мультиплетом аномалий составляют мультиплет

$$(\theta_{\mu\nu},\ j_{\mu\alpha},\ j_\mu^{(5)},\ t_{\mu\nu}), \tag{20.82}$$

где $\partial^\mu j_\mu^{(5)} = \partial^\mu t_{\mu\nu} = 0$, $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$; результирующие поля супергравитации

$$(h_{\mu\nu},\ \psi_{\mu\alpha},\ b_\mu,\ a_{\mu\nu}).$$

Для них имеются калибровочные преобразования (20.75) и (20.76), а также преобразования

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \Lambda(x), \quad \delta a_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu. \tag{20.83}$$

Эти поля приводят к новой минимальной формулировке супергравитации [174]. Поля b_μ и $a_{\mu\nu}$, несмотря на калибровочные преобразования, являются вспомогательными. Они входят в действие в виде

$$\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} b_\mu \partial_\nu a_{\rho\varkappa}. \tag{20.84}$$

Указанный набор токов сохраняет R-киральную инвариантность, и результирующая формулировка локально R-инвариантна, причем поле b_μ играет роль связности. В действительности в этой формулировке с супергравитацией может взаимодействовать только R-инвариантная материя.

Другие мультиплеты аномалий приводят к другим формулировкам супергравитации. На самом деле имеются три формулировки супергравитации, содержащие $20 + 20$ бозонных и фермионных полей [13, 175, 176].

21. ДВУМЕРНЫЕ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

21.1. Двумерные модели с глобальной суперсимметрией

В этой главе мы рассматриваем возможные суперсимметричные модели в двумерном пространстве-времени. Мы делаем это отчасти потому, что такие модели много проще соответствующих аналогов в пространствах большей размерности и их можно использовать для иллюстрации общих черт суперсимметричных теорий и техники вычислений, не прибегая к очень сложным преобразованиям. Но основная причина состоит в том, что эти модели лежат в основе теорий суперструн в том смысле, что на теории струн можно смотреть как на двумерные модели, «живущие» на мировой поверхности струны.

Прежде чем обсуждать возможные модели, мы остановимся на выборе обозначений и некоторых особенностях двумерной алгебры Дирака. Координаты двумерного пространства обозначим ξ^α ($\alpha = 0, 1$), а спинорные индексы — начальными буквами алфавита $A, B, \ldots$. Читатель должен осознать, что эти обозначения существенно отличаются от тех, которые использовались для высших размерностей; причина этого отступления станет ясна, когда мы напишем уравнения теории струн. Мы выберем метрику в виде $\eta_{\alpha\beta} = (-, +)$, а матрицы Дирака следующим образом: $\gamma^\beta = (i\sigma^1, \sigma^2)$, где σ^1 и σ^2 — две из трех матриц Паули. В результате матрицы γ_β удовлетворяют соотношению $\gamma_\beta\gamma_\delta + \gamma_\delta\gamma_\beta = 2\eta_{\beta\delta}$.

Выберем матрицу γ_5 в виде

$$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{21.1}$$

Матрицу зарядового сопряжения C, удовлетворяющую соотношению

$$C\gamma^\beta C^{-1} = -\tilde{\gamma}^\beta, \tag{21.2}$$

положим равной

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^1. \tag{21.3}$$

Заметим, что матрицы $(C\gamma^\beta)$ и $(C\gamma_5)$ симметричны, в то время как матрица C антисимметрична.

Определим спинор, дираковски сопряженный спинору χ_A, в виде $\bar{\chi} = -i\chi^\dagger\gamma^0$. Можно также определить сопряженные

спиноры

$$\chi^c = C\bar{\chi}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\chi}^c = C^{-1}\chi. \tag{21.4}$$

Мы видим, что повторное применение указанной операции «сопряжения» приводит, как и следовало ожидать, к исходному результату. Во многих случаях полезны соотношения

$$\gamma_\beta \gamma^\delta \gamma^\beta = 0, \quad \gamma^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = \varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_5, \tag{21.5}$$

где $\varepsilon_{01} = \pm 1$. Наконец, запишем тождество Фирца

$$\delta_A{}^B \delta_C{}^D = \frac{1}{2}\delta_A{}^D \delta_C{}^B + \frac{1}{2}(\gamma_\beta)_A{}^D (\gamma^\beta)_C{}^B + \frac{1}{2}(\gamma_5)_A{}^D (\gamma_5)_C{}^B. \tag{21.6}$$

Алгебра суперсимметрии с одним суперзарядом Q_A без связей определяется соотношениями

$$\begin{gathered} \{Q_A, \bar{Q}^B\} = 2(\gamma^\delta)_A{}^B P_\delta, \quad \{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}_A, \bar{Q}_B\} = 0, \\ [Q_A, P_\beta] = 0, \quad [Q_A, J_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_A{}^B Q_B, \end{gathered} \tag{21.7}$$

а также соотношениями из группы Пуанкаре.

Можно получить все неприводимые представления такой алгебры, как мы это делали для четырехмерной супергруппы Пуанкаре. Для состояний на массовой поверхности, как и раньше, мы могли бы найти соответствующие законы преобразований суперсимметрии и инвариантные действия. Приведем результаты такого анализа. Основная модель содержит поля (A, χ_A, N), причем все они комплексные. Преобразования суперсимметрии вне массовой поверхности имеют следующий вид:

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta\chi = \hat{\partial} A\varepsilon + N\varepsilon^c, \quad \delta N = \bar{\varepsilon}^c \hat{\partial}\chi. \tag{21.8}$$

Замыкание алгебры преобразований, действующих на поле A, приводит к соотношению

$$[\delta_1, \delta_2] A = \bar{\varepsilon}_2(\hat{\partial} A\varepsilon_1 + N\varepsilon_1{}^c) - (1 \leftrightarrow 2) = \{\bar{\varepsilon}_2 \hat{\partial}\varepsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2)\} A. \tag{21.9}$$

Зависящее от N слагаемое равно нулю, так как матрица C_{AB} антисимметрична, а параметры ε антикоммутируют.

Инвариантное свободное действие имеет вид

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\int d^2\xi \{-|\partial_\alpha A|^2 - \bar{\chi}\hat{\partial}\chi + |N|^2\}. \tag{21.10}$$

Полезно построить токи, отвечающие генераторам P_α, Q_A, и генератор киральных вращений R. Эти токи даются соответствен-

но следующими соотношениями:

$$\theta_{\alpha\beta} = -\partial_{(\alpha}A\,\partial_{\beta)}A^* + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\,\partial_\delta A\,\partial^\delta A^* - \frac{1}{8}\bar{\chi}\left(\gamma_\alpha \overleftrightarrow{\partial_\beta} + \gamma_\beta \overleftrightarrow{\partial_\alpha}\right)\chi,$$
$$j_{\beta A} = (\hat{\partial}A^*\gamma_\beta\chi)_A, \quad j_\beta{}^5 = \bar{\chi}\gamma_\beta\chi. \tag{21.11}$$

Они сохраняются, а также удовлетворяют дополнительным условиям

$$\theta_\alpha{}^\alpha = 0 = (\gamma^\beta j_\beta)_A. \tag{21.12}$$

Указанные условия отвечают существованию новых симметрий, а именно дилатационной и S-симметрии, с которыми связаны токи $\xi^\beta\theta_{\alpha\beta}$ и $(\hat{\xi}j_\alpha)_A$ соответственно.

Варьируя токи, приведенные в (21.11), с помощью известных преобразований суперсимметрии (21.8), найдем, что они образуют супермультиплет

$$(\theta_{\alpha\beta},\ j_{\alpha A},\ j_\alpha{}^{(5)}) \tag{21.13}$$

с трансформационными свойствами

$$\delta\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}\gamma^{(\alpha|\delta}\overrightarrow{\partial_\delta} j^{|\beta)} + \frac{1}{4}\bar{j}^{(\alpha|}\overleftarrow{\partial_\delta}\gamma^{\delta|\beta)}\varepsilon$$

(обозначения имеют следующий смысл: производится симметризация по индексам, кроме тех, которые заключены между вертикальными линиями),

$$\delta j_{\beta A} = 2(\gamma^\delta\theta_{\beta\delta}\varepsilon)_A + \frac{1}{2}(\hat{\partial}j_\beta{}^{(5)}\varepsilon)_A, \quad \delta j_\beta{}^{(5)} = \bar{\varepsilon}j_\beta + \bar{j}_\beta\varepsilon. \tag{21.14}$$

Токи образуют супермультиплет, и это является неизбежным следствием того, что их трансформационные свойства должны приводить к алгебре суперсимметрии. Например, взяв в преобразовании

$$\delta j_{\alpha A} = \{j_{\alpha A},\ \bar{Q}^B\} = \left(2\gamma^\delta\theta_{\alpha\delta} + \frac{1}{2}\hat{\partial}j_\alpha{}^{(5)}\right)_A{}^B \tag{21.15}$$

компоненту тока с $\alpha = 0$ и проинтегрировав по ξ^1, получим, как и ожидалось, соотношение

$$\{Q_A,\ \bar{Q}^B\} = 2(\gamma^\delta)_A{}^B P_\delta. \tag{21.16}$$

Аналогичным образом можно воспроизвести соотношения всей алгебры. Отсюда ясно, что в любой суперсимметричной теории киральный ток, ток суперсимметрии и тензор энергии-импульса должны находиться в одном супермультиплете. Эта особенность впервые была обнаружена в работе [108]; о зависимости между алгеброй и ее токами см. в гл. 20. Читатель, проверивший равенство фермионных и бозонных степеней свободы в мультиплете супертоков, найдет, что за пределами размерности 2 муль-

типлет в общем случае должен содержать еще другие компоненты.

Полезно рассмотреть различные связи, которые можно наложить на спинор χ_A, имеющий компоненты $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

а. Майорановское условие $\chi^c = \chi$ ведет к соотношениям

$$C\bar{\chi}^{\mathrm{T}} = C(-i\chi^{+}\gamma^{0})^{\mathrm{T}} = \chi, \tag{21.17}$$

откуда следует

$$a = a^{*}, \quad b = -b^{*}. \tag{21.18}$$

Мы могли бы потребовать, чтобы эта связь выполнялась для генераторов рассмотренной выше алгебры суперсимметрии, и, таким образом, получить майорановский суперзаряд и соответствующий майорановский параметр. Неприводимый мультиплет этой алгебры включает (A, χ, N), где A и N — действительные поля, а χ — майорановской спинор. Законы преобразования вне массовой поверхности легко вывести из формул (21.14); в результате получим

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta\chi = (\hat{\partial}A + N)\varepsilon, \quad \delta N = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi. \tag{21.19}$$

б. Имеется другой вариант: мы можем потребовать выполнения вейлевского условия

$$\chi = \gamma_5\chi. \tag{21.20}$$

Это означает, что χ имеет вид

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21.21}$$

После наложения связи на суперзаряд Q_A его единственную ненулевую верхнюю компоненту обозначим Q. Соответствующий параметр суперсимметрии должен иметь компоненту с противоположной киральностью, чтобы выражение $\bar{\varepsilon}Q$ не обращалось в нуль, и его как низшую компоненту мы обозначим ε. Соотношения вейлевской алгебры суперсимметрии, получаемые в результате выполнения указанных связей в соотношениях (21.7), имеют вид

$$\{Q, Q^{*}\} = iP_{-}, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad [Q, P_a] = 0. \tag{21.22}$$

Определив величины $R_{\pm} = R_0 \pm R_1$, получим равенства

$$R_a P^a = \frac{1}{2}(R_{+}P_{-} + R_{-}P_{+}), \tag{21.23}$$

причем

$$\gamma_{+}\gamma_{-} + \gamma_{-}\gamma_{+} = -4, \quad \gamma_{+}^{2} = \gamma_{-}^{2} = 0. \tag{21.24}$$

Преобразования вейлевской суперсимметрии супермультиплета (A, χ, N) имеют следующий вид:

$$\delta A = \varepsilon^* \chi, \quad \delta\chi = i\partial_- A\varepsilon, \quad \delta N = 0; \tag{21.25}$$

следовательно, неприводимый мультиплет содержит поля (A, χ).

Заметим, что в отличие от случая четырех измерений оператор, входящий в правую часть соотношения $\{Q, Q^*\}$, т. е. iP_-, вообще говоря, не является обратимым. Поэтому мы не можем требовать, чтобы мультиплет имел равное число фермионных и бозонных степеней свободы. Легко найти пример: рассмотрим поле ϕ, удовлетворяющее условию $\partial_-\phi = 0$ и являющееся первой компонентой приведенного выше супермультиплета. При преобразованиях суперсимметрии спинорная компонента мультиплета остается неизменной, и, следовательно, ее можно положить равной нулю. Поэтому поле ϕ неизменно при преобразованиях суперсимметрии и само образует мультиплет; такие мультиплеты мы будем называть синглетами. Очевидно, можно потребовать выполнения вейлевского условия в любом пространстве с четным числом измерений.

в. Еще один вариант состоит в одновременном выполнении вейлевского и майорановского условий. В этом случае спинор имеет только верхнюю действительную компоненту. Спинор, являющийся одновременно майорановским и вейлевским, может существовать только в том случае, когда размерность пространства-времени равна $8n + 2$, где n — целое. Это утверждение касается лишь пространств с единственным временем; для пространств с разными сигнатурами метрического тензора такие спиноры существуют в различных размерностях.

Предположим, что имеется вейлевский спинор (т. е. $\chi = \gamma_5\chi$); тогда мы можем переписать вейлевское условие в виде $\gamma_+\chi = 0$. Если спинор удовлетворяет уравнению Дирака $\hat{\partial}\chi = 0$, то найдем

$$\gamma_- \partial_+\chi = 0, \tag{21.26}$$

откуда следует

$$\partial_+\chi = 0. \tag{21.27}$$

Поэтому $\chi = f(x - t)$, и, таким образом, решение описывает волну, двигающуюся вправо. В двух измерениях частица должна двигаться либо влево, либо вправо, и направление движения является лоренцевым инвариантом. Если поле χ принадлежит супермультиплету, то мы можем сделать вывод, что поле A также распространяется вправо (т. е. $\partial_+ A = 0$). На более привычном языке это утверждение эквивалентно уравнению

$$\partial_\alpha A = \varepsilon_\alpha{}^\beta \partial_\beta A. \tag{21.28}$$

Действие, отвечающее спинорам, можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}\int d^{2}\xi\chi^{*}\partial_{-}\chi. \tag{21.29}$$

Но вследствие приведенного выше уравнения действие, отвечающее скалярам, тождественно обращается в нуль. Это достаточно общая проблема, касающаяся любой напряженности поля нечетного ранга, т. е. самодуальной. Общее решение проблемы не известно, но в двух измерениях было предложено (см. работу [177]) рассматривать действие с лагранжевым множителем λ_{--}, а именно

$$\int d^{2}\xi\left(\partial_{+}A\,\partial_{-}A+\frac{1}{2}\lambda_{--}\,\partial_{+}A\,\partial_{+}A\right). \tag{21.30}$$

21.2. Связь материи с супергравитацией в двумерном пространстве-времени

Построим теперь взаимодействие суперсимметричной майорановской теории (21.19) с супергравитацией. Физическое обоснование такого построения состоит в том, что указанная теория составляет основу теории суперструн, которая должна быть инвариантной относительно общекоординатных преобразований и преобразований локальной суперсимметрии, поскольку эти симметрии будут соответствовать симметриям мировой поверхности струны.

Прежде чем строить теорию, рассмотрим кратко суперчастицу, которая описывается полями

$$(\phi^{\mu}(\tau),\ \chi^{\mu}(\tau))\quad(\mu=0,\ \ldots,\ D-1), \tag{21.31}$$

где χ^{μ} — грассманова переменная. Свободное действие имеет вид

$$\frac{1}{2}\int d\tau\,(\dot{\phi}^{\mu}\dot{\phi}^{\nu}-\chi^{\mu}\dot{\chi}^{\nu})\,\eta_{\mu\nu}, \tag{21.32}$$

где $\dot{\phi}^{\mu}=\partial\phi^{\mu}/\partial\tau$. Оно инвариантно относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta\phi^{\mu}=\varepsilon\chi^{\mu},\quad \delta\chi^{\mu}=\dot{\phi}^{\mu}\varepsilon, \tag{21.33}$$

а также относительно глобальных трансляций по координате τ.

Построим теперь взаимодействие полей, составляющих свободное действие, с мультиплетом супергравитации, включающим компонентные поля

$$(e,\ \psi). \tag{21.34}$$

Эти поля являются одномерными аналогами тетрады и гравитино. Окончательный результат можно получить с помощью

прямого применения нётеровской процедуры, обсуждавшейся выше; он имеет вид

$$\frac{1}{2}\int d\tau e^{-1}\{\dot{\phi}^\mu\dot{\phi}^\nu - e\chi^\mu\dot{\chi}^\nu - \varkappa\psi\chi^\mu\dot{\phi}^\nu\}\eta_{\mu\nu}. \qquad (21.35)$$

Действие инвариантно относительно локальных преобразований суперсимметрии

$$\delta\phi^\mu = \varepsilon\chi^\mu, \quad \delta\chi^\mu = \left(\partial_\tau\phi^\mu - \frac{\varkappa}{2}\psi\chi^\mu\right)\varepsilon e^{-1}, \quad \delta e = \varepsilon\psi, \quad \delta\psi = \frac{2}{\varkappa}\partial_\tau\varepsilon, \qquad (21.36)$$

а также относительно «общекоординатных» преобразований по τ.

Обратимся теперь к двумерной теории полей материи со следующим свободным действием:

$$\mathscr{A}_0 = \int d^2\xi\left\{-\frac{1}{2}(\partial_a A)^2 - \frac{1}{2}\bar{\chi}\hat{\partial}\chi + \frac{1}{2}N^2\right\}, \qquad (21.37)$$

которое инвариантно относительно майорановской суперсимметрии, т. е.

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta\chi = \hat{\partial}A\varepsilon, \quad \delta N = \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\chi. \qquad (21.38)$$

Поля A и N действительны, χ — майорановский спинор. Мультиплет супергравитации есть набор полей

$$h_{\alpha\beta}, \ \psi_{\alpha A}. \qquad (21.39)$$

Преобразования глобальной суперсимметрии имеют вид

$$\delta h_{\alpha\beta} = \frac{\varkappa}{2}(\bar{\varepsilon}\gamma_\beta\psi_\alpha + \bar{\varepsilon}\gamma_\alpha\psi_\beta), \quad \delta\psi_\alpha = -\gamma^{\beta\delta}\partial_\beta h_{\delta\alpha}\varepsilon. \qquad (21.40)$$

Мультиплет инвариантен также относительно абелевых локальных преобразований

$$\delta\psi_\alpha = \partial_\alpha\eta, \quad \delta h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\beta\xi_\alpha.$$

Нётеровская процедура начинается с того, что суперсимметрия становится локальной: $\varepsilon \to \varepsilon(\xi)$. Свободное действие теперь более не инвариантно, но преобразуется следующим образом:

$$\delta\mathscr{A}_0 = \int d^2\xi\{-(\partial_a\bar{\varepsilon})\hat{\partial}A\gamma^a\chi\}. \qquad (21.41)$$

Мы сокращаем этот член и получаем действие, инвариантное с точностью до членов порядка $\varkappa^0$, добавляя к нему слагаемое

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0 + \int d^2\xi\frac{\varkappa}{2}\bar{\psi}_a\hat{\partial}A\gamma^a\chi. \qquad (21.42)$$

Это инвариант, если локальное абелево фермионное преобразование отождествить со ставшим теперь локальным преобразованием суперсимметрии и принять следующее соотношение между параметрами преобразований:

$$\eta = \frac{2}{\varkappa}\varepsilon. \tag{21.43}$$

Следующий этап состоит в вычислении вариации $\mathscr{A}_1$ при преобразованиях суперсимметрии:

$$\delta\mathscr{A}_1 = \frac{\varkappa}{2}\int d^2\xi\,\{\bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\chi\,(\partial_\beta\bar\varepsilon)\,\chi - \bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\chi\bar\varepsilon\,(\partial_\beta\chi) + \\ + \bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta\varepsilon\,\partial_\beta A\,\partial_\delta A + \bar\psi_\alpha\,\hat\partial A\gamma^\alpha\varepsilon N\}. \tag{21.44}$$

Рассмотрим теперь эти четыре слагаемые одно за другим. Применяя в первом слагаемом преобразование Фирца, получаем

$$-\frac{\varkappa}{4}\int d^2\xi\,(\bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\,\partial_\beta\varepsilon)\,\bar\chi\chi. \tag{21.45}$$

При этом мы использовали тот факт, что

$$\bar\chi\gamma_\alpha\chi = \bar\chi\gamma_5\chi = 0, \tag{21.46}$$

если χ — майорановский спинор. Сокращаем это слагаемое, добавляя к действию новый член:

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 + \frac{\varkappa^2}{16}\int d^2\xi\bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\psi_\beta\bar\chi\chi. \tag{21.47}$$

Третье слагаемое уничтожается после добавления члена, содержащего вариацию репера, которая должна возникать в скалярном кинетическом члене, а именно

$$\int d^2\xi\left\{-\frac{1}{2}\delta\,(ee^\alpha{}_a e^{\beta a})\,\partial_\alpha A\,\partial_\beta A\right\}, \tag{21.48}$$

где $e_a{}^\alpha = \eta_a{}^\alpha + \varkappa h_a{}^\alpha$. Последнее слагаемое сокращается при добавлении некоторого члена к δN. Второе слагаемое уничтожается после добавления членов к $\delta\chi$, а также варьирования реперов в спинорном кинетическом члене.

Наконец, читатель может проварьировать $\mathscr{A}_2$ и убедиться, что добавления к действию дальнейших дополнительных слагаемых не требуется, а полная инвариантность достигается добавлением соответствующих членов к законам преобразования полей. Окончательное выражение для действия имеет вид (см. работы [178, 179])

$$\mathscr{A} = \int d^2\xi e\left\{-\frac{1}{2}e_a{}^\alpha e^{\beta a}\,\partial_\alpha A\,\partial_\beta A - \frac{1}{2}\bar\chi e_a{}^\alpha\gamma^\alpha\,\partial_\alpha\chi + \right. \\ \left. + \frac{\varkappa}{2}\bar\psi_\alpha\,\overline{\partial}A\gamma^\alpha\chi + \frac{\varkappa^2}{16}\bar\psi_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\psi_\beta\bar\chi\chi\right\}. \tag{21.49}$$

Такое действие обладает общекоординатной инвариантностью, локальной лоренцевой инвариантностью, локальной суперсимметрией, а также двумя другими симметриями, а именно вейлевской и S-суперсимметрией. Вейлевская инвариантность действия — инвариантность относительно преобразований

$$\delta e_\alpha{}^a = \Lambda e_\alpha{}^a, \quad \delta\psi_\alpha = \frac{1}{2}\Lambda\psi_\alpha, \quad \delta A = 0, \qquad \delta\chi = -\frac{1}{2}\Lambda\chi, \quad \delta N = -\Lambda N \tag{21.50}$$

с параметром $\Lambda(\xi)$. Спинорный параметр S-суперсимметрии $\zeta_A(\xi)$, причем все поля остаются неизменными, за исключением гравитино:

$$\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \gamma_\alpha\zeta. \tag{21.51}$$

Тем не менее действие инвариантно в силу двумерного тождества

$$\gamma^\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta = 0. \tag{21.52}$$

На самом деле действие инвариантно относительно локальной двумерной суперконформной группы.

Полезно подсчитать степени свободы полей супергравитации. Репер $e_\alpha{}^a$ имеет четыре степени свободы, но также четыре калибровочных преобразования. Имеются одно локальное преобразование Лоренца, два общекоординатных и одно вейлевское преобразование. В результате, выбирая калибровку, мы можем привести репер к виду $e_\alpha{}^a = \delta_\alpha{}^a$. Гравитино $\psi_{\alpha A}$ имеет четыре степени свободы, но также четыре калибровочных преобразования, состоящие из двух преобразований Q-суперсимметрии и двух преобразований S-суперсимметрии. Указанные симметрии можно использовать, чтобы, выбрав калибровку, обратить это поле в нуль: $\psi_\alpha{}^A = 0$ (см. работу [179]). Вопрос о замыкании алгебры этих преобразований, действующих на поля супергравитации, представляется несколько академическим, поскольку мы ограничиваемся нахождением локальной симметрии: в этом смысле вспомогательные поля не являются необходимыми.

При таком выборе калибровки уравнения движения становятся уравнениями свободных полей:

$$\partial^2 A = 0, \quad \hat{\partial}\chi = 0. \tag{21.53}$$

Но мы не должны забывать уравнения движения репера $e_\alpha{}^a$ и гравитино $\psi_{\alpha A}$, которые в этой калибровке принимают вид

$$-\frac{1}{2}\partial_\alpha A\,\partial_\beta A-\frac{1}{2}\bar\chi\gamma_{(\alpha}\partial_{\beta)}\chi+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\partial_\delta A)^2=0, \tag{21.54}$$

$$\gamma^\beta\gamma^\delta\partial_\beta A\chi=0. \tag{21.55}$$

Таким образом, действие является свободным, но со связями.

Необходимо еще написать локальные преобразования суперсимметрии полей, которые были выведены в процессе вычислений в рамках нётеровской процедуры. Поучительно, однако, получить их, применяя нётеровскую процедуру к алгебре преобразований. Мы начнем с алгебры глобальной суперсимметрии, а затем сделаем параметр суперсимметрии локальным, т. е. $\varepsilon\to\varepsilon(\xi)$. Алгебра теперь не замкнута; например, для коммутатора преобразований, действующих на поле χ_A, найдем

$$[\delta_1,\ \delta_2]\chi=\{\gamma^\beta\varepsilon_2\bar\varepsilon_1(\partial_\beta\chi)+\bar\varepsilon_1\hat\partial\chi\varepsilon_2+\gamma^\beta\varepsilon_2(\partial_\beta\bar\varepsilon_1)\chi\}-(1\leftrightarrow 2). \tag{21.56}$$

Используя в первых двух слагаемых преобразование Фирца, получим трансляцию. Последнее слагаемое содержит производную параметра ε_1 и при замыкании алгебры образует члены, не имеющие вида преобразования симметрии. Мы уничтожаем это слагаемое, заменяя $\partial_\alpha A$ в выражении для $\delta\chi$ суперковариантной производной

$$\partial_\alpha A\to\tilde D_\alpha A=\partial_\alpha A-\frac{\varkappa}{2}\bar\psi_\alpha\chi; \tag{21.57}$$

таким образом, имеем

$$\delta\chi=(\gamma^\beta\tilde D_\beta A+N)\varepsilon. \tag{21.58}$$

Рассматривая действие преобразований на поле N, мы также найдем члены, пропорциональные $\partial_\beta\varepsilon$; при этом мы поступаем аналогично предыдущему случаю. Положим

$$\delta N=\bar\varepsilon\gamma^\beta\tilde D_\beta\chi, \tag{21.59}$$

где

$$\tilde D_\beta\chi=D_\beta\chi-\frac{\varkappa}{2}(\tilde{\tilde D}A+N)\psi_\beta, \tag{21.60}$$

$$D_\beta\chi=\Big(\partial_\beta-\frac{1}{4}\omega_{\beta ab}\gamma^{ab}\Big)\chi.$$

Здесь в ковариантную производную мы включили соответствующую спиновую связность, необходимую для замыкания алгебры в высшем порядке по $\varkappa$. Введение ковариантных производных способствует замыканию алгебры с точностью до членов порядка $\varkappa^0$. Например, для коммутатора преобразований,

действующих на поле A, найдем

$$[\delta_1, \delta_2] A = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\beta\varepsilon_1\tilde{D}_\beta A = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\beta\varepsilon_1\,\partial_\beta A - \left(2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\beta\varepsilon_1\,\frac{\varkappa}{2}\,\psi_\beta\right)\chi. \quad (21.61)$$

Здесь первое слагаемое — общекоординатное преобразование, второе — зависящее от поля преобразование суперсимметрии. В действительности читатель может проверить, что алгебра замкнута во всех порядках и в дальнейшем дополнительные слагаемые к вариациям полей (которые иногда необходимы) не нужны. Окончательные результаты имеют вид

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\chi, \quad \delta\chi = (\tilde{\hat{D}}A + N)\,\varepsilon, \quad \delta N = \bar{\varepsilon}\,\tilde{\hat{D}}\chi, \quad (21.62)$$

$$\delta e_a{}^a = \varkappa\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_a, \quad \delta\psi_a = \frac{2}{\varkappa}\,D_a\varepsilon. \quad (21.63)$$

Специфика двух измерений проявляется в соотношении

$$\frac{1}{4}\,\omega_\alpha{}^{bc}\gamma_{bc} = -\frac{1}{2}\,\omega_\alpha\gamma_5, \quad (21.64)$$

где $\omega_\alpha = -{}^1/_2\varepsilon^{ab}\omega_{\alpha ab}$. Как обычно, спиновая связность включает слагаемые, содержащие гравитино, которые приводят к тому, что преобразование не содержит членов, пропорциональных $\partial\varepsilon$; таким образом, эта сумма обычных слагаемых, куда входят реперы, $\omega_\alpha{}^{ab}(e)$ и гравитино:

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(e) + \frac{\varkappa^2}{2}\,\bar{\psi}_\alpha\gamma_5\gamma^\delta\psi_\delta. \quad (21.65)$$

Теперь нетрудно написать функционал действия для теории суперструны. Он определен на мировой поверхности струны, координаты которой $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$. Суперструна описывается полями $x^\mu(\xi)$ и $\chi^\mu{}_A(\xi)$, где $\mu = 0, \ldots, 9$. Индексы μ соответствуют пространству-времени и появляются как «внутренние индексы» полей, заданных на мировой поверхности, не усложняя представленный выше анализ. Действие имеет вид

$$\mathscr{A} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi e\left\{-\frac{1}{2}\,e_a{}^\alpha\,\partial_\alpha x^\mu e^{\beta a}\,\partial_\beta x^\nu - \frac{1}{2}\,\bar{\chi}^\mu\gamma^a e_a{}^\alpha\,\partial_\alpha\chi^\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa}{2}\,\bar{\psi}_\alpha\,\hat{\partial}x^\mu\gamma^\alpha\chi^\nu + \frac{\varkappa^2}{16}\,\bar{\psi}_\alpha\gamma^\beta\gamma^\alpha\psi_\beta\bar{\chi}^\mu\chi^\nu\right\}\eta_{\mu\nu}. \quad (21.66)$$

Оно инвариантно относительно двумерных общекоординатных преобразований, преобразований Q- и S-суперсимметрий, вейлевского и локального лоренцева преобразований. Эти преобразования снабжены соответствующими индексами μ, ν (т. е. $\delta x^\mu = \bar{\varepsilon}\chi^\mu$, ...). Действие инвариантно также относительно преобразований десятимерной группы Пуанкаре. Именно в этой модели в свое время была независимо открыта суперсимметрия.

Такая модель ведет к формулировке Рамона — Неве — Шварца (см. [7]).

Как и раньше, мы можем выбрать калибровку, в которой $e_\alpha{}^a = \delta_\alpha{}^a$ и $\psi_{\alpha A} = 0$; получаем свободную теорию, подчиненную приведенным выше связям.

Сравнительно недавно была выдвинута новая струнная теория, называемая гетеротической струной (см. [180]). Она описывается полями $x^\mu(\xi)$ $(\mu = 0, \ldots, 9)$, $x^I(\xi)$ $(I = 1, \ldots, 16)$ и $\chi^\mu{}_A$. Здесь $\chi^\mu{}_A$ — вейлеровский спинор $(\chi^\mu = \gamma_5\chi^\mu)$; следовательно, он должен быть правосторонним, а переменная x^I — левосторонняя. Указанные поля соответствуют остаткам 26-мерной теории, из которой была получена гетеротическая струна. Переменная x^μ содержит как левосторонние, так и правосторонние состояния. Действие струны имеет вид $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$, где

$$\mathscr{A}_1 = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi e\left\{-\frac{1}{2}e_a{}^\alpha\,\partial_\alpha x^\mu e^{\beta a}\,\partial_\beta x^\nu - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\bar\chi^\mu\gamma_- e_+{}^\alpha\,\partial_\alpha\chi^\nu + \frac{\varkappa}{2}\bar\psi_\alpha\,\hat\partial x^\mu\gamma^\alpha\chi^\nu\right\}\eta_{\mu\nu}, \quad (21.67)$$

а $\mathscr{A}_2$ — действие, отвечающее полю x^I, которое либо имеет вид

$$\mathscr{A}_2 = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi e\,\{e_+{}^\alpha\,\partial_\alpha x^I e^\beta\,\partial_\beta x^I + \lambda_{--}e_+{}^\alpha\,\partial_\alpha x^I e^\beta\,\partial_\beta x^I\}, \quad (21.68)$$

либо может быть представлено выражением, которое включает 32 фермионные степени свободы (см. [180]). В силу свойства вейлевского спинора χ имеем

$$\bar\chi\chi = \bar\chi\gamma_5\chi = -\bar\chi\chi = 0. \quad (21.69)$$

Можно использовать не двухкомпонентные спиноры, а лишь ненулевую верхнюю компоненту. Эта теория инвариантна относительно преобразований вейлевской суперсимметрии, а поля x^I неизменны, т. е. являются синглетами. Левосторонние поля x^μ — синглеты, но правосторонние поля x^μ и $\chi^\mu{}_A$ образуют супермультиплет типа (21.25).

Мультиплет супергравитации соответствует вейлевской суперсимметрии, т. е. суперсимметрии с киральным параметром ε $(\gamma_5\varepsilon = -\varepsilon$ или $\gamma_-\varepsilon = 0)$. Положим, что киральность поля ψ_α противоположна киральности поля χ^μ (т. е. $\gamma_5\psi_\alpha = -\psi_\alpha$). Поля ψ_{+A} и $e_+{}^\alpha$ образуют супермультиплет, преобразования вейлевской суперсимметрии которого имеют следующий вид:

$$\delta e_{+a} = \varkappa\bar\varepsilon\gamma_+\psi_a, \quad \delta\psi_+ = \frac{2}{\varkappa}D_+\varepsilon, \quad (21.70)$$

причем параметры суперсимметрии удовлетворяют соотношению $D_-\varepsilon = 0$. Левостороннее поле $e_-{}^\alpha$ — синглет относительно груп-

пы суперсимметрии, а поле ψ_{-A} на самом деле не появляется в действии вследствие киральной связи, которой удовлетворяет поле χ (т. е. $\gamma^{-}\chi = 0$), и мы можем положить его равным нулю.

После обсуждавшихся выше упрощений из формул (21.62) получим законы преобразования полей материи

$$\delta x^{\mu} = \bar{\varepsilon}\chi^{\mu}, \qquad \delta\chi^{\mu} = \gamma_{+}\partial_{-}x^{\mu}\varepsilon. \tag{21.71}$$

Левосторонние поля x^{μ} и x^{I} — синглеты относительно группы вейлевской суперсимметрии.

Действие инвариантно относительно вейлевских локальных лоренцевых и S-суперсимметричных преобразований, а также преобразований 10-мерной группы Пуанкаре. Выбирая калибровку, в которой $e_{\alpha}{}^{a} = \delta_{\alpha}{}^{a}$, $\psi_{+} = 0$, найдем, что теория свободная, но со связями, следующими из уравнений движения полей $e_{\alpha}{}^{a}$ и ψ_{+}.

22. КАЛИБРОВОЧНО-КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СТРУНЫ

Прежде чем рассматривать ковариантное квантование протяженного объекта, а именно струны, полезно рассмотреть соответствующий переход от классической точечной частицы к вторично квантованной теории.

22.1. Точечная частица

Траектория классической точечной частицы в пространстве-времени параметризуется ее собственным временем τ и описывается вектором $x^\mu(\tau)$. Эта траектория должна быть такова, чтобы минимизировать действие

$$A = -m\int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\int d\tau \{V^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu} - mV\}, \qquad (22.1)$$

где $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Эти формы действия инвариантны относительно репараметризации собственного времени $\tau \to f(\tau)$ и преобразований x^μ: $\delta x^\mu = f(\tau)\dot{x}^\mu$.

Дадим гамильтонову формулировку для действия (22.1) в первой форме (те же результаты можно получить и для действия во второй форме). Канонический импульс и уравнение движения имеют вид

$$p_\mu = \frac{\delta A}{\delta \dot{x}^\mu(\tau)} = \frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}}, \qquad (22.2)$$

$$\partial_\tau p_\mu = 0. \qquad (22.3)$$

Как следствие репараметризационной инвариантности в системе имеется связь

$$\phi \equiv p_\mu{}^2 + m^2 = 0 \qquad (22.4)$$

и гамильтониан обращается в нуль:

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L = 0. \qquad (22.5)$$

Метод обращения с такими системами со связями был предложен в работе [181], и мы применим его для точечной частицы. Читателей, желающих ознакомиться с этим методом более детально, мы отсылаем к работе [182]. Гамильтониан выбираем пропорциональным связи, т. е.

$$H = v(\tau)(p^2 + m^2), \qquad (22.6)$$

где $v(\tau)$ — произвольная функция τ. Можно показать, что в этом случае дополнительных связей не возникает и H порождает сдвиг во времени или репараметризацию в том смысле, что

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \{x^\mu(\tau), H\} = 2v(\tau)\, p^\mu. \tag{22.7}$$

Скобки Пуассона динамических переменных, которые мы назовем фундаментальными, равны

$$\{x^\mu, p^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \tag{22.8}$$

Квантование теории произведем обычным образом, заменяя скобки Пуассона (22.8) коммутаторами, что отражают подстановки

$$x^\mu \to x^\mu, \quad p^\mu \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{22.9}$$

При этом связь приобретает вид

$$\tilde{\phi} = (-\partial^2 + m^2). \tag{22.10}$$

Чтобы построить вторично квантованную теорию поля, будем описывать состояние системы полем $\psi(x^\mu, \tau)$, удовлетворяющим уравнению связи

$$\tilde{\phi}\psi = 0 = (-\partial^2 + m^2)\psi. \tag{22.11}$$

Потребуем также, чтобы ψ удовлетворяло уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = H\psi. \tag{22.12}$$

Правая часть этого уравнения в силу уравнения (22.11) обращается в нуль, и мы заключаем, что ψ не зависит от τ. При вторичном квантовании в любом случае имеется более одной частицы, таким образом, концепция одного собственного времени становится проблематичной.

К уравнению Клейна — Гордона (22.11) приводит действие

$$A = \int d^4x \psi (-\partial^2 + m^2)\psi, \tag{22.13}$$

которое мы используем при построении фейнмановского интеграла. Последний позволяет находить функции Грина вторично квантованной теории.

Отметим, что исходная инвариантность относительно репараметризации собственного времени, которая была столь важна при выборе классического действия, отсутствует во вторично квантованной теории. Напоминают о ней только полевые уравнения. Поскольку квантование производилось в гамильтоновом подходе по отношению к собственному времени, то этого и сле-

довало ожидать. Однако естественно спросить, возможно ли провести вторичное квантование таким образом, чтобы сохранить эту инвариантность. Теперь мы повторим приведенные выше рассуждения для струны.

22.2. Бозонная струна

Бозонная струна, точки которой параметризуются переменной σ, с течением времени τ заметает двумерную поверхность в пространстве-времени x^μ. Поверхность, параметризуемая $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$, задается функцией $x^\mu(\xi)$. Траектория струны такова, что соответствующая поверхность экстремальна, т. е. действие дается выражением

$$A = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi \sqrt{-\det \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}}, \tag{22.14}$$

где постоянная α' имеет размерность (масса)$^{-2}$. Действие инвариантно относительно произвольной репараметризации поверхности

$$\xi^\alpha \to \xi^\alpha + f^\alpha(\xi), \qquad x^\mu \to x^\mu + f^\alpha \partial_\alpha x^\mu, \tag{22.15}$$

а также относительно преобразований из группы Пуанкаре, действующих на координаты пространства-времени x^μ.

Канонический импульс равен ($x'^\mu = \partial x^\mu/\partial\sigma$)

$$P_\mu = \frac{\delta A}{\delta\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\right)} = \frac{\partial_\tau x_\mu (x'^\nu)^2 - x'_\mu\left(\left(\partial_\tau x^\nu\right) x'_\nu\right)}{2\pi\alpha' \sqrt{-\det\left(\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}\right)}}. \tag{22.16}$$

Следствием упомянутой выше инвариантности являются связи

$$P_\mu{}^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2}(x'^\mu)^2 = 0, \tag{22.17}$$

$$x'^\mu P_\mu = 0. \tag{22.18}$$

Область изменения параметра σ удобно расширить с интервала $[0, \pi]$ до интервала $[-\pi, \pi]$, определив

$$x^\mu(\sigma) = \begin{cases} x^\mu(\sigma) & 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi, \\ x^\mu(-\sigma), & -\pi \leqslant \sigma \leqslant 0, \end{cases} \tag{22.19}$$

т. е. $x^\mu(\sigma) = x^\mu(-\sigma)$. Используя это расширение, приведенные связи можно записать в виде

$$(\mathscr{P}^\mu)^2 \equiv \left(P^\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} x'^\mu\right)^2 = 0. \tag{22.20}$$

Переходя к коэффициентам преобразования Фурье этих связей

$$L_n \equiv \frac{\pi\alpha'}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\sigma \, (\mathscr{P}^\mu)^2 \, e^{-in\sigma} \tag{22.21}$$

и пользуясь скобками Пуассона канонических переменных, получим для L_n алгебру [184]

$$\{L_n, \, L_m\} = -\, i\,(n-m)\, L_{n+m}. \tag{22.22}$$

Поскольку построенный по действию (22.14) гамильтониан обращается в нуль, в качестве гамильтониана выбираем линейную комбинацию связей

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n L_n. \tag{22.23}$$

Можно показать, что L_n являются генераторами двумерных конформных преобразований мировой поверхности струны. Конформная группа в общем случае имеет конечное число генераторов, и только в двумерном пространстве-времени ее размерность становится бесконечной, что соответствует наличию произвольных аналитических преобразований по $z = \sigma + i\tau$. Действительно, плоская метрика, которая может быть записана в этом случае как $dzd\bar{z}$, при голоморфном отображении $z \to f(z)$ меняется только на множитель. Появление двумерной конформной группы вместо первоначальной двумерной общекоординатной группы, по-видимому, связано с выбором τ в качестве времени при гамильтоновом подходе. Как мы увидим, алгебра Вирасоро и, следовательно, конформные преобразования играют важную роль во вторично квантованной калибровочно-ковариантной теории.

Фундаментальные скобки Пуассона в этой теории имеют вид

$$\begin{aligned} \{x^\mu(\sigma), \, P^\nu(\sigma')\} &= \delta(\sigma - \sigma')\, \eta^{\mu\nu}, \\ \{x^\mu(\sigma), \, x^\nu(\sigma')\} &= 0 = \{P^\mu(\sigma), \, P^\nu(\sigma')\}. \end{aligned} \tag{22.24}$$

Переход к квантовой теории совершается заменой этих соотношений на коммутаторы и добавлением множителя $i\hbar$. Это можно получить подстановкой

$$x^\mu(\sigma) \to x^\mu(\sigma), \quad P^\mu(\sigma) \to -\, i\hbar \frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)}. \tag{22.25}$$

Совершая эту замену в генераторах связей, получаем

$$L_n = \frac{\pi\alpha'}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{-in\sigma} \widetilde{\mathscr{P}}^\mu(\sigma)\, \widetilde{\mathscr{P}}^\nu(\sigma)\, \eta_{\mu\nu}, \tag{22.26}$$

где

$$\tilde{\mathscr{P}}^{\mu}(\sigma) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta x^{\mu}(\sigma)} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma}. \tag{22.27}$$

Наложим теперь на описывающий состояние струны функционал $\psi[x^{\mu}(\sigma)]$, который, как и в случае точечной частицы, не зависит от τ, следующие связи:

$$(L_0 - 1)\psi = 0, \quad L_n\psi = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{22.28}$$

Это не совсем то, чего можно было бы ожидать. Появление в первом уравнении -1 отвечает возможности добавления к L_0 константы нормального упорядочения, поскольку оператор L_0 не определяется однозначно своим классическим выражением.

Мы увидим, что значение -1 фиксируется требованием, чтобы спектр состояний на массовой поверхности был свободен от ду́хов. При вторичном квантовании мы не требуем обращения в нуль на ψ всех операторов L_n, поскольку это привело бы к обращению в нуль и состояния ψ в силу наличия в алгебре Вирасоро центрального заряда, который мы обсудим ниже. Однако из второго уравнения заключаем

$$(\psi,\ L_n\psi) = (L_{-n}\psi,\ \psi) = 0, \quad \forall n,\ n \neq 0, \tag{22.29}$$

так как $L_n^{+} = L_{-n}$. Таким образом, в классическом пределе все L_n обращаются в нуль, что согласуется с (22.20). Такая процедура полностью аналогична формализму Гупта — Блейлера в квантовой электродинамике.

Необходимость связей (22.28) гарантирует следующая теорема:

Теорема [185]. Уравнения (22.28) описывают свободный от ду́хов набор состояний на массовой поверхности при условии, что размерность D пространства-времени не превосходит 26.

В действительности при $D < 26$ возникают другие трудности, и в дальнейшем изложении мы будем считать $D = 26$. Напомним, в чем разница между ду́хами и тахионами. Действие для скалярного поля

$$\mathscr{A} = \int d^4x\,(-c\,(\partial_{\mu}A)^2 - dA^2) \tag{22.30}$$

описывает ду́хи при $c < 0$ и тахионы при $d < 0$. Мы увидим, что открытая бозонная струна обладает тахионом.

Теперь мы можем определить, каким требованиям должна удовлетворять вторично квантованная калибровочно-ковариантная формулировка струн. Прежде всего должен существовать функционал действия, из уравнений движения которого следует уравнения (22.28). Можно, конечно, выбрать определенную ка-

либровку, следствием которой будет равенство $L_n = 0 (n \geqslant 1)$, а $(L_0 - 1)\psi = 0$ останется уравнением движения. Далее мы ожидаем, что действие будет локальным, т. е. свободная теория будет содержать пространственно-временные производные не выше второго порядка. Получаемые при этом действия будут содержать поля Янга — Миллса и гравитационное поле для открытой и замкнутой бозонных струн соответственно и, таким образом, обладать отвечающими этим полям калибровочными инвариантностями. Следовательно, нужно показать, что калибровочные симметрии струны содержат упомянутые выше симметрии.

Для квантования мы воспользуемся фейнмановским интегралом по путям, используя при его определении построенное действие с подходящей фиксацией калибровки и вводя поля ду́хов. Амплитуда перехода вакуум — вакуум дается выражением

$$\int \mathscr{D}\psi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \tag{22.31}$$

где действие S имеет вид

$$S = \int (\mathscr{D}x^\mu) f(\psi[x^\mu(\sigma)]) + \text{фиксация калибровки} + \text{ду́хи} + \text{источники}. \tag{22.32}$$

До недавнего времени вторичное квантование в теории струн производилось либо при явном присутствии связей, либо в конкретной калибровке, такой как калибровка светового конуса [186], при которой связи разрешены. Квантование линеаризованной теории с фиксированной калибровкой в рамках БРСТ-формализма обсуждается в работе [187]. В принципе возможно описать все свойства квантовой теории, работая в некоторой фиксированной калибровке. Однако без всех тех приемов, которые накоплены во вторичном квантовании, это может оказаться трудной задачей. В качестве примера упомянем вычисление аномалий, которые отсутствуют в калибровке светового конуса, а тщательное исследование лоренц-инвариантности показывает, что она нарушается, когда в теории имеются калибровочные аномалии. Другой пример — вся область описываемых вне рамок теории возмущений квазиклассических явлений и спонтанного нарушения симметрии, которая до сих пор развивалась в калибровочно-инвариантной формулировке. Возможно также, что свойства конечности теории струн проявляются особенно четко в ковариантной формулировке, как это было в случае суперсимметричных теорий.

Другое преимущество вторично квантованной теории струн состоит в том, что она поможет нам понять, что представляет

собой струна. Одно из замечательных достижений современной физики состоит в том, что отвечающие природе теории определяются почти однозначно своими симметриями. Например, теория с векторным потенциалом A_μ и локальной калибровочной инвариантностью, действие которой содержит производные не выше второго порядка, может быть основана только на функционале действия Янга — Миллса. Аналогично эйнштейновское действие определяется общекоординатными преобразованиями на пространстве с метрикой, а супергравитация определяется локальной суперсимметрией. Теории струн единственны с точностью до того, открыты струны или замкнуты, бозонные они или суперсимметричные. Они также обладают упомянутой выше локальной симметрией. Естественно предположить, что теория струны полностью определяется некоторой симметрией. Знание этой симметрии способствовало бы как объяснению многих удивительных сокращений, обнаруженных в теории струн, так и открытию многих других свойств. Ясно, что наличие инвариантного действия для набора преобразующихся полей, алгебра которых известна, значительно облегчит поиск лежащего в основе этой симметрии принципа и, следовательно, построение собственно теории струны.

22.3. Осцилляторный формализм

Чтобы проанализировать условия (22.28), удобно выразить участвующие в них величины через операторы рождения и уничтожения. Разложим $x^\mu(\sigma)$ в ряд Фурье

$$x^\mu(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n{}^\mu e^{in\sigma}, \tag{22.33}$$

где $x^\mu{}_0 = x^\mu$, а $x^\mu{}_{-n} = (x^\mu{}_n)^* = x^\mu{}_n$ в силу вещественности $x^\mu(\sigma)$ и определения (22.19). Вид разложения $x^\mu(\sigma)$ таков, что выполняются граничные условия открытой струны

$$\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\pi} = 0. \tag{22.34}$$

Согласно правилу дифференцирования, имеем

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial x_n{}^\nu}{\partial x^\mu(\sigma)} \frac{\partial}{\partial x_n{}^\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma} \frac{\partial}{\partial x_n{}^\mu}. \tag{22.35}$$

Определим

$$\tilde{\mathscr{P}}^\mu(\sigma) = \frac{(-1)}{\pi(2\alpha')^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n{}^\mu e^{in\sigma}. \tag{22.36}$$

Используя (22.33), находим для α_n^μ выражение

$$\alpha_n^\mu = i\left(\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_{n,\mu}} + n(2\alpha')^{-1/2}x_n^\mu\right). \tag{22.37}$$

Из вещественности $\tilde{\mathscr{P}}^\mu(\sigma)$ следует $\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu\dagger}$. Перестановочные соотношения операторов α_n^μ имеют вид

$$[\alpha_n^\mu,\ \alpha_m^\nu] = 0, \quad [\alpha_n^\mu,\ \alpha_m^{\nu\dagger}] = n\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu}, \quad n,\ m \geqslant 1. \tag{22.38}$$

Операторы Вирасоро L_n можно выразить через α_n:

$$L_n = \frac{1}{2}:\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\alpha_m^\mu\alpha_{n-m}^\nu\eta_{\mu\nu}:, \tag{22.39}$$

где для L_0 используется нормально упорядоченное выражение. Эти операторы удовлетворяют модифицированной по сравнению с (22.22) алгебре

$$[L_n,\ L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{26}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m}. \tag{22.40}$$

Дополнительное слагаемое справа возникает как следствие нормального упорядочения и называется центральным, а стоящий при $n(n^2-1)$ коэффициент называется центральным зарядом. Его значение легче всего найти, рассматривая вакуумное среднее этих соотношений. В частности, имеем

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^\mu\alpha_{0,\mu} + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^{\mu\dagger}\alpha_{m,\mu}, \tag{22.41}$$

$$L_1 = L_{-1}^\dagger = \alpha_0^\mu\alpha_{1,\mu} + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m^{\mu\dagger}\alpha_{m+1,\mu}, \tag{22.42}$$

где

$$\alpha_0^\mu = i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}.$$

Состояние струны в пространстве чисел заполнения можно описать через операторы рождения $\alpha_n^{\mu\dagger}$:

$$\psi[x^\mu(\sigma)] = \{\phi(x) + iA_\mu^1\alpha_1^{\mu\dagger} + h_{\mu\nu}\alpha_1^{\mu\dagger}\alpha_1^{\nu\dagger} + A_\mu^2 i\alpha_2^{\mu\dagger} + \ldots\}\langle x^\mu(\sigma)\,|\,0\rangle, \tag{22.43}$$

где вакуумное состояние удовлетворяет уравнению

$$\alpha_n^\mu\langle x^\mu(\sigma)\,|\,0\rangle = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{22.44}$$

Вакуум задается выражением

$$\langle x^\mu(\sigma)|0\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n}{2\alpha'} x_n^\mu x_{n,\mu}\right). \tag{22.45}$$

Действие операторов $\alpha_n^{\mu\dagger}$ на $\langle x^\mu(\sigma)|0\rangle$ порождает хорошо известный полный набор полиномов Эрмита. Следствием условий (22.28) являются уравнения для компонентных полей

$$\left(\partial^2 + \frac{4}{\alpha'}\right)\phi(x) = 0 = \left[\partial^2 - (l-1)\frac{4}{\alpha'}\right] A_\mu^l = \left(\partial^2 - \frac{4}{\alpha'}\right) h_{\mu\nu} \text{ и т. д.}, \tag{22.46}$$

а также

$$\partial^\mu A_\mu^1 = 0 = \sqrt{2}\partial^\mu A_\mu^2 + h_\nu^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu h_{\mu\nu} + A_\nu^2. \tag{22.47}$$

Доказанная в работе [187] теорема замечательна в том отношении, что хотя наличие операторов $\alpha_n^{0\dagger}$ могло бы привести к набору дýховых состояний, но условия (22.28) обеспечивают положительную определенность норм физических состояний.

22.4. Калибровочно-ковариантная теория на нижних уровнях

Теперь мы найдем действие в терминах поля ψ, которое не дополняется связями (22.28), но обладает калибровочной инвариантностью, позволяющей получать упомянутые связи как выбор калибровки при уравнениях движения. Следовательно, мы ожидаем наличия инвариантности относительно бесконечного набора калибровочных преобразований. Будем добиваться этого, переходя от уровня к уровню, последовательно ослабляя связи на поле ψ.

На первом уровне мы отбросим условие $L_1\psi = 0$, но сохраним связи

$$L_2\psi = L_1^2\psi = L_3\psi = L_2L_1\psi \ldots = 0. \tag{22.48}$$

Рассмотрим калибровочное преобразование ψ

$$\delta\psi = L_{-1}\Lambda_1, \tag{22.49}$$

соответствующее связям (22.48) на ψ. При этом Λ_1 удовлетворяет условиям

$$L_1\Lambda_1 = L_2\Lambda_1 = 0 = \ldots. \tag{22.50}$$

Используя выражение (22.42) для L_{-1}, находим, что эта инвариантность содержит калибровочное преобразование вида

$\delta A_\mu^1 = \partial_\mu \Lambda_1(x)$ — абелево преобразование, характерное для линеаризованной теории Янга — Миллса.

Инвариантное относительно преобразования $\delta\psi = L_{-1}\Lambda_1$ действие дается выражением

$$\frac{1}{2}\left(\psi, \left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1\right)\psi\right), \tag{22.51}$$

а уравнение движения имеет вид

$$\left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1\right)\psi = 0. \tag{22.52}$$

Это уравнение правильно воспроизводит линеаризованное уравнение Янга — Миллса, т. е. $\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\mu = 0$. Явная проверка инвариантности с учетом того, что $L_1\Lambda_1 = 0$, дает

$$\left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1\right)L_{-1}\Lambda_1 = (L_0 L_{-1} - L_{-1} - L_{-1}L_0)\,\Lambda_1 = 0. \tag{22.53}$$

Уравнение (22.52) было, по-видимому, известно некоторым исследователям во времена расцвета начального этапа теории струны, а недавно оно было вновь открыто [188][1]).

Проектор P струнного поля на физические состояния, удовлетворяющие уравнениям (22.28), был построен в работе [189]. Он обладает свойством $PL_{-n} = 0$ и в низшем порядке дается выражением

$$P = 1 - \frac{1}{2}L_{-1}\frac{1}{L_0}L_1 + \ldots. \tag{22.54}$$

Отметим, что *на этом уровне* уравнение движения имеет вид

$$(L_0 - 1)P\psi = 0. \tag{22.55}$$

Было высказано предположение, что это — правильное уравнение полевой теории струны для всех уровней, что подтверждалось найденным выше совпадением для спина 1 на первом уровне. Но вычисленный формально проектор P для всех уровней приводил к явной нелокальности уравнения (22.55) на втором уровне, и нелокальность возрастала с увеличением уровня. Дальнейшие сомнения были вызваны тем, что P можно построить для пространства-времени произвольной размерности, т. е. размерность $D = 26$ не является выделенной. Простейший способ показать, что уравнение (22.55) не является правильным обобщением уравнения движения, состоит в рассмотрении первого уровня замкнутой бозонной ориентированной струны. На этом уровне ковариантные степени свободы описываются одним сим-

[1]) S. Raby, P. C. West, неопубликованная работа.

метричным полем $h_{\mu\nu}$. Из условий Вирасоро (22.28) следует, что это поле удовлетворяет условиям

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \tag{22.56}$$

Из этих уравнений видно, что на данном уровне замкнутая струна содержит только спин 2 и спин 0. Обобщение уравнения (22.55) для этого уровня имеет вид

$$\partial^2 R_\mu{}^\rho R_\nu{}^\lambda h_{\rho\lambda} = 0, \tag{22.57}$$

где

$$R_\mu{}^\rho = \left(\delta_\mu{}^\rho - \frac{\partial_\mu \partial^\rho}{\partial^2}\right). \tag{22.58}$$

Читатель сразу увидит, что это нелокальное уравнение, которое не допускает гамильтоновой формулировки. Переход к локальному уравнению посредством умножения на ∂^2 ведет к появлению дополнительных состояний.

Действительно, известно (см. [190]), что калибровочно- и лоренц-инвариантного локального действия, построенного только из $h_{\mu\nu}$, которое описывало бы как спин 2, так и спин 0, не существует. Единственный способ добиться последней цели состоит во введении дополнительного скалярного поля, описывающего спин 0. В результате возникает хорошо известное действие Эйнштейн + безмассовое скалярное поле. Как мы увидим ниже, в отличие от спина 1 первый уровень замкнутой струны иллюстрирует общую ситуацию; а именно локальная формулировка теории, естественно, требует дополнительных полей, что мы и продемонстрируем. Действительно, только для спинов 0, 1 и 1/2 умножение на ∂^2 приводит к локальным уравнениям поля. С высшими спинами следует поступать иначе, и отношение между их проекторами и уравнениями поля более сложное.

Проверим, требуются ли дополнительные поля на втором уровне открытой бозонной струны [191]. Для подсчета числа состояний на этом уровне следовало бы проверить на этом уровне связи Вирасоро. Но последние обладают на массовой поверхности калибровочной инвариантностью, которую нужно определить, прежде чем описывать физические состояния. Это ясно уже для первого уровня, когда такими условиями являются $\partial^2 A^1{}_\mu = 0$ и $\partial^\mu A_\mu{}^1 = 0$. Как хорошо известно, на массовой поверхности имеется дополнительная инвариантность $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, где $\partial^2 \Lambda = 0$, которая позволяет произвести редукцию к двум состояниям вместо трех. Метод, быстрее приводящий к ответу, — использование того факта, что в калибровке светового конуса связи разрешаются и на массовой поверхности имеются только состояния, отвечающие осцилляторам $\alpha^i{}_n$, $i =$

$= 1, 2, \ldots, 24$. В этом случае для ψ получаем разложение

$$\{\phi + i(\alpha_1{}^i)^\dagger A_i{}^1 + h_{ij}(\alpha_1{}^i)^\dagger(\alpha_1{}^j)^\dagger + i(\alpha_2{}^i)^\dagger(A_i{}^2)\ldots\}\langle x^l(\sigma)\,|\,0\rangle. \quad (22.59)$$

На первом уровне имеем $(D-2)$ состояний, отвечающих $(D-2)$ состояниям, которые содержатся в векторном представлении группы $SO(D-2)$ — малой группы безмассовых частиц в размерности D. Поскольку массивные частицы должны принадлежать представлениям малой группы $SO(D-1)$, это показывает, что константа нормального упорядочения в (22.28) выбрана верно. Любой другой выбор нарушал бы лоренц-инвариантность в размерности D, так как $(D-2)$ состояний не могут реализовывать представление $SO(D-1)$.

На втором уровне имеем

$$\frac{(D-2)(D-1)}{2} + (D-2) = \frac{D(D-1)}{2} - 1 \quad (22.60)$$

состояний на массовой поверхности. Их можно отождествить только с представлением группы $SO(D-1)$, задаваемым симметричным бесследовым тензором второго ранга. Будем называть его «чистый спин 2». На массовой поверхности он описывается полем $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, удовлетворяющим уравнениям

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu{}^\mu = (\partial^2 - m^2)\, h_{\mu\nu} = 0. \quad (22.61)$$

Соответствующий проектор хорошо известен [194]. Он включает слагаемые вида $\partial_\mu\partial_\lambda\partial_\rho\partial_\sigma/(\partial^2)^2$, и, следовательно, умножение на (∂^2) не приводит к локальным уравнениям поля. Действительно, способа описать лоренц-ковариантным образом только массивную частицу спина 2 в терминах $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ с условием $h^\mu_\mu = 0$ не существует. Корректные уравнения движения требуют введения дополнительного поля ϕ и имеют вид

$$\begin{aligned}(-\partial^2 + m^2)\, h_{\mu\nu} + (\partial_\mu\partial^\rho h_{\rho\nu} + \partial_\nu\partial^\rho h_{\rho\mu}) - 2\frac{\eta_{\mu\nu}}{D}\,\partial^\rho\partial^\lambda h_{\rho\lambda} = \\ = \frac{D-2}{D-1}\left(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D}\,\partial^2\phi\right), \quad (22.62)\\ \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} = \left(\partial^2 - \frac{D}{D-2}\,m^2\right)\phi.\end{aligned}$$

Эта система уравнений приводит к требуемому результату:

$$0 = \partial^\mu h_{\mu\nu} = (\partial^2 - m^2)\, h_{\mu\nu}. \quad (22.63)$$

Приведенные уравнения иллюстрируют общий метод [192] введения добавочных полей для описания распространения полей высших спинов. На втором уровне струна содержит поля $h_{\mu\nu}$ и $A^2{}_\mu$; но последнее можно устранить калибровкой, оставив

одно бесследовое поле $h_{\mu\nu}$. Таким образом, чтобы воспроизвести уравнения массивного поля спина 2, требуется одно дополнительное поле ϕ. Это поле ϕ является низшей компонентой дополнительного струнного поля $\chi^{(2)}[x^\mu(\sigma)]$:

$$\chi^{(2)}[x^\mu(\sigma)] = \{\phi(x) + \ldots\}\,|x^\mu(\sigma)\,|0\rangle. \tag{22.64}$$

Найдем теперь калибровочно-ковариантное действие на следующем уровне. Исходя из функционала действия (22.51) и ослабляя связи (22.48) первого уровня, потребуем, чтобы ψ и $\chi^{(2)}$ удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} L_3\psi = L_2L_1{}^2\psi = L_1{}^3\psi = \ldots = 0, \\ L_1\chi^{(2)} = L_2\chi^{(2)} = \ldots = 0. \end{aligned} \tag{22.65}$$

Наиболее общее выражение соответствующего порядка имеет вид

$$\left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1 - \frac{1}{4}\gamma L_{-2}L_2\right)\psi + \left(L_{-1}^2 + \frac{3}{2}\beta L_{-2}\right)\chi^{(2)} = 0, \tag{22.66}$$

$$\left(L_1{}^2 + \frac{3}{2}\beta L_2\right)\psi = (aL_0 + b)\,\chi^{(2)}. \tag{22.67}$$

Появление в формулах (22.66), (22.67) одного и того же множителя β вытекает из требования, чтобы уравнения движения следовали из принципа действия. Альтернативный путь построения калибровочной инвариантности состоит в требовании, чтобы действие L_1 на (22.66) давало нуль при выполнении условия (22.67). Используя это и учитывая связи (22.65), получим

$$-\frac{1}{2}L_{-1}\left(L_1{}^2 + \frac{3}{2}\gamma L_2\right)\psi + (4L_{-1}L_0 + 2L_{-1})\,\chi^{(2)} + \frac{9}{2}\beta L_{-1}\chi^{(2)} = 0. \tag{22.68}$$

Чтобы исключить ψ в силу (22.67), необходимо выполнение равенства $\gamma = \beta$. В результате имеем

$$-\frac{1}{2}L_{-1}(aL_0 + b)\,\chi^{(2)} + L_{-1}\left(4L_0 + 2 + \frac{9}{2}\beta\right)\chi^{(2)} = 0. \tag{22.69}$$

Следовательно, $a = 8$ и $b = 4 + 9\beta$. Аналогичным образом, действуя оператором L_2, приходим к заключению, что $\beta = 1$, а уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}L_{-n}L_n\right)\psi + \left(L_{-1}^2 + \frac{3}{2}L_{-2}\right)\chi^{(2)} = 0, \\ \left(L_1{}^2 + \frac{3}{2}L_2\right)\psi = (8L_0 + 13)\,\chi^{(2)}. \end{aligned} \tag{22.70}$$

Эта система уравнений в действительности инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\delta_1\psi = L_{-1}\Lambda_1, \quad \delta_1\chi^{(2)} = \frac{1}{2}L_1\Lambda_1, \quad \delta_2\psi = L_{-2}\Lambda_2, \quad \delta_2\chi^{(2)} = \frac{3}{2}\Lambda_2, \tag{22.71}$$

где

$$L_2\Lambda_1 = L_1{}^2\Lambda_1 = \ldots = 0, \quad L_1\Lambda_2 = L_2\Lambda_2 = \ldots = 0. \tag{22.72}$$

Подчеркнем, что уравнения (22.70) инвариантны относительно преобразований с Λ_2 только при размерности $D = 26$. Не исключено, что дальнейшее включение дополнительных полей может ослабить это условие. Соответствующее действие имеет вид [191]

$$\frac{1}{2}\left(\psi, \left(L_0 - 1 - \frac{1}{2}L_{-1}L_1 - \frac{1}{4}L_{-2}L_2\right)\psi\right) + \\ + \left(\psi, \left(L_{-1}^2 + \frac{3}{2}L_{-2}\right)\chi^{(2)}\right) - \frac{1}{2}(\chi^{(2)}, (8L_0 + 13)\chi^{(2)}), \tag{22.73}$$

что завершает анализ второго уровня.

Прежде чем строить действие для всех порядков, полезно переписать результат для второго уровня в формализме первого порядка. Дополняя слагаемые с $L_1\psi$ и $L_2\psi$ до полных квадратов, мы можем переписать (22.73) в виде

$$\frac{1}{2}(\psi, (L_0 - 1)\psi) - \frac{1}{4}(L_1\psi - 2L_{-1}\chi^{(2)}, L_1\psi - 2L_{-1}\chi^{(2)}) - \\ - \frac{1}{8}(L_2\psi - 6\chi^{(2)}, L_2\psi - 6\chi^{(2)}) - 2(\chi^{(2)}, (L_0 + 1)\chi^{(2)}), \tag{22.74}$$

где использован тот факт, что для этого уровня $L_1\chi^{(2)} = 0$. Введем теперь вспомогательные поля $\phi^{(1)}$ и $\phi^{(2)}$ и перепишем функционал действия в следующей форме:

$$\frac{1}{2}(\psi, (L_0 - 1)\psi) + (\phi^{(1)}, L_1\psi + L_{-1}\xi^1{}_1) + (\phi^{(2)}, L_2\psi + 3\xi^1{}_1) + \\ + (\phi^{(1)}, \phi^{(1)}) + 2(\phi^{(2)}, \phi^{(2)}) - \frac{1}{2}(\xi^1{}_1, (L_0 + 1)\xi^1{}_1), \tag{22.75}$$

где

$$\xi^1{}_1 = -2\chi^{(2)}.$$

Тем самым завершен анализ второго уровня. Соответствующие построения вплоть до шестого уровня приведены в работе [191].

22.5. Конечный набор

Построим теперь действие, которое калибровочно-инвариантно на всех уровнях. Мы требуем калибровочной инвариантности относительно преобразований

$$\delta\psi = L_{-1}\Lambda_1 + L_{-2}\Lambda_2. \tag{22.76}$$

Это получалось в качестве следствия построения для низших уровней, но может также быть выведено из калибровочной инвариантности на массовой поверхности связей Вирасоро или из соответствующих проекторов. Теперь эта калибровочная инвариантность имеет место и вне массовой поверхности. Поскольку $L_{-3} = -[L_{-2}, L_{-1}]$, имеет место и калибровочная инвариантность относительно преобразований $\delta\psi = L_{-3}\Lambda_3$; рассуждая аналогично, получаем калибровочную инвариантность относительно $\delta\psi = L_{-n}\Lambda_n$ для всех $n > 1$.

Для действия A, инвариантного относительно (22.76), можно получить соотношение

$$0 = \left(\Lambda^1,\ L_1\frac{\delta A}{\delta\psi}\right) + \sum_i \left(\delta\phi^i,\ \frac{\delta A}{\delta\phi^i}\right), \tag{22.77}$$

где ϕ^i представляют остальные функционалы струны, которые могут фигурировать в A. Если полагать, что выполнены все уравнения поля, за исключением уравнения для ψ, то получим

$$L_1\frac{\delta A}{\delta\psi} = 0, \tag{22.78}$$

аналогично находим $L_2\delta A/\delta\psi = 0$. Уравнение для ψ должно иметь вид $(L_0 - 1)\psi + \ldots = 0$. Действуя операторами L_1 и L_2, мы видим, что для получения нуля нам нужно знать величины $L_1\psi$ и $L_2\psi$. Это требование ведет к появлению двух новых полей ϕ^1 и ϕ^2, чтобы фиксировать $L_1\psi$ и $L_2\psi$. При этом в действии должны быть слагаемые $(\phi^1, L_1\psi) + (\phi^2, L_2\psi)$. Следовательно, поля ϕ^1, ϕ^2 должны появиться и в уравнении для ψ:

$$(L_0 - 1)\psi + L_{-1}\phi^1 + L_{-2}\phi^2 = 0. \tag{22.79}$$

Введя эти новые слагаемые, следует теперь фиксировать величины $L_1\phi^1$, $L_2\phi^1$ и $L_1\phi^2$, $L_2\phi^2$, которые определяются из уравнений движения новых полей $\zeta^1{}_1$, $\zeta^2{}_1$ и $\zeta^1{}_2$, $\zeta^2{}_2$ соответственно. Выпишем эти полевые уравнения, добавив к ним с произвольными коэффициентами все возможные слагаемые подходящего уровня. Например, в уравнение для поля ϕ^2, которое начинается с величины $L_2\psi$, можно добавить член $c\zeta^1{}_1$, имеющий также уровень 2. Коэффициенты определяются из требования обращения в нуль результата действия операторов L_1 и L_2 на $\delta A/\delta\psi$. Так

получаются уравнения, приведенные в работе [193]. Они имеют следующий вид:

поле	полевое уравнение
ψ	$(L_0-1)\psi + L_{-1}\phi^1 + L_{-2}\phi^2 = 0$
ϕ^1	$L_1\psi = -2\phi^1 - L_{-1}\xi^1{}_1 - L_{-2}\xi^2{}_1$
ϕ^2	$L_2\psi = -4\phi^2 - L_{-1}\xi^1{}_2 - L_{-2}\xi^2{}_2 - 3\xi^1{}_1$
$\xi^1{}_1$	$L_1\phi^1 = (L_0+1)\xi^1{}_1 - 3\phi^2$
$\xi^2{}_1$	$L_2\phi^1 = (L_0+2)\xi^1{}_2$
$\xi^1{}_2$	$L_1\phi^2 = (L_0+2)\xi^2{}_1$
$\xi^2{}_2$	$L_2\phi^2 = (L_0+3)\xi^2{}_2$

(22.80)

Анализ действия на эти уравнения оператора L_1 мы оставляем читателю и рассмотрим более детально действие оператора L_2; получаем

$$(L_0+1)L_2\psi + 3L_1\phi^1 + L_{-1}L_2\phi^1 + \left(4L_0 + \frac{D}{2}\right)\phi^2 + L_{-2}L_2\phi^2 = 0. \tag{22.81}$$

Подставляя вместо $L_2\psi$, $L_1\phi^1$, $L_2\phi^1$ и $L_2\phi^2$ правые части из (22.80), находим

$$(D-26)\,\phi^2 = 0. \tag{22.82}$$

Следовательно, мы обнаружили, что система может существовать только при критической размерности $D = 26$.

При заданных уравнениях поля естественно исследовать полную калибровочную инвариантность. Последняя целиком определяется из преобразования $\delta\psi = L_{-1}\Lambda^1 + L_{-2}\Lambda^2$; легко проверить, что полные калибровочные преобразования имеют вид [193]

$$\delta\psi = \sum_{n=1}^{2} L_{-n}\Lambda^n, \quad \delta\phi^n = -(L_0+n-1)\Lambda^n, \tag{22.83}$$

$$\delta\xi^n{}_m = -L_m\Lambda^n - (2m+n)\Lambda^{n+m} \quad \text{при} \quad n,\ m = 1,\ 2. \tag{22.84}$$

Приведенные выше уравнения непосредственно следуют из действия

$$\frac{1}{2}(\psi,\ (L_0-1)\psi) + \sum_{n=1}^{2}(\phi^n,\ L_n\psi) + \sum_{n,\,m=1}^{2}(L_n\phi^m,\ \xi^n{}_m) + \\ + \sum_{n=1}^{2} n(\phi^n,\ \phi^n) - \frac{1}{2}\sum_{n,\,m=1}^{2}(\xi^n{}_m,\ (L_0+n+m-1)\xi^m{}_n) + \\ + \sum_{n,\,m=1}^{2}(2n+m)(\phi^{n+m},\ \xi^n{}_m). \tag{22.85}$$

Полученную систему мы будем называть системой «конечного набора».

В действительности таким способом можно построить свободные калибровочно-ковариантные формулировки всех известных струн: открытой и замкнутой бозонной струны, открытой и замкнутой суперструны и гетеротической струны. Эти формулировки читатель может найти в работе [193].

22.6. Бесконечный набор

Полученное описание открытой бозонной струны можно изменить так, что оно будет содержать бесконечный набор дополнительных полей [193, 194]. Преимущество такого описания в том, что все генераторы алгебры Вирасоро будут играть в нем одинаковую роль. Это достигается введением полей

$$\psi,\ \phi^n,\ \zeta^n{}_m,\quad n,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty, \tag{22.86}$$

а в действии (22.85) индексы суммирования пробегают теперь значения от 1 до ∞. Замечательно, что такое действие инвариантно относительно преобразований (22.83), (22.84), в которых суммирование происходит также от 1 до ∞. Это требует выполнения тождества

$$-\sum_{m=1}^{n-1}(2n-m)(n+m)+\frac{D}{12}n(n^2-1)-2n(n-1)=0, \tag{22.87}$$

которое верно только для $D=26$.

Для дальнейшего использования полезно выписать соответствующие этому набору уравнения движения; они имеют вид

$$\begin{gathered}(L_0-1)\psi+\sum_{n=1}^{\infty}L_{-n}\phi^n=0,\\ L_n\psi+L_{-n}\zeta^n{}_m+\sum_{p,\,m=1}^{\infty}\delta(m+p-n)(2p+m)\zeta^p{}_m+2n\phi^n=0,\\ L_n\phi^m-(L_0+n+m-1)\zeta^m{}_n=0.\end{gathered} \tag{22.88}$$

Конечно, недостаточно только построить калибровочно-инвариантное действие; нужно также потребовать, чтобы оно приводило к правильному числу состояний на массовой поверхности (числу степеней свободы). Один из способов проверить это — воспроизвести связи Вирасоро после подходящего выбора калибровки. Известно, что конечный и бесконечный наборы приводят к правильному числу состояний вплоть до десятого и шестого уровней соответственно [196]. Недавно[1]) были приведены аргументы, позволяющие предположить нарушение данного свойства на этих уровнях. Так ли это в действительности, станет ясно после явного подсчета числа состояний для этих уровней.

[1]) Y. Meurice, препринты ЦЕРН.

Уже на третьем и шестом уровнях для бесконечного и конечного наборов соответственно обнаружено существование сложных дополнительных симметрий [196], которые необходимы для подсчета состояний и для построения теории с взаимодействием.

Предпочтительнее, конечно, формулировка, в которой все симметрии описываются явно. Такую формулировку легко построить путем дальнейшего расширения бесконечного набора тем же способом, который был использован при переходе к этому набору. По существу мы требуем, чтобы действие операторов L_n на уравнения движения давало нулевой результат. Уравнение для ϕ^n требует знания величины $L_n\xi^m{}_p$, что приводит к появлению нового поля $\phi^{mn}{}_p$, которое в свою очередь приводит к полю $\psi^{mn}{}_{pq}$. Действуя таким образом, мы приходим к так называемой универсальной теории, содержащей поля

$$\psi_k^k, \quad \phi_k^{k+1},$$

где параметр k означает число стоящих на этом месте индексов. Мы увидим, что для данного уровня индексы полностью симметризованы.

В действительности при использовании некоторой техники переход от бесконечного к универсальному набору совершается непосредственно, и ниже мы увидим, как это происходит. Здесь мы рассматриваем некоторые из приемов, позволяющих просто построить универсальный набор.

Можно надеяться получить конечный и бесконечный наборы из универсального набора выбором калибровки. При этом можно найти компенсирующие преобразования, сохраняющие выбранную калибровку. Предварительное исследование сложных симметрий меньших наборов показывает, что это симметрии действительно такого типа. Ниже мы увидим, что универсальный набор ведет к правильному счету числа состояний на массовой поверхности. Следовательно, если бы удалось восстановить меньшие наборы из универсального выбором калибровки, это продемонстрировало бы, что меньшие наборы также дают правильное число состояний на массовой поверхности.

22.7. Универсальный набор

Универсальный набор был построен в работе [196] с помощью метода, который изложим в данном разделе. Он был также найден независимо в работе [197] путем обобщения калибровочно-ковариантной теории работ [195, 198][1]).

[1]) K. Itoh, T. Kugo, N. Kunitomo, H. Oogiri, неопубликованная работа. Этот набор также упоминали A. Restuccia, J. Taylor (неопубликованная работа).

Для дальнейшего полезно расширить пространство-время, введя антикоммутирующие координаты. Расширенное пространство параметризуется координатами $x^\mu(\sigma)$, $c(\sigma)$, $\bar{c}(\sigma)$, где $\chi^\mu(\sigma)$ — обычные бозонные координаты $\mu = 1, 2 \ldots 26$, а $c(\sigma)$, $\bar{c}(\sigma)$ — фермионные координаты. Потребуем, чтобы выполнялись граничные условия

$$\partial_\sigma x^\mu(\sigma) = \partial_\sigma c(\sigma) = \bar{c}(\sigma) = 0 \tag{22.89}$$

при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$. Действительно, такое 28-мерное пространство естественно возникает при БРСТ-квантовании действия Намбу для струны [199][1]). Отвечающие ду́хам поля $c(\sigma)$ и $\bar{c}(\sigma)$ следует ввести при фиксации двумерной репараметризационной симметрии мировой поверхности струны. Напомним читателю, что мы собираемся построить калибровочно-инвариантную вторично квантованную полевую теорию струн не используя БРСТ-формализм. Последний получается из нее стандартным приемом фиксации калибровки и введением соответствущих ду́хов.

Оказалось, однако, что многие приемы, возникшие в *первично квантованной* теории струны, имеют свои аналоги в *калибровочно-инвариантной* вторично квантованной теории.

Для $x^\mu(\sigma)$ имеем обычное разложение Фурье, а для $c(\sigma)$ и $\bar{c}(\sigma)$ разложения, отвечающие выбранным граничным условиям, имеют вид

$$\begin{aligned} c(\sigma) &= c^0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\sigma, \\ \bar{c}(\sigma) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \sin n\sigma. \end{aligned} \tag{22.90}$$

По аналогии с полем $x^\mu(\sigma)$ введем для полей $c(\sigma)$, $\bar{c}(\sigma)$ фермионные операторы рождения и уничтожения

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\sigma) &= \frac{\delta}{\delta c(\sigma)} - \frac{1}{2\pi}\bar{c}(\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_n e^{in\sigma}, \\ \beta(\sigma) &= -\frac{\delta}{\delta\bar{c}(\sigma)} + \frac{1}{2\pi}c(\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n e^{in\sigma}. \end{aligned} \tag{22.91}$$

Относительно обычного скалярного произведения имеем

$$\bar{\beta}(\sigma)^+ = \bar{\beta}(\sigma), \quad \beta(\sigma)^+ = \beta(\sigma). \tag{22.92}$$

Отметим, что в отличие от $\delta/\delta x^\mu(\sigma)$ мы не добавляем множитель i для эрмитовости, поскольку имеем дело с антикомму-

[1]) Эти координаты использовались также в работах [187].

тирующими величинами и

$$\left(\frac{\delta}{\delta c(\sigma)}\right)^{\dagger} = \frac{\delta}{\delta c(\sigma)}. \tag{22.93}$$

Следовательно,

$$\bar{\beta}_n{}^{\dagger} = \bar{\beta}_{-n}, \quad \beta_n{}^{\dagger} = \beta_{-n}, \tag{22.94}$$

и, в частности,

$$\bar{\beta}_0{}^{\dagger} = \bar{\beta}_0, \quad \beta_0{}^{\dagger} = \beta_0. \tag{22.95}$$

Очевидно, что эти фермионные осцилляторы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &\{\bar{\beta}_n^{\dagger}, \beta_m\} = \{\bar{\beta}_n, \beta_m^{\dagger}\} = \delta_{n,m}, \\ &\{\beta_n, \beta_m\} = 0 = \{\bar{\beta}_n, \bar{\beta}_m\}, \quad n, m \geqslant 0, \\ &\{\beta_n, \beta_m^{\dagger}\} = 0 = \{\bar{\beta}_n, \bar{\beta}_m^{\dagger}\}. \end{aligned} \tag{22.96}$$

Определим теперь вакуум по отношению к этим осцилляторам. Мы можем принять, что

$$\beta_n|\rangle = \bar{\beta}_n|\rangle = 0, \quad n \geqslant 1 \tag{22.97}$$

аналогично обычному случаю бозонных осцилляторов $\alpha^{\mu}{}_n$. Но определение действия нулевых мод на вакуум требует большей осторожности [199]. Можно определить вакуум $|+\rangle$ соотношением

$$\beta_0|+\rangle = 0; \tag{22.98}$$

тогда, подействовав на него оператором $\bar{\beta}_0$, получим новый вакуум

$$\bar{\beta}_0|+\rangle = |-\rangle; \tag{22.99}$$

так как $\bar{\beta}_0{}^2 = 0$, то мы найдем, что $\bar{\beta}_0|-\rangle = 0$. Из соотношения $\{\beta_0, \bar{\beta}_0\} = 1$ следует, что $\beta_0|-\rangle = |+\rangle$. Заметим, что

$$\langle +|+\rangle = \langle -|\beta_0\beta_0|-\rangle = 0 \tag{22.100}$$

и аналогично $\langle -|-\rangle = 0$. Однако верны соотношения

$$\langle +|-\rangle = \langle -|\beta_0\bar{\beta}_0|+\rangle = \langle -|+\rangle, \tag{22.101}$$

и мы принимаем, что $\langle +|-\rangle = 1$. Будем считать вакуум $|-\rangle$ нечетным, а следовательно, вакуум $|+\rangle$ — четным, поскольку β_0 — нечетный оператор (фермионный).

Рассмотрим наиболее общий функционал χ полей $x^{\mu}(\sigma)$, $c(\sigma)$, $\bar{c}(\sigma)$. В осцилляторном базисе он может быть записан

в виде

$$|\chi\rangle \equiv \psi|-\rangle + \phi|+\rangle =$$
$$= \sum_{\{n\}\{m\}} \beta^{n_1\dagger} \dots \beta^{n_b\dagger} \bar{\beta}^{\dagger}_{m_1} \dots \bar{\beta}^{\dagger}_{m_a} \psi_{n_1 \dots n_b}{}^{m_1 \dots m_a}[x^{\mu}(\sigma)]\,|-\rangle +$$
$$+ \sum_{\{n\}\{m\}} \beta^{n_1\dagger} \dots \beta^{n_b\dagger} \bar{\beta}^{\dagger}_{m_1} \dots \bar{\beta}^{\dagger}_{m_{a+1}} \phi_{n_1 \dots n_b}{}^{m_1 \dots m_{a+1}}[x^{\mu}(\sigma)]\,|+\rangle. \tag{22.102}$$

Так выглядят струнные функционалы, возникающие в ковариантной полевой теории струны. Дýховые переменные, как мы увидим, корректно описывают дополнительные поля. Это аналогично использованию суперпространства в суперсимметричных теориях, где оно позволяет систематически описывать компонентные поля супермультиплета.

Заметим, что $\psi_{n_1 \dots n_b}{}^{m_1 \dots m_a} = \psi_{[n_1 \dots n_b]}{}^{[m_1 \dots m_a]}$, и если $a+b$ — нечетное целое число, то $\psi_a{}^b$ — антикоммутирующее поле. Поскольку мы хотим описать калибровочно-инвариантную полевую теорию струны, а не БРСТ-инвариантную теорию, содержащую дýховые поля, мы потребуем, чтобы функционал χ был подчинен некоторой связи. Заметим, что рассмотренный выше универсальный набор содержит поля $\psi^k{}_k$, $\phi^{k+1}{}_k$. Они будут входить и в функционал $|\chi\rangle$, если удовлетворяется связь

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\beta^{m\dagger}\bar{\beta}_m - \bar{\beta}^{\dagger}_m \beta^m + \beta_0 \bar{\beta}_0\right)\right)|\chi\rangle = 0, \tag{22.103}$$

или

$$N|\chi\rangle = 0,$$

где N — оператор, стоящий в уравнении (22.103). Будем считать, что это уравнение выполнено. Заметим, что благодаря фермионной природе вакуума, если $|\chi\rangle$ нечетно, то компонентные поля $\psi^k{}_k$ и $\phi^{k+1}{}_k$ четны. Крайне полезным оператором является заряд Вирасоро, который строится следующим образом. Генераторы Вирасоро L_n в классической теории удовлетворяют алгебре $\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m} = -if_{mn}{}^p L_p$. Соответствующий БРСТ-заряд равен

$$Q' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{-n} L_n - \frac{1}{2} \sum_{n,m,p=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_p f_{nm}{}^p \beta_{-n} \beta_{-m}. \tag{22.104}$$

Конструкцию такого типа, примененную к первично квантованному гамильтониану, можно найти в работе [200]. Приведенное выше выражение не вполне определено до тех пор, пока в нем не произведено нормальное упорядочение; после этого

можно найти константу нормального упорядочения. Следовательно, мы рассмотрим выражение

$$Q =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{-n} L_n - \frac{1}{2} \sum_{n,\, m,\, p=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_p f_{nm}{}^p \beta_{-n} \beta_{-m} - a\beta_0 :. \quad (22.105)$$

Заметим, что, переставляя антикоммутирующие величины при нормальном упорядочении, мы должны добавить знак минус; например

$$:\beta_n \bar{\beta}_{-m}: = -\bar{\beta}_{-m} \beta_n \quad \text{при} \quad n,\, m \geqslant 1. \quad (22.106)$$

Непосредственно из определения, казалось бы, легко доказать, что $Q'^2 = 0$. Однако корректно определенный оператор Q обладает свойством $Q^2 = 0$ только при условии $D = 26$ и при $a = 1$ [199].

Оператор Q можно записать разными способами, которые нам потребуются ниже:

$$Q = \beta_0 K - 2\bar{\beta}_0 M + d + D, \quad (22.107)$$

где операторы K, M и D не содержат нулевых мод, т. е. β_0 и $\bar{\beta}_0$. Мы найдем, что

$$\begin{aligned} K &= L_0 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n\beta_n^+ \bar{\beta}_n + n\bar{\beta}_n^+ \beta_n), \\ M &= \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n^+ \beta_n, \\ d &= \beta^{n+} \left(L_n + f_{m-n}{}^p \bar{\beta}_p^+ \beta^m + \frac{1}{2} \beta^{m+} f_{mn}{}^p \bar{\beta}_p \right), \\ D &= \beta^n \left(L_{-n} + f_{m-n}{}^p \beta^{m+} \bar{\beta}_p + \frac{1}{2} \bar{\beta}_p^+ f_{mn}{}^p \beta^m \right), \quad m,\, n,\, p \geqslant 1. \end{aligned} \quad (22.108)$$

Заметим, что $D = d^+$ и они удовлетворяют соотношениям

$$d^2 = D^2 = 0, \quad [K,\, d] = 0 = [K,\, D] = [K,\, M], \quad (22.109)$$

$$[M,\, d] = [M,\, D] = 0, \quad \{d,\, D\} - 2MK = 0. \quad (22.110)$$

Из этих соотношений следует

$$Q^2 = \{d,\, D\} - 2MK = 0. \quad (22.111)$$

Рассмотрим теперь действие оператора Q на произвольный функционал χ. Если состояние $|\chi\rangle$ нечетно, то мы найдем

$$Q|\chi\rangle = (2M\phi + (d + D)\psi)|-\rangle + (K\psi + (d + D)\phi)|+\rangle, \quad (22.112)$$

а если состояние $|\chi\rangle$ четно, то

$$Q|\chi\rangle = (-2M\phi + (d + D)\psi)|-\rangle + (-K\psi + (d + D)\phi)|+\rangle, \quad (22.113)$$

где операторы K, M, d и D теперь определяются их действием на $\psi_{n_1 \dots n_b}^{m_1 \dots m_a}$:

$$(K\psi)_{n_1 \dots n_b}^{m_1 \dots m_a} = (L_0 - 1 + m + n)\,\psi_{n_1 \dots n_b}^{m_1 \dots m_a},$$

$$(M\psi)_{n_1 \dots n_{b+1}}^{m_1 \dots m_{a-1}} = (-1)^b\, a\left(\eta_{[n_1 p}\psi_{n_2 \dots n_{b+1}]}^{pm_1 \dots m_{a-1}}\right),$$

$$(d\psi)_{n_1 \dots n_{b+1}}^{m_1 \dots m_a} = L_{[n_1}\psi_{n_2 \dots n_{b+1}]}^{m_1 \dots m_a} + a f_{p-n_1}{}^{m_1}\psi_{n_2 \dots n_{b+1}}^{pm_2 \dots m_a} - \\ - \frac{1}{2} b f_{n_1 n_2}{}^{p}\psi_{pn_3 \dots n_{b+1}}^{m_1 \dots m_a},$$

$$(D\psi)_{n_1 \dots n_b}^{m_1 \dots m_{a-1}} = (-1)^b\, a\Big[L_{-p}\psi_{n_1 \dots n_b}^{pm_1 \dots m_{a-1}} + b f_{n-p}{}^{q}\psi_{qn_2 \dots n_b}^{pm_1 \dots m_{a-1}} - \\ - \frac{1}{2}(a-1)\, f_{ke}{}^{m_1}\psi_{n_1 \dots n_b}^{kem_2 \dots m_{a-1}}\Big],$$

где $m = \sum_{i=1}^{a} m_i$, $n = \sum_{i=1}^{b} n_i$. Эти определения отличаются от приведенных в литературе тривиальными множителями. Отличие в знаках для четного и нечетного состояния $|\chi\rangle$ следует из различия четности числа перестановок, необходимых для того, чтобы операторы нулевых мод непосредственно действовали на вакуум.

Например,

$$\psi_0^0 = \psi, \quad \phi_0^1 = \phi^n, \quad d\psi_0^0 = L_n\psi, \quad (D\phi_0^1) = L_{-n}\phi^n,$$
$$(d\phi_0^1) = L_m\phi^n + (2m+n)\,\phi^{n+m}, \quad (M\phi_0^1) = n\phi^n, \qquad (22.114)$$
$$K\phi^n = (L_0 - 1 + n)\,\phi^n.$$

Теперь понятно, что такие операторы особенно подходят для обсуждения уравнений движения (22.88) в случае бесконечного набора. Эти уравнения могут быть переписаны в форме

$$K\psi_0^0 + D\phi_0^1 = 0, \quad d\psi_0^0 + D\psi_1^1 + 2M\phi_0^1 = 0, \quad K\psi_1^1 + d\phi_0^1 = 0, \qquad (22.115)$$

где $\psi_1^1 = \{\xi^n{}_m\colon\ n,\ m = 1,\ 2,\ \dots,\ \infty\}$, а калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta\psi_0^0 = D\Lambda_0^1, \quad \delta\phi_0^1 = -K\Lambda_0^1, \quad \delta\psi_1^1 = d\Lambda_0^1. \qquad (22.116)$$

Теперь легко доказать инвариантность уравнений (22.115) относительно калибровочных преобразований (22.116). Обобщение на случай универсального набора очевидно. Общие уравнения имеют вид [196, 197]

$$K\psi_a^a + D\phi_a^{a+1} + d\phi_{a-1}^a = 0, \quad d\psi_a^a + D\psi_{a+1}^{a+1} + 2M\phi_a^{a+1} = 0, \qquad (22.117)$$

тогда как калибровочные преобразования можно представить в виде

$$\delta\psi_a^a = d\Lambda_{a-1}^a + D\Lambda_a^{a+1} - 2M\Omega_{a-1}^{a+1}, \quad \delta\phi_a^{a+1} = -K\Lambda_a^{a+1} + \\ + d\Omega_{a-1}^{a+1} + D\Omega_a^{a+2}, \quad (22.118)$$

где Ω — параметры нового преобразования симметрии. Некоторые следы этой симметрии можно найти в случае бесконечного набора, хотя благодаря компенсирующим преобразованиям они проявляются в довольно сложной форме.

Полное использование приведенного выше формализма дает крайне простое описание универсального набора. Прежде чем перейти к этому, вернемся на время к точечной частице [187]. Здесь мы имеем только одну связь

$$Q = \beta_0(-\partial^2 + m^2), \quad (22.119)$$

так как классическая алгебра связей (относительно скобок Пуассона) абелева. Хорошо известное действие Клейна — Гордона может быть записано в виде

$$\int d^4x\psi\,(-\partial^2 + m^2)\,\psi = \langle\chi|Q|\chi\rangle, \quad (22.120)$$

где $|\chi\rangle = \psi|-\rangle + \phi|+\rangle$ — наиболее общий функционал от x^μ, c и $\bar{c}$. Очевидно, что $Q^2 = 0$, поэтому действие инвариантно относительно преобразования

$$\delta|\chi\rangle = Q|\Lambda\rangle. \quad (22.121)$$

В компонентной записи имеем

$$\delta\psi = 0, \quad \delta\phi = (-\partial^2 + m^2)\,\Lambda, \quad (22.122)$$

где $|\Lambda\rangle = \Lambda|-\rangle + \Omega|+\rangle$ и симметрия тривиально реализована.

Вернемся к теории струны, где действие в случае универсального набора имеет вид [196, 197]

$$\tfrac{1}{2}\langle\chi|Q|\chi\rangle \quad (22.123)$$

с калибровочным преобразованием

$$\delta|\chi\rangle = Q|\Lambda\rangle. \quad (22.124)$$

Напомним, что величина $|\chi\rangle$ подчинена алгебраической связи $N|\chi\rangle = 0$, откуда с учетом соотношения $[\phi, N] = -N$ получаем связь

$$(N+1)|\Lambda\rangle = 0, \quad (22.125)$$

которой подчинен функционал $|\Lambda\rangle$. Тогда функционал $|\Lambda\rangle = \Lambda|-\rangle + \Omega|+\rangle$ содержит следующие функционалы от $x^\mu(\sigma)$:

$$\Lambda_k^{k+1},\ \Omega_k^{k+2} \quad \text{для всех} \quad k. \tag{22.126}$$

Действие может быть выражено в функциональной форме

$$\frac{1}{2}\int \mathscr{D}x^\mu(\sigma)\,\mathscr{D}c(\sigma)\,\mathscr{D}\bar{c}(\sigma)\,\chi[x^\mu(\sigma),\ c(\sigma),\ \bar{c}(\sigma)]\,Q\chi[x^\mu(\sigma),\ c(\sigma),\ \bar{c}(\sigma)]; \tag{22.127}$$

функциональная форма Q имеет вид

$$Q = \frac{i\pi}{2} : \oint \frac{dz}{z}\left[\pi\alpha'\sqrt{2}\,\tilde{\mathscr{P}}_\mu^2 - \frac{1}{\pi^2} + z\frac{d}{dz}(\beta\bar{\beta}) + z\left(\frac{d}{dz}\,\beta\right)\bar{\beta}\right]\beta : , \tag{22.128}$$

где $z = e^{-i\sigma}$. Заметим, что χ и Q нечетны, нечетна также мера $\mathscr{D}c(\sigma)\,\mathscr{D}\bar{c}(\sigma) = \prod_{n=0}^{\infty} dc_n \prod_{n=1}^{\infty} d\bar{c}_n$ благодаря тому факту, что координата $c(\sigma)$ имеет на одну нулевую моду больше, чем $\bar{c}(\sigma)$.

Уравнение движения имеет вид

$$Q|\chi\rangle = 0. \tag{22.129}$$

С учетом (22.112) оно может быть записано через компоненты $\psi^k{}_k$ и $\phi^{k+1}{}_k$ в виде

$$K\psi + d\phi + D\phi = 0, \quad d\psi + D\psi + 2M\phi = 0. \tag{22.130}$$

Преобразование, записанное в терминах компонентных полей $\Lambda^{k+1}{}_k$, $\Omega^{k+2}{}_k$, имеет вид

$$\delta\psi = (d + D)\,\Lambda - 2M\Omega, \quad \delta\phi = -K\Lambda + (d + D)\,\Omega. \tag{22.131}$$

Оно, конечно, тождественно преобразованию (22.118), в котором явно указана структура индексов.

Действие $\langle\chi|Q|\chi\rangle$ в компонентной записи принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}(\psi,\ K\psi) + (\psi,\ d\phi) + (D\phi,\ \psi) + (\phi,\ M\phi). \tag{22.132}$$

При выводе этого результата мы приняли во внимание вакуумные свойства (22.98) и (22.99) и воспользовались тем, что $(\psi,\ d\phi) = (D\psi,\ \phi)$ для произвольных ψ и ϕ.

Заметим, что преобразование $|\Lambda\rangle = Q|\Lambda'\rangle$ не изменяет $|\chi\rangle$ и является так называемой скрытой инвариантностью. Это автоматически приводит к появлению «дýхов для дýхов», поскольку член, фиксирующий калибровку, должен содержать только $|\chi\rangle$, и, следовательно, соответствующее дýховное действие неизбежно инвариантно относительно этого преобразования. Ниже мы обсудим этот вопрос.

В отличие от конечного и бесконечного наборов можно непосредственно показать, что универсальный набор приводит к корректному ответу для числа состояний на массовой поверхности.

22.8. Спектр состояний универсального набора [196]

Число степеней свободы на массовой поверхности для струны в размерности $D = 26$ то же, что и для полей в функционале $x^i(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, 24$ и x^-. Это объясняется тем, что в калибровке светового конуса, где остаются только $x^i(\sigma)$ и координата центра масс x^-, все степени свободы физические. Следовательно, число степеней свободы для каждого уровня N есть $p(N)$, производящая функция которых равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(N)\, x^N = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-24} = 1 + 24x + \ldots . \quad (22.133)$$

Отметим, что статистическая сумма $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-D}$ дает число степеней свободы D-мерного функционала.

Теперь мы должны показать, что к тому же числу степеней свободы приводит действие $\langle\chi|Q|\chi\rangle$. Это можно продемонстрировать *тремя способами*:

1. Подсчитать степени свободы в классической теории лоренц-ковариантным способом — задача нетривиальная уже для фотона.

2. Показать, что, выбрав калибровку, можно перейти к формализму светового конуса.

3. Проквантовать систему, т. е. фиксировать калибровку, добавить ду́хи и показать, что разность бозонных и фермионных степеней свободы для уровня N равна $p(N)$.

Мы выберем третий способ. Начнем с классической теории, содержащей компонентные поля ψ_k^k, ϕ_k^{k+1}. Используя соотношение (22.118), фиксируем Λ_k^{k+1} так, чтобы было $\phi_k^{k+1} = 0$. Тем самым мы вставим в континуальный интеграл δ-функцию $\delta(\phi_k^{k+1})$ и опустим следующее ду́ховое слагаемое $\bar{\Lambda}_{k+1}^k(-K\Lambda_k^{k+1} + D\Omega_k^{k+2} + d\Omega_{k-1}^{k+1})$. При этом мы используем для полей ду́хов те же обозначения, что и для симметрий, из которых они возникли. Но действие для ду́хов в свою очередь обладает инвариантностью, отвечающей «скрытой» симметрии $|\Lambda\rangle = Q|\Lambda'\rangle$. Поскольку $[Q, N] = -N$, находим, что равенство $N|\chi\rangle = 0$ приводит к тому, что $(N+2)|\Lambda'\rangle = 0$ и, следовательно, действие содержит поля $\{\Lambda_{k-1}'^{k+1}, \Omega_{k-1}'^{k+2}\}$. Эта инвариантность фиксируется условием $\Omega_{k-1}^{k+1} = 0$, т. е. появлением в континуальном интег-

рале δ-функции $\delta(\Omega_{k-1}^{k+1})$ и добавочного слагаемого

$$\bar{\Lambda}_{k+1}^{\prime k-1}(K\Lambda_{k-1}^{\prime k+1} + d\Lambda_{k-2}^{\prime k+1} + D\Lambda_{k-1}^{\prime k+2}). \tag{22.134}$$

Это слагаемое обладает инвариантностью, отвечающей симметрии $|\Lambda'\rangle = Q|\Lambda''\rangle$, что требует введения дýхов для дýхов. Такую процедуру можно продолжать бесконечно.

Окончательный результат содержит поля

$$\begin{gathered}\psi_k^k,\quad \Lambda_k^{k+1},\quad \Lambda_{k-1}^{\prime k+1},\quad \Lambda_{k-1}^{\prime\prime k+2}\ \ldots,\\ \bar{\Lambda}_{k+1}^{k},\quad \bar{\Lambda}_{k+1}^{\prime k-1},\quad \bar{\Lambda}_{k+2}^{\prime\prime k-1}\ \ldots,\end{gathered} \tag{22.135}$$

которые появляются в действии с оператором кинетической энергии K. Отметим, что в этом наборе имеется один и только один тензор типа $\Lambda^{m_1\ldots m_a}{}_{n_1\ldots n_b}$ для каждых a и b. Эти поля могут быть компактно записаны в виде функционала χ, который не имеет вакуумного состояния $|+\rangle$, а в остальном произволен:

$$\begin{gathered}\bar{\beta}_0|\chi\rangle = 0,\\ |\chi\rangle = \sum_{\{m\}\{n\}} \beta^{n_1\dagger}\ \ldots\ \beta^{n_b\dagger}\bar{\beta}^{\dagger}_{m_1}\ \ldots\ \bar{\beta}^{\dagger}_{m_a}\Lambda^{m_1\ldots m_a}{}_{n_1\ldots n_b}|-\rangle.\end{gathered} \tag{22.136}$$

Свободное БРСТ-действие дается выражением

$$\langle\chi|\beta_0 K|\chi\rangle = \langle\chi|[\beta_0\bar{\beta}_0,\ Q]|\chi\rangle, \tag{22.137}$$

которое, конечно, уже не калибровочно-инвариантно, но БРСТ-инвариантно, а именно

$$\delta|\chi\rangle = \lambda Q|\chi\rangle, \tag{22.138}$$

где λ — антикоммутирующий параметр БРСТ-преобразования.

Продемонстрируем теперь, что действие с фиксированной калибровкой, первоначально найденное Зигелем [187] другим способом, дает правильное число степеней свободы. Запишем тензор Λ_{b+c}^{a+c} в виде

$$\Lambda_{n_1\ldots n_b;\ p_1\ldots p_c}{}^{m_1\ldots m_a;\ p_1\ldots p_c}, \tag{22.139}$$

где он имеет c общих индексов. Такой тензор впервые дает вклад на уровне $M = \sum_{i=1}^{a} m_i + \sum_{i=1}^{b} n_i + 2\sum_{i=1}^{c} p_i$ и является коммутирующим или антикоммутирующим в зависимости от того, четно или нечетно число $\sum m_i + \sum n_i$. Полное число (бозе- и ферми-) тензоров на уровне M равно $c(m)$ с производящей функцией

$$\sum_{m=0}^{\infty} c(m)\,x^m = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2x^n + x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^2. \tag{22.140}$$

Поскольку каждый тензор дает вклад $T^{26}(N-M)$, полное число степеней свободы на уровне N равно

$$p(N) = \sum_{m=0}^{N} c(m)\, T^{26}(N-m);$$

окончательно имеем

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(N)\, x^N = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} c(m)\, T^{26}(N-m)\, x^{N-m} x^m =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{26}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-24} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{24}(N)\, x^N. \tag{22.141}$$

Следовательно, мы восстановили результаты подсчета числа степеней свободы в калибровке светового конуса и подтвердили, что функционал $\langle\chi|Q|\chi\rangle$ описывает спектр теории струны.

Гораздо более короткое доказательство этого утверждения таково [196]:

$$\sum_{N} (n_B(N) - n_F(N))\, x^N = S\,\mathrm{Tr}\, x^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^{\mu\,\dagger}\alpha_n^{\mu} + \beta_n^{\dagger}\beta_n + \bar{\beta}_n^{\dagger}\bar{\beta}_n\right)} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^{26}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}, \tag{22.142}$$

где мы воспользовались фермионной статистической суммой.

На этом мы заканчиваем обсуждение открытой бозонной струны. Приведенное здесь систематическое построение свободной калибровочно-ковариантной теории может быть легко перенесено на другие случаи. При этом прежде всего находят конечный набор, затем обобщают его на бесконечный и далее на универсальный набор. Последний записывается в удобной форме, используя дополнительные координаты. Подсчет состояний производится тем же методом, что и выше. Замкнутая бозонная и открытая фермионная струны строятся тем же способом, что и открытая бозонная струна. Обсуждение свободных калибровочно-ковариантных теорий этих струн читатель может найти в лекциях автора, прочитанных в Триесте (1986 г.), и в приведенных там ссылках на литературу. Лекции содержат и обсуждение калибровочно-ковариантной теории взаимодействующих струн.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПОЯСНЕНИЕ ВЫБРАННЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Использованные нами обозначения взяты из книги [6]. Конечно, они остаются лишь обозначениями, и одна система обозначений по существу не лучше другой. Но некоторые обозначения упрощают вычисления и, следовательно, уменьшают вероятность алгебраических ошибок. Обсудим теперь обозначения, выбранные нами из соображений простоты.

Метрика в пространстве Минковского определяется метрическим тензором $\eta_{mn} = (-, +, +, +)$. Полностью антисимметричный тензор ε равен

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1. \tag{A.1}$$

Мы различаем индексы для плоского и искривленного пространств. Спиноры могут иметь 2 и 4 компоненты. Если рассматривается объект с векторными и спинорными индексами одновременно, то такие индексы мы называем супериндексами. В приведенной ниже таблице систематизированы эти обозначения.

Пространство	Вектор	2-комп. спинор	4-комп. спинор	Супериндексы
Плоское	m, n	$A, \dot{A}$	α, β	M, N
Искривленное	$\underline{\mu}, \underline{\nu}$	$\underline{A}, \underline{\dot{A}}$	$\underline{\alpha}, \underline{\beta}$	$\underline{\Lambda}, \underline{\Pi}$

Супериндексы свертываются в «северо-западном» направлении (левый верхний с правым нижним). Например,

$$\chi^{M}\zeta_{M}, \quad \varepsilon^{M}T_{MN}{}^{R}, \quad E_{M}{}^{\underline{\Lambda}}\xi_{\underline{\Lambda}}. \tag{A.2}$$

Эти свертки могут быть переписаны по определению через двухкомпонентные спиноры и векторы следующим образом:

$$\begin{aligned}
\chi^{M}\zeta_{M} &= \chi^{m}\zeta_{m} + \chi^{A}\zeta_{A} + \chi^{\dot{A}}\zeta_{\dot{A}} = (-1)^{M}\chi_{M}\zeta^{M}, \\
\varepsilon^{M}T_{MN}{}^{R} &= \varepsilon^{m}T_{mN}{}^{R} + \varepsilon^{A}T_{AN}{}^{R} + \varepsilon^{\dot{A}}T_{\dot{A}N}{}^{R}, \\
E_{M}{}^{\underline{\Lambda}}\xi_{\underline{\Lambda}} &= E_{M}{}^{\underline{\mu}}\xi_{\underline{\mu}} + E_{M}{}^{\underline{A}}\xi_{\underline{A}} + E_{M}{}^{\underline{\dot{A}}}\xi_{\underline{\dot{A}}}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Символ $(-)^M$ равен $+1$ при $M=m$ и равен (-1) при $M=A$ или $M=\dot{A}$.

Двухкомпонентные спиноры χ^A, $\zeta_{\dot{A}}$ принадлежат представлениям (1/2, 0) и (0, 1/2) группы Лоренца. Их индексы можно поднять и опустить с помощью инвариантных тензоров:

$$\varepsilon_{AB}=\varepsilon^{AB}=-\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}=-\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}, \quad \varepsilon_{12}=+1. \tag{A.4}$$

Заметим, что $\varepsilon^{CB}\varepsilon_{BA}=-\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CB}=\delta_A{}^C$. Причина появления знака минус станет ясной, когда мы потребуем, чтобы выполнялось сформулированное выше правило «северо-западного» свертывания четырех- и двухкомпонентных объектов. Для поднятия и опускания спинорных инекcов используются те же правила, что и для супериндексов. Следовательно,

$$\chi_A=\chi^B\varepsilon_{BA}, \quad \chi^A=\varepsilon^{AB}\chi_B, \quad \zeta_{\dot{A}}=\zeta^{\dot{B}}\varepsilon_{\dot{B}\dot{A}}, \quad \zeta^{\dot{A}}=\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}\zeta_{\dot{B}}. \tag{A.5}$$

В результате $\theta^A\theta_A=-\theta_A\theta^A\equiv\theta^2$ — лоренцев инвариант; аналогично получаем $+\theta^{\dot{A}}\theta_{\dot{A}}=-\theta_{\dot{A}}\theta^{\dot{A}}\equiv\bar{\theta}^2$. Следовательно, имеем

$$\theta_A\theta_B=-\frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\theta^2. \tag{A.6}$$

Матрицы $(\sigma^m)^{AB}=(\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})^{AB}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули:

$$\boldsymbol{\sigma}=\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right), \tag{A.7}$$

являются тензорами, инвариантными относительно преобразований группы Лоренца. Опуская индексы матрицы $(\sigma^m)^{A\dot{B}}$, находим

$$(\sigma^m)_{A\dot{B}}=+(\bar{\sigma}^m)_{\dot{B}A},$$

где $(\bar{\sigma}^m)_{\dot{B}A}=(-\mathbf{1}, +\boldsymbol{\sigma})_{\dot{B}A}$. Заметим, что $\sigma_m=(-\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ и $\bar{\sigma}_m=(+\mathbf{1}, +\boldsymbol{\sigma})$.

Обе матрицы σ^m и $\bar{\sigma}^m$ имеют одни и те же пространственные компоненты $\boldsymbol{\sigma}$. Это естественно при нашем выборе метрики $(-, +, +, +)$ и ведет к соотношениям между σ^m и $\bar{\sigma}_m$, не содержащим знака минус.

Матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&(\sigma^m)^{\dot{A}B}\,(\bar{\sigma}_n)_{\dot{B}C}=+\delta^m{}_n\delta^A{}_C+(\sigma^m{}_n)^A{}_C,\\
&(\bar{\sigma}^m)_{\dot{B}A}\,(\sigma_n)^{A\dot{C}}=+\delta^m{}_n\delta^{\dot{C}}{}_{\dot{B}}+(\bar{\sigma}^m{}_n)_{\dot{B}}{}^{\dot{C}},\\
&(\sigma^m)^{A\dot{B}}\,(\bar{\sigma}^n)_{\dot{B}C}=+\eta^{mn}\delta_C{}^A+(\sigma^{mn})^A{}_C,\\
&\frac{1}{2}\varepsilon_{mnrs}(\sigma^{rs})^A{}_B=i(\sigma_{mn})^A{}_B,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

где

$$(\sigma^m{}_n)^A{}_C = \frac{1}{2}(\sigma^m\bar{\sigma}_n - \sigma_n\bar{\sigma}^m)^A{}_C,$$
$$(\bar{\sigma}^m{}_n)_{\dot{B}}{}^{\dot{C}} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^m\sigma_n - \bar{\sigma}_n\sigma^m)_{\dot{B}}{}^{\dot{C}}. \qquad (A.9)$$

Обратим внимание на то, что матрицы σ^{mn} и $\bar{\sigma}^{mn}$ с двумя верхними или нижними индексами симметричные. Приведем еще ряд полезных тождеств:

$$(\sigma^m)^{A\dot{B}}(\bar{\sigma}_m)_{\dot{C}D} = 2\delta^A{}_D\delta^{\dot{B}}{}_{\dot{C}}, \quad (\sigma^m)^{A\dot{B}}(\sigma_m)^{C\dot{D}} = +2\varepsilon^{AC}\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}},$$
$$(\sigma^m)^{A\dot{B}}(\bar{\sigma}^n)_{\dot{B}D}(\sigma^r)^{D\dot{E}} = \qquad (A.10)$$
$$= +[\eta^{mn}\eta^{rs} + \eta^{ms}\eta^{nr} - \eta^{mr}\eta^{ns}](\sigma_s)^{A\dot{E}} + i\varepsilon^{mnrs}(\sigma_s)^{A\dot{E}}.$$

Для того чтобы установить соответствие между четырех- и двухкомпонентными спинорами, рассмотрим теперь четырехкомпонентные спиноры. Представление, удобное для перехода к двухкомпонентным спинорам, имеет вид

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^m \\ i\bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} \sigma^m = (\mathbf{1},\ \boldsymbol{\sigma}), \\ \bar{\sigma}^m = (-\mathbf{1},\ \boldsymbol{\sigma}). \end{matrix}$$

Определим также матрицу

$$\gamma_5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{причем} \quad \gamma_5^2 = +1. \qquad (A.11)$$

Майорановским называют спинор, для которого майорановски-сопряженный спинор равен дираковски-сопряженному. Майорановски-сопряженным по отношению к четырехкомпонентному спинору будет по определению спинор

$$\bar{\chi}_M = \chi^T C \quad \text{или} \quad (\bar{\chi}_M)_\alpha = \chi^\beta C_{\beta\alpha}. \qquad (A.12)$$

Дираковски-сопряженный спинор определен следующим образом:

$$\bar{\chi}_D = \chi^\dagger(i\gamma^0) \quad \text{или} \quad (\bar{\chi}_D)_\alpha = (\chi^\beta)^*(i\gamma^0)^\beta{}_\alpha. \qquad (A.13)$$

Следовательно, майорановский спинор удовлетворяет тождеству

$$\chi^T C = \chi^\dagger\gamma^0 i \quad \text{или} \quad \chi^\beta C_{\beta\alpha} = (\chi^\beta)^*(i\gamma^0)^\beta{}_\alpha. \qquad (A.14)$$

Четырехмерная матрица зарядового сопряжения $C_{\alpha\beta}$ антисимметрична, а матрица $C\gamma^m$ симметрична, т. е.

$$C^T = -C, \quad C\gamma^m C^{-1} = -(\gamma^m)^T. \qquad (A.15)$$

В указанном выше представлении имеем

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы установить связь между двух- и четырехкомпонентными спинорами. Разложим четырехкомпонентный спинор на два двухкомпонентных:

$$\chi^\alpha = \begin{pmatrix} \chi^A \\ \zeta_{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Следовательно, двухкомпонентные спиноры связаны с четырехкомпонентными соотношениями

$$\chi^A = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi^\alpha, \quad \bar{\zeta}_{\dot{A}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\chi^\alpha. \tag{A.18}$$

Здесь χ^A и $\zeta_{\dot{A}}$ обозначают лишь две первые и две последние компоненты спинора χ^α. Матрица зарядового сопряжения имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{AB} & 0 \\ 0 & +\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

Майорановское условие $\bar{\chi}_M = \bar{\chi}_D$ принимает вид

$$(\chi_A)^* = \zeta_{\dot{A}}, \quad (\chi^A)^* = -\zeta^{\dot{A}}, \tag{A.20}$$

где в соответствии с правилом «северо-западного» свертывания

$$\chi_A = \chi^B \varepsilon_{BA}, \quad \zeta^{\dot{A}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}\zeta_{\dot{B}}. \tag{A.21}$$

В результате майорановский спинор может быть представлен в виде

$$\chi^\alpha = \begin{pmatrix} \chi^A \\ \bar{\gamma}_{\dot{A}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\chi}_\alpha = (\chi_A, \ -\bar{\chi}^{\dot{A}}), \tag{A.22}$$

где по определению $(\chi_A)^* = \bar{\chi}_{\dot{A}}$, поэтому $(\chi^A)^* = -\bar{\chi}^{\dot{A}}$. Черта сверху означает, что спинор $\bar{\chi}_{\dot{A}}$ получен из спинора χ_A с помощью комплексного сопряжения. В основном тексте мы часто опускаем черту сверху для упрощения обозначений.

Обратимся теперь к трансформационным свойствам двух- и четырехкомпонентных спиноров под действием преобразований группы Лоренца.

Нормируем генераторы группы Лоренца по их действию на ковариантный вектор

$$\left(\frac{1}{2}\omega^{mn}J_{mn}\right)V_r = \omega_r{}^s V_s. \tag{A.23}$$

Следовательно,

$$(J_{mn})_r{}^s = (\eta_{mr}\delta_n{}^s - \eta_{nr}\delta_m{}^s). \tag{A.24}$$

Таким образом, коммутационные соотношения для генераторов J_{mn} имеют вид

$$[J_{mn}, J_{pq}] = \eta_{np}J_{mq} + 3 \text{ слагаемых}. \tag{A.25}$$

В представлении четырехкомпонентных спиноров генераторы даются выражением

$$J_{mn} = \frac{1}{2}\gamma_{mn}, \quad \gamma_{mn} = \frac{1}{2}(\gamma_m\gamma_n - \gamma_n\gamma_m). \tag{A.26}$$

Итак, четырехкомпонентные спиноры преобразуются под действием преобразований Лоренца следующим образом:

$$\delta(\omega)\chi^\alpha = \left(\frac{1}{2}\omega^{mn}J_{mn}\right)\chi^\alpha = \frac{1}{4}\omega^{mn}(\gamma_{mn})^\alpha{}_\beta\chi^\beta. \tag{A.27}$$

Используя представление γ-матриц

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^m \\ +i\tilde{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.28}$$

запишем правила преобразования двухкомпонентного спинора $\chi^\alpha = (\chi^A, \chi_{\dot{A}})$ в виде

$$\delta\chi^A = \frac{1}{4}\omega^{mn}(\sigma_{mn})^A{}_B\chi^B, \quad \delta\chi_{\dot{A}} = \frac{1}{4}\omega^{mn}(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}\chi_{\dot{B}}, \tag{A.29}$$

где

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{2}(\sigma_m\tilde{\sigma}_n - \sigma_n\tilde{\sigma}_m). \tag{A.30}$$

Последние формулы следуют из соотношения $\lambda^B\chi_B = -\lambda_B\chi^B$. Заметим, что по причинам, которые обсуждались выше, мы опустили черту над $\chi_{\dot{A}}$. Поскольку матрица σ_{mn} симметрична по спинорным индексам, получаем

$$\delta\chi_A = -\chi_B\frac{1}{4}\omega^{mn}(\sigma_{mn})^B{}_A = -\frac{1}{4}\omega^{mn}(\sigma_{nm})_A{}^B\chi_B. \tag{A.31}$$

Дадим теперь определение комплексного сопряжения (*). Для функций, зависящих от координат пространства, символ

(*) означает обычное комплексное сопряжение, поэтому

$$[(\partial/\partial x^{\mu})\, f(x)]^* = (\partial/\partial x^{\mu})\, f^*(x). \tag{A.32}$$

Но для скаляров, образованных из двух антикоммутирующих переменных

$$S = \theta^A \varepsilon_{AB} \theta^B, \tag{A.33}$$

потребуем, чтобы их комплексно- и эрмитово-сопряженные величины совпадали. Если переменные θ являются матрицами, то эрмитово сопряжение означает

$$S^{\dagger} = (\theta^B)^{\dagger} (\varepsilon_{AB})^* (\theta^A)^{\dagger} = \theta^{\dot{B}} (\varepsilon_{AB})^* \theta^{\dot{A}}. \tag{A.34}$$

Для того чтобы выполнялось равенство $S^* = S^{\dagger}$, мы потребуем изменения порядка следования матриц θ при сопряжении (*). Например,

$$(\theta_A \theta_B)^* = \theta_{\dot{B}} \theta_{\dot{A}}, \quad (\theta^A \theta^B \theta^C)^* = -\theta^{\dot{C}} \theta^{\dot{B}} \theta^{\dot{A}}, \tag{A.35}$$

поскольку $(\theta^A)^* = -\theta^{\dot{A}}$ (опускаем черту). Таким образом, $(\theta^A \theta_A)^* = \theta^{\dot{A}} \theta_{\dot{A}}$.

Определим производные по антикоммутирующим переменным, а именно левые производные:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^A} \theta^B = \delta_A{}^B, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}}} \theta^{\dot{B}} = \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta_A} \theta_B = \delta_B{}^A, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{A}}} \theta_{\dot{B}} = \delta_{\dot{B}}{}^{\dot{A}}. \tag{A.36}$$

Теперь можно определить комплексно-сопряженную производную, потребовав, чтобы выполнялись равенства

$$\delta_A{}^B = \delta_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^A} \theta^B\right)^* = (\theta^B)^* \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_A}\right)^* =$$

$$= -\theta^{\dot{B}} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^A}\right)^* = \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta^A}\right)^* \theta^{\dot{B}}; \tag{A.37}$$

в результате имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta^A}\right)^* = \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{A}}}\right)^* = \frac{\partial}{\partial \theta^A},$$

но

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta_A}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{A}}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{A}}}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial \theta_A}. \tag{A.38}$$

Эти формулы показывают, что спинорные производные скаляров, составленных из антикоммутирующих переменных, обра-

зуют майорановские спиноры. При комплексном сопряжении спинорных производных следует менять порядок следования производных, так же как и матриц θ. Читатель может убедиться, что приведенное выше определение применимо для любых функций переменных θ и не только линейных по θ.

Дадим теперь определение кручению и кривизне. Сначала определим ковариантную производную следующим образом:

$$\mathbf{D}_M = E_M{}^{\Lambda}\left(\partial_{\Lambda} + \frac{1}{2}\Omega_{\Lambda}{}^{mn}J_{mn}\right), \tag{A.39}$$

где J_{mn} — лоренцевы генераторы, $E_M{}^{\Lambda}$ — обратная матрица супертетрады, а $\Omega_{\Lambda}{}^{mn}$ — спиновая связность. Тензоры кручения и кривизны даются соотношением

$$[\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_N] = T_{MN}{}^{R}\mathbf{D}_R + \frac{1}{2}R_{MN}{}^{mn}J_{mn}. \tag{A.40}$$

Явные вычисления показывают, что

$$T_{MN}{}^{R} = E_M{}^{\Lambda}\partial_{\Lambda}E_N{}^{\pi}E_{\pi}{}^{R} + \Omega_{MN}{}^{R} - (-1)^{MN}(M \leftrightarrow N),$$
$$R_{MN}{}^{rs} = E_M{}^{\Lambda}E_N{}^{\pi}(-1)^{\Lambda(N+\pi)}\{\partial_{\Lambda}\Omega_{\pi}{}^{rs} + \Omega_{\Lambda}{}^{rk}\Omega_{\pi k}{}^{s} - (-1)^{\Lambda\pi}(\Lambda \leftrightarrow \pi)\}. \tag{A.41}$$

Спиновая связность со значениями в пространстве группы Лоренца имеет следующую структуру:

$$\Omega_{MN}{}^{R} = \begin{pmatrix} \Omega_{Mm}{}^{n} & & \\ & -\frac{1}{4}\Omega_M{}^{mn}(\sigma_{mn})_A{}^B & \\ & & \frac{1}{4}\Omega_M{}^{mn}(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \end{pmatrix}. \tag{A.42}$$

Матрица $(\sigma_{mn})_A{}^B$ определена согласно правилам (A.5):

$$(\sigma_{mn})_A{}^B = (\sigma_{mn})^C{}_D\,\varepsilon_{CA}\varepsilon^{BD}.$$

Причина появления знака минус в (A.42) состоит в том, что $(\sigma_{mn})_{AB}\chi^B = -(\sigma_{mn})_A{}^B\chi_B$. Полезно определить кривизну $^1/_2R_{MNP}{}^{Q}$ со значениями в пространстве представлений группы Лоренца следующим образом:

$$R_{MNP}{}^{Q} = \begin{pmatrix} R_{MN}{}^{rs} & & \\ & -R_{MN}{}^{rs}\frac{1}{4}(\sigma_{rs})_A{}^B & \\ & & R_{MN}{}^{rs}\frac{1}{4}(\bar{\sigma}_{rs})_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \end{pmatrix}. \tag{A.43}$$

Обсудим теперь свойства вещественности $E_M{}^{\pi}$ и обратных им величин $E_{\pi}{}^{M}$. Поскольку $dz^M E_M{}^{\pi}$ можно рассматривать как пре-

образование от инерциальной системы (плоское пространство) к искривленному пространству, потребуем, чтобы как плоские, так и криволинейные координаты имели одинаковые свойства вещественности по отношению к операции (*), а именно

$$\begin{gathered}(dz^m)^* = dz^m,\ (dz^A)^* = -dz^{\dot A},\ (dz_{\dot A})^* = dz_A,\\ (dz^\mu)^* = dz^\mu,\ (dz^{\underline A})^* = -dz^{\underline{\dot A}},\ (dz_{\underline{\dot A}})^* = dz_{\underline A}.\end{gathered} \tag{A.44}$$

Из тождества $dz^\pi = dz^M E_M{}^\pi$ можно вывести следующие свойства вещественности:

$$\begin{gathered}(E_m{}^\mu)^* = E_m{}^\mu,\quad (E_m{}^{\underline A})^* = -E_m{}^{\underline{\dot A}},\\ (E_A{}^\mu)^* = E_{\dot A}{}^\mu,\quad (E_A{}^{\underline B})^* = E_{\dot A}{}^{\underline{\dot B}},\quad (E_A{}^{\underline{\dot B}})^* = E_{\dot A}{}^{\underline B}.\end{gathered} \tag{A.45}$$

Эти правила легко понять: после сопряжения $(E_A{}^\Lambda)^*$ тетрада равна $E^{\Lambda^*}{}_{A^*}$, а коммутация Λ^* и A^* приводит затем к окончательному результату.

Теперь можно получить свойства вещественности тензора кручений в суперпространстве, поскольку нам известно поведение величин $E_M{}^\Lambda$ и ∂_Λ при комплексном сопряжении. Например,

$$(T_{AB}{}^C)^* = (E_A{}^\Lambda \partial_\Lambda E_B{}^\pi E_\pi{}^C + \ldots)^*. \tag{A.46}$$

Проще всего в качестве Λ и π выбрать бозонные поля; в этом случае

$$\begin{gathered}(T_{AB}{}^C)^* = (E_\nu{}^C)^* (\partial_\mu E^B{}_\nu)^* (E_A{}^\mu)^* + \ldots =\\ = -E_\nu{}^{\dot C} \partial_\mu E_{\dot B}{}^\nu E_{\dot A}{}^\mu + \ldots = E_{\dot A}{}^\mu \partial_\mu E_{\dot B}{}^\nu E_\nu{}^{\dot C} + \ldots .\end{gathered} \tag{A.47}$$

Следовательно, $(T_{AB}{}^C)^* = T_{\dot A \dot B}{}^{\dot C}$. Все выведенные правила можно записать кратко в виде следующей формулы:

$$(T_{MN}{}^P)^* = (-1)^{p\,(m+n)+mn+p}\, T_{M^*N^*}{}^{P^*}, \tag{A.48}$$

где окончательный знак в правой части возникает в результате перемены мест индексов P^* и N^*M^*, M^* и N^*, а также знака минус в тождестве $(\theta^A)^* = -\theta^{\dot A}$. Более простое мнемоническое правило состоит в том, чтобы в качестве $T_{MN}{}^P$ в частном случае выбрать выражение $Z_M Z_N Z^P$ и далее использовать правила для $(Z_M)^*$. Приведем еще два примера:

$$(T_{AB}{}^m)^* = -T_{\dot A \dot B}{}^m,\quad (T_{Am}{}^B)^* = T_{\dot A m}{}^{\dot B}. \tag{A.49}$$

Для того чтобы определить свойства вещественности кривизны, необходимо сначала установить эти свойства у связности. Требуя, чтобы оба слагаемых правой части равенства $\mathbf{D}_M =$

$=E_M{}^{\Lambda}\partial_{\Lambda}+{}^1/_2E_M{}^{\Lambda}\Omega_{\Lambda}{}^{mn}J_{mn}$ имели одинаковые свойства относительно операции комплексного сопряжения, мы сначала определим, как ведет себя связность $\Omega_{\Lambda}{}^{mn}$ при комплексном сопряжении. Например, выбрав какой-либо вещественный вектор v^k и воспользовавшись соотношением

$$(\mathbf{D}_M v^k)^* = (E_M{}^{\mu}\partial_{\mu}v^k + E_M{}^{\Lambda}\Omega_{\Lambda}{}^k{}_l v^l + \ldots)^* = \\ = E_{\dot{M}}{}^{\mu}\partial_{\mu}v^k + v^l\left(\Omega_{\dot{\Lambda}}{}^k{}_l\right)^*\left(E_M{}^{\Lambda}\right)^*, \tag{A.50}$$

найдем, что величина $(\mathbf{D}_m v^k)^*$ должна быть равна $(\mathbf{D}_m v^k)$. Отсюда получаем

$$\left(\Omega_{\Lambda}{}^{kl}\right)^* = \Omega_{\dot{\Lambda}}{}^{kl}, \tag{A.51}$$

где по определению $\dot{\Lambda}=(m,\ A,\ \dot{A})$, если $\Lambda=(m,\ A,\ \dot{A})$.

Определим затем свойства вещественности связности $\Omega_{\Lambda P}{}^{Q}$. Так как лоренцевы генераторы удовлетворяют тождествам

$$\left[(\sigma_{mn})^A{}_B\right]^* = -(\bar{\sigma}_{mn})_{\dot{B}}{}^{\dot{A}},$$

т. е.

$$\left[(\sigma_{mn})^{AB}\right]^* = (\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{A}\dot{B}}, \tag{A.52}$$

находим

$$\left(\Omega_{\Lambda P}{}^{Q}\right)^* = \Omega_{\dot{\Lambda}\dot{P}}{}^{\dot{Q}}. \tag{A.53}$$

(Заметим, что знак минус, возникающий из-за комплексного сопряжения матрицы σ^{mn}, компенсируется таким же знаком, который имеется в определении величины $\Omega_{\Lambda P}{}^{Q}$.) Из этого результата следуют свойства вещественности кривизны. Так как

$$R_{\Lambda\pi P}{}^{Q} = \partial_{\Lambda}\Omega_{\pi P}{}^{Q} + \ldots, \tag{A.54}$$

то

$$\left(R_{\Lambda\pi P}{}^{Q}\right)^* = (-1)^{\Lambda\pi}R_{\dot{\Lambda}\dot{\pi}\dot{P}}{}^{\dot{Q}}, \tag{A.55}$$

где мы использовали тождество $(\partial/\partial\Lambda)^* = \partial/\partial\dot{\Lambda}$. Поскольку dz^{Λ} и dz^m должны иметь одинаковые свойства при комплексном сопряжении, кривизна преобразуется при сопряжении следующим образом:

$$\left(R_{MNP}{}^{Q}\right)^* = (-1)^{MN}R_{\dot{M}\dot{N}\dot{P}}{}^{\dot{Q}}. \tag{A.56}$$

Чтобы иллюстрировать приведенное выше обсуждение, рассмотрим вариацию супертетрады (репера). Из трансформационных свойств супертетрады при общекоординатных преобразованиях

$$\delta E_{\Lambda}{}^{M} = \partial_{\Lambda}\Xi^{\pi}E_{\pi}{}^{M} + \Xi^{\pi}\partial_{\pi}E_{\Lambda}{}^{M} \tag{A.57}$$

делаем вывод, что

$$\delta E_A{}^M = -E_A{}^R \varepsilon^N T_{NR}{}^M + \mathbf{D}_A \varepsilon^M, \tag{A.58}$$

где

$$\varepsilon^N E_N{}^\pi = \Xi^\pi.$$

Поэтому, принимая $T_{A\dot{B}}{}^m = -2i\,(\sigma^m)_{A\dot{B}} = T_{\dot{B}A}{}^m$, из соотношений

$$E_\mu{}^m\,(\theta = 0) = e_\mu{}^m, \quad \varepsilon^A\,(\theta = 0) = \varepsilon^A, \quad E_\mu{}^{\dot{A}}\,(\theta = 0) = \psi_\mu{}^{\dot{A}} \tag{A.59}$$

находим

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon e_\mu{}^m &= +\varepsilon^B T_{B\dot{A}}{}^m \psi_\mu{}^{\dot{A}} + \varepsilon^{\dot{B}} T_{\dot{B}A}{}^m \psi_\mu{}^A = \\ &= -2i\varepsilon^B \sigma^m{}_{B\dot{A}} \psi_\mu{}^{\dot{A}} - 2i\varepsilon^{\dot{B}}\,(\sigma^m)_{A\dot{B}}\,\psi_\mu{}^A.\end{aligned} \tag{A.60}$$

Читатель может проверить, что вариация тетрады $e_\mu{}^m$ в самом деле вещественна. Мы использовали тот факт, что единственная ненулевая компонента кручения $T_{A\dot{B}}{}^m$ есть $T_{\dot{B}A}{}^m$ (см. гл. 11). В четырехкомпонентном формализме этому соответствует

$$T_{\alpha\beta}{}^m = 2\,(C\gamma^m)_{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad \delta e_\mu{}^m = 2\bar{\varepsilon}\gamma^m \psi_\mu. \tag{A.61}$$

Следует быть внимательным при переходе от двухкомпонентного к четырехкомпонентному формализму, поскольку двухкомпонентные свертывания имеют вид

$$\chi^M \zeta_M = \chi^m \zeta_m + \chi^A \zeta_A + \chi^{\dot{A}} \zeta_{\dot{A}}, \tag{A.62}$$

тогда как свертывания четырехкомпонентных спиноров имеют вид

$$\bar{\chi}_\alpha \zeta^\alpha = \chi_A \zeta^A - \chi^{\dot{B}} \zeta_{\dot{B}} = -\,(\chi^A \zeta_A + \chi^{\dot{B}} \zeta_{\dot{B}}). \tag{A.63}$$

Результаты двух- и четырехкомпонентного свертываний согласуются, поскольку

$$\begin{aligned}\delta e_\mu{}^m &= \varepsilon^\alpha T_{\alpha\beta}{}^m \psi_\mu{}^\beta = 2\bar{\varepsilon}\gamma^m \psi_\mu = 2\bar{\varepsilon}_\alpha\,(\gamma^m)^\alpha{}_\beta \psi_\mu{}^\beta = \\ &= 2\,(\varepsilon_B,\ -\bar{\varepsilon}^{\dot{B}}) \begin{pmatrix} 0 & -i\,(\sigma^m)^{B\dot{A}} \\ +i\,(\sigma^m)_{\dot{B}A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\mu{}^A \\ \psi_{\mu\dot{A}} \end{pmatrix} = \\ &= -2i\varepsilon_B\,(\sigma^m)^{B\dot{A}} \psi_{\mu\dot{A}} + \text{эрмит. сопр.}\end{aligned} \tag{A.64}$$

Закончим обзор принятых обозначений следующей записью перестановочных соотношений $(N = 1)$-супералгебры Пуанкаре:

$$\begin{aligned}&[J_{mn},\ J_{pq}] = (\eta_{np} J_{mq} - \eta_{mp} J_{nq} + \eta_{mq} J_{np} - \eta_{nq} J_{mp}), \\ &[P_r,\ J_{mn}] = \eta_{mr} P_n - \eta_{nr} P_m, \quad [Q^\alpha,\ J_{mn}] = \frac{1}{2}\,(\gamma_{mn})^\alpha{}_\beta\, Q^\beta, \\ &[Q^\alpha,\ P_r] = 0, \quad \{Q^\alpha,\ Q^\beta\} = -2\,(\gamma^m C^{-1})^{\alpha\beta} P_m.\end{aligned} \tag{A.65}$$

В двухкомпонентной системе обозначений имеем соотношения

$$[Q^A, J_{mn}] = \frac{1}{2}(\sigma_{mn})^A{}_B Q^B, \quad [Q_{\dot A}, J_{mn}] = \frac{1}{2}(\bar\sigma_{mn})_{\dot A}{}^{\dot B} Q_{\dot B},$$
$$\{Q^A, Q^B\} = 0, \tag{A.66}$$
$$\{Q^A, Q^{\dot B}\} = -2i(\sigma^m)^{A\dot B} P_m, \quad [Q^A, P_n] = 0, \quad [Q_{\dot A}, P_n] = 0,$$

а также другие, оставшиеся неизменными соотношения.

Покажем теперь, как соотношения этой алгебры реализуются в модели Весса — Зумино. Из вариации $\delta A = \bar\varepsilon Q A$, где Q — некоторые абстрактные генераторы, имеем

$$[\delta_1, \delta_2] A = [\bar\varepsilon_1 Q, \bar\varepsilon_2 Q] A. \tag{A.67}$$

С другой стороны, поскольку $\delta A = \bar\varepsilon\chi$ и $\delta\chi = \gamma^\mu \partial_\mu A\varepsilon$, имеем

$$[\delta_1, \delta_2] A = \bar\varepsilon_2\delta_1\chi - (1 \leftrightarrow 2) = 2\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1\,\partial_\mu A. \tag{A.68}$$

Учитывая, что $P_m A = \partial_m A$, находим

$$[\delta_1, \delta_2] A = -2\varepsilon_{2\beta}(\gamma^\mu C^{-1})^{\beta\delta}\bar\varepsilon_{1\delta} P_\mu A = -\bar\varepsilon_{1\beta}\bar\varepsilon_{2\delta}\{Q^\beta, Q^\delta\} A. \tag{A.69}$$

Следовательно, абстрактные генераторы удовлетворяют соотношению

$$\{Q^\beta, Q^\delta\} = -2(\gamma^\mu C^{-1})^{\beta\delta} P_\mu \tag{A.70}$$

в согласии с формулой (A.65).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

СПИСОК ОБЗОРОВ И КНИГ [1])

Суперсимметрия и супергравитация

Fayet P., Ferrara S. — Phys. Rep., 1977, v. **C32**, p. 249.
van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rep., 1981, v. **C68**, *p.* 189.
Gates S. J., Grisaru M. T., Roček M., Siegel W. Superspace or One Thousand-and-One Lessons in Supersymmetry. — Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings, 1983.
Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. — Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1983. [Имеется перевод: *Весс Ю., Беггер Дж.* Суперсимметрия и супергравитация. — М.: Мир, 1986.]
van Nieuwenhuizen P., West P. Principles of Supersymmetry and Supergravity. — Cambridge: Cambridge University Press, in preparation.
Sohnius M. — Phys. Rep., 1985, v. **C128**, p. 39.
Taylor J. G. — In: Progress in Particle and Nuclear Physics, v. 12, ed. Sir Denys Wilkinson. — Oxford: Pergamon Press, 1984.
Fradkin E. S., Tseytlin A. A. — Phys. Rep., 1985, v. **C119**, p. 235.

Ряд других лекций на эту тему содержится в книгах:

Supergravity, eds. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen. — Stony Brook, 1979.
Superspace and Supergravity, eds. S. W. Hawking, M. Roček. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
Quantum Gravity 2, eds. C. Isham, R. Penrose, D. Sciama. — Oxford: Oxford University Press, 1982.
Unification of the Fundamental Particle Interactions (Erice), eds. S. Ferrara, J. Ellis, P. van Nieuwenhuizen. — New York: Plenum Press, 1983.
Quantum Structure of Space and Time, eds. C. J. Isham, M. Duff. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
Supersymmetry and Supergravity '81 (Trieste), eds. S. Ferrara, J. G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen. — Cambridge: Cambridge University Press, 1982. [Имеется перевод некоторых лекций вводного характера: Введение в супергравитацию, под ред. С. Феррары, Дж. Тейлора. — М.: Мир, 1985.]
Supersymmetry and Supergravity '82 (Trieste), eds. S. Ferrara, J. G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 1983.
Recent Developments in Gravitation (Cargese 1978), eds. M. Levy, S. Deser. — New York: Gordon and Breach, 1979.
Supersymmetry and Supergravity '83, eds. S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, B. de Wit. — Singapore: World Scientific, 1983.
Introduction to Supersymmetry in Particle and Nuclear Physics, eds. O. Castanos, A. Frank, L. Urrutia. — New York: Plenum Press, 1982.
Frontiers in Particle Physics '83, eds. D. Sijacki, N. Bilic, B. Dragovic, D. Popovic. — Singapore: World Scientific, 1984.
Problems in Unification and Supergravity, eds. G. Farrar, F. Henyey. — Amer. Inst. Phys., No. 116, 1983.
* *De Witt B.* Supermanifolds. — Cambridge: University Press, 1986.

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная при переводе. — *Прим. ред.*

* *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. — М.: Наука, 1984.

Суперсимметрия в феноменологии частиц

Nilles N. P. — Phys. Rep., 1984, v. **C110**, p. 1.
Haber H. E., Kane G. L. — Phys. Rep., 1985, v. **C117**, p. 75.
Arnowitt R., Chamseddine A., Nath P. — Northeastern University preprint.
Barbieri R., Ferrara S. — Surveys in High Energy Physics, 1983, v. **4**, p. 33.
* *Nanopoulos D. V.* — Rep. Progr. Phys., 1986, v. **49**, p. 61.
* *Lahanas A. B., Nanopoulos D. V.* — Phys. Rep., 1987, v. **C145**, p. 1.

Теория Калуцы — Клейна

Duff M., Nilsson B., Pope C. — Phys. Rep., 1986, v. **C130**, p. 1. Unified Field Theories of more than 4 Dimensions, eds. V. de Sabbata, E. Schmutzer. — Singapore: World Scientific, 1983.
* *Chodos A.* — Comm. Nucl. and Part. Phys. (Comm. Mod. Phys. Pt. A), 1984, v. **13**, p. 171. [Имеется перевод: *Ходос А.* — УФН, 1985, т. 146, вып. 4, с. 647.]
* *Арефьева И. Я., Волович И. В.* — УФН, 1985, т. 146, вып. 4, с. 655.

Струны

Alessandrini V., Amati D., LeBellac M., Olive D. I. — Phys. Rep., 1971, v. **1C**, p. 170.
Frampton P. Dual Resonance Models. — Benjamin, Reading, 1974.
Mandelstam S. — Phys. Rep., 1974, v. **13C**, p. 259.
Mandelstam S. — In: Structural Analysis of Collision Amplitudes (Les Houches). — Les Houches, June Institute, 1975, p. 593.
Rebbi C. — Phys. Rep., 1974, v. **12C**, p. 1.
Scherk J. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. **47**, p. 123.
Schwarz J. H. — Phys. Rep., 1973, v. **8C**, p. 269.
Venezjano G. — Phys. Rep., 1974, v. **9C**, p. 199.
Schwarz J. H. — Phys. Rep., 1982, v. **89**, p. 223.
Green M. — Surveys of High Energy Physics, 1983, v. **3**, p. 127.
* *Nelson P.* — Phys. Rep., 1987, v. **149C**, p. 337.
* *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* Superstring Theory, v. 1, 2. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
* *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
* *Казаков Д. И.* — УФН, 1986, т. 150, вып. 4, с. 561.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.* — Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452.
2. *Волков Д. В., Акулов В. П.* — Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 621; Phys. Lett., 1973, v. **46B**, p. 109.
3. *Wess J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B70**, p. 139.
4. *Coleman S., Mandula J.* — Phys. Rev., 1967, v. **159**, p. 1251.
5. *Hagg R., Lopuszanski J., Sohnius M.* — Nucl. Phys., 1975, v. B88, p. 61.
6. *van Nieuwenhuizen P., West P.* Principles ot Supersymmetry and Supergravity. — Cambridge: Cambridge University Press.
7. *Ramond P.* — Phys. Rev., 1971, v. **D3**, p. 2415;
   Neveu A., Schwarz J. H. — Nucl. Phys., 1971, v. **B31**, p. 86; Phys. Rev., 1971, v. **D4**, p. 1109;
   Gervais J.-L., Sakita B. — Nucl. Phys., 1971, v. **B34**, p. 477, 632;
   Gliozzi F., Scherk J., Olive D. I. — Nucl. Phys., 1977, v. **B122**, p. 253.
8. *Wess J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B78**, p. 1.
9. *Ferrara S., Freedman D. Z., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Rev., 1976, v. **D13**, p. 3214.
10. *Ferrara S., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B79**, p. 413;
    Salam A., Strathdee J. — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 1521.
11. *Salam A., Strathdee J.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B80**, p. 499;
    Nahm W. — Nucl. Phys., 1978, v. **B135**, p. 149;
    Freedman D. Z. — In: Recent Developments in Gravitation (Cargèse 1978), eds. M. Levy, S. Deser. — New York: Gordon and Breach, 1979;
    Ferrara S., Savoy C. — In: Supersymmetry and Supergravity 81 (Trieste). eds. S. Ferrara, J. G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen. — Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
12. *Wigner E. P.* — Ann. of Math., 1939, v. **40**, p. 149.
13. *van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Rep., 1981, v. **68**, p. 189.
14. *Freedman D., van Nieuwenhuizen P., Ferraa S.* — Phys. Rev., 1976, v. **D13**, p. 3214; Phys. Rev., 1976, v. **D14**, p. 912.
15. *Deser S., Zumino B.* — Phys. Lett., 1976, v. **62B**, p. 335.
16. *Stelle K., West P.* — Phys. Lett., 1978, v. **B74**, p. 330.
17. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Lett., 1978, v. **B74**, p. 333.
18. *Chamseddine A., West P.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B129**, p. 39.
19. *Townsend P., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Lett., 1977, v. **B67**, p. 439.
20. *Wess J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B78**, p. 1.
21. *Ferrara S.* — In: Proceedings of the 9th International Conference on General Relativity and Gravitation (1980), ed. Ernst Schmutzer.
22. *Sohnius M., Stelle K., West P.* — In: Superspace and Supergravity, eds. S. W. Hawking, M. Roček. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
23. *Salam A., Strathdee J.* — Phys. Lett., 1974, v. **51B**, p. 353;
    Fayet P. — Nucl. Phys., 1976, v. **B113**, p. 135.
24. *Sohnius M., Stelle K., West P.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B167**, p. 727; Phys. Lett., 1980, v. **92B**, p. 123.
25. *Fayet P.* — Nucl. Phys., 1976, v. **B113**, p. 135.
26. *Breitenlohner P., Sohnius M.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B178**, p. 151;

Sohnius M., Stelle K., West P. — In: Superspace and Supergravity, eds. S. W. Hawking, M. Roček. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
27. *Howe P., Stelle K., West P.* — Class. Quantum Grav., 1985, v. **2**, p. 815.
28. *Sierra G., Townsend P. K.* — Nucl. Phys., 1984, v. **B233**, p. 289; *Mezincescu L., Yao Y. P.* — Nucl. Phys., 1984, v. **B241**, p. 605.
29. *Gliozzi F., Scherk J., Olive D.* — Nucl. Phys., 1971, v. **B122**, p. 253; *Brink L., Schwarz J., Scherk J.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B121**, p. 77.
30. *Roček M., Siegel W.* — Phys. Lett., 1981, v. **105B**, p. 275; *Rivelles V. O., Taylor J. G.* — J. Phys. A. Math. Gen., 1982, v. **15**, p. 163.
31. *Ferrara S., Scherk J., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Rev. Lett., 1976, v. **37**, p. 1035; *Ferrara S., Gliozzi F., Scherk J., van Nieuwenhuizen P.* — Nucl. Phys., 1976, v. **B117**, p. 333; *Breitenlohner P., Ferrara S., Freedman D. Z., Gliozzi F., Scherk J., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Rev., 1977, v. **D15**, p. 1013; *Freedman D. Z.* — Phys. Rev., 1977, v. **D15**, p. 1173.
32. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Lett., 1978, v. **76B**, p. 404.
33. *Stelle K. S., West P.* — Phys. Lett., 1978, v. **77B**, p. 376.
34. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Lett., 1978, v. **78B**, p. 573.
35. *Stelle K. S., West P.* — Nucl. Phys., 1978, v. **B145**, p. 175.
36. *Sohnius M., West P.* — Nucl. Phys., 1982, v. **B203**, p. 179.
37. *Barbieri R., Ferrara S., Nanopoulos D., Stelle K.* — Phys. Lett., 1982, v. **113B**, p. 219.
38. *Cremmer E., Ferrara S., Julia B., Scherk J., Girardello L.* — Phys. Lett., 1978, v. **76B**, p. 231.
39. *Cremmer E., Julia B., Scherk J., Ferrara S., Girardello L., van Nieuwenhuizen P.* — Nucl. Phys. 1979, v. **B147**, p. 105.
40. *Cremmer E., Ferrara S., Girardello L., Van Proeyen A.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B212**, p. 413; Phys. Lett., 1982, v. **116B**, p. 231.
41. *Deser S., Kay J., Stelle K.* — Phys. Rev. Lett., 1977, v. **38**, p. 527; *Ferrara S., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1978, v. **B134**, p. 301.
42. *Sohnius M., West P.* — Nucl. Phys., 1982, v. **B198**, p. 493.
43. *Ferrara S., Girardello L., Kugo T., Van Proeyen A.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B223**, p. 191.
44. *Ferrara S., Grisaru M., van Nieuwenhuizen P.* — Nucl. Phys., 1978, v. **B138**, p. 430.
45. *de Wit B., van Holten J. W., Van Proeyen A.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B184**, p. 77; Phys. Lett., 1980, v. **95B**, p. 51; Nucl. Phys., 1980, v. **B167**, p. 186.
46. *Salam A., Strathdee J.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 1521; Nucl. Phys., 1975, v. **B86**, p. 142.
47. *Siegel W.* — Phys. Lett., 1979, v. **85B**, p. 333.
48. *Arnowitt R., Nath P.* — Phys. Lett., 1975, v. **56B**, p. 117; *Brink L., Gell-Mann M., Ramond P., Schwarz J.* — Phys. Lett., 1978, v. **74B**, p. 336; 1978, v. **76B**, p. 417; *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* — Ann. Phys., 1980, v. **126**, p. 111; *van Nieuwenhuizen P., West P.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B169**, p. 501.
49. *Sohnius M.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B165**, p. 483.
50. *Howe P., Stelle K., Townsend P.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B214**, p. 519.
51. *Grisaru M., Roček M., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1979, v. **B159**, p. 429.
52. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1986.
53. *Salam A., Strathdee J.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B76**, p. 477; *Ferrara S., Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1974, v. **51B**, p. 239.
54. *Grisaru M., Roček M., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1979, v. **B159**, p. 429.

55. *Wess J.* — Lecturee Notes in Physics (Springer, Berlin), 1978, v. **77**, p. 81. [Имеется перевод в книге: Геометрические идеи в физике. — Сб. статей/Под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1983, с. 125.]
56. *Gates J., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1979, v. **B147**, p. 77.
57. *Gates J., Stelle K., West P.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B169**, p. 347. [Имеется перевод в книге: Геометрические идеи в физике. — Сб. статей/Под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1983, с. 170.]
58. *Grimm R., Sohnius M., Wess J.* — Nucl. Phys., 1978, v. **B133**, p. 275.
59. *Breitenlohner P., Sohnius M.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B178**, p. 151.
60. *Howe P., Stelle K., West P.* — Phys. Lett., 1983, v. **124B**, p. 55.
61. *Sohnius M., Stelle K., West P.* — In: Superspace and Supergravity, eds. S. W. Hawking, M. Roček. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
62. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* — Class. Quantum Grav., 1984, v. **1**, p. 469.
63. *Мезинческу Л.* — ОИЯИ, препринт Р2—12572, 1979.
64. *Koller J.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B222**, p. 319; Phys. Lett., 1983, v. **124B**, p. 324.
65. *Howe P., Stelle K., Townsend P. K.* — Nucl. Phys., 1984, v. **B236**, p. 125.
66. *Salam A., Strathdee J.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B80**, p. 499.
67. *Ferrara S., Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1974, v. **51B**, p. 239.
68. *Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1977, v. **66B**, p. 361;
Акулов В. П., Волков Д. В., Сорока В. А. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 396.
69. *Arnowitt R., Nath P., Zumino B.* — Phys. Lett., 1975, v. **56**, p. 81;
Nath P., Arnowitt R. — Phys. Lett., 1975, v. **56B**, p. 177; 1978, v. **78B**, p. 581.
70. *Dragon N.* — Z. Phys., 1979, v. **C2**, p. 62. [Имеется перевод в книге: Геометрические идеи в физике. — Сб. статей/Под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1983, с. 162.]
71. *Ivanov E. A., Sorin A. S.* — J. Phys. A. Math. Gen., 1980, v. **13**, p. 1159.
72. *Fischler M.* — Phys. Rev., 1979, v. **D20**, p. 1842.
73. *Howe P., Tucker R.* — Phys. Lett., 1978, v. **80B**, p. 138.
74. *Breitenlohner P.* — Phys. Lett., 1977, v. **76B**, p. 49; 1979; v. **80B**, p. 217.
75. *Siegel W.* — Phys. Lett., 1979, v. **80B**, p. 224.
76. *Siegel W.* — Harvard preprint HUTP-771, A068; Nucl. Phys., 1978, v. **B142**, p. 301;
Gates Jr. S. J., Siegel W. — Nucl. Phys., 1979, v. **B147**, p. 77.
77. *Ogievetsky V., Sokatchev E.* — Phys. Lett., 1978, v. **79B**, p. 222.
78. *Grimm R., Wess J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1979, v. **B152**, p. 1255. [Имеется перевод в книге: Геометрические идеи в физике. — Сб. статей/Под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1983, с. 151.]
79. *Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1977, v. **66B**, p. 361.
80. *Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1978, v. **79B**, p. 394.
81. *Howe P., West P.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B238**, p. 81.
82. *Howe P.* — Nucl. Phys., 1982, v. **B199**, p. 309.
83. *Salam A., Strathdee J.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 1521.
84. *Ferrara S., Piguet O.* — Nucl. Phys., 1975, v. **B93**, p. 261.
85. *Wess J., Zumino B.* — Phys. Lett., 1974, v. **49B**, p. 52.
86. *Iliopoulos J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B76**, p. 310.
87. *Ferrara S., Iliopoulos J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B77**, p. 41.
88. *Capper D. M.* — Nuovo Cim., 1975, v. **25A**, p. 259;
Delbourgo R. — Nuovo Cim., 1975, v. **25A**, p. 646.
89. *West P.* — Nucl. Phys., 1976, v. **B106**, p. 219;
Capper D., Ramon Medrano M. — J. Phys., 1976, v. **62**, p. 269;
Weinberg S. — Phys. Lett., 1976, v. **62B**, p. 111.

90. *Grisaru M., Rocek M., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1979, v. **B159**, p. 429.
91. *Lee B. W.* — In: Methods in Field Theory (Les Houches 1975), eds. R. Balian, J. Zinn-Justin. — Singapore: North Holland, Amsterdam and World Scientific, 1981.
92. *Siegel W.* — Phys. Lett., 1979, v. **84B**, p. 193; 1980, v. **94B**, p. 37.
93. *Avdeev L. V., Chochia G. A., Vladimirov A. A.* — Phys. Lett., 1981, v. **105B**, p. 272;
Avdeev L. V., Vladimirov A. A. — Nucl. Phys., 1983, v. **B219**, p. 262.
94. *Capper D. M., Jones D. R. T., van Nieuwenhuizen P.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B167**, p. 479.
95. *'t Hooft G., Veltman M.* — Nucl. Phys., 1972, v. **B44**, p. 189;
Bollini C., Giambiagi J. — Nuovo Cim., 1972, v. **12B**, p. 20;
Ashmore J. — Nuovo Cim. Lett., 1972, v. **4**, p. 37.
96. *Howe P., Parkes A., West P.* — Phys. Lett., 1984, v. **147B**, p. 409; Phys. Lett. 1985, v. **150B**, p. 149.
97. *Juer J. W., Storey D.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B216**, p. 185;
Piguet O., Sibold K. — Nucl. Phys., 1984, v. **B248**, p. 301.
98. *Witten E.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B188**, p. 52.
99. *Witten E.* — In: Unity of the Fundamental Interactions. ed. A. Zichichi.— Plenum Press, 1983, p. 305;
Witten E. — Lectures given at Trieste, 1981.
100. *Parkes A., West P.* — Phys. Lett., 1984, v. **138B**, p. 99.
101. *Mezincescu L., Jones D. T. R.* — Phys. Lett., 1984, v. **136B**, p. 242, 293.
102. *Mezincescu L., Jones D. T. R.* — Phys. Lett., 1984, v. **138B**, p. 293.
103. *West P.* — Phys. Lett., 1984, v. **136B**, p. 371.
104. *Parkes A., West P.* — Nucl. Phys., 1985, v. **B256**, p. 340;
Grisaru M. T., Milewski B., Zanon D. — Phys. Lett., 1985, v. **155B**, p. 357.
105. *de Witt B. S.* Dynamical Theory of Groups and Fields. — New York: Gordon and Breach, 1978. [Имеется перевод: *Девитт Б. С.* Динамическая теория групп и полей. — М.: Наука, 1987.]
Kallosh R. — Nucl. Phys., 1974, v. **B78**, p. 293;
Grisaru M., van Nieuwenhuizen P., Wu C. C. — Phys. Rev., 1975, v. **D12**, p. 3202;
Honerkamp J. — Nucl. Phys., 1971, v. **B36**, p. 130; 1972, v. **B48**, p. 269;
't Hooft G. — In: Proceedings of XII Winter School of Theoretical Physics in Karpacz;
de Witt B. S. — In: Quantum Gravity, v. **2**, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama. — London: Clarendon Press Oxford, 1981. [Имеется перевод: *Девитт Б. С.* Динамическая теория групп и полей. — М.: Наука, 1987.]
Abbott L. — Nucl. Phys., 1981, v. **B185**, p. 189;
Boulware D. — University of Washington, preprint RLO 1388-822, 1980.
106. *Abbott L., Schaeffer K., Grisaru M.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B229**, p. 372.
107. *Crisaru M., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1982, **B201**, p. 292;
Rocek M., Siegel W. — In: Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. — Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings, 1983.
108. *Ferrara S., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B79**, p. 413.
109. *Jones D. R. T.* — Phys. Lett., 1977, v. **72B**, p. 199;
Poggio E., Pendleton H. — Phys. Lett., 1977, v. **72B**, p. 200.
110. *Tarasov O., Vladimvirov A., Zharkov A. Yu.* — Phys. Lett., 1980, v. **93B**, p. 429;
Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W. — Phys. Rev. Lett., 1980, v. **45**, p. 1063;
Caswell W. E., Zanon D. — Nucl. Phys., 1981, v. **B182**, p. 125.
111. *Sohnius M., West P.* — Phys. Lett., 1981, v. **100B**, p. 45.
112. *Grisaru M., Siegel W.* — Nucl. Phys., 1982, v. **B201**, p. 292.

113. *Howe P., Stelle K., Townsend P.* — Nucl. Phys., 1984, v. **B236**, p. 125.
114. *Mandelstam S.* — Proc. 21st Int. Conf. on High Energy Physics, eds. P. Petiau, J. Pomeuf, J. Phys., 1982, v. **12**, p. 331.
115. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B212**, p. 401; Phys. Lett., 1983, v. **123B**, p. 328.
116. *Jones D. R. T.* — Nucl. Phys., 1975, v. **B87**, p. 127.
117. *Howe P., Stelle K., West P.* — Phys. Lett., 1983, v. **124B**, p. 55.
118. *West P.* — In: Proceedings of the Shelter Island II Conference on Quantum Field Theory and Fundamental Problems of Physics, eds. R. Jackiw, N. Khuri, S. Weinberg, E. Witten. — Massachusetts: M. I. T. Press, 1983.
119. *Howe P., West P.* — Nucl. Phys., 1984, v. **B242**, p. 364.
120. *Славнов А. А.* — ТМФ, 1972, т. **13**, с. 174;
Lee B. W., Zinn-Justin J. — Phys. Rev., 1972, v. **D5**, p. 3121.
121. *Gross D. J., Witczek F.* — Phys. Rev., 1973, v. **D8**, p. 3633.
122. *Curtright T.* — Phys. Lett., 1981, v. **102B**, p. 17;
West P. — Nucl. Phys., 1986, v. **B268**, p. 113.
123. *Adler S. L., Bardeen W. A.* — Phys. Rev., 1969, v. **182**, p. 1517.
124. *Zee A.* — Phys. Rev. Lett., 1972, v. **29**, p. 1198;
Lowenstein J. H., Schroer B. — Phys. Rev., 1972, v. **D6**, p. 1553; 1973, v. **D7**, p. 1929.
125. *Grisaru M., West P.* — Nucl. Phys., 1985, v. **B254**, p. 249.
126. *Ferrara S., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B79**, p. 413.
127. *Stansky R.* — Phys. Rep., 1981, v. **79**, p. 1;
Gürsey F. — In: 1st Workshop on Grand Unification, eds. P. H. Frampton, S. H. Glashow, A. Yildiz. — Brooklyn, Massachusetts: Math. Sci. Press, 1980, p. 39;
Koca M. — Phys. Rev., 1981, v. **D24**, p. 2636;
Olive D., West P. — Nucl. Phys., 1983, v. **B217**, p. 248.
128. *Parkes A., West P.* — Phys. Lett., 1983, v. **127B**, p. 353.
129. *Barbieri R., Ferrara S., Maiani L., Palumbo F., Savoy A.* — Phys. Lett., 1982, v. **115B**, p. 212.
130. *Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W.* — In: Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. — Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings, 1983.
131. *Alvarez-Gaumé L., Freedman D. Z.* — Phys. Lett., 1980, v. **94B**, p. 171; Comm. Math. Phys., 1981, v. **80** p. 443.
132. *Kallosh R.* — In: Supergravity '81, eds. S. Ferrara, J. G. Taylor. — Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
133. *Marcus N., Sagnotti A.* — Phys. Lett., 1984, v. **135B**, p. 85.
134. *Parkes A., West P.* — Phys. Lett., 1983, v. **122B**, p. 365.
135. *Parkes A., West P.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B222**, p. 269.
136. *Namazie A., Salam A., Strathdee J.* — Phys. Rev. 1983, v. **D28**, p. 1481.
137. *Van der Bij J. J., Yao Y.-P.* — Phys. Lett., 1983, v. **125B**, p. 171.
138. *Rajpoot S., Taylor J. G., Zaimi M.* — Phys. Lett., 1983, v. **127B**, p. 347.
139. *Frère J.-M., Mezincescu L., Yao Y.-P.* — Phys. Rev., 1984, v. **D29**, p. 1196.
140. *Girardello L., Grisaru M.* — Nucl. Phys. 1982, v. **B194**, p. 55;
Piquet O., Sibold K., Schweda M. — Nucl. Phys., 1980, v. **B174**, p. 183.
141. *O'Raifeartaigh L.* — Nucl. Phys., 1975, v. **B96**, p. 331;
Fayet P. — Phys. Lett., 1975, v. **58B**, p. 67.
142. *Dimopoulos S., Raby S.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B192**, p. 353.
143. *Ibañez I., Ross G. G.* — Phys. Lett., 1981, v. **105B**, p. 439; Phys. Lett., 1982, v. **110B**, p. 215;
Ellis J., Ibañez I., Ross G. G. — Phys. Lett., 1982, v. **113B**, p. 283.
144. *Fayet P., Iliopoulos J.* — Phys. Lett., 1974, v. **51B**, p. 461.
145. *Ferrara S., Girardello L., Palumbo F.* — Phys. Rev., 1979, v. **D20**, p. 403.

146. *Fischler W., Nilles N. P., Polchinski J., Raby S., Susskind L.* — Phys. Rev. Lett., 1981, v. **47**, p. 757.
147. *Gildener E., Weinberg S.* — Phys. Rev., 1976, v. **D13**, p. 3333;
Maiani L. — In: Proc. of the Ecole d'Eté de Physique des Particules. — Gif-sur-Yvette, 1979, p. 3.
148. *Witten E.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B186**, p. 513;
Dimopoulos S., Georgi H. — Nucl. Phys., 1981, v. **B193**, p. 150;
Sakai N. — Z. Physik, 1982, v. **C11**, p. 153.
149. *Llewellyn-Smith C. H., Ross G. G.* — Phys. Lett., 1981, v. **105B**, p. 38.
150. *Deser S., Zumino B.* — Phys. Lett., 1976, v. **62B**, p. 335.
151. *Polony J.* — Budapest preprint, KFK/1977/83, 1977.
152. *Cremmer E., Ferrara S., Girardello L., Van Proeyen A.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B212**, p. 413; Phys. Lett., 1982, v. **116B**, p. 231.
153. *Nilles H. P.* — Phys. Lett., 1982, v. **115B**, p. 193;
Ibañez L. — Phys. Lett., 1982, v. **118B**, p. 73;
Ellis J. et al. — Phys. Lett., 1983, v. **121B**, p. 123;
Ibañez L., Lopez C. — Phys. Lett., 1983, v. **126B**, p. 54;
Alvarez-Gaumé L. et al. — Nucl. Phys., 1983, v. **B221**, p. 495;
Ellis J., Hagelin J. S., Nanopoulos D. V., Tamvakis K. — Phys. Lett., 1983, v. **125B**, p. 275.
154. *Nilles H. P.* — Phys. Rep., 1984, v. **110C**, p. 1;
Aber H. E., Kane G. L. — Phys. Rep., 1985, v. **117C**, p. 75;
Arnowitt R., Chamseddine A., Nath P. — Northeastern University preprint, NUB 2613, 1983.
155. *Derendinger J. P. et al.* — Phys. Lett., 1984, v. **143B**, p. 133.
156. *Weinberg S.* — Phys. Rev., 1973, v. **D8**, p. 3497.
157. *Jones D. R. T. et al.* — Phys. Lett., 1984, v. **148B**, p. 317.
158. *del Aguila F., Dugan M., Crinstein B., Hall L., Ross G. G., West P.* — Nucl. Phys., 1985, v. **B250**, p. 225.
159. *Ferrara S., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1975, v. **B87**, p. 2074.
160. *Sohnius M., West P.* — Phys. Lett., 1981, v. **105B**, p. 353.
161. *Mack G., Salam A.* — Ann. Phys., 1969, v. **53**, p. 174.
162. *Clark T., Pignet O., Sibold K.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B143**, p. 445.
163. *Sohnius M.* — Phys. Lett., 1979, v. **81B**, p. 8.
164. *Bergshoeff E., de Roo M., De Wit B., van Holten J.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B182**, p. 173.
165. *Wess J., Zumino B.* — Nucl. Phys., 1974, v. **B70**, p. 139;
van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rep., 1981, v. **C68**, p. 189.
166. *Adler S., Collins J., Duncan A.* — Phys. Rev., 1977, v. **D15**, p. 1712;
Collins J., Duncan A., Joglekar S. — Phys. Rev., 1977, v. **D16**, p. 438;
Nielsen N. K. — Nucl. Phys., 1977, v. **B120**, p. 212.
167. *Clark T., Piguet O., Sibold K.* — Ann. Phys., 1977, v. **109**, p. 418; Nucl. Phys., 1978, v. **B143**, p. 445; Nucl. Phys., 1979, v. **B159**, p. 1.
168. *Clark T.* — In: Supergravity, eds. P. van Nieuwenhuizen, D. Freedman — Amsterdam: North Holland, 1985.
169. *Piguet O., Schweda M.* — Nucl. Phys., 1975, v. **B92**, p. 344.
170. *Grisaru M.* — In: Recent Developments in Gravitation (Cargese 1978), eds. M. Levy, S. Deser. — New York: Gordon and Breach, 1979;
Grisaru M., West P. — Nucl. Phys., 1985, v. **B254**, p. 249.
171. *Ogievetski V., Sokatchev E.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B124**, p. 309.
172. *Kaku M., et al.* — Phys. Rev., 1978, v. **D17**, p. 3179.
173. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Lett., 1978, v. **74B**, p. 333;
Stelle K., West P. — Phys. Lett., 1978, v. **74B**, p. 330.
174. *Sohnius M., West P.* — Phys. Lett. 1981, v. **105B**, p. 353;
Акулов В. П., Волков Д. В., Сорока В. А. — ТМФ, 1977, т. 31, с. 12.
175. *Breitenlohner D.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B124**, p. 500; Phys. Lett., 1979,

v. **80B**, p. 217.
176. *Sohnius M., West P.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B216**, p. 100; 1982, v. **B198**, p. 493;
Rivelles V., Taylor J. G. — Phys. Lett., 1982, v. **113B**, p. 467.
177. *Siegel W.* — U. C. Berkeley preprint PTH-83/22, 1983.
178. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.* — Phys. Lett., 1976, v. **65B**, p. 471.
179. *Deser S., Zumino B.* — Phys. Lett., 1976, v. **65B**, p. 369.
180. *Gross D., Harvey J., Martinec E., Rohm R.* — Phys. Rev. Lett., 1985, v. **54**, p. 502; Nucl. Phys., 1985, v. **B256**, p. 253.
181. *Dirac P. A. M.* Lecture in Quantum Mechanics. — New York, Yeshiva University: Belfer Graduate School of Science, 1964. [Имеется перевод: Дирак П. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.]
182. *Goddard P. et al.* — Nucl. Phys., 1973, v. **B56**, p. 109.
183. *Nambu V.* Proc. Int. Conf. of Symmetries and Quark Modes (Detroit 1969). — New York: Gordon and Breach, 1970.
184. *Virasoro M.* — Phys. Rev., 1970, v. **D1**, p. 2933.
185. *Brower R. C.* — Phys. Rev., 1972, v. **D6**, p. 1655;
Goddard P., Thorn C. B. — Phys. Lett., 1972, v. **40B**, p. 235.
186. *Cremmer E., Gervais J.-L.* — Nucl. Phys. 1975, v. **B90**, p. 410;
Kaku M., Kikkawa K. — Phys. Rev., 1974, v. **D10**, p. 1110, 1823.
187. *Siegel W.* — Phys. Lett., 1984, v. **148B**, p. 556; 1984, v. **149B**, p. 157.
188. *Banks T., Peskin M.* — In: Simposium on Anomalies, Geometry and Topology. — Singapore: World Scientific, 1985;
Kaku M., Lykken J. — In: Symposium on Anomalies, Geometry and Topology. — Singapore: World Scientific, 1985.
189. *Brower C., Thorn C. B.* — Nucl. Phys. 1971, v. **B31**, p. 163.
190. *van Nieuwenhuizen P.* — Nucl. Phys., 1973, v. **B60**, p. 478.
191. *Neveu A., West P.* — Nucl. Phys., 1986, v. **B268**, p. 125.
192. *Singh L. P. S., Hagen C. R.* — Phys. Rev., 1974, v. **D9**, 898.
193. *Neveu A., Nicolai H., West P.* — Nucl. Phys. 1986, v. **B264**, p. 573.
194. *Neveu A., Schwarz J., West P.* — Phys. Lett., 1985, v. **164B**, p. 51.
195. *Banks T., Peskin M.* — SLAC preprint 3740, 1985.
196. *Neveu A., Nicolai H., West P.* — Phys. Lett., 1986, v. **167B**, p. 307.
197. *Witten E.* — Nucl. Phys. 1986, v. **B268**, p. 253.
198. *Siegel W., Zweibach B.* — Berkeley preprint UC12-PTH-85130, 1985.
199. *Kato K., Ogawa K.* — Nucl. Phys., 1983, v. **B212**, p. 443.
200. *Fradkin E., Vilkovisky G.* — Phys. Lett. 1975, v. **55B**, p. 224;
Batalin I. A., Vilkovisky G. — Phys. Lett., 1977, v. **69B**, p. 309;
Fradkin E. S., Fradkina T. E. — Phys. Lett., 1978, v. **72B**, p. 343.
201*. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1988.
202*. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
203*. *Parkes A. J.* — Phys. Lett., 1985, v. **156B**, p. 73.
204*. *Ermushev A. V., Kazakov D. I., Tarasov O. V.* — JINR preprint, 1985, E2-85-794;
Ermushev A. V., Kazakov D. I., Tarasov O. V. — Nucl. Phys., 1986, v. **B279**, p. 153.
205*. *Jones D. R. T.* — Nucl. Phys., 1986, v. **B279**, p. 153.
206*. *West P.* — In: Supersymmetry Supegravity Superstrings '86. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 1986.
207*. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* — Class. Quantum Grav., 1984, v. **1**, p. 469;
Иванов Е. А., Калицин С., Огиевецкий В. И. — Труды VII международного совещания по проблемам квантовой теории поля (Алушта, 1984),— Дубна, 1984, с. 196.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра *Вирасоро* 280, 281, 284
— градуированная 18, 19, 20, 22
— *Грассмана* 18
— *Клиффорда* 48, 52, 55
— суперконформная 25, 26
Амплитуда перехода вакуум — вакуум 182
Аномалии калибровочные 236, 287
— киральные 213
— суперконформные 212, 255

Векторы *Киллинга* 108
Вирасоро связи 281
Вспомогательные поля 35, 60, 65

Генераторы нечетные 18, 19, 20
— четные 18, 19, 20
Геометрическая размерность полей 156
Гипермультиплет 89, 150
— *Сониуса* 148, 149
— — ослабленный вариант 214
Группа абелева калибровочная 38
— (анти) *де-Ситтера* 25
— внутренней симметрии 17, 18, 22, 23, 54
— касательного пространства 153
— конформная 25, 69, 248
— *Лоренца* 19, 20, 23
— малая 51, 108, 123
— *Пуанкаре* 17, 18, 21, 22, 23, 46
— суперконформная 256

Действие бозонной струны 279
— гетеротической струны 275
— *Рариты — Швингера* 68
— суперструны 274
— физических полей 33, 36, 37
— *Эйнштейна* 67
Детерминант *Фаддеева—Попова* 137, 191, 208
Духи 191, 192, 209, 219
— *Нильсена—Каллош* 192, 209
— *Фаддеева—Попова* 204

Инвариантность *CPT* 49, 50
Интегрирование в суперпространстве 118, 119

Калибровка суперсимметричная *Ферми—Фейнмана* 190, 191
Каллана — Симанзика β-функция 203, 220, 259
Киральный вес мультиплета 71, 73
— мультиплет аномалий 258, 260, 262
— ток 246, 255
Клиффордов вакуум 52, 54, 55, 81, 89
Ковариантные производные на суперпространстве 113
Компонентные поля 69, 79
Константы перенормировки 201
Космологическая постоянная 99, 243
Кривизна суперпространства 113
Кручение суперпространства 113

Метод индуцированных представлений *Вигнера* 46, 49
— калибровочного расширения 133, 136, 145
Механизм *Файе—Илиопулоса* 235
— *Файе — О'Рэйферти* 234
Минимальная формулировка супергравитации 93
Момент тензора энергии-импульса 247
Мультиплет калибровочный 95
— — аномалий 254, 262
— кинетический 74
— киральный 71, 75, 76, 97
— линейный 72, 75, 117
— максвелловский 96
— «неприводимый» 70, 71
— «общий» 97
— общий скалярный 69, 75, 76, 77
— скалярный 97
— спиральностей 71
— эйнштейновский 97, 101
— *Янга—Миллса* 118

Нарушение суперсимметрии мягкое 223
Неминимальная формулировка *Брайтенлонера* 164

Оператор *Вирасоро* 284
— *Казимира* 29
— спина 53
— «четности» 53
Операторы рождения и уничтожения бозонов 284
— — — — фермионов 295

Параметр обрезания 238, 239
Поле *Хиггса* 238
Представление алгебры *Клиффорда* 48, 52

Представление вне массовой поверхности 30, 33
— группы внутренней симметрии 20, 103
— — *Лоренца* 19, 22, 23, 25
— на массовой поверхности 30, 31, 33, 57
Преобразование калибровочное *Рариты — Швингера* 58, 62
— — *Эйнштейна* 58, 63
— киральное 70, 72
Преобразования *Бекки — Руэ — Стора — Тютина* (БРСТ) 205
Препотенциал 150, 218, 219
Проекторы суперпространства анти-*де-Ситтера* 160, 161
Производящий функционал связных функций *Грина* 182
Процедура минимальных вычитаний 218

Регуляризация методом размерной редукции 193, 194
— — старших производных 214, 215
Репер на суперпространстве 112

Связи, сохраняющие представление 140, 165
— стандартные 158, 159, 165
— суперконформные 162, 165
Связность 64, 66, 106, 112
Спинор вейлевский 267
— голдстоуновский 233
— майорановский 267
Стандартная модель (*Глэшоу—Вайнберга—Салама*) 81
Струна бозонная замкнутая 286
— — открытая 283
Супералгебра анти-*де-Ситтера* 26
— *Пуанкаре* 102, 104
Супергруппа *Пуанкаре* 106, 107
Супердетерминант 119
Суперзаряд 24, 25, 51
Суперконформная инвариантность 91, 92
Суперконформный мультиплет токов 259
Супермультиплет аномалий 212
— киральный 100
Супермультиплет токов 252, 253
Суперполе киральное 122, 132
— скалярное 104
— спинорное 109
Суперпространство анти-*де-Ситтера* 159, 161
— *Пуанкаре* 159
Суперсимметрия глобальная 57, 62
— локальная 57, 62
Суперслед 236
Суперток 246

Тахионы 281
Теорема *Дрэгона* 155
— *Коулмена — Мандулы* 17, 18, 21, 25
— об отсутствии перенормировки 199
Теории великого объединения 90, 238
Тетрада (супертетрада) *см.* Репер
Тождества обобщенные *Якоби* 19, 20, 21, 23
Тождество *Уорда* 206, 216
— *Фирца* 265
Ток нётеровский 258

Уравнение *Рариты — Швингера* 59, 173, 175

Фактор-пространство 46, 103, 105
Формализм порядка 1,5 67
Функционал *Файе—Илиопулоса* 98, 101
Функция *Грина* двухточечная 182, 185, 190
— — — вспомогательных полей 185

Центральный заряд 21, 23, 51
— — алгебры *Вирасоро* 284

Шпурион 224, 225

Эффективное действие 183

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

Предисловие автора к русскому изданию 9

Предисловие 11

Глава 1. Введение 12

Глава 2. Алгебра суперсимметрии 17

Глава 3. Альтернативные подходы к алгебре суперсимметрии 27

Глава 4. Непосредственные следствия алгебры суперсимметрии . . . 29

Глава 5. Модель Весса — Зумино 31

Глава 6. Суперсимметричная калибровочная теория с $N = 1$: супер-КЭД 38

Глава 7. Теория Янга — Миллса с $N = 1$ и метод Нётер 41

Глава 8. Неприводимые представления группы суперсимметрии . . . 46

Глава 9. Простая супергравитация: линеаризованная ($N = 1$)-супергравитация 57

Глава 10. Инвариантность простой супергравитации 66

Глава 11. Тензорное исчисление в глобальной суперсимметрии 69
11.1. Супермультиплеты 69
11.2. Составные супермультиплеты 72
11.3. Формулы для функционала действия 74

Глава 12. Теории с расширенной глобальной суперсимметрией 80
12.1. ($N = 2$)-теория Янга — Миллса 83
12.2. Поля материи с $N = 2$ 88
12.3. Общая глобальная теория с $N = 2$ 90
12.4. ($N = 4$)-теория Янга — Миллса 92

Глава 13. Локальное тензорное исчисление и взаимодействие супергравитации с полями материи 93

Глава 14. Суперпространство 103
14.1. Элементарное введение в ($N = 1$)-суперпространство 103
14.2. ($N = 1$)-суперпространство 105
14.3. ($N = 2$)-суперпространство 126

Глава 15. Формулировки теорий с глобальной суперсимметрией в суперпространстве 132
15.1. Теории с $N = 1$ в суперпространстве. Модель Весса — Зумино 132
15.2. Теория Янга — Миллса с $N = 1$ 134
15.3. Геометрический подход к ($N = 1$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса 138
15.4. Теории с $N = 2$ в суперпространстве 145

Глава 16. Формулировка ($N = 1$)-супергравитации в суперпространстве 152
16.1. Геометрия 152
16.2. Связи в суперпространстве 156
16.3. Анализ связей в суперпространстве 165
16.4. Вывод формулировки супергравитации в суперпространстве из формулировки в x-пространстве 171

Глава 17. Правила Фейнмана для суперграфов с $N = 1$ 180
17.1. Общий формализм 182
17.2. Мультиплет Весса — Зумино 183
17.3. Суперсимметричная теория Янга — Миллса 189
17.4. Приложения правил Фейнмана с $N = 1$ 192
17.5. Расходимость фейнмановских суперграфов 197
17.6. Однопетлевые расходимости в общей ($N = 1$)-суперсимметричной теории 201
17.7. Формализм фонового поля 204
17.8. Формализм фонового поля в суперпространстве 206

Глава 18. Свойства ультрафиолетовых расходимостей теорий с расширенной глобальной суперсимметрией 211
18.1. Доказательство, основанное на аномалиях 212
18.2. Доказательство, основанное на отсутствии перенормировки 216
18.3. Конечные ($N = 2$)-теории с глобальной суперсимметрией 220
18.4. Явные нарушения суперсимметрии и конечность . . . 222

Глава 19. Спонтанное нарушение суперсимметрии и реалистические модели 232
19.1. Нарушение суперсимметрии в приближении древесных диаграмм 233
19.2. Квантовое нарушение суперсимметрии 237
19.3. Проблема калибровочной иерархии 238
19.4. Замечания о построении реалистических моделей . . 242

Глава 20. Токи в суперсимметричных теориях 246
20.1. Общее рассмотрение 246
20.2. Токи в модели Весса — Зумино 256
20.3. Токи в ($N = 1$)-суперсимметричной теории Янга — Миллса 258
20.4. Квантовые аномалии 259
20.5. Токи и формулировки теории супергравитации 261

Глава 21. Двумерные суперсимметричные модели 264
21.1. Двумерные модели с глобальной суперсимметрией . . 264
21.2. Связь материи с супергравитацией в двумерном пространстве-времени 269

Глава 22. Калибровочно-ковариантная формулировка струны 277
22.1. Точечная частица 277
22.2. Бозонная струна 279
22.3. Осцилляторный формализм 283
22.4. Калибровочно-ковариантная теория на нижних уровнях 285
22.5. Конечный набор 291
22.6. Бесконечный набор 293
22.7. Универсальный набор 294
22.8. Спектр состояний универсального набора 302

Приложение А. Пояснение выбранных обозначений 305

Приложение Б. Список обзоров и книг 316

Литература 318

Предметный указатель 325