Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ФИЗИКУ: ОТ МАЯТНИКА ДО ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ХАОСА

Дается представление о характерных нелинейных процессах современной классической физики для частиц и полей. Приведены многочисленные примеры. Рассматриваемые явления естественным образом включают как регулярные процессы, так и динамический хаос и турбулентность. Чтение книги не требует от читателя специальной подготовки.

Для студентов старших курсов и научных работников, интересующихся методами и приложениями современного нелинейного анализа.

Содержание

Предисловие 7
Часть I. ЧАСТИЦЫ 9
Глава 1. Элементы динамики **9**
1. Фазовое пространство 9
Траектории и фазовый поток 9
Гамильтоновские системы 10
Теорема Лиувилля 11
Уравнение непрерывности 11
2. Системы с одной степенью свободы 12
Фазовый портрет 12
Переменные "действие-угол" 13
Спектр нелинейных колебаний 14
Расплывание фазовой капли 15
3. Пример: нелинейный маятник 16
Траектории нелинейного маятника 16
Спектр нелинейного маятника 18
Общие свойства периода колебаний 20
4. Еще два примера нелинейных колебаний 21
Нелинейные колебания плазмы 21
Колебания в прямоугольной яме 23
Ротатор 24
5. Интегральные инварианты Пуанкаре 25
Первый интегральный инвариант 25
Теорема Лиувилля 25
6. Многомерные интегрируемые системы 26
Первые интегралы движения 26
Теорема Лиувилля-Арнольда 27
Инвариантные торы 27
Резонансы 27
Переменные "действие-угол" 28
Однозначность инвариантных торов 29
Следствия 29
Спектральное разложение 30

Нетривиальный пример (цепочка Тоды) 31
7. Отображения 31
Дискретное время 32
Отображение Пуанкаре 33
Равновесие атомных цепочек 33
8. Заключительные замечания 35
Комментарии к главе 1 36
Глава 2. Приближенные методы **36**
1. Теория возмущений 37
Возмущение и топология фазового пространства 37
Ряды по степеням возмущения 38
Возмущение свободного движения 38
Резонансы и малые знаменатели 39
Внутренние резонансы 41
Резонанс волна-частица 42
Опрокидывание фронта волны 43
Замечание о степенных рядах 45
2. Метод усреднения 46
Теорема об усреднении 46
Усредненные уравнения 47
Уравнение Ван дер Поля 48
Движение в быстропеременных полях 49
Маятник с осциллирующей точкой подвеса 51
Вихревой дрейф 52
3. Адиабатические инварианты 54
Определение адиабатических инвариантов 54
Усреднение уравнений 55
Изменение адиабатического инварианта 56
Адиабатические инварианты при N>2 57
Нарушение адиабатической инвариантности 58
Почти адиабатические инварианты 60
4. Заряженные частицы в магнитном поле 60
Дрейфовое приближение 60
Адиабатические инварианты 62
5. Линейные аналогии адиабатической инвариантности 63
Линейный осциллятор с переменной частотой 63
Квантовомеханическая аналогия 64
Обход особенностей в комплексной плоскости 65
Матрица перехода 67
Переходное излучение 68
Замечание о роли нелинейности 69
Комментарии к главе 2 70
Глава 3. Специальные методы **71**
1. Нелинейный резонанс 72

Уравнения резонанса 72
Свойства нелинейного резонанса 74
Внутренний нелинейный резонанс 76
2. Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) 77
Основная задача динамики 78
Теорема об устойчивости 78
Теорема о сохранении инвариантных торов (Колмогоров-Арнольд) 78
Следствие 79
3. Структурные свойства фазовых траекторий 80
Классификация особых точек 80
Предельные циклы 82
Топологическая эквивалентность 83
Индексы Пуанкаре 85
Пример 1 85
Пример 2 86
Пример 3 85
Пример 4 85
Следствие 86
Структурная устойчивость 86
4. Простейшие бифуркации 87
Тангенциальная бифуркация 88
Смена устойчивости 89
Бифуркация удвоения 89
Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа (ПАХ) 89
Бифуркация удвоения периода 92
Теорема Шарковского 95
Замечание о бифуркациях 95
Комментарии к главе 3 95
Глава 4. Эргодическая теория и хаос **95**
1. Эргодичность и перемешивание 96
Мера в фазовом пространстве 96
Эргодичность 98
Перемешивание 99
Спектр 100
2. K-системы 100
Локальная неустойчивость 100
Пример 102
Связь перемешивания с локальной неустойчивостью 103
Д-системы 103
Энтропия Колмогорова-Синая 104
3. Примеры 105
Пример 1 106
Пример 2 107
У-системы Аносова 107

Биллиарды 109
4. Возвраты и периодические орбиты 110
Теорема Пуанкаре о возвратах 111
Периодические орбиты 112
Пример 113
Синус-отображение 114
Теорема Боуэна 114
Комментарии к главе 4 115
Глава 5. Хаос в деталях **116**
1. Универсальное отображение для нелинейных колебании 116
Структура отображения 116
Вывод отображения 118
Критерий стохастичности 119
Структура фазового пространства 120
Стохастическое море 120
Спектральные свойства 121
Временные масштабы 124
Редукция к одномерному перемешиванию 125
Одномерный коррелятор 125
2. Перекрытие резонансов 127
Построение системы резонансов 127
Условие перекрытия резонансов 128
3. Образование стохастического слоя 129
Динамика вблизи сепаратрисы 129
Отображение вблизи сепаратрисы 130
Ширина стохастического слоя 131
Перекрытие резонансов вблизи сепаратрисы 133
Гомоклиническая структура 135
Стохастический слой нелинейного резонанса 137
4. Разрушение интегралов движения 139
Природа разрушения интегралов 139
Двумерные колебания 140
Связанные ротаторы 142
5. Стохастические аттракторы 144
Финитность движения 144
Аттракторы и репеллеры 144
Стохастический аттрактор 145
Квазиаттракторы 146
6. Примеры стохастических аттракторов 146
Стандартное диссипативное отображение 147
Условие появления стохастичности 149
Структура стохастического аттрактора 150
Стохастический аттрактор при перекрытии резонансов 151
7. Общие замечания о появлении хаоса 152

"Стохастическая паутина" 152
Диффузия Арнольда 153
Кантерторы 154
Замедление диффузии 155
Число вращения 156
Переход КАМ-тор-кантор-тор 156
"Дьявольская лестница" 157
Комментарии к главе 5 157
Глава 6. Элементы кинетики **158**
1. Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова 159
Структура уравнения 159
Временные масштабы 159
Вывод кинетического уравнения 160
Дивергентная форма кинетического уравнения 161
Влияние границы стохастичности 162
Корреляционные эффекты 163
2. Кинетика при диссипативных отображениях 166
Структура кинетического уравнения 166
Динамика моментов 167
3. Стохастическое ускорение и "нагрев" частиц 168
Стохастичность и идеи нагрева и ускорения 168
Модель Улама 168
Ускорение в поле тяжести 171
Стохастический нагрев в поле волнового пакета 172
Влияние трения на динамику в волновом пакете 176
Комментарии к главе 6 176
Глава 7. Фрактальные свойства хаоса **177**
1. Фракталы 177
Хаусдорфова размерность 177
Примеры 178
Определение фрактала 179
Связь с ренормаличационной группой 180
2. Фракталы и хаос 181
Размерность стохастического аттрактора 181
Фрактальные свойства локализации мод 183
Размерность разветвления 184
Распределения и спектральная плотность 184
Комментарии к главе 7 186
Часть II. ВОЛНЫ 187
Глава 8. Нелинейные нестационарные волны **187**
1. Укручение волн 187
Бегущие волны 187
Опрокидывание фронта волны 188
Роль диссипации. Уравнение Бюргерса 189

Число Реинольдса 192
Спектр ударной волны 192
2. Стационарные волны 193
Ударная волна 193
Влияние дисперсии. Уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ) 194
Спектр периодических волн 196
Нелинейная дисперсия 197
3. Примеры стационарных волн 198
Ионно-звуковые волны 198
Критическая скорость 199
Магнитозвуковые волны 200
Уравнение синус-Гордона 202
4. Бесстолкновительные ударные волны 203
Формирование волны 203
Структура фронта волны 204
Магнитозвуковая ударная волна 205
Образование "бора" 207
Ускорение ионов на фронте волны 208
Комментарии к главе 8 208
Глава 9. Гамильтоновское описание волн **209**
1. Вариационные принципы 210
Степени свободы 210
Лагранжиан 211
Метод Уизема 212
Гамильтоновский формализм 213
Стационарные волны 215
Канонические переменные 216
2. Резонансное взаимодействие волн 218
Распадные и нераспадные спектры 218
Уравнения для волн 219
Эволюция волнового триплета 220
Распадная неустойчивость 221
Аналогия с параметрическим резонансом 222
Распад плазмона 223
3. Резонансы нелинейных волн 224
Константа связи 224
Внешнее возмущение 225
Укороченные уравнения 227
Нелинейный резонанс 228
4. Взаимодействие нелинейных волн 230
Малый параметр взаимодействия 230
Неодномерный ионный звук 231
Взаимодействие двух волн 232
Взаимодействие трех волн 234

Комментарии к главе 9 237
Глава 10. Хаос в волновых полях 237
1. Слабонелинейные поля 238
Построение отображения 238
Локальная неустойчивость фаз 241
К-энтропия 243
Расцепление корреляций 244
2. Проблема Ферми-Паста-Улама (ФПУ) 245
Уравнения и предпосылки 245
О переходе "дискретность-непрерывность" 245
Оценка области стохастичности 246
3. Турбулентность слабонелинейного поля 248
Основное кинетическое уравнение 248
Кинетика фононов 250
Слабая турбулентность 252
4. Стохастическая неустойчивость нелинейной волны 252
Канонические уравнения 253
Расстояние между резонансами 254
Перекрытие резонансов 255
Диффузионная динамика волны 255
Комментарии к главе 10 257
Глава 11. Сильная турбулентность 258
1. Модель Лоренца 259
Уравнения модели Лоренца 259
Линеаризация 260
Последовательность бифуркаций 261
Аттрактор Лоренца 262
2. Конвективные ячейки 262
Конвекция Бенара-Рэлея 263
Неустойчивости 265
Переход к турбулентности 265
Электрогидродинамическая конвекция 266
Турбулентность и неупорядоченные структуры 267
3. Особенности возникновения турбулентности 267
Существует ли сценарий турбулентности? 267
Необходима ли диссипация? 268
Локальная неустойчивость и фрактальность 268
Центральный пик 268
Пространственно временной хаос 268
4. Ленгмюровская турбулентность 269
Образование "плазмбнного конденсата" 269
Модуляционная неустойчивость 270
Коллапс ленгмюровских колебаний 272
Турбулентность 274

5. Солитонная турбулентность 275
Комментарии к главе 11 276
Глава 12. Точно интегрируемые волновые уравнения 277
1. Интегрирование КдВ-уравнения 277
Операторные пары Лакса 277
Метод ОЗР 279
Солитонные решения 280
N-солитонные решения 281
Интегралы движения 283
2. Интегрируемые уравнения 284
Комментарии к главе 12 284
Часть III. ПРИМЕРЫ 285
Глава 13. Движение частиц в волновых полях 285
1. Регулярная и стохастическая динамика частиц в поле волнового пакета 285
Времени- и пространственноподобные волновые пакеты 285
Отображения 286
Динамика в0 пространственноподобном пакете 288
Кинетика стохастического нагрева частиц 289
Обобщение 291
2. Движение в магнитном поле и поле волнового пакета 292
Уравнение движения 293
Резонансы "волна-частица" 294
Перекрытие резонансов продольного движения 295
Кинетическое уравнение 296
3. Парадокс исчезновения затухания Ландау 297
4. Стохастическая паутина 298
Отображение с подкручиванием 298
Резонансное подкручивание 299
Фазовая плоскость 300
Резонанс a^4 301
Образование стохастической паутины 304
Симметрия фазовой плоскости 304
Диффузия 306
Комментарии к главе 13 307
Глава 14. Биллиарды 308
1. Перемешивающие биллиарды 308
Анализ траекторий 308
Кинетика частицы в биллиарде 310
2. Нелинейная динамика лучей 311
Уравнения траектории луча 312
Нелинейный пространственный резонанс 313
Пример 314
Двумерные сечения 315
Глава 15. Нелинейная оптика 316

1. Нелинейная геометрическая оптика 316
Узкие волновые пучки 316
Параболическое уравнение 317
Самосжатие волновых пакетов 318
Самофокусировка 320
Пороги устойчивости 320
Стационарные волны 321
2. Нелинейные кооперативные явления при взаимодействии поля излучения с веществом 322
Кооперативные эффекты 323
Атомы+поле излучения как динамическая система 324
Связанное состояние атомов с полем излучения 326
Разрушение связанного состояния 328
Комментарии к главе 15 330
Глава 16. Структурные свойства одномерных цепочек 331
1. Атомные цепочки 331
Дискретное уравнение синус-Гордона 332
Стационарные состояния цепочки 332
Нелинейный резонанс в структурах 333
Несоразмерные структуры 335
§ 2. Спиновые цепочки 336
Условия равновесия 336
Эквивалентная динамическая система 337
Хаотические структуры и ближний порядок в них 338
3. Возбуждение в молекулярных цепочках 340
Описание модели 340
Коллективные возбуждения 341
Комментарии к главе 16 343
Глава 17. Возмущения в задаче Кеплера 344
1. Нелинейная динамика в кулоновском поле 344
Параметры движения 344
Переменные действие-угол 345
Спектральные свойства 346
2. Возбуждение и ионизация атома водорода 347
3. Диффузия эксцентриситета орбит в гравитационном поле планет 349
Масконы 349
Мультипольное разложение 350
Изменение интегралов движения 351
Резонансы и их ширина 351
Перекрытие резонансов 352
Диффузионные орбиты 354
4. Диффузия комет из облака Оорта 355
Облако Оорта 355
Простейшее отображение 356

Диффузия орбит 358
Другие возмущения 359
Комментарии к главе 17 359
Список литературы 360
Предметный указатель **367**

Предметный указатель

Адиабатический инвариант 54, 62, 63, 70, 71
Аносова система 107
Арнольда диффузия 153
Атомная цепочка 33, 331
Аттрактор 144
- Лоренца 262
- стохастический 145, 151
Бегущие волны 187
Бесстолкновительные ударные волны 203
Биллиарды 109, 308
Бифуркации 87
Бор 207
Боуэна теорема 114
Бюргерса уравнение 189
Ван дёр Поля уравнение 48
Вариационный принцип 210
Взаимодействие волн 230
Вихревой дрейф 52
Возмущений теория 37
Волновой триплет 220, 234
Волновые пучки 316
Вращения число 156
Время возврата 112
Гиперболическая точка 13
Гомоклиническая структура 135
Действие 29
- угол переменные 13, 28, 345
Дивергентная форма 161
Динамика лучей 311
Диффузия волн 255
- орбит 358
Дрейф в магнитном поле 60
Дьявольская лестница 157
Знаменатели малые 39, 41
Излучение переходное 68
Инвариант адиабатический см. Адиабатический инвариант
- интегральный 25
- почти адиабатический 60
Инвариантный тор 27
Интегралов разрушение 139
Ионно-звуковые волны 198, 231
КАМ-теория 77
Канонические переменные для волн 214, 216
Кантор-тор 154
Квазиаттрактор 146, 151
Кеплера задача 344
Колебания в яме 23
- плазмы 21
Конвективные ячейки 262
Константа связи волн 224
Контур неприводимый 29
Кооперативные эффекты 323
Коррелятор одномерный 99, 123, 125
Критическая скорость 199, 201
K-системы 103
Лагранжиан волн 211
Ленгмюровская турбулентность 269
Ленгмюровский коллапс 272
Лиувилля-Арнольда теорема 27
Лиувилля теорема 11, 25
Лоренца модель 259
Ляпунова показатель 101
Магнитозвуковая волна 201
- - ударная 205
Масконы 349
Матрица перехода 67
Маятник нелинейный 16
Мера в фазовом пространстве 96
Метод обратной задачи рассеяния 279
- Уизема 212

Модуляционная неустойчивость 270
Молекулярные цепочки 340
Надбарьерное отражение 56
Нелинейная дисперсия 216
Нелинейный резонанс волн 228
Несоразмерные структуры 335
Неустойчивость локальная 100, 241
Облако Оорта 355
Опрокидывание волны 43, 188, 189
Опрокидывания время 45, 189
Особые точки 80
Отображение 31
- диссипативное 147
- Пуанкаре 33
- с подкручиванием 299
- сепаратрисное 131
- стандартное 34, 35, 119
- универсальное 116
Параболическое уравнение 317
Перемешивание 99
Перемешивающий биллиард 308
Период колебании 20
Периодические орбиты 112
Плазменный конденсат 269
Предельные циклы 82, 91
Пуанкаре индекс 85
- теорема о возвратах 111
Пуассона скобки 26
Размерность разветвлений 184
- стохастического аттрактора 181
- Хаусдорфа 177
Распад плазмона 223
Распадная неустойчивость 221
Распадный спектр 218
Резонанс 27
- внутренний 41
- волн 228
- волна частица 42, 294
- нелинейный 72, 313, 333
- - внутренний 76
Резонансов перекрытие 127, 128, 133
Рейнольдса число 192
Ренормализационная группа 180
Репеллер 145
Ротатор 24
Ротаторы связанные 142
Ряды степенные 38
Самосжатие волновых пакетов 318
Самофокусировка 320
Сепаратриса 12, 17
Солитон 195
Спектр динамической системы 100
- колебаний 14
- маятника 18
- ударной волны 192
Спектральное разложение 30
Спиновые цепочки 336
Стационарная волна 193, 215, 321
Степени свободы волны 210
Стохастическая паутина 152, 298
Стохастический нагрев 168, 175, 289
- слой 129, 137
Стохастическое море 120
- ускорение 168, 171, 175
Стохастичности критерий 119
Стохастичность 96
Тода цепочка 31
Топологическая эквивалентность 37, 83
Тор инвариантный 27
Турбулентность сильная 252, 258
- слабая 252
- солитонная 275
Ударная волна 192, 193
Укручение волн 45, 188
Улама модель 168
Уравнение КдВ 194
- Ландау-Лифшица 217
- синус-Гордона 202
Усреднение в быстрых полях 49
Усреднения метод 46
Устойчивость структурная 86
Фазовая капля 15
Фазовый объем 10
- портрет 12
Ферми-Паста-Улама проблема 245
Финитность движения 10, 144

Фокера-Планка-Колмогорова
уравнение 159
Фононов кинетика 250
Фракталы 177, 179
Хаос 96
Циклы Пуанкаре 111
Число Маха 200
Эллиптическая точка 13
Энтропия Колмогорова-Синая 104
Эргодичность 98

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика в своем современном виде начиналась с нелинейных законов движения частиц. Это видно уже на примере задачи Кеплера, которая содержит типичные свойства нелинейных систем: периодические орбиты с большим числом гармоник и зависимость периода колебаний от амплитуды. А знаменитая проблема трех тел не только отразила наиболее общие особенности нелинейной динамики, но и позволила раскрыть такие ее сложные и трудноразрешимые свойства, как неинтегрируемость и появление малых знаменателей в рядах теории возмущений. Более того, стало ясно, что для типичных нелинейных ситуаций нельзя предсказать на сколь угодно большое время динамические свойства даже слабо возмущаемых систем. Сложившееся положение дел закрыло перед физиками возможность получить ответы на многие важные вопросы, среди которых достаточно упомянуть проблему «вечной» (т. е. неограниченной во времени) устойчивости динамических систем. Несмотря на многочисленные усилия в области анализа нелинейных систем, с создавшейся ситуацией пришлось мириться в течение многих лет, закрывая глаза на ограниченность, а в некоторых случаях и на возможную несостоятельность наших представлений о динамике того или иного физического процесса. Состояние нелинейного анализа усугублялось существованием значительно более сложных физических объектов — уравнений динамики сплошной среды, уравнений гравитации Эйнштейна и др. Своеобразной областью компенсации явились чисто линейные физические теории — теория электромагнитного поля и квантовая механика. Успехи, достигнутые здесь, в определенной степени ослабили внимание к «нелинейным» трудностям. Кроме того, методы квантовой теории удалось весьма удачно применить к многочисленным классическим задачам, используя линеаризацию исходных уравнений и построение удобных рядов теории возмущений для нелинейных задач на основе результатов линеаризации.

Понадобилось некоторое время для того, чтобы стало ясно, что старые проблемы остались на том же уровне и что их преодоление не связано с идеями линеаризации. Одновременно с этим все области физики начали приобретать свои собственные «нелинейные» проблемы. Появились нелинейная оптика, нелинейная акустика, нелинейная радиофизика. Но наиболее «богатой» относительно различных нелинейных проблем средой оказалась плазма. Сочетание задач, связанных с динамикой частиц, и задач, связанных с динамикой нелинейных сред в отсутствие столкновений, привело к возникновению своеобразной физической лаборатории, в которой оказалось возможным продемонстрировать реальный физический аналог практически любому физическому процессу из другой области физики. Достаточно назвать такие яркие аналогии, как адиабатические инварианты в механике и сохранение магнитного момента заряженной частицы в магнитной ловушке, волны на поверхности «мелкой воды» и магнитозвуковые волны в плазме, динамика твердого волчка и распадные неустойчивости волн.

Возможно, что именно особенности бесстолкновительной плазмы как нелинейной среды способствовали развитию новых и, в определенном смысле, неожиданных методов ее исследования. С одной стороны, это были методы, вводящие стохастический элемент в динамику среды за счет сложных нели-

нейных взаимодействий при отсутствии явных случайных сил (квазилинейная теория, слабая турбулентность, многопотоковые неустойчивости и др.). С другой стороны, это были методы точного интегрирования сложных нелинейных уравнений.

Приблизительно в тот же период произошли радикальные изменения и в исследовании нелинейных систем строгими методами. Появилась универсальная техника приближенного усреднения нелинейных систем (метод Крылова—Боголюбова—Митропольского), была доказана теорема о сохранении инвариантов (теория Колмогорова—Арнольда—Мозера) и, наконец, возникло определение нового свойства нелинейных систем—динамическая энтропия Колмогорова—Синая. Эта энтропия, будучи новым инвариантом системы, отразила в количественной форме возможность нелинейных систем совершать движение с перемешиванием—свойство, которое еще ранее исследовалось в работах Е. Хопфа и Н. С. Крылова. Сейчас выяснилось, что перемешивание, или хаос, может возникать даже в системе с двумя степенями свободы и появление его или отсутствие зависит лишь от значений параметров или начальных условий задачи. Таким образом, в нелинейную динамику вошел качественно новый элемент движения, потребовавший пересмотра ряда более ранних приближенных результатов.

Развитию новых идей в понимании нелинейной динамики в значительной степени способствовало появление компьютеров. Их использование для анализа нелинейных систем было начато работами Э. Ферми и С. Улама и сейчас достигло такого уровня, что характер процесса трудно представить себе в полной мере без просмотра его на дисплее даже в тех случаях, где могут быть получены формальные результаты.

Благодаря всем перечисленным достижениям, а также многим другим результатам к настоящему времени стало формироваться некоторое общее представление о нелинейной динамике различных процессов независимо от той области физики, к которой они имеют отношение. Возникли общие физические понятия, обладающие универсальностью, и появилось некоторое подобие классификации типов решений в простейших физических ситуациях.

Эти соображения побудили авторов совершить попытку создать связное представление о физических особенностях современных нелинейных задач физики, рассчитанное на самого широкого читателя-физика. Учитывая огромное количество работ в этой области и отсутствие завершенных результатов во многих задачах, легко понять, что значительные трудности пришлись на отбор материала, который следует включить в книгу. Он весь «от маятника до турбулентности и хаоса» изложен примерно в едином неформальном стиле, использующем, главным образом, качественный анализ и физические оценки. Длинные выкладки занимают мало места и в большинстве своем приведены лишь в примерах. Содержание книги разбито на три части: I. Частицы; II. Волны; III. Примеры.

Содержание книги является естественным продолжением предыдущих монографий авторов (*Арцимович Л. А.* и *Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.—М.: Атомиздат, 1979; *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.—М.: Наука, 1985).

Рукопись книги была прочитана М. И. Рабиновичем, И. Р. Сагдеевым и А. А. Черниковым, которые помогли устранить значительное число неточностей. Авторы выражают им искреннюю признательность.

Часть I. ЧАСТИЦЫ

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ

Физические системы можно условно разделить на два вида — частицы и поля. Их принято описывать по-разному, хотя и существует стремление, которое иногда удается реализовать, описывать поля так же, как и частицы. Возможно, что в рамках классической физики можно найти единый способ описания частиц и полей такой, в котором их основные свойства можно сформулировать в некоторой универсальной форме. Однако свойства частиц и полей настолько отличаются друг от друга, что мы вынуждены называть это различие принципиальным. Прежде всего оно связано с числом степеней свободы. Любая физическая система из конечного числа частиц имеет конечное число степеней свободы, равное числу частиц, умноженному на некоторое небольшое число. Поля с этой точки зрения характеризуются бесконечным числом степеней свободы, и при предельном переходе к бесконечности возможны многие неожиданности, которые, как мы увидим далее, реализуются природой достаточно искусно и разнообразно.

Это введение объясняет, почему изложение динамики систем следует разделить на две части и почему первую из них следует начать с динамики частиц. Классическая динамика частиц является наиболее развитой областью физики, и здесь существуют удивительные по своей красоте результаты, составляющие определенный фундамент для понимания нелинейных явлений самой разнообразной природы. В этой и следующей главах будут приведены в краткой форме основные результаты классической механики частиц, необходимые для дальнейшего изложения.

§ 1. Фазовое пространство

Исследование свойств динамических систем наиболее удобно и естественно проводить, используя понятие фазового пространства.

Траектории и фазовый поток. Состояние механической системы или частицы задается точкой в фазовом пространстве (q, p) с N-мерными векторами $q=(q_1, \ldots, q_N)$ и $p=(p_1, \ldots, p_N)$. Их принято называть обобщенными координатами и обобщенными импульсами. В этом случае принято говорить, что система имеет N степеней свободы, а ее фазовое пространство $2N$-мерно.

Изменение состояния системы со временем t приводит к перемещению точки (q, p) в фазовом пространстве. Так возникает траектория системы $(q(t), p(t))$. Оператор T, переводящий систему из одного состояния в момент времени $t=0$ в другое состояние в момент времени t,

$$(q(t), p(t))=\hat{T}(q(0), p(0)), \tag{1.1}$$

называется фазовым потоком. Обычно фазовый поток задается с помощью дифференциальных уравнений движения:

$$\dot{q}=Q(q, p, t); \quad \dot{p}=P(q, p, t), \tag{1.2}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Решением уравнений (1.2) является траектория частицы

$$q = q(t;\ q_0,\ p_0); \qquad p = p(t;\ q_0,\ p_0), \tag{1.3}$$

зависящая от начальных условий ($q_0 = q(0)$; $p_0 = p(0)$) и называемая также фазовой кривой.

Фазовые кривые не пересекаются. Исключением являются некоторые кривые, составляющие множество нулевой меры. Поэтому, с точностью до



Рис. 1.1. Инфинитное (*а*) и финитное (*б*) движение в фазовом пространстве

этого множества, можно сказать, что оператор $\hat{T}$ в (1.1) осуществляет взаимно однозначное отображение фазовой плоскости в себя.

В зависимости от того, размещается фазовая кривая в неограниченной или в конечной областях фазового пространства для $t = (-\infty, \infty)$, движение называется соответственно инфинитным или финитным (рис. 1.1).

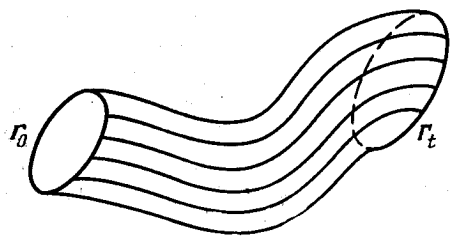


Рис. 1.2. Перемещение фазового объема

Гамильтоновские системы. Важной характеристикой физических систем является существование у них определенных свойств симметрии движения. Отражением этих свойств являются физические инварианты движения, т. е. величины, не изменяющиеся со временем.

Пример инварианта, с которого следует начать, — фазовый объем. Рассмотрим в фазовом пространстве некоторую конечную область и множество всех точек этой области как начальные условия. Можно говорить о фазовой жидкости, состоящей из фазовых точек, и о ее объеме Γ_0. С течением времени фазовая жидкость перемещается вследствие фазового потока (1.1) или (1.2), и фазовая капля к моменту времени t занимает фазовый объем Γ_t (рис. 1.2). Если фазовый объем в результате движения сохраняется, то $\Gamma_0 = \Gamma_t$, или

$$\Gamma_t = \text{const} \equiv \text{inv}. \tag{1.4}$$

Свойство (1.4) имеет простой физический смысл. Сопоставим каждой фазовой точке, входящей в объем Γ_t, некоторую частицу. Тогда величина Γ_t определяет число частиц в фазовом объеме Γ_t, а формула (1.4) выражает не что иное, как закон сохранения количества фазовой жидкости.

Условие сохранения фазового объема выделяет определенный класс физических систем, называемых гамильтоновскими. Для них уравнения движения задаются с помощью некоторой функции $H = H(p, q, t)$, называемой гамильтонианом или функцией Гамильтона. Они имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1.5}$$

т. е. функции Q и P в уравнениях (1.2) обладают свойством

$$\operatorname{div} J \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial p} = 0, \tag{1.6}$$

где $J = (\dot{q},\ \dot{p})$ — вектор тока фазовой жидкости. Уравнение (1.6) выражает свойство несжимаемости фазовой жидкости.

Теорема Лиувилля. Для гамильтоновских систем (1.5) фазовый объем сохраняется, или, в более общей формулировке: если выполнено свойство (1.6), то

$$\hat{T}\Gamma_0 = \Gamma_0. \tag{1.7}$$

(Доказательство можно найти, например, в [1, 2].)

Эта теорема, имеющая многочисленные приложения в самых различных областях физики, выделяет главный физический инвариант — фазовый объем — и связывает с ним гамильтоновский характер системы.

Заметим, что указанная связь действует только в одну сторону. Существуют не гамильтоновские динамические системы, сохраняющие фазовый объем, например система, описываемая одним уравнением $\dot{x} = 0$ (более сложный пример будет приведен ниже).

Уравнение непрерывности. Иногда бывает удобно рассматривать временну́ю эволюцию не точки в фазовом пространстве, а элемента фазового объема. Например, по характеру деформации границы фазового объема

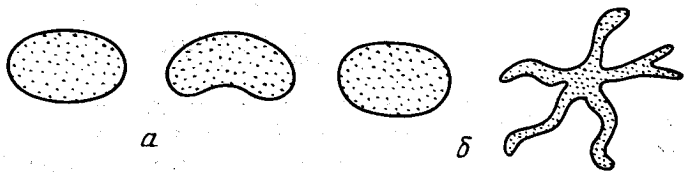


Рис. 1.3. Изменение элемента фазового объема в устойчивом (*а*) и неустойчивом (*б*) случаях

можно судить об устойчивости или неустойчивости движения (рис. 1.3). В таких случаях используется функция $f(p, q, t)$ распределения частиц в фазовом пространстве, которая удовлетворяет условию нормировки

$$\int_\Gamma f(p, q, t)\, d\Gamma = 1. \tag{1.8}$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(Jf) = 0 \tag{1.9}$$

выражает в дифференциальной форме закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве.

В гамильтоновском случае условие несжимаемости (1.6) приводит уравнение (1.9) к форме, называемой уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{1.10}$$

Здесь подразумевается, что величины $\dot{q}$ и $\dot{p}$ выражены с помощью (1.5) как функции (q, p, t).

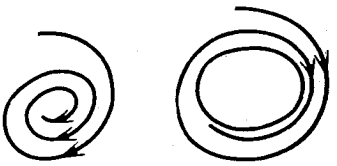


Рис. 1.4. Невозможность подобных траекторий следует из теоремы Лиувилля

Важное замечание: уравнение (1.10) содержит только ту информацию о свойствах фазовых траекторий, которая имеется в уравнениях движения (1.5). Это следует сразу из свойств уравнений в частных производных первого порядка. Решение (1.10) может быть записано в виде

$$f(q, p, t) = f_0(q_0 = q_0(q, p, t); \quad p_0 = p_0(q, p, t)),$$

где связь между (q_0, p_0) и (q, p) определяется уравнениями движения (1.5), а $f_0 = f_0(q_0, p_0) = f(t = 0)$ — начальное условие для распределения фазовой жидкости. В частности, для точечной частицы имеем

$$f(q, p, t) = \delta(q - q(t))\,\delta(p - p(t)),$$

где $q(t) = q(t; q_0, p_0)$, $p(t) = p(t; q_0, p_0)$ определяют траекторию частицы.

Уравнение Лиувилля (1.10), так же как и уравнение движения (1.5), обратимо во времени.

Среди множества возможных траекторий можно предположить существование таких, которые имеют асимптотически устойчивое положение равновесия или асимптотически устойчивый предельный цикл (рис. 1.4). Теорема Лиувилля исключает подобную возможность [2]. Следовательно, это же утверждение справедливо для гамильтоновских систем.

§ 2. Системы с одной степенью свободы

Системы с одной степенью свободы относятся к числу простейших систем. На их примере можно ввести некоторые важные понятия общей теории.

Фазовый портрет. Остановимся на анализе простейшего вида движения гамильтоновской системы с одной степенью свободы. Если гамильтониан системы имеет форму

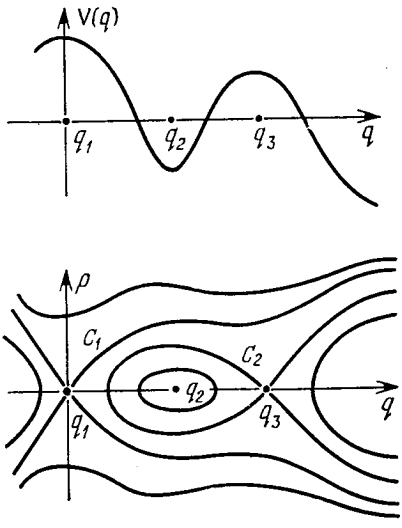


Рис. 1.5. Потенциал $V(q)$ и фазовый портрет системы; C_1 и C_2 — сепаратрисы

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q), \tag{2.1}$$

т. е. не зависит от времени, то энергия системы $E = H(p, q)$ является интегралом движения ($E = \mathrm{inv}$). Это позволяет в одномерном случае ($N = 1$) записать

$$p = m\dot{q} = \pm\sqrt{2m(E - V(q))} \tag{2.2}$$

и проинтегрировать задачу, т. е. найти траекторию $q = q(t;\ q_0,\ p_0) = q(t;\ q_0,\ E)$, где $E = H(p_0,\ q_0)$.

Качественный анализ возможных видов траекторий системы можно, однако, произвести, не интегрируя выражения (2.2), а воспользовавшись существованием инварианта E. В зависимости от структуры потенциала $V(q)$ имеются «захваченные» в потенциальную яму траектории частиц и «пролетные» траектории. Захваченным траекториям соответствует финитное движение (периодические колебания), пролетным — инфинитное. Различные типы траекторий разделяются на фазовой плоскости особыми кривыми, называемыми сепаратрисами (C_1 и C_2 на рис. 1.5).

Уравнения движения (1.5) согласно (2.1) имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{dV}{dq};\quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \tag{2.3}$$

Состояние равновесия находится из условий $\dot{p} = \dot{q} = 0$, т. е.

$$p_s = 0,\quad \frac{dV(q_s)}{dq} = 0. \tag{2.4}$$

Это означает, что в положениях равновесия скорость (см. (2.3)) равна нулю, а потенциал имеет экстремум (точки q_1, q_2 и q_3 на рис. 1.5).

Проведем элементарное исследование траекторий системы в окрестности положений равновесия. Уравнение траекторий на фазовой плоскости $p = p(q)$ выражается формулой (2.2). Разложим ее левую и правую части в окрестности положения равновесия $(p_s,\ q_s)$. Согласно (2.4) получаем

$$p - p_s = \pm(2m)^{1/2}[E - E_s - {}^1/_2 V''(q_s)(q - q_s)^2]^{1/2}, \tag{2.5}$$

где $E_s = H(p_s, q_s)$ — значение энергии в точке равновесия. Удобно переписать (2.5) в виде

$$(p-p_s)^2 - mV''(q_s)(q-q_s)^2 = 2m(E-E_s). \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала случай $V'' < 0$ (потенциальный горб). Через точку (p_s, q_s) проходят две прямые. Эти прямые являются частями сепаратрисы и соответствуют траектории с $E = E_s$. Семейство траекторий имеет вид гипербол (рис. 1.6*а*). Точка (p_s, q_s) называется гиперболической точкой или седлом. Не вдаваясь в детали определения понятия устойчивости, легко увидеть, что движение в окрестности седла неустойчиво. Такими точками на рис. 1.5 являются точки q_1 и q_3.

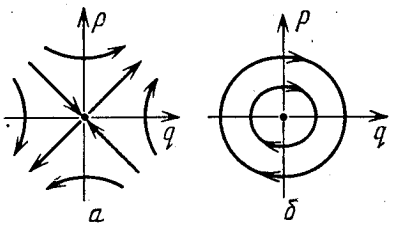


Рис. 1.6. Фазовые траектории в окрестности гиперболической (*а*) и эллиптической (*б*) точек

При $V'' > 0$ точка (p_s, q_s) называется эллиптической, так как в ее окрестности семейство траекторий, согласно (2.6), имеет вид эллипсов (рис. 1.6*б*), причем всегда $E > E_s$. В определенном смысле движение в окрестности эллиптической точки устойчиво. Точка q_2 на рис. 1.5 является эллиптической.

Траектория, проходящая в достаточно малой окрестности эллиптической точки, совершает всегда финитное движение. Обратное утверждение также справедливо, если траектория не имеет особенностей.

Переменные «действие — угол». На примере систем с одной степенью свободы удобно ввести переменные, которым отведено особое место в теории нелинейных систем. Это переменные «действие — угол». Их уникальные свойства простираются за пределы классической теории, и в квантовой механике переменная действия встречается не реже, чем в классической. После рассмотрения систем с $N > 1$ числом степеней свободы мы обсудим некоторые причины, выделяющие действие — угол среди произвольного множества других переменных.

Канонически сопряженной парой переменных (p, q) для гамильтониана $H = H(p, q)$ называются переменные, удовлетворяющие гамильтоновским уравнениям движения (1.5). Введение канонически сопряженной пары действие — угол (I, ϑ) для одной степени свободы осуществляется с помощью соотношений [1]:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p(q, H)\,dq = I(H),$$
$$\vartheta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}, \qquad S(q, I) = S(q, H(I)) = \int^{q} p(q, H)\,dq, \tag{2.7}$$

где $S(q, I)$ — укороченное действие, являющееся для данного случая производящей функцией. В уравнениях (2.7) предполагается, что система совершает финитное движение, и интеграл берется по полному периоду колебаний. Аналогично можно ввести действие для нефинитных движений, и в случае, если гамильтониан является периодической функцией координат:

$$H(p, q+L) = H(p, q).$$

Уравнения движения для (I, ϑ) имеют вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial H(I)}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \dot{\vartheta} = \frac{dH(I)}{dI} \equiv \omega(I). \tag{2.8}$$

Из определения (2.7) следует, что H является функцией только I и не зависит от ϑ. Поэтому действие I является интегралом движения, так же как и энергия E. Вместо $I = I(H)$ можно записать $I = I(E)$. Мы это всегда будем подразумевать. Второе уравнение в (2.8) определяет нелинейную

частоту $\omega = \omega(I)$. Интегрирование уравнений (2.8) дает

$$I = \text{const} = \text{inv}, \qquad \vartheta = \omega(I)\, t + \vartheta_0. \tag{2.9}$$

Важное свойство переменной ϑ — ее цикличность. Действительно, изменение S на периоде равно

$$\Delta S = \oint p\, dq = 2\pi I. \tag{2.10}$$

Отсюда

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial \Delta S}{\partial I} = 2\pi,$$

что и оправдывает название переменной ϑ.

Траекторию системы можно изобразить кривой, лежащей на цилиндрической поверхности (рис. 1.7), если фазовую плоскость дополнить осью t. Поскольку сечение поверхности равно как раз величине (2.10), то поверхность, на которой лежит множество всех траекторий при фиксированной энергии E и произвольных начальных значениях ϑ_0, является инвариантом движения.

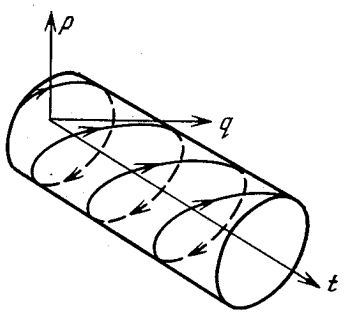


Рис. 1.7. Инвариантная цилиндрическая поверхность

Спектр нелинейных колебаний. Формулы (2.7) позволяют (по крайней мере, принципиально) выразить (p, q) через новые переменные (I, ϑ). Будем далее предполагать это выполненным. Тогда по циклической переменной ϑ можно произвести разложение в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} q &= q(I, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(I) \exp(in\vartheta), \\ p &= p(I, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(I) \exp(in\vartheta), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где коэффициенты разложения a_n, b_n удовлетворяют условию вещественности q и p:

$$a_{-n} = a_n^*, \qquad b_{-n} = b_n^*,$$

и определяются стандартными формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta\, q(I, \vartheta) e^{-in\vartheta}, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta\, p(I, \vartheta) e^{-in\vartheta}. \tag{2.12}$$

Фурье-гармоники a_n, b_n определяют спектральные свойства движения системы. Для линейной системы

$$H = {}^1/_2 p^2 + {}^1/_2 \omega_0^2 q^2$$

можно легко получить из (2.7):

$$I = H/\omega_0, \qquad \vartheta = \omega_0 t + \vartheta_0.$$

Поэтому в случае линейных колебаний разложение (2.11) состоит всего из одной моды:

$$q = \sqrt{2I/\omega_0}\sin(\omega_0 t + \vartheta_0), \qquad p = \sqrt{2I\omega_0}\cos(\omega_0 t + \vartheta_0).$$

Появление других мод в спектре (2.11) означает ангармонизм колебаний.

Можно ли сказать что-либо априори относительно свойств фурье-гармоник a_n, b_n? Оказывается, можно. Предположим, что потенциал $V(q)$ яв-

ляется достаточно хорошей функцией, и поэтому q и p не имеют особенностей на действительной оси ϑ. Рассмотрим асимптотику a_n и b_n при $n \to \infty$. Проведем сначала качественные рассуждения.

Выделим некоторый, пусть малый, но конечный интервал $\Delta\vartheta$. Очевидно, что если этот интервал достаточно мал, то, например, q как функция ϑ меняется на нем очень мало. Поэтому с достаточной степенью точности можно принять $q \approx \text{const}$ на интервале $\Delta\vartheta$. Но тогда

$$\int\limits_{\Delta\vartheta} q(I, \vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta \approx 0. \tag{2.13}$$

Точность равенства (2.13) можно сколь угодно повышать, выбирая достаточно большие n. То же самое можно сказать и относительно всех других интервалов $\Delta\vartheta$, из которых состоит область $(0, 2\pi)$. Таким образом, при любой заданной точности найдутся достаточно большие n, для которых $a_n \approx 0$ и $b_n \approx 0$ согласно их определению в (2.12).

Ясно, что поскольку $q(I, \vartheta)$ и $p(I, \vartheta)$ не есть тождественные константы как функции ϑ, то это лишь означает, что малость выражений a_n, b_n при $n \to \infty$ не может быть уловлена ни в каком конечном порядке n. Тогда отсюда следует, что

$$a_n \sim e^{-n/N_0}, \qquad b_n \sim e^{-n/N_0}, \tag{2.14}$$

т. е. существует такое число N_0, которое экспоненциально обрезает спектр. Это число имеет простой формальный смысл: N_0 порядка расстояния от действительной оси до ближайшей особенности в комплексной плоскости ϑ. На примерах, рассматриваемых ниже, мы получим более наглядную интерпретацию соотношений (2.14).

Существование «критического» номера N_0 имеет глубокий физический смысл, определяя степень жесткости системы. Очевидно, что величины a_n, b_n при $n > N_0$ очень малы, и ими можно достаточно надежно пренебречь, если нас не интересуют столь малые эффекты. Тогда можно сказать, что система характеризуется в основном N_0 гармониками, которые сильно связаны между собой. При изучении многих задач, и в особенности динамики нелинейных волн, мы увидим, как число N_0 самым существенным образом определяет эволюцию системы.

Расплывание фазовой капли. Введенное выше число N_0 характеризует степень ангармонизма колебаний. Степень их нелинейности можно описывать с помощью безразмерного параметра α:

$$\alpha = \frac{I}{\omega(I)} \frac{d\omega(I)}{dI}. \tag{2.15}$$

Он определяет, в частности, характер движения фазовой капли в фазовом пространстве. Рассмотрим, например, некоторую область в фазовом пространстве, заполненную не взаимодействующими осцилляторами. Если $\alpha = 0$, т. е. $\omega = \text{const}$, и осцилляторы линейные, то происходит перемещение всей области как целого без изменения формы ее границ.

Если, однако, $\alpha \neq 0$, то фазовая капля начинает расплываться. Это обусловлено тем, что частоты осцилляторов зависят от их энергий (т. е. от величины действия). Поэтому частицы из различных участков фазового пространства движутся с различными скоростями. В результате происходит искажение формы границы фазовой капли со временем (рис. 1.8). Расплывание фазовой капли сопровождается укручением профиля фронта ее границы (рис. 1.9), где частицы с большей ординатой обладают большей скоростью.

Пусть фазовая капля ограничивает в фазовом пространстве область, в которой действие лежит в интервале $(I, I + \delta I)$. Дисперсия действия δI

определяет дисперсию частот в фазовой капле:

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{dI}\,\delta I.$$

Очевидно, что опрокидывание фронта профиля капли и потеря однозначности формы границы происходит через такое время δt, когда дисперсия фазы ϑ станет порядка 2π, т. е.

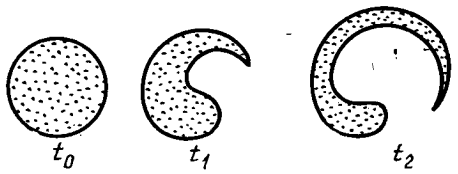


Рис. 1.8. Расплывание фазовой капли ($t_0 < t_1 < t_2$)

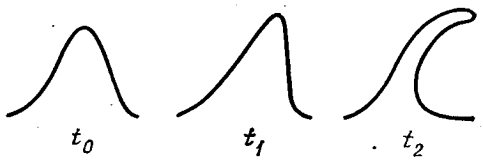


Рис. 1.9. Укручение фронта границы фазовой капли ($t_0 < t_1 < t_2$)

$$\delta t = \frac{2\pi}{\delta\omega} = 2\pi\left(\frac{d\omega}{dI}\right)^{-1}\delta I. \tag{2.16}$$

В безразмерных переменных с помощью (2.15) формулу (2.16) удобно переписать в виде

$$\omega\,\delta t = \frac{2\pi}{\alpha}\,\frac{I}{\delta I},$$

где время расплывания δt связывается с параметром нелинейности α.

§ 3. Пример: нелинейный маятник

Описываемые здесь и далее три модели дают некоторое представление о возможных видах нелинейных колебаний в случае одной степени свободы, но далеко не исчерпывают всего их разнообразия.

Траектории нелинейного маятника. Гамильтониан нелинейного маятника с единичной массой имеет вид

$$H = {}^1/_2\dot{x}^2 - \omega_0^2\cos x, \tag{3.1}$$

где $q = x$ и $p = \dot{x}$. Уравнения движения (1.5) дают

$$\ddot{x} + \omega_0^2\sin x = 0. \tag{3.2}$$

Потенциал $V = -\omega_0^2\cos x$ и фазовый портрет приведены на рис. 1.10.

Аналогично уравнениям (2.4) состояния равновесия маятника определяются уравнениями

$$\dot{x}_s = 0, \qquad \sin x_s = 0. \tag{3.3}$$

Это дает $\dot{x}_s = 0$, $x_s = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ В положении равновесия скорость $\dot{x}_s$ равна нулю, а потенциал $V(x_s)$ имеет минимум (четные n) или максимум (нечетные n). Соответственно точки при четных n — эллиптические, при нечетных n — гиперболические.

Траектории на фазовой плоскости при $H < \omega_0^2$ соответствуют «захваченным» частицам, совершающим финитные колебания в потенциальных ямах. При $H > \omega_0^2$ фазовые траектории относятся к «пролетным» частицам, движение которых инфинитно. Как видно из рис. 1.10, это периодические колебания около некоторого значения скорости, причем верхней и нижней ветвям фазовых кривых соответствуют различные направления скорости.

Сепаратрисой является фазовая траектория, проходящая через точку $\dot{x}_s = 0$, $x_s = \pi$. Поэтому ей соответствует энергия $H_s = \omega_0^2$. Решение на сепаратрисе найти просто. Действительно, подставим $H_s = \omega_0^2$ в уравнение (3.1) и выразим из него $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \pm 2\omega_0 \cos(x/2). \qquad (3.4)$$

Отсюда интегрирование при начальном условии $t = 0$, $x = 0$ дает

$$\omega_0 t = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad (3.5)$$

или

$$x = 4\operatorname{arctg} e^{\omega_0 t} - \pi. \qquad (3.6)$$

Выражение (3.6) есть не что иное, как уравнение сепаратрисы (вторая ветвь сепаратрисы получается из первой (3.6) обращением времени $t \to -t$).

Однако более интересная информация о динамике частицы на сепаратрисе получается, если рассмотреть выражение для скорости $v = \dot{x}$. Для этого из (3.5) получаем соотношение

$$\cos(x/2) = 1/\operatorname{ch}(\omega_0 t)$$

и подставляем его в (3.4):

$$v = \pm 2\omega_0/\operatorname{ch}(\omega_0 t). \qquad (3.7)$$

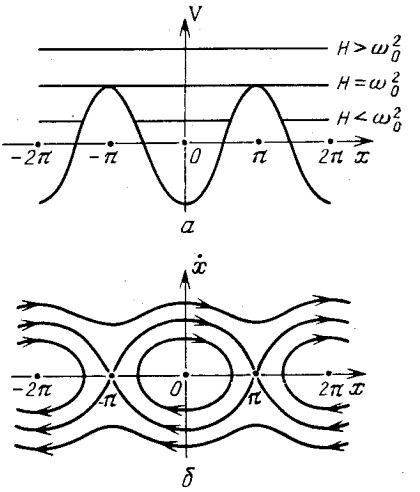


Рис. 1.10. Периодический потенциал (*а*) и соответствующий ему фазовый портрет (*б*)

Решение типа (3.7) имеет вид уединенной волны (рис. 1.11) и носит название солитона. Характерная ширина профиля скорости $\sim 1/\omega_0$. Его края экспоненциально спадают при $t \to \pm\infty$. Знак плюс в (3.7) соответствует солитону, движущемуся вправо (верхняя ветвь сепаратрисы на фазовой плоскости — рис. 1.10*б*). Знак минус в (3.7) соответствует движению влево.

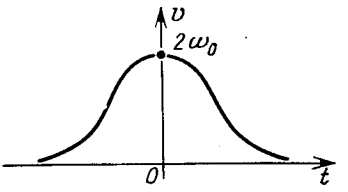


Рис. 1.11. Солитоноподобное решение для скорости на сепаратрисе

Рассмотрим теперь общее решение уравнения (3.2) при тех же начальных условиях $t = 0$, $x = 0$. Для удобства воспользуемся переменными действие — угол, определенными формулами (2.7). Введем параметр *) $\varkappa$:

$$\varkappa^2 = (\omega_0^2 + H)/2\omega_0^2 = {}^1/_2\,(1 + H/\omega_0^2), \qquad (3.8)$$

принимающий на сепаратрисе значение 1 и изменяющийся в области $[0, \infty)$, и переменную ξ:

$$\begin{aligned} \varkappa \sin\xi &= \sin(x/2) \quad (\varkappa \leqslant 1), \\ \sin\xi &= \sin(x/2) \quad (\varkappa \geqslant 1). \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Имеем

$$I = I(H) = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_0} dx\,[2(H + \omega_0^2 \cos x)]^{1/2},$$

*) Здесь и далее одна и та же буква H используется как для обозначения гамильтониана, так и для интеграла энергии всюду, где это не должно вызвать недоразумений.

где точка поворота x_0 находится из условия

$$H + \omega_0^2 \cos x_0 = 0$$

и использована симметрия движения частицы при определении интеграла $I(H)$. Здесь возникает необходимость доопределить выражение (2.7) для I при значениях параметра $\varkappa^2 > 1$. Действительно, в этом случае из (3.8) следует, что уравнение для точки поворота не имеет решения, и в качестве точки x_0 в интеграле для I следует взять $x_0 = \pi$. При таком определении действие есть площадь, ограниченная по x областью $(-\pi, \pi)$ (см. рис. 1.10*б*) и лежащая между верхней и нижней относительно сепаратрисы ветвями траектории. Именно такое определение позволяет произвести непрерывную сшивку решения при переходе через сепаратрису (производная при этом имеет разрыв).

С помощью подстановки (3.9) приходим к выражению

$$I(H) = \frac{8}{\pi}\omega_0 \begin{cases} E\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) - (1-\varkappa^2) F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) & (\varkappa \leqslant 1), \\ \varkappa E\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\varkappa}\right) & (\varkappa \geqslant 1), \end{cases} \tag{3.10}$$

где $F(\pi/2; \varkappa)$ и $E(\pi/2; \varkappa)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Из (3.10) сразу находим частоту нелинейных колебаний маятника:

$$\omega(H) = \frac{dH(I)}{dI} = \left[\frac{dI(H)}{dH}\right]^{-1}. \tag{3.11}$$

Используя свойства эллиптических интегралов, находим

$$\omega(H) = \frac{\pi}{2}\omega_0 \begin{cases} \dfrac{1}{F(\pi/2; \varkappa)} & (\varkappa \leqslant 1), \\ \dfrac{\varkappa}{F(\pi/2; 1/\varkappa)} & (\varkappa \geqslant 1). \end{cases} \tag{3.12}$$

Мы отложим исследование формулы (3.12) до следующего пункта, а сейчас продолжим нахождение решения.

Согласно определению $S(q, I)$ в формулах (2.7) имеем

$$S(x, I) = \begin{cases} 4\omega_0 [E(\xi; \varkappa) - (1-\varkappa^2) F(\xi; \varkappa)] & (\varkappa \leqslant 1), \\ 4\omega_0 \varkappa E(\xi; 1/\varkappa) & (\varkappa \geqslant 1), \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\xi = \xi(x)$ определяется формулами (3.9). Нетрудно видеть, что полному интегралу по четверти периода движения соответствует точка x_0 такая, что

$$\sin(x_0/2) = \varkappa^2 \qquad (\varkappa \leqslant 1),$$
$$\sin(x_0/2) = 1 \qquad (\varkappa \geqslant 1).$$

Отсюда в любом случае $\xi_0 = \pi/2$, и выражение $4S(x_0, T)/2\pi$ переходит в формулы для действия (3.10), как это и должно быть.

Дифференцирование $S(x, I)$ по I определяет фазовую переменную ϑ (см. (2.7)).

Из формулы (3.1) для H и определения (3.9) находим скорость:

$$\dot{x} = 2\varkappa\omega_0 \left\{ \frac{\cos\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa^2}\sin^2\xi}} \right\} = 2\varkappa\omega_0 \begin{cases} \operatorname{cn}(t; \varkappa) & (\varkappa \leqslant 1), \\ \operatorname{dn}\left(t; \frac{1}{\varkappa}\right) & (\varkappa \geqslant 1), \end{cases} \tag{3.14}$$

где cn и dn — эллиптические функции Якоби. При $\varkappa = 1$ выражение (3.14) переходит в (3.7) (знаки $\pm$ для простоты опускаются).

Спектр нелинейного маятника. Нашей ближайшей целью будет понять качественный характер колебаний маятника для различных значений его энергии H. Для этого сделаем две вещи. Во-первых, введем число

$$N = \frac{\omega_0}{\omega(H)} = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) \qquad (\varkappa \leqslant 1) \tag{3.15}$$

и, во-вторых, разложим выражение (3.14) для $\dot{x}$ в ряд Фурье:

$$\dot{x} = 8\omega \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t] & (\varkappa \leqslant 1), \\ {}^1/_4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos(n\omega t) & (\varkappa \geqslant 1), \end{cases} \tag{3.16}$$

где

$$a = \exp\left(-\pi \frac{F'}{F}\right), \quad F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \bar{\varkappa}\right),$$
$$F' \equiv F(\pi/2; \sqrt{1-\bar{\varkappa}^2}), \quad \omega = \omega(H), \tag{3.17}$$
$$\bar{\varkappa} = \begin{cases} \varkappa & (\varkappa \leqslant 1), \\ 1/\varkappa & (\varkappa \geqslant 1). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь различные асимптотики выражений (3.16) и (3.17). Воспользуемся следующими асимптотиками полного эллиптического интеграла $F(\pi/2; \varkappa)$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}; \varkappa\right) \sim \begin{cases} \pi/2 & (\varkappa \ll 1), \\ {}^1/_2 \ln \frac{32 H_s}{H_s - H} & (1-\varkappa^2 \ll 1). \end{cases} \tag{3.18}$$

Отсюда

$$N \sim \begin{cases} 1 & (\varkappa \ll 1), \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{32 H_s}{H_s - H} & (1-\varkappa^2 \ll 1). \end{cases} \tag{3.19}$$

Аналогично из (3.17), (3.18) и (3.15) находим

$$a \sim \begin{cases} \varkappa^2/32 & (\varkappa \ll 1), \\ \exp(-\pi/N) & (1-\varkappa^2 \ll 1). \end{cases} \tag{3.20}$$

Теперь легко определить характер колебаний маятника во всех областях. При $\varkappa \ll 1$, т. е. при очень малых энергиях системы, частота $\omega(H) \sim \omega_0$ и $N \sim 1$. Кроме того, согласно (3.20) амплитуды a малы. Поэтому в (3.16) имеет смысл оставить только первое слагаемое суммы, так как малость остальных нарастает с ростом n. Это дает

$$v = \dot{x} \approx \omega_0 \sqrt{2\varkappa^2} \cos(\omega_0 t) = \sqrt{2\omega_0 I} \cos(\omega_0 t)$$

в соответствии с обычной линейной теорией (действительно, энергия, отсчитываемая от дна потенциальной ямы, равна $\delta H = \omega_0^2 + H$, и $I = \delta H/\omega_0 = \varkappa^2 H_s/\omega_0 = \varkappa^2 \omega_0$).

Пусть теперь $\varkappa^2 \to 1$, т. е. $H \to H_s$. Тогда вблизи сепаратрисы частота $\omega(H) \to 0$, а период колебаний логарифмически расходится (см. (3.19)). Скорость $\dot{x}$ системы приближается к периодической последовательности солитоноподобных импульсов (рис. 1.12). Расстояние между двумя горбами в одной и той же фазе близко к периоду колебаний $2\pi/\omega(H)$, а ширина каждого горба близка к $2\pi/\omega_0$. Поэтому число N определяет «скважность» функции $v(t)$. Вводя спектр скорости, как в (2.11), видим, согласно (3.20) и (3.16), что при $N \gg 1$, т. е. вблизи сепаратрисы,

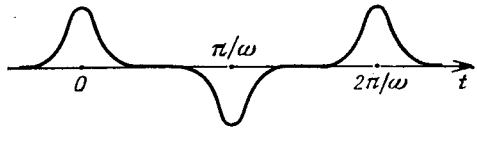


Рис. 1.12. Зависимость скорости от времени вблизи сепаратрисы

$$b_n = 8\omega \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}}.$$

Принимая во внимание выражение для a в (3.20) при $1-\varkappa^2 \ll 1$, получаем

$$b_n \sim 8\omega \begin{cases} 1 & (1 < n \leqslant N), \\ \exp(-\pi n/N) & (n > N), \end{cases} \tag{3.21}$$

т. е. все амплитуды приблизительно равны вплоть до $n \sim N$ и экспоненциально малы при $n > N$ в соответствии с соображениями, высказанными ранее. Отсюда следует, что спектр нелинейных колебаний маятника имеет вид, приведенный на рис. 1.13, и число N определяет характерное число гармоник в спектре.

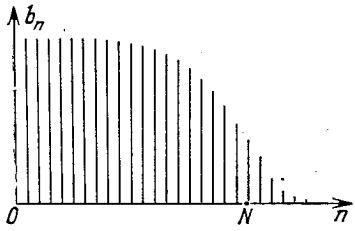


Рис. 1.13. Спектр скорости в окрестности сепаратрисы

По мере приближения к сепаратрисе $N \to \infty$, а сам спектр стремится к непрерывному. Как это высказывалось ранее в более общей форме, величина N является параметром характерного обрезания числа гармоник спектра.

Появление расходимости при $\omega \to 0$ есть следствие приближения к траектории, проходящей через гиперболическую точку (т. е. к сепаратрисе). Это свойство имеет место не только при $H \to \omega_0^2 - 0$, т. е. снизу, но и при $H \to \omega_0^2 + 0$, т. е. со стороны пролетных частиц.

Общие свойства периода колебаний. Рассмотрим подробнее, как появляются нулевые или очень малые частоты колебаний, которые, как мы только что видели, радикальнейшим образом изменяют всю картину колебаний по мере удаления от эллиптической точки положения равновесия. Выяснить это важно, так как речь идет о получении более детальной информации о системе при приближении ее траекторий к неустойчивым особым точкам.

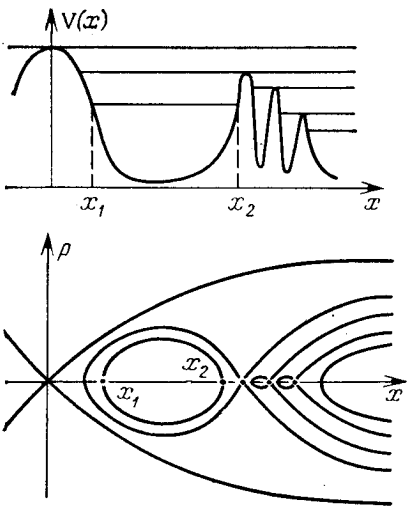


Рис. 1.14. Случай нескольких (трех) близких седел

Дифференцирование I по H в формуле (2.7) и определение $\omega(I)$ в (2.8) дают период колебаний системы в потенциальной яме:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \oint \frac{dx}{[2(H - V(x))]^{1/2}}. \tag{3.22}$$

Исследуем в общей форме это выражение вблизи сепаратрисы. Для этого обозначим расстояние энергии до сепаратрисы через

$$\Lambda = |H - H_s| \ll H_s. \tag{3.23}$$

Представим знаменатель в (3.22) в виде

$$[2(H - V(x))]^{1/2} \sim [(x - x_a)(x - x_b)(x - x_1) \ldots (x - x_n)]^{1/2} \chi(x), \tag{3.24}$$

где x_a и x_b — точки поворота, между которыми совершается финитное движение; $x_1, \ldots, x_n$ — все другие точки поворота, которые расположены вблизи, скажем, x_b; $\chi(x)$ — функция, не имеющая нулей в комплексной плоскости в окрестности траектории. Для простоты ограничимся случаем, когда все x_i $(i = 1, \ldots, n)$ — действительные и нули с малой мнимой частью отсутствуют. В примере на рис. 1.14 $n = 5$.

Основной вклад в выражение для T дают области по x в окрестности полюсов подынтегрального выражения, т. е. нулей импульса (3.24). Близко расположенные нули увеличивают кратность полюса. В окрестности сепаратрисы всегда имеется, по крайней мере, близость к двукратному вырождению: $n \geqslant 1$.

На основании сделанного замечания производим интегрирование в (3.22) только в окрестности полюса. Это дает

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\sim\frac{2\pi}{\omega_0}\begin{cases}\ln(H_s/\Delta) & (n=1),\\ (\Delta/H_s)^{-(n-1)/2} & (n>1).\end{cases} \tag{3.25}$$

Из формулы (3.25) можно также определить степень нелинейности колебаний:

$$\frac{d\omega}{dH}\sim\begin{cases}\omega^2/(\omega_0\Delta) & (n=1),\\ \omega/\Delta & (n>1).\end{cases} \tag{3.26}$$

Удобно выразить последнюю формулу либо только через энергию, либо только через частоту. Имеем

$$\alpha=\frac{d\omega}{dH}\frac{H_s}{\omega_s^2}\sim\frac{H_s}{\Delta}\begin{cases}1/\ln(H_s/\Delta) & (n=1)\\ 1 & (n>1)\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(\omega/\omega_0)\exp(\omega_0/\omega) & (n=1),\\ (\omega_0/\omega)^{2/(n-1)} & (n>1).\end{cases} \tag{3.27}$$

Наиболее универсальное описание получается в энергетической шкале. Параметр нелинейности стремится к единице по мере роста числа точек поворота n, близких к данной точке поворота.

§ 4. Еще два примера нелинейных колебаний

Рассмотренный выше пример колебаний нелинейного маятника достаточно хорошо передает типичную ситуацию того, как устроено нелинейное движение. Однако в физических задачах могут возникнуть отклонения от описанной картины.

Нелинейные колебания плазмы. Рассматриваемый здесь пример выделен тем, что колебания в нем ангармоничны, а частота не зависит от энергии (или от действия). Существует еще одна, более интересная особенность этого вида колебаний, о которой будет сказано ниже.

Колебания электронной плазмы описываются уравнениями

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0,\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=4\pi(\rho-1),\end{aligned} \tag{4.1}$$

где выбрана система единиц $e=m=\rho_0=1$, ρ — плотность, v — скорость, φ — потенциал.

Рассматриваются только такие решения системы (4.1), которые зависят от переменной $\xi=x-ut$, где постоянная u есть скорость волны, и в дальнейшем полагается $u=1$ (ком. 1). Выбор такого типа решения сразу резко упрощает задачу, так как уравнения в частных производных (4.1) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Первое из них дает

$$\rho(v-1)=\text{const}=-1$$

и играет роль граничного условия, в котором положено $u=1$.

Из следующих двух уравнений (4.1) легко находим интеграл движения

$$H=\tfrac{1}{2}\dot\varphi^2-2\omega_0^2(2\varphi^{1/2}-\varphi), \tag{4.2}$$

где плазменная частота $\omega_0=(4\pi e^2n_0/m)^{1/2}$, точка означает дифференцирование по ξ и $\varphi^{1/2}=1-v$.

Выражение (4.2) можно рассматривать как гамильтониан системы в фазовом пространстве $(\dot{\varphi}, \varphi)$. Траектории на фазовой плоскости приведены на рис. 1.15. При $H = -2\omega_0^2$ траектория стягивается в точку эллиптического типа. Значению $H = 0$ соответствует сепаратриса, а финитное движение существует при $0 > H > -2\omega_0^2$.

Решение, соответствующее гамильтониану (4.2), легко построить, хотя и в неявной форме. Для этого обозначим

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{|H|}{2\omega_0^2}\right)^{1/2} \tag{4.3}$$

и введем новую функцию

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varphi^{1/2}) = \frac{1}{\varepsilon} v, \tag{4.4}$$

пропорциональную скорости. Тогда из (4.2) находим

$$\psi = -\cos[\pm \omega_0 \xi - \varepsilon(1 - \psi^2)^{1/2}], \tag{4.5}$$

где знаки $\pm$ соответствуют разным полупериодам колебаний. График зависимости $v(\xi)$, или $v(t)$ при фиксированном x, приведен на рис. 1.16.

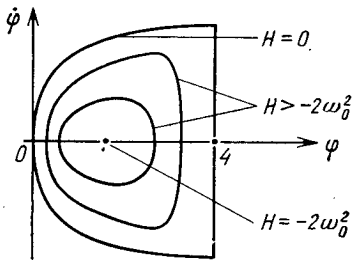


Рис. 1.15. Фазовый портрет плазменных колебаний

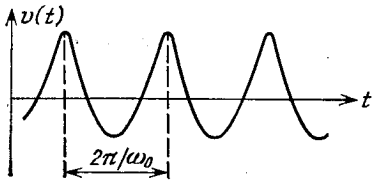


Рис. 1.16. Скорость частиц в окрестности сепаратрисы для плазменных колебаний

Прежде чем обсуждать полученную картину нелинейных колебаний, рассмотрим спектральные свойства решения (4.5). Период колебаний вычисляется по очевидной формуле:

$$T = \oint \frac{d\psi}{\dot{\psi}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{d\psi}{\dot{\psi}} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{4.6}$$

Это означает, что частота колебаний $\omega = 2\pi/T = \omega_0$ и не зависит от энергии колебаний. Вместе с тем колебания являются ангармоническими. Для того чтобы убедиться в этом, найдем спектр колебаний.

Удобно сначала определить спектральное разложение переменной φ. Записывая для нее ряд Фурье

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{in\omega_0 \xi},$$

имеем

$$\varphi_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} d\xi\, \varphi(\xi) e^{-in\omega_0 \xi}. \tag{4.7}$$

С помощью определения (4.4) выразим интеграл (4.7) в виде

$$\varphi_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} d\psi \frac{(1 - \varepsilon\psi)^3}{(1 - \psi^2)^{1/2}} \sin[n(\arcsin\psi + \varepsilon(1 - \psi^2)^{1/2})].$$

Отсюда после замены переменной $\psi = -\cos\vartheta$ и некоторых преобразований получаем

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{2}{n^2}(-1)^{n-1} J_n(\varepsilon n) & (n \neq 0), \\ 1 + {}^3/_2\varepsilon^2 & (n = 0). \end{cases} \tag{4.8}$$

Введем параметр

$$N = (1-\varepsilon^2)^{-3/2}, \tag{4.9}$$

характеризующий степень близости к сепаратрисе. Согласно (4.3) на сепаратрисе $\varepsilon = 1$ и $N = \infty$. Рассмотрим область значений H таких, что $N \gg 1$. Тогда из (4.8), используя асимптотические формулы для функций Бесселя [7], находим

$$\varphi_n \sim \begin{cases} n^{-7/3} & (1 \ll n \ll N), \\ N^{1/6} n^{-5/3} \exp(-n/N) & (n \gg N). \end{cases} \tag{4.10}$$

Таким образом, ангармонизм плазменных колебаний определяется параметром N, который, как и ранее, характеризует эффективное число гармоник в спектре. При $n > N$ амплитуды Фурье экспоненциально обрезаются.

Осталось определить, что происходит в пределе $N \to \infty$. Период колебаний не зависит от H. Поэтому при $H \to 0$ периодичность структуры на рис. 1.16 не изменяется. Однако то, что при этом $N \to \infty$, означает, что углы функции $v(\xi)$ заостряются. Это новое явление, которое отсутствовало в предыдущем примере. Оно называется опрокидыванием нелинейной волны. Хорошим аналогом его является заострение волн на поверхности моря при разгоне их ветром. Сначала происходит образование угла на гребне волны, а при больших значениях их скорости возникают «барашки». Так же, как и здесь, заострение гребня волны означает стремление эффективной ширины спектра к бесконечности. Мы еще обсудим этот вопрос при исследовании волновых движений.

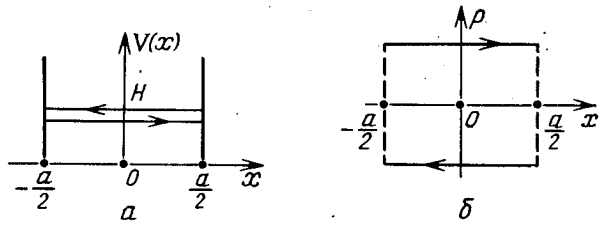


Рис. 1.17. Колебания в прямоугольной яме

Колебания в прямоугольной яме. Еще один, особый, случай, рассматриваемый ниже, содержит особенность траектории при любых значениях энергии. Пусть частица движется между двумя идеально отражающими стенками, расположенными на расстоянии a друг от друга. Горизонтальное движение частицы описывается простым выражением:

$$H = {}^1/_2 p^2 + V(x), \tag{4.11}$$

$$V(x) = \begin{cases} 0, & -a/2 < x < a/2, \\ \infty, & |x| > a/2 \end{cases}$$

(рис. 1.17). Область движения частицы по координате x равна a и не зависит от энергии. Внутри этой области

$$p = \dot{x} = \text{const} = (2H)^{1/2},$$

где масса, как и ранее, положена равной 1. Однако скорость частицы зависит от энергии, и поэтому ее период также является функцией H.

Имеем

$$\omega = \omega(H) = 2\pi/T = \dot{x}/2a = (2H)^{1/2}/2a. \tag{4.12}$$

Из рис. 1.17*б* легко видеть, что

$$I = 2pa = 2a(2H)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Отсюда и из (4.12) следует соотношение

$$\omega = \omega(I) = I/(2a)^2. \tag{4.14}$$

Формулы (4.12)—(4.14) показывают, что безразмерный параметр нелинейности α, определенный выражением (2.15), равен

$$\alpha = 1.$$

Скорость частицы имеет простую зависимость от времени:

$$\dot{x} = \frac{I}{2a}\tilde{\theta}(t), \tag{4.15}$$

где периодическая ступенчатая функция $\tilde{\theta}(t)$ изображена на рис. 1.18. Разложение $\dot{x}$ в ряд Фурье дает

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(I)\, e^{in\omega(I)t}; \tag{4.16}$$

$$p_n(I) = (i/2an)\, I = p^*_{-n}.$$

Зависимость фурье-амплитуд p_n от n показывает, что существенны все гармоники. Характерное число N, определяющее ширину спектра, отсутствует.

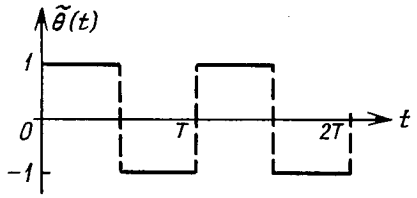


Рис. 1.18. Периодическая ступенчатая функция

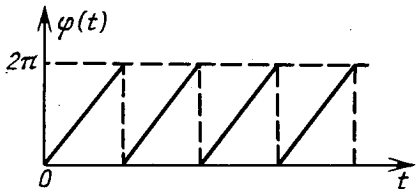


Рис. 1.19. Разрывная зависимость фазы волчка от времени ($T = 2\pi/\omega$), возникающая при ее неправильном определении

Это есть следствие того, что сила, действующая на частицу, имеет периодическую особенность на действительной оси t.

Ротатор. Жесткий волчок, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$ вокруг своей оси, является близким вариантом той же модели частицы в прямоугольной яме. Гамильтониан ротатора

$$H = {}^1/_2 \mathcal{J}\omega^2, \tag{4.17}$$

где $\mathcal{J}$ — момент инерции. Поэтому

$$\omega = (2H/\mathcal{J})^{1/2}, \tag{4.18}$$

и уравнение

$$\frac{dH}{dI} = \omega = \left(\frac{2H}{\mathcal{J}}\right)^{1/2}$$

определяет

$$I = (2\mathcal{J}H)^{1/2} = \mathcal{J}\omega. \tag{4.19}$$

Формулы (4.17)—(4.19) аналогичны формулам (4.12)—(4.14). Отличие, однако, заключается в виде траектории и в структуре гамильтонианов. Свободное движение частицы является нефинитным, и поэтому в гамильтониан (4.11) приходится вводить потенциал стенок, ограничивающих движение. Это, в свою очередь, приводит к траектории с бесконечно широким спектром. Вращение волчка сразу финитно и

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \pmod{2\pi}, \tag{4.20}$$

т. е. движение происходит на цилиндрической поверхности. Наличие оператора $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ делает функцию $\varphi(t)$ особой (рис. 1.19). Следует писать решение $\varphi(t)$ в форме (4.20) или достаточно просто записать $\varphi=\omega t+\varphi_0$? Ни то, ни другое. При введении периодического граничного условия зависимость $\varphi(t)$ находится уже более сложным образом. Приведем один из возможных способов определения $\varphi(t)$ при $\varphi_0=0$:

$$\varphi(t)=\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega t+\pi, & t\in(-\pi/\omega,\ \pi/\omega), \\ \omega t, & t\in(0,\ 2\pi/\omega), \\ \omega t-\pi, & t\in(\pi/\omega,\ 3\pi/\omega), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4.21}$$

Включение начальной фазы φ_0 просто сдвигает области определения в (4.21) на φ_0. Формулы (4.21) определяют функцию $\varphi(t)$ с помощью бесконечного числа «карт», которые наложены одна на другую с конечной областью перекрытия. Этот способ нагляден, хотя и не очень экономен. Существует возможность использовать только две карты (ком. 2).

§ 5. Интегральные инварианты Пуанкаре

Рассмотрим гамильтоновскую систему

$$H=H(p_1,\ q_1;\ \ldots;\ p_N,\ q_N;\ t), \tag{5.1}$$

имеющую N степеней свободы. Пуанкаре нашел N интегральных инвариантов для такой системы, т. е. таких интегральных выражений $J^{(m)}$, которые не изменяются при фазовом потоке:

$$\hat{T}J^{(m)}=J^{(m)} \qquad (m=1,\ \ldots,\ N) \tag{5.2}$$

(ком. 3).

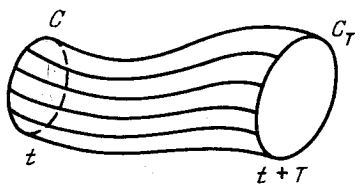


Рис. 1.20. Эволюция контура C, охватывающего трубку фазовых траекторий

Первый интегральный инвариант. Рассмотрим в фазовом пространстве произвольный замкнутый контур C и трубку фазовых траекторий, охваченных этим контуром в некоторый момент времени t (рис. 1.20). Фазовый поток $\hat{T}$ переводит контур C в C_T:

$$C_T=\hat{T}C.$$

Тогда имеет место равенство

$$J^{(1)}\equiv\oint_C\sum_{i=1}^{N}p_i\,dq_i=\oint_{C_T}\sum_{i=1}^{N}p_i\,dq_i=\mathrm{inv}. \tag{5.3}$$

Применение теоремы Стокса к (5.3) позволяет также получить

$$J^{(1)}=\int_\sigma\sum_{i=1}^{N}dp_i\,dq_i\equiv\overline{J}^{(1)}, \tag{5.4}$$

где σ—двумерная поверхность, опирающаяся на контур C.

Выражение $J^{(1)}$ носит название первого относительного интегрального инварианта, а $\overline{J}^{(1)}$—первого абсолютного интегрального инварианта.

Теорема Лиувилля. Другой интегральный инвариант более высокого порядка имеет вид

$$J^{(2)}=\oint_{\partial\sigma}\sum_{\substack{i\neq j,\\ i,\ j=1}}^{N}p_i\,dq_i p_j\,dq_j=\overline{J}^{(2)}=\int_\sigma\sum_{\substack{i\neq j,\\ i,\ j=1}}^{N}dp_i\,dq_i\,dp_j\,dq_j=\mathrm{inv}, \tag{5.5}$$

где σ — произвольная четырехмерная поверхность в фазовом пространстве, имеющая границу $\partial\sigma$.

Последовательность относительных $J^{(n)}$ и абсолютных $\overline{J}^{(n)}$ интегральных инвариантов можно продолжить вплоть до $n=N$. Последний из них,

$$\Gamma \equiv \overline{J}^{(N)} = \int_{\sigma} dp_1\, dq_1 \ldots dp_N\, dq_N, \tag{5.6}$$

есть фазовый объем некоторой $2N$-мерной области σ. Его сохранение при фазовом потоке выражает теорему Лиувилля (ср. с (1.7)).

Роль интегральных инвариантов, по-видимому, еще в полной мере не выявлена. Это проявляется, в частности, в том, что приложение к различным физическим задачам нашли только инвариант N-го порядка (фазовый объем) и инвариант первого порядка $J^{(1)}$. Приведем одно следствие, касающееся его.

Инвариантность интеграла (5.3) (как и всех остальных) является следствием канонических уравнений движения. Справедливо также обратное утверждение: если для системы уравнений

$$\dot{q}_i = Q_i(p, q; t), \qquad \dot{p}_i = P_i(p, q; t) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{5.7}$$

выражения $\overline{J}^{(m)}$ $(m = 1, \ldots, N)$ — инварианты движения, то система (5.7) является гамильтоновской.

С помощью инварианта $J^{(1)}$ строится переменная действия, которая играет важную роль в различных приближенных методах и для описания общих свойств многомерного движения (см. гл. 2). С переменной действия связаны также адиабатические инварианты системы.

§ 6. Многомерные интегрируемые системы

Основной путь решения уравнений движения связан с определением некоторых полезных инвариантных величин, или интегралов движения, позволяющих понизить порядок системы уравнений.

Первые интегралы движения. Будем всюду в этой главе считать, что задана некоторая изолированная гамильтоновская система с N степенями свободы и гамильтонианом

$$H(p, q) \equiv H(p_1, q_1; \ldots; p_N, q_N), \tag{6.1}$$

т. е. система имеет интеграл энергии E, совпадающий в данном случае с H.

Интегралы движения F системы (6.1), позволяющие понизить порядок гамильтоновской системы уравнений, будут называться первыми интегралами. Они удовлетворяют условию

$$[H, F] \equiv 0, \tag{6.2}$$

где

$$F(p, q) \equiv F(p_1, q_1; \ldots; p_N, q_N) \tag{6.3}$$

и введена операция коммутатора, или скобок Пуассона,

$$[A, B] \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right) \tag{6.4}$$

(ком. 4).

Говорят также, что функции A и B находятся в инволюции, если их коммутатор (6.4) тождественно равен нулю:

$$[A, B] \equiv 0, \tag{6.5}$$

т. е. условие (6.5) выполняется для всякой $2N$-мерной точки в фазовом пространстве.

Вопрос об интегрируемости гамильтоновских уравнений движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_i} \tag{6.6}$$

в квадратурах аналогичен соответствующему вопросу для системы дифференциальных уравнений. Известно, что система дифференциальных уравнений порядка $2N$ в общем случае интегрируется в квадратурах, если для нее известны столько же $2N$ первых интегралов. Отличительное свойство гамильтоновских уравнений в том, что их можно проинтегрировать, если известны всего лишь N первых интегралов.

В действительности имеет место еще более сильное утверждение: первых независимых интегралов не может быть более N и первые интегралы не интегрируют задачу, если их число $M < N$.

Теорема Лиувилля — Арнольда. Эта теорема устанавливает условия интегрируемости системы с N степенями свободы (ком. 5).

Пусть дана гамильтоновская система $H = H(p, q)$ с N степенями свободы, совершающая финитное движение и имеющая N первых интегралов,

$$F_i = F_i(p, q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

линейно независимых и находящихся в инволюции, т. е.

$$[F_i, F_j] \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Тогда:

1) траектории системы лежат на N-мерном торе;

2) движение является условно-периодическим и характеризуется N частотами:

$$\omega_i = \omega_i(F_1, \ldots, F_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

3) угловые переменные ϑ_i, характеризующие координаты на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i(F_1, \ldots, F_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.7}$$

Эти уравнения сразу интегрируются и дают

$$\vartheta_i = \omega_i t + \text{const} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.8}$$

Инвариантные торы. В процессе движения траектория остается все время на торе. Поэтому говорят также о существовании инвариантных торов в интегрируемом случае. Изменением интегралов движения F_i получаем семейство инвариантных торов. Их взаимное расположение в фазовом пространстве определяется размерностью фазового пространства системы.

При $N = 2$ торы, соответствующие различным значениям интегралов (F_1, F_2), вложены друг в друга и не пересекаются. В этом случае говорят, что торы делят пространство. При $N > 2$ торы не делят фазовое пространство и пересекаются. Это легко понять из следующих соображений.

В $2N$-мерном фазовом пространстве поверхность постоянной энергии имеет размерность $2N-1$. Границы, которые ее должны делить на различные области, имеют размерность $2N-2$. Если торы делят пространство, то их размерность N должна удовлетворять условию

$$N \geqslant 2N-2.$$

Отсюда $N \leqslant 2$.

Резонансы. Пример движения на двумерном торе приведен на рис. 1.21. Оно характеризуется двумя частотами: ω_1 и ω_2. В общем случае частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, и траектория всюду плотно покрывает поверхность тора и является незамкнутой. Если, однако, отношение

$$\omega_1/\omega_2 = m_1/m_2 \tag{6.9}$$

есть рациональное число (m_1 и m_2 — целые числа), то возникает так называемый резонансный случай. Траектория замыкается через конечное число оборотов на торе.

Очевидно, что условие (6.9) означает некоторое вырождение. Поскольку ω_1 и ω_2 являются некоторыми функциями от F_1 и F_2, то равенство (6.9) выражает соотношение между F_1 и F_2.

В общем случае многомерного движения вырождение означает существование ненулевого N-мерного вектора $\boldsymbol{m}=(m_1, \ldots, m_N)$ такого, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\omega_i = 0. \tag{6.10}$$

Если соотношения типа (6.10) могут выполняться для $r \leqslant N$ различных векторов $\boldsymbol{m}^{(r)}$, то говорят о r-кратном вырождении. Общее условие отсутствия вырождения мы запишем ниже после введения канонических переменных.

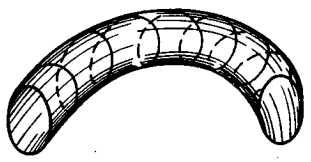


Рис. 1.21. Движение на двумерном торе

Переменные «действие — угол». В интегрируемом случае можно наиболее естественным образом ввести канонические переменные. Переменные F_i и ϑ_i не являются канонически сопряженными.

Пусть $(I_1, \ldots, I_N)$ являются обобщенными импульсами, называемыми действиями, которые канонически сопряжены углам $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N)$. Тогда в силу линейной независимости интегралов $(F_1, \ldots, F_N)$ их можно выразить через действия:

$$F_i = F_i(I_1, \ldots, I_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.11}$$

Аналогично гамильтониан выражается только через действия:

$$H = H(I_1, \ldots, I_N), \tag{6.12}$$

т. е. переменные ϑ_i являются циклическими. Из (6.11) следует

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}, \qquad \dot{\vartheta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{6.13}$$

или, согласно (6.7) и (6.11),

$$I_i = \text{const}, \qquad \vartheta_i = \omega_i t + \text{const}, \tag{6.14}$$

где частоты ω_i определены в новых переменных следующим образом:

$$\omega_i = \omega_i(I_1, \ldots, I_N) \equiv \frac{\partial H}{\partial I_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.15}$$

Теперь необходимо выяснить, как можно ввести переменные действия. Рассмотрим выражение

$$S_{12} = \int_{C(1,2)} \sum_{i=1}^{N} p_i\, dq_i, \tag{6.16}$$

зависящее, вообще говоря, от контура интегрирования $C(1, 2)$, связывающего начальную (1) и конечную (2) точки в фазовом пространстве. Согласно формулам (5.3), (5.4) это есть первый интегральный инвариант Пуанкаре. Поэтому величина

$$dS = \sum_{i=1}^{N} p_i\, dq_i \tag{6.17}$$

есть также инвариант.

Существует, однако, более сильное утверждение. Если число интегралов движения *) равно в точности N, то в этом и только в этом случае выражение (6.17) для dS является полным дифференциалом (ком. 6). Отсюда следует, что интеграл (6.16) не зависит от вида контура $C(1, 2)$, а определяется только положением начальной и конечной точек.

Предположим теперь, что интегрирование в (6.16) производится по замкнутому контуру C, т. е. точки 1 и 2 совпадают. Поскольку интеграл S_C не зависит от C, то он равен нулю. Отличие S_C от нуля может возникнуть лишь в том случае, если замкнутый контур C не может быть стянут в точку.

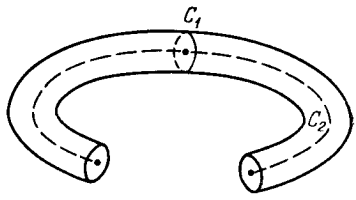


Рис. 1.22. Неприводимые контуры C_1 и C_2

Обратимся снова к траектории системы в интегрируемом случае, когда имеется N интегралов движения. Она является обмоткой N-мерного инвариантного тора. На нем можно выбрать ровно N контуров C_j, которые не могут быть ни стянуты в точку, ни переведены непрерывным образом друг в друга. Это базисные контуры тора (случай $N=2$ приведен на рис. 1.22). Будем называть их также неприводимыми контурами.

С помощью неприводимых контуров и первого инварианта Пуанкаре определим переменные действия:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_{i=1}^{N} p_i\, dq_i \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{6.18}$$

Можно также показать, что функция

$$S(q;\ I) = \int_{q_0}^{q} \sum_{i=1}^{N} p_i(q;\ I)\, dq_i \tag{6.19}$$

является производящей функцией, реализующей каноническое преобразование $(p,\ q) \to (I,\ \vartheta)$ [2]. Таким образом, $(I,\ \vartheta)$ есть канонически сопряженные переменные.

Однозначность инвариантных торов. Определение действий (6.18), вообще говоря, не является однозначным. Это связано с некоторым произволом выбора контура C_j. Например, при $N=2$ можно совершить замену $(I_1,\ I_2) \to (I_1 + I_2,\ I_2)$. Ясно, однако, что дело не в выборе переменных, а в свойствах траектории. И здесь вопрос решается следующим важным утверждением [2]: если система является невырожденной, т. е.

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i(I)}{\partial I_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H(I)}{\partial I_i\, \partial I_j} \right| \neq 0, \tag{6.20}$$

то инвариантные торы

$$(I) \equiv (I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_N) = \text{const}$$

определены однозначно, независимо от неоднозначности в выборе переменных $(I,\ \vartheta)$. В формуле (6.20) сокращенно записаны детерминанты размерности $N \times N$. Неравенство их нулю означает независимость N частот (ω).

Следствия. Некоторые следствия вытекают сразу из теоремы Лиувилля — Арнольда. Например, если $N=2$, то знание одного первого интеграла позволяет проинтегрировать задачу, так как вторым интегралом является энергия системы.

Если переменные задачи разделяются, то она сводится к одномерной задаче, которая интегрируется. Таких примеров немало, так как легкость

*) В дальнейшем под этим всегда будет подразумеваться число первых, независимых и коммутирующих интегралов.

обращения с ними привлекает к ним более интенсивное внимание. Однако существует еще один аспект разделения переменных.

Если переменные разделяются в нескольких системах координат, то существует столько же разных действий, которые могут быть выбраны в качестве различных первых интегралов. Например, двумерная задача о движении в кулоновском поле разделяется в эллиптических и в полярных координатах.

Еще одно замечание связано с некоторым расширением условий применимости теоремы Лиувилля—Арнольда. Для этого вернемся к задаче о маятнике (формула (3.1)). Из его фазового портрета (рис. 1.10) видно, что финитному движению соответствуют колебания, а инфинитному—вращения маятника.

Аналогичная задача возникает также для заряженной частицы, движущейся в поле плоской волны:

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E_0 \sin(kx - \omega t), \tag{6.21}$$

где E_0—амплитуда поля волны. Чтобы убедиться в этом, необходимо перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с волной, точнее, с фазовой скоростью волны $u = \omega/k$. Для этого введем новую переменную

$$y = k(x - ut)$$

и уравнение (6.21) переходит в

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \sin y = 0, \tag{6.22}$$

где частота малых колебаний равна

$$\omega_0 = (eE_0 k/m)^{1/2}.$$

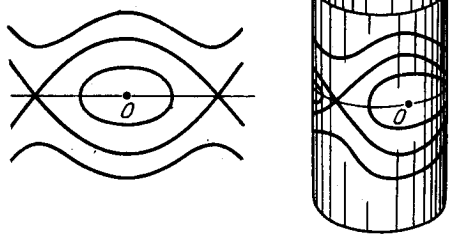


Рис. 1.23. Переходы к цилиндрическому фазовому пространству

Инфинитное движение совершают пролетные частицы, не захваченные потенциальным полем волны. Их движение, однако, также является периодическим. Это показывает, что можно изображать фазовый портрет всех траекторий (соответствующих как захваченным, так и незахваченным частицам) не в неограниченном по координате фазовом пространстве, а на поверхности цилиндра (рис. 1.23). Для этого необходимо отождествить значения переменной y, которые отличаются на 2π. Таким образом, теорема Лиувилля—Арнольда распространяется и на некоторые инфинитные движения.

Спектральное разложение. Нам осталось рассмотреть еще один вопрос в этой главе, относящийся к спектральным свойствам траектории системы. Если система является интегрируемой, то этот вопрос решается довольно просто. Достаточно лишь знать связь переменных (p, q) с переменными действие—угол. Пусть это так, т. е.

$$p = p(I, \vartheta), \quad q = q(I, \vartheta).$$

Тогда, учитывая цикличность по переменной ϑ, имеем

$$q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(I) \exp(im\vartheta), \quad p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m(I) \exp(im\vartheta), \tag{6.23}$$

где коэффициенты разложения удовлетворяют условию вещественности:

$$q_m^* = q_{-m}, \quad p_m^* = p_{-m};$$

векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ равны

$$\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_N), \quad \boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N)$$

и m_j—целые положительные или отрицательные числа.

Поскольку система интегрируема, то $\vartheta_i = \omega_i t + \vartheta_{i0}$ и $\omega_i = \omega_i(I)$. Поэтому разложение (6.23) сразу переходит в следующее:

$$q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_m(I) \exp(im\omega t), \qquad p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_m(I) \exp(im\omega t), \tag{6.24}$$

где постоянные фазовые множители включены в новые амплитуды разложения:

$$\tilde{q}_m = q_m \exp(im\vartheta_0), \qquad \tilde{p}_m = p_m \exp(im\vartheta_0).$$

Таким образом, разложение (6.24) описывает N-частотное движение, если отсутствует вырождение, т. е. справедливо условие (6.20). Такое движение носит название условно-периодического.

Нетривиальный пример (цепочка Тоды). Задачи с неразделяющимися переменными, но интегрируемые, следует, безусловно, отнести к нетривиальным случаям. Еще реже удается отыскать все интегралы движения в аналитическом виде. Такие примеры являются исключительными.

Примером может служить цепочка Тоды [11] из N частиц, расположенных на кольце, с экспоненциальным законом взаимодействия

$$H = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i=1}^{N} e^{-(q_{i+1}-q_i)} - N \tag{6.25}$$

и с граничным условием

$$q_{N+1} = q_1, \qquad p_{N+1} = p_1.$$

У этой цепочки существует ровно N первых интегралов, что позволяет точно ее проинтегрировать. Приведем интегралы движения в виде, полученном в [12]:

$$I_{N-n} = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial p_j}\right)^n e^{-\rho} \prod_{i=1}^{N} p_i, \tag{6.26}$$

где обозначено

$$\rho = \sum_{m=1}^{N} e^{-(q_{m+1}-q_m)} \frac{\partial^2}{\partial p_m \partial p_{m+1}}.$$

Например, при $N = 3$ интегралы движения превращаются в следующие:

$$\begin{aligned} I_1 &= p_1 + p_2 + p_3, \\ I_2 &= p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 - X_1 - X_2 - X_3, \\ I_3 &= p_1p_2p_3 - p_1X_2 - p_2X_3 - p_3X_1, \\ X_n &\equiv \exp[-(q_{n+1} - q_n)]. \end{aligned} \tag{6.27}$$

В формулах (6.27) легко понять и получить первый интеграл, так как он равен полному импульсу системы. Просто также убедиться в том, что

$${}^1/_2 I_1^2 - I_2 = H,$$

т. е. второй интеграл связан непосредственно с энергией. Выражение для I_3 уже не является столь простым ни для его интерпретации, ни для получения. И тем более это замечание справедливо для числа частиц $N > 3$.

Наиболее удивительной чертой цепочки Тоды является возможность точной записи всех интегралов движения при конечном произвольном числе частиц. Мы еще вернемся к подобного рода феномену при рассмотрении нелинейных волн.

§ 7. Отображения

До сих пор мы имели дело с динамическими системами, эволюция которых во времени определялась дифференциальными уравнениями движения гамильтоновского вида. Существует и другая возможность,

которая определяет динамику системы с помощью уравнения в конечных разностях. Например,

$$(p(t_{n+1}),\ q(t_{n+1})) = \hat{T}(p(t_n),\ q(t_n)), \tag{7.1}$$

где $\hat{T}$ — оператор сдвига на время

$$T = t_{n+1} - t_n.$$

В дальнейшем удобно более короткое обозначение,

$$(p_{n+1},\ q_{n+1}) = \hat{T}(p_n, q_n), \tag{7.2}$$

где

$$p_i \equiv p(t_i), \qquad q_i \equiv q(t_i).$$

Уравнения (7.1), (7.2) задают также отображение фазового пространства в себя.

Дискретное время. Существуют такие динамические системы, в которых появление дискретного времени является вполне естественным, и, наоборот, трудно ввести описание их с помощью дифференциальных уравнений. Примером таких систем могут служить всевозможные игры, в которых переход от состояния с номером n к состоянию с номером $n+1$ определяется ходом.

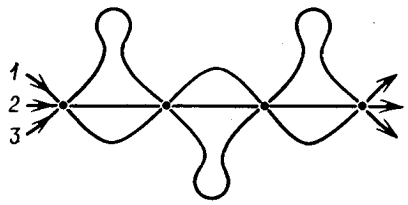


Рис. 1.24. Кривые *1*, *2* и *3*, проходящие через отмеченную последовательность точек, могут удовлетворять разным уравнениям

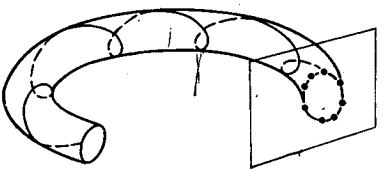


Рис. 1.25. Отображение Пуанкаре

Каждый ход в шахматной партии, совершаемый в соответствии с некоторым планом (он должен определяться видом оператора $\hat{T}$), сопровождается изменением состояния на шахматной доске.

Однако и обычные динамические системы с гамильтонианом

$$H = H(p,\ q;\ t)$$

могут быть представлены иногда в форме отображения. Наиболее естественно такое представление возникает в том случае, когда действующее на систему возмущение является периодическим во времени с периодом, например, T:

$$H(p,\ q;\ t+T) = H(p,\ q;\ t).$$

В этом случае достаточно рассмотреть решение уравнений движения на некотором интервале $(t_0,\ t_0+T)$ и найти путем сшивки решений вид оператора сдвига T на период T. Тогда определение решения сводится к последовательному итерационному процессу

$$(p_n,\ q_n) = \hat{T}^n(p_0,\ q_0), \tag{7.3}$$

где $(p_0,\ q_0)$ — начальное условие. Кроме того, траектория системы, определяемая с помощью (7.3), представляет собой счетную последовательность точек:

$$\{(p_0,\ q_0);\ (p_1,\ q_1);\ \ldots;\ (p_n,\ q_n);\ \ldots\}. \tag{7.4}$$

Как мы увидим далее, иногда сведение дифференциальных уравнений движения к отображениям позволяет упростить задачу и решить ряд сложных вопросов.

Если, однако, исходная динамическая система сразу задана в виде отображения, то далеко не всегда можно построить эквивалентные ей дифференциальные уравнения. Это отчасти связано с тем, что если через заданную последовательность точек можно провести одну кривую, то можно провести также и неограниченное число кривых (см. примеры на рис. 1.24).

Отображение Пуанкаре. В случае одной степени свободы ($N=1$) динамические системы интегрируются всегда в квадратурах. Системы с гамильтонианом $H=H(p, q; t)$, где p и q являются единственными компонентами, можно классифицировать как системы с $N={}^3/_2$ степенями свободы. В этом случае отображение (7.2) переводит плоскость в плоскость. Это свойство можно использовать при $N\geqslant 2$, где изображение траектории в фазовом пространстве размерности $\geqslant 4$ практически невозможно.

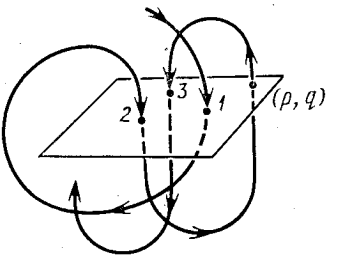


Рис. 1.26. Последовательные точки отображения Пуанкаре

Рассмотрим для простоты случай с $N=2$. Пересечем тор плоскостью перпендикулярно его центральной оси (рис. 1.25). Каждый раз, когда траектория «протыкает» эту плоскость, будем отмечать координату траектории на плоскости. Пусть (p_n, q_n) есть координата n-го пересечения траектории с плоскостью. Тогда два последовательных пересечения могут быть связаны друг с другом с помощью некоторого соотношения

$$(p_{n+1}, q_{n+1})=\hat{T}_n(p_n, q_n). \tag{7.5}$$

Оператор $\hat{T}_n$ определяется с помощью уравнений движения и задает отображение Пуанкаре.

Отображение Пуанкаре действует в пространстве меньшей размерности, чем размерность фазового пространства. Это упрощение дается той ценой, которую следует платить, чтобы найти вид оператора $\hat{T}_n$. Для этого, очевидно, необходимо частично проинтегрировать задачу. Еще одна важная особенность отображения Пуанкаре связана с тем, что оператор $\hat{T}_n$ в (7.5) есть оператор сдвига на время T_n, зависящее от номера n (рис. 1.26). Хотя мы снова описываем траекторию последовательностью точек на плоскости (p, q) типа (7.4), однако последовательность моментов времени

$$\{t_i\}=t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$$

действия операторов $\hat{T}_i$ не является эквидистантной. Это, как мы увидим далее, определенным образом отражается на свойствах исследуемых величин.

Поясним последнее замечание более подробно. Рассмотрим две разные динамические системы с $N=2$. Отображения обладают определенным классом универсальности. Поэтому можно ожидать, что при не очень существенных ограничениях операторы $\hat{T}'_n$ и $\hat{T}''_n$ для обеих систем одинаковые, с точностью до значений параметров. Однако последовательности $\{t'_i\}$ и $\{t''_i\}$ у них могут оказаться существенно различными. Тогда некоторые динамические свойства этих систем различны (например, корреляционные функции).

Простое следствие: если система имеет инвариантный тор, то отображение Пуанкаре имеет инвариантную кривую (рис. 1.25).

Равновесие атомных цепочек. Приведем простой пример возникновения отображения. Рассмотрим одномерную цепочку атомов (*а*), которые находятся в некотором внешнем поле (*б*) и, кроме того, взаимодействуют с ближайшими соседями (рис. 1.27). Гамильтониан такой системы может быть записан в виде

$$H=\frac{1}{2m}\sum_k p_k^2+\frac{1}{2}\sum_k[\Phi(u_{k+1}-u_k)-\Phi(u_k-u_{k-1})]+\sum_k V(u_k), \tag{7.6}$$

где $(u_k,\ p_k)$ — координата и импульс k-го атома цепочки $(p_k = m\dot{u}_k)$; Φ — потенциал парного взаимодействия атомов, зависящий от их взаимного расстояния; $V(u_k)$ — потенциал внешнего поля, который обычно является периодическим с некоторым периодом a_0:

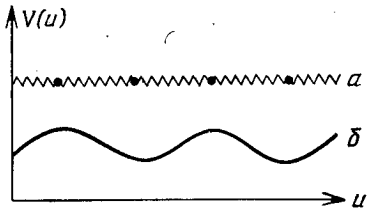


Рис. 1.27. Атомная цепочка (*а*) и потенциал внешнего поля (*б*)

$$V(u_k + a_0) = V(u_k). \tag{7.7}$$

Рассмотрим условие стационарности атомов. Мы уже пользовались такими условиями при получении (2.4):

$$\dot{u}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0. \tag{7.8}$$

Первое уравнение в (7.8) означает просто отсутствие движения атомов в стационарном состоянии; второе после подстановки H из (7.6) дает уравнение

$$\frac{\partial \Phi(u_{k+1} - u_k)}{\partial u_k} + \frac{\partial \Phi(u_k - u_{k-1})}{\partial u_k} + 2\frac{\partial V(u_k)}{\partial u_k} = 0, \tag{7.9}$$

которое определяет положение равновесия атомов.

Введем новую переменную

$$I_k = u_k - u_{k-1}$$

и с ее помощью представим конечно-разностное уравнение (7.9) в виде отображения

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= -(\Phi'[-\Phi'(I_k) - 2V'(u_k)])^{-1}, \\ u_{k+1} &= u_k + I_{k+1}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по аргументу и $(\Phi')^{-1}$ есть функция, обратная к Φ'.

Пусть, например, $\Phi(\xi) = {}^1/_2\omega_0^2\xi^2$ (атомы связаны линейными упругими пружинками). Тогда

$$\Phi'(\xi) = \omega_0^2\xi, \qquad (\Phi'(\xi))^{-1} = \xi/\omega_0^2.$$

Используя эти выражения, преобразовываем (7.10) в следующее отображение

$$I_{k+1} = I_k + V'(u_k), \qquad u_{k+1} = u_k + I_{k+1}, \tag{7.11}$$

которое определяет равновесные положения атомов цепочки. В этой задаче нет времени. Индекс k определяет пространственное положение атомов. И, тем не менее, задача неожиданно свелась к отображению (7.11), которое мы неоднократно будем встречать в дальнейшем.

Мы обсудим задачу об атомной цепочке подробнее в III части.

Выше отмечалось, что далеко не всякому отображению можно поставить в соответствие эквивалентное дифференциальное уравнение. В данном случае это легко сделать. Рассмотрим гамильтониан

$$H = H(I,\ u) = {}^1/_2 I^2 - V(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na), \tag{7.12}$$

где роль времени играет координата x и точки $x_n = na$ соответствует невозмущенному положению атомов в цепочке. Выражение (7.12) порождает следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial u} = V'(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na), \\ \frac{du}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial I} = I. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Чтобы получить из (7.13) отображение, надо поступить следующим образом. Заметим, что между точками $x_n = na$ происходит невозмущенное «движение» системы:

$$\frac{dI}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dx} = I,$$

которое представляет собой свободное «вращение» с «частотой» $\omega(I) = I$, т. е.

$$I = \text{const}, \qquad u = Ix + \text{const}. \tag{7.14}$$

Решение в форме (7.14) справедливо на любом интервале $(na, (n+1)a)$. Значения I и u на соседних интервалах можно сшить. Условия сшивки и определят отображение $\hat{T}$. Для этого определим:

$$I_n \equiv I(x = na - 0), \qquad u_n \equiv u(x = na - 0).$$

Соответственно

$$I_{n+1} \equiv I(x = (n+1)a - 0), \qquad u_{n+1} \equiv u(x = (n+1)a - 0).$$

Проинтегрируем (7.13) по малой окрестности x: $(na - 0, na + 0)$. Получаем

$$I_{n+1} - I_n = V'(u_n), \tag{7.15}$$

где мы воспользовались формулой (7.14) и тем, что u непрерывно в точке $x_n = na$:

$$u(na - 0) = u(na + 0).$$

В области x: $(na + 0, (n+1)a - 0)$ имеет место свободное вращение (7.14). Поэтому

$$\begin{aligned} I((n+1)a - 0) &= I(na + 0) = I_{n+1}, \\ u((n+1)a - 0) &= u(na + 0) + I_{n+1}a = u_n + aI_{n+1}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Совмещая (7.15) и (7.16), получаем окончательно отображение

$$I_{n+1} = I_n + V'(u_n), \qquad u_{n+1} = u_n + aI_{n+1}, \tag{7.17}$$

которое совпадает с (7.11), если положить $a = 1$.

Рассмотренный пример поучителен во многих отношениях. Он позволяет сопоставить итерационному процессу некоторую конкретную динамическую систему (7.12), (7.13), в которой отображение возникает в результате действия периодической последовательности толчков типа δ-функций [13, 14]. Некоторые вопросы, как мы увидим далее, удобно рассматривать, используя уравнения движения (7.13), а не отображение (7.17).

§ 8. Заключительные замечания

Глава 1 оказалась несколько перегруженной и сложными понятиями, и сложными формальными выражениями. Для этого есть свои причины. Развитие теории нелинейной динамики отобрало такие характеристики систем, которые позволяют, с одной стороны, лучше понять глубокие свойства нелинейных систем, а с другой стороны — развить приближенный их анализ. Из списка этих свойств систем следует выделить понятия фазового портрета и условия интегрируемости и переменные действие — угол. Их введение ограничено зачастую гамильтоновскими системами. Дальнейшие главы покажут важность этих понятий не только для гамильтоновских систем, но и для систем с диссипацией.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 1

1. Нелинейные колебания электронной плазмы, рассматриваемые здесь, относятся к наиболее простому случаю динамики плазмы. Решение для какой-либо характеристики среды (например, плотности или скорости) отыскивается в виде функции от $\xi = x - ut$, где скорость волны u есть некоторая константа задачи. Различные виды таких волновых колебаний плазмы были описаны в [3, 4]. С некоторыми из них мы познакомимся ниже. Задача о нелинейных плазменных колебаниях была рассмотрена в работе [5]. Спектр колебаний был получен в [6].

2. Хорошо известны недоразумения, возникшие в квантовой механике при введении оператора фазы $\hat{\varphi}$ [8]. Пренебрежение областью определения φ приводит к серьезным ошибкам. В частности, возникает неправильное соотношение неопределенности между действием и фазой, в котором допустимы флуктуации фазы, много большие 2π. Использование правильной области определения $\varphi(t)$ позволяет получить разумный результат.

3. Все результаты, приводимые ниже, излагаются в краткой форме. Более детальное изложение и доказательства можно найти в учебнике Арнольда [2].

4. Свойство функции F быть первым интегралом, если выполнено условие (6.2), вытекает непосредственно из определения первого интеграла [9]. Пусть задана система уравнений

$$\dot{x} = V(x).$$

Тогда функция $F(x)$ называется первым интегралом, если

$$\left(V(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) F = 0.$$

Полагая $x = (p_1, \ldots, p_N; q_1, \ldots, q_N)$, получаем, согласно уравнениям (6.6):

$$\sum_{i=1}^{N} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) = - [H, F] = 0,$$

т. е. условие (6.2).

Проблема большинства задач динамики — найти нетривиальный первый интеграл, т. е. такую функцию F, что $F \not\equiv \text{const}$ и $F \neq F(H)$.

Как мы увидим далее, хотя первые интегралы найти трудно, но можно доказать их существование при определенных условиях (теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера).

5. Арнольдом были определены точные условия, при которых справедлива теорема Лиувилля и приведено ее строгое доказательство [2]. Это помогло устранить многочисленные неточности в физической литературе. Как станет ясно ниже, теорема об интегрируемости представляет собой один из фундаментальных результатов, на котором основывается анализ нелинейных систем.

6. Это обстоятельство обсуждалось еще в работе Эйнштейна [10] в связи с проблемой квазиклассических правил квантования, когда переменные не разделяются.

Глава 2

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Проведение точного анализа нелинейной динамической системы представляет собой настолько редкое событие, что реальная ситуация вынуждает нас научиться проводить приближенные исследования и овладеть некоторой степенью технических знаний, позволяющих проявлять интуитивные соображения в том или ином конкретном физическом случае. Выделить какие-либо классы физических задач не столь просто, и это наверняка отражает степень нашего понимания нелинейных задач физики.

Типичная физическая постановка задачи заключается в том, что какая-то ее часть известна достаточно полно. Пусть, например, эта часть задачи описывается гамильтонианом

$$H_0 = H_0(I_1, \ldots, I_N) \equiv H_0(I).$$

Исследуемая задача связана с возмущением гамильтониана H_0:

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta),$$

где ε — безразмерный параметр возмущения, а $V(I, \vartheta)$ — вид потенциала возмущения. В выражении для H есть два важных момента. Первый — в том, что невозмущенная часть гамильтониана H_0 зависит только от N действий и, следовательно, соответствует интегрируемому случаю. Второй — в том, что возмущение V зависит от углов $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_2)$. Почему это так? Если бы $V = V(I)$, т. е. V не зависело бы от ϑ, то задача оказалась бы тривиальной. Гамильтониан H, так же как и H_0, имел бы циклические переменные ϑ, и поэтому

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_k} = 0, \qquad \dot{\vartheta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k} = \omega_k(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I)}{\partial I_k} \equiv \tilde{\omega}_k(I).$$

Эти равенства означают, что инвариантные торы сохраняются, а изменяются лишь частоты движения на торе, которые вычисляются элементарно:

$$I_k = \text{const}, \quad \vartheta_k = \tilde{\omega}_k(I)\, t + \vartheta_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

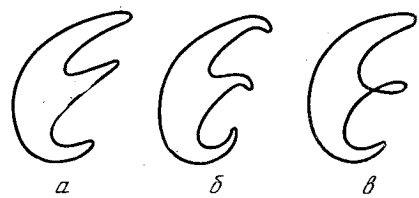
Этот случай назовем тривиальным и далее обсуждать не будем. Таким образом, всюду в дальнейшем возмущение V зависит от ϑ.

Основная часть физических задач, допускающих аналитическое исследование, связана с тем, что какие-то безразмерные параметры являются либо малыми, либо большими. Методов такого типа достаточно много, и в этой главе мы остановимся на некоторых из них, которые встречаются довольно часто.

§ 1. Теория возмущений

Исследование малых изменений состояний системы лежит в основе многочисленных методов, которые представляют собой различные формы теории возмущений.

Возмущение и топология фазового пространства. Фазовый портрет системы позволяет составить достаточно полное представление о виде траекторий и о типах движения системы. Поэтому можно поставить вопрос об эквивалентности каких-либо движений с точки зрения их фазовых портретов. Одним из важных признаков сравнения различных траекторий является их топологическая эквивалентность или неэквивалентность.



а *б* *в*

Рис. 2.1. Топологически эквивалентные (*а* и *б*) и неэквивалентная им (*в*) траектории

Если фазовую траекторию можно путем плавной деформации перевести неособым образом в другую траекторию, то они топологически эквивалентны. На рис. 2.1 переход от *а* к *в* или от *б* к *в* нельзя совершить неособым образом. Введенное понятие позволяет взглянуть на задачу о возмущении системы с некоторых общих позиций.

Интуитивно мы понимаем, что хотя возмущение может быть даже очень малым по величине, этого может быть недостаточно, чтобы его влияние на систему также оказалось малым. Во-первых, система может оказаться сложной, например неустойчивой, для таких возмущений. И тогда «малые причины» вызовут «большие следствия». Во-вторых, само возмущение может оказаться сложным. И тогда отклик системы в чем-то окажется не малым. На рис. 2.2 приведены три типа возмущений потенциала. Два из них (*а* и *в*) изменяют топологическую структуру фазового портрета (рис. 2.3*б*), уменьшая (*а*) или увеличивая (*в*) число особых точек системы.

Ряды по степеням возмущения. Пусть снова система, для простоты, является гамильтоновской и ее возмущенный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta; t),$$
$$(I) \equiv (I_1, I_2, \ldots, I_N), \qquad (\vartheta) \equiv (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N). \tag{1.1}$$

Пусть также $F(I, \vartheta, t)$ есть некоторая физическая величина, зависящая от всех динамических переменных и времени. Если в отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$) значение F равно F_0, то наивная точка зрения заключается в желании отыскивать вид F в виде ряда

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)} \tag{1.2}$$

по степеням малого параметра ε. Величины $F^{(k)}$ можно находить каким-либо подходящим способом, например последовательными приближениями.

К сожалению, столь прямолинейный способ почти никогда не справедлив. В лучшем случае разложение по степеням параметра ε типа (1.2) справедливо на ограниченном интервале времени, который сам зависит от ε. Например, должно быть

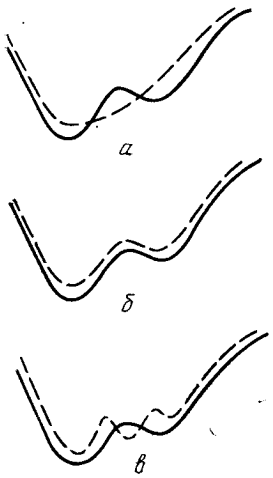


Рис. 2.2. Невозмущенный (сплошная кривая) и возмущенный (штриховая кривая) потенциалы

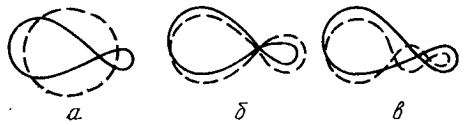


Рис. 2.3. Возмущение фазовых портретов

$$t < t_\varepsilon = \text{const}/\varepsilon^\mu \tag{1.3}$$

с некоторым $\mu \geqslant 0$. Более того, наиболее интересные события разыгрываются как раз при $t > t_\varepsilon$. В худшем случае для описания необходимой физической ситуации приходится пользоваться совсем другими рядами, например по степеням $\varepsilon^{1/2}$, что не имеет ничего общего с обычной теорией возмущений.

Наконец, существуют такие вопросы, на которые надо давать вполне прямолинейный ответ, не связывая себя никакими ограничениями типа (1.3). Примером такого вопроса является следующий: остаются ли инвариантные торы в результате действия малого возмущения?

Анализ примеров поможет нам понять некоторые внутренние причины, затрудняющие использование рядов типа (1.2) по степеням ε.

Возмущение свободного движения. Рассмотрим сначала свободное движение частицы, возмущаемое периодической силой:

$$\ddot{x} = \varepsilon F(x, t). \tag{1.4}$$

Условие периодичности выглядит следующим образом:

$$F(x, t) = F(x, t + T).$$

Оно означает, что существует фурье-разложение:

$$F(x, t) = \sum_n F_n(x) e^{in\Omega t}, \qquad \Omega = 2\pi/T. \tag{1.5}$$

Малость параметра возмущения $\varepsilon \ll 1$ позволяет записать в нулевом приближении

$$\ddot{x}^{(0)} = 0,$$

т. е.

$$x^{(0)} = v^{(0)}t + \text{const}. \tag{1.6}$$

Отыскиваем первое приближение $x^{(1)}$, подставляя (1.6) в правую часть (1.4):

$$\ddot{x}^{(1)} = \varepsilon F(x^{(0)},\ t) = \varepsilon \sum_n F_n(x^{(0)})\, e^{in\Omega t}. \tag{1.7}$$

Можно написать в произвольном приближении

$$\ddot{x}^{(m+1)} = \varepsilon \sum_n F_n(x^{(m)}) e^{in\Omega t}. \tag{1.8}$$

На первый взгляд кажется, что уравнение (1.8) решает вопрос. Например, отыскание $x^{(1)}$ сводится к двойному интегралу по времени от правой части (1.7). Далее этот процесс продолжается, как это предписывается общей формулой (1.8). Однако на некотором шаге нас ждет неприятность. Проследим за этими действиями.

Пусть, например, $F_n(x) \sim x^2$. Тогда $x^{(1)} \sim \exp(in\Omega t)$. Однако уже в $x^{(2)}$ встречаются экспоненты вида

$$x^{(2)} \sim \exp[i(n_1 + n_2 + n_3)\,\Omega t],$$

где n_i — положительные и отрицательные целые числа. Если между ними возможно соотношение $n_1 + n_2 + n_3 = 0$, то уже поправка $x^{(3)}$ будет расходиться, точнее,

$$x^{(3)} \sim \varepsilon t^2.$$

Следовательно, если

$$t > t_\varepsilon = \text{const}/\sqrt{\varepsilon},$$

то ряд теории возмущений

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \ldots \tag{1.9}$$

начинает расходиться.

Мы столкнулись с элементарной формой резонанса.

Резонансы и малые знаменатели. Подойдем к этому явлению с более общей точки зрения. Рассмотрим периодическое по времени возмущение гамильтоновской системы

$$\begin{aligned} &H = H_0(I) + \varepsilon V(I,\ \vartheta;\ t),\\ &V(I,\ \vartheta;\ t) = V(I,\ \vartheta;\ t+T), \end{aligned} \tag{1.10}$$

совершающей финитное движение. Невозмущенное движение является интегрируемым, поэтому невозмущенная траектория является обмоткой тора. Это позволяет записать потенциал возмущения V в виде разложения:

$$V(I,\ \vartheta;\ t) = \sum_{n,\ m} V_{nm}(I)\, e^{in\vartheta - im\Omega t}; \tag{1.11}$$

условие вещественности V дает

$$V_{-n,\ -m} = V^*_{n,\ m}.$$

Рассмотрим гамильтоновские уравнения движения, используя разложение (1.11):

$$\begin{aligned} &\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -i\varepsilon \sum_{n,\ m} nV_{nm}(I)\, e^{i(n\vartheta - m\Omega t)},\\ &\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \sum_{n,\ m} \frac{dV_{nm}(I)}{dI}\, e^{i(n\vartheta - m\Omega t)}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

В нулевом приближении

$$I^{(0)} = \text{const}, \qquad \vartheta^{(0)} = \omega(I^{(0)})\, t + \text{const}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть (1.12), находим уравнения первого приближения:

$$\dot{I}^{(1)} = -i \sum_{n,\, m} n\tilde{V}_{nm}(I^{(0)})\, e^{i(n\omega(I^{(0)}) - m\Omega)\, t}, \tag{1.13}$$

где $\tilde{V}_{nm}$ отличается от V_{nm} постоянным фазовым множителем. Уравнение для $\vartheta^{(1)}$ имеет более сложный вид:

$$\dot{\vartheta}^{(1)} = \frac{d\omega(I^{(0)})}{dI} I^{(1)} + \sum_{n,\, m} \frac{d\tilde{V}_{nm}(I^{(0)})}{dI} e^{i(n\omega(I^{(0)}) - m\Omega)\, t}. \tag{1.14}$$

Смысл уравнений (1.13) и (1.14) достаточно прост. Решения исходных уравнений движения (1.12) отыскиваются в виде рядов:

$$I = I^{(0)} + \varepsilon I^{(1)} + \ldots, \qquad \vartheta = \vartheta^{(0)} + \varepsilon\vartheta^{(1)} + \ldots \tag{1.15}$$

После подстановки этих разложений в (1.12) следует отобрать члены, стоящие при одинаковых степенях ε.

Теперь правая часть в уравнении (1.13) является только функцией времени, не зависящей от переменных задачи. Поэтому оно сразу интегрируется и дает

$$I^{(1)} = -\sum_{n,\, m} \frac{n\tilde{V}_{nm}}{n\omega - m\Omega} e^{i(n\omega - m\Omega)\, t} + \text{const}, \tag{1.16}$$

где зависимость от $I^{(0)}$ для простоты записи не указывается. Аналогично интегрируется и уравнение (1.14) для фазы $\vartheta^{(1)}$:

$$\dot{\vartheta}^{(1)} = -\sum_{n,\, m} \left[\frac{1}{n\omega - m\Omega} n \frac{d\omega}{dI} \tilde{V}_{nm} - \frac{d\tilde{V}_{nm}}{dI}\right] \exp(i(n\omega - m\Omega)\, t). \tag{1.17}$$

Отсюда

$$\vartheta^{(1)} = i \sum_{n,\, m} \left[\frac{n\tilde{V}_{nm}}{(n\omega - m\Omega)^2} \frac{d\omega}{dI} - \frac{1}{n\omega - m\Omega} \frac{d\tilde{V}_{nm}}{dI}\right] \exp(i(n\omega - m\Omega)\, t). \tag{1.18}$$

Проведем анализ полученных выражений. Прежде всего замечаем, что они содержат резонансные знаменатели, обращение которых в нуль,

$$n\omega(I_{(r)}) - m\Omega = 0, \tag{1.19}$$

при некоторых резонансных значениях действия $I_{(r)}$ означает, что частоты ω и Ω соизмеримы. Возможность выполнения равенства (1.19) зависит от разных обстоятельств. Это связано с тем, какие номера гармоник основного движения системы и внешнего возмущения имеются в разложении (1.11). Кроме того, важную роль играет также фактор нелинейности, т. е. зависимость ω от I. Действительно, в этом случае даже при произвольных $\omega_0 = \omega(0)$ и Ω (в том числе и при несоизмеримых их значениях) можно изменением I достичь выполнения условия (1.19) точно.

Таким образом, одним из характерных свойств нелинейной системы является существование в ней резонансов. Если условие (1.19) не может быть выполнено в уравнениях первого приближения, то заведомо более сложное условие резонанса сможет быть выполненным в каком-либо из более высоких порядков итерационного процесса. В этом и заключается проблема малых знаменателей (ком. 1).

Следует также заметить, что условие (1.19) не обязательно должно выполняться точно. Некоторая малая окрестность $\delta I = I - I_{(r)}$ относительно

резонансной точки $I_{(r)}$ также является «опасной», поскольку знаменатели в (1.16) и (1.18) по-прежнему остаются малыми.

Простые соображения показывают, что наличие резонансов приводит в соответствующем выражении к линейному росту со временем поправок для действия. Действительно, обратимся к уравнению (1.13) для поправки первого приближения. Резонанс или близость к резонансу означает, что в правой части (1.13) показатель либо равен нулю (точный резонанс), либо очень медленно изменяется и с некоторой степенью точности может быть положен равным константе. Тогда имеем

$$I^{(1)} \sim \text{const} \cdot t,$$

и время, в течение которого нарастает первая поправка, равно

$$t_\varepsilon \sim 1/\varepsilon. \tag{1.20}$$

Эта оценка лучше, чем в предыдущем примере. Вообще, переменные действие—угол очень удобны для того, чтобы отбирать резонансные члены. И это естественно, так как в гамильтониане сразу выделяются циклические переменные (ϑ), по которым совершается периодическое движение.

Внутренние резонансы. Описанный пример показал, как возникает резонанс между системой и внешней силой. Точно так же можно проследить за появлением малых знаменателей, обусловленных внутренними резонансами между разными степенями свободы системы. Для этого достаточно посчитать, что переменные (I) и (ϑ) в формулах (1.10) являются N-мерными векторами. Тогда разложение (1.11) принимает вид

$$V(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\vartheta};\ t) = \sum_{nm} V_{nm}(\boldsymbol{I}) \exp\left[i\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\vartheta} - m\Omega t\right)\right], \tag{1.21}$$

где $\boldsymbol{n}$—вектор с целочисленными положительными и отрицательными компонентами.

Уравнения (1.12) трансформируются в следующие:

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_j} = -i\varepsilon \sum_{n,\ m} n_j V_{nm} \exp\left[i\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\vartheta} - m\Omega t\right)\right], \\ \dot{\vartheta}_j &= \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j(I) + \varepsilon \sum_{n,\ m} \frac{\partial V_{nm}}{\partial I_j} \exp\left[i\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\vartheta} - m\Omega t\right)\right] \qquad (j = 1, \ldots, N), \end{aligned} \tag{1.22}$$

где $\omega_j(I) = \dfrac{\partial H(I)}{\partial I_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$. Последовательные приближения для уравнений (1.15) строятся так же, как и в одномерном случае. Вместо рядов (1.15) записываем

$$I_j = I_j^{(0)} + \varepsilon I_j^{(1)} + \ldots, \qquad \vartheta_j = \vartheta_j^{(1)} + \varepsilon \vartheta_j^{(1)} + \ldots \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{1.23}$$

Так же, как и ранее, можно в нулевом приближении положить

$$I_j^{(0)} = \text{const}, \quad \vartheta_j^{(0)} = \omega_j^{(0)} t + \text{const} \qquad (j = 1, \ldots, N), \tag{1.24}$$

где для сокращения записи положено $\omega_j^{(0)} = \omega_j(I^{(0)})$. Подставляя (1.24) в правую часть (1.22) и интегрируя по времени, получаем для первого приближения

$$I_j^{(1)} = -\sum_{n,\ m} \frac{n_j \tilde{V}_{nm}^{(0)}}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{\omega} - m\Omega} \exp\left[i\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\omega} - m\Omega\right)t\right]. \tag{1.25}$$

Это выражение аналогично (1.16) и также содержит знаменатель, который может обращаться в нуль, если выполнено условие резонанса

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\omega}(I_{(r)}) - m\Omega = 0. \tag{1.26}$$

Теперь выражение (1.26) принципиально отличается от (1.19), и это связано с тем, что число степеней свободы $N > 1$. Так же, как и ранее, при

$N=1$ возможны резонансы между системой и внешним возмущением. Однако резонансы возможны при $N \geqslant 2$ даже в случае, если возмущение вообще не зависит от времени. Тогда вместо (1.10) имеем

$$H=H_0(I_1, \ldots, I_N)+\varepsilon V(I_1, \vartheta_1; \ldots; I_N, \vartheta_N),$$

и в формулах (1.21), (1.22) и (1.25) достаточно просто положить $\Omega=0$ и ликвидировать суммирование по m. Условие резонанса (1.26) переходит в следующее:

$$n\omega = n_1\omega_1 + \ldots + n_N\omega_N = 0, \tag{1.27}$$

где аргументы в частотах ω_j для простоты опущены.

Уравнение (1.27) определяет резонансные торы, на которых траектории являются замкнутыми и, следовательно, не покрывают поверхность тора. Мы уже встречались с резонансным условием (см. (1.6.10)) и знаем, что оно создает трудности в определении инвариантных торов интегрируемых систем (см. (1.6.20)). Сейчас стало ясно, что то же условие (1.27) создает препятствие для построения теории возмущений. Его можно интерпретировать как внутренний резонанс в системе между ее различными степенями свободы. Например, условие

$$n_1\omega_1 - n_2\omega_2 = 0$$

означает соизмеримость частот колебаний соответственно по первой и второй степеням свободы.

Трудно придумать такую систему, в которой бы существовали инвариантные торы и отсутствовали резонансные торы. Поэтому явление резонанса внутреннего или внешнего является одним из фундаментальных понятий нелинейной физики. Мы остановимся на его исследовании ниже.

Резонанс волна — частица. Следующий пример очень полезен, так как позволяет элементарным путем убедиться в том, что недостатки используемого приближенного метода могут породить несуществующие трудности. Вернемся к примеру (6.21) из гл. 1, в котором заряженная частица движется в поле плоской волны:

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \cos(kx - \omega t). \tag{1.28}$$

Формула (1.6.22) показывает, что эта задача сводится к задаче о движении нелинейного маятника (§ 3 гл. 1), которая точно интегрируется. Попробуем посмотреть на уравнение (1.28) с точки зрения теории возмущений. Малость возмущения можно определить таким образом. Невозмущенная энергия частицы равна $mv^2/2$, а энергия возмущения (работа силы поля на длине порядка ширины потенциальной ямы $\sim 2\pi/k$) равна $2\pi eE_0/k$. Поэтому малым параметром задачи является величина

$$\varepsilon = 4\pi \frac{eE_0}{mv^2k} = 4\pi \frac{\omega_0^2}{k^2v^2}, \tag{1.29}$$

где $\omega_0^2 = eE_0k/m$ — частота малых колебаний частицы в потенциальной яме волны (см. (1.6.23)).

Если далее действовать по теории возмущений, то следует ввести переменные (v, x), играющие роль действия — угла, и записать для них разложение

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \ldots, \qquad x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \ldots$$

Поскольку $v^{(0)} = \text{const}$ (свободное движение при $\varepsilon = 0$), то $x^{(0)} = v^{(0)}t + \text{const}$, и резонансы означают, что

$$kv^{(0)} = \omega. \tag{1.30}$$

Условие (1.30) означает, что частица движется со скоростью $v^{(0)}$, равной

фазовой скорости волны $u=\omega/k$. При резонансе малость параметра возмущения (1.29) дает

$$\varepsilon = 4\pi(\omega_0/\omega)^2 \ll 1. \tag{1.31}$$

Таким образом, при условии (1.31) мы можем воспользоваться теорией возмущений, однако ее наивное применение сразу приводит к появлению резонансного знаменателя. В действительности ясно, что возникшая особенность фиктивная и является лишь отражением неумелого использования определенной техники.

Положение нельзя спасти, даже если выбрать более удобные переменные $(\dot{y}, y)$,

$$y = k(x - ut), \qquad \dot{y} = k(v - u),$$

приводящие к уравнению (1.6.22):

$$\ddot{y} = \omega_0^2 \cos y, \tag{1.32}$$

т. е. уравнению для маятника (если провести сдвиг на $\pi/2$: $y \to y - \pi/2$). Нулевое приближение для y означает

$$\ddot{y}^{(0)} = 0, \qquad \dot{y}^{(0)} = k(v^{(0)} - u), \qquad y^{(0)} = \dot{y}^{(0)} t + \text{const}$$

и условие резонанса, вытекающее из уравнения первого приближения,

$$\ddot{y}^{(1)} = \omega_0^2 \cos(\dot{y}^{(0)} t + \text{const}),$$

означает $\dot{y}^{(0)} = 0$, т. е. все то же условие (1.30). Однако условие малости возмущения теперь имеет совсем другой вид:

$$\varepsilon_y = \frac{\omega_0^2}{[\dot{y}^{(0)}]^2} = \frac{\omega_0^2}{k^2 (v^{(0)} - u)^2} \ll 1. \tag{1.33}$$

Во-первых, условие (1.33) означает малость энергии возмущающего потенциала по сравнению с энергией частицы, движущейся вместе с волной. Во-вторых, оно означает, что частица достаточно далека от резонанса, т. е. ее скорость $v^{(0)}$ должна отклоняться заметным образом от u. В этом случае все представляется вполне разумным. Ряд теории возмущений существует, и поправки вычислимы, а использование приближенного метода (там, где можно было решать задачу точно) ограничило естественным образом наши возможности.

Где мы не можем получить решение по теории возмущений? При колебаниях частицы в потенциальной яме в точках поворота скорость частицы обращается в нуль. Этому соответствуют точки, где $\dot{y}^{(0)} = 0$, т. е. $v^{(0)} = u$. Таким образом, «опасными» для теории возмущений по параметру ε_y являются окрестности точек поворота. Это сразу же означает, что по теории возмущений нельзя проинтегрировать задачу (1.28) на интервале времени большем, чем период колебаний в яме, т. е.

$$t < t_\varepsilon = 2\pi/\omega_0 \sim 1/\sqrt{\varepsilon}.$$

Рассмотренный элементарный пример достаточно хорошо проясняет некоторые общие «неудобные» места, возникающие при использовании теории возмущений. Мы видим, что может существовать некоторая форма регуляризации рядов, заключающаяся в подборе нужной замены переменных. Выше это выглядело как переход в другую систему отсчета.

Опрокидывание фронта волны. Рассмотренные выше примеры могут вселить некоторый пессимизм относительно возможности применения теории возмущений к нелинейным системам. При всей справедливости этого ощущения следует иметь в виду, что некоторые вопросы динамики решаются

именно с помощью теории возмущений, и ее применение часто приводит наиболее коротким путем к важным физическим следствиям.

Пусть, например, одномерный поток несжимаемой фазовой жидкости описывается макроскопическим уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{1.34}$$

где v—скорость потока вдоль некоторого направления x. Уравнение (1.34) соответствует свободному движению невзаимодействующих частиц. Пусть также в начальный момент времени задан некоторый профиль

$$v(x) \equiv v(x,\ t=0).$$

Нас будет интересовать изменение его со временем. По мере роста времени этот профиль перемещается. Поэтому можно говорить также о распространяющейся волне $v(x,\ t)$ и о ее форме.

При не очень больших временах изменение формы волны мало отличается от ее начальной формы $v(x)$. Поэтому естественно искать эти изменения в виде ряда по степеням отклонения от $v(x)$ или, как говорят, по степеням возмущения

$$v(x,\ t) = v^{(0)} + v^{(1)} + \ldots$$

В качестве нулевого приближения выберем $v^{(0)} = v(x)$. Уравнение (1.34), в частности, показывает, что

$$\left.\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0,} = v^{(0)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x},$$

т. е. эволюция волны должна происходить, так как производная по времени отлична от нуля. Уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)}\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + v^{(1)}\frac{dv^{(0)}}{dx} = 0. \tag{1.35}$$

Разложим $v^{(1)}$ в ряд Фурье

$$v^{(1)}(x,\ t) = \sum_k v_k e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.36}$$

и рассмотрим, как эволюционируют со временем гармоники с большими значениями k. Пусть L—характерный масштаб изменения $v(x)$. То, что мы называем большими k, означает условие $kL \gg 1$, т. е. длина волны возмущения очень мала по сравнению с размером начального профиля. Это позволяет не обращать внимания в уравнении (1.35) на зависимость $v^{(0)}$ и $dv^{(0)}/dx$ от x. Тогда для мелкомасштабной гармоники возмущения v_k получаем уравнение

$$\left[i(kv^{(0)} - \omega) + \frac{dv^{(0)}}{dx}\right] v_k = 0. \tag{1.37}$$

Уравнение (1.37) имеет нетривиальное решение с $v_k \neq 0$, если выражение в квадратных скобках обращается в нуль, т. е.

$$\omega \equiv \omega_k = kv^{(0)} - i\frac{dv^{(0)}}{dx}. \tag{1.38}$$

Формула (1.38) содержит большую информацию об эволюции волны.

Согласно (1.36) k-я гармоника возмущения ведет себя со временем следующим образом:

$$v_k^{(1)} = v_k \exp\left[i(kx - \omega_k t)\right] = v_k \exp\left[ikv^{(0)}t - \frac{dv^{(0)}}{dx}t\right]. \tag{1.39}$$

Первый член в показателе экспоненты связан просто с движением частиц со скоростью $v^{(0)}$, различной в разных точках пространства. Однако второе

слагаемое приводит уже совсем к нетривиальному результату. Возмущение может либо затухать со временем, либо нарастать в зависимости от знака $dv^{(0)}/dx$. Условием неустойчивости является

$$\frac{dv^{(0)}}{dx} < 0. \tag{1.40}$$

Остановимся на этом случае, так как именно он представляет главный интерес.

Рост со временем гармоник с большими значениями k означает, что в сумме (1.36) можно пренебречь теми членами разложения, которые растут

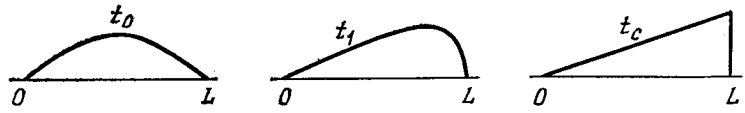


Рис. 2.4. Последовательное развитие опрокидывания фронта волны ($t_0 < t_1 < t_c$)

медленно или затухают. Поэтому наше приближение, заключающееся в использовании неравенства $kL \gg 1$, вполне оправдано в неустойчивой ситуации (1.40). Кроме того, рост v_k с большими значениями k означает, что в волне появляется тенденция к заострению профиля (рис. 2.4) и к ее опрокидыванию.

Таким образом, при условии (1.40) волна эволюционирует к опрокидыванию. Характерное время этого процесса определяется из (1.39) как время вырастания гармоники с максимальным инкрементом неустойчивости до величины порядка единицы, т. е.

$$t_c = 1/\max\left|\frac{dv(x)}{dx}\right|. \tag{1.41}$$

Мы еще неоднократно будем возвращаться к описанному явлению, особенно в части II. Здесь лишь ограничимся замечанием, что явление опрокидывания сопровождается появлением многозначности решения. Оно присуще широкому классу физических процессов, включающему и динамику областей фазового пространства, и гидродинамику, и различные астрофизические процессы.

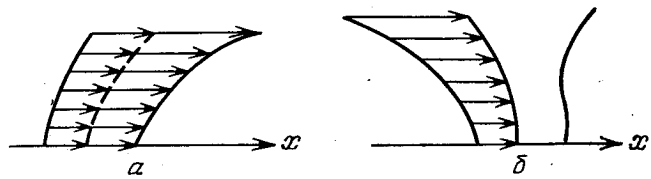


Рис. 2.5. Различие в эволюции профиля в зависимости от его угла наклона

Явление опрокидывания уже встречалось нам при описании расплывания фазовой капли (§ 2 гл. 1). Здесь его физический смысл тот же: частицы с большей скоростью стремятся опередить частицы, движущиеся с меньшей скоростью. В результате при $dv/dx > 0$ происходит сглаживание профиля (рис. 2.5*а*), а при $dv/dx < 0$ — увеличение $|dv/dx|$, причем

$$\left|\frac{dv}{dx}\right| \to \infty \tag{1.42}$$

(рис. 2.5*б*). Формула (1.42) и есть условие опрокидывания. То, что происходит после опрокидывания, до сих пор не удается описать — это представляет собой одну из больших загадок природы (ком. 2).

Замечание о степенных рядах. Мы рассмотрели примеры анализа некоторых задач, в которых получение физического результата было связано с использованием степенных рядов по малому параметру. Последние можно отнести к категории наивных. Более сложные вопросы, которые мы предъявляем к физическим системам, вынуждают обращаться и к более сложной

технике. Тем не менее физик очень редко может позволить себе отказаться от «прикрытия» каким-либо малым параметром. Как правило, такой параметр находится, если его достаточно хорошо поискать. Тогда возникает некоторое разложение по степеням малого параметра.

Таким образом, мы почти всегда оказываемся в тисках определенных разложений, и разнообразие наших возможностей связано с разнообразием нашей изобретательности при использовании рядов. Очень многие последующие примеры будут иллюстрацией этих слов. По существу, наш успех или неудача связаны с тем, насколько хорошо мы понимаем суть нелинейного явления, чтобы найти ему адекватную близкую реализацию, упрощающую исследование.

Поэтому не следует удивляться тому, что название ряда последующих разделов не будет содержать термина «теория возмущений», хотя речь в них будет идти именно о теории возмущений, однако в принципиально иной модификации, чем это было здесь.

§ 2. Метод усреднения

Правильнее было бы говорить «методы усреднения», так как существуют разные их варианты, хотя в основе всех их лежит одна и та же идея. Представим себе, что движение системы характеризуется двумя сильно различающимися временными масштабами — скажем, быстрые осцилляции и их медленный дрейф (рис. 2.6). Тогда можно по «быстрому» времени провести усреднение и получить новое описание системы, учитывающее только ее осредненную эволюцию. Малым параметром, по которому строится соответствующая теория возмущений, является отношение «быстрого» времени к «медленному» (ком. 3).

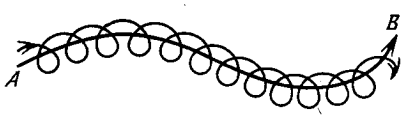


Рис. 2.6. Усредненная по быстрым осцилляциям траектория AB

Теорема об усреднении. Существует несколько форм этой теоремы. Приведем ту, которая наиболее удобна для наших целей.

Пусть $g(\vartheta)$ есть некоторая функция от переменных задачи, определенная на траектории движения.

Средним по времени называется величина

$$\bar{g} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\vartheta(t))\, dt. \tag{2.1}$$

Аналогично вводится среднее по фазе:

$$\ll g \gg = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N)\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_N. \tag{2.2}$$

Содержание теоремы об усреднении в следующем: если функция g достаточно «хорошая» и движение происходит на невырожденном торе, то

$$\bar{g} = \ll g \gg, \tag{2.3}$$

т. е. фазовое и временное средние равны (ком. 4).

Доказательство основано на теореме Лиувилля — Арнольда. Разложим $g(\vartheta)$ в ряд Фурье:

$$g(I, \vartheta) = \sum_n g_n(I) \exp(in\vartheta). \tag{2.4}$$

Поскольку движение происходит на инвариантном торе, то

$$I_j = \text{const}, \quad \vartheta_j = \omega_j t + \vartheta_{0j} \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{2.5}$$

Подставляем выражение для ϑ_j в (2.4) и применяем оператор усреднения (2.1):

$$\bar{g}(I)=\sum_n g_n(I)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\exp[i(n\omega t+n\vartheta_0)]=$$

$$=\sum_n g_n(I)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\exp[in(\omega T+\vartheta_0)]-1}{in\omega}. \qquad (2.6)$$

По условию тор является невырожденным, т. е. $n\omega\neq 0$. Отсюда

$$\bar{g}(I)=g_0(I),$$

где $g_0(I)$ — нулевая фурье-гармоника в разложении (2.4).

С другой стороны, можно сразу применить операцию усреднения (2.2) по фазе к выражению (2.4) и получить

$$\ll g(I,\ \vartheta)\gg=g_0(I),$$

что и доказывает теорему.

Эта несложная теорема позволяет находить усредненные уравнения и раскрывает одновременно некоторые слабые места метода усреднения. По-прежнему мы можем рассматривать систему только вдали от резонансов. Кроме того, реально всегда действия I_j не постоянны, а слабо эволюционируют со временем. Тогда в формуле (2.1) нельзя перейти к пределу $T\to\infty$, и операция усреднения ограничивается максимальным масштабом T_0. Это означает, что в правой части (2.6) члены с $n\neq 0$ не обращаются строго в нуль, а имеют порядок

$$\varepsilon_T=1/(\omega T_0), \qquad (2.7)$$

где ω — характерная частота задачи.

Усредненные уравнения. Теорема об усреднении приведена выше в форме, в которой ее удобно применять для систем, являющихся близкими к гамильтоновским. Такие системы можно записать в виде

$$\dot{I}=\varepsilon f(I,\ \vartheta),\qquad \dot{\vartheta}=\omega(T)+\varepsilon g(I,\ \vartheta), \qquad (2.8)$$

где $\varepsilon\ll 1$ есть малый параметр, вообще говоря, никак не связанный с параметром ε_T (2.7). Для простоты далее ограничиваемся случаем одной степени свободы ($N=1$).

Если система (2.8) гамильтоновская, то каноническая форма уравнений движения

$$\dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial\vartheta},\qquad \dot{\vartheta}=\frac{\partial H}{\partial I}$$

приводит к следующему соотношению между функциями f и g:

$$\frac{\partial f}{\partial I}+\frac{\partial g}{\partial\vartheta}=0. \qquad (2.9)$$

В общем случае это, однако, не требуется, и ограничение (2.9) можно не накладывать (ком. 5).

Применим теперь оператор усреднения (2.1) к системе (2.8). Согласно теореме об усреднении (2.3) для этого достаточно усреднить уравнения (2.8) по фазе ϑ. Имеем

$$\dot{\bar{I}}=\varepsilon\bar{f}(\bar{I}), \qquad (2.10)$$

где функция $\bar{f}$ получается из f усреднением по фазам (2.2), а $\bar{I}$ есть решение усредненного уравнения (2.10) с начальным условием

$$\bar{I}(0)=I(0).$$

Уравнение (2.10) сводится к квадратуре.

Основное достоинство метода усреднения по быстрой переменной заключается в его простоте, так как операцию усреднения можно выполнить достаточно легко. Однако в этом же и его главная трудность — как получить условие применимости процедуры усреднения. Одного лишь условия невырожденности инвариантных торов невозмущенной системы (в одномерном случае это означает, что частота ω не обращается в нуль) явно недостаточно. Еще одно (по крайней мере) ограничение связано со временем, в течение которого усреднение имеет смысл. Приведем элементарную оценку этого времени в рассмотренном одномерном случае (2.10).

Заметим предварительно, что при выполнении усреднения левой части первого уравнения (2.8) появляется «слабое» место. Усреднение идет по интервалу времени $\lesssim T_0$, определяющему характерное время медленного изменения действия I (см. замечание, приводящее к формуле (2.7)). Поэтому на интервале времени

$$\varepsilon t < T_0$$

изменения величины $\bar{I}$ не могут накопиться и, следовательно, отличие $\bar{I}$ от истинного значения I мало. Отсюда следует оценка

$$t < T_0/\varepsilon. \tag{2.11}$$

Она показывает, что применение метода усреднения оправдано, так как время применимости (2.11) существенно больше большого временного масштаба T_0 за счет малости ε.

Уравнение Ван дер Поля. Это — простое и часто обсуждаемое уравнение. На нем проще всего показать прием усреднения, который в дальнейшем будет встречаться в значительно более сложных задачах.

Вид уравнения

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x}(x^2/a_0^2 - 1) + \omega^2 x = 0 \tag{2.12}$$

представляет собой линейный осциллятор с частотой ω и с нелинейной силой трения. Она пропорциональна, как обычно, скорости $\dot{x}$ с коэффициентом трения γ и множителю, зависящему от того, больше или меньше смещение осциллятора, чем некоторая постоянная величина a_0.

Для того чтобы применять метод усреднения, надо найти быструю и медленную части движения. Колебания осциллятора с частотой ω будут соответствовать быстрому движению, по которому произведем усреднение. Медленное изменение энергии колебания из-за диссипативного члена будет соответствовать дрейфу системы.

В невозмущенном случае ($\gamma = 0$) введем переменные действие — угол:

$$x = (2I/\omega)^{1/2}\cos\vartheta, \quad \dot{x} = (2I\omega)^{1/2}\sin\vartheta,$$

и уравнение (2.12) в этих переменных принимает вид

$$\dot{I} = \frac{d}{dt}\frac{\omega^2x^2 + \dot{x}^2}{2\omega} = -\frac{\gamma}{\omega a_0^2}\dot{x}^2(x^2 - a_0^2).$$

Подставляя сюда формулы для x, $\dot{x}$ и усредняя по фазам, находим, опуская для простоты черту усреднения,

$$\dot{I} = -\varepsilon\omega\frac{I}{I_0}(I - I_0), \tag{2.13}$$

где введены малый параметр

$$\varepsilon = \gamma/\omega \tag{2.14}$$

и константа с размерностью действия

$$I_0 = 2\omega a_0^2.$$

Исследование уравнения (2.13) тривиально. У него два положения равновесия:

$$I_1 = 0, \quad I_2 = I_0.$$

В окрестности первого из них

$$\dot{I} \approx \varepsilon\omega I$$

и движение неустойчиво (действие растет). Точка $I_1 = 0$ называется неустойчивым фокусом (рис. 2.7). В окрестности второго положения равновесия

$$\dot{I} \approx -\varepsilon\omega (I - I_0)$$

и действие стремится к I_0. Этому значению действия соответствует некоторое периодическое движение — устойчивый предельный цикл (рис. 2.7). Если изменить знак γ, то предельный цикл станет неустойчивым, а фокус — устойчивым (рис. 2.8).

Вся конструкция решения имеет простую физическую интерпретацию. Действие равно площади, ограниченной на фазовой плоскости траекторией осциллятора, совершающего приблизительный цикл колебаний. При условии,

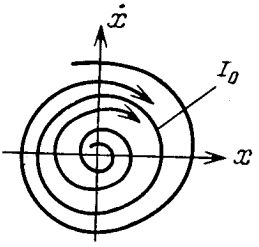


Рис. 2.7. Неустойчивый фокус и устойчивый предельный цикл

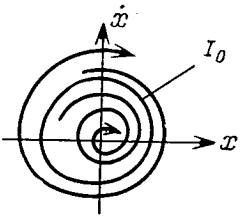


Рис. 2.8. Устойчивый фокус и неустойчивый предельный цикл

что параметр ε в (2.14) мал, траектория оказывается не замкнутой, но «щель» много меньше диаметра витка. Слабая диссипация приводит к медленному дрейфу витка в ту или иную сторону в зависимости от значений параметров.

Движение в быстропеременных полях. Если частица движется в поле, которое осциллирует с большой частотой ω, то можно провести усреднение по той части движения, которая «наведена» этим полем. Малым параметром задачи будет величина

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega T_0} \ll 1, \tag{2.15}$$

где T_0 — характерное время медленной динамики усредненного движения.

Очевидно, что влияние осциллирующего поля должно сказаться на медленной эволюции системы лишь во втором порядке, для того чтобы среднее по времени было отличным от нуля. Время усреднения T должно удовлетворять неравенству

$$2\pi/\omega \ll T \ll T_0.$$

Пусть, для простоты, система является гамильтоновской с одной степенью свободы, движущейся в потенциале $V(x)$ и под действием быстро осциллирующей силы

$$F = F_0(x) \cos \omega t.$$

Тогда уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} + F_0(x) \cos \omega t. \tag{2.16}$$

Идея усреднения в данном случае выглядит так (ком. 6). Представим решение (2.16) в виде

$$x = X + \xi, \tag{2.17}$$

где X есть медленно меняющаяся функция времени, которая мало отличается от решения при $F_0 = 0$, а ξ есть малая добавка, быстро осциллирующая и обусловленная влиянием силы F. Это означает, что усреднение выражения (2.17) дает

$$\bar{x} = X.$$

Подставляем (2.17) в (2.16) и разлагаем по ξ до второго порядка:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dV(X)}{dX} - \xi\frac{d^2V(X)}{dX^2} + F_0(X)\cos\omega t + \xi\frac{dF_0}{dX}\cos\omega t = 0. \tag{2.18}$$

Следующий шаг заключается в том, что быстро осциллирующие члены должны компенсироваться независимо от медленно меняющихся членов. Выделяем из (2.18) все члены, пропорциональные либо ξ, либо $\cos\omega t$. Это дает

$$m\ddot{\xi} + V''\xi = F_0\cos\omega t, \tag{2.19}$$

где штрих обозначает дифференцирование по X. Член

$$V''/m \sim 1/T_0^2,$$

а $\ddot{\xi} \sim \omega^2\xi$, так как нас интересует вынужденное решение уравнения (2.19). Поэтому согласно неравенству (2.15) достаточно написать

$$\xi = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t, \tag{2.20}$$

пренебрегая членом $V''\xi$.

Подставляем теперь (2.20) в (2.18) и усредняем по времени

$$m\ddot{X} = -\frac{dV}{dX} - \frac{1}{4m\omega^2}\frac{dF_0^2}{dX}.$$

Вводим эффективный потенциал

$$U = V + \frac{1}{4m\omega^2}F_0^2, \tag{2.21}$$

или, в более общей форме,

$$U = V + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{F^2}, \tag{2.22}$$

где черта обозначает усреднение по быстрым осцилляциям. Таким образом, медленное движение описывается гамильтоновской формой уравнений и

$$H(\dot{X}, X) = {}^1/_2 m\dot{X}^2 + U(X). \tag{2.23}$$

Сравнение (2.20) с дополнительным слагаемым в (2.21) показывает, что

$$U = V + {}^1/_2 m\overline{\dot{\xi}^2}, \tag{2.24}$$

т. е. потенциал перенормируется на среднюю кинетическую энергию дополнительного быстроосциллирующего движения. Результат достаточно ясен. Он получен в предположении

$$\xi_0 \ll X_0, \tag{2.25}$$

где ξ_0 и X_0 — характерные длины соответственно осцилляций и дрейфа. Используя (2.20), получаем

$$X_0 \gg F_0/(m\omega^2). \tag{2.26}$$

Это неравенство показывает, что поле F_0 может быть и большим. Важно, чтобы достаточно велика была частота ω.

За внешней непримечательностью формулы (2.26) скрыт очень важный физический вывод. Его происхождение связано с независимостью условий (2.15) и (2.25). Действительно, рассмотрим отношение энергии осциллирующего движения

$$U_\xi = {}^1/_2 m\overline{\dot{\xi}^2}$$

к энергии дрейфа V, используя какую-либо из формул (2.21)—(2.24):

$$\frac{U_\xi}{V} \sim \frac{m\overline{\dot{\xi}^2}}{V} \sim \left(\frac{F_0 T}{m\omega X_0}\right)^2 \sim \left(\frac{\xi_0}{X_0}\right)^2 (\omega T)^2 \equiv \delta. \tag{2.27}$$

Это означает, что искомое отношение δ равно произведению малого параметра на большой и может быть, вообще говоря, произвольным. В частности, возможно неравенство $U_\xi > V$ и, следовательно, фазовый портрет системы в быстроосциллирующем поле может существенно измениться.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих сделанное утверждение.

Маятник с осциллирующей точкой подвеса. Этот пример взят из книги Ландау и Лифшица [7]. Он наиболее нагляден для демонстрации изменений, к которым могут приводить быстроосциллирующие поля.

Обычный маятник описывается уравнением движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения его от оси y (рис. 2.9). Если точка подвеса маятника совершает вертикальные колебания с большой частотой ω и с амплитудой a, то сила, действующая на маятник, равна

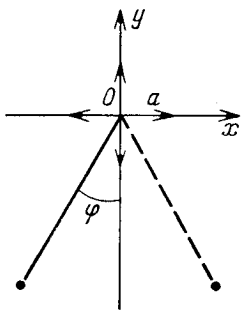


Рис. 2.9. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

$$F = -mla^2 \cos\omega t \cdot \sin\varphi \equiv F_0 \cos\omega t; \qquad F_0 = -mla^2 \sin\varphi.$$

Отсюда и из формулы (2.22) находим

$$U_\xi = {}^1/_4 mgl\,(a/l)^2\,(\omega/\omega_0)^2 \sin^2\varphi = mgl \cdot {}^1/_4 \delta \sin^2\varphi,$$

где безразмерный параметр δ введен в (2.27) и в данном случае равен

$$\delta = (a/l)^2\,(\omega/\omega_0)^2. \tag{2.28}$$

Таким образом, полная потенциальная энергия усредненного движения маятника равна

$$U(\varphi) = mgl\,(-\cos\varphi + {}^1/_4 \delta \sin^2\varphi). \tag{2.29}$$

Найдем положения равновесия маятника, т. е. точки φ_0, в которых $U'(\varphi_0) = 0$. Имеем

$$\sin\varphi_0\,(1 + {}^1/_2 \delta \cos\varphi_0) = 0.$$

Условие устойчивости положения равновесия означает $U''(\varphi_0) > 0$. Такими являются точки $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$, если выполнено неравенство

$$\delta > 2. \tag{2.30}$$

Итак, если частота ω достаточно велика, то маятник может совершать устойчивые колебания относительно вертикального положения. Высокочастотное поле создало потенциальную ямку на вершине невозмущенного потенциального горба (рис. 2.10). Два новых неустойчивых положения равновесия

возникли в точках φ_1, φ_2. Они определяются из уравнения

$$1 + {}^1/_2\delta \cos\varphi_{1,2} = 0,$$

которое имеет решения при том же условии (2.30).

Аналогично может быть рассмотрен случай, когда точка подвеса совершает горизонтальные осцилляции с теми же параметрами. Дополнительная сила равна [7]

$$F = mla\omega^2 \cos\omega t \cdot \cos\varphi,$$

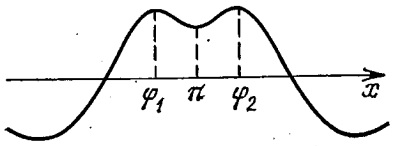


Рис. 2.10. Новое положение равновесия маятника ($x = \pi$)

и отсюда

$$U(\varphi) = mgl\,(-\cos\varphi + \delta\cos^2\varphi).$$

Так же, как и ранее, при $\delta < 2$ устойчиво только старое положение равновесия $\varphi_0 = 0$. При условии (2.30) возникают два новых положения равновесия, которые определяются уравнением

$$\cos\varphi_0 = 2/\delta.$$

Маятник может колебаться около некоторого положения равновесия, расположенного под углом к оси y.

Вихревой дрейф. Мы уже отмечали, что высокочастотное поле может сильно изменить фазовый портрет системы. Красивым примером тому может служить динамика заряженных частиц. В электростатических полях $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ заряды не имеют положения равновесия (теорема Ирншоу). Однако если поле совершает быстрые осцилляции, то такое положение может возникнуть [8]. Это происходит почти так же, как с маятником.

Запишем уравнение движения заряда в виде

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t), \tag{2.31}$$

где $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cos\omega t$. Представим координату заряда в виде (2.17):

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t). \tag{2.32}$$

Подставляем (2.32) в (2.31) и разлагаем по степеням ξ:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cos\omega t + \frac{e}{m}(\boldsymbol{\xi}\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cos\omega t. \tag{2.33}$$

Отсюда находим для быстрой компоненты движения

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{e}{m\omega^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cos\omega t. \tag{2.34}$$

Используя (2.34) и оставляя в (2.33) только старшие члены, получаем после усреднения по времени

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{e^2}{2m^2\omega^2}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}).$$

Учтем, что $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = 0$. Тогда можно ввести скалярный потенциал дрейфа, обусловленного осцилляционной частью поля,

$$\Phi(\boldsymbol{R}) = \frac{e^2}{4m\omega^2}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})]^2, \tag{2.35}$$

и переписать уравнение для $\boldsymbol{R}$:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{1}{m}\nabla\Phi = -\frac{e^2}{4m^2\omega^2}\nabla[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})]^2. \tag{2.36}$$

Уравнению (2.36) соответствует гамильтониан усредненного движения:

$$H(\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{R}) = {}^1/_2 m\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \Phi(\boldsymbol{R}). \tag{2.37}$$

Из формулы (2.36) следует, что частицы выталкиваются из области сильного поля в область слабого поля независимо от знака их заряда. Таким образом, в высокочастотном поле появляется реальная возможность создания конфигурации $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$, удерживающей частицы в некоторой области пространства (ком. 7).

В общем случае поле $\boldsymbol{E}$ зависит от времени более сложным образом. Представим силу $\boldsymbol{F}$ давления высокочастотного поля в следующей общей форме:

$$\boldsymbol{F} = \frac{e}{m}\overline{(\xi\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t)}, \tag{2.38}$$

где

$$\xi = \frac{e}{m}\int^{t} dt_1 \int^{t_1} dt_2\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t_2). \tag{2.39}$$

Из $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$ следуют такие же соотношения для ξ:

$$\operatorname{div}\xi = 0, \quad \operatorname{rot}\xi = 0.$$

Это позволяет преобразовать (2.38) к следующему виду:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\Phi - \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \tag{2.40}$$

где

$$\Phi = -\frac{e}{2m}\overline{(\xi\boldsymbol{E})}, \quad \boldsymbol{A} = -\frac{e}{2m}\overline{[\boldsymbol{E}\xi]}. \tag{2.41}$$

Выражение (2.40) показывает, что в результате усреднения векторных полей может возникнуть непотенциальная вихревая часть [10]. Это возможно, если векторный потенциал $\boldsymbol{A}$, определяемый формулой (2.41), отличен от нуля. Поскольку поле $\boldsymbol{E}$ потенциально, то это возможно лишь в случае, если поля $\boldsymbol{E}$ и ξ неколлинеарны.

Пусть поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t)$ определяется не одной частотой ω, как это было ранее, а несколькими частотами. Разложим $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t)$ в ряд:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = {}^1/_2 \sum_k (\overline{\boldsymbol{E}_k}(\boldsymbol{R})\, e^{i\omega_k t} + \text{к. с.}), \tag{2.42}$$

где к. с. означает члены, комплексно сопряженные предыдущим. Относительно частот ω_k будем предполагать, что все они велики, а их разности малы, т. е.

$$|\omega_{k_1} - \omega_{k_2}| \ll \omega_{k_1},\ \omega_{k_2}. \tag{2.43}$$

Кроме того, условие вещественности $\boldsymbol{E}$ означает

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}^*_{-k}, \quad \omega_{-k} = -\omega_k.$$

Подстановка (2.42) в (2.39) дает

$$\xi = -\frac{e}{4m}\sum_k \frac{1}{\omega_k^2}(\boldsymbol{E}_k e^{i\omega_k t} + \text{к. с.}). \tag{2.44}$$

Из (2.44) ясно, что при различных (хотя бы двух) частотах ω_k и неколлинеарности полей $\boldsymbol{E}_k$ векторы ξ и $\boldsymbol{E}$ также неколлинеарны, и должна возникнуть непотенциальная часть силы $\boldsymbol{F}$. Согласно (2.41) имеем

$$\Phi = \frac{e^2}{8m}\sum_{k_1,\ k_2} \frac{1}{\omega_k^2}(\boldsymbol{E}_{k_1}\boldsymbol{E}^*_{k_2} e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} + \text{к. с.}), \tag{2.45}$$

где учтено неравенство (2.43), и поэтому оставлены только медленно меняющиеся члены.

Если в разложении (2.42) есть только одна гармоника с номером k, то (2.45) переходит в (2.35). Значительно бо́льший интерес представляет выражение (2.41) для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$. Подставляем в него (2.42) и (2.44):

$$\boldsymbol{A}=\frac{e^2}{8m^2}\sum_{k_1,\,k_2}\frac{1}{\omega_k^2}([\boldsymbol{E}_{k_1}\boldsymbol{E}_{k_2}^*]e^{i(\omega_{k_1}-\omega_{k_2})t}+\text{к. с.}). \tag{2.46}$$

В случае одной частоты $[\boldsymbol{E}_k\boldsymbol{E}_k^*]=0$ и непотенциальный член отсутствует. Точно так же потенциал $\boldsymbol{A}$ обращается в нуль, если все $\boldsymbol{E}_k$ коллинеарны.

Итак, возмущающее высокочастотное поле привело к появлению специфического дрейфа частицы, содержащего вихревую часть. Соответствующую часть дрейфа будем называть вихревым дрейфом.

Последнее замечание раскрывает некоторую особенность метода усреднения — он является неканоническим. Поэтому, например, его применение может привести к решениям, топологически не эквивалентным решениям невозмущенной задачи.

§ 3. Адиабатические инварианты

Адиабатическое возмущение представляет собой другую крайность в конструкции динамической системы по отношению к рассмотренной в предыдущем параграфе. Это возмущение параметров системы, развивающееся крайне медленно и плавно с большим характерным временем и с высокой степенью аналитичности.

Классическим примером адиабатического процесса является маятник с медленно изменяющейся длиной $l(t)$. Условие адиабатичности изменения l имеет тот же вид, что и условие, необходимое для применения метода усреднения:

$$\omega T\gg 1,$$

однако теперь изменены роли для системы и возмущения. Здесь ω — характерная частота системы, а T — характерное время изменения ее параметров. Что будет происходить с маятником при изменении $l(t)$? Ответ на этот вопрос для линейных колебаний маятника был известен еще Эйнштейну [11]. Несмотря на то, что энергия E и частота маятника ω могут сильно меняться, величина

$$I=E/\omega \tag{3.1}$$

сохраняется с большой точностью. Это и есть адиабатический инвариант.

Адиабатические инварианты — это величины, сохраняющиеся с большой точностью при медленном изменении параметров системы. Как их определять и как находить точность, с которой они сохраняются? Решение этих вопросов представляет собой одну из красивейших и еще не законченных областей физики. С адиабатическими инвариантами связаны столь многочисленные результаты классической и квантовой физики, что трудно представить себе какую-либо область физики без этого понятия. Его появление относят к работам Больцмана и Эренфеста, а многие трудности в определении той степени, в которой адиабатический инвариант является инвариантом, не преодолены до сих пор (ком. 8).

Определение адиабатических инвариантов. Во-первых, это инварианты с некоторой степенью точности, хотя и очень высокой (экспоненциальной). Во-вторых, это величины, определенные только для гамильтоновских систем.

Пусть гамильтониан зависит от параметра μ:

$$H=H(p,\ q;\ \mu(t)), \tag{3.2}$$

который является медленно изменяющейся функцией времени t. Пусть также при $\mu=\text{const}$ движение системы финитно, т. е. траектория является обмоткой тора. Тогда в случае одной и двух степеней свободы ($N\leqslant 2$) адиаба-

тическими инвариантами являются действия I_k ($k=1$, 2 при $N=2$, либо индекс k можно опустить, если $N=1$), если только точка вырождения частот расположена достаточно далеко от действительной оси t.

Последнее замечание означает для $N=1$, что условие вырождения $\omega(t_0)=0$ может быть выполнено только при комплексном t_0 с достаточно большой мнимой частью t_0 (рис. 2.11). Аналогичное условие имеет место при $N=2$ для точек, где $\omega_{1,2}(t_0')=0$ и $\omega_1(t_0')=\omega_2(t_0')$.

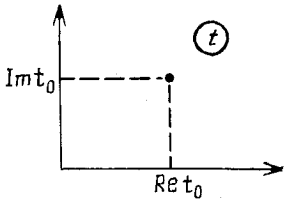


Рис. 2.11. Точка вырождения частоты в комплексной плоскости t

Если при $N\geqslant 3$ адиабатический инвариант существует, то им является действие, и частоты не вырождены.

Таким образом, первый интегральный инвариант непосредственно определяет величину адиабатического инварианта. Во всех случаях система должна быть достаточно далека от каких-либо резонансов. И, кроме того, число степеней свободы $N=2$ выделено.

Линейный случай также является особым по отношению к нелинейному. Если система далека от вырождения, т. е. никакие из уравнений

$$\omega_i(t)=\pm\omega_k(t) \qquad (i=1,\ \ldots,\ N) \tag{3.3}$$

не могут выполняться достаточно близко от действительной оси, то адиабатическими инвариантами являются действия I_k ($k=1,\ \ldots,\ N$), которые сохраняются с экспоненциальной точностью для любого N (ком. 9). Мы поймем смысл этих условий чуть позже при вычислении адиабатических инвариантов. Здесь важно только, что в линейном случае число $N=2$ ничем не выделено. Нелинейные системы ведут себя принципиально иначе, и мы сосредоточим свое внимание главным образом на них.

Усреднение уравнений. Вернемся к уравнению (3.1) для одной степени свободы ($N=1$). Тогда система совершает колебания с некоторой частотой. Зависимость параметра μ от t, по условию, предполагается медленной. Это означает, что

$$\varepsilon\equiv\frac{1}{\omega}\frac{d\ln\mu}{dt}\ll 1. \tag{3.4}$$

Перейдем от гамильтониана в форме (3.2) к гамильтониану от переменных $(I,\ \vartheta)$. Это делается следующим образом. Так же, как и при $\mu=\text{const}$ см. (1.2.7)), вводятся производящая функция

$$S(q,\ H,\ \mu)=\int^{q} p\,dq \tag{3.5}$$

и действие

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq, \tag{3.6}$$

где замыкание контура осуществляется так же, как и при $\mu=\text{const}$. Например, в случае линейного осциллятора с $\omega_0=\omega_0(t)$ имеем

$$p=[2m(H-{}^1/_2 m\omega_0^2 q^2)]^{1/2},$$

и точки поворота при интегрировании в (3.6) равны

$$q_{1,2}=\pm(2H/m\omega_0^2)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Поскольку ω_0 зависит от t, то зависят от времени и точки $q_{1,2}$. Однако это не мешает ввести определение (3.6) для I, так как определение контура производится не по времени, а в плоскости $(p,\ q)$ с помощью (3.7). Это замечание существенно, так как в действительности из-за дрейфа контур никогда не замыкается (рис. 2.12). Таким образом, формулы типа (3.7)

годятся для определения пути интегрирования в (3.6) независимо от того, является частота ω_0 постоянной величиной или функцией времени.

Место, в котором сказывается зависимость какого-либо параметра системы от t,—это не определения S и I, а новый гамильтониан, возникающий при переходе от переменных (p, q) к (I, ϑ). Он имеет вид

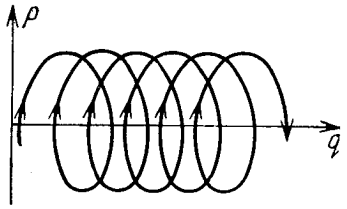


Рис. 2.12. Адиабатический дрейф

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.8}$$

Согласно (3.5) явная зависимость S от t возникает только через параметр μ. Поэтому (3.8) можно переписать в виде

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial \mu}\dot{\mu}. \tag{3.9}$$

Из определений (3.5) и (3.6) следует, что

$$H = H(I, \mu), \quad S = S(I, \vartheta, \mu).$$

Поэтому уравнения движения имеют каноническую форму, получаемую из (3.9):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vartheta} = -\dot{\mu}\frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta\, \partial \mu}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} = \omega(I, \mu) + \dot{\mu}\frac{\partial^2 S}{\partial I\, \partial \mu}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\omega(I, \mu) = \frac{\partial H(I, \mu)}{\partial I}. \tag{3.11}$$

Найденные формулы частично решают задачу. Гамильтоновский характер уравнений (3.10) приводит к тому, что в правой части уравнения для $\dot{I}$ стоит производная по фазе. Поэтому при усреднении этого уравнения по фазе правая часть обращается в нуль, и мы получаем

$$\overline{I} = \text{const} = \overline{I}(t = 0) = I(0). \tag{3.12}$$

Это и означает, что действие есть адиабатический инвариант, так как в течение очень большого времени различие между I и усредненным значением $\overline{I}$ отсутствует.

Изменение адиабатического инварианта. Полученный выше результат еще не дает возможности составить достаточно четкое представление о том, в какой мере и с какой точностью адиабатический инвариант является инвариантом. Можно было бы показать, что он сохраняется во всех порядках теории возмущений [14], а это означает, что его изменение ΔI меньше любой степени малого параметра ε, введенного в (3.4). Мы, однако, этого делать не будем, а сразу покажем, следуя [7], что ΔI экспоненциально мало. С этой целью определим изменение адиабатического инварианта

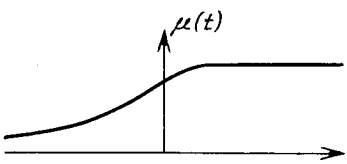


Рис. 2.13. Адиабатическое изменение параметра μ

$$\Delta I = I(t = +\infty) - I(t = -\infty)$$

и будем считать, что зависимость параметра μ (например, частоты малых колебаний ω_0) от t имеет вид, приведенный на рис. 2.13.

Разложим $S(I, \vartheta, \mu)$ в ряд Фурье по ϑ:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(I, \mu) e^{in\vartheta}, \quad S_{-n} = S_n^*. \tag{3.13}$$

Из первого уравнения (3.10) и (3.13) находим

$$\Delta I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \dot{\mu} \frac{\partial S_n(I, \mu)}{\partial \mu} e^{in\vartheta}. \tag{3.14}$$

Теперь можно поступать различными способами, и мы выберем наиболее простой из них.

Во-первых, заметим, что член с $n=0$ в сумме отсутствует. Это есть следствие того, что в уравнении (3.10) для $\dot{I}$ стоит производная по ϑ, т. е. следствие того, что переменная I канонически сопряжена циклической переменной ϑ.

Во-вторых, поправка в уравнении (3.10) для $\dot{\vartheta}$ пропорциональна $\dot{\mu}$. Поэтому ею можно пренебречь, если $\dot{\mu}$ достаточно мало и нет вырождения по частоте. Таким образом, можно считать, что

$$\vartheta \approx \omega t + \vartheta_0.$$

В-третьих, все подынтегральное выражение в (3.14), за исключением множителя $\exp(in\vartheta)$, является медленно меняющейся интегрируемой функцией t.

Этого достаточно для того, чтобы сразу написать ответ. Как уже не раз нам встречалось, выражение (3.14) есть фурье-образ от медленно меняющейся функции. Поэтому

$$\Delta I \sim \exp(-c_1 \omega T_0) \sim \exp(-c_2/\varepsilon), \tag{3.15}$$

где константы c_1, $c_2 \sim 1$ и T_0 есть характерное время изменения параметра μ. Это время по порядку величины равно расстоянию особенности медленной функции $\mu(t)$ до действительной оси (см. рис. 2.11).

Поскольку выражение (3.15) экспоненциально мало, то ясно, что в сумме по n в формуле (3.14) следует оставить только члены с $n=\pm 1$. Теперь

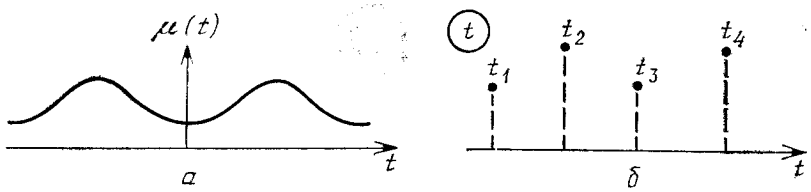


Рис. 2.14. Немонотонное изменение адиабатического параметра ($а$) и его особенности в комплексной плоскости t ($б$)

мы видим, какова роль условия отсутствия нулей функции $\omega(I, \mu)$ достаточно близко от действительной оси, так как в противном случае экспоненту $\exp(in\vartheta)$ нельзя было бы считать быстроосциллирующей.

Адиабатические инварианты при $N \geqslant 2$. То, что мы рассмотрели выше, относилось не только к одной степени свободы, но и к виду зависимости медленного параметра μ от времени, приведенной на рис. 2.13. Этот специальный вид заключался в весьма нетривиальном предположении: достаточно близко к действительной оси имеется только одна особенность с мнимой частью $\sim T_0$. Все же остальные особенности расположены намного дальше, и их вкладом в (3.14) можно пренебречь.

Представим теперь, что существует r таких особых точек t_k подынтегральной функции в (3.14) (кроме экспоненты), что

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} t_k \approx \text{const} \equiv T_0 \qquad (k=1, \ldots, r), \\ &\operatorname{Re} t_{k+1} - \operatorname{Re} t_k \approx \text{const} \equiv 2\pi/\nu \gg T_0 \qquad (k=1, \ldots, r), \end{aligned} \tag{3.16}$$

как это изображено на рис. 2.14. Тогда совершенно очевидно, что

$$\Delta I \sim r \exp(-\text{const}/\varepsilon) \tag{3.17}$$

и при больших r изменение действия может стать далеко не малым.

Осталось сделать совсем небольшой шаг, чтобы понять, что если зависимость $\mu(t)$ является периодической,

$$\mu(t+2\pi/\nu)=\mu(t),$$

то изменение действия может быть не только сколь угодно большим, но и бесконечным (для линейной системы). Это и есть то, что называют параметрическим резонансом, который в данном случае происходит на очень малых частотах ν.

Существенное отличие нелинейной системы от линейной в следующем. По мере накопления изменения действия δI при продвижении вдоль действительной оси t начинается деформация частоты $\omega(I, \mu)$. Если, например, с ростом I частота растет, то парциальные вклады от особенностей уменьшаются согласно (3.15), и полное изменение действия ΔI стремится к постоянному пределу. Возможны, конечно, и другие ситуации, однако в линейном случае частота не зависит от I, и поэтому параметрический резонанс всегда приводит к неустойчивости даже при выполнении условия адиабатичности (3.4).

Эти простые рассуждения позволяют понять, что может происходить в многомерном случае ($N \geqslant 2$).

Пусть в гамильтониане (3.2) $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — N-мерные векторы и пусть при любом зафиксированном значении μ существует инвариантный N-мерный тор. Будем также предполагать невырожденность системы, исключающей как резонансы типа (3.3), так и резонансы более высокого порядка. В этом случае также можно совершить переход от переменных $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ к переменным $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\vartheta})$. Гамильтониан в новых переменных имеет форму (3.9), в которой, однако, I и ϑ надо считать N-мерными векторами. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vartheta_j} = -\dot{\mu}\frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta_j\, \partial \mu}, \\ \dot{\vartheta}_j &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_j} = \omega_j(\boldsymbol{I}, \mu) + \dot{\mu}\frac{\partial^2 S}{\partial I_j\, \partial \mu} \qquad (j=1, \ldots, N). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь, как и ранее, можно произвести усреднение по фазам ϑ_j и получить

$$\dot{I}_j = \text{const} = \overline{I}_j(t=0) = I_j \qquad (j=1, \ldots, N), \tag{3.19}$$

т. е. N действий являются адиабатическими инвариантами (ком. 10).

Нарушение адиабатической инвариантности. Мы уже, однако, знаем, что получение выражения для адиабатических инвариантов может быть гораздо более легкой задачей, чем определение условий, при которых этот вывод справедлив. Укажем здесь на две возможные ситуации, которые могут привести к большим изменениям величины

$$\Delta I_j = I_j(t=+\infty) - I_j(t=-\infty) \qquad (j=1, \ldots, N)$$

и тем самым нарушить адиабатическую инвариантность действия.

Пусть сначала $N=2$ и частоты ω_1 и ω_2 сильно различаются. Примем для определенности $\omega_1 \gg \omega_2$. Рассмотрим систему (3.18) для $j=1$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= f_1(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \mu), \\ \dot{\vartheta}_1 &= \omega_1(I_1, I_2, \mu) + g_1(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \mu). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Что касается второй степени свободы, то ее частота очень мала. Если в уравнении

$$\dot{\vartheta}_2 = \omega_2(I_1, I_2, \mu) + g_2(I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \mu)$$

можно в первом приближении пренебречь членом g_2 и посчитать

$$\vartheta_2 = \omega_2 t + \text{const},$$

то это означает, что в правых частях (3.20) стоят медленные, но периодические функции времени.

Теперь разберемся с временами задачи. Условие адиабатичности означает выполнение двух неравенств:

$$\omega_1 T_0 \gg 1, \quad \omega_2 T_0 \gg 1.$$

Поэтому на временах $\sim T_0$ происходит много осцилляций по второй степени свободы. Следовательно, в изменении ΔI_1 может возникнуть большой вклад от этих осцилляций, если, например, выполнено условие

$$\omega_1/\omega_2 \ll \omega_2 T_0. \tag{3.21}$$

Объясним подробнее это неравенство, используя рассуждения, приводящие к формуле (3.17).

В рассматриваемом случае имеем

$$\varepsilon = \omega_2/\omega_1,$$

так как вторая степень свободы, рассматриваемая как внешняя сила, имеет характерное время $1/\omega_2$. Число таких осцилляций за время $\sim T_0$ дает

$$r \sim \omega_2 T_0.$$

Подстановка r и ε в (3.17) и приводит к неравенству (3.21).

Другая причина возникновения больших изменений ΔI является более обширной и более универсальной. Начнем снова с $N=2$, и пусть, для простоты,

$$\omega_1 = \omega_1(I_1), \quad \omega_2 = \omega_2(I_2). \tag{3.22}$$

Рассмотрим поверхность постоянной энергии $H = \text{const}$ и условие резонанса

$$n_1\omega_1(I_1^{(r)}) = n_2\omega_2(I_2^{(r)}), \tag{3.23}$$

где n_1, n_2—целые числа. Можно исключить, например, I_2, выразив его через H и I_1. Это дает вместо (3.22):

$$\omega_2(I_2) = \omega_2(H, I_1). \tag{3.24}$$

Наконец, из (3.22) и (3.24) исключаем I_1 и выражаем ω_1 как функцию ω_2:

$$\omega_1 = \omega_1(\omega_2, H). \tag{3.25}$$

Формула (3.24) на плоскости (ω_1, ω_2) имеет вид некоторой кривой (рис. 2.15). Условию резонанса (3.23) соответствует на плоскости (ω_1, ω_2) семейство прямых

$$\omega_1 = (n_2/n_1)\,\omega_1$$

с различными наклонами n_1/n_2. Точки их пересечения с кривой (3.25) и являются решениями уравнения (3.23). В действительности опасными будут не только резонансы, но и некоторая область в их окрестности (рис. 2.15).

При $N > 2$ топология резонансов резко меняется. Например, при $N=3$ различным резонансам соответствуют уже не точки, а кривые (рис. 2.16), и опасная область представляет собой систему каналов, покрывающую всю гиперповерхность постоянной энергии. При $N > 3$ система каналов обладает тем же свойством. Все это является отражением того факта, что при $N=2$ инвариантные торы делят пространство и пересекаются при $N > 2$ (§ 6 гл. 1).

Отмеченный топологический эффект сразу приводит к необычайно важному следствию для анализа устойчивости системы: попав даже в сколь угодно узкий резонансный канал, система может уйти сколь угодно далеко на поверхности постоянной энергии для $N > 2$ и не может этого сделать при $N \leqslant 2$. Эти соображения были открыты Арнольдом (см. [5, 6]) и легли в основу явления диффузии Арнольда, которая будет рассмотрена позднее.

Теперь следует заметить, что при $N \geqslant 2$ все фазовое пространство покрыто областями или каналами, зацепленными с какими-либо резонансами. Первый из отмеченных случаев фактически тоже сводится к резонансу высо-

кого порядка. Действительно, справа в условии (3.21) стоит большое число, которое можно с огромной точностью аппроксимировать рациональным числом. Поэтому в многочастотных системах изменение параметра μ со временем может привести к прохождению системы через резонансы и, как следствие, к возможности ее ухода достаточно далеко. Для этого необходимо лишь, чтобы начальные условия системы попадали в некоторые специальные очень сложно устроенные малые области (ком. 11).

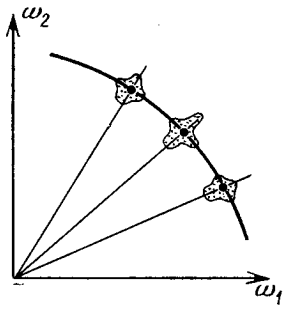


Рис. 2.15. Резонансные точки при $N=2$ и «опасные» области в их окрестности

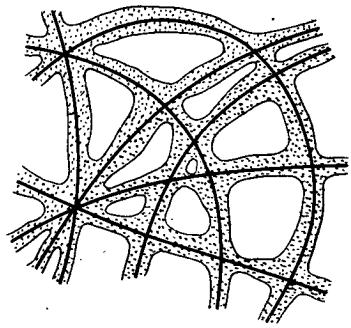


Рис. 2.16. Резонансные кривые при $N=3$ и опасная область

Почти адиабатические инварианты. В связи со сделанными замечаниями для многочастотных систем ($N \geqslant 2$) можно ввести лишь понятие «почти адиабатических инвариантов», принадлежащее Арнольду [5]: действия $(I_1, \ldots, I_N)$ являются почти адиабатическими инвариантами невырожденной гамильтоновской системы, т. е. их изменения малы для множества начальных условий, представляющего собой все фазовое пространство, за исключением некоторого множества малой меры.

§ 4. Заряженные частицы в магнитном поле

Динамика частиц в магнитном поле относится к числу классических задач. Интерес к проблеме сохранения адиабатического инварианта в немалой степени стимулировался попытками ответить на вопрос о возможности удержания частиц в магнитных ловушках. Магнитные ловушки существуют в радиационных поясах и создаются в лабораториях. Движение заряженных частиц в магнитных полях различных конфигураций приводит к одной из наиболее типичных задач для приложения метода усреднения, который называется здесь дрейфовым приближением (ком. 12).

Дрейфовое приближение. Частица в магнитном поле движется под действием силы Лоренца:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]. \tag{4.1}$$

Если поле $\boldsymbol{H}$ постоянно, то траектории частиц имеют вид спирали (рис. 2.17). Скорость частиц вдоль $\boldsymbol{H}$ сохраняется, а в перпендикулярной к $\boldsymbol{H}$ плоскости происходит вращение с так называемой ларморовской частотой

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}.$$

Пусть $\boldsymbol{H}$ направлено вдоль z. Что произойдет с траекторией частицы, если поле $\boldsymbol{H}$ слабо неоднородно, скажем, в направлении x, т. е. $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x)$? Простые соображения показывают, что траектория частицы как целое начнет смещаться вдоль оси y. Для этого рассмотрим плоскость (x, y), и пусть для

наглядности магнитное поле при $x < 0$ равно H_1, а при $x > 0$ равно $H_2 > H_1$ (рис. 2.18). Само магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка. Траектория частицы в плоскости (x, y) будет состоять из двух полуокружностей, причем справа ларморовский радиус $\rho = v_\perp/\omega_H$ будет меньше, чем слева:

$$v_\perp/\omega_{H_1} < v_\perp/\omega_{H_2}. \tag{4.2}$$

Вследствие неравенства (4.2) траектория частицы не замыкается и возникает следующий виток. При каждом обороте частица описывает петлю и передвигается на некоторое расстояние Δy вдоль оси y. После нескольких оборотов становится ясно, что траектория частицы в плоскости (x, y) представляет собой дорожку, сплетенную из петель и удлиняющуюся в направлении y. Это и есть дрейф частицы.

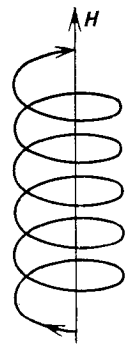


Рис. 2.17. Движение под действием силы Лоренца

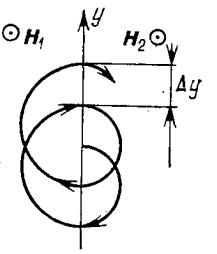


Рис. 2.18. Причина появления дрейфа в неоднородном поле

Теперь становится очевидным, что для того чтобы описать дрейф, вовсе не обязательно выписывать все петли траектории. Достаточно описать только усредненное по ларморовскому вращению движение. Эта процедура эквивалентна тому, что мы следим только за движением центра ларморовского кружка. В этом усреднении и заключается суть дрейфового приближения, а малым параметром задачи является условие слабой неоднородности магнитного поля:

$$\varepsilon = \rho \frac{d \ln H}{dx} \ll 1. \tag{4.3}$$

Точное выписывание усредненных уравнений очень громоздко. Изберем более наглядный путь. Смещение центра кружка с координатой y происходит на величину Δy с частотой $\approx \omega_H$. Поэтому сила, приводящая к этому смещению, равна

$$F = {}^1/_2 m\omega_H^2 \Delta y.$$

С другой стороны, из (4.2) следует

$$\Delta y = -\frac{v_\perp}{\omega_H}\frac{\Delta H}{H} = -\frac{v_\perp}{\omega_H}\frac{dH}{dx}\frac{\rho}{H}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mv_\perp^2}{2H}\frac{dH}{dx}$$

или

$$\boldsymbol{F} = -\mu \nabla H, \tag{4.4}$$

где введен магнитный момент

$$\mu = mv_\perp^2/2H. \tag{4.5}$$

Сама дрейфовая скорость направлена вдоль вектора $[\boldsymbol{FH}]$, т. е. согласно (4.4)

$$m\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\mu}{\omega_H}\left[\frac{\boldsymbol{H}}{H}\left[\frac{\nabla H}{H}\right]\right], \tag{4.6}$$

где $\boldsymbol{R}$ — координата ларморовского центра в плоскости (x, y).

Аналогично можно описать дрейф частицы, если имеется неоднородность магнитного поля вдоль оси z (рис. 2.19). При искривлении силовой линии частица продолжает двигаться по спирали, которая теперь слабо изогнута, повторяя ход силовой линии. Изгибание приводит к появлению центробежной силы, которая тоже равна силе F (4.4).

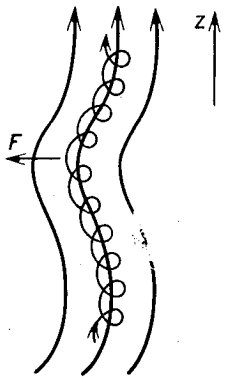


Рис. 2.19. Дрейф из-за продольной неоднородности магнитного поля

Адиабатические инварианты. Слабая неоднородность магнитного поля порождает мало изменяющиеся адиабатические инварианты. Новое для нас здесь то, что раньше адиабатические инварианты возникали при слабой зависимости параметров системы от времени. Теперь время заменяется пространственной координатой. Эти замены, с точки зрения условия медленности изменения параметров, эквивалентны, так как для силовых полей

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v\nabla) \tag{4.7}$$

и временной и пространственные градиенты связаны линейно.

Пусть для определенности частица движется в системе, называемой магнитной ловушкой (рис. 2.20), и пусть она аксиально-симметрична относительно z.

Динамика частицы характеризуется двумя степенями свободы: колебаниями перпендикулярно оси z, т. е. ларморовским вращением, и колебаниями

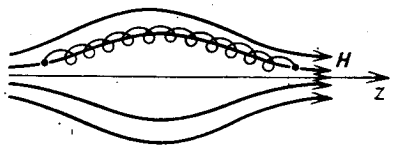


Рис. 2.20. Магнитная ловушка

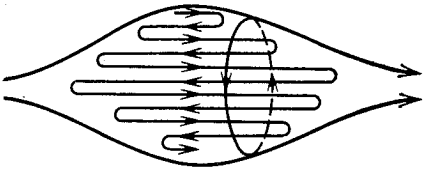


Рис. 2.21. Поперечный дрейф в магнитной ловушке

вдоль z. Эти движения разделяются. Поэтому для действий можно записать просто

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k \, dq_k \qquad (k = 1, 2).$$

Для ларморовского вращения

$$p = mv_\perp, \qquad dq = \rho \, d\vartheta,$$

где ϑ—фаза вращения. Отсюда

$$I_1 = mv_\perp \rho = \frac{2}{emc} \mu, \tag{4.8}$$

т. е. магнитный момент (4.5) является адиабатическим инвариантом и сохраняется. Его можно записать по-другому:

$$\mu = \pi \rho^2 \frac{H}{2\pi} \frac{e^2}{mc^2}, \tag{4.9}$$

что означает сохранение магнитного потока через ларморовский кружок.

Второе действие связано с продольными колебаниями частицы из-за отражения от магнитных зеркал, запирающих ловушку:

$$I_2 = \oint p_\parallel dl,$$

где $p_\parallel$ — компонента импульса вдоль z и интеграл берется между точками отражения от магнитных зеркал (точками поворота).

Сила Лоренца (4.1) сохраняет полную энергию частицы. Поэтому

$$E = {}^1/_2 m v_\perp^2 + {}^1/_2 m v_\parallel^2 \equiv E_\perp + E_\parallel = \text{const}.$$

Из соотношений (4.8) и (4.9) видно, что

$$E_\perp = \mu H. \tag{4.10}$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{E - \mu H}\, dl$$

и легко вычисляется при заданной функции $H(\boldsymbol{r})$.

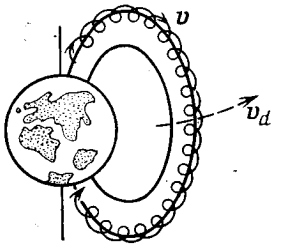


Рис. 2.22. Движение частицы в магнитном поле Земли

Иногда можно говорить и о третьем адиабатическом инварианте, порождаемом финитным дрейфом поперек силовой линии магнитного поля. В магнитной ловушке на рис. 2.21 траектория частицы дрейфует вдоль магнитного пояска. Всеми аналогичными свойствами может обладать движение электронов и протонов в радиационных поясах Земли (рис. 2.22). В этом случае электроны дрейфуют с запада на восток, а ионы — в обратном направлении (ком. 13).

§ 5. Линейные аналогии адиабатической инвариантности

Проблема существования и точности адиабатических инвариантов является не только задачей теории динамических систем. Она имеет многочисленные аналоги в других областях физики. Мы укажем здесь только два из них, пользуясь линейными моделями. Это позволит получить более наглядное представление об общности различных физических задач (ком. 14).

Линейный осциллятор с переменной частотой. В случае одной степени свободы задача об изменении адиабатического инварианта линейного осциллятора имеет следующую постановку. Рассмотрим гамильтониан

$$H = {}^1/_2 \dot{x}^2 + {}^1/_2 \omega^2(t)\, x^2, \tag{5.1}$$

где масса частицы положена равной единице. В нем частота $\omega(t)$ является плавной функцией времени. Это может быть такая же функция, как на рис. 2.13 для параметра адиабатичности $\mu\ (t)$. Выберем здесь, например, такой вид, который приведен на рис. 2.23. Функция $\omega^2(t)$ является аналитической и не проходит через нуль. Условие ее медленного изменения имеет вид

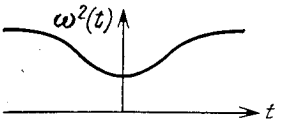


Рис. 2.23. Зависимость частоты осциллятора от времени

$$\dot{x}/x \gg \dot{\omega}/\omega.$$

Поскольку $\dot{x} \sim \omega x$, то это условие эквивалентно следующему:

$$\varepsilon \equiv \dot{\omega}/\omega^2 \ll 1. \tag{5.2}$$

Из гамильтониана (5.1) получаем уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0. \tag{5.3}$$

Условие медленности (5.2) позволяет записать приближенные базисные решения для (5.3) в виде

$$x_\pm = \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left\{\pm i \int_0^t \omega(t')\, dt'\right\}. \tag{5.4}$$

Это так называемое ВКБ (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна)-приближение (см., например, [17]). Оно представляет собой главный член асимптотического ряда по степеням параметра ε.

Общее решение уравнения (5.3) имеет вид

$$x = Ax_+ + Bx_- \tag{5.5}$$

и определяется с точностью до коэффициента. Поэтому без ограничения общности положим

$$x(t \to +\infty) = d \cdot x_+, \qquad x(t \to -\infty) = x_+ + rx_-. \tag{5.6}$$

Записав решение в произвольной комплексной форме, обратим внимание на тождество

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}x^* - \dot{x}^*x) = 0,$$

которое проверяется непосредственно с помощью уравнения движения (5.3). Из него следует соотношение

$$\dot{x}x^* - \dot{x}^*x = \text{const} = \text{inv}. \tag{5.7}$$

Инвариант (5.7) выражает теорему Лиувилля для комплексного представления решения, например в виде (5.5). Оно есть следствие линейности задачи. Каждое из базисных решений x_+, x_- можно представлять как волну плотности, распространяющуюся соответственно вправо или влево вдоль оси t. Тогда согласно (5.6) можно интерпретировать $R = |r|^2$ как коэффициент отражения, а $D = |d|^2$ — как коэффициент прохождения. Из (5.7) и (5.4) следует, что

$$R + D = |r|^2 + |d|^2 = 1. \tag{5.8}$$

Необходимо еще одно вспомогательное соотношение. Из определения действия для линейного осциллятора $I = E/\omega$ следует, что

$$I(t \to +\infty) = |d|^2 = D = \omega |x(t \to \infty)|^2.$$

Введем, как прежде, изменение адиабатического инварианта:

$$\Delta I = I(t \to +\infty) - I(t \to -\infty).$$

Если ΔI мало́, то D мало отличается от единицы. В силу (5.8) это означает, что R мало́. Поэтому

$$I(t \to -\infty) = \omega |x(t \to -\infty)|^2 \approx 1 + 2\,\mathrm{Re}\, r.$$

Отсюда

$$\Delta I \sim |r|, \tag{5.9}$$

так как D отличается от единицы во втором порядке по ΔI.

Итак, задача свелась к определению коэффициента отражения в соответствующей волновой интерпретации (ком. 15).

Квантовомеханическая аналогия. Введение комплексного решения (5.5), комплексных амплитуд d и r, да и всей волновой терминологии, которой мы пользовались выше, сделано преднамеренно для того, чтобы показать полную эквивалентность задачи о надбарьерном отражении в квантовой механике задаче об изменении адиабатического инварианта линейного осциллятора (ком. 16).

Чтобы убедиться в этом, достаточно совсем немногого — записать уравнение Шредингера с соответствующей формой потенциала:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (E - V(y))\psi = 0. \tag{5.10}$$

Здесь ψ — волновая функция; переменная y связана с координатой x соотношением

$$y = x(2m/\hbar^2)^{1/2};$$

$V(y)$ — потенциал в форме, приведенной на рис. 2.24. Эквивалентность уравнений (5.10) и (5.3) очевидна. Ей соответствуют замены

$$\psi \to x, \quad y \to t, \quad p \to \omega,$$

где

$$p^2(y) = E - V(y) \tag{5.11}$$

и p — импульс частицы в системе единиц, в которой $2m/\hbar^2 = 1$.

Из рис. 2.24 видно, что соотношение между E и $V(y)$ соответствует прохождению частицы над барьером. Теперь мы можем пойти дальше в развитии аналогии. Мы в состоянии достаточно легко объяснить причины надбарьерного отражения, а следовательно, и несохранения адиабатического инварианта. Как далеко бы ни двигалась частица над потенциальным барьером, ψ-волна, соответствующая ей и неограниченная в пространстве, всегда дифрагирует на любом потенциальном барьере. Следовательно, она рассеивается и обязательно $r \neq 0$. Это, согласно (5.9), сразу означает изменение адиабатического инварианта.

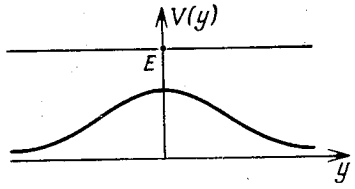


Рис. 2.24. Потенциал и энергетический уровень для уравнения Шредингера

Обход особенностей в комплексной плоскости. Нам осталось лишь непосредственное вычисление ΔI. Здесь можно сослаться на § 3 гл. 2, но можно предложить и более совершенную технику, которая хороша именно в данной ситуации. Это вариант метода Цвана (см., например, [17]).

Рассмотрим комплексную плоскость t. Положим, что в некоторой достаточно большой области t' зависимость $\omega^2(t)$ можно аппроксимировать параболой:

$$\omega^2(t) \sim a + bt^2 \tag{5.12}$$

(см. рис. 2.23). Введем фазу

$$S = \int_0^t \omega(t')\,dt' \tag{5.13}$$

как функцию комплексной переменной t. Величина $\omega^2(t)$ на действительной оси нигде не обращается в нуль. Как видно из (5.12), нулями ω являются точки

$$t_0 = \pm i\sqrt{a/b}. \tag{5.14}$$

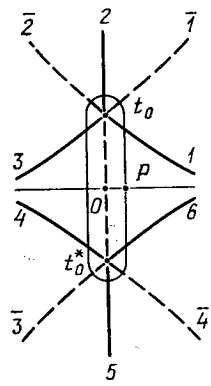


Рис. 2.25. Картина линий уровня (сплошные кривые) для случая надбарьерного отражения

Аппроксимация (5.12) и формулы (5.14) позволяют на плоскости комплексного t начертить линии уровня, где фаза S действительная, и линии, где фаза S — чисто мнимая. На рис. 2.25 это линии *1*, *6* и $\bar{1}$, $\bar{4}$ соответственно. Точки t_0 и t_0^* — нули фазы (5.14). Соединим их разрезом $[t_0, t_0^*]$.

Чтобы убедиться, что линии уровня идут именно так, как это нарисовано, достаточно представить

$$\omega^2(t) = b(t - t_0)(t - t_0^*)$$

и проинтегрировать $\omega(t)$ в окрестности какой-либо из точек t_0, t_0^*. Это дает,

например, возле t_0

$$S = {}^2/_3 b (t_0 - t_0^*)^{1/2} (t - t_0)^{3/2}.$$

Представляем также

$$t - t_0 = |t - t_0| e^{i\varphi}.$$

Отсюда $\operatorname{Im} S = 0$, если

$$e^{{}^3/_2 i\varphi} = \pm 1,$$

или

$${}^3/_2 \varphi = 0, \ \pi, \ \ldots$$

Таким образом, углы, где S действительно, равны

$$\varphi = 0, \ {}^2/_3\pi, \ {}^4/_3\pi. \tag{5.15}$$

Формула (5.15) доказывает структуру линий уровня на рис. 2.25.

Объясним теперь, зачем это понадобилось. На линиях уровня (5.15) оба решения $x_\pm$ выступают равноправно, так как они одного порядка. Однако при переходе через штриховые линии одно из решений экспоненциально затухает. Это означает, что, совершая обход в комплексной плоскости и пересекая штриховую линию, мы теряем информацию о коэффициенте при затухающем решении. Действительно, писать вообще это решение с каким бы то ни было коэффициентом явилось бы превышением точности. Само такое решение экспоненциально мало и, следовательно, меньше любой степени ε, с точностью до которой пишется другое решение.

С помощью приобретенной информации легко установить, что на линиях $\overline{1}$, $\overline{3}$ $x_- \gg x_+$, а на линиях $\overline{2}$, $\overline{4}$ $x_+ \gg x_-$.

Пусть теперь на действительной оси в точке P (рис. 2.25) решение представлено в виде

$$x = A_1 x_+ + B_1 x_-. \tag{5.16}$$

Обозначим

$$2\delta = i \oint \omega(t) dt, \tag{5.17}$$

где интеграл берется по замкнутому контуру, охватывающему разрез $[t_0, t_0^*]$. Очевидно, что δ — действительное, так как t_0 — чисто мнимое.

Сместим начало отсчета из $t = 0$ в t_0 и перейдем на линию уровня *1*. На ней коэффициенты при $x_\pm$ соответственно равны

$$A_1' = A_1 e^{-\delta/2}, \quad B_1' = B_1 e^{\delta/2}. \tag{5.18}$$

На линии *2* запишем

$$A_2 = A_1' + \alpha B_1', \quad B_2 = B_1', \tag{5.19}$$

где α — неопределенный множитель. Происхождение формул (5.19) следующее. При переходе $1 \to 2$ пересекаем линию $\overline{1}$, где $x_- \gg x_+$. Поэтому коэффициент при x_- сохраняется ($B_2 = B_1'$), а коэффициент при x_+ становится неопределенным, и его удобно представить так, как это сделано в (5.19).

Аналогично на линии *3*

$$A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2 + \beta A_2, \tag{5.20}$$

где β — неопределенный множитель. Спускаемся на действительную ось и возвращаем начало отсчета снова в точку 0. Получаем

$$A_3' = A_3 e^{-\delta/2}, \quad B_3' = B_3 e^{\delta/2}. \tag{5.21}$$

Итак, объединяя формулы (5.16)—(5.21), можно записать матрицу отображения от $t=-\infty$ к $t=+\infty$:

$$\begin{pmatrix} A_3' \\ B_3' \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} -i\beta & -ie^{\delta}(1+\alpha\beta) \\ -ie^{-\delta} & -i\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Теперь все трудности остаются позади, и необходимо лишь определить коэффициенты матрицы перехода $\hat{M}$.

Матрица перехода. Проще всего это сделать, если использовать инвариант (5.7). Для решения, заданного в форме (5.16), это означает:

$$|A|^2 - |B|^2 = \text{inv}. \tag{5.23}$$

Здесь стоит задержаться, чтобы подчеркнуть, что действительное решение ($A=B^*$) приводит к потере некоторой информации, так как форма (5.7) обращается в нуль, как это видно из (5.23). Для уравнения (5.22) это означает, что

$$|A_3'|^2 - |B_3'|^2 = |A_1|^2 - |B_1|^2. \tag{5.24}$$

С другой стороны, левую часть (5.24) можно выразить из уравнения (5.22) через A_1, B_1 и коэффициенты матрицы $\hat{M}$. Приравнивая левые и правые части при $A_1=0$ и при $B_1=0$, находим α и β:

$$\alpha = -\beta^* = e^{i\varphi}\sqrt{1+e^{-2\delta}}, \tag{5.25}$$

где φ—неизвестная фаза, которая в дальнейшем не понадобится. Отсюда

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -ie^{i\varphi}\sqrt{1+e^{-2\delta}} & -ie^{-\delta} \\ ie^{\delta} & -ie^{-i\varphi}\sqrt{1+e^{-2\delta}} \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Положим теперь для падающей волны $|A_3'|^2=1$, для прошедшей волны $|A_1|^2=D$, для отраженной волны $|B_3'|^2=R$ и оставим при $t\to\infty$ только прошедшую волну, т. е. $|B_1|^2=0$. Тогда уравнение (5.22) и выражение (5.26) дают

$$D = 1/(1+e^{-2\delta}), \qquad R = e^{-2\delta}/(1+e^{-2\delta}). \tag{5.27}$$

Величина δ имеет порядок ωT, где T—расстояние между точками t_0 и t_0^*; оно определяется масштабом медленности:

$$\frac{1}{T} \sim \frac{d}{dt} \ln \omega.$$

Сравнивая это соотношение с (5.2), получаем

$$\delta \sim 1/\varepsilon. \tag{5.28}$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ имеем $\delta \to \infty$ и

$$D \approx 1-e^{-2\delta}, \qquad R \approx e^{-2\delta}. \tag{5.29}$$

Из (5.29) и (5.9), в частности, следует, что

$$\Delta I \sim e^{-\delta} \sim \exp(-\text{const}/\varepsilon), \tag{5.30}$$

т. е. экспоненциально малое изменение действия вычислено.

Однако формулы (5.27) имеют значительно большую область применимости, которая включает также случай $\delta \to 0$. Он соответствует слиянию особенностей t_0 и t_0^* и появлению на действительной оси нуля частоты. Теперь

$$D \to {}^1/_2, \qquad R \to {}^1/_2. \tag{5.31}$$

Это означает, что происходит сильное взаимодействие с особенностью и отсутствует малость изменения ΔI.

Переходное излучение. На всех рассмотренных примерах можно было убедиться, что появление экспоненциально малых эффектов «рассеяния» действия связано с очень своеобразным резонансом. Это резонанс между осциллирующим решением и возмущением. Необычность его в том, что частота невозмущенного решения ω очень велика по сравнению с характерной частотой возмущения $1/T$, т. е. выполнено условие адиабатичности $\omega T \gg 1$. Резонанс не может произойти на действительной оси. Он оказывается возможным лишь в комплексной плоскости. Это и приводит не к осциллирующему или степенному выражению по параметру $\varepsilon = 1/\omega T$, а к экспоненциально малому изменению действия.

Физическая природа богата такими примерами, и для иллюстрации приведем еще один простой пример с переходным излучением [27].

Пусть заряженная частица движется со скоростью v вдоль оси z в слабонеоднородной среде. Свойства среды характеризуются диэлектрической постоянной $\varepsilon_0(z)$, зависящей от координаты z слабо. Например, в плазме

$$\varepsilon_0(z, \omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad \omega_0^2 = 4\pi n_0(z) e^2/m,$$

где ω_0 — плазменная частота, $n_0(z)$ — неоднородная плотность плазмы, изменяющаяся по тому же закону, что и показанная на рис. 2.13.

Ток вдоль оси z, образованный движущимся зарядом, равен

$$j = ev\delta(z - vt).$$

Поэтому фурье-компонента тока на частоте ω равна

$$j_\omega = \frac{1}{\pi} ev e^{-i\omega z/v}. \tag{5.32}$$

Рассмотрим компоненту векторного потенциала $\boldsymbol{A}$, которая направлена вдоль скорости заряда $\boldsymbol{v}$. Уравнение для ее фурье-гармоники по времени имеет вид

$$A'' - \frac{\varepsilon_0'}{\varepsilon_0} A' + \left(\varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) A = -\frac{4\pi e}{c} e^{i\frac{\omega}{v}z}, \tag{5.33}$$

где $A = A(\omega, k; z)$, штрих обозначает дифференцирование по z, волновое число k ортогонально к оси z и использовано уравнение (5.32) для тока. Член с A' может быть отброшен с точностью до малых величин второго порядка. Поэтому решение однородного уравнения (5.33) в ВКБ-приближении имеет вид

$$A_\pm(z) \sim \frac{A_0}{\sqrt{q}} \exp\left\{\pm i \int^z q(z')\, dz'\right\}, \tag{5.34}$$

где

$$q^2 = \varepsilon_0(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \tag{5.35}$$

Теперь мы продемонстрируем, как, пользуясь некоторой «эквилибристикой» между квантовым и классическим способами рассуждений, можно быстро достичь результата.

Если бы тока не было (правая часть в (5.33) равна нулю), то свободное поле A, распространяясь в неоднородной среде, испытывало бы изменение адиабатического инварианта. При наличии у функции q^2 нулей или особенностей на действительной оси эти изменения были бы конечными. При отсутствии таких особенностей изменения адиабатического инварианта были бы экспоненциально малыми.

Здесь нас будет интересовать вынужденное решение, обусловленное движением частицы, и поэтому мы пренебрежем отмеченными изменениями свободного поля, считая их достаточно малыми. Заряд движется в неоднородной среде. Изменение тока, обусловленное неоднородностью, приводит

к излучению поля. Попробуем получить этот эффект, пользуясь аппаратом классической механики.

Запишем гамильтониан, соответствующий уравнению движения

$$A'' + q^2 A = -J(z),$$

в котором роль времени играет переменная z:

$$H = {}^1/_2 (A')^2 + {}^1/_2 q^2 A^2 + AJ(z). \tag{5.36}$$

Перейдем к переменным действие—угол, считая $q(z)$ медленно меняющимся параметром. Это нам приходится делать уже не в первый раз, и поэтому мы детали опускаем.

Имеем уравнение для действия I и фазы ϑ:

$$\frac{dI}{dz} \approx -\frac{\partial A}{\partial \vartheta} J(z), \qquad \frac{d\vartheta}{dz} \approx q + \frac{\partial A}{\partial I} J(z), \tag{5.37}$$

с точностью до малых производных dq/dz. Связь между (I, ϑ) и (A', A) та же, что и для линейного осциллятора:

$$A = \sqrt{2I/q} \sin\vartheta, \qquad A' = \sqrt{2Iq} \cos\vartheta,$$

$$\vartheta = \int^z q(z')\, dz'. \tag{5.38}$$

Рассмотрим изменение действия

$$\Delta I = I(z \to \infty) - I(z \to -\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial A}{\partial \vartheta} J(z). \tag{5.39}$$

Величина A зависит от z согласно (5.34). Если $qv < \omega$, то резонанса на действительной оси z нет, так как

$$J(z) = \frac{4\pi e}{c} e^{i\frac{\omega}{v}z} + \text{к. с.} \tag{5.40}$$

Поэтому в первом приближении интеграл (5.39) равен нулю. Если отвлечься от всех особенностей $q(z)$ на действительной оси, то здесь мы снова встречаемся с интегралом от медленно меняющейся функции $\partial A/\partial\vartheta$, умноженной на быстроосциллирующую экспоненту. Соответствующее неравенство имеет вид

$$\varepsilon_L = 1/(k_0 L) = v/(L\omega) \ll 1, \tag{5.41}$$

где L—расстояние от ближайшей особенности функции $\partial A/\partial\vartheta$ до действительной оси.

Теперь сразу пишем оценку ΔI:

$$\Delta I \sim \exp(-L\omega/v). \tag{5.42}$$

Осталось сделать последний шаг и показать, что величина ΔI пропорциональна интенсивности переходного излучения. Действительно, излучение связано с изменением интенсивности поля, определяемой числом квантов излучения. Последнее пропорционально изменению действия поля. Прямой анализ показывает то же, так как интенсивность поля определяется изменением величины $|A_0|^2$, которая, как видно из (5.34), равна действию I.

Полученный результат показывает, что малые градиенты (и временные, и пространственные) могут выступать эквивалентным образом, приводя к экспоненциально малым эффектам изменения усредненных величин.

В дальнейшем при обсуждении динамики волновых процессов мы еще не раз встретимся с подобным явлением и убедимся в его определенной степени универсальности.

Замечание о роли нелинейности. Что должно измениться в этом нашем представлении при рассмотрении нелинейных систем? Если речь идет о си-

стеме с одной степенью свободы, то практически ничего. Однако при $N \geqslant 2$, как мы уже отмечали, меняется стандартная ситуация: исчезает интеграл, соответствующий высокой фурье-гармонике от медленно меняющейся функции. Поэтому не всегда возникает экспоненциально малый эффект. Но одно утверждение все-таки оказывается общим как для линейного, так и для нелинейного случая. Возникновение конечного, не экспоненциально малого выражения обусловлено тем, что в вычисляемом интеграле особенность в фазе спускается из комплексной плоскости на действительную ось. Причины для этого бывают разные, и одна из них — увеличение числа степеней свободы, облегчающее возможность прохождения через резонанс или даже через большое число резонансов.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 2

1. Проблема малых знаменателей известна в механике давно и прежде всего в связи с задачами небесной механики. Особенно много внимания ей было уделено в работах Пуанкаре. Один из путей ее решения связывался с отысканием других, более эффективных рядов приближения. Однако путь к преодолению трудностей, связанных с проблемой малых знаменателей, был найден в другом направлении и составил содержание знаменитой теоремы Колмогорова — Арнольда — Мозера, изложение которой последует позднее.

2. Проблема опрокидывания волн имеет очень наглядную реальную «визуализацию» — это образование «барашков» на море при достаточно сильном разгоне волн. Когда мы говорим о трудностях этой проблемы, то, конечно, имеем в виду ее постановку в реальной ситуации. В последнее время все чаще делаются попытки численного анализа опрокидывания с помощью компьютеров. Однако и это оказывается не простым делом.

3. Идея метода усреднения очень стара и ведет свое начало с работ Лагранжа и Лапласа, где она использовалась для анализа возмущенных траекторий планет Солнечной системы. Наиболее интенсивное развитие идеи усреднения в приложении к многочисленным задачам физики было реализовано в работах Крылова, Боголюбова, Митропольского [1—4] и их сотрудников. В последние годы появились новые варианты метода усреднения, связанные с новым кругом вопросов теории динамических систем, о котором речь будет идти далее. Обзор многих результатов этих исследований можно найти у Арнольда [5, 6].

4. Строгую формулировку теоремы и ее доказательство можно найти в [6].

5. Следует заметить, что сама идея усреднения не требует, чтобы при $\varepsilon = 0$ невозмущенная система была гамильтоновской. Соответствующую технику можно найти в [1—4]. Метод усреднения может быть применен к системе дифференциальных уравнений достаточно произвольного вида. Однако в этом случае выкладки становятся значительно более громоздкими.

6. Эта идея принадлежит П. Л. Капице (1951). Изложение ее следует книге [7]; применение к движению заряда в электромагнитном поле было сделано в работе [8].

7. Одним из приложений описанной теории является высокочастотное удержание плазмы [9]. Механизм удержания основан на следующем. На плотную плазму падает мощная высокочастотная электромагнитная волна. В достаточно плотную плазму волна не проникает, и вблизи границы плазмы возникает градиент электрического поля. Тогда под действием высокочастотного давления частицы плазмы смещаются в область, свободную от поля волны. Это делают в первую очередь электроны, так как их масса меньше массы ионов. При этом возникает поле поляризации, которое вслед за электронами «подтягивает» ионы. В результате возникает некоторое равновесное состояние плазмы с полем высокочастотной волны.

8. Определение точности сохранения адиабатических инвариантов первоначально основывалось на методе усреднения, развитом в работах [1, 2, 12]. В некотором смысле завершение этого подхода было проведено в [13, 14]. Изменение адиабатического инварианта было получено в [15] (см. также [7]). Обзору различных проблем, связанных с адиабатическими инвариантами, посвящена книга [16]. Многие строгие результаты приведены в [5, 6].

9. Техника вычислений изменения действия в линейных задачах подробно изложена в [17]. Она основана на том, что в линейном случае можно ввести области, внутри которых

происходит существенное (в том числе и не экспоненциально малое) изменение действия. Сшивка решений по разные стороны от этих областей и приводит к определению величины изменения I_k. Соответствующие методы развивались в работах [18, 19].

10. В некоторых более простых случаях удается пойти несколько дальше. В [17] показано, что в линейных системах с $N=2$ при наличии внутренних резонансов $\omega_1(t_0)=\omega_2(t_0)$ в точке t_0, лежащей в комплексной плоскости с произвольным значением $\operatorname{Im} t_0$, сохраняется с экспоненциальной точностью величина $I=I_1+I_2$, т. е. полный интегральный инвариант Пуанкаре. Сами же величины I_1, I_2 могут при переходе через область внутреннего резонанса изменяться на величину ~ 1.

Этот вывод имеет различные физические приложения. Например, при случайном блуждании системы по внутренним резонансам устанавливается равнораспределение действий по разным степеням свободы $\langle I_1\rangle=\langle I_2\rangle$, а не равнораспределение по энергиям, как это бывает обычно.

В [17] дано также обобщение этого результата для произвольного N, если между внутренними степенями свободы в основном происходят только парные резонансы.

11. Различные оценки этих областей имеются в работах Арнольда и Нейштадта. Их краткий обзор имеется в [5]. Изменение адиабатического инварианта при прохождении через резонанс рассматривалось также Бакаем [16].

12. Идея дрейфового приближения была высказана Альвеном. Ее формальная реализация была проведена в работе Боголюбова и Зубарева [12]. Подробное изложение ее имеется в обзорах [20, 21].

13. Вопрос о сохранении магнитного момента при создании магнитных ловушек был очень важен. Экспериментальное подтверждение адиабатической инвариантности μ было получено Родионовым [22]. Вечное сохранение адиабатического инварианта в идеальной осесимметричной ловушке с двумерным движением частицы было доказано Арнольдом [23]. Изменение инвариантов, обусловленное взаимодействием трех степеней свободы, исследовано Чириковым [24].

14. Обзор различных приложений теории изменения адиабатических инвариантов в линейных задачах физики можно найти в [17]. Приложения к задачам трансформации волн в неоднородных средах имеются в [17, 18, 26].

15. Соображения о связи ΔI и r были приведены в [15] со ссылкой на идею Л. П. Питаевского. В этой же работе была получена экспоненциальная оценка для ΔI.

16. Эта аналогия была использована в работах [15, 25].

Глава 3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Под названием «специальные» скрываются не столько частные методы анализа динамических систем, сколько сравнительно новые и пока еще современные методы. Кроме того, понятие их новизны отражает не обязательно время их возникновения, а скорее время, когда их употребление становится привычным средством решения широкого круга задач. Конечно, все эти понятия относительны. Достаточно, например, вспомнить формулы векторного анализа, которые еще в книгах 30-х годов имели необычайно сложную форму представления по сравнению с более поздней компактной записью. А использование дифференциальных форм позволяет пойти намного дальше, хотя они еще не столь широко используются в физической литературе.

Во всяком случае, называя некоторые методы, выделенные в эту главу, специальными, мы хотели тем самым дать им определенную оценку. Для читателя это должно быть указанием на то, что их роль в настоящее время является ведущей. Различные принципиальные вопросы могут быть поняты сейчас именно благодаря методам, излагаемым ниже.

Мы уже отмечали, что многие физические задачи могут быть классифицированы как задачи о возмущениях. Это означает, что в отсутствие воз-

мущения имеется полная информация о системе, и следует понять, что происходит при действии возмущения. Однако даже при подобном упрощении мы сталкиваемся со столь сложными проблемами, что зачастую не удается даже оценить степень их трудности. Положение усугубляется еще и тем, что само сведение реальных физических задач к задачам о влиянии возмущения является определенной уступкой сложным проблемам динамики.

В предыдущей главе мы уже ознакомились с некоторыми неприятными местами теории. Это, во-первых, малые знаменатели, или резонансы, и, во-вторых, число степеней свободы $N \geqslant 2$. Интуитивно можно ожидать, что это не просто узкие места методов, а что за ними стоят глубокие физические мотивы. Так оно и оказывается на самом деле.

Основная заслуга современной нелинейной теории в том, что с ее помощью удалось выяснить главный источник большинства известных и многих будущих неприятностей. Происхождение этого источника еще не будет названо в этой главе, и результаты, которые излагаются здесь, следует рассматривать как некоторый самостоятельный и кое в чем подготовительный этап изложения.

§ 1. Нелинейный резонанс

Вернемся к той простейшей ситуации (§ 1 гл. 2), когда под действием возмущения в системе с одной степенью свободы возможен резонанс.

Уравнения резонанса. Невозмущенное движение системы (например, частицы в потенциальной яме) будем описывать гамильтонианом $H_0(I)$, а возмущенное — гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t), \tag{1.1}$$

где ε — безразмерный малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Возмущение V будем считать периодическим по времени с периодом

$$T = 2\pi/\nu.$$

Поэтому V разлагается в двойной ряд Фурье:

$$V(I, \vartheta, t) = {}^1/_2 \sum_{k, l} V_{kl}(I)\, e^{i(k\vartheta - l\nu t)} + \text{к. с.},$$
$$V_{kl} = V^*_{-k, -l}. \tag{1.2}$$

Уравнения движения, следующие из (1.1) и (1.2), принимают вид

$$\dot I = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -\frac{i}{2}\varepsilon \sum_{k, l} k V_{kl}(I)\, e^{i(k\vartheta - l\nu t)} + \text{к. с.},$$
$$\dot\vartheta = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} = \omega(I) + {}^1/_2\varepsilon \sum_{k, l} \frac{dV_{kl}(I)}{dI} e^{i(k\vartheta - l\nu t)} + \text{к. с.} \tag{1.3}$$

Нам уже известно, что в уравнениях (1.3) возможен резонанс, если условие

$$k\omega - l\nu \approx 0 \tag{1.4}$$

может быть выполнено при каких-либо целых значениях k и l.

Основная идея исследования резонанса достаточно проста. «Опасный» резонансный член выделяется отдельно из разложения (1.2) и исследуется динамика, обусловленная только этим членом возмущения. Затем можно попробовать оценить влияние отброшенных членов и, если это удастся, получить условие, при котором подобный анализ справедлив.

Пусть условие резонанса (1.4) выполняется точно для некоторой тройки чисел $(k_0, l_0; I_0)$, т. е.

$$k_0\omega(I_0) = l_0\nu. \tag{1.5}$$

Таких троек может быть, естественно, несколько, однако мы зафиксируем лишь одну определенную и обсудим впоследствии, что делать с остальными. Оставляем в системе (1.3) только резонансную гармонику в правой части. Это дает

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon V_0 k_0 \sin(k_0\vartheta - l_0\nu t + \varphi), \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{dV_0}{dI}\cos(k_0\vartheta - l_0\nu t + \varphi), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где обозначено

$$V_{k_0, l_0} = |V_{k_0, l_0}| e^{i\varphi} = V_0 e^{i\varphi}.$$

Удобно также ввести новую фазу

$$\psi = k_0\vartheta - l_0\nu t + \varphi \tag{1.7}$$

и переписать систему (1.6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon k_0 V_0(I)\sin\psi, \\ \dot{\psi} &= k_0\omega(I) - l_0\nu + \varepsilon\frac{dV_0(I)}{dI}\cos\psi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если в гамильтониане (1.1) и в разложении (1.2) также оставить только резонансный член, то это дало бы

$$H = H_0(I) + \varepsilon V_0(I)\cos\psi. \tag{1.9}$$

Несмотря на столь сильное упрощение, ни систему (1.8), ни уравнения, порождаемые гамильтонианом (1.9), решить еще не просто. Здесь, однако, следует вспомнить, что параметр ε мал, и поэтому отклонение действия I от его резонансного значения I_0 можно ожидать малым.

Качественная картина динамики в окрестности резонанса может быть представлена следующим образом. Пусть I очень близко к I_0. Тогда вследствие резонанса действие нарастает. Из-за нелинейности частота ω зависит от I, поэтому изменение действия приводит одновременно к изменению частоты ω, а это означает расстройку резонансного условия (1.5). Таким образом, изменение действия следует ожидать ограниченным из-за нелинейности системы. Вследствие гамильтоновости в системе не может быть притягивающих множеств, и поэтому в окрестности резонансного значения I_0 должны происходить осцилляции с малой амплитудой при малых ε. Посмотрим теперь, как эти предварительные соображения реализуются в действительности (ком. 1).

Предполагая малым отклонение

$$\Delta I = I - I_0,$$

разложим $H_0(I)$ в ряд по ΔI до второго порядка включительно, $\omega(I)$ — до членов первого порядка, а величину V_0 возьмем в точке I_0. Пренебрежем также членом $\sim\varepsilon$ в уравнении (1.9) для $\dot{\psi}$. Это приводит к системе

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Delta I = \varepsilon k_0 V_0 \sin\psi, \quad V_0 = V_0(I_0); \\ &\frac{d\psi}{dt} = k_0\omega'\Delta I, \quad \omega' \equiv \frac{d\omega(I_0)}{dI}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Те же процедуры преобразуют выражение (1.9) в следующее:

$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0)(I - I_0) + {}^1/_2\omega'(I - I_0)^2 + \varepsilon V_0\cos\psi. \tag{1.11}$$

Нетрудно видеть, что система (1.10) порождается гамильтонианом

$$\bar{H} = {}^1/_2 k_0\omega'(\Delta I)^2 + \varepsilon k_0 V_0\cos\psi, \tag{1.12}$$

в котором каноническими переменными является пара $(\Delta I, \psi)$:

$$\frac{d(\Delta I)}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial (\Delta I)}.$$

Переход от H в форме (1.11) к $\bar{H}$ осуществляется с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} &(I, \vartheta) \to (\Delta I, k_0\vartheta - l_0\nu t), \qquad \nu = \omega(I_0), \\ &\bar{H} = k_0 H - l_0 \nu \Delta I \end{aligned} \tag{1.13}$$

с точностью до несущественной константы $k_0 H_0(I_0)$. Оно называется переходом во вращающуюся систему координат (с частотой $l_0\nu$).

Гамильтониан (1.12) называется универсальным гамильтонианом нелинейного резонанса.

Свойства нелинейного резонанса. Сразу же бросается в глаза полное сходство выражения для $\bar{H}$ с гамильтонианом нелинейного маятника (см. § 3 гл. 1). Роль импульса играет величина ΔI, а эффективная масса равна

$$m^* = 1/(k_0\omega') = 1/\left(k_0 \frac{\omega_0}{I_0}\alpha\right), \qquad \omega_0 \equiv \omega(I_0),$$

и тем меньше, чем больше параметр нелинейности

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0}\frac{d\omega(I_0)}{dI}. \tag{1.14}$$

Аналогия с нелинейным маятником еще более очевидна, если продифференцировать второе уравнение (1.10) по t и использовать первое уравнение (1.10):

$$\ddot{\tilde{\psi}} + \Omega_0^2 \sin\tilde{\psi} = 0, \tag{1.15}$$

где произведен сдвиг фазы на π

$$\tilde{\psi} = \psi + \pi$$

и введена частота фазовых колебаний

$$\Omega_0 = (\varepsilon V_0 |\omega'|)^{1/2}. \tag{1.16}$$

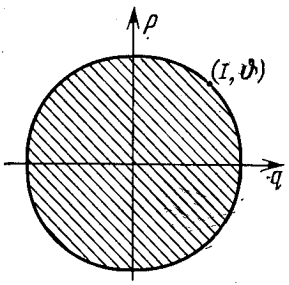


Рис. 3.1. Переход $(p, q) \to (I, \vartheta)$

Уравнение (1.15) совпадает с (1.3.2). Поэтому далее можно использовать все формулы для нелинейного маятника, заменив в них лишь ω_0 на Ω_0. Мы не будем здесь их выписывать, а представим динамическую картину в окрестности резонанса на фазовой плоскости. Пусть исходный невозмущенный осциллятор представлен в произвольных канонических переменных (p, q). На фазовой плоскости (p, q) его траектория изображается некоторой замкнутой кривой (рис. 3.1). Перейдем к переменным (I, ϑ). Это означает, что ими является площадь, ограниченная траекторией на плоскости (p, q), и некоторая угловая переменная. Далее перейдем во вращающуюся систему координат с помощью преобразования (1.13) и рассмотрим для простоты резонанс первого порядка ($k_0 = 1$, $l_0 = 1$).

Во вращающейся системе фазовый портрет, определяемый гамильтонианом $\bar{H}$ на плоскости (p, q), имеет вид, приведенный на рис. 3.2.

Главной особенностью фазовых колебаний является рождение из цикла (штриховая кривая) пары особых точек — эллиптической и гиперболической. Вокруг первой происходят локальные осцилляции фазы, характеризующиеся бананообразными кривыми. Через гиперболическую точку проходит сепаратриса, за которой следуют снова инвариантные циклы.

Ширину сепаратрисы (максимальное расстояние между двумя усами сепаратрисы) можно принять в качестве ширины нелинейного резонанса.

Имеем из (1.12) и (1.16) для ширины резонанса по действию

$$\max \Delta I = (\varepsilon V_0/|\omega'|)^{1/2} \tag{1.17}$$

или по частоте

$$\max \Delta\omega = |\omega'| \cdot \max \Delta I = \Omega_0. \tag{1.18}$$

Оценим порядки этих величин. Мы считаем малыми величинами параметр возмущения $\varepsilon \ll 1$ и параметр нелинейности $\alpha \ll 1$. Кроме того,

$$V_0 \sim H_0 \sim I_0\omega_0. \tag{1.19}$$

Отсюда и из (1.14), (1.17) и (1.18) имеем

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2}, \qquad \frac{\max \Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sim (\varepsilon\alpha)^{1/2}. \tag{1.20}$$

Оценки порядков возмущения действия и частоты (1.20) позволяют теперь найти условия справедливости сделанных приближений.

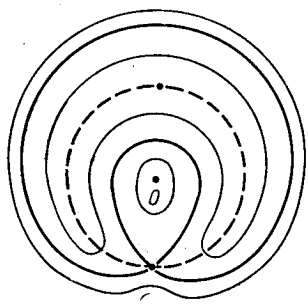


Рис. 3.2. Нелинейный резонанс первого порядка: штриховая линия — невозмущенная траектория при $I = I_0$; тонкие кривые — фазовые колебания, жирная кривая — сепаратриса фазовых колебаний

Условие отбрасывания возмущения в уравнении (1.8) для $\dot{\psi}$ имеет вид

$$\varepsilon \frac{V_0}{I_0} \ll |\omega'| \Delta I$$

или, согласно (1.19) и (1.20),

$$\varepsilon \ll \alpha. \tag{1.21}$$

Условие замены $V(I)$ на $V(I_0)$ эквивалентно условию

$$\max \Delta I \ll I_0,$$

т. е. тому же неравенству (1.21). Отбрасывание нерезонансного члена по сравнению с резонансным возможно при

$$\max \Delta\omega \ll \omega_0,$$

т. е. при неравенстве

$$\varepsilon\alpha \ll 1, \tag{1.22}$$

которое автоматически справедливо при малых ε и α.

Неравенства (1.21) и (1.22) можно записать в виде

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon, \tag{1.23}$$

который иногда называется условием умеренной нелинейности. Характерной особенностью нелинейного резонанса является левое неравенство в (1.23). Оно показывает, что нелинейность должна быть достаточно сильной. Во всяком случае, она должна быть больше возмущения ($\alpha > \varepsilon$), и предельного перехода к линейному случаю ($\alpha \to 0$) не существует.

Еще одно важное свойство нелинейного резонанса связано с оценками (1.20). Они показывают, что относительные изменения величин ΔI и $\Delta\omega$ пропорциональны $\varepsilon^{1/2}$, а не ε, как это было бы в обычной теории возмущений. Поскольку $\varepsilon \ll 1$, то $\varepsilon^{1/2} \gg \varepsilon$, т. е. изменения ΔI и $\Delta\omega$ очень велики. По существу, теория возмущений при нелинейном резонансе строится по параметру $\varepsilon^{1/2}$.

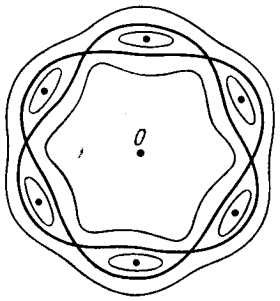


Рис. 3.3. Усложненный вариант нелинейного резонанса

Таким образом, можно выделить следующие три особенности описанного анализа нелинейного резонанса:

1) теория возмущений является особой, приводит к рождению сепаратрисы с k_0 парами эллиптических и гиперболических точек (рис. 3.3 при $k_0 = 6$, $l_0 = 1$);

2) нелинейность должна быть больше некоторой критической ($\alpha > \varepsilon$), и предельного перехода к линейной задаче нет;

3) теория возмущения строится по параметру $\varepsilon^{1/2} \gg \varepsilon$.

Теория нелинейного резонанса имеет необычайно широкий круг приложений, которые подчас выглядят совсем неожиданно. Позднее мы рассмотрим некоторые из них.

Внутренний нелинейный резонанс. Выше мы описали нелинейный резонанс между нелинейной системой и внешней силой. Если число степеней свободы системы $N \geqslant 2$, то возможны резонансы между двумя и более степенями свободы.

Рассмотрим для простоты систему из двух степеней свободы, например состоящую из двух невращающихся частиц. Ее гамильтониан можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1,\ 2} H_{0i}(I_i) + \varepsilon V(I_1,\ I_2;\ \vartheta_1,\ \vartheta_2). \tag{1.24}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}, \qquad \dot{\vartheta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \qquad (i = 1,\ 2).$$

Предположение о существовании резонансного взаимодействия двух частиц означает, что условие

$$n\dot{\vartheta}_1 - m\dot{\vartheta}_2 = n\omega_1(I_{10}) - m\omega_2(I_{20}) = 0 \tag{1.25}$$

выполняется для некоторых целых чисел $(n,\ m)$ и для действий $(I_{10},\ I_{20})$.

Разложим взаимодействие в (1.24) в двойной ряд Фурье по ϑ_1, ϑ_2 и сохраним, как и ранее, только резонансный член взаимодействия:

$$V = {}^1/_2 \sum_{n_1,\ n_2} V_{n_1,\ n_2}(I_1, I_2) \exp\left[i(n_1\vartheta_1 - n_2\vartheta_2)\right] + \text{к. с.}$$

Кроме того, разложим H_{0i} и частоты

$$\omega_i = \frac{dH_{0i}}{dI_i} \qquad (i = 1,\ 2)$$

в окрестности резонанса $(I_{10},\ I_{20})$. Это дает из (1.24) эффективный гамильтониан аналогично тому, как это было сделано при выводе (1.12):

$$\overline{H} = {}^1/_2 \sum_{i=1,\ 2} \omega_i'(\Delta I_i)^2 + \varepsilon V_0 \cos\psi, \tag{1.26}$$

где

$$\omega_i' = \frac{d\omega_i(I_{i0})}{dI_i}, \qquad \Delta I_i = I_i - I_{i0}$$

и фаза ψ вводится соотношениями

$$\psi = n\vartheta_1 - m\vartheta_2 + \varphi,$$
$$V_{nm}(I_{10}, I_{20}) = |V_{nm}(I_{10}, I_{20})|\, e^{i\varphi} \equiv V_0 e^{i\varphi}. \tag{1.27}$$

Уравнения движения в окрестности резонанса могут быть получены из (1.26):

$$\dot{I}_1 = \frac{d(\Delta I_1)}{dt} = \varepsilon n V_0 \cos\psi,$$
$$\dot{I}_2 = \frac{d(\Delta I_2)}{dt} = -\varepsilon m V_0 \cos\psi, \tag{1.28}$$
$$\dot{\psi} = n\omega_1'\Delta I_1 - m\omega_2'\Delta I_2,$$

где использованы обозначения (1.27). Структура уравнений (1.28) такова, что имеется очевидный интеграл движения:

$$mI_1 + nI_2 = \text{const} \equiv C. \tag{1.29}$$

В теории параметрических усилителей выражение (1.29) известно как соотношение Мэнли—Роу. Благодаря ему происходит понижение порядка системы (1.28), и она интегрируется в квадратурах.

Проще, однако, продифференцировать уравнение для $\dot{\psi}$ в (1.28) по времени. Получаем для фазы $\tilde{\psi} = \psi + \pi$:

$$\ddot{\tilde{\psi}} + \Omega_0^2 \sin\tilde{\psi} = 0, \qquad \Omega_0^2 = \varepsilon V_0 (n^2\omega_1' + m^2\omega_2'), \tag{1.30}$$

т. е. уравнение нелинейного маятника. Оно описывает фазовые колебания в окрестности внутреннего резонанса с частотой Ω_0. При отрицательном выражении в квадратных скобках уравнение фазовых колебаний имеет вид

$$\ddot{\psi} + \Omega_0^2 \sin\psi = 0, \qquad \Omega_0^2 = \varepsilon V_0 |n^2\omega_1' + m^2\omega_2'|.$$

Если производные ω_1' и ω_2' имеют разные знаки, то возможно дополнительное вырождение при

$$n^2\omega_1' + m^2\omega_2' = 0. \tag{1.31}$$

В более сложных случаях, когда в резонансе участвует более двух степеней свободы, число соотношений типа (1.29) увеличивается, и весь процесс по-прежнему определяется одним уравнением фазовых колебаний типа (1.30). Мы познакомимся с таким случаем позднее.

Проведенный выше анализ показывает, что с определенной степенью точности динамика системы в окрестности отдельного резонанса может быть изучена достаточно подробно. В действительности общая ситуация связана с уравнениями, например (1.3), где резонансов может быть много. И то, что мы в состоянии проследить за движением частиц в области изолированного нелинейного резонанса, еще не позволяет нам сделать какие-либо прогнозы относительно динамики в случае общего положения.

§ 2. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ)

Пример нелинейного резонанса показывает, что даже сколь угодно малое возмущение может привести к сильной качественной перестройке фазового портрета системы. Поэтому использование различных приближенных методов не может компенсировать степень нашей неосведомленности о том, что же все-таки происходит под влиянием возмущения в системе и какие типичные физические явления возможны. Прежде всего следует выделить некоторую формальную постановку задачи, которая соответствовала бы общей ситуации. Это было сделано Пуанкаре.

Основная задача динамики. Такой задачей является задача о возмущениях условно-периодического движения, примеры которой мы уже приводили.

Гамильтониан системы с N степенями свободы имеет вид

$$H = H_0(I_1, \ldots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \ldots, I_N; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N) \tag{2.1}$$

и $\varepsilon \ll 1$. Его невозмущенная часть H_0 описывает условно-периодическое движение на N-мерном торе. При $\varepsilon = 0$ торы являются инвариантами; N действий I_j — первые интегралы движения. Траектория является обмоткой тора, если частоты

$$\omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j} \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{2.2}$$

несоизмеримы, и всюду плотно заполняет тор. Если число независимых частот равно $N_1 < N$, то траектории всюду плотно заполняют тор N_1-го порядка.

Что можно сказать о траекториях системы при включении возмущения, не ограничивая ответ какими-либо временными неравенствами? Практическое значение ответа на этот вопрос трудно переоценить. Фактор «большого времени» возникает как в задачах микромира (устойчивость частиц в ускорителе, где они совершают огромное число оборотов), так и в задачах астрономических масштабов (устойчивость траекторий планет Солнечной системы, в частности Земли, возмущаемых другими планетами).

Теорема об устойчивости. Серьезное исследование основной задачи динамики было начато работами Пуанкаре. Первый успех в ее преодолении, однако, был достигнут лишь в 1954 г. после появления работы Колмогорова [5]. Им была сформулирована теорема о сохранении инвариантных торов, доказанная Арнольдом [6] и при несколько иных условиях — Мозером [7]. Вот ее формулировка.

Теорема о сохранении инвариантных торов (Колмогоров — Арнольд). Если невозмущенная гамильтоновская система невырождена, то при достаточно малом консервативном гамильтоновском возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

Под невырожденностью системы понимается условие функциональной независимости частот (2.2):

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0, \tag{2.3}$$

которое уже приводилось в § 6 гл. 1.

Условие нерезонансности означает выбрасывание некоторой малой области в окрестности точного резонанса, т. е.

$$\left| \sum_j \omega_j m_j \right| > c\,|\boldsymbol{m}|^{-(N+1)}, \qquad \boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_N),$$

где c — некоторая малая константа.

Условие достаточной малости возмущения означает существование некоторого граничного значения ε_0 такого, что теорема справедлива при $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Аналогичный результат о существовании инвариантных торов был доказан Мозером [7] при условии существования достаточно большого числа производных у возмущения V, которое в дальнейшем удалось понизить.

Согласно теории КАМ возмущение действует следующим образом. Оно разрушает торы, лежащие в малой окрестности резонансных торов. Размер

этой окрестности можно оценить. Например, в случае нелинейного резонанса первого порядка, рассмотренного в предыдущем параграфе, ширина области разрушения по действию $\leqslant \varepsilon^{1/2}$. Дальнейшее зависит от топологии невозмущенных инвариантных торов в фазовом пространстве. Это приводит к различию случаев $N=2$ и $N>2$.

При $N=2$ торы делят фазовое пространство (см. § 6 гл. 1). Поэтому разрушенные торы лежат между инвариантными торами (рис. 3.4). Это приводит к тому, что изменение действия на траектории даже в области разрушения не может быть большим и имеет характерный размер порядка

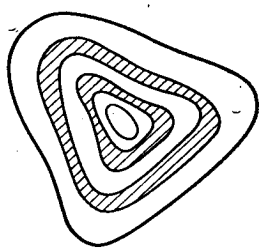


Рис. 3.4. При $N=2$ разрушенные торы (заштрихованные области) лежат между инвариантными торами

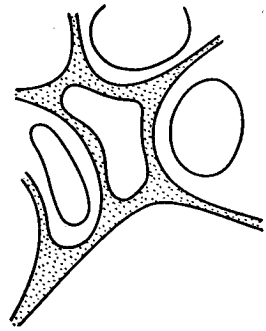


Рис. 3.5. При $N>2$ области разрушения могут, соединяясь, пронизывать все фазовое пространство

размера области разрушения. Траектория зажата между инвариантными торами, и ее отклонение от невозмущенной траектории стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, доказывается вечная и глобальная устойчивость при $N=2$, если $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Если $N>2$, то резонансные торы уже не делят фазовое пространство (см. рис. 2.16). Поэтому области разрушения могут, соединяясь, пронизывать все фазовое пространство (рис. 3.5). Это приводит к тому, что существует конечная мера траекторий, которые могут сколь угодно далеко уйти от своих невозмущенных значений. Это явление было открыто Арнольдом [8] и называется диффузией Арнольда. Оно будет рассмотрено позднее более подробно. Таким образом, при $N>2$ основная часть торов не разрушается. Однако существует конечная (но малая) мера таких начальных условий, которые приводят к медленному уходу системы сколь угодно далеко от своей невозмущенной траектории.

С момента возникновения теории КАМ в руках физиков появился необычайно мощный инструмент исследования динамических систем. С этого момента физическая интуиция, так необходимая во многих случаях, где строгие результаты еще не появились, обрела некоторую твердую почву. Как правило, для большинства физических систем можно произвести анализ при малых возмущениях, найти возмущенные инвариантные торы и, что и является главным, быть уверенным в их существовании. До появления теории КАМ можно было лишь утверждать о некотором, хотя, может быть, и большом, времени, в течение которого торы не разрушались.

Следствие. Мы часто встречаемся с системой

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t), \tag{2.4}$$

в которой возмущение является периодической функцией времени:

$$V(I, \vartheta, t+T) = V(I, \vartheta, t).$$

Введем новые переменные:

$$J = \text{const}, \quad \varphi = \Omega t + \text{const}, \quad \Omega = 2\pi/T.$$

Тогда вместо (2.4) можно рассматривать систему с $N+1$ степенями свободы:

$$H(I, J; \vartheta, \varphi) = H_0(I) + \Omega J + \varepsilon V(I, \vartheta, \varphi).$$

Ее инвариантные торы имеют размерность $N+1$. Теория КАМ гарантирует ее устойчивость при достаточно малом ε и выполнении условия невырожденности (2.3).

§ 3. Структурные свойства фазовых траекторий

Под воздействием возмущения фазовые траектории могут претерпевать различные изменения. Когда мы изображаем фазовую кривую в фазовом пространстве, то что́ представляет собой рисунок? Только иллюстрацию, способствующую более наглядному представлению о поведении системы, или нечто большее? Можно ли указать какой-либо критерий, различающий траектории, изображенные на рис. 3.6? Конечно, топологические свойства фазовых портретов отражают не только наглядный образ систем, но и специфику их динамики и, более того, возможную реакцию на возмущение. Существуют определенные понятия, которые классифицируют структуры траекторий в фазовом пространстве. Эта классификация, в свою очередь, зачастую полностью определяет динамику системы. К сожалению, подобный анализ не является простым и доступен лишь при малой размерности фазового пространства. Однако там, где он возможен, результаты оправдывают наши ожидания. Они обладают и общностью, и универсальностью. Мы приведем здесь лишь некоторые элементарные соображения, отсылая читателя за более широкими и глубокими знаниями к специальной литературе [9, 10].

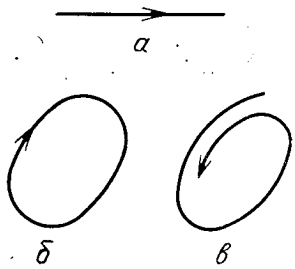


Рис. 3.6. Топологически различные фазовые траектории: свободное движение (*а*), осциллятор (*б*) и затухающий осциллятор (*в*)

Классификация особых точек. Множество точек фазового пространства не является однородным. Существует, например, особый класс точек, являющихся точками покоя системы. Они являются особыми точками. С простейшими из них — гиперболической и эллиптической точками — мы уже познакомились в § 2 гл. 1. В этих точках скорость частицы и сила равны нулю. Поэтому они определяются уравнениями

$$\dot{p} = P(p, q) = 0, \quad \dot{q} = Q(p, q) = 0. \tag{3.1}$$

В окрестности точки (p_0, q_0), удовлетворяющей уравнениям (3.1), уравнения движения могут быть линеаризованы. Это приводит к линейной системе

$$\dot{\bar{p}} = a\bar{p} + b\bar{q}, \quad \dot{\bar{q}} = c\bar{p} + d\bar{q}, \tag{3.2}$$

где $\bar{p} = p - p_0$, $\bar{q} = q - q_0$ и коэффициенты a, b, c, d определяются через производные от P и Q в точке (p_0, q_0):

$$a = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad b = \frac{\partial P}{\partial q}, \quad c = \frac{\partial Q}{\partial p}, \quad d = \frac{\partial Q}{\partial q}. \tag{3.3}$$

Далее рассмотрим для простоты случай одной степени свободы. Будем также считать систему, вообще говоря, произвольной. Поэтому функции P и Q могут быть не связаны условием гамильтоновости

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{\partial Q}{\partial q}. \tag{3.4}$$

Нас будет интересовать поведение траекторий системы в окрестности особой точки (p_0, q_0), где справедливо разложение (3.2). Оно зависит, естественно, от параметров (3.3).

Система уравнений (3.2) линейная. Ее решение тривиально и имеет вид

$$\bar{p} = A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t}, \quad \bar{q} = B_1 e^{\nu_1 t} + B_2 e^{\nu_2 t}, \tag{3.5}$$

где величины ν_1, ν_2 определяются как корни характеристического уравнения

$$\nu^2 - (a+d)\nu + (ad - bc) = 0. \tag{3.6}$$

Обозначим

$$a + d = 2\gamma_0, \quad ad - bc = \Delta$$

и запишем решение уравнения (3.6) в виде

$$\nu_{1,2} = \gamma_0 \pm \sqrt{\gamma_0^2 - \Delta}. \tag{3.7}$$

На плоскости (p, q) существует всего лишь несколько случаев, которые полностью перебирают все возможности. Корни $\nu_{1,2}$ — действительные (одинаковых либо разных знаков) или комплексно сопряженные. В частности, в гамильтоновском случае, согласно (3.4), $\gamma_0 = 0$ и

$$\nu_{1,2} = \pm\sqrt{-\Delta}. \tag{3.8}$$

Допустим, что корни $\nu_{1,2}$ известны. Тогда нетрудно найти семейство траекторий в окрестности точки (p_0, q_0). Для этого предположим дополнительно, что $\Delta \neq \gamma_0^2$ и $\Delta \neq 0$. Это означает отсутствие вырождения и нулевого характеристического корня.

При сделанных предположениях существует линейное преобразование

$$(\eta, \xi) = \hat{C}(p, q),$$

приводящее уравнение (3.2) к диагональному виду

$$\dot{\xi} = \nu_1 \xi, \quad \dot{\eta} = \nu_2 \eta. \tag{3.9}$$

Уравнения (3.9) определяют траектории в фазовом пространстве (η, ξ):

$$\eta = \text{const} \cdot \xi^{\nu_2/\nu_1}. \tag{3.10}$$

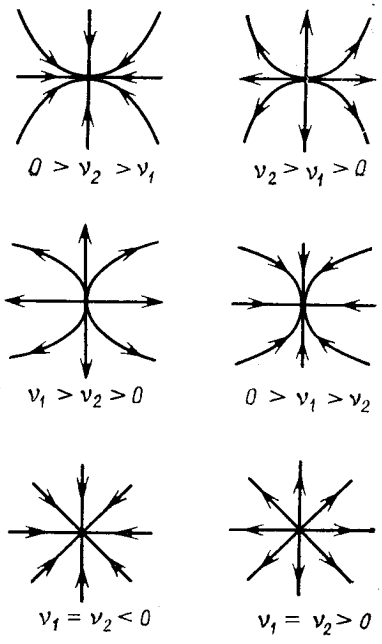


Рис. 3.7. Узлы

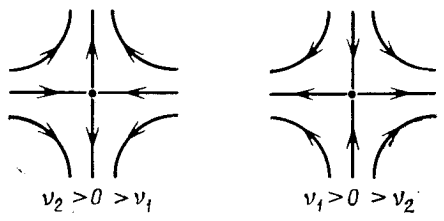


Рис. 3.8. Седла

В соответствии с перечисленными возможностями для корней $\nu_{1,2}$ мы получаем следующие три случая фазовых кривых $\eta = \eta(\xi)$ в окрестности особой точки (0,0) на плоскости (η, ξ).

1. Корни ν_1 и ν_2 одного знака и, следовательно, (3.10) есть семейство парабол. Оно приведено на рис. 3.7. Особая точка в этом случае является устойчивым ($\nu_1, \nu_2 < 0$) либо неустойчивым ($0 < \nu_1, \nu_2$) узлом. Кроме того, если $\nu_2/\nu_1 > 1$, то параболы касаются оси ξ, а если $\nu_2/\nu_1 < 1$, то параболы касаются оси η.

2. Корни ν_1 и ν_2 — разных знаков. Кривые (3.10) являются гиперболами (рис. 3.8), а особая точка называется седлом.

Через узел проходят либо устойчивые, либо неустойчивые траектории. Через седло всегда проходят две неустойчивые и две устойчивые траектории. В гамильтоновском случае $\gamma_0 = 0$, $\Delta < 0$, и все отличие сводится лишь к тому, что гиперболы имеют первую степень ($\nu_2/\nu_1 = -1$).

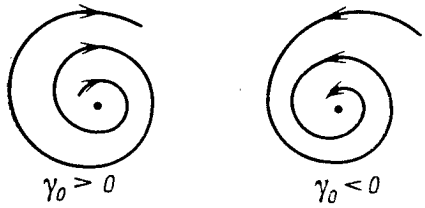


Рис. 3.9. Фокусы

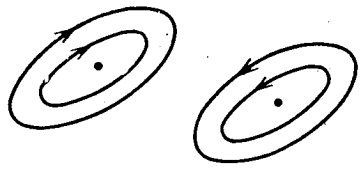


Рис. 3.10. Центры

3. Корни ν_1 и ν_2 — комплексные. Это происходит, если $\Delta > 0$. Тогда ν_1 и ν_2 комплексно сопряженные ($\nu_1 = \nu_2^*$). Особая точка называется устойчивым ($\gamma_0 < 0$) или неустойчивым ($\gamma_0 > 0$) фокусом (рис. 3.9). При $\gamma_0 = 0$ (гамильтоновский случай) фокус превращается в центр, или точку эллиптического типа (рис. 3.10).

Из определения параметра γ_0 следует, что он связан с диссипацией системы. Введение ее значительно усложняет задачу по сравнению с гамильтоновским случаем, где возможны только седла и центры. В действительности усложнение происходит значительно более сильное. Это связано с тем, что перечисленные особые точки получены в результате локального анализа и определяют поэтому динамику системы в малой области в окрестности этих точек. Возможны значительно более сложные структуры на фазовой плоскости, возникающие вследствие композиции особых точек. Простейшая из них получается для затухающего маятника:

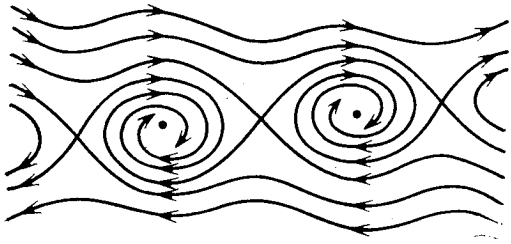


Рис. 3.11. Фазовые траектории маятника с затуханием

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \tag{3.11}$$

Его фазовый портрет приведен на рис. 3.11. Он определяется периодически чередующимися седлами и фокусами.

В более сложных случаях расположение седел, фокусов и узлов может носить достаточно причудливый характер.

Предельные циклы. Особыми могут быть не только точки, но и кривые. Ранее для гамильтоновских систем вводилось понятие периодического движения, которое на фазовой плоскости для $(x, \dot{x})$ изображалось замкнутой кривой. Эти кривые не содержали особых точек, за исключением того случая, когда кривая проходила через седло. В последнем случае траектория называлась сепаратрисой, и хотя на фазовой плоскости ей могла соответствовать замкнутая петля, тем не менее период движения на ней равнялся бесконечности. Другими словами, гамильтоновские системы не имеют особых кривых с конечным периодом движения.

Иначе обстоит дело в диссипативном негамильтоновском случае. Существуют периодические движения с конечным периодом — циклы. Им соответствуют на фазовой плоскости замкнутые кривые, не проходящие через какие-либо особые точки. Наличие диссипации означает, что энергия системы должна либо возрастать, либо убывать, по крайней мере, в течение некоторого интервала времени. Это автоматически должно приводить к изменению

площади, охватываемой фазовой траекторией за один квазицикл. Как можно совместить этот процесс с существованием цикла? Возможность заключается в том, что цикл является особой траекторией, на которую система никогда не выйдет ни за какой конечный интервал времени и никогда не сойдет с нее, если находилась на цикле в начальный момент.

Циклы являются предельными траекториями и могут быть устойчивыми, неустойчивыми и полуустойчивыми (рис. 3.12). Простой иллюстрацией предельного цикла может служить осциллятор с нелинейным трением, описываемый уравнением Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \gamma\dot{x}(a_0^2 - \dot{x}^2) + \omega^2 x = 0, \tag{3.12}$$

которое мы уже рассматривали в § 2 гл. 2. В окрестности предельного цикла движение описывается уравнением

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0), \tag{3.13}$$

где I — действие осциллятора,

$$I = \frac{1}{2\omega}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2),$$

и I_0 — площадь, ограниченная предельным циклом:

$$I_0 = 2\omega a_0^2. \tag{3.14}$$

При $\gamma > 0$ предельный цикл устойчив, при $\gamma < 0$ — неустойчив.

Несколько позже мы покажем, что уравнение (3.13) имеет достаточно универсальную природу.

Топологическая эквивалентность. Мы рассмотрели некоторые особые случаи фазовых траекторий не только с целью их классификации, но и для того, чтобы показать, как они используются в более мощных методах исследования динамических систем. Большие классы систем могут вести себя идентичным образом, и тогда достаточно рассмотреть самую простую систему из этого класса. Подобный путь анализа основан на ряде отношений эквивалентности между системами. Одним из таких отношений является топологическая эквивалентность.

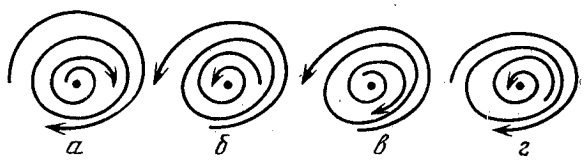


Рис. 3.12. Устойчивый (*а*), неустойчивый (*б*) и полуустойчивые (*в*, *г*) предельные циклы

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{L}_0 \boldsymbol{x}, \tag{3.15}$$

где $\boldsymbol{x}$ — n-мерный вектор и $\hat{L}_0$ — матрица $n \times n$. Решение системы (3.15), как известно, полностью определяется собственными значениями λ матрицы $\hat{L}_0$, которые находятся из векового (или характеристического) уравнения

$$|\hat{L}_0 - \lambda\hat{1}| = 0,$$

где $\hat{1}$ — единичная матрица n-го порядка. Простой пример для $n = 2$ рассматривался выше.

Обозначим через $m_{\pm}(A)$ число собственных значений λ линейной системы A соответственно с положительной или отрицательной вещественной частью.

Для топологической эквивалентности двух линейных систем A и B, не имеющих собственных чисел с $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

выполнялись равенства

$$m_{\pm}(A) = m_{\pm}(B) \tag{3.16}$$

(ком. 2).

Этому свойству можно придать определенную наглядность. Характеристические числа λ_k диагонализуют правую часть уравнения (3.15). Иначе, неособым линейным преобразованием $x \to y$ система (3.15) переводится в систему из n независимых уравнений

$$y_k = \lambda_k y_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

имеющих простые решения

$$y_k = y_{k0} e^{\lambda_k t}.$$

Это означает, что в фазовом пространстве можно указать m_+ направлений, вдоль которых решение растет, и m_- направлений, вдоль которых оно убывает. Если взять начальный фазовый объем в виде шара, то он в дальнейшем будет вытягиваться вдоль неустойчивых направлений и сжиматься вдоль устойчивых направлений. Условие топологической эквивалентности означает равенство устойчивых и неустойчивых направлений. Поэтому асимптотически формы фазового объема будут все ближе и ближе друг к другу (рис. 3.13) с точностью до неособой деформации.

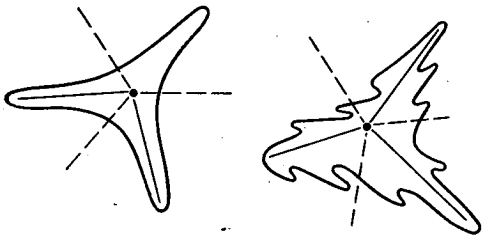


Рис. 3.13. Топологическая эквивалентность систем ($m_+ = 3$, $m_- = 3$)

В частности, для устойчивых узлов и фокусов, рассмотренных выше, $m_- = 2$, $m_+ = 0$, и они топологически эквивалентны (рис. 3.14). Топологически неэквивалентные системы приведены на рис. 3.15.

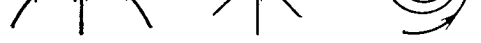


Рис. 3.14. Топологическая эквивалентность устойчивых узлов и фокусов



Рис. 3.15. Топологически неэквивалентные системы

Приведенные выше соображения являются вспомогательными. Главная теорема приводится ниже.

Пусть нелинейная система $\hat{L}$ описывается уравнениями

$$\dot{x} = \hat{L}(x) \tag{3.17}$$

с нелинейным оператором $\hat{L}$. Линеаризуем систему (3.17):

$$\dot{x} = \hat{L}_0 x + \ldots,$$

и рассмотрим окрестность особых точек линеаризованной системы $\hat{L}_0$. Тогда нелинейная система $\hat{L}$ топологически эквивалентна в окрестности особых точек своей линеаризованной системе $\hat{L}_0$ (рис. 3.16).

Приведенная теорема позволяет довольно простым способом производить локальный анализ устойчивости нелинейных систем и устанавливать (также локально) соотношение эквивалентности между различными системами. Мы далее будем широко использовать эту возможность.

Индексы Пуанкаре. Еще одно понятие позволяет глубже понять различие между фазовыми кривыми и областями, окружающими различные особые точки. Это индекс кривой, или индекс Пуанкаре.

Рассмотрим сначала формально пространство (плоскость), в котором задано векторное поле (например, силовое кулоновское поле, образованное положительным зарядом, — рис. 3.17). Окружим заряд гладким контуром C и определим направление обхода его. Из некоторой точки, как начальной, будем обходить контур и следить за поворотом вектора поля на контуре.



Рис. 3.16. Топологическая эквивалентность нелинейной системы и ее линеаризации

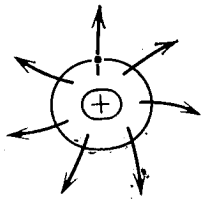


Рис. 3.17. Обход контура, охватывающего заряд ($\mathrm{ind}\, C = 1$)

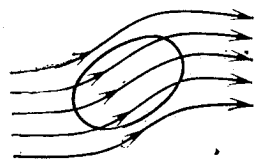


Рис. 3.18. Обход контура, не охватывающего заряд ($\mathrm{ind}\, C = 0$)

Индекс кривой C равен числу оборотов, которое совершит вектор поля при обходе C. В случае, показанном на рис. 3.17, $\mathrm{ind}\, C = 1$. Если контур C не охватывает заряд, то $\mathrm{ind}\, C = 0$ (рис. 3.18).

Уравнения движения динамических систем определяют в фазовом пространстве динамический поток. Соответствующее ему векторное поле задается фазовыми траекториями, ориентированными в направлении движения. Окружим особую точку контуром C и будем обходить его по ходу часовой стрелки. Тогда из рассмотрения рис. 3.7—3.10 убеждаемся, что индексы узла, седла, фокуса и центра равны соответственно $+1$, -1, $+1$, $+1$.

Существует ряд очень важных свойств индекса кривой. Эти свойства позволяют использовать понятие индекса для определения некоторых свойств динамических систем.

1. Индекс кривой не изменяется при ее непрерывной деформации, если кривая не пересекает при этом особую точку.

2. Точно так же индекс не изменяется при непрерывной и неособой деформации векторного поля.

3. Индекс контура C равен сумме индексов особых точек, лежащих внутри C.

Пример 1. При нелинейном резонансе происходит рождение новых особых точек парами: числа новых гиперболических и эллиптических точек равны. Поэтому индекс кривой, охватывающей область резонанса, не изменяется (число новых особых точек с индексом $+1$ равно числу новых особых точек с индексом -1). Однако топологическая структура фазового пространства изменилась.

Этот пример показывает, что значение индекса кривой не определяет степень сложности фазового пространства внутри кривой.

Пример 2. Центр и фокус имеют одинаковые индексы. Но они топологически не эквивалентны.

Пример 3. Рассмотрим затухающий маятник (3.11). Его фазовый портрет приведен на рис. 3.11. Одна ячейка периодической фазовой структуры изображена на рис. 3.19. Внутри контура имеются два седла и один фокус. Поэтому $\mathrm{ind}\, C = -1 - 1 + 1 = -1$.

Пример 4. Рассмотрим замкнутую фазовую кривую, описывающую периодическое движение (рис. 3.20). Соответствующее векторное поле всюду направлено по касательной к кривой. Ее индекс равен $+1$. Поэтому внутри кривой есть по крайней мере одна особая точка (узел, фокус или центр). Более того, если внутри кривой есть несколько особых точек, то число седел на единицу

меньше числа остальных особых точек (все они предполагаются простыми, т. е. не кратными).

Следствие. При нелинейном резонансе в гамильтоновской системе с $N=1$ рождается равное число седел и центров. Это следует из того, что резонансную область можно окружить замкнутой фазовой траекторией, имеющей индекс $+1$.

Структурная устойчивость. Мы обладаем теперь достаточным количеством информации для того, чтобы рассмотреть понятие структурной устойчивости динамических систем. Оно было введено в 1937 г. А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным и играет фундаментальную роль в теории устойчивости динамических систем.

Рассмотрим динамическую систему $\hat{L}(x, \mu)$, определяемую системой уравнений движения

$$\dot{x}=\hat{L}(x, \mu) \tag{3.18}$$

для вектора состояния x и зависящую от некоторой совокупности параметров (μ). Фазовое пространство системы наделено некоторой структурой, которая задается направленным по движению ходом фазовых траекторий. Как мы уже видели, эта структура полностью определяется особыми структурными элементами в области движения. К ним относятся особые точки, сепаратрисы и предельные циклы. Их взаимное расположение в фазовом пространстве и определяет его структуру. Хотя элементов структуры и не слишком много, тем не менее их уже достаточно для того, чтобы столкнуться в некотором смысле с «зоологической» проблемой многообразия видов структур.

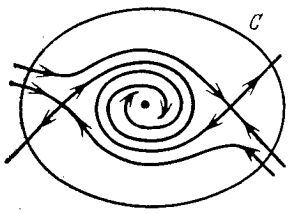


Рис. 3.19. Ячейка затухающего осциллятора ($\mathrm{ind}\, C=-1$)

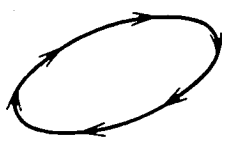


Рис. 3.20. Индекс замкнутой фазовой кривой равен $+1$

Непосредственное исследование всех возможных видов структур фазового пространства было бы задачей не только громоздкой, но и в достаточной степени бессмысленной. Среди множества различных ситуаций есть такие, которые имеют физический смысл и являются типичными, но есть и исключительные случаи. Поэтому, в первую очередь, следует провести определенную классификацию систем $\hat{L}(x, \mu)$.

Пусть при малом «шевелении» поля $\hat{L}$ (т. е. при его малом возмущении) полученная динамическая система будет эквивалентна исходной. Тогда такую систему можно назвать структурно-устойчивой, или грубой.

Предположим, например, что $\hat{L}(x, \mu)$ описывает маятник с коэффициентом трения μ:

$$\dot{q}=p, \quad \dot{p}=-\mu p+\sin q; \quad x=(p, q).$$

При $\mu=0$ система имеет особую точку типа «центр», а при $\mu>0$ — фокус. Эти точки топологически не эквивалентны. Таким образом, если сначала $\mu=0$, то малое шевеление параметра приводит к системе другого типа. Наоборот, если сначала был маятник с трением $(\mu>0)$, то достаточно малое шевеление μ не изменяет характера динамики системы. Маятник по-прежнему имеет особую точку — фокус.

Интуитивное определение понятия структурной устойчивости выглядит достаточно просто. Рассмотрим произвольное возмущение исходной динамической системы. Новая, возмущенная динамическая система должна быть во всем подобна исходной, невозмущенной системе. Дадим строгое определение понятия структурной устойчивости (см., например, [12]).

Обозначим через $x_k(t)$ состояние k-й системы ($k=1, 2$) в момент времени t. Эволюция системы определяется уравнением

$$x_k(t+T)=\hat{T}_k x_k(t) \qquad (k=1, 2). \tag{3.19}$$

Пусть существует гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование) g, связывающий системы $x_1(t)$ и $x_2(t)$, т. е.

$$x_2(t)=g(x_1(t)). \tag{3.20}$$

Системы 1 и 2 называются топологически эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм g, что из равенства (3.20) следует равенство

$$x_2(t+T)=g(x_1(t+T)). \tag{3.21}$$

Используя определения (3.19) и (3.20), перепишем условие (3.21) в виде

$$\hat{T}x_2=\hat{T}g(x_1)=g(\hat{T}x_1), \tag{3.22}$$

где аргумент t для простоты опущен.

Равенство (3.22) показывает, что преобразования $\hat{T}$ и g коммутируют. Однако для определения структурной устойчивости необходимо еще одно, более тонкое понятие.

Системы называются топологически орбитально эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм, который переводит ориентированные фазовые кривые одной системы в ориентированные фазовые кривые другой системы.

Динамическая система будет структурно устойчивой, если существует конечная область возмущений $\delta\hat{L}$ такая, что возмущенная система $x+\delta x$ топологически орбитально эквивалентна исходной системе x и мало отличается от нее.

Некоторая громоздкость определений отражает на самом деле достаточно наглядную картину. Возмущение не должно быть специально подобранным. Поэтому говорят о конечной области $\delta\hat{L}$. Новое фазовое пространство со всеми фазовыми траекториями (включая особые траектории и особые и изолированные точки) можно, непрерывно и обратимо изгибая, превратить в невозмущенный фазовый портрет.

Понятие структурной устойчивости динамических систем, на первый взгляд, приводит к некоторому указанию, как надо отыскивать случай общего положения, т. е. типичный для реальной физической ситуации, в которой всегда действуют какие-либо небольшие возмущения. Если система структурно неустойчива, то малое шевеление параметров должно приводить ее к устойчивому состоянию. Все неустойчивые состояния при этом вымирают. Выживает лишь типичное состояние, которое и должно вызывать главный физический интерес. Однако развитие идей иного рода привело к обнаружению совсем другой картины, которая возникает, если $N \geqslant {}^3/_2$. Оказывается, существуют динамические системы, в окрестности которых структурно устойчивых систем нет (либо их так мало и окрестность устойчивости так мала, что ими можно пренебречь). И, более того, такая ситуация оказывается типичной. Мы познакомимся с ней в последующих главах.

§ 4. Простейшие бифуркации

Под бифуркацией понимают любую качественную или топологическую перестройку системы, происходящую при переходе параметра системы μ через критическое (бифуркационное) значение μ_0. В простейших случаях можно перечислить все возможные буфуркации и тем самым предсказать все возможные пути эволюции системы. Это происходит благодаря тому, что между двумя последовательными бифуркациями состояния динамической системы топологически эквивалентны. Еще одна приятная возмож-

ность заключается в том, что анализ бифуркации можно провести в очень малой области значений μ вблизи точки μ_0. Мы приведем ниже примеры основных бифуркаций в одномерном случае

$$\dot{x} = L(x, \mu) \tag{4.1}$$

и бифуркации Пуанкаре—Андронова—Хопфа в двумерном случае

$$\dot{z} = L(z, \mu), \tag{4.2}$$

где z—двумерный вектор (ком. 3).

Тангенциальная бифуркация. Исследование бифуркаций проводится в расширенном пространстве, представляющем собой прямое произведение

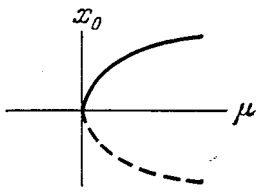


Рис. 3.21. Тангенциальная бифуркация: сплошная кривая — устойчивые решения, штриховая кривая—неустойчивые решения

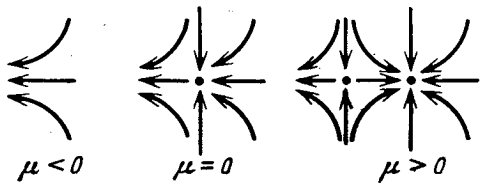


Рис. 3.22. Образование особой точки «седло-узел» при $\mu = 0$ (по вертикали — ось y, по горизонтали — ось x)

фазового пространства на пространство параметров. В случае (4.1) это двумерное пространство (x, μ). Различные виды бифуркаций происходят в зависимости от вида поля $L(x, \mu)$.

Рассмотрим случай

$$L(x, \mu) = \pm x^2 + \mu. \tag{4.3}$$

Мы должны проделать следующее: 1) найти особые точки уравнения

$$\dot{x} = \pm x^2 + \mu; \tag{4.4}$$

2) найти решения в окрестности особых точек $x_0 = x_0(\mu)$; 3) проследить за изменением особых точек и решений при изменении параметра μ.

Выберем сначала в (4.3) и (4.4) знак «—» перед x^2. Из (4.4) следует, что

$$x_0 = \pm\sqrt{\mu}, \tag{4.5}$$

т. е. при $\mu < 0$ особых точек нет, а при $\mu > 0$ рождаются две особые точки (рис. 3.21). В окрестности особой точки x_0 имеем

$$\dot{x} \approx -2x_0(x - x_0).$$

Отсюда видно, что

$$\xi(t) = \xi(0)\, e^{-2x_0 t}, \qquad \xi \equiv x - x_0,$$

и следовательно, точка $x_0 = \sqrt{\mu}$ устойчива, а точка $x_0 = -\sqrt{\mu}$ неустойчива.

При $\mu = 0$ имеется только одна особая точка $x_0 = 0$.

Если в (4.3) и (4.4) перед x^2 стоит знак «+», то все выводы сохраняются с заменой $\mu \to -\mu$, $t \to -t$.

Таким образом, при движении по μ слева направо в точке $\mu = 0$ рождается пара особых точек. В случае бóльшего числа измерений одна из рождающихся точек является узлом, другая—седлом. Поэтому эта бифуркация называется также «седло-узел». Это легко увидеть, если дополнить уравнение (4.4) еще одним независимым уравнением относительно y.

Пусть, например,

$$\dot{x} = -x^2 + \mu, \quad \dot{y} = -y. \tag{4.6}$$

Отсюда видно, что всегда $y \to 0$. Исследование поведения x при разных μ то же, что и выше. Поэтому поведение траекторий на фазовой плоскости (x, y) имеет вид, изображенный на рис. 3.22. При $\mu = 0$ узел и седло сливаются, образуя особую точку, называемую «седло-узел».

Смена устойчивости. Эта бифуркация называется также транскритической и порождается полем

$$L(x, \mu) = \mu x \pm x^2. \tag{4.7}$$

Особые точки определяются уравнением

$$x_0 (x_0 \pm \mu) = 0.$$

Пусть сначала в (4.7) зафиксирован знак «—». Тогда точка $x_0 = 0$ устойчива при $\mu < 0$ и неустойчива при $\mu > 0$, а точка $x_0 = \mu$, наоборот, устойчива

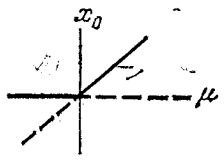


Рис. 3.23. Бифуркация смены устойчивости

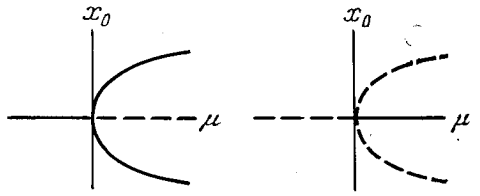


Рис. 3.24. Прямая и обратная бифуркации удвоения

при $\mu > 0$ и неустойчива при $\mu < 0$. Этот вывод изображен на рис. 3.23 с теми же обозначениями, что и на рис. 3.21.

При фиксировании знака «+» в (4.7) сохраняются все рассуждения с заменой $\mu \to -\mu$, $t \to -t$.

Бифуркация удвоения. Она появляется, если квадратичный член в разложении $L(x, \mu)$ отсутствует и следует удерживать кубический член по x:

$$L(x, \mu) = \mu x \pm x^3. \tag{4.8}$$

Фиксируем знак «—» в (4.8). Особые точки определяются выражениями

$$x_0 = 0, \quad x_0 = \pm \sqrt{\mu}.$$

Их три. Точка $x_0 = 0$ устойчива при $\mu < 0$ и неустойчива при $\mu > 0$, как и в случае (4.7). Точки $x_0 = \pm \sqrt{\mu}$ отсутствуют при $\mu < 0$, а при $\mu > 0$ обе они устойчивы.

Соответствующая бифуркация изображена на рис. 3.24. На нем же изображена обратная бифуркация удвоения, соответствующая знаку «+» в (4.8).

Описанное здесь поведение системы называют также бифуркацией типа «вилка». Мы еще вернемся к бифуркации удвоения в следующем пункте.

Бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа (ПАХ). Эта бифуркация происходит из довольно типичной ситуации, возникающей в задачах нелинейной физики. Для этого надо рассмотреть систему, состоящую из некоторого числа N степеней свободы. Будем считать сначала эту систему гамильтоновской. Тогда можно представить ее гамильтониан в виде

$$H = {}^1/_2 \sum_k (\dot{x}_k^2 + \omega_k^2 x_k^2) + \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1 k_2 k_3} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} + \ldots \tag{4.9}$$

Ограничимся для простоты только выписанными членами, пренебрегая нелинейностью более высокого порядка. Величины $V_{k_1 k_2 k_3}$ называют иногда матричными элементами взаимодействия.

Часть I. ЧАСТИЦЫ

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ

Физические системы можно условно разделить на два вида — частицы и поля. Их принято описывать по-разному, хотя и существует стремление, которое иногда удается реализовать, описывать поля так же, как и частицы. Возможно, что в рамках классической физики можно найти единый способ описания частиц и полей такой, в котором их основные свойства можно сформулировать в некоторой универсальной форме. Однако свойства частиц и полей настолько отличаются друг от друга, что мы вынуждены называть это различие принципиальным. Прежде всего оно связано с числом степеней свободы. Любая физическая система из конечного числа частиц имеет конечное число степеней свободы, равное числу частиц, умноженному на некоторое небольшое число. Поля с этой точки зрения характеризуются бесконечным числом степеней свободы, и при предельном переходе к бесконечности возможны многие неожиданности, которые, как мы увидим далее, реализуются природой достаточно искусно и разнообразно.

Это введение объясняет, почему изложение динамики систем следует разделить на две части и почему первую из них следует начать с динамики частиц. Классическая динамика частиц является наиболее развитой областью физики, и здесь существуют удивительные по своей красоте результаты, составляющие определенный фундамент для понимания нелинейных явлений самой разнообразной природы. В этой и следующей главах будут приведены в краткой форме основные результаты классической механики частиц, необходимые для дальнейшего изложения.

§ 1. Фазовое пространство

Исследование свойств динамических систем наиболее удобно и естественно проводить, используя понятие фазового пространства.

Траектории и фазовый поток. Состояние механической системы или частицы задается точкой в фазовом пространстве (q, p) с N-мерными векторами $q=(q_1, \ldots, q_N)$ и $p=(p_1, \ldots, p_N)$. Их принято называть обобщенными координатами и обобщенными импульсами. В этом случае принято говорить, что система имеет N степеней свободы, а ее фазовое пространство $2N$-мерно.

Изменение состояния системы со временем t приводит к перемещению точки (q, p) в фазовом пространстве. Так возникает траектория системы $(q(t), p(t))$. Оператор T, переводящий систему из одного состояния в момент времени $t=0$ в другое состояние в момент времени t,

$$(q(t), p(t))=\hat{T}(q(0), p(0)), \tag{1.1}$$

называется фазовым потоком. Обычно фазовый поток задается с помощью дифференциальных уравнений движения:

$$\dot{q}=Q(q, p, t); \quad \dot{p}=P(q, p, t), \tag{1.2}$$

Введем в качестве независимых переменных комплексные амплитуды c_k, c_k^* по формулам

$$\dot{x}_k = i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(c_k - c_k^*), \qquad x_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(c_k + c_k^*). \tag{4.10}$$

Подстановка этих выражений в (4.9) дает

$$H = \sum_k \omega_k c_k c_k^* + \sum_{k_1, k_2, k_3} \overline{V}_{k_1 k_2 k_3}(c_{k_1} + c_{k_1}^*)(c_{k_2} + c_{k_2}^*)(c_{k_3} + c_{k_3}^*), \tag{4.11}$$

где $\overline{V}_{k_1 k_2 k_3} = V_{k_1 k_2 k_3}/(8\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3})^{1/2}$. Переменные c_k, c_k^* являются канонически сопряженной парой, т. е.

$$\dot{c}_k = i\frac{\partial H}{\partial c_k^*}, \qquad c_k^* = -i\frac{\partial H}{\partial c_k}. \tag{4.12}$$

Им соответствуют, например, в квантовой теории операторы уничтожения и рождения соответственно.

Нетрудно также усмотреть связь комплексных амплитуд с переменными действие—угол:

$$|c_k|^2 = I_k, \qquad \vartheta_k = \arg c_k. \tag{4.13}$$

Использование комплексных амплитуд иногда предпочтительнее из-за симметрии записи.

Воспользуемся теперь одним из уравнений движения (4.12) и запишем его в виде

$$\dot{c}_k = i\omega_k c_k + i\sum_{k_1, k_2}(\overline{V}_{kk_1k_2} + \overline{V}_{k_1kk_2} + \overline{V}_{k_1k_2k})(c_{k_1} + c_{k_1}^*)(c_{k_2} + c_{k_2}^*). \tag{4.14}$$

Обобщение уравнения (4.14) на диссипативный случай производится тривиальным образом. Для этого достаточно нарушить самосопряженность правой части в (4.14). Имеем

$$\dot{c}_k = (i\omega_k + \mu_k)c_k + \sum_{k_1, k_2}\tilde{V}_{kk_1k_2}(c_{k_1} + c_{k_2}^*)(c_{k_2} + c_{k_2}^*), \tag{4.15}$$

где μ_k — параметр диссипации и

$$\operatorname{Im}\tilde{V}_{kk_1k_2} = \overline{V}_{kk_1k_2} + \overline{V}_{k_1kk_2} + \overline{V}_{k_1k_2k},$$
$$\operatorname{Re}\tilde{V}_{kk_1k_2} \equiv U_{kk_1k_2} \neq 0.$$

Величины $\operatorname{Im}\tilde{V}$ дают нелинейные поправки к частотам ω_k, а $\operatorname{Re}\tilde{V}$ — нелинейные поправки к коэффициентам диссипации μ_k.

Конечно, система (4.15) очень сложна и необычайно богата различными физическими явлениями, с которыми мы будем в соответствующих местах встречаться. Здесь мы остановимся лишь на одном простом случае, убедившись в его типичности. Первое упрощение связано с малостью диссипативных членов и малостью взаимодействия:

$$\mu_k \ll \omega_k, \qquad U_{kk_1k_2} \ll \omega_k, \qquad \operatorname{Im} V_{kk_1k_2} \ll \omega_k.$$

Второе упрощение связано с возможностью пренебречь взаимодействием между степенями свободы и оставить в первом приближении лишь собственные перенормировки частоты и диссипации. Это дает

$$\dot{c}_k = (i\bar{\omega}_k + \bar{\mu}_k)c_k + U_k|c_k|^2 c_k, \tag{4.16}$$

где

$$\bar{\omega}_k = \omega_k + \sum_{k_1 \neq k}\operatorname{Im}\tilde{V}_{kk_1k_1}|c_{k_1}|^2,$$
$$\bar{\mu}_k = \mu_k + \sum_{k_1 \neq k}\operatorname{Re}\tilde{V}_{kk_1k_1}|c_{k_1}|^2, \tag{4.17}$$
$$U_k \equiv \operatorname{Re} V_{kkk}.$$

Выражения (4.16) и (4.17) отбирают из всего множества членов в (4.15) лишь самые медленные, поскольку быстро осциллирующие члены можно удалить путем усреднения.

И, конечно, следует предположить отсутствие резонансов типа

$$\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} \pm \omega_{k_3} = 0$$

и отсутствие очень малых частот ω_k.

Теперь, забыв о происхождении параметров ω_k, μ_k и U_k, перепишем уравнение (4.16) в виде

$$\dot{z} = (i\omega + \mu) z + U |z|^2 z, \tag{4.18}$$

где комплексная амплитуда $z \equiv c_k$. Заметим, что нелинейная перенормировка диссипативного параметра μ за счет члена $U|z|^2$ очень важна. Этот член специально выделен, так как он может стать при достаточно больших $|z|$ того же порядка, что и μ, оставаясь при этом малым по сравнению с частотой ω.

Уравнение (4.18) и есть стандартное уравнение типа (4.2) с

$$L(z, \mu) = (i\omega + \mu + U|z|^2) z, \tag{4.19}$$

определяющее бифуркацию рождения предельного цикла.

Предполагается, что ω и U отличны от нуля, и исследуются только возможные бифуркации в пространстве (z, z^*, μ), связанные с изменением μ.

Уравнение для особых точек

$$L(z_0, \mu) = 0 \tag{4.20}$$

дает лишь одну точку покоя $z_0 = 0$. Это фокус, который устойчив при $\mu < 0$ и неустойчив при $\mu > 0$.

Дальнейший анализ удобно произвести в полярных координатах

$$I = |c|^2, \qquad \vartheta = \arg c,$$

которыми в данном случае являются переменные действие — угол. Домножаем (4.18) на c^* и складываем результат с комплексно сопряженным уравнением. Получаем

$$\dot{I} = 2I(\mu + UI). \tag{4.21}$$

Уравнение (4.21), кроме положения равновесия $I = 0$, которое соответствует точке $z_0 = 0$, имеет еще одно равновесное значение

$$I_0 = -\mu/U. \tag{4.22}$$

Это значение должно удовлетворять очевидному неравенству $I_0 > 0$, согласно определению величины I. Поэтому оно существует только в случае, если μ и U имеют разные знаки.

При постоянном значении I фаза амплитуды c может меняться со временем. Этому соответствует вращающийся вектор в фазовом пространстве. Таким образом, условие (4.22) определяет предельный цикл. Это объясняет, почему оно не могло быть получено из уравнения (4.20).

Уравнение (4.21) легко исследовать в окрестности точки $I = I_0$. Имеем

$$\dot{I} \approx 2I_0 U (I - I_0). \tag{4.23}$$

Пусть сначала $U < 0$. Тогда предельный цикл (4.22) существует и устойчив при $\mu > 0$ и отсутствует при $\mu < 0$ (рис. 3.25). Так происходит рождение устойчивого предельного цикла из устойчивого фокуса при переходе параметра μ из отрицательного значения в положительное. При этом переходе через точку бифуркации $\mu = 0$ фокус становится неустойчивым. Эту же картину удобно изобразить в фазовом пространстве $(x, \dot{x})$ или (c, c^*), как это сделано на рис. 3.26.

Аналогично изображается обратная бифуркация ПАХ при $U > 0$. Она описывает исчезновение неустойчивого предельного цикла при $\mu < 0$ с одновременным превращением устойчивого фокуса в неустойчивый при $\mu > 0$ (рис. 3.25, 3.27).

Опишем теперь, что происходит при $U < 0$. Из уравнения (4.21) видно, что при $U < 0$ точка $I = 0$ является устойчивым фокусом, а при $U > 0$ —

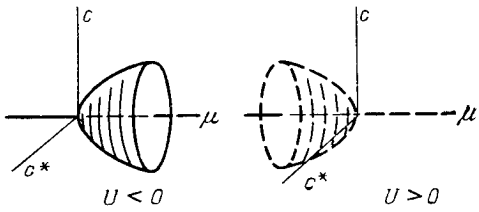


Рис. 3.25. Прямая ($U < 0$) и обратная ($U > 0$) бифуркации Пуанкаре — Андронова — Хопфа

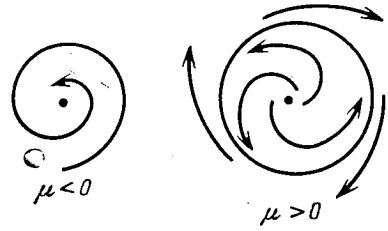


Рис. 3.26. Рождение устойчивого предельного цикла ($U < 0$)

неустойчивым фокусом. Затухание или рост амплитуды $|c|$, однако, происходит степенным образом, а не экспоненциальным, как это имеет место при $\mu \neq 0$.

Рождение устойчивого предельного цикла описанным выше способом является очень типичным для многих физических приложений. Сделаем следующие два замечания, помогающие лучше выяснить некоторые детали.

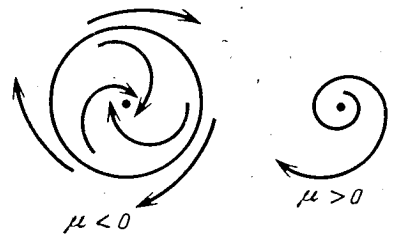


Рис. 3.27. Исчезновение неустойчивого предельного цикла ($U > 0$)

1. Рассмотрим изменение поведения системы при изменении знака μ в зависимости от знака U. При $U < 0$ изменение μ от $\mu < 0$ до $\mu > 0$ приводит к плавному переходу системы от положения в устойчивом фокусе к колебаниям (они называются автоколебаниями) с амплитудой, пропорциональной $\sqrt{\mu}$. С ростом μ от нуля и далее амплитуда плавно растет. Такой режим называется мягким возбуждением.

При $U > 0$ переход μ от $\mu < 0$ к $\mu > 0$ приводит к появлению неустойчивого фокуса, и система возбуждается до тех пор, пока не учтенные в уравнении (4.19) члены не приведут к ограничению ее амплитуды. Это соответствует жесткому режиму.

2. Мы увидим далее, что увеличение числа степеней свободы еще хотя бы на $^1/_2$ (т. е. введение возмущения к уравнению (4.19) в виде внешней периодической во времени силы) приводит к тому, что при определенных неравенствах система теряет структурную устойчивость.

Бифуркация удвоения периода. Эта бифуркация играет важную роль в процессах перехода от ламинарного (регулярного) движения к турбулентному. Им в соответствующем месте далее будет уделено достаточно подробное изложение. Здесь же мы опишем лишь общие свойства последовательности бифуркаций удвоения периода в некотором простейшем случае. Она была обнаружена в работе [13] для отображения

$$x_{n+1} = k \sin \pi x_n \pmod 1, \tag{4.24}$$

где k — параметр и $k < 1$. Областью определения x является интервал (0, 1).

Запишем одномерное отображение в виде

$$\bar{x} = \hat{T}x = f(k, x) \pmod 1. \tag{4.25}$$

Оно отображает единичный интервал (0, 1) на него же; однако мера при этом, вообще говоря, не сохраняется. Отображение (4.25) удобно представлять

на графике $(\bar{x}, x)$. В случае (4.24) оно изображено на рис. 3.28. Иногда в качестве $f(x)$ рассматривают упрощенный вариант

$$f(x) = 4kx(1-x), \tag{4.26}$$

где зависимость от k для простоты далее не пишется. Исследование этих двух случаев принципиально ничем не отличается. Важно лишь, что это функции с одним максимумом, который из соображений удобства размещен в центре отображаемого интервала.

Приведем некоторую простейшую схему анализа отображения (4.25) и далее, для конкретности, будем все время подразумевать выражение (4.26).

Найдем сначала неподвижную точку $\hat{T}$-отображения. Она определяется уравнением $\bar{x} = x$ или

$$x^* = f(x^*). \tag{4.27}$$

В случае (4.26) уравнение (4.27) определяет две неподвижные точки

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - 1/4k. \tag{4.28}$$

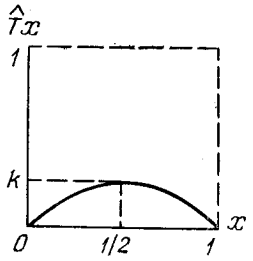


Рис. 3.28. График синус-отображения при $k < 1$

Исследуем динамику системы в окрестности x^*. Для этого введем отклонения y от неподвижной точки:

$$x_n = x^* + y_n, \qquad x_{n+1} = x^* + y_{n+1}.$$

Считая величины y малыми, находим с точностью до малых первого порядка:

$$x_{n+1} = x^* + y_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + y_n) = f(x^*) + y_n f'(x^*).$$

Используя уравнение (4.27), получаем

$$y_{n+1}/y_n = f'(x^*). \tag{4.29}$$

Правая часть получившегося итерационного уравнения для y_m является константой. Поэтому имеем следующие три случая. Неподвижная точка x^* является локально устойчивой, если

$$|f'(x^*)| < 1,$$

локально неустойчивой, если

$$|f'(x^*)| > 1,$$

и границей устойчивости при

$$|f'(x^*)| = 1.$$

Вернемся теперь к отображению (4.26). При $k < 1/4$ имеем $|f'(x_1^*)| < 1$, и, следовательно, точка x_1^* — устойчивая. Траектория $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ притягивается к x_1^*, по крайней мере, если она попадает в ее окрестность. Точка x_2^* не принадлежит интервалу $(0, 1)$. Таким образом, отображение (4.26) имеет в области значений параметра $k < 1/4$ одну притягивающую точку $x^* = 0$.

При $k = 1/4$ $f'(x_1^*) = 1$, и, следовательно, это граница устойчивости.

Рассмотрим область значений параметра

$$1/4 < k < 3/4. \tag{4.30}$$

Легко убеждаемся в том, что в ней точка x_1^* неустойчивая, а точка x_2^* — устойчивая и притягивает траекторию. Это означает, что при $k = 1/4$ происходит бифуркация смены устойчивости. Вообще, точка x_1^* неустойчива при любом $k > 1/4$. При $k = 3/4$ $f'(x_2^*) = -1$, и вторая неподвижная точка теряет устойчивость при $1 > k > 3/4$.

Далее следует проявить определенную настойчивость и поискать при $k > {}^3/_4$ другие возможные притягивающие множества, например циклы. Циклом порядка n, или просто n-циклом, является последовательность точек

$$x_0;\ x_1 = \hat{T}x_0;\ x_2 = \hat{T}^2x_0;\ \ldots;\ x_n = \hat{T}^n x_0$$

такая, что

$$x_0 = \hat{T}^n x_0,$$

или, иначе,

$$x_0 = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n}(x_0))\ldots) \pmod 1. \tag{4.31}$$

Рассмотрим 2-цикл:

$$\begin{aligned} &x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \pmod 1; \\ &f(f(x_0)) = x_0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

График функции

$$\hat{T}^2x = f(f(x)) \pmod 1$$

приведен на рис. 3.29. Решениями уравнения (4.32) являются точки пересечения этой кривой с диагональю квадрата. Их может быть одна, две или четыре. Можно убедиться элементарными вычислениями, аналогичными проделанным выше, что устойчивый 2-цикл появляется только в области $k > {}^3/_4$ и существует вплоть до некоторого значения k_2.

Численный анализ показывает, что существует последовательность значений параметра: k_1, k_2, ..., такая, что при переходе через k_n происходит

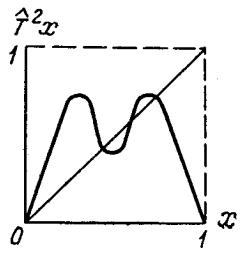


Рис. 3.29. График двойной итерации

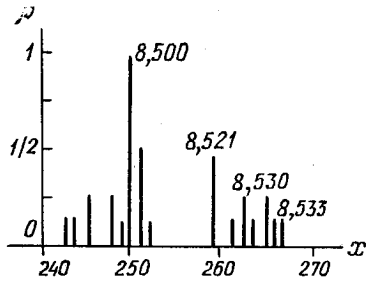


Рис. 3.30. Пример бифуркаций удвоения синус-отображения вблизи полуцелого значения k

бифуркация от притягивающего 2^{n-1}-цикла к 2^n-циклу. Это и есть бифуркации удвоения периодов. Пример их для синус-отображения (4.24) приведен на рис. 3.30, где изображена функция распределения $\rho(x)$ значений x_m после большого числа итераций. Она концентрируется возле притягивающих точек n-цикла в зависимости от значений параметра k.

Существует ли какая-либо закономерность в последовательности бифуркационных значений k_1, ..., k_n, ...? Оказывается, существует в пределе $n \to \infty$. Она была обнаружена в работе [14] и имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} = \delta = 4{,}6692016091\ldots \tag{4.33}$$

Иначе,

$$\begin{aligned} &\Delta k_{n+1} = \delta^{-1}\Delta k_n = \delta^{-2}\Delta k_{n-1} = \ldots \quad (n \to \infty), \\ &\Delta k_n \equiv k_n - k_{n-1}, \end{aligned}$$

т. е. расстояние между двумя последовательными бифуркациями экспоненциально убывает. Это указывает на существование некоторого предельного значения k^* в последовательности бифуркаций удвоения (ком. 4).

Бифуркациями удвоения периодов не исчерпываются все возможности появления различных устойчивых (притягивающих) циклов. Полный ответ дает следующая теорема.

Теорема Шарковского [15]. Пусть $\hat{T}$ есть непрерывное отображение линейной области R в R и пусть $\hat{T}$ имеет n-цикл. Тогда $\hat{T}$ имеет любой m-цикл, предшествующий n в последовательности

$$3 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow \ldots \leftarrow 2\cdot 3 \leftarrow 2\cdot 5 \leftarrow 2\cdot 7 \leftarrow \ldots \leftarrow$$
$$\leftarrow 2^2\cdot 3 \leftarrow 2^2\cdot 5 \leftarrow 2^2\cdot 7 \leftarrow \ldots \leftarrow 2^3 \leftarrow 2^2 \leftarrow 2 \leftarrow 1. \qquad (4.34)$$

В формуле (4.24) стрелки указывают только направление упорядочивания натуральных чисел. Если известно, что система имеет n-цикл и условия теоремы выполнены, то в системе также есть циклы, соответствующие всем числам, стоящим справа от n.

Итак, теорема Шарковского выделяет в качестве последней бифуркацию к периоду 3 и ставит тем самым вопрос: что же следует за ней?

Замечание о бифуркациях. Последний пример, так же, как и большинство предыдущих в этом параграфе, является одномерным. Однако уравнение движения в нем является конечно-разностным, а не дифференциальным. Это сразу обогатило его. Вряд ли можно ошибиться в оценке сложности одномерной итерации, если обратиться к теореме Шарковского (4.34). Конечно, можно обратиться с помощью тех же методов к анализу динамических систем более высокого порядка. Трудно обвинить в чем-либо того исследователя, который, предвидя ожидающие его трудности на этом пути, попытается взяться за задачу иначе.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 3

1. Строгий анализ и точные теоремы о нелинейном резонансе имеются в книге Арнольда [1]. Различные аспекты теории и приложений нелинейного резонанса приведены в [2, 3]. Функция распределения частиц при нелинейном резонансе приведена в [4].

2. Более подробные сведения о топологических свойствах динамических систем и доказательство используемых ниже теорем можно найти в [10].

3. Современное изложение многих вопросов, связанных с теорией бифуркаций, и различные их примеры имеются в [11]. Доказательство теоремы о рождении устойчивого предельного цикла (эту бифуркацию называют в литературе часто бифуркацией Хопфа) было опубликовано впервые Андроновым [12].

4. С различными бифуркационными свойствами одномерных итераций можно ознакомиться в обзоре [16].

Глава 4

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ХАОС

До сих пор при рассмотрении различных вопросов динамики частиц нам приходилось проявлять определенную сдержанность в изложении, которая была тем сильнее, чем более сложные вопросы динамики рассматривались. Причина этого в том, что мы намеренно не упоминали еще об одном важном свойстве движения — возможности траектории быть случайной, или, иначе, возможности появления динамического хаоса. Вводимое здесь новое понятие является достаточно тонким и нуждается поэтому в определенных предварительных комментариях.

Новое явление, которое стало интенсивно обсуждаться в физике в основном лишь в последние двадцать лет, заключается в следующем. Рассмотрим динамическую систему в расширенном пространстве всех канонических переменных (I, ϑ) и всех параметров (μ). Движение системы происходит в некоторой области G такого пространства. Пусть также на систему не действуют никакие случайные силы, и все параметры системы μ также являются неслучайными. Тем не менее в некоторой области фазового пространства и значений параметров G_s динамика системы стохастическая. Последнее утверждение означает, что мы никаким способом не можем отличить динамический процесс, реализуемый траекторией системы

$$I = I(t;\ I_0,\ \vartheta_0;\ \mu) \qquad \vartheta = \vartheta(t;\ I_0,\ \vartheta_0;\ \mu),$$

от некоторого случайного процесса. Более того, всего лишь изменением параметров μ или изменением начальных условий (I_0, ϑ_0) мы можем получать либо регулярную (например, условно-периодическую) траекторию, либо стохастическую траекторию системы. Описанное явление и называется динамической стохастичностью. Его синонимы — хаос, стохастичность, нерегулярное движение.

Явление хаоса присуще только нелинейным системам. Оно может возникать уже при числе степеней свободы $N \geqslant {}^3/_2$ *). С ним связана неустойчивость и разрушение инвариантных торов. Поэтому нельзя получить полное представление об эволюции динамических систем, не затрагивая области G_s стохастической динамики. И как раз теперь полезно задать вопрос о том, каких систем больше. Его можно поставить следующим образом. Рассмотрим некоторое воображаемое пространство, в котором одна точка изображает динамическую систему. Как много среди этого множества точек таких, у которых есть область стохастичности $G_s \neq 0$? Оказывается, что почти все динамические системы имеют область хаоса. И наоборот, системы, которые имеют только регулярную динамику, представляют собой исключительные случаи.

Сделанное утверждение столь сильно изменяет наше общее представление о динамических системах, что это приводит к необходимости нового взгляда и нового подхода к анализу нелинейной динамики. Предположения о законах случая и статистических ансамблях, которые ранее были оправданы лишь для очень больших систем ($N = 10^{23}$), теперь, во-первых, перестают быть предположениями, а, во-вторых, становятся применимыми при малом числе степеней свободы ($N \geqslant {}^3/_2$). Методы статистической механики вторгаются в малые системы, в которых отсутствуют случайные воздействия.

Тем не менее следует обязательно заметить, что область возникновения хаоса G_s может быть либо очень малой, либо вообще не иметь реального физического смысла для данной задачи. Поэтому хаос оказывается не всегда заметным или не всегда присущим условиям, в которых протекает физическое явление.

§ 1. Эргодичность и перемешивание

Мы должны определенным образом подготовиться к тому, что решением уравнений движения окажется случайная траектория, т. е. такая траектория, которую можно считать реализацией некоторого случайного процесса. Эта подготовка связана с введением некоторых основных понятий эргодической теории.

Мера в фазовом пространстве. В основе ее лежит иной, чем это было до сих пор, анализ движения частиц. Поскольку траектории частиц становятся необычайно сложными и запутанными, бессмысленно следить за каждой траекторией в отдельности. Вместо этого следует рассматривать сразу сово-

*) Напомним, что $N = {}^3/_2$ означает, что на динамическую систему с $N = 1$ действует зависящая от времени периодическая сила.

купность траекторий (или частиц), которые в любой момент времени занимают конечный объем фазового пространства $\Delta\Gamma(t)$. Распределение частиц в нем характеризуется некоторой плотностью $\rho(t)$, которая удовлетворяет естественному условию нормировки

$$\int_{\Gamma} \rho(t)\, d\Gamma = 1, \tag{1.1}$$

где интегрирование ведется по всему фазовому пространству Γ допустимого движения.

Если рассматривать не распределение частиц, а только одну частицу и соответствующую ей траекторию, то, как уже отмечалось в гл. 1, ее функция распределения имеет сингулярный вид:

$$f(p,\ q,\ t) = \delta(p - p(t))\,\delta(q - q(t)). \tag{1.2}$$

Главное отличие вводимой функции ρ от функции (1.2) в несингулярности первой. Число частиц в области $\Delta\Gamma$ равно

$$\Delta m = \int_{\Delta\Gamma} \rho\, d\Gamma. \tag{1.3}$$

Эта величина называется мерой области $\Delta\Gamma$. Если область $\Delta\Gamma$ очень мала, то распределение ρ можно считать близким к константе $\rho \approx \rho_0$ и

$$\Delta m = \rho_0\, \Delta\Gamma. \tag{1.4}$$

Любое конечное число частиц занимает нулевой фазовый объем, и поэтому этим частицам соответствует нулевая мера. Таким способом устраняются из рассмотрения сразу сингулярные распределения типа (1.2) и любое конечное число частиц или соответствующих им траекторий. Поэтому все рассуждения обычно проводятся с точностью до некоторого множества нулевой меры частиц или траекторий или точек в фазовом пространстве. Сделанная оговорка является типичной для современной эргодической теории (ком. 1).

Дадим пример построения меры для замкнутой гамильтоновской системы. В этом случае энергия системы

$$E = H(p,\ q) = \text{const} \tag{1.5}$$

является инвариантом движения. Пусть этот инвариант является единственным, т. е. все остальные интегралы движения отсутствуют. Тогда движение происходит по гиперповерхности (1.5).

Рассмотрим в фазовом пространстве слой толщиной δE между двумя гиперповерхностями, соответствующими энергиям E и $E + \delta E$. На одной из них зададим элемент поверхности $\delta\sigma$ и рассмотрим цилиндр с объемом

$$\delta\Gamma = \delta\sigma \cdot \delta z,$$

где δz — длина высоты цилиндра, заключенного между поверхностями E и $E + \delta E$. Можно записать, что

$$\delta E = \delta z\, |\nabla H|,$$

где градиент вычисляется по нормали к гиперповерхности (1.5), т. е.

$$\nabla H = \frac{dH}{dz}.$$

Отсюда плотность частиц на единичный интервал энергии равна

$$\rho(E) = \frac{dm(E)}{dE} = \frac{\delta\Gamma}{\delta E} = \frac{\delta\sigma}{|\nabla H|}. \tag{1.6}$$

Из формулы (1.6) сразу следуют выражения для числа частиц в конечном элементе $\Delta\sigma$ гиперповерхности с энергией E:

$$m(\Delta\sigma) = \int_{\Delta\sigma} \frac{d\sigma}{|\nabla H|}, \tag{1.7}$$

и на всей гиперповерхности:

$$m(E) = \int_{E} \frac{d\sigma}{|\nabla H|}. \tag{1.8}$$

Относительная доля частиц в элементе $\Delta\sigma$ равна

$$\rho(\Delta\sigma) = \frac{m(\Delta\sigma)}{m(E)}. \tag{1.9}$$

Можно сказать, отказавшись от точных формулировок, что если область $\Delta\sigma$ достаточно мала по сравнению со всей гиперповерхностью постоянной энергии E, то $\rho(\Delta\sigma)$ есть вероятность обнаружить блуждающей по всей гиперповерхности частицу в области $\Delta\sigma$. Иначе, среднее относительное время пребывания частицы в $\Delta\sigma$ равно

$$\tau = \lim_{t(E)\to\infty} \frac{t(\Delta\sigma)}{t(E)} = \rho(\Delta\sigma) = \frac{m(\Delta\sigma)}{m(E)}, \tag{1.10}$$

где $t(\Delta\sigma)$ — полное время пребывания частицы в области $\Delta\sigma$, если на всей гиперповерхности частица находилась в течение времени $t(E)$. Формулы (1.9) и (1.10) принадлежат Больцману.

Формула (1.10) была доказана фон Нейманом в 1931 г. при условии, что динамическая система совершает финитное движение, не разложимое на отдельные метрические компоненты. Последнее означает, что нельзя указать непересекающиеся области A и B в фазовом пространстве такие, что область $(A+B)$ есть вся область финитного движения и траектория частицы лежит целиком в A или в B.

Все динамические системы (с точностью до множества нулевой меры) удовлетворяют этой теореме, называемой средней эргодической теоремой.

Эргодичность. Несколько иное определение эргодичности движения позволяет выяснить отношение этого понятия к динамическим системам.

Пусть $2N$-мерный вектор

$$z(t) = (p(t),\ q(t))$$

определяет точку в фазовом пространстве (p, q), характеризующую состояние системы в момент времени t. Эволюция системы задается оператором сдвига во времени

$$z(t+T) = \hat{T} z(t)$$

в непрерывном случае и уравнением

$$z_{n+1} = \hat{T} z_n$$

в случае дискретных динамических уравнений (например, отображений Пуанкаре).

Движение называется эргодическим, если справедливо равенство временных и фазовых средних, т. е. если

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} dt'\, f[z(t')] = \langle f \rangle, \tag{1.11}$$

где обозначено среднее по фазовому пространству

$$\langle f \rangle \equiv \int_{\Gamma} f(z)\, d\Gamma(z).$$

Отметим, что предел в формуле (1.11) не зависит от положения интервала T, т. е. от выбора начальной точки t интервала усреднения. В дискретном случае условие (1.11) имеет следующий вид:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\hat{T}^n z)=\langle f\rangle. \tag{1.12}$$

Основная идея равенств (1.11) или (1.12) в том, что траектория достаточно полно заполняет поверхность постоянной энергии и поэтому достаточно «безразлична» к информации о способе заполнения фазового пространства. Важно лишь, что это заполнение происходит. Простой иллюстрацией действия соотношений (1.11) и (1.12) является движение на двумерном торе системы с двумя степенями свободы — например, двумя связанными осцилляторами. В общем случае частоты движения ω_1 и ω_2 несоизмеримы. Поэтому траектория является обмоткой тора и покрывает его всюду плотно. В этом случае имеет место теорема (1.11) о равенстве средних величин по времени и по фазовому пространству. Если, однако, частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то в этом резонансном случае эргодическая теорема неприменима. Однако множество рациональных чисел имеет нулевую меру и как раз попадает в число нетипичных случаев, с точностью до которых доказываются равенства (1.11) и (1.12).

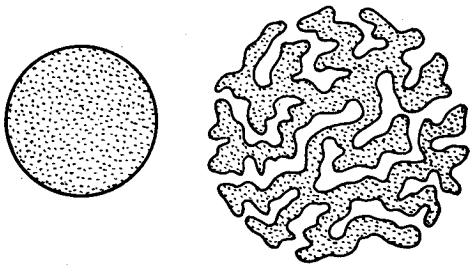


Рис. 4.1. Расплывание капли в фазовом пространстве при перемешивании

Перемешивание. Свойство эргодичности является довольно грубой характеристикой динамической системы. Поэтому нет ничего удивительного в том, что им обладают почти все системы, совершающие финитное движение. В частности, для эргодичности безразлично, является траектория системы случайной или периодической. Более тонкой характеристикой является перемешивание в фазовом пространстве. Формальное выражение этого свойства следующее.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две произвольные интегрируемые функции. Корреляционной функцией, или коррелятором, называется величина

$$\mathcal{R}(f,\ g;\ T)=\langle f(\hat{T}z)\,g(z)\rangle-\langle f(z)\rangle\langle g(z)\rangle \tag{1.13}$$

или в дискретном случае

$$\mathcal{R}_n(f,\ g)=\langle f(\hat{T}^n z)\,g(z)\rangle-\langle f(z)\rangle\langle g(z)\rangle. \tag{1.14}$$

Если имеет место эргодичность, то средние $\langle f(z)\rangle$ и $\langle g(z)\rangle$ не зависят от времени.

Перемешиванием называется расцепление парных средних при $t\to\infty$, т. е. затухание корреляторов:

$$\lim_{T\to\infty}\mathcal{R}(f,\ g;\ T)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\mathcal{R}_n(f,\ g)=0. \tag{1.15}$$

Закон убывания корреляторов зависит от выбора функций f и g и от того, является время непрерывным или дискретным. В последнем случае характер затухания корреляторов может зависеть от вида последовательности t_0, t_1, ..., t_n, ... моментов времени отображения. В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с сильным экспоненциальным затуханием корреляций $\mathcal{R}$.

Движение капли «фазовой жидкости» при перемешивании имеет весьма сложный вид (рис. 4.1). Граница капли быстро принимает необычайно сложную форму. С течением времени капля заполняет различные области фазового пространства. Объем капли при этом сохраняется по теореме Лиувилля,

и заполнение фазового объема происходит за счет вытягивания и утоньшения отростков капли.

Из условия перемешивания автоматически вытекает условие эргодичности. Различие между эргодическим и перемешивающим движениями можно понять из рис. 4.2. В эргодическом случае без перемешивания траектория последовательно «заметает» фазовое пространство. При перемешивании фазовое пространство тоже заполняется, но иным способом. Сначала за некоторое время T

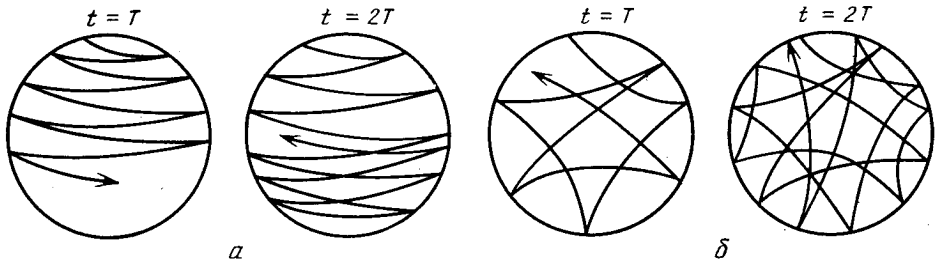


Рис. 4.2. Различие между эргодическим (*а*) и перемешивающим (*б*) движениями

система достаточно равномерно покроет сеткой траекторий все фазовое пространство. Через время $2T$ это явление примерно повторится таким образом, что размеры ячеек сетки окажутся приблизительно в два раза меньше.

Спектр. Еще одно формальное свойство динамических систем отражает различие между эргодическим и перемешивающим движением. Оно выражается в различии спектральных свойств системы.

Введем спектральную плотность коррелятора $\mathcal{R}(\omega)$:

$$\mathcal{R}(f,\ f;\ T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega T}\, \mathcal{R}(\omega).$$

При эргодическом движении без перемешивания спектр $\mathcal{R}(\omega)$ — дискретный, т. е.

$$\mathcal{R}(\omega) = \sum_k \mathcal{R}_k \delta(\omega - \omega_k).$$

Это соответствует утверждению об условно-периодическом движении системы с набором частот ω_k. Множество частот ω_k может быть бесконечным.

При движении с перемешиванием спектр частот непрерывный.

§ 2. *K*-системы

Значительное время в физике понятие перемешивания относили лишь к статистическим системам. Это представлялось вполне естественным хотя бы потому, что казалось невероятным, чтобы столь сильно различающиеся движения, как регулярное (например, условно-периодическое) и нерегулярное (стохастическое с перемешиванием), могли принадлежать одной и той же системе. Действительность оказалась достаточно неожиданной, т. е. выяснилось, что почти все нелинейные системы именно такие. Тем самым открылся иной путь анализа динамических систем. Его следует начать снова с понятия устойчивости системы (ком. 2).

Локальная неустойчивость. Даже при беглом взгляде на рис. 4.1 и 4.2 мы обнаруживаем, что свойство перемешивания должно быть тесно связано со свойствами неустойчивости динамических систем (ком. 3).

Рассмотрим сколь угодно малую ячейку фазового пространства. При перемешивании она должна расплываться по всему фазовому пространству. Это означает, что точки, которые в начальный момент времени были близки друг к другу, с течением времени удаляются друг от друга и начинают двигаться независимо. Поэтому свойство перемешивания естественно ожидать

у таких неустойчивых систем, у которых траектории с течением времени быстро удаляются друг от друга. Иными словами, сколь угодно малые возмущения начальных условий приводят к сколь угодно сильному уходу фазовой траектории системы от своего невозмущенного значения. Если фазовое пространство системы является конечным, то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характерный размер пространства, и начинается их запутывание.

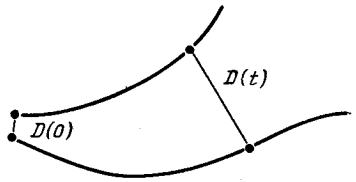


Рис. 4.3. Локальная неустойчивость траекторий

Описанный тип неустойчивого движения называется локальной неустойчивостью. Обозначим через $D(t)$ расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащими разным траекториям в момент времени t (рис. 4.3). Формальное определение локальной неустойчивости следующее: существует направление, в котором $D(t)$ растет экспоненциально:

$$D(t) = D(0)\, e^{h_0 t}, \tag{2.1}$$

где инкремент неустойчивости h_0 является, вообще говоря, функцией точки в фазовом пространстве.

Свойство (2.1) очень важно для последующего изложения. Поэтому остановимся на нем подробнее.

Пусть, например, движение динамической системы задано с помощью отображения $\hat{T}$ в фазовом пространстве (z):

$$z_{n+1} = \hat{T} z_n, \tag{2.2}$$

где n — дискретное время и вектор z определяет точку в фазовом пространстве.

Якобиева матрица $\hat{M}$ отображения $\hat{T}$ определяется как

$$M_{ij;\, n} = \frac{\partial z_{i;\, n+1}}{\partial z_{j;\, n}} \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ P), \tag{2.3}$$

где P — размерность фазового пространства. Будем считать отображение $\hat{T}$ невырожденным, т. е. $|\hat{M}| \neq 0$. Если фазовый объем сохраняется, то $|\hat{M}| = 1$ для любого момента времени n.

Рассмотрим собственные значения матрицы $\hat{M}$. Они находятся из характеристического уравнения

$$|\hat{M} - \lambda \hat{1}| = 0,$$

где $\hat{1}$ — единичная матрица размерности P. Величины λ_k, вообще говоря, комплексны. Их можно расположить в порядке возрастания абсолютных значений:

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_P|,$$

где выделено некоторое λ_k такое, что оно является последним, у которого $|\lambda_k| \leqslant 1$. Это означает, что имеется $P - k$ направлений в фазовом пространстве, вдоль которых возмущение вектора состояния и вместе с ним фазовый объем растягиваются.

Показатель растяжения можно определить следующим образом. Пусть сначала для простоты в направлении собственного вектора с номером i происходит растяжение на m-м шагу с характеристическим числом $|\lambda_{i;\, m}| > 1$. Пусть также эта величина не зависит от m. Тогда через n шагов отображения длина вектора состояния в направлении i будет расти как

$$d_i(n) = |\lambda_i|^n d_i(0) = d_i(0)\, e^{\sigma_i n}, \qquad \sigma_i \equiv \ln |\lambda_i|. \tag{2.4}$$

Величина σ_i является не чем иным, как показателем Ляпунова.

Если все неустойчивые направления имеют сохраняющиеся во времени показатели Ляпунова, то локальная неустойчивость характеризуется достаточно просто выражением

$$h_0 = \sum_{i>k}^{P} \sigma_i = \sum_{i>k}^{P} \ln|\lambda_i|. \tag{2.5}$$

Оно определяет показатель экспоненциального роста элемента фазового объема.

В общем случае показатели Ляпунова σ_i являются функцией точки z_n и, более того, направления растяжения или сжатия векторов состояния меняются в зависимости от n. С этим, как мы увидим далее, связаны некоторые формальные трудности, которые физики своеобразно «преодолевают», не обращая на них вообще никакого внимания (при этом сравнение получающегося результата с числовыми данными иногда достигает поразительной точности).

В гамильтоновском случае $|\hat{M}| = 1$ и $P = 2N$. Поэтому

$$\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{2N} = 1.$$

Это означает, что при $N = 1$

$$\lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Отсюда видно, что если неустойчивость существует, то одно направление в фазовом пространстве неустойчивое, а другое — устойчивое. Пусть для определенности

$$\lambda_1 = 1/\lambda_2 = \text{const} > 1.$$

Тогда $h_0 = \lambda_1$, и вопрос о локальной неустойчивости решен положительно.

Пример. Этот классический пример носит название автоморфизма тора [2, 4, 10]. Он представляет собой следующее отображение, действующее в фазовом пространстве (x, y):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + y_n \pmod 1, \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \pmod 1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где (mod 1) означает дробную часть выражения. Уравнения (2.6) определяют линейное преобразование на торе, сохраняющее меру. Действительно,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\hat{M}| = 1.$$

Несколько позднее мы покажем, как отображение такого типа возникает для шарика, движущегося в биллиарде со специально подобранной формой стенок.

Собственные значения матрицы $\hat{M}$ равны

$$\lambda_{1,2} = {}^1/_2(3 \pm \sqrt{5})$$

и удовлетворяют соотношению

$$\lambda_1 > 1 > \lambda_2.$$

Они также несоизмеримы и поэтому определяют эргодическое движение на торе. Существование $\lambda_1 > 0$ означает наличие локальной неустойчивости с инкрементом локальной неустойчивости

$$h_0 = \ln[(3 + \sqrt{5})/2]. \tag{2.7}$$

Развитие локальной неустойчивости приводит к причудливой модификации фазовой ячейки, о чем дает представление принадлежащий Арнольду рис. 4.4. Глядя на него, мы уже догадываемся, что здесь также имеет место перемешивание.

Связь перемешивания с локальной неустойчивостью. Существуют различные примеры и связанные с ними многие сложности, если допустить, что расцепление корреляций (1.15) может происходить произвольным способом. Чтобы избежать этих сложностей и сохранить по возможности наиболее ясную картину поведения динамических систем, мы ограничимся лишь

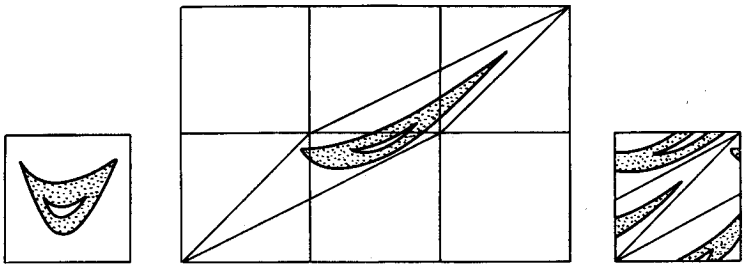


Рис. 4.4. Изменение области «кот Арнольда» (заштрихована)

теми случаями, где затухание корреляций происходит экспоненциально во времени:

$$\mathcal{R}(t) \sim \exp(-t/\tau_c). \tag{2.8}$$

Время τ_c носит название времени расцепления корреляций.

Введенное ограничение не выводит наше рассмотрение из класса типичных задач в типичных ситуациях (ком. 4).

Интуитивно кажется вполне реальным, что расцепление корреляций и, следовательно, перемешивание обусловлены локальной неустойчивостью. В тех случаях, где удается вычислить обе названные характеристики, это оказывается действительно так. Более того, имеет место соотношение

$$h_0 \sim 1/\tau_c. \tag{2.9}$$

Для примера, рассмотренного выше, коррелятор достаточно просто вычисляется и дает

$$1/\tau_c = h_0 = \ln[(3+\sqrt{5})/2]. \tag{2.10}$$

***K*-системы.** За этим очень важным соотношением скрывается в действительности еще более важная характеристика динамических систем. Соотношение (2.9) носит принципиальный характер. Оно устанавливает связь между статистическими свойствами системы (τ_c) и ее чисто динамической характеристикой h_0. Можно выяснить, когда регулярное движение системы разрушится и ее динамика станет перемешивающейся. Для этого достаточно выяснить условие, при котором возникает локальная неустойчивость (2.1). Такое условие будем в дальнейшем называть условием стохастической неустойчивости или просто условием стохастичности.

Локальная неустойчивость может также приводить к разрушению первых интегралов движения, и мы в дальнейшем познакомимся со многими такими примерами. Максимальной локальной неустойчивости в изолированной гамильтоновской системе с N степенями свободы соответствует разрушение всех интегралов движения, кроме полной энергии. В этом случае происходит движение с перемешиванием на гиперповерхности полной энергии системы, и это есть как раз то ее качество, к выяснению которого были направлены многие исследования по обоснованию статистической физики (ком. 5).

Динамические системы, которые обладают свойствами локальной неустойчивости и перемешивания, не обусловленные действием случайных полей, будем называть далее *K*-системами. Это важное понятие в несколько более узком, но более строгом смысле было введено впервые Колмогоровым. Ему было суждено сыграть особую роль в теории динамических систем. Почему

это так, становится ясно, если поставить следующий вопрос: как много K-систем среди множества всех систем? Более детально, под K-системой будем понимать любую динамическую систему, у которой в некоторой конечной области значений ее параметров существует область фазового пространства, в которой реализуется K-свойство (т. е. перемешивание). Тогда ответ на поставленный вопрос выглядит неожиданно: почти все динамические системы являются K-системами.

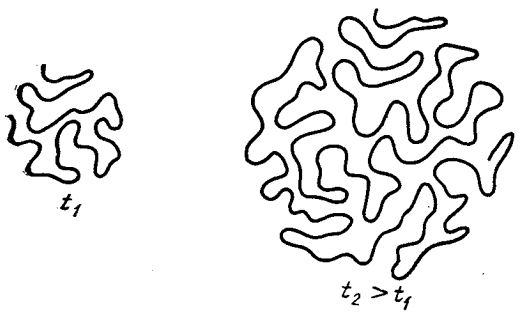


Рис. 4.5. Изменение огрубленного фазового объема

Такой ответ звучит в значительной степени обескураживающе, так как он рождает сразу же другой вопрос: почему мы так долго не видели или почти не видели K-систем? В действительности видели, но не замечали этого. А в некоторых случаях даже старались избегать очень странной динамики с плохо предсказуемым будущим. Сейчас понятие K-систем не только вдохнуло новую жизнь в анализ нелинейных систем, но и позволило получить более полное представление об их эволюции на бесконечном интервале времени.

Энтропия Колмогорова—Синая. Существование динамических систем, которые могут в той или иной степени обладать свойством перемешивания, приводит к необходимости введения некоторой универсальной характеристики таких систем. Очевидно, что эта величина должна также быть инвариантом.

В 1958 г. Колмогоров ввел новый метрический инвариант динамических систем h, называемый энтропией и определяющий, есть в системе перемешивание или нет [11]. Это определение было развито Синаем [12], и мы приведем этот последний вариант ниже. Мы не будем прибегать, однако, к точному формальному определению ввиду его относительной сложности, а воспользуемся неформальными качественными соображениями, более естественными для физического анализа картины [8].

Поскольку перемешивание означает появление достаточно сложной картины запутывания траекторий в фазовом пространстве, то естественно для описания ее сложности использовать понятие энтропии. Пусть, например, фазовая капля занимает объем $\Delta\Gamma$ в фазовом пространстве. Тогда ее энтропия равна

$$S = \ln \Delta\Gamma \tag{2.11}$$

(все размерные константы положены равными единице). Если начальный фазовый объем капли равнялся $\Delta\Gamma_0$, то в момент времени t он принимает значение $\Delta\Gamma(t)$. Для гамильтоновской системы в силу теоремы Лиувилля

$$\Delta\Gamma_t(t) = \Delta\Gamma_0$$

и энтропия (2.11) не изменяется.

Однако структура капли в результате эволюции изменяется. В ней появляются пузыри пустоты. С ростом времени пузырчатая структура становится все более мелкой, а огибающий объем фазовой капли расширяется и ограничивает все больший фазовый объем (рис. 4.5).

Введем величину ε, имеющую размерность фазового объема, и огрубим структурную сетку фазовой капли на рис. 4.5 с точностью до ε. Это означает, что траекторию надо изображать карандашом, рисующим линии толщиной $\varepsilon^{1/2N}$. Так возникает огрубленный фазовый объем $\overline{\Delta\Gamma}(t)$. Для него, конечно, теорема Лиувилля неприменима, и он растет со временем по мере увеличения длины фазовой нити.

Согласно формуле для локальной неустойчивости (2.1) легко находим

$$\overline{\Delta\Gamma}(t) = \Delta\Gamma_0 e^{ht}, \tag{2.12}$$

где

$$h = \langle h_0 \rangle, \tag{2.13}$$

т. е. показатель роста объема получается усреднением инкремента локальной неустойчивости по всем направлениям и по всему фазовому пространству.

Воспользуемся теперь формулой (2.11) и подставим в нее (2.12):

$$\tilde{S} \equiv \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \ln(\Delta\Gamma_0 e^{ht}) = ht + \ln \Delta\Gamma_0, \tag{2.14}$$

где $\tilde{S}$—энтропия, вычисленная по огрубленному фазовому объему. При точности огрубления ε очевидно, что не имеет смысла брать $\Delta\Gamma_0$ меньше, чем ε. Поэтому в формуле (2.14) можно положить $\Delta\Gamma_0 = \varepsilon$:

$$\tilde{S} = ht + \ln \varepsilon.$$

Для вычисления энтропии с большей точностью следует перейти к пределу $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим выражение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}(ht + \varepsilon) = h. \tag{2.15}$$

Оно и определяет энтропию Колмогорова—Синая. Очень важно в формуле (2.15) выполнять предельные переходы в указанной последовательности. Перечислим основные свойства энтропии динамической системы h.

1. Энтропия h определяет скорость увеличения энтропии $\tilde{S}$ в результате процесса перемешивания траекторий в фазовом пространстве.

2. Энтропия h, инкремент локальной неустойчивости h_0 и обратное время расцепления корреляций (см. (2.9)) являются величинами одного порядка:

$$h \sim h_0 \sim 1/\tau_c \tag{2.16}$$

(ком. 6).

3. Энтропия h является метрическим инвариантом системы [11], т. е. ее значение не зависит от способа разбиения фазового пространства и его огрубления.

4. Энтропия h определяет некоторое свойство подобия систем, которое мы обсудим впоследствии.

В дальнейшем мы увидим также, что те же понятия энтропии, перемешивания и локальной неустойчивости можно ввести и в диссипативном случае.

Если система совершает регулярное движение, то можно сказать, что поток фазовой жидкости является ламинарным. В этом случае, очевидно, $h = 0$. Появление положительной энтропии при $h > 0$ связано с превращением ламинарного течения фазовой жидкости в турбулентное. Это простое замечание указывает на глубокую связь между процессом возникновения гидродинамической турбулентности и K-свойством динамической системы.

3. Примеры

В этом параграфе мы приведем несколько примеров возникновения стохастической динамики. На первый взгляд они могут показаться излишне формальными. Здесь, однако, следует запастись определенным терпением. Все эти примеры являются идеализированными моделями реальных динамических систем, рассмотрение которых будет проведено позже. Выделение моделей обусловлено возможностью их точного анализа.

Пример 1. По-видимому, простейшим примером может служить отображение

$$x_{n+1} = \{Kx_n\} \qquad (0 < x < 1), \tag{3.1}$$

где K — параметр и скобки $\{\ldots\}$ обозначают дробную часть. При $K < 1$ имеем просто

$$x_{n+1} = Kx_n = K^2 x_{n-1} = \ldots = K^{n+1} x_0.$$

Поскольку $K < 1$, то независимо от начального значения x_0 величина $x_{n+1} \to 0$.

При $K > 1$ ситуация полностью меняется, так как соотношение

$$\delta x_{n+1}/\delta x_n = K > 1 \tag{3.2}$$

указывает на существование локальной неустойчивости. Итерация условия (3.2) дает

$$\delta x_{n+1} = K\delta x_n = K^2 \delta x_{n-1} = \ldots = K^{n+1}\delta x_0 = e^{(n+1)\ln K}\,\delta x_0. \tag{3.3}$$

Из соотношения (3.3) вытекает, что

$$h_0 = \ln K = h, \tag{3.4}$$

так как величина h_0 постоянна для всего фазового пространства (0, 1).

Теперь для простоты положим K большим ($K \gg 1$) и нецелым. Выберем также в качестве функций-носителей для вычисления коррелятора

$$f(x_m) = e^{2\pi i x_m}, \qquad g(x_n) = e^{-2\pi i x_n}. \tag{3.5}$$

Тогда

$$\mathcal{R}_1 = \int_0^1 dx_0 e^{2\pi i x_1} e^{-2\pi i x_0} = \int_0^1 dx_0 e^{2\pi i (K-1) x_0} = \frac{1}{2\pi i (K-1)}\left[e^{2\pi i (K-1)} - 1\right],$$

т. е. при больших K

$$\mathcal{R}_1 \sim 1/K.$$

Несколько более сложный анализ [6] показывает, что

$$\mathcal{R}_n \sim K^{-n} = e^{-n \ln K}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau_c \sim 1/\ln K, \tag{3.6}$$

и сравнение формул (3.4) и (3.6) приводит к соотношению (2.16):

$$h_0 = h \sim 1/\tau_c.$$

Функции (3.5) являются типичными для различных физических задач, в чем мы еще будем иметь возможность убедиться.

Итак, при $K > 1$ отображение (3.1) порождает последовательность случайных чисел $x_0, x_1, \ldots$, в которой память о начальном условии x_0 забывается тем быстрее, чем больше параметр K.

Свойства отображения (3.1) можно обобщить на случай

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \pmod 1,$$

если выполнено условие

$$\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right| > 1 \qquad (0 < x < 1).$$

Пример 2. Еще один близкий пример относится к двумерному отображению, сохраняющему меру:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K+1 & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (x, \bmod 1), \\ (y, \bmod 1). \end{matrix} \tag{3.7}$$

Оно, так же как и (2.6), является автоморфизмом тора. Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + Kx \pmod 1, \\ \bar{x} &= x + \bar{y} \pmod 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Оба примера — и первый, и этот — содержат одну и ту же идею получения коэффициента локальной неустойчивости, энтропии Колмогорова — Синая и времени расцепления корреляций. В одномерном случае мы использовали рекуррентные соотношения (3.3). Для отображения (3.7) или (3.8) можно поступить так же.

Якобиева матрица для (3.7) равна

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} K+1 & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, характеристические корни находятся из уравнения

$$\lambda^2 - (K+2)\lambda + 1 = 0. \tag{3.9}$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = 1 + {}^1/_2 K \pm [(1 + {}^1/_2 K)^2 - 1]^{1/2},$$

и локальная неустойчивость определяется корнем

$$\lambda_1 = 1 + {}^1/_2 K + [(1 + {}^1/_2 K)^2 - 1]^{1/2}, \tag{3.10}$$

который всегда больше единицы, если $K > 0$. В частности, при $K \gg 1$

$$\lambda_1 \approx K.$$

Существует и другая возможность неустойчивости: $|\lambda_2| > 1$ при $K < -4$. Далее ограничимся рассмотрением только положительных K.

Таким образом, отображение (3.7) диагонализуется и имеет в направлении первого орта растяжение элементов длины в фазовом пространстве:

$$\delta r_{n+1} = \lambda_1 \delta r_n = \ldots = \lambda_1^{n+1} \delta r_0; \qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Эти равенства, так же, как и ранее, дают

$$h_0 = \ln \lambda_1 = h. \tag{3.11}$$

Аналогично может быть получена оценка корреляционной функции при больших значениях K.

У-системы Аносова. Рассмотренные примеры включаются в более общий класс систем, называемых $У$-системами или диффеоморфизмами Аносова, который предложил их в 1967 г. [14]. Мы приведем в несколько упрощенной форме характерные черты $У$-систем и в конце их определения объясним, почему некоторая формальность, проявляемая здесь, не является излишней. Ограничимся также двумерными отображениями, как это было в последнем примере.

Пусть

$$r = (x_1, x_2)$$

есть вектор состояния. Пусть его динамика определяется отображением $\hat{T}$:

$$\bar{r} = \hat{T} r; \qquad \bar{r} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Рассмотрим элемент длины δr. Его инфинитезимальное изменение вследствие движения равно

$$\delta \bar{r} = \hat{M}\delta r, \qquad \hat{M} = \left\| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right\|. \tag{3.12}$$

Вектор δr называется растягивающимся, если

$$\frac{|\delta \bar{r}|^2}{|\delta r|^2} = \frac{|\hat{M}\delta r|^2}{|\delta r|^2} > 1, \tag{3.13}$$

и соответственно сжимающимся, если

$$\frac{|\delta \bar{r}|^2}{|\delta r|^2} = \frac{|\hat{M}\delta r|^2}{|\delta r|^2} < 1. \tag{3.14}$$

Определение $У$-систем следующее:

1) область сжимающихся векторов Γ^+ и область растягивающихся векторов Γ^- образуют все допустимое фазовое пространство $\Gamma = \Gamma^+ \oplus \Gamma^-$; в данном двумерном случае в Γ имеются два базисных направления — направление сжимающихся векторов и направление растягивающихся векторов;

2) свойство векторов δr сжиматься или расширяться под действием $\hat{T}$-отображения является инвариантным; сколько бы раз мы ни применяли оператор $\hat{T}$ к вектору δr_0, конечный вектор $\delta \bar{r}$ всегда будет удовлетворять одному и тому же условию (3.13) или (3.14).

Если выполнены оба эти условия, то система является $У$-системой, и для нее выполняются различные свойства, присущие стохастической динамике: локальная неустойчивость, эргодичность и перемешивание, расцепление корреляций [15].

Аносовым доказана также структурная устойчивость $У$-систем. Поэтому, например, малое шевеление отображения (3.7) при $K > 0$ также приводит к $У$-системе.

Теперь можно высказаться более определенно относительно рассмотренных примеров и относительно тех реальных систем, исследование которых нас ожидает впереди. Простейшей ситуацией для реализации $У$-систем является случай, когда в условиях (3.13) и (3.14) левые части — просто константы, не зависящие ни от точки в фазовом пространстве, ни от момента времени действия отображения $\hat{T}$. Именно такова была ситуация в двух рассмотренных примерах. В действительности все физические системы имеют переменные собственные значения $\lambda(r_n)$, где индекс n обозначает момент времени. Однако наиболее неприятной особенностью реальных систем являются трудности с доказательством второго свойства. Поэтому, хотя физические задачи и близки во многом к $У$-системам, они в то же время содержат ряд принципиально иных качеств, которые будут обсуждаться в следующей главе.

Из соотношений (3.13) и (3.14), в частности, следует существование границы, разделяющей области растягивающихся и сжимающихся векторов. В случае, например, (3.7) она находится следующим образом:

$$\frac{|\hat{M}\delta r|^2}{|\delta r|^2} = 1. \tag{3.15}$$

В диагональном представлении матрица $\hat{M}$ имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (3.15) можно записать следующим образом:

$$(\delta x_1)^2 \lambda_1^2 + (\delta x_2)^2 \lambda_2^2 = (\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2$$

или

$$\delta x_1 = \pm \left| \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_1^2 - 1} \right|^{1/2} \delta x_2. \tag{3.16}$$

Это уравнение прямой. В случае (3.7) $\lambda_2 = 1/\lambda_1 < 1$. Поэтому уравнение (3.16) превращается в следующее:

$$\delta x_2 = \pm \lambda_1 \delta x_1, \tag{3.17}$$

где величина λ_1 определена выражением (3.10) с $K > 0$.

В данном случае уравнение (3.17) для границы области, где действует локальная неустойчивость, достаточно простое, чтобы можно было проследить за движением и деформацией границы при последовательном применении отображения $\hat{T}$. Однако в реальных случаях именно это место вызывает серьезные трудности.

Биллиарды. Существуют модели, которые, с одной стороны, допускают получение строгих результатов и, с другой стороны, являются настоящими физическими моделями. Это — движение частиц в биллиардах различных форм. Динамика в биллиардах позволяет получить несколько более наглядное представление о возникновении локальной неустойчивости и перемешивания.

В качестве первого примера задачи биллиардного типа рассмотрим задачу о движении луча в пространстве, заполненном отражающими сферами (рис. 4.6). Выпуклые поверхности сфер приводят к расходимости лучей, как это видно из рисунка. Если $\delta\varphi$ — угол между близкими лучами после какого-либо рассеяния на сфере, то после следующего рассеяния он увеличивается по формуле

$$\delta\bar{\varphi} \sim K\delta\varphi, \qquad K \sim \rho/R > 1, \tag{3.18}$$

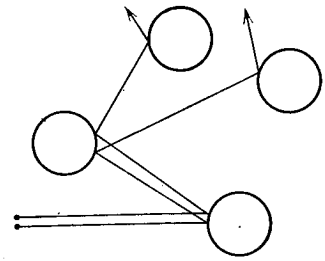


Рис. 4.6. Локальная неустойчивость лучей при рассеянии на сферах

где R — радиус сфер, а ρ — характерное расстояние между сферами. Многократные рассеяния луча на сферах приводят, в конце концов, к потере памяти о начальном условии на траектории луча.

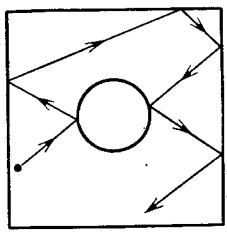


Рис. 4.7. Простейший вид биллиарда Синая

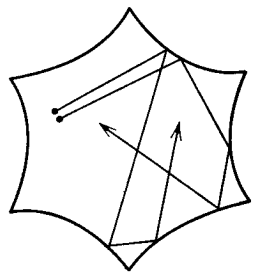


Рис. 4.8. Биллиард типа «звезда»

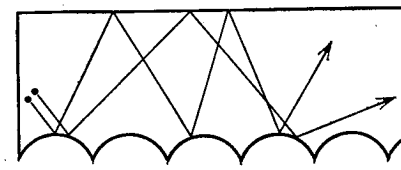


Рис. 4.9. Биллиард типа «гусеница»

Выражения (3.18) аналогичны модели (3.1), и это позволяет написать оценку для расцепления корреляционной функции фаз φ:

$$\mathcal{R}_n \sim K^{-n} = \exp(-n \ln K).$$

Теперь можно перейти от дискретного времени n к непрерывному, полагая $t = nt_0$, где t_0 — характерное время между двумя столкновениями:

$$t_0 = \rho/v.$$

Это приводит к корреляционной функции фаз

$$\mathcal{R}(t) \sim \exp\left(-\frac{t}{t_0}\ln\frac{\rho}{R}\right)$$

с характерным временем расцепления корреляции

$$\tau_c = t_0/\ln(\rho/R).$$

Более простой пример представляет собой биллиард в форме квадрата с внутренней круглой стенкой, ограничивающей движение частицы (рис. 4.7). В этом случае удается доказать строго все свойства: перемешивание и существование энтропии Колмогорова—Синая (ком. 7).

Рассеивающие биллиарды типа изображенных на рис. 4.6 и 4.7, называемые также биллиардами Синая, реализуют достаточно наглядно процесс перемешивания. К этому же типу систем можно отнести биллиарды типа

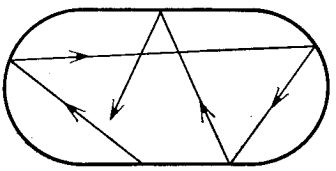


Рис. 4.10. Биллиард типа «стадион»

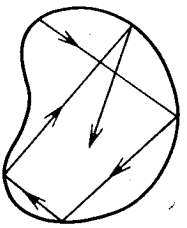


Рис. 4.11. Биллиард с аналитической границей

«звезда» (рис. 4.8) и типа «гусеница» (рис. 4.9). К ним приводятся различные задачи, например о собственных колебаниях мембраны сложной формы, о динамике частицы в магнитных ловушках и др. (см. [8]).

Еще два вида биллиардов, в которых имеет место стохастическая динамика, дополняют наше представление о подобных системах. Первый из них — биллиард типа «стадион» (рис. 4.10). Это две полуокружности, соединенные прямолинейными отрезками. Независимо от длины этих отрезков движение в таком биллиарде является стохастическим [17—19]. Второй — биллиард в форме кривой, задаваемой параметрическими уравнениями (рис. 4.11)

$$x = A\cos\varphi + B\cos 2\varphi, \qquad y = A\sin\varphi + B\sin 2\varphi.$$

Численный анализ [20] обнаруживает возникновение стохастичности при $B/A > 0{,}123$. Сильная стохастичность имеет место в области $B/A > 0{,}24$. При этом остается постоянной величина $A^2 + 2B^2 = 1$. Главное отличие этого биллиарда от всех предыдущих в том, что его граница является аналитической функцией.

Мы еще вернемся к более детальному анализу движения в биллиардных системах в другом параграфе. Однако совокупность рассмотренных систем позволяет получить представление о том, как не просто найти такую форму биллиарда, которая не содержала бы стохастических компонент движения.

§ 4. Возвраты и периодические орбиты

Возвратом называется попадание траектории в некоторую окрестность $\Delta\Gamma$ начальной точки (рис. 4.12). Понятие о возвратах имеет смысл главным образом для гамильтоновских систем, так как диссипация всегда выводит систему из некоторой области фазового пространства, в которой находилось начало траектории. Существование возвратов гарантируется следующей теоремой.

Теорема Пуанкаре о возвратах. Пусть система является гамильтоновской, консервативной (энергия системы сохраняется) и совершает финитное движение. Рассмотрим некоторую область A фазового пространства и выберем в ней точку z_0 в качестве начальной точки траектории. Тогда по истечении некоторого времени система вернется в область A. Исключение могут составлять лишь точки множества нулевой меры.

Доказательство этой теоремы основано на теореме Лиувилля о сохранении фазового объема.

Обозначим через B множество всех точек из A, которые никогда не возвращаются в A. Пусть через некоторое достаточно большое время t_1 множество точек B переходит в B_1, т. е.

$$\hat{T}(t_1)B = B_1.$$

Согласно определению B как множества невозвращающихся точек пересечение множеств B и A равно нулю.

Через интервал $t_2 = 2t_1$ имеем

$$\hat{T}(t_2)B = \hat{T}(2t_1)B \equiv B_2.$$

Пересечение B_2 и B_1 также равно нулю. Если бы это было не так, то существовали бы точки, которые не выходят из B_1. Из обратимости уравнений

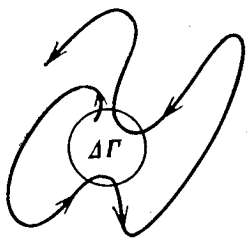


Рис. 4.12. Возвраты траектории

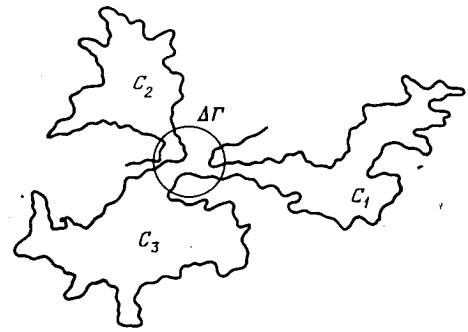


Рис. 4.13. Квазициклы в K-системах

движений следует, что эти точки не могли бы и войти в B_1. Это противоречит их прошлому (при $t = 0$ они принадлежали A).

Продолжая применять последовательно оператор $\hat{T}(nt_1)$ к B, получим бесконечную последовательность $B_1, B_2, \ldots$ образов множества B. Согласно теореме Лиувилля

$$\Gamma(B) = \Gamma(B_1) = \Gamma(B_2) = \ldots,$$

т. е. в процессе движения точки из B покрывают фазовый объем $\Gamma(B)\cdot\infty$. С другой стороны, из финитности движения следует, что эта область должна быть конечной. Последнее возможно только в случае $\Gamma(B) = 0$. Это доказывает теорему.

Из теоремы Пуанкаре следует, что система будет бесконечное число раз возвращаться в область A. Мы будем эти возвраты называть также циклами Пуанкаре или квазициклами. Теорема, однако, ничего не говорит о том, как устроены квазициклы. Времена последовательных возвратов могут подчиняться любому закону, в том числе и случайному.

Квазициклы в случае регулярной системы и K-системы также сильно отличаются друг от друга. В последнем случае времена возвратов и форма квазициклов распределены случайно (рис. 4.13).

Можно ввести понятие среднего времени возврата, или времени цикла Пуанкаре. Смолуховский предложил следующую формулу для этого времени:

$$\tau = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (kt_0) \cdot P_k (kt_0)}{\sum_{k=1}^{\infty} P_k (kt_0)}, \tag{4.1}$$

где $P_k(kt_0)$ — вероятность возврата системы в исходную область A за время kt_0. Очевидно, что P_0 есть вероятность нахождения системы в области A. Вычисления Каца [21] приводят формулу (4.1) к следующему виду:

$$\tau = t_0 \frac{1-P_0}{P_0-P_1}, \tag{4.2}$$

где P_1 — вероятность первого возврата за время t_0.

При $t_0 \to 0$ отличие P_1 от P_0 пропорционально t_0, и поэтому время τ не зависит от искусственно введенного интервала наблюдения t_0. Если допустить, что P_1 можно дифференцировать по аргументу, то

$$P_1 \approx P_0 + \dot{P}_1 t_0.$$

Отсюда формула (4.2) дает

$$\tau = \frac{1}{\dot{P}_1}(1-P_0). \tag{4.3}$$

Величина $(1-P_0)$ в этой формуле конечна. Производная $\dot{P}_1$ может быть очень малой, и тогда время τ становится очень большим. Это происходит, например, в случае, когда система совершает эргодическое движение, медленно «заметая» фазовое пространство, и в ней нет перемешивания. Наоборот, при перемешивании скорость первого возврата не мала и время τ может оказаться малым. Отсюда следует, что в K-системах времена возвратов могут быть вполне доступны для наблюдения. Более того, эти времена могут оказаться даже меньше характерных наблюдаемых процессов медленной эволюции. Чем сильнее локальная неустойчивость, тем меньше τ. При сильном перемешивании имеем

$$\tau \sim \tau_e \sim 1/h, \tag{4.4}$$

где h — энтропия системы.

Периодические орбиты. В интегрируемых регулярных системах, имеющих N интегралов движения при N степенях свободы, периодические орбиты лежат на резонансных торах, которые определяются уравнением

$$m_1\omega_1(I_1, \ldots, I_N) + \ldots + m_N\omega_N(I_1, \ldots, I_N) = 0,$$

где m_k — положительные и отрицательные целые числа, ω_k — частоты.

Периодические орбиты в этом случае оказываются слабо неустойчивыми. Малое возмущение траектории приводит к ее попаданию на нерезонансный тор. Расстояние между траекториями, одна из которых лежит на резонансном торе, другая — на нерезонансном торе, линейно нарастает со временем.

В K-системах также есть периодические траектории. Из-за локальной неустойчивости слабое возмущение начальных условий приводит к экспоненциальному росту расстояния между траекториями. Поэтому все периодические траектории оказываются сильно неустойчивыми. По этой же причине их оказывается очень много. Число периодических траекторий с периодом T

в K-системе равно [22—24]:

$$n(T) \sim \exp(hT) \qquad (T \to \infty). \tag{4.5}$$

Результат (4.5) легко понять из следующих соображений. Рассмотрим периодическую траекторию K-системы и выделим на ней некоторую точку A. Эта траектория тем ближе к случайной, чем больше T (рис. 4.14). Пусть теперь из точки A' вблизи A выходит траектория, которая возвращается очень близко к A', но не замыкается. Тогда малым шевелением начального условия траекторию можно замкнуть вследствие локальной неустойчивости. Более того, вследствие перемешивания в любой части фазового объема, доступной за время T для траектории из окрестности точки A, имеются траектории, которые можно малым шевелением замкнуть. Поэтому полное число циклов периода T должно быть пропорционально объему области, огибающей фазовый объем, который занимает система за время T. Как уже известно, этот огибающий объем растет:

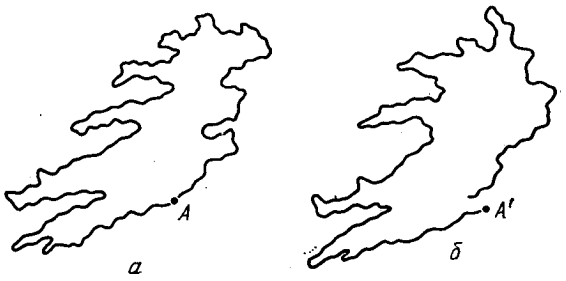


Рис. 4.14. Примеры цикла (*а*) и квазицикла (*б*) в K-системе

$$\Delta\Gamma(T) \sim \Delta\Gamma_0 \exp(hT).$$

Отсюда и следует формула (4.5).

Пример. Полезно для какого-либо простого случая подсчитать число периодических орбит непосредственно, для того чтобы увидеть, как возникает формула (4.5).

Рассмотрим отображение (3.1)

$$\bar{x} = \{Kx\} \tag{4.6}$$

с целым $K > 1$. Построим график функции

$$\bar{x} = \hat{T}x.$$

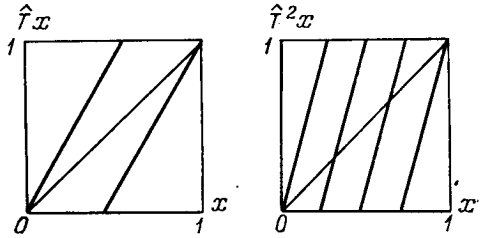


Рис. 4.15. График последовательных отображений $\hat{T}x = \{Kx\}$ с $K = 2$

Это пилообразная функция из K отрезков (рис. 4.15). В данном случае дискретного времени могут быть только периодические траектории периода m. Они определяются из уравнения

$$\hat{T}^m x = x$$

или, в данном случае,

$$\underbrace{\{K\{K \ldots}_{m}\underbrace{\{Kx\}\ldots\}}_{m}\} = x. \tag{4.7}$$

Каждое решение уравнения (4.7) получается в результате пересечения диагонали квадрата (рис. 4.15) с пилообразной кривой $\hat{T}^m x$. Таких точек, очевидно, K^m, так как число «зубцов» у кривой $\hat{T}^m$ равно точно K^m, и все они пересекаются (если включить в точки пересечения концы кривой). Отсюда сразу следует

$$n(m) = K^m = e^{m \ln K} = e^{mh}, \tag{4.8}$$

т. е. формула (4.5) является в примере (3.1) точной при целых K.

Посмотрим теперь, какие можно провести обобщения рассмотренного примера. Прежде всего положим K произвольным, т. е. пусть $\{K\} \neq 0$. Тогда число пересечений диагонали с кривой $\hat{T}^m x$ может стать меньше, чем K^m, не более чем на единицу. Поэтому при больших K и m выражение (4.8) сохраняется.

Точно так же можно рассмотреть автоморфизм тора или $У$-системы.

Синус-отображение. Графический анализ позволяет указать число периодических решений и в более сложном случае синус-отображения:

$$\bar{x} = \{K \sin \pi x\}, \quad 0 < x < 1.$$

На рис. 4.16 приведены два последовательных действия оператора $\hat{T}$ при $K = 2$.

Как и в предыдущем случае, m-кратное применение синус-отображения приводит к кривой $\hat{T}^m x$, состоящей из $2K^m$ отрезков. Если K — целое, то число пересечений этой кривой с диагональю квадрата равно $2K^m$, и тогда формула (4.8) имеет место в точности и для данного случая. Если $K \gg 1$ — нецелое, то число пересечений может оказаться на два меньше, чем K^m (рис. 4.17), и формула (4.8) справедлива асимптотически при больших m.

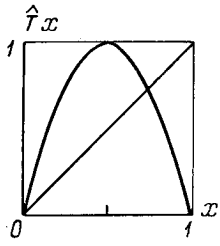


Рис. 4.16. График последовательных действий синус-отображения

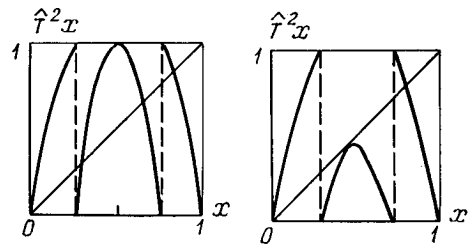


Рис. 4.17. Случай нецелого K в синус-отображении

Теорема Боуэна. Множество периодических орбит является всюду плотным. Однако для распределения траекторий по периодам необходимо знать не только их число $n(T)$, но и долю огрубленного фазового объема, которую они занимают. Теорема Боуэна решает отчасти этот вопрос [24], и это позволяет использовать ее для ряда физических приложений [8].

Рассмотрим область фазового объема $\Delta\Gamma \ll \Gamma$ и все периодические траектории, проходящие через нее. Тогда их распределение по периодам не зависит от расположения $\Delta\Gamma$ и слабо зависит от формы границы $\Delta\Gamma$. Это утверждение можно воспринимать как следствие перемешивания, приводящего к достаточной однородности K-систем.

Введем несколько определений. Пусть $C_{\Delta\Gamma}$ есть замкнутая орбита C, проходящая через $\Delta\Gamma$, а $z(C_{\Delta\Gamma})$ — координата системы на этой орбите. Различные замкнутые орбиты будем различать по их периодам T: $C_{\Delta\Gamma}(T)$. Обозначим через $\rho(z)$ стационарную функцию распределения в фазовом пространстве, а через $\rho_C(z)$ — ее значения в точках z, принадлежащих орбите $C_{\Delta\Gamma}(T)$. Определим также нормировочный множитель

$$\rho_0(\Delta\Gamma, T)\,\Delta\Gamma = \sum_{C \in C_{\Delta\Gamma}(T)} 1,$$

равный числу периодических орбит с периодом в интервале $(T, T + \Delta T)$, где

$$\Delta T = \frac{dT}{d\Gamma}\Delta\Gamma.$$

Тогда для произвольной интегрируемой функции $g(z)$ результат Боуэна

заключается в следующем равенстве, справедливом для K-систем:

$$\langle g(z)\rangle = \int g(z)\,\rho(z)\,dz = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\rho_0(\Delta\Gamma, T)\,\Delta\Gamma} \sum_{C\in C_{\Delta\Gamma}(T)} \int_{z\in C_{\Delta\Gamma}(T)} g(z)\,\rho_C(z)\,dz. \quad (4.9)$$

Нетрудно видеть, что замечательный результат Боуэна является аналогом эргодической теоремы для замкнутых орбит. Его качественную сторону можно интерпретировать следующим образом. Вследствие перемешивания траектория быстро и достаточно равномерно заполняет фазовое пространство. Таким же свойством обладают и периодические орбиты, если их периоды достаточно велики. На этом и основано равенство среднего по фазовому пространству и среднего по периодическим орбитам большого периода, выражаемое формулой (4.9).

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 4

1. Детальное изложение основ современной эргодической теории имеется в монографиях [1—4].

2. Различные вопросы теории и приложения в физике стохастичности динамических систем можно найти в [5—9].

3. Эта особенность перемешивания была отмечена Хопфом [10] при анализе движения в пространстве отрицательной кривизны (например, по поверхности Лобачевского). Четкое и наиболее полное понимание роли неустойчивости в возникновении перемешивания было достигнуто Крыловым [5]. Он применил также эти понятия к проблеме обоснования статистической механики и к модели газа в виде твердых шариков.

4. Более точная формулировка того, что происходит на самом деле, заключается в следующем [8]. Существует несколько временных масштабов. На самом коротком из них коррелятор убывает экспоненциально. На самом большом из них возможно его степенное убывание. Поэтому используемое ограничение означает лишь такое соотношение между параметрами системы, что время, на котором проявляется степенной закон убывания коррелятора, является достаточно большим.

Существуют также модели, где затухание корреляций только экспоненциальное. Это, например, имеет место для рассмотренного автоморфизма тора.

5. Анализ Крылова [5] показал, что именно локальная неустойчивость обеспечивает равномерное перемешивание начальной фазовой ячейки с любой требуемой точностью на поверхности неразрушенных первых интегралов движения. В результате возникает конечное время релаксации на этой поверхности, а сам характер релаксации именно тот, который ипичен в статистической механике.

Подробнее о связи локальной неустойчивости с проблемой обоснования статистической физики и с парадоксами Цермело и Лошмидта см. в [8].

6. Это утверждение нуждается в небольшом комментарии. Распад корреляций может происходить и не экспоненциальным образом, а, например, степенным. В таких системах (а они существуют [13]) нет конечного времени релаксации ($\tau_c = \infty$), хотя и есть перемешивание. Одновременно с этим энтропия равна нулю, а локальная неустойчивость развивается степенным образом. Тем не менее из-за существования перемешивания такие системы также называют K-системами. Мы в дальнейшем будем иметь дело только с системами, в которых все три характерные величины (h, h_0, τ_c) являются конечными. Равенство (2.26) относится именно к этому классу систем.

7. Модель рассеивающих сфер (рис. 4.6) появилась впервые в работах Крылова [5] в связи с анализом перемешивания в газе твердых шариков, взаимодействующих друг с другом в результате абсолютно упругих столкновений. Эти исследования были продолжены в работах Синая [16], рассмотревшего плоскую задачу. Она соответствует двум дискам в квадрате, один из которых закреплен жестко в центре. Заменив его диском удвоенного радиуса, а движущийся диск — материальной точкой, мы приходим к биллиарду, изображенному на рис. 4.7. Далее Синай распространил результат о перемешивании в модели на рис. 4.7 на случай, когда оба диска могут свободно двигаться. Здесь, однако, уже потребовались значительные усилия для решения задачи.

Глава 5

ХАОС В ДЕТАЛЯХ

Возникновение хаотической динамики в очень простых системах является настолько необычным явлением, что естественным первоначальным желанием является стремление взглянуть на самое простое уравнение, которое его порождает. Некоторый минимальный набор таких уравнений был приведен в предыдущей главе. Теперь нам следует вернуться к реальным процессам. Мы увидим, что не только область физических задач, в которых возникает хаос, широка, но и что основные черты описанных ранее моделей повторяются. Однако возникают и новые особенности появления стохастичности, которые сильно усложняют задачу. В этой главе мы снова остановимся на простейших и типичных проявлениях хаоса. Теперь это будут уже не формальные модели, а модели различных физических процессов, наблюдаемых и измеряемых.

§ 1. Универсальное отображение для нелинейных колебаний

Мы возвращаемся снова к основной задаче динамики, которая для случая $N = {}^3/_2$ имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t). \tag{1.1}$$

В данном случае это одна, вообще говоря, нелинейная, степень свободы (например, маятник), которая возмущается внешней силой, зависящей от времени. Здесь V — потенциал возмущения и ε — параметр возмущения. На этот раз у нас будут другие цели: мы покажем, что даже при малых $\varepsilon \ll 1$ в этой системе могут появиться хаотические траектории. Это очень сильное утверждение, так как система является очень элементарной в физическом смысле. Она может рассматриваться как некоторый обязательный элемент более сложных систем. Если в такой модели, как маятник, возмущаемый периодической силой, есть стохастическая компонента в динамике, то физику становится ясно, что такое движение может быть везде. Эта точка зрения, которая на первый взгляд может показаться наивной, в действительности отражает простое свойство типичности нелинейного колебания, являющегося «элементарной ячейкой» в огромном числе конструкций сложных физических процессов.

Структура отображения. Гамильтониан (1.1) порождает уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где невозмущенная частота нелинейных колебаний определяется выражением

$$\omega(I) = \frac{dH_0(I)}{dI}.$$

Эти уравнения являются дифференциальными. В дальнейшем мы убедимся в том, что дискретная форма уравнений движения в виде конечных разностей предпочтительнее для анализа возможности появления стохастичности. Поэтому следует разобраться в том, как от уравнений (1.2) перейти к их разностной форме и какова структура последних.

Допустим, что выделена некоторая последовательность моментов времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$, и систему (1.2) удается свести к дискретной системе

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_{n+1}(I_n, \vartheta_n), \\ \vartheta_{n+1} &= \vartheta_{n+1}(I_n, \vartheta_n) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

которая связывает значения переменных (I, ϑ) в двух последовательных моментах времени. Удобно эти уравнения записать в такой форме:

$$\begin{aligned} \overline{I} &= I + g_1(I, \vartheta), \\ \overline{\vartheta} &= \vartheta + g_2(I, \vartheta) \pmod{2\pi}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где индекс n опущен, черта стоит вместо индекса $n+1$ и g_1, g_2—функции, зависящие от вида возмущения. В дальнейшем оператор $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ при фазе будем, как правило, опускать.

Форма (1.3) является настолько общей, что не содержит никакой информации. В гамильтоновском случае отображение (1.3) должно сохранять меру, т. е. должно выполняться условие

$$\frac{\partial(\overline{I}, \overline{\vartheta})}{\partial(I, \vartheta)} = 1. \tag{1.4}$$

Это означает, что

$$\frac{\partial g_1}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial g_2}{\partial I}.$$

Для того чтобы система (1.3) обрела какой-либо смысл, в нее следует вложить физическое содержание.

Пусть переменная I является действием. Ее изменение $\Delta I = \overline{I} - I$ должно быть связано с некоторой неадиабатичностью движения. В адиабатическом случае, например, ΔI экспоненциально мало. В неадиабатическом случае будем считать, что изменение действия в основном происходит в некоторой области времени Δt, в которой нарушается адиабатическая инвариантность. Полное изменение действия системы накапливается суммированием различных отдельных изменений ΔI. Пусть T есть характерный интервал времени между двумя последовательными областями нарушения адиабатической инвариантности. Это подразумевает неравенство

$$T > \Delta t, \tag{1.5}$$

которое сразу решает вопрос о том, как естественным образом ввести отображение (1.3).

Итак, наш вывод заключается в том, что если выполнено условие (1.5), то существует естественная структура отображения (1.3). Она включает последовательность моментов $\{t_k\}$, разделенных интервалами $\sim T$ между областями, где происходит заметное изменение действия. Уравнения отображения получаются в результате сшивки этих изменений на двух последовательных интервалах.

Все различие в изменениях действия заключено в виде функций g_1, g_2.

Эти простые соображения позволяют без больших потерь исключить некоторые ненужные усложнения. Во-первых, будем считать, что $\Delta t \to 0$, т. е. изменение действия происходит мгновенно (удар). С физической точки зрения это означает, что временной интервал Δt изменения действия меньше всех характерных времен задачи. Во-вторых, будем считать интервалы T между моментами t_k постоянными.

Гамильтониан описанной системы может быть представлен в (p, x)-пространстве в виде

$$H = H_0(p, x) + \varepsilon V(x)\, T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \tag{1.6}$$

На осциллятор с гамильтонианом $H_0(p, x)$ действуют мгновенные толчки через постоянные интервалы времени T. Между толчками движение является свободным и предполагается известным. Поэтому сшивка решений на двух разных интервалах может быть произведена точно. Покажем, как это делается.

Вывод отображения. Вернемся снова к переменным действие—угол:

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta)\, T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \tag{1.7}$$

где $V(I, \vartheta)$ получается из $V(x)$ заменой переменных. Уравнения движения (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Пусть толчок происходит при некотором $t = t_0$. Определим $\hat{T}$-отображение следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\overline{I}, \overline{\vartheta}) = \hat{T}(I, \vartheta); \\ &\overline{I} \equiv I(t_0 + T - 0), \quad \overline{\vartheta} \equiv \vartheta(t_0 + T - 0); \\ &I \equiv I(t_0 - 0), \quad \vartheta \equiv \vartheta(t_0 - 0). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отображение $\hat{T}$ возникает как последовательное действие удара $\hat{T}_\delta$ и свободного движения (вращения на торе) $\hat{T}_R$:

$$\hat{T} = \hat{T}_R \hat{T}_\delta \tag{1.10}$$

(рис. 5.1). Имеем для $\hat{T}_R$

$$\hat{T}_R(I, \vartheta) = (I, \vartheta + \omega(I) T). \tag{1.11}$$

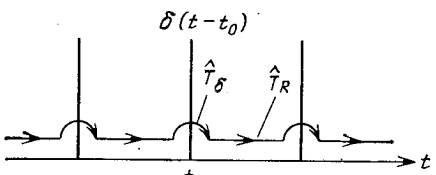


Рис. 5.1. Построение универсального отображения

Чтобы получить $\hat{T}_\delta$, проинтегрируем систему (1.8) в малой окрестности около момента толчка $(t_0 - 0,\ t_0 + 0)$. Учтем при этом, что переменная x непрерывна. Поэтому в точке t_0 функция $V(x) = V(I, \vartheta)$ непрерывна. Имеем

$$\begin{aligned} I(t_0 + 0) - I(t_0 - 0) &= \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \dot{I}\, dt = -\varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \vartheta(t_0 + 0) - \vartheta(t_0 - 0) &= \int_{t_0 - 0}^{t_0 + 0} \dot{\vartheta}\, dt = \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12) определяют $\hat{T}_\delta$:

$$\hat{T}_\delta(I, \vartheta) = \left(I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta};\ \vartheta + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I} \right). \tag{1.13}$$

Подставляя (1.11), (1.13) в (1.10), получаем уравнения (1.9) в явном виде:

$$\begin{aligned} \overline{I} &= I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \overline{\vartheta} &= \vartheta + \omega(\overline{I}) T + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Это и есть универсальное отображение. Оно допускает еще одно упрощение, если потенциал возмущения зависит только от обобщенной координаты ϑ и не зависит от импульса I. Тогда (1.14) превращается в следующее отображение:

$$\overline{I} = I - \varepsilon T V'(\vartheta), \quad \overline{\vartheta} = \vartheta + \omega(\overline{I}) T. \tag{1.15}$$

Последняя модификация связана с выбором функции $V(\vartheta)$. Это должна быть периодическая функция, и можно положить $V(\vartheta)=V_0\cos\vartheta$. Еще одно упрощение связано с простейшим выбором функции $\omega(I)$: $\omega(I)=\omega_0+\omega' I$. Это дает

$$\bar{I}=I+\varepsilon I_0\sin\vartheta, \qquad \bar{\vartheta}=\vartheta+\omega_0 T+\omega_0 T\alpha\bar{I}/I_0, \tag{1.16}$$

где обозначено

$$I_0=V_0T, \qquad \alpha=\omega'\frac{I_0}{\omega_0}. \tag{1.17}$$

Уравнения (1.16) называют также стандартным отображением ввиду его максимальной простоты. С формулами (1.16) мы уже встречались в § 7 гл. 1 как с уравнениями равновесия линейных цепочек (с точностью до постоянного члена $\omega_0 T$).

Приведем также вид гамильтониана, соответствующего упрощенному отображению (1.16):

$$H=\omega_0 I+\frac{\alpha\omega_0 T}{2I_0}I^2-\varepsilon I_0 T\cos\vartheta\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT). \tag{1.18}$$

Линейный член $\omega_0 I$ в гамильтониане H исчезает при $\omega_0=0$. Квадратичный член по действию I при этом остается, так как в силу определения (1.17) величина $\alpha\omega_0$ отлична от нуля при $\omega_0=0$.

Критерий стохастичности. Простейший анализ уравнений (1.15) связан с определением собственных значений его якобиевой матрицы

$$\hat{M}=\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon TV''(\vartheta) \\ \omega'(\bar{I})\,T & 1-\omega'(\bar{I})\,T^2\varepsilon V''(\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Имеем для них следующее уравнение:

$$\lambda^2-(2+K)\lambda+1=0, \tag{1.19}$$

где обозначено

$$K=K(I,\vartheta)=-\varepsilon\omega'(\bar{I})\,T^2V''(\vartheta). \tag{1.20}$$

В частности, при $V=V_0\cos\vartheta$ и обозначениях (1.20) имеем

$$K=K_0\cos\vartheta; \qquad K_0=\max K=\varepsilon\alpha\omega_0 T. \tag{1.21}$$

Находим λ из уравнения (1.19):

$$\lambda_{1,2}=1+{}^1/_2K\pm\sqrt{(1+{}^1/_2K)^2-1}. \tag{1.22}$$

Отсюда следует, что неустойчивость возможна при

$$\begin{aligned} &K>0 \quad (\lambda_1>1),\\ &K<-4 \quad (\lambda_2<-1).\end{aligned} \tag{1.23}$$

Вернемся назад и вспомним пример 2 из § 3 гл. 4, относящийся к типу автоморфизмов тора. Выражения (4.3.9) и (4.3.10) совпадают соответственно с (1.19) и (1.22). Различие, однако, имеется в виде параметра K. Ранее это была константа, и условия типа (1.23) означали границу появления стохастичности. Теперь параметр K является функцией переменных (I,ϑ) согласно (1.20). Более того, каким бы большим ни было значение K_0, всегда найдется область углов ϑ, в которой значения K попадают в область устойчивости. Это обстоятельство резко усложняет возможность теоретического анализа границы возникновения стохастичности.

Численный анализ показывает, что достаточно большая область стохастичности возникает при

$$K_0=\varepsilon\alpha\omega_0 T\gtrsim 1. \tag{1.24}$$

В действительности ситуация является значительно более тонкой и более сложной, чем это встречалось до сих пор (ком. 2).

Структура фазового пространства. Запишем систему (1.16) в упрощенной форме, опустив постоянный сдвиг фазы $\omega_0 T$ и перейдя к безразмерному действию:

$$\alpha\omega_0 T I/I_0 \to I.$$

Получаем

$$\bar{I} = I + K\sin\vartheta, \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \bar{I}. \tag{1.25}$$

Неподвижные точки системы (1.25) находятся из уравнений $\bar{I} = I$, $\bar{\vartheta} = \vartheta$, т. е.

$$K_0 \sin\vartheta = 0, \quad \bar{I} = I + K_0 \sin\vartheta = 2\pi m; \quad m = 0, 1, \ldots$$

Отсюда находим особые точки

$$r_1 = (2\pi m, 0), \quad r_2 = (2\pi m, \pi).$$

Согласно (1.23) точки r_1 являются неустойчивыми точками. Поведение траекторий вблизи них показывает, что эти точки гиперболического типа.

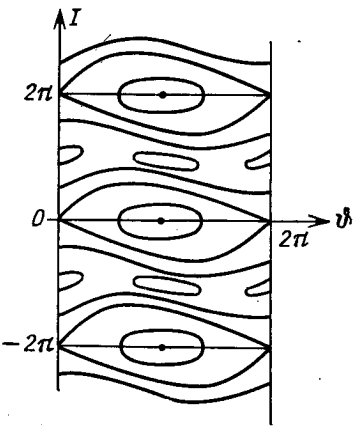


Рис. 5.2. Фазовый портрет стандартного отображения при малых значениях K

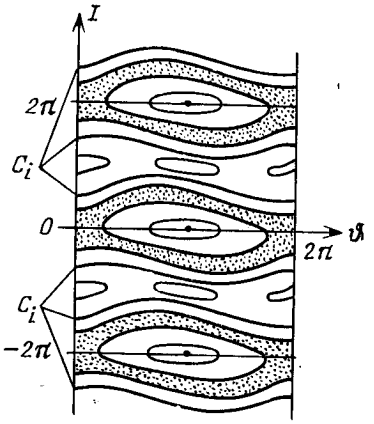


Рис. 5.3. Фазовый портрет стандартного отображения при $K \lesssim 1$; C_i — инвариантные кривые

Точки r_2 являются эллиптическими, если $K_0 < 4$. Фазовый портрет системы для малых K_0 приведен на рис. 5.2. С ростом K_0 в системе происходят бифуркации рождения кратных периодов, а при K_0 вблизи единицы появляется в окрестности сепаратрисы широкий стохастический слой (рис. 5.3). Различные стохастические слои отделены друг от друга инвариантными кривыми, существующими вследствие теоремы Колмогорова — Арнольда — Мозера.

Стохастическое море. Дальнейшее увеличение параметра K_0 приводит к разрушению КАМ-кривых и слиянию стохастических слоев. Образуется стохастическое море, в котором, однако, существуют островки устойчивости (рис. 5.4). Островки остаются всегда при любых сколь угодно больших значениях K_0. Их размер в этом случае имеет порядок $1/K_0$, а отображение (1.25) с ростом K_0 становится все ближе к $У$-системе.

Наличие островков устойчивости является фундаментальным свойством реальных физических систем. Все сказанное выше без труда переносится на универсальное отображение (1.14), и отличие выражается в конечном счете лишь в форме и числе островков. Это же свойство отличает реальные системы от идеализированных K-систем, рассмотренных в предыдущей главе. Поэтому нас не должно удивлять, что граница стохастичности (1.24) не совпадает с границей устойчивости $K_0 > 0$, как это было ранее.

Сама структура островков также представляет собой необычайно сложную запутанную картину. Существуют системы островков разных порядков все более и более уменьшающихся размеров (рис. 5.5). Мы обсудим этот вопрос несколько позднее. Сейчас для нас важно лишь, что образование стохастического слоя происходит в окрестности сепаратрисы при $K_0 < 0{,}97$, а в области значений $K_0 > 0{,}97$ происходит слияние стохастических слоев с образованием общего стохастического моря. Таким образом, область перехода к хаосу является очень узкой. Сложнейшие явления, происходящие в ней, до сих пор остаются за пределами понимания, хотя отдельные элементы этого перехода можно описать, и это будет сделано ниже (ком. 3).

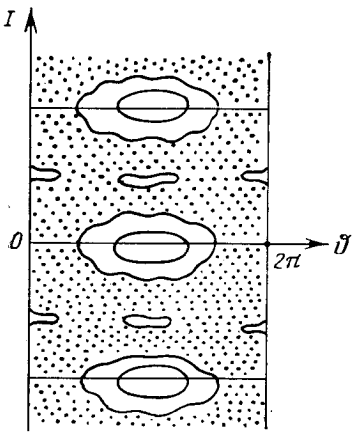


Рис. 5.4. Образование стохастического моря

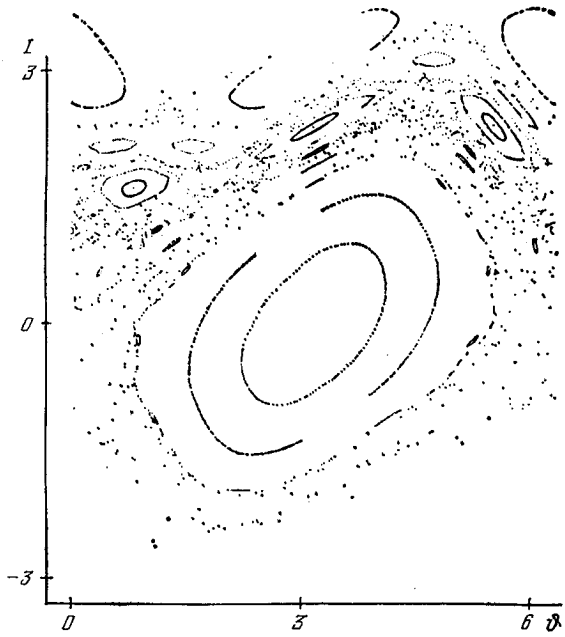


Рис. 5.5. Островки различных порядков в стохастическом море. Отдельные, беспорядочно расположенные точки принадлежат одной траектории

По мере дальнейшего роста параметра $K_0 > 1$ стохастическое море заполняет все большую часть фазового пространства. В то же время островки устойчивости уменьшаются в своих размерах. Одновременно уменьшается и относительная мера островков.

Спектральные свойства. Мы уже видели на примере моделей, допускающих точный анализ, что появление хаоса приводит к экспоненциальному затуханию корреляций. Если коррелятор имеет вид

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right), \tag{1.26}$$

то его фурье-образ

$$\mathcal{R}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\mathcal{R}(t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{R}_0\frac{\tau_c}{1+\omega^2\tau_c^2} \tag{1.27}$$

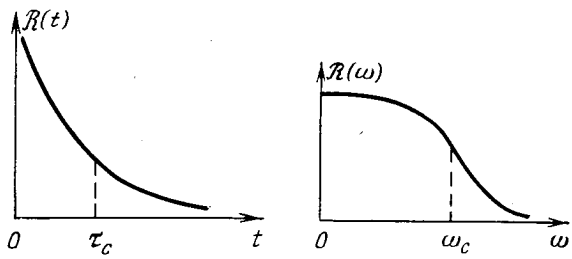


Рис. 5.6. Экспоненциальный распад коррелятора и его спектр

имеет так называемую лоренцевскую форму (рис. 5.6). Она представляет собой функцию, быстро убывающую при

$$\omega > \omega_c = 1/\tau_c. \tag{1.28}$$

Величина ω_c фактически определяет ширину спектра системы. Чем меньше τ_c, тем шире спектр. При $\tau_c \to 0$ ширина спектральной плотности системы $\omega_c \to \infty$.

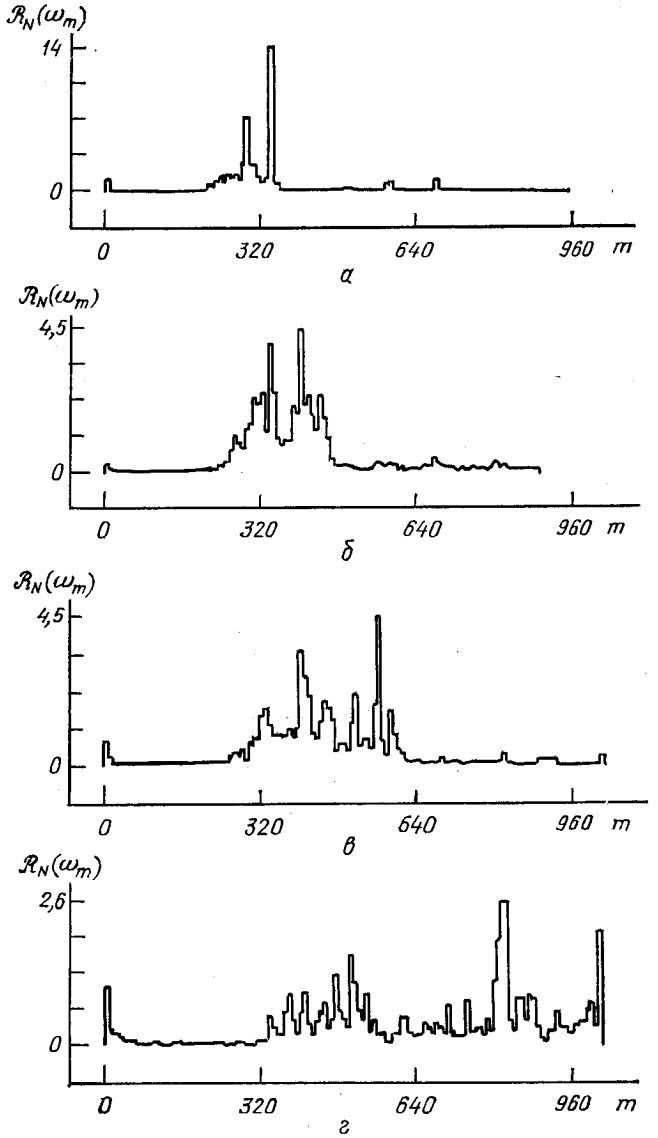


Рис. 5.7. Спектр корреляционной функции $\mathcal{R}_N(\omega)$ в стохастическом слое при $N=2048$ и K_0, равном 0,85 (*а*), 0,99 (*б*), 1,05 (*в*) и 1,3 (*г*)

В дискретном случае обозначим через

$$x_k = f(I_k, \vartheta_k)$$

некоторую функцию точки в фазовом пространстве, взятой в момент времени t_k. Разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид

$$x_k = \sum_{-N/2 \leqslant m \leqslant N/2} x(\omega_m)\, e^{ik\omega m}, \qquad \omega_m = \frac{2\pi}{N} m,$$
$$x(\omega_m) = \frac{1}{N} \sum_{-N/2 \leqslant k \leqslant N/2} x_k e^{-ik\omega m}, \tag{1.29}$$

где $x(\omega_m)$—фурье-образ функции x_k. Формулы (1.29) являются дискретным аналогом разложения в ряд Фурье функции $x(t)$, а k играет роль дискретного времени. Подразумевается, что $N \to \infty$, хотя в реальных вычислениях N всегда конечно.

Спектральная плотность корреляционной функции от переменных x_k определяется выражением

$$\mathcal{R}_N(\omega_m) = \frac{1}{N} \sum_{-N/2 \leqslant k \leqslant N/2} \mathcal{R}_N(k)\, e^{-ik\omega_m};$$
$$\mathcal{R}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{-N/2 \leqslant j \leqslant N/2} x_j x_{j+k}. \qquad (1.30)$$

Здесь величина N также определяет максимальное число шагов отображения, хотя в действительности должно быть $N \to \infty$.

При достаточно больших N хорошо развитый хаос (очень большие значения K_0) должен иметь функцию $\mathcal{R}_N(\omega_m)$ с дискретным спектром из N гармоник и огибающей их амплитуды кривой типа показанной на рис. 5.6. Однако наличие островков в области переходного хаоса целиком меняет всю картину. Приведем соответствующие числовые данные [5].

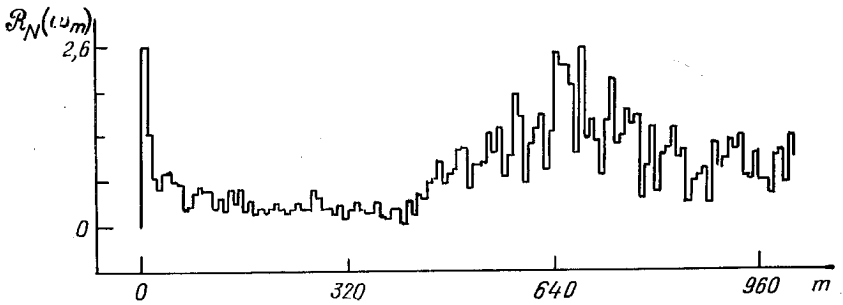


Рис. 5.8. Центральный пик в стохастическом слое: $K_0 = 2{,}02$, $N = 2048$

Первый достаточно очевидный факт заключается в том, что стохастическая траектория, попав в область вблизи границы с самым крупным островком, будет находиться возле него достаточно долго. Такое замедление вблизи границ островка порождает локальный максимум вблизи частоты, соответствующей граничной частоте колебаний внутри островка. Островки различных порядков выделяют в структуре спектра локальные максимумы на частотах соответствующих резонансных островков. Островки с максимальным периметром определяют в основном левую границу спектра, т. е. максимальный период.

Наоборот, маленькие островки траектория должна обходить достаточно быстро, и поэтому они определяют правую границу спектра. На рис. 5.7 ($x_k = \cos \vartheta_k$) видно, как изменяется ширина спектра при изменении K_0. Спектр стремится к непрерывному (с ростом N) и к равномерному (с ростом K_0) распределению.

Теперь у нас в руках есть достаточная информация, чтобы сформулировать три принципиальных свойства спектрального распределения зарождающегося хаоса. Все эти свойства являются прямым следствием существования островков [5].

1. При переходе от регулярного к хаотическому движению распределение островков устойчивости по размерам определяет ширину спектральной полосы корреляционной функции.

2. Замедление движения на траектории центрального островка, максимально близкой к гиперболической точке, приводит к появлению пика вблизи нулевой частоты (так называемый центральный пик—рис. 5.8).

3. На участках траектории, где происходит замедленное движение вдоль границы островков, изменяются свойства локальной неустойчивости. Близкие траектории также чувствуют границу островка, и поэтому они расходятся не экспоненциально быстро, а пропорционально t. Следовательно, участки траектории вблизи границы островков дают вклад в корреляционную функцию $\mathcal{R}(t)$ такой, что при $t \to \infty$

$$\mathcal{R}(t) \sim 1/t^{\alpha}, \tag{1.31}$$

где, вообще говоря, $\alpha \sim 1$.

Появление закона типа (1.31) легко понять из следующих соображений. Пусть случайный процесс $x(t)$ состоит из двух частей:

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t),$$

причем

$$\mathcal{R}(x_1, x_1) \sim \exp(-t/\tau_c),$$
$$\mathcal{R}(x_2, x_2) \sim 1/t^{\alpha}.$$

Тогда даже при $\varepsilon \ll 1$ в коррелятор

$$\mathcal{R}(x, x) = \mathcal{R}(x_1, x_1) + 2\mathcal{R}(x_1, x_2) + \mathcal{R}(x_2, x_2)$$

через достаточно большое время выживет коррелятор $\mathcal{R}(x_2, x_2)$, несмотря на наличие малого параметра при нем.

Оценим ширину спектра Ω при зарождении хаоса, т. е. в области значений параметра стохастичности K_0 вблизи критического:

$$|K_0 - 1| \ll 1.$$

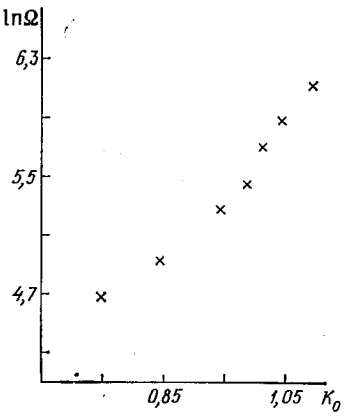


Рис. 5.9. Зависимость эффективной ширины спектра от K_0

Можно предположить, что величина Ω пропорциональна фазовому объему области стохастической динамики, как это обычно происходит в статистической физике, т. е.

$$\Omega = \text{const} \cdot \Delta\Gamma. \tag{1.32}$$

Формула (1.32) аналогична также формуле для числа колеблющихся мод резонатора. В случае K-систем без островков устойчивости имеем

$$\Delta\Gamma \sim e^{\text{const} \cdot h}.$$

Если принять эту же формулу для области стохастического моря и формулу $h \sim \ln K_0$, то из (1.32) следует

$$\ln \Omega = \text{const} + \rho |K_0 - 1|, \tag{1.33}$$

где ρ — некоторая постоянная. Точки на рис. 5.9 хорошо передают эту грубую оценку спектральной ширины как функции параметра надкритичности ($|K_0 - 1|$), причем константа $\rho \sim 4$.

Временны́е масштабы. Существование различных временных масштабов для отображений (1.15) или (1.25) составляет одну из важных сторон, позволяющую проводить их качественный анализ. Будем считать, как это уже отмечалось, параметр возмущения ε малым. Это означает, что за исключением некоторых малых интервалов времени изменение действия в уравнении (1.15) мало́:

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \frac{|\overline{I} - I|}{I} \sim \varepsilon \ll 1, \tag{1.34}$$

или в безразмерных переменных, как в уравнении (1.25):

$$\Delta I / I \sim K_0 / I.$$

Последнее выражение также становится малым после нескольких толчков, когда I начинает превышать K_0.

Таким образом, мы всегда имеем такой временной масштаб τ_D, на котором выполнено условие (1.34).

Рассмотрим выражение

$$\left|\frac{\delta\bar{\vartheta}}{\delta\vartheta}-1\right|=K_0|\cos\vartheta|. \tag{1.35}$$

Если

$$K_0\gg 1, \tag{1.36}$$

то имеет место локальная неустойчивость, приводящая к быстрому перемешиванию по фазам за время τ_c, которое мы сейчас вычислим. Перемешивание, конечно, не затрагивает малых островков размером $\sim 1/K_0$, о которых уже упоминалось.

Таким образом, мы приходим к очень важному выводу, который заведомо справедлив в области (1.36) больших значений K_0: происходит быстрое перемешивание по фазе ϑ согласно (1.31) и (1.36) и медленная эволюция по I. Поэтому на интервале времен

$$\tau_c < t < \tau_D \tag{1.37}$$

процесс перемешивания по фазе может быть рассмотрен независимо от эволюции по действию I.

Редукция к одномерному перемешиванию. Сказанное вытекает также и из второго уравнения (1.21), которое перепишем в виде

$$\bar{\vartheta}=\vartheta+I+K_0\sin\vartheta \pmod{2\pi}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если I изменяется слабо, то на интервале (1.37) достаточно ограничиться случаем

$$\bar{\vartheta}=\vartheta+K_0\sin\vartheta+\text{const} \pmod{2\pi}. \tag{1.38}$$

Наконец, при условии (1.36) мы можем исследовать выражение

$$\bar{\vartheta}=K_0\sin\vartheta \pmod{2\pi}, \tag{1.39}$$

которое возвращает нас к синус-отображению.

Таким образом, мы можем точно указать ту физическую ситуацию, которая порождает синус-отображение или его более полный вариант (1.38) [6]. Функция распределения по фазам $\rho(x)$ $(x=\vartheta/2\pi)$ достигает очень быстро стационарного распределения (рис. 5.10 [6]). Оно близко к равномерному. Однако в нем имеются локальные максимумы, расположенные в точках

$$\{K_0\},\ \{K_0\{K_0\}\},\ \ldots, \tag{1.40}$$

которым соответствуют точки резонансов (ком. 4).

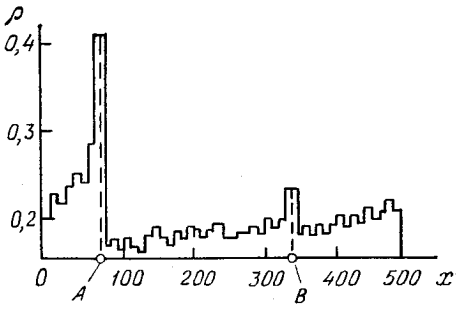


Рис. 5.10. Функция распределения синус-отображения ($K=17{,}1482$)

Одномерный коррелятор. Редукция к одномерному отображению делает разумным вычисление одномерной корреляционной функции фаз. Это означает, что мы не будем интересоваться слишком большими временами, существенно превышающими τ_D.

Рассмотрим выражение

$$\mathcal{R}(r,\ t_n|s,\ 0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta_0\exp\left[i\left(r\vartheta_n-s\vartheta_0\right)\right], \tag{1.41}$$

где r и s — положительные целые числа, а $t_n = nT$. В общем случае зависимости частоты ω от действия (но с конкретным видом зависимости возмущения от угла $V = V_0 \cos\vartheta$) из (1.15) получаем

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \omega(I)\,T + K_0 \sin\vartheta_n. \tag{1.42}$$

Далее мы считаем, что $K_0 \gg 1$ и $\omega(I) \approx \text{const}$. Подставляем ϑ_n как функцию ϑ_{n-1} в (1.41):

$$\mathcal{R}(r,\ t_n \mid s,\ 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \exp\left[i\left(r\vartheta_{n-1} + r\omega T - rK_0 \sin\vartheta_{n-1} - s\vartheta_0\right)\right]. \tag{1.43}$$

Воспользуемся известным разложением

$$e^{iz\sin\vartheta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\, e^{im\vartheta},$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя. Подставляем это выражение в (1.43) и продолжаем далее итерационный процесс:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(r,\ t_n \mid s,\ 0) &= e^{ir\omega T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m J_m(rK_0)\,\mathcal{R}(r-m,\ t_{n-1} \mid s,\ 0) = \\
&= e^{irn\omega T}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\times \\
&\times\exp\left[-i\omega T\left(m_1+m_2+\ldots+m_n\right)\right] J_{m_1}[rK_0]\times \\
&\times J_{m_2}[(r-m_1)K_0]\ldots J_{m_n}[(r-m_1-m_2-\ldots-m_n)K_0]\times \\
&\times\mathcal{R}(r-m_1-m_2-\ldots-m_n,\ 0 \mid s,\ 0).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Здесь мы намеренно привели это длинное выражение, чтобы показать идею итерационного процесса при вычислении корреляторов (ком. 5). Он связан с дальнейшим отбором в многомерных суммах главных членов.

Воспользуемся тривиальным равенством

$$\mathcal{R}(m,\ 0 \mid n,\ 0) = \delta_{nm}$$

и асимптотикой функций Бесселя при $K_0 \gg 1$

$$J_m(pK_0) \sim \frac{1}{(pK_0)^{1/2}}.$$

Подстановка в (1.44) этих выражений дает следующую оценку:

$$\mathcal{R}(r,\ t_n \mid s,\ 0) \sim K_0^{-n/2} e^{inr\omega T} = \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_c}\right)\exp(inr\omega T), \tag{1.45}$$

где время расцепления корреляции τ_c равно

$$\tau_c = 2T/\ln K_0. \tag{1.46}$$

В общем случае сокращенное отображение для фаз (1.42) обобщается следующим образом:

$$\bar{\vartheta} = \vartheta + \omega T + K_0 g(\vartheta), \tag{1.47}$$

где функция $g(\vartheta)$ удовлетворяет условию ограниченности $|g(\vartheta)| \leqslant 1$ и периодичности по ϑ. Оценки (1.45) и (1.46) сохраняются и в этом случае.

Полученные результаты показывают, что в универсальном отображении сначала происходит процесс запутывания фаз, которые можно считать нескоррелированными уже после нескольких итераций. Действительно, так как $K_0 \gg 1$, то $\tau_c \ll T$. Далее на бо́льшем временном масштабе $\sim \tau_D$ развивается процесс диффузии по действию I, который мы рассмотрим позднее.

§ 2. Перекрытие резонансов

Физическая ситуация, приводящая к универсальному отображению, может быть рассмотрена и иначе, путем использования разложений в ряд Фурье. Хотя этот путь и является в значительной степени качественным, тем не менее он позволяет взглянуть на проблему зарождения хаоса еще с одной, новой стороны.

Построение системы резонансов. Вернемся к упрощенному гамильтониану (1.18). Имеем

$$H = H_0(I) - \varepsilon \frac{I_0}{T} \cos\vartheta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right). \tag{2.1}$$

Воспользуемся представлением

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\nu t}; \qquad \nu \equiv \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда (2.1) переходит в

$$H = H_0(I) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon I_0}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [e^{i(m\nu t+\vartheta)} + e^{i(m\nu t-\vartheta)}]. \tag{2.2}$$

Гамильтониан (2.2) приводит к уравнениям движения

$$\dot{I} = \frac{i}{2}\frac{\varepsilon I_0}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [e^{i(m\nu t+\vartheta)} - e^{i(m\nu t-\vartheta)}],$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(I); \qquad \omega(I) \equiv \frac{dH_0(I)}{dI}. \tag{2.3}$$

Теперь мы поступаем так, как это делалось при исследовании нелинейного резонанса в § 1 гл. 3. Условие резонанса получается дифференцированием фазы в (2.3) по времени и приравниванием результата нулю:

$$\dot{\vartheta} \pm m\nu = 0.$$

Используя второе уравнение (2.3) и оставляя только положительные m, имеем

$$\omega(I_{(m)}) - m\nu = 0, \tag{2.4}$$

где $I_{(m)}$ — то значение действия, при котором выполняется резонансное условие (2.4).

Можно выписать систему резонансных действий:

$$\ldots, \; I_{(m-1)}, \; I_{(m)}, \; I_{(m+1)}, \; \ldots \tag{2.5}$$

Рассмотрим динамику в окрестности одного из них, например m-го, забыв временно про все остальные. Это означает, что в уравнении (2.3) оставляют только m-е резонансные слагаемые:

$$\dot{I} \approx \frac{\varepsilon I_0}{T} \sin(m\nu t - \vartheta), \qquad \dot{\vartheta} = \omega(I). \tag{2.6}$$

Система (2.6) приводится к уравнению фазовых колебаний

$$\ddot{\psi} = -\omega' \frac{\varepsilon I_0}{T} \sin\psi, \qquad \psi = \vartheta - m\nu t,$$

которое интегрируется и дает частоту фазовых колебаний, равную ширине резонанса по частоте:

$$\Delta\omega = \Omega \sim (\varepsilon |\omega'| I_0 \nu)^{1/2} = (\varepsilon\alpha\nu\omega)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Это выражение означает также, что ширина резонанса по действию равна

$$\Delta I \sim \frac{\Omega}{|\omega'|} = I_0 \left(\frac{\varepsilon\nu}{\alpha\omega}\right)^{1/2}. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим теперь ряд (2.5). Расстояние между ближайшими резонансными значениями действий в этом ряду обозначим через δI. Его можно найти из уравнения резонанса (2.4). Имеем

$$\omega(I_m) = m\nu,$$
$$\omega(I_{m+1}) = \omega(I_m + \delta I) = \nu(m+1).$$

Отсюда для расстояния между резонансами по частоте находим

$$\delta\omega \equiv |\omega(I_m) - \omega(I_{m+1})| = \nu. \qquad (2.9)$$

Аналогично (2.8) можно записать расстояние между резонансами по действию, используя формулу

$$\delta\omega = \left|\frac{d\omega}{dI}\right| \delta I.$$

Отсюда

$$\delta I = \frac{\nu}{|\omega'|} = I_0 \frac{\nu}{\omega\alpha}. \qquad (2.10)$$

Условие перекрытия резонансов. Теперь введем параметр $\bar{K}$, определяющий степень влияния соседних резонансов друг на друга, или, иначе, степень их взаимодействия:

$$\bar{K} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}. \qquad (2.11)$$

Воспользуемся для его определения формулами (2.7) и (2.9):

$$\bar{K}^2 = \frac{\varepsilon\alpha\nu\omega}{\nu^2} \approx \varepsilon\alpha\omega T. \qquad (2.12)$$

То же самое выражение получается, если определить $\bar{K}$ через изменение действий, а не частот. Согласно формулам (2.8) и (2.10), имеем

$$\left(\frac{\Delta I}{\delta I}\right)^2 = \frac{\varepsilon\nu}{\alpha\omega}\frac{(\omega\alpha)^2}{\nu^2} \approx \varepsilon\alpha\omega T = \bar{K}^2. \qquad (2.13)$$

Теперь нам остается сделать последний шаг и сравнить результат (2.11) или (2.13) с формулой (1.21). Это приводит нас к очень важному соотношению

$$K_0 = \bar{K}^2, \qquad (2.14)$$

которое мы сейчас подробно обсудим.

Параметр $\bar{K}$ имеет простой физический смысл степени перекрытия резонансов. Он равен отношению ширины резонанса, вычисленной в отсутствие всех остальных резонансов, к расстоянию между резонансами (рис. 5.11). Условие стохастичности $K_0 \geqslant 1$ означает, что резонансы перекрываются В частности, рассматриваемая модель (2.1)—(2.3) содержит бесконечное число резонансов, и критерий $K_0 \geqslant 1$ означает взаимное перекрытие всех соседних резонансов.

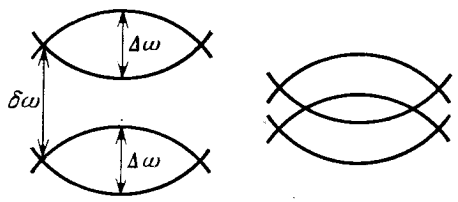


Рис. 5.11. Перекрытие резонансов

Можно отсюда пойти дальше и сделать утверждение о появлении областей хаоса даже в том случае, если имеются и перекрываются всего два резонанса *). Запишем соответствующее уравнение движения:

$$\ddot{x} + 4\bar{K}^2 \cos t \cdot \sin x = 0. \qquad (2.15)$$

*) Когда мы говорим о резонансах, их числе, ширине и т. д., то речь, конечно, идет о величинах, взятых в нулевом приближении. В действительности есть бесконечное число резонансов более высокого порядка.

При малых t оно переходит в уравнение маятника, а при малых x — в параметрически возбуждаемый линейный осциллятор.

Представим уравнение (2.15) в виде

$$\ddot{x} + 2K[\sin(x+t) + \sin(x-t)] = 0. \tag{2.16}$$

Отсюда видно, что $\Delta\omega = 2\bar{K}$, $\delta\omega = 2$, и параметр перекрытия резонансов равен $\bar{K}$. Численный анализ, действительно, показывает образование стохастических областей на фазовой плоскости при $\bar{K} \geqslant 1$. Пример сильного перекрытия резонансов приведен на рис. 5.12 для модели (2.15) (ком. 6).

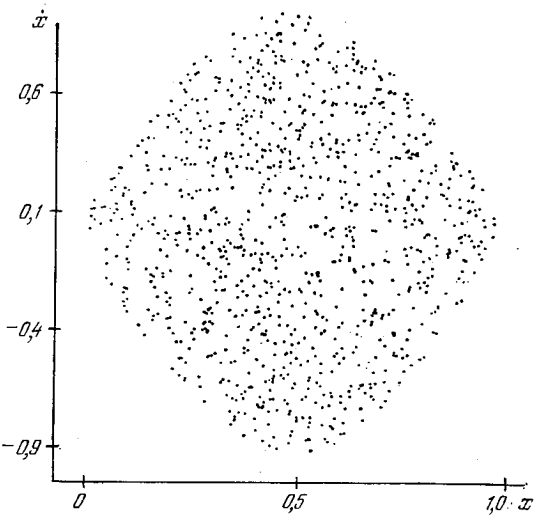


Рис. 5.12. Стохастичность при перекрытии двух резонансов ($\bar{K} \approx 1{,}2$)

Сложная система резонансов может перекрываться на фазовой плоскости весьма причудливым образом и образовывать сложную сеть областей хаоса и островков устойчивости, погруженных в стохастическое море, как это видно, например, из рис. 5.4. Какова та причина, которая приводит к появлению стохастичности при перекрытии резонансов? Она связана с более глубокими корнями теории хаоса, которые мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 3. Образование стохастического слоя

Здесь будут изложены вопросы, которые играют исключительную роль в общей теории стохастичности гамильтоновских систем. Можно ввести понятие о «кванте стохастичности», т. е. о той минимальной ячейке фазового пространства, которая несет в себе зародыш стохастичности. Таким «квантом» является стохастический слой (рис. 5.13), образующийся в окрестности сепаратрисы под действием произвольного периодического сколь угодно малого нетривиального возмущения (ком. 7).

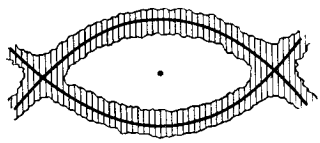


Рис. 5.13. Стохастический слой (заштрихованная область) вблизи сепаратрисы

Динамика вблизи сепаратрисы. Приводимые ниже рассуждения обладают необходимой степенью общности и позволяют рассмотреть практически любой пример образования стохастического слоя. Мы, конечно, в соответствующем месте объясним, почему это так, а здесь рассмотрим уже достаточно известный нам пример нелинейного маятника, возмущаемого периодической силой:

$$\begin{aligned} H &= H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta)\cos\nu t, \\ H_0 &= {}^1\!/_2\,\dot{x}^2 - \omega_0^2\cos x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где масса маятника положена равной единице.

Формулы зависимостей $H_0 = H_0(I)$ и $V(x) = V(I, \vartheta)$ получаются заменой переменных $(\dot{x}, x) \to (I, \vartheta)$.

Запишем точное уравнение для изменения действия:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dH_0}\dot{H}_0 = -\frac{\varepsilon}{\omega(I)}\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\cos\nu t, \tag{3.2}$$

где использованы определение

$$\omega(I)=\frac{dH_0(I)}{dI}$$

и то, что мощность $\dot{H}_0$ равна произведению силы $\varepsilon(\partial V/\partial x)$ и скорости $\dot{x}$.

Уравнение для фазы ϑ имеет вид

$$\dot{\vartheta}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial I}\cos\nu t. \tag{3.3}$$

Некоторый «разнобой» в выборе переменных при записи уравнений (3.2) и (3.3) не должен смущать. Он продиктован дальнейшими упрощениями.

Воспользуемся некоторой информацией § 3 гл. 1. Энергия невозмущенного маятника, соответствующая сепаратрисе, равна

$$H_c=\omega_0^2.$$

Значение действия на сепаратрисе обозначим через I_c. Частота $\omega(I)$ обладает следующими свойствами:

$$\lim_{I\to 0}\omega(I)=\omega_0, \qquad \lim_{I\to I_c}\omega(I)=0. \tag{3.4}$$

Далее нас будет интересовать область вблизи сепаратрисы, где выполнено условие

$$\frac{\omega(I)}{\omega_0}=\frac{1}{N}\ll 1, \tag{3.5}$$

а величина N имеет, как и в § 3 гл. 1, смысл характерного числа гармоник в спектре невозмущенной траектории маятника (см. формулу (1.3.15) и далее).

Наша ближайшая цель — перейти от системы уравнений (3.2), (3.3) к системе уравнений в конечных разностях. Для этого необходимо вспомнить особенности движения частицы вблизи сепаратрисы, приведенные в § 3 гл. 1. Частица пролетает основную часть потенциальной ямы за время порядка $1/\omega_0$ и очень долго находится в окрестности точек поворота, так как в силу неравенства (3.5)

$$1/\omega\gg 1/\omega_0.$$

График зависимости скорости частицы $\dot{x}$ от времени в окрестности сепаратрисы приведен на рис. 1.12. Отношение расстояния между импульсами к их ширине равно $N\gg 1$.

Отображение вблизи сепаратрисы. Таким образом, наличие в (3.2) величины $\dot{x}$ в правой части, обладающей указанными выше свойствами, позволяет построить отображение при переходе от одного импульса силы к другому. Между двумя импульсами силы с экспоненциальной точностью $\dot{x}=0$. Пусть I есть значение действия непосредственно перед областью, где скорость частицы $\dot{x}$ заметно отлична от нуля. Пусть также $\bar{I}$ — значение действия перед областью следующего отличного от нуля импульса скорости $\dot{x}$ невозмущенного движения. Тогда, интегрируя (3.2) по области Δt, включающей в себя полную ширину импульса, получаем

$$\bar{I}=I-\frac{\varepsilon}{\omega(I)}\int_{\Delta t}dt\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\cos\nu t. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) одновременно показывает, что интервал Δt привязан к определенному моменту времени, когда $\dot{x}\neq 0$. Поэтому удобно ввести новую фазу φ внешней силы:

$$\dot{\varphi}=\nu. \tag{3.7}$$

Время, прошедшее между двумя последовательными импульсами скорости, равно половине периода колебаний частицы (см. рис. 1.12), т. е. $\pi/\omega(\bar{I})$. Отсюда мы приходим к отображению вблизи сепаратрисы

$$\bar{I} = I + \frac{\varepsilon}{\omega(I)} C(I, \varphi), \qquad \bar{\varphi} = \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(\bar{I})}, \tag{3.8}$$

где через C обозначен интеграл:

$$C(I, \varphi) = -\int\limits_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos\varphi(t). \tag{3.9}$$

По существу, основная часть вывода на этом заканчивается, и дальнейшее сводится к техническим деталям, от которых, однако, зависят все физические следствия.

Прежде всего, учитывая малость параметра $\varepsilon \ll 1$, разложим $\omega(\bar{I})$ в ряд по ε. Имеем

$$\bar{\varphi} \approx \varphi + \frac{\pi\nu}{\omega(I)} - \frac{\pi\nu\omega'}{\omega^3(I)} \varepsilon C(I, \varphi). \tag{3.10}$$

Мы уже отмечали в § 1 гл. 5, что локальная неустойчивость развивается быстрее всего по фазе. В данном случае это выглядит следующим образом. Малое изменение действия вследствие возмущения приводит к малому изменению частоты колебаний частицы в яме. Вблизи дна ямы, где периоды колебаний достаточно малы, малые поправки к частоте приводят к малым изменениям фазы частицы за период. Однако вблизи сепаратрисы, где периоды осцилляций в яме очень велики, даже малое изменение частоты может привести к сильному изменению фазы. Это и должно явиться конечной причиной локальной неустойчивости по фазе.

Для ее оценки достаточно найти величину

$$K = \left|\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi} - 1\right| = \frac{\pi\varepsilon\nu|\omega'|}{\omega^3} C_0, \tag{3.11}$$

где

$$C_0 = \left|\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right| = \left|\int\limits_{\Delta t} dt \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \sin\nu t\right| \tag{3.12}$$

и где мы использовали под знаком интеграла нулевое приближение, заменив $\varphi(t)$ на νt согласно (3.7).

Ширина стохастического слоя. Теперь ясно, что условие

$$K \geqslant 1 \tag{3.13}$$

должно определять границу появления стохастической динамики частицы вблизи сепаратрисы. Мы воспользуемся для ее получения кратчайшим и наиболее простым путем.

Из формул (1.3.15) и (1.3.19) следует

$$|\omega'| = \left|\frac{d\omega}{dI}\right| = \left|\frac{d\omega}{dH}\frac{dH}{dI}\right| = \omega\left|\frac{d\omega}{dH}\right| \sim \frac{\omega^3}{\pi\omega_0} \frac{1}{|H - H_c|}. \tag{3.14}$$

Таким образом, параметр неустойчивости K принимает вид

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \frac{C_0}{|H - H_c|}, \tag{3.15}$$

и вся дальнейшая работа сводится к оценке интеграла C_0.

Интеграл (3.12) оценивался разными способами (см., например, [10,13]). Приведем простейший анализ [3]. Значение C_0 определяется, в первую очередь, соотношением между ν и ω_0. Пусть сначала

$$\nu/\omega_0 \leqslant 1. \tag{3.16}$$

Характерное время изменения величин x и $\dot{x}$ на интервале Δt равно, очевидно, π/ω_0. Отсюда

$$C_0 \sim V\omega_0\Delta t \sim V \sim H_c,$$

и после подстановки этого выражения в (3.15) получаем

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \frac{H_c}{|H-H_c|}. \tag{3.17}$$

Условие появления стохастичности означает $K \geqslant 1$. Поэтому граница стохастичности находится из оценки

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \frac{H_c}{|H-H_c|} \sim 1.$$

Область стохастичности в энергетической шкале равна, очевидно,

$$\frac{|H_c-H|}{H_c} \leqslant \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \qquad (\nu \lesssim \omega_0). \tag{3.18}$$

Выражение (3.18) является искомым (для не слишком высоких частот возмущения ν). Его главный смысл в следующем утверждении: вблизи сепаратрисы существует слой хаотической динамики при любых сколь угодно малых возмущениях. Ширина слоя пропорциональна возмущению.

Дополним полученную картину исследованием случая возмущения с высокой частотой $\nu \gg \omega_0$. Под интегралом в (3.12) стоит произведение быстро осциллирующей функции $\sin \nu t$ и медленно меняющейся функции $\dot{x}\,\partial V/\partial x$. Мы уже знаем, что в этом случае величина интеграла C_0 экспоненциально мала. Для более детальной оценки его рассмотрим два разных случая потенциала $V(x)$. Пусть сначала

$$V(x) = V_0 x \text{ и } V_0 \sim H_c.$$

Тогда

$$C_0 = V_0 \left| \int_{\Delta t} dt\, \dot{x} \sin \nu t \right|.$$

Из формул (1.3.4) и (1.3.7), описывающих динамику вблизи сепаратрисы имеем

$$C_0 = 2V_0\omega_0 \left| \int_{\Delta t} dt\, \frac{\sin \nu t}{\operatorname{ch}[\omega_0 (t-t_0)]} \right|,$$

где $t_0 = t_0(\varphi)$ — некоторая точка, определяющая положение солитона в интервале интегрирования Δt. Сам интервал $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$. Подынтегральное выражение имеет полюса в точках

$$t = t_0 \pm i\frac{\pi}{2\omega_0}(1+4n), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Поскольку $\nu \gg \omega_0$, то достаточно оставить только полюс, ближайший к действительной оси. Это дает

$$C_0 = \pi V_0 \exp\left(-\pi \frac{\nu}{2\omega_0}\right) |\sin \nu t_0(\varphi)|. \tag{3.19}$$

Подстановка (3.19) в (3.15) с учетом того, что $V_0 \sim H_c$, дает

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \frac{H_c}{|H-H_c|} \exp\left(-\pi \frac{\nu}{2\omega_0}\right).$$

Область стохастичности по энергии находится из условия $K \geqslant 1$, т. е.

$$\frac{|H-H_c|}{H_c} \leqslant \varepsilon \frac{\nu}{\omega_0} \exp\left(-\pi \frac{\nu}{2\omega_0}\right) \qquad (\nu \gg \omega_0). \tag{3.20}$$

Область стохастичности оказывается, как и ожидалось, экспоненциально узкой.

Предэкспоненциальный множитель зависит от вида потенциала возмущения $V(x)$. Действительно, рассмотрим случай

$$V(x) = V_0 \sin x,$$

который нам пригодится в дальнейшем. Выражение для C_0 теперь имеет вид

$$C_0 = 2V_0\omega_0 \left| \int_{\Delta t} dt \frac{\sin \nu t \cdot \sin x}{\operatorname{ch}[\omega_0 (t-t_0)]} \right|.$$

Имеет место следующее простое представление для $\sin x$ вблизи сепаратрисы:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \sim 2 \frac{\operatorname{sh}[\omega_0 (t-t_0)]}{\operatorname{ch}^2[\omega_0 (t-t_0)]}.$$

Таким образом, полюс в знаменателе интеграла C_0 приобретает кратность три и это дает

$$C_0 \sim V_0 \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2 \exp\left(-\pi \frac{\nu}{2\omega_0}\right) |\sin \nu t_0(\varphi)|.$$

Тем же способом находим границу стохастического слоя:

$$\frac{|H-H_c|}{H_c} \leqslant \varepsilon \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^3 \exp\left(-\pi \frac{\nu}{2\omega_0}\right), \tag{3.21}$$

которая имеет экспоненциальную малость, как и в формуле (3.20).

Главный вывод, вытекающий из формул (3.18) и (3.20), следующий: всегда, т. е. при любых ε и ν, в окрестности сепаратрисы образуется область перемешивающихся траекторий—стохастический слой. Максимальная ширина стохастического слоя имеет порядок

$$\Delta H/H_c \sim \varepsilon.$$

Она достигается в случае, близком к резонансу между возмущением и частотой малых колебаний осциллятора ω_0.

К этому остается лишь добавить, что весь анализ не связан с тем, являются ли частицы пролетными или захваченными, т. е. он не зависит от знака величины $(H-H_c)$. Это связано с известной симметрией решения, отмеченной в § 3 гл. 1. Поэтому стохастический слой в окрестности сепаратрисы приводит к случайному блужданию частиц из одной потенциальной ямы в другую (рис. 5.14).

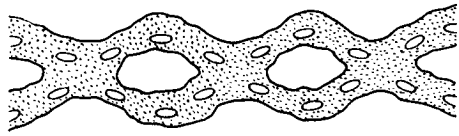


Рис. 5.14. Блуждание частиц внутри стохастического слоя

Иными словами, локальная неустойчивость приводит к разрушению сепаратрисы, причем теряется одновременно смысл понятий захваченных или пролетных частиц, если только эти частицы имеют энергию, лежащую в области стохастического слоя. Остановимся на этом явлении более подробно, ибо, как мы увидим далее, с ним связано не только существенное расширение арсенала физических средств анализа, но и в значительной степени изменение многих наших представлений о динамической устойчивости систем.

Перекрытие резонансов вблизи сепаратрисы. Конечно, структура фазового пространства внутри стохастического слоя является очень сложной, и мы познакомимся с некоторыми самыми главными ее особенностями. Наиболее очевидное свойство слоя—существование в нем большой и очень сложно разветвленной сети островков (см. рис. 5.14). Мы уже видели в предыдущем параграфе, как появляются островки в универсальном отображении. Они порождаются отдельными резонансами и располагаются в окрестности эллиптических точек. Здесь имеет место то же явление. Рассмотрим его подробнее.

Представим уравнения (3.2) и (3.3) в виде

$$\dot{H} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \cos \nu t, \qquad \dot{\vartheta} = \omega(H) + O(\varepsilon), \tag{3.22}$$

где мы для большей наглядности будем выражать все величины как функции энергии, а не действия. Разлагаем $V = V(x)$ в ряд Фурье:

$$V(x) = \sum_n V_n e^{in\vartheta} + \text{к. с.} \tag{3.23}$$

Здесь коэффициенты разложения V_n являются функциями H.

В действительности структура разложения (3.23) зависит от вида невозмущенного движения $x(t)$. Например, при симметричной невозмущенной потенциальной яме $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ раскладываются в ряд Фурье по четным $(2n\vartheta)$ или нечетным $(2n+1)\vartheta$ гармоникам. Это, конечно, сразу отражается на условии резонанса, которое в симметричном случае принимает вид

$$2n\omega(H) = \nu.$$

Разложение (3.23) записано без учета подобной симметрии, и в дальнейшем там, где это понадобится, мы сделаем необходимое уточнение. Во всяком случае, следует всегда иметь в виду, что универсальность оценки достигается здесь не столько в конкретных значениях коэффициентов, сколько в физической структуре конечного выражения.

Рассмотрим правую часть в (3.22). С одной стороны,

$$\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{dV(x)}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial H}\dot{H} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}.$$

Поскольку возмущение движения мало́ ($\varepsilon \ll 1$), то достаточно для оценок ограничиться лишь вторым членом:

$$\frac{dV(x)}{dt} \sim \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}.$$

Используя разложение (3.23), преобразуем уравнения (3.22) для H к виду

$$\dot{H} = -\tfrac{1}{2} i\varepsilon\omega(H) \sum_n n\left[V_n e^{i(n\vartheta + \nu t)} + V_n e^{i(n\vartheta - \nu t)} - \text{к. с.}\right]. \tag{3.24}$$

Условие резонанса имеет вид

$$n\omega(H_n) = \nu, \tag{3.25}$$

где H_n — значение энергии при точном резонансе. Отсюда находим расстояние между резонансами:

$$\delta\omega = |\omega(H_{n+1}) - \omega(H_n)| = \frac{\nu}{n} - \frac{\nu}{n+1} \sim \frac{\nu}{n^2} = \frac{\omega^2}{\nu}. \tag{3.26}$$

Действительно, при любом фиксированном ν частота $\omega(H)$ будет мала по сравнению с ν, если достаточно близко находиться у сепаратрисы. Ширину резонанса получим с помощью следующей простой оценки. Выделим в правой части (3.24) резонансный член:

$$\dot{H} \sim \tfrac{1}{2} i\varepsilon\omega n V_n \exp\{i[n\omega(H) - \nu]t\} + \text{к. с.}$$

Интегрируем это выражение по времени:

$$\Delta H \sim \frac{\varepsilon\omega n V_n}{\Delta[n\omega(H) - \nu]} \sim \frac{\varepsilon\omega n V_n}{n\Delta\omega} = \frac{\varepsilon\omega V_n}{\Delta\omega}, \tag{3.27}$$

где $\Delta\omega$ — расстройка знаменателя, определяющая одновременно ширину резонанса по частоте:

$$\Delta\omega = \left|\frac{d\omega}{dH}\right| \Delta H. \tag{3.28}$$

Подстановка (3.27) в (3.28) дает

$$\Delta\omega \sim \left(\varepsilon\omega\,|V_n| \cdot \left|\frac{d\omega}{dH}\right|\right)^{1/2}.$$

Теперь надо исключить V_n. Следуя результатам § 1.3, имеем

$$|V_n| \sim \frac{H_c}{n} \sim \frac{\omega}{\nu} H_c \qquad (n < N).$$

Отсюда

$$\Delta\omega \sim \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{\nu} H_c \left|\frac{d\omega}{dH}\right|\right)^{1/2}. \tag{3.29}$$

С помощью формул (3.26) и (3.29) находим параметр перекрытия резонансов:

$$\bar{K} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \left(\varepsilon \frac{\nu}{\omega^2} H_c \left|\frac{d\omega}{dH}\right|\right)^{1/2}. \tag{3.30}$$

Это выражение обладает определенной общностью, и специфика задачи сосредоточена в зависимости $\omega(H)$. Из (3.14) и (3.17) следует, что параметр локальной неустойчивости равен

$$K \sim \varepsilon \frac{\nu}{\omega^2} H_c \left|\frac{d\omega}{dH}\right|. \tag{3.31}$$

Сравнение формул (3.30) и (3.31) снова приводит нас к равенству

$$K = \bar{K}^2.$$

Теперь наши возможности анализа заметно расширились. По мере приближения к сепаратрисе частота $\omega(H)$ стремится к нулю, а производная от нее стремится к бесконечности:

$$\left|\frac{d\omega}{dH}\right| \sim \exp\left(\pi \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Поэтому так же сильно возрастает ширина резонансов, как это следует из (3.29). Однако расстояние между резонансами (3.26) при этом уменьшается. В результате резонансная сеть быстро перекрывается, и возникает фазовый слой со стохастической динамикой (ком. 8).

Можно было бы таким же способом рассмотреть и другие случаи образования стохастического слоя. Однако самый главный вывод мы уже можем почувствовать, основываясь лишь на имеющихся результатах. Картина возникновения стохастического слоя подобна картине появления стохастичности в универсальном отображении. Вообще стохастический слой в окрестности сепаратрисы является зародышем хаоса в общем случае гамильтоновских систем. Ниже мы приведем различные соображения, подтверждающие этот вывод и, более того, установим некоторые черты подобия стохастичности.

Гомоклиническая структура. Можно попытаться выяснить более тонкую структуру зарождения хаоса, поскольку теперь мы понимаем, что в гамильтоновских системах он начинается с разрушения сепаратрисы.

Первый и очевидный источник хаоса связан с существованием гиперболической точки. Это утверждение может показаться очевидным, однако усиление степени его нетривиальности стало возможным лишь благодаря КАМ-теории. Действительно, согласно последней существуют конечные окрестности

эллиптических точек, в которых возмущение не изменяет устойчивого характера динамики. Поэтому в гамильтоновских системах седла являются единственными особыми точками, возле которых движение неустойчиво, и следует более детально посмотреть, как влияет возмущение на окрестность гиперболических точек.

Рассмотрим петлю сепаратрисы, имеющую одну гиперболическую точку O (рис. 5.15*а*). Она существует, например, при движении частицы в кубическом потенциале. Через точку O проходят четыре «уса» сепаратрисы: два входящих и два выходящих. Рассмотрим два из них, которые образуют петлю сепаратрисы — выходящий S^+ и входящий S^-.

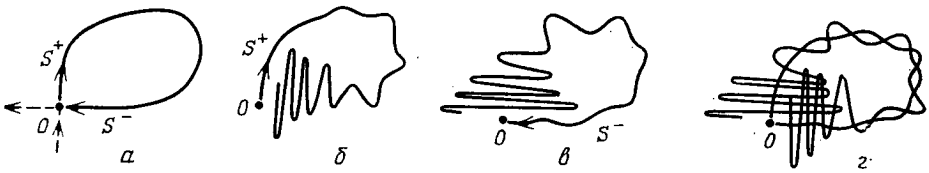


Рис. 5.15. Образование гомоклинической структуры в окрестности сепаратрисы

При действии малого периодического возмущения на систему гиперболическая точка O оказывается устойчивой [14]. Это можно понять из следующих качественных соображений. Траектории в окрестности гиперболической точки неустойчивы. Поэтому очень малое возмущение не может привести к более сильной неустойчивости траекторий. Свойство устойчивости гиперболической точки распространяется на некоторую малую окрестность ее усов. В противном случае разрушение усов привело бы и к исчезновению гиперболической точки. Следовательно, малые окрестности усов вблизи O являются частями инвариантных кривых S^+ и S^- при действии возмущения. Мы, однако, ничего не знаем, как ведут себя инвариантные кривые S^+, S^- вдали от точки O при действии возмущения.

Возможна такая ситуация, при которой усы S^+ и S^- не замыкаются. Именно она и возникает под действием любого периодического возмущения. Эта ситуация называется расщеплением сепаратрисы. Поскольку возмущение периодическое, то ус S^+ начинает осциллировать. По мере удаления от точки O в направлении S^+ и по мере приближения к O в направлении S^- эти осцилляции нарастают по амплитуде. Одновременно происходит уменьшение их шага (рис. 5.15). Нарастание амплитуды связано с удалением от устойчивой точки O, а уменьшение шага связано с замедлением движения в окрестности O. Аналогичную картину можно себе представить, если двинуться из точки O по усу S^- в противоположном к движению направлении (рис. 5.15*в*).

Такое поведение усов S^+, S^- должно привести к их пересечению в некоторой точке, скажем M_1, не совпадающей с O. Точка M_1 называется гомоклинической. Если существует хотя бы одна гомоклиническая точка, т. е. точка пересечения усов S^+, S^-, не совпадающая с O, то гомоклинических точек существует бесконечно много, и все они образуют некоторое сложно устроенное множество, называемое гомоклинической структурой. Доказательство этого утверждения следует непосредственно из свойства инвариантности усов S^+ и S^-.

Действительно, подействуем на точку M_1 преобразованием $\hat{T}$ сдвига по времени на некоторую величину T. Обозначим

$$M_2 = \hat{T} M_1.$$

Это означает, что через время T точка M_1 переходит в точку M_2. Инвариантность кривой означает, что при подходящем выборе шага преобразования (например, через период возмущения) все точки отображений M_1,

M_2, ... располагаются на этой кривой. Поэтому если точка M_1 была точкой пересечения усов S^+ и S^-, то точка M_2 также принадлежит как усу S^+, так и усу S^-. Следовательно, точка M_2 является точкой пересечения усов S^+ и S^- и поэтому является гомоклинической. Продолжение этого рассуждения приводит к существованию бесконечного числа гомоклинических точек. Очень слабое представление о возникающей при этом картине дает рис. 5.15*г* (ком. 9).

В некотором точно определенном смысле структура гомоклинических точек является случайной. Эти результаты способствовали развитию метода исследования динамических систем, называемого символической динамикой [16, 17].

Стохастический слой нелинейного резонанса. Описанная нами картина появления стохастического слоя столь сильно отражается на динамике нелинейных систем, что нам в дальнейшем придется многократно к ней обращаться. Здесь же мы ограничимся одним небольшим, но очень эффектным примером.

Рассмотрим случай, когда возникает нелинейный резонанс между системой и внешним возмущением (см. § 1 гл. 3). Эта задача описывается гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, t), \tag{3.32}$$

в котором V — периодическая функция времени. Примем для V простейшую форму:

$$V = V_0 \sin \nu_0 t \cdot \cos n\vartheta. \tag{3.33}$$

Тогда из (3.32) и (3.33) следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} &\dot I = nV_0 \sin \nu_0 t \cdot \sin n\vartheta, \\ &\dot\vartheta = \omega(I); \quad \omega(I) = \frac{dH_0}{dI}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Представим первое уравнение в таком виде, чтобы явно выделить резонансный член:

$$\dot I = {}^1/_2 nV_0 [\cos(\nu_0 t - n\vartheta) - \cos(\nu_0 t + n\vartheta)]. \tag{3.35}$$

Резонанс заключается в том, что в области значений переменной I, где исследуется движение, выполняется равенство

$$n\omega(I_0) = \nu_0. \tag{3.36}$$

Иначе, значения I лежат вблизи I_0.

Обычное исследование резонанса основано на пренебрежении нерезонансным членом. Это приводит вместо (3.35) к укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} &\dot I = {}^1/_2 nV_0 \cos\psi, \quad \psi = n\vartheta - \nu_0 t, \\ &\dot\psi = n\omega(I) - \nu_0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

которые легко интегрируются. Все это было проделано в § 1 гл. 3.

Однако именно теперь мы в состоянии ответить на вопрос о том, к чему приводит отбрасывание второго (нерезонансного) члена в правой части уравнения (3.35). Очевидно, что он мал. Но было бы сильным заблуждением рассчитывать на то, что эта малость приводит к слабым эффектам, и в этом и заключается особенность качественно нового анализа, который в состоянии учесть возможность хаотической динамики.

Напомним сначала главные параметры нелинейного резонанса. Это нелинейные колебания с линейной частотой фазовых колебаний:

$$\Omega = \left({}^1/_2 n^2 V_0 \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \right)^{1/2}. \tag{3.38}$$

По порядку величины из (3.38) следует

$$\Omega \sim n(\varepsilon\alpha)^{1/2}\omega_0, \tag{3.39}$$

где

$$\varepsilon = \frac{V_0}{H_0(I_0)}, \quad \alpha = \left|\frac{d\omega(I_0)}{dI}\right| \frac{I_0}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \omega(I_0).$$

Ширина резонанса по действию равна

$$\Delta I \sim (\varepsilon/\alpha)^{1/2} I_0. \tag{3.40}$$

Условия

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1 \tag{3.41}$$

обеспечивают малое влияние отброшенного нерезонансного члена.

Нелинейные колебания, описываемые укороченной системой (3.37), можно охарактеризовать своей системой переменных действие—угол $(\tilde{I}, \tilde{\vartheta})$, т. е. совершить каноническое преобразование

$$(I, \psi) \to (\tilde{I}, \tilde{\vartheta}).$$

В новых переменных можно ввести нелинейную частоту $\tilde{\omega}(\tilde{I})$ нелинейного резонанса. Это просто частота нелинейных фазовых колебаний. Нас интересует только лишь одно свойство частоты $\tilde{\omega}$—она обращается в нуль на сепаратрисе нелинейного резонанса. Поэтому условий (3.41) оказывается недостаточно. Существует малая область в окрестности сепаратрисы резонанса, где отброшенным членом в (3.35) пренебречь нельзя.

Можно сказать и иначе. Нерезонансный член

$$\tilde{V} = {}^1/_2 V_0 \sin(n\vartheta + \nu_0 t) \tag{3.42}$$

будем рассматривать как возмущение к укороченной интегрируемой системе (3.37). Тогда остается сделать последний шаг и вспомнить, что любое возмущение разрушает сепаратрису и образует в ее окрестности стохастический слой. Это означает, что нерезонансный член в исходной системе (3.32)—(3.35) образует на фазовой плоскости область стохастической динамики, расположенной в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса.

Нам практически ничего не понадобилось нового для того, чтобы сделать столь важный вывод. Теперь произведем оценку ширины стохастического слоя. Второе уравнение в (3.34) позволяет оценить частоту возмущения (3.42):

$$\nu = n\dot{\vartheta} + \nu_0 = n\omega_0 + \nu_0.$$

Согласно (3.36)

$$\nu = 2\nu_0. \tag{3.43}$$

Частота малых колебаний в системе (3.37), точно учитывающей резонансный член, равна Ω. Формулы (3.39), (3.36) и неравенство (3.41) дают

$$\Omega \sim (\varepsilon\alpha)^{1/2}\nu_0 \ll \nu_0 = \nu/2. \tag{3.44}$$

Неравенство (3.44) означает, что влияние нерезонансного члена соответствует случаю высокочастотного возмущения. Для ширины стохастического слоя при этих условиях имеется оценка (3.20), которая в данном случае принимает вид

$$\frac{|H-H_c|}{H_c} \sim \varepsilon\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^3 \exp\left(-\pi\frac{\nu}{2\Omega}\right) \sim \varepsilon(\varepsilon\alpha)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\pi}{2(\alpha\varepsilon)^{1/2}}\right). \tag{3.45}$$

Определение коэффициентов в показателе экспоненты и предэкспоненциального множителя, конечно, требует более аккуратных оценок. Сам предэкс-

поненциальный множитель видоизменяется вместе с видом возмущения. Например, если вместо исходного уравнения (3.35) записать более общее выражение

$$\dot{I} = V_1 \cos(n_1\vartheta - \nu_1 t) + V_2 \cos(n_2\vartheta - \nu_2 t),$$

то структура множителя перед экспонентой во многом определяется соотношением между n_1 и n_2.

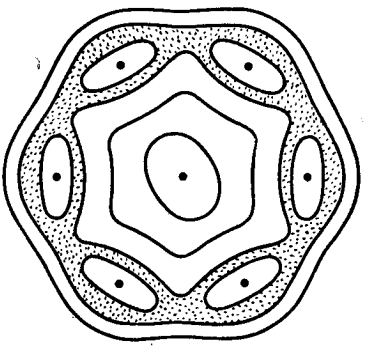


Рис. 5.16. Стохастический слой при нелинейном резонансе

Внимательный взгляд на весь путь, который проделан для получения формулы (3.45), показывает, что нигде не использовались никакие конкретные свойства динамической системы. Поэтому мы просто заключаем, что в структуру фазового портрета при нелинейном резонансе следует внести весьма существенную поправку.

Всякий нелинейный резонанс порождает сепаратрису, а нерезонансные члены «одевают» ее стохастическим слоем, хотя и очень узким (рис. 5.16). Ширина слоя экспоненциально мала, и показатель экспоненты обратно пропорционален $\sqrt{\varepsilon}$. Мы еще вернемся к различным следствиям описанного явления и, в частности, к связанной с ним диффузии Арнольда.

§ 4. Разрушение интегралов движения

Наше внимание в предыдущих параграфах этой главы было сосредоточено на нестационарных гамильтоновских системах, в которых внешние периодические по времени силы могут вызвать хаотическую динамику. Естественным продолжением является исследование возможности возникновения хаоса в замкнутых гамильтоновских системах, имеющих, например, интеграл энергии

$$E = H_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$—N-мерные векторы.

Напомним, что если система (4.1) имеет точно N независимых первых интегралов в инволюции, то ее траектория лежит на N-мерном инвариантном торе.

Природа разрушения интегралов. Сформулируем снова задачу о возмущении интегрируемой системы. Представим гамильтониан системы в виде

$$H = H_0(I_1, \ldots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \ldots, I_N; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N), \tag{4.2}$$

где ε—малый параметр возмущения. Сама форма записи выражения (4.2) показывает, что при $\varepsilon = 0$ система интегрируема и имеет N независимых первых интегралов $I_1, \ldots, I_N$, которые коммутируют друг с другом (т. е. находятся в инволюции).

При достаточно малых ε теорема КАМ гарантирует нам сохранение инвариантных торов и, следовательно, N новых, слабо возмущенных интегралов движения. Однако если ε больше некоторого критического значения ε_c, то какие-то инвариантные торы исчезают (говорят, что они разрушаются). Число интегралов движения уменьшается, а само движение становится стохастическим. Это происходит следующим образом.

Рассмотрим какую-либо небольшую область фазового пространства $\Delta\Gamma$, в которой возможен резонанс между некоторыми степенями свободы. Это

означает, что условие резонанса

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \omega(I_1, \ldots, I_n) = 0 \tag{4.3}$$

может быть выполнено при $(m_i) \not\equiv 0$ и для $(I_k^{(0)}) \in \Delta\Gamma$. Тогда говорят об $(I_k^{(0)})$ как о резонансном торе. Гамильтониан (4.2) в области $\Delta\Gamma$ уже не создает простой структуры инвариантных торов. Происходит структурная перестройка фазового пространства. Мы знакомы с одним из не очень сложных случаев перестройки — внутренним нелинейным резонансом. Если выполнено условие (4.3), то в области $\Delta\Gamma$, которая при $\varepsilon = 0$ не имела особых точек, теперь появляется сепаратриса. Она определяет ширину нелинейного резонанса.

Выше мы показали, что сепаратриса всегда разрушается, образуя в своей окрестности стохастический слой. Очевидно, что внутри стохастического слоя инвариантные торы либо отсутствуют вообще, либо имеют размерность $< N$.

Таким образом, в окрестностях сепаратрис разрушается часть интегралов движения. Это разрушение сопровождается появлением стохастической динамики.

Приведем два примера, которые показывают, насколько ситуация разрушения интегралов движения является универсальной.

Двумерные колебания. Рассмотрим произвольное двумерное финитное движение. Его можно интерпретировать как связанные колебания двух осцилляторов. Гамильтониан такой системы записывается в виде

$$H = H_1(p_1, x_1) + H_2(p_2, x_2) + \varepsilon V(x_1, x_2). \tag{4.4}$$

Части H_1 и H_2 соответствуют невозмущенным колебаниям, а член V — их взаимодействию.

Выберем H в следующем виде:

$$H = {}^1/_2(p_1^2 + \omega^2 x_1^2) + {}^1/_2(p_2^2 + \omega^2 x_2^2) + {}^1/_4\alpha(x_1^4 + x_2^4) + {}^1/_2\varepsilon x_1^2 x_2^2. \tag{4.5}$$

Системы (4.4) и (4.5) имеют один очевидный интеграл энергии $H = E$. Второй интеграл можно попробовать получить с помощью рядов по ε и α. Это, однако, не всегда удается. Фазовое пространство четырехмерное, и движение происходит на двумерном торе, если второй интеграл существует.

Рассмотрим отображения Пуанкаре, которые введем следующим образом. Пусть z есть точка на плоскости (x_1, p_1), в которой траектория системы (4.5) протыкает эту плоскость при $x_2 = 0$ в направлении $p_2 > 0$ (значение p_2 при этом определено из (4.5) значением E). Последовательность точек z_0, z_1, ... определяется свойствами траектории.

При $E = 10$, $\alpha = 0{,}25$, $\varepsilon = 1$ траектории (z_k), соответствующие различным начальным точкам z_0, приведены на рис. 5.17*а* *). Точки группируются в семейство замкнутых кривых. Эти кривые являются сечениями инвариантных торов. Положение сепаратрисы отчетливо видно. В областях вблизи двух гиперболических точек имеется слабое стохастическое разрушение. Точки в этих областях принадлежат одной траектории. Более сильное стохастическое разрушение инвариантных торов видно на рис. 5.17*б*, где $E = 50$. При этом наблюдаются малые островки, соответствующие резонансам высоких порядков. Дальнейшее увеличение E приводит почти к полному разрушению инвариантных торов, и сохраняющиеся торы имеют очень малые сечения.

В тех областях значений параметров и фазового пространства, где инвариантных торов нет, остается только один интеграл движения — энергия, и задача становится максимально неинтегрируемой. Модель (4.5) не является исключительной. Наоборот, трудно указать такие функции H_1, H_2 и V, при которых система уравнений движения была бы интегрируемой. Можно, однако, специальным подбором коэффициентов ω, α и ε привести задачу (4.5)

*) Данные на рис. 5.17 воспроизводятся по работе [18].

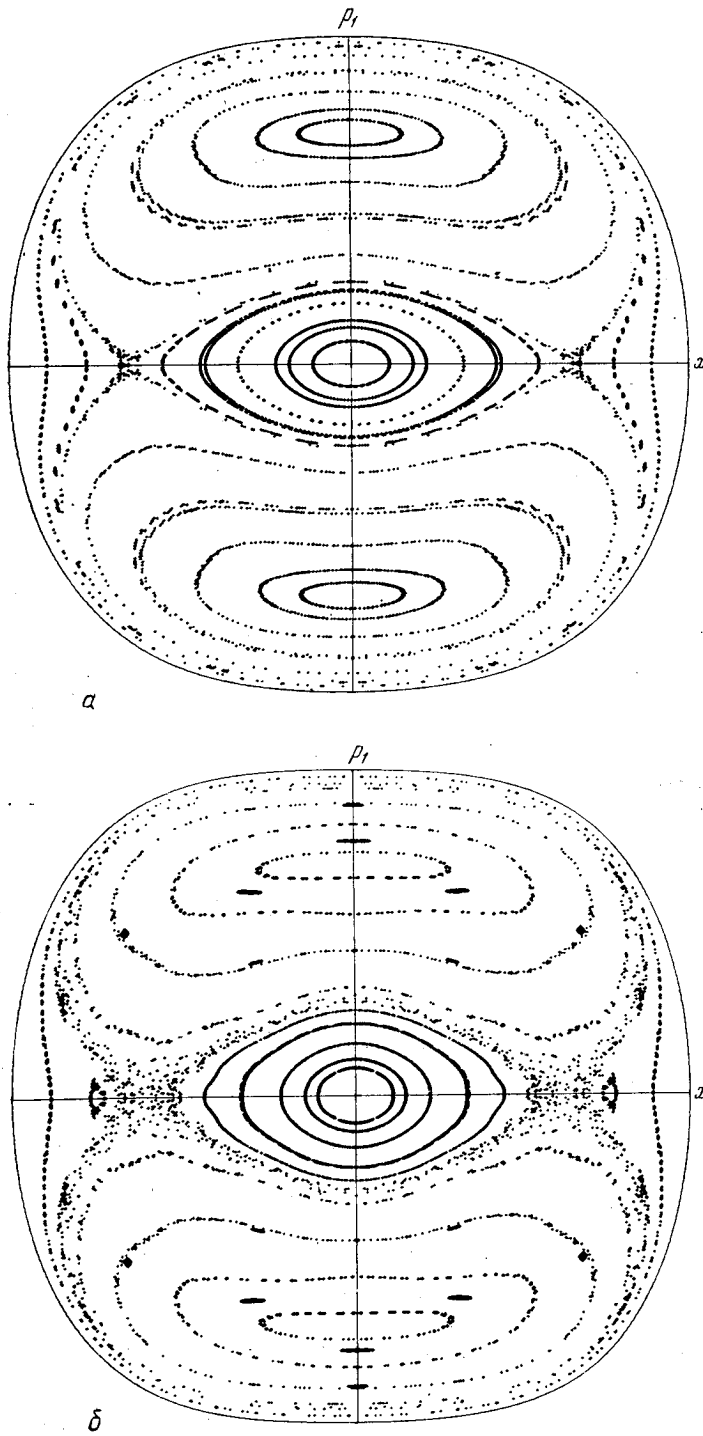


Рис. 5.17. Плоскость отображения Пуанкаре для связанных осцилляторов при двух различных значениях энергии

к разделению переменных. Эту возможность следует всегда иметь в виду, хотя множество таких случаев и составляет меру нуль среди всего множества, скажем, потенциала V в виде полиномов четвертого порядка.

Связанные ротаторы. Другой пример связан с двумя взаимодействующими ротаторами.

Рассмотрим две частицы с орбитальными моментами $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$, и пусть взаимодействие частиц осуществляется только через взаимодействие их моментов. Это означает, что гамильтониан системы имеет вид

$$H = H(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}). \tag{4.6}$$

Формально система (4.6) имеет шесть переменных, однако величины моментов не изменяются, т. е.

$$\boldsymbol{L}^2 = \text{const}, \quad \boldsymbol{M}^2 = \text{const}. \tag{4.7}$$

Уравнения связей (4.7) сводят задачу (4.6) эффективно к двум степеням свободы ($N = 2$). Можно поэтому исключить с помощью инвариантов (4.7), например, переменные L_z и M_z и записать гамильтоновские уравнения в пространстве переменных L_x, L_y и M_x, M_y. Это приводит задачу к четырехмерному фазовому пространству, в котором есть интеграл энергии

$$\begin{aligned} &E = H(L_x, L_y; M_x, M_y), \\ &L^2 = \text{const}, \quad M^2 = \text{const}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

при фиксированных значениях L^2 и M^2. Поэтому движение системы (4.6) происходит в пространстве $(L_x, L_y; M_x, M_y)$ на поверхности постоянной энергии (4.8). Теперь, как и в предыдущей задаче, осталось выяснить, имеется ли другой, независимый по отношению к E, первый интеграл движения.

Все эти несколько удлиненные рассуждения необходимы по той причине, что переменные L_α, M_α $(\alpha = x, y, z)$ не являются каноническими. Тем не менее канонические уравнения движения можно записать. Существуют разные способы, позволяющие это сделать. Мы приведем самый прямой и удобный для нас путь, хотя существуют и более элегантные и универсальные способы (см., например, [19]).

Из определений моментов

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1], \quad \boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2],$$

следуют коммутационные соотношения

$$[\boldsymbol{L}_\alpha, \boldsymbol{L}_\beta] = \boldsymbol{L}_\gamma, \quad [\boldsymbol{M}_\alpha, \boldsymbol{M}_\beta] = \boldsymbol{M}_\gamma, \tag{4.9}$$

где скобки [,]—скобки Пуассона, а индексы α, β, γ образуются из (x, y, z) циклическими перестановками. Соотношения (4.9) позволяют записать следующие канонические уравнения движения:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = -\left[\boldsymbol{L} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{L}}\right], \quad \dot{\boldsymbol{M}} = -\left[\boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}\right], \tag{4.10}$$

где скобки $[\ldots \times \ldots]$ обозначают векторное произведение и H взято в форме (4.6).

Из (4.10), в частности, видно, что свойства (4.7) имеют место.

Рассмотрим пример [21]:

$$H = L_z + M_z + L_x M_x. \tag{4.11}$$

Он имеет следующую физическую интерпретацию. Если существует выделенное направление действия момента сил на ротатор, например ось z, то энергия ротатора равна $\text{const} \cdot L_z$ или $\text{const} \cdot M_z$. В классической механике можно положить константы равными единице. Поэтому величина

$$H_0 = L_z + M_z$$

есть гамильтониан невзаимодействующих ротаторов. С помощью уравнений (4.10) легко находим, что $\dot{H}_0 = 0$. Вообще, в случае

$$H = H(L_z, M_z) \tag{4.12}$$

имеем согласно (4.10)

$$\dot{L}_z = 0, \quad \dot{M}_z = 0$$

и, следовательно, существуют еще два интеграла движения: L_z и M_z. Из трех интегралов E, L_z и M_z — два независимых (в силу соотношения (4.12)). Поэтому модель (4.12) относится к числу интегрируемых.

Точно так же оказывается интегрируемым и случай взаимодействия гейзенберговского типа:

$$H = L_z + M_z + \boldsymbol{LM}.$$

Дополнительным к E интегралом движения является, например, величина $L_z + M_z$.

Таким образом, при квадратичном гамильтониане взаимодействия выражение (4.11) не имеет очевидных инвариантов движения, кроме E. Поэтому в этой системе можно ожидать разрушения интеграла движения и появления

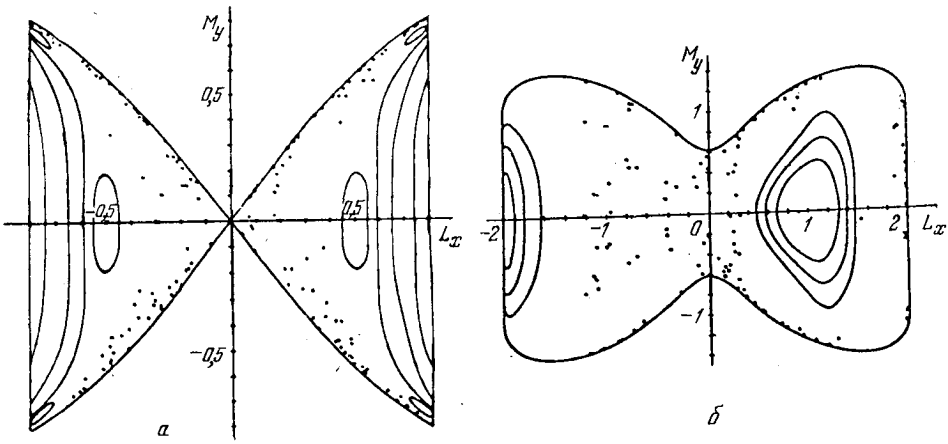


Рис. 5.18. Плоскость отображения Пуанкаре для двух связанных ротаторов: *а*) $H = 0$, $L^2 = M^2 = 0{,}65$, $L_y = 0$; *б*) $H = -3{,}9$, $L^2 = M^2 = 4$, $L_y = 0$

хаотической динамики. Так оно в действительности и происходит, как это было показано в работе [21]. На рис. 5.18, взятом из этой работы, видны инвариантные кривые, являющиеся сечениями инвариантных торов. Отдельные точки соответствуют одной стохастической траектории. Область, которую они заполняют, является областью разрушенного второго интеграла движения.

Этот пример во многом подобен предыдущей модели связанных осцилляторов. В дальнейшем мы ознакомимся еще с одной моделью, описывающей взаимодействие атома с полем излучения. Она может быть приведена к модели взаимодействующих ротатора и осциллятора. В ней также происходит разрушение второго интеграла движения [22]. Это возвращает нас к утверждению, сделанному выше, о том, что существование областей параметров и фазового пространства с разрушенными интегралами движения является типичной физической ситуацией, которая хорошо иллюстрируется приведенными примерами (ком. 10).

§ 5. Стохастические аттракторы

До сих пор в этой главе наше внимание было сосредоточено исключительно на гамильтоновских системах и на механизме возникновения в них хаоса. Теперь мы отметим некоторые существенные стороны появления стохастичности в негамильтоновских диссипативных системах. Существование диссипации приводит к уменьшению фазового объема системы. Забегая вперед, можно сказать, что некоторые черты рождения хаоса и его свойств должны оставаться общими как для гамильтоновских систем, так и для диссипативных.

Финитность движения. Следующее ниже замечание прежде всего относится к понятию локальной неустойчивости. Очевидно, что появление этой неустойчивости формулируется столь универсальным способом, что он не связан с конкретным детальным видом динамической системы. Здесь, однако, надо быть достаточно аккуратным.

Пусть, например, уравнение движения имеет тривиальный вид:

$$x_{n+1} = Kx_n \qquad (K > 0). \tag{5.1}$$

Его решение

$$x_n = x_0 e^{hn}, \qquad h = \ln K,$$

показывает сразу неустойчивость относительно возмущений начального условия:

$$\frac{\delta x_n}{\delta x_0} = e^{hn}. \tag{5.2}$$

С другой стороны, очевидно, что, несмотря на свойство (5.2), никакой стохастичности в системе (5.1) нет. Парадокс связан с тем, что система (5.1) совершает инфинитное движение, в котором траектории могут расходиться достаточно далеко и достаточно быстро из-за неограниченности фазового пространства.

Ситуация изменяется, если вместо (5.1) рассмотреть систему, фазовое пространство которой финитно,

$$x_{n+1} = Kx_n \pmod 1, \qquad K > 0, \tag{5.3}$$

с которой мы уже встречались. Здесь есть стохастичность при $K > 1$. Очень важное условие, налагаемое на рассматриваемые далее системы,— финитность их динамики в фазовом пространстве. Это замечание приобретает более глубокий смысл для диссипативных систем, где осцилляторная динамика может вообще отсутствовать. В частности, характеристические показатели могут не иметь мнимой части ни при каких реальных значениях параметров.

Аттракторы и репеллеры. Сравнительный анализ особенностей на фазовой плоскости для гамильтоновских и диссипативных систем наилучшим способом представляет их различие. Структура фазового пространства в диссипативном случае намного богаче, и поэтому здесь следует ожидать более разнообразную динамику систем.

Одним из отличительных свойств диссипативных систем является существование аттракторов и репеллеров. Под «аттрактором» понимается любое притягивающее множество. Примерами аттракторов могут быть устойчивый фокус, устойчивый предельный цикл. «Репеллером» является отталкивающее множество точек. Таким свойством обладают, например, неустойчивый фокус и неустойчивый предельный цикл. При $t \to \infty$ фазовые траектории все ближе приближаются к аттрактору. Система приближается к некоторому установившемуся режиму, точки которого принадлежат множеству A^+, являющемуся аттрактором. Аттрактор есть инвариантное множество, т. е.

$$\hat{T}A^+ = A^+.$$

Репеллер легко понять, если представить его как аттрактор A^-, к которому стремятся фазовые траектории при $t \to -\infty$. Он также является инвариантным множеством:

$$\hat{T}A^- = A^-.$$

Стохастический аттрактор. На первый взгляд кажется, что существование аттракторов исключает возможность стохастической динамики в фазовом пространстве, так как с течением времени расстояние между точками фазовой траектории и точками множества A^+ должно стремиться к нулю. Поэтому с течением времени траектория все больше приближается к точке или циклу, в структуре которых нет ничего случайного. Природа, однако, распорядилась иначе.

Существуют притягивающие множества, сама структура которых является очень сложной. Ее не просто описать, но можно указать ее главную особенность. Динамика точки на такой структуре в любом возможном для анализа смысле является случайной подобно тому, как это имеет место в гамильтоновских системах. Такое притягивающее множество, на котором реализуется стохастическая динамика, будем называть стохастическим аттрактором (ком. 11).

В понятие стохастичности вкладываются, по существу, те же не очень строго определенные понятия, апеллирующие скорее к физическому смыслу, чем к строгому определению. Перечислим их.

1. Система совершает финитное движение.

2. В конечной области фазового пространства имеется локальная неустойчивость, позволяющая ввести понятие энтропии Колмогорова—Синая. В этом месте следует сделать остановку и разобраться, о чем идет речь.

В гамильтоновских системах траектория достаточно быстро заполняла все фазовое пространство вследствие эргодичности и перемешивания. Теперь эти понятия представляются анахронизмом, так как траектория притягивается к некоторому множеству $\mathcal{A}_s$, которое не только есть часть фазового пространства, но и может иметь нулевую меру. Можно, однако, поступить следующим образом. Воспользуемся инвариантностью $\mathcal{A}_s$,

$$\hat{T}\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_s, \tag{5.4}$$

и тем, что через некоторое не очень большое время точки фазовой траектории очень близки к точкам $\mathcal{A}_s$. Поэтому понятие локальной неустойчивости можно ввести не в фазовом пространстве Г, а в $\mathcal{A}_s \subset \Gamma$:

$$D_{\mathcal{A}_s}(t) = D_{\mathcal{A}_s}(t_0)\, e^{h_0(t-t_0)} \qquad (t > t_0); \tag{5.5}$$

здесь индекс $\mathcal{A}_s$ при D означает, что расстояние D берется между двумя траекториями, начальные точки которых принадлежат $\mathcal{A}_s$.

Следующее важное замечание позволяет снять индекс $\mathcal{A}_s$ в (5.5). Если t_0 не очень мало́, то отличие положения точек реальной траектории от положения подходящих точек $\mathcal{A}_s$ мало́. Им можно пренебречь, и поэтому расходимость траекторий по закону

$$D(t) = D(t_0)\, e^{h_0(t-t_0)} \qquad (t > t_0) \tag{5.6}$$

будет происходить для любой пары точек в некоторой области фазового пространства конечной меры, если только выполнено важное неравенство

$$t_0 > t_0^*. \tag{5.7}$$

Доказательство существования времени t_0^* может оказаться достаточно сложным для реальных систем, хотя сам факт его существования может представляться вполне очевидным.

Это длинное замечание позволяет ввести более коротким путем и в том же смысле, что и раньше, понятие перемешивания.

3. Существуют переменные z такие, что расцепляется коррелятор

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_s}(z(t),\ z(t_0)) = \\ = \langle f(z(t))\, g(z(t_0))\rangle_{\mathcal{A}_s} - \langle f(z(t))\rangle_{\mathcal{A}_s} \langle g(z(t_0))\rangle_{\mathcal{A}_s} \underset{t-t_0\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad (5.8)$$

где f и g — некоторые интегрируемые функции и

$$\langle Q(z)\rangle_{\mathcal{A}_s} \equiv \int\limits_{\mathcal{A}_s} d\mathcal{A}_s(z)\, Q(z). \quad (5.9)$$

Так же, как и при переходе от (5.5) к (5.6), неравенство (5.7) позволяет снять индекс $\mathcal{A}_s$ в формулах (5.8) и (5.9). Тогда их вид ничем не отличается от определений в гамильтоновском случае, если заменить $d\mathcal{A}_s(z)$ на $d\Gamma(z)$ в (5.9).

Свойство (5.9) означает существование процесса перемешивания, который, однако, реализуется теперь не на всем фазовом пространстве, а на некотором множестве $\mathcal{A}_s$. Оправданием этому является то, что при выполнении неравенства (5.7) отличие области, покрываемой фазовой траекторией, от $\mathcal{A}_s$ мало.

Квазиаттракторы. Этот термин не столько дает определение конкретной физической ситуации, сколько фиксирует нашу беспомощность перед множеством накопленной на компьютерах информации.

Пусть, например, динамическая гамильтоновская система определена отображением

$$\bar{z} = \hat{T}_0 z \quad (5.10)$$

и $\hat{T}_0$ сохраняет меру.

Введем понятие диссипативной системы, близкой к гамильтоновской, следующим образом:

$$\bar{z} = \hat{T} z \equiv (\hat{T}_0 + \delta\hat{T}_\gamma) z, \quad (5.11)$$

где отображение $\hat{T}$ уже не сохраняет меру из-за наличия диссипативной части $\delta\hat{T}_\gamma$. Оператор $\delta\hat{T}_\gamma$ действует в том же фазовом пространстве, что и $\hat{T}_0$, или в его части.

Теперь сформулируем следующий вопрос. Пусть система (5.10) является K-системой, т. е. отображение $\hat{T}_0$ порождает стохастичность, и пусть система

$$\bar{z} = \delta\hat{T}_\gamma z \quad (5.12)$$

имеет обычные аттракторы. Каковы свойства системы (5.11), в которой K-свойство и аттракторы являются двумя предельными случаями?

Далее мы увидим, что в системе (5.11) существует стохастический аттрактор. Но мы также увидим, что существует квазиаттрактор в следующем смысле: в течение некоторого времени система ведет себя подобно K-системе, после чего ее траектория притягивается к регулярному (не стохастическому) аттрактору. Время, в течение которого это происходит, может быть очень большим. Оно может превышать любой достижимый в настоящее время разумный интервал расчетов, но самым важным является, пожалуй, другое обстоятельство. За большое время наличие даже малых ошибок в вычислениях окажется достаточным для того, чтобы регулярно отбрасывать систему от простого аттрактора. Поэтому процесс редукции K-свойства к регулярному движению может оказаться технически недостижимым (ком. 12).

§ 6. Примеры стохастических аттракторов

Обратимся к системам такого типа, который определен уравнением движения (5.11). Это означает, что если, например, γ есть коэффициент диссипации, то при $\gamma = 0$ ($\delta\hat{T}_\gamma = 0$) система является гамильтоновской. Это типичная физическая ситуация, где γ можно интерпретировать как

коэффициент трения. В этом параграфе мы рассмотрим две естественные физические модели, которые являются обобщением на диссипативный случай уже известных нам задач.

Стандартное диссипативное отображение. Первая задача связана с гамильтонианом (1.18), порождающим стандартное отображение (1.16).

Запишем H в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta) f(t), \tag{6.1}$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени, которую мы конкретизируем позже. Уравнения движения следуют из (6.1):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta} f(t), \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I} f(t). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Диссипативную часть динамики введем следующим образом. Будем считать, что в отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$) система имеет устойчивый предельный цикл при $I = I_0$. Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\dot{I} = -\gamma(I - I_0), \quad \dot{\vartheta} = \omega(I),$$

где

$$\omega(I) = \frac{dH_0}{dI}.$$

Совмещение этих уравнений с (6.2) дает

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\gamma(I - I_0) - \varepsilon f(t) \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= \omega(I) + \varepsilon f(t) \frac{\partial V(I, \vartheta)}{\partial I}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Это и есть исходная модель, которую мы рассмотрим в двух предельных случаях.

Сначала, как и ранее, проведем упрощения уравнений (6.3), не влекущие за собой потерю ее главных физических свойств. Положим, что $f(t)$ — периодическая функция с периодом T:

$$f(t + T) = f(t).$$

Пусть также

$$\varepsilon V(I, \vartheta) = \varepsilon V_0 \cos\vartheta = \varepsilon \frac{I_0}{T} \cos\vartheta,$$

где ε есть, как и прежде, безразмерная величина возмущения. Далее мы будем считать всегда $I_0 > 0$, так что выбранный способ определения $V_0 = I_0/T$ не «опасен». Введем также новые переменные:

$$y = \frac{I - I_0}{I_0}, \quad x = \frac{\vartheta}{2\pi}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \bar{\gamma} = \gamma T. \tag{6.4}$$

Система (6.3) теперь упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= -\bar{\gamma} y - \varepsilon f(\tau) \cos 2\pi x, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{2\pi} \omega(y) T, \end{aligned} \tag{6.5}$$

и описывает нелинейный осциллятор с затуханием под действием параметрической внешней силы.

Дальнейший процесс изучения задачи (6.5) связан с выбором силы $f(t)$. Мы рассмотрим два предельных случая — большого и малого числа

гармоник в $f(t)$. Начнем в этом пункте с первого случая. Пусть

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\tau-n). \tag{6.6}$$

Между двумя последовательными толчками система совершает свободное движение с диссипацией:

$$\frac{dy}{d\tau}=-\bar{\gamma}y, \quad \frac{dx}{d\tau}=\frac{T}{2\pi}\omega(y). \tag{6.7}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y(\tau_2)&=e^{-\bar{\gamma}(\tau_2-\tau_1)}y(\tau_1),\\ x(\tau_2)&=x(\tau_1)+\frac{T}{2\pi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\,\omega(y(\tau)). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Если, например,

$$\omega(y)=\omega_0(1+\alpha y), \tag{6.9}$$

то

$$x(\tau_2)=x(\tau_1)+\frac{\omega_0 T}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha\omega_0 T}{\bar{\gamma}}(1-e^{-\bar{\gamma}(\tau_2-\tau_1)}). \tag{6.10}$$

Переход через малую окрестность толчка получается интегрированием системы (6.5) в малой окрестности, включающей одну из δ-функций. Это дает для изменений δy и δx:

$$\delta y=-\varepsilon\cos 2\pi x, \quad \delta x=0. \tag{6.11}$$

Совмещение формул (6.8)—(6.11) приводит окончательно к отображению с интервалом $\Delta\tau=1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}&=e^{-\bar{\gamma}}(y_n+\varepsilon\cos 2\pi x_n),\\ x_{n+1}&=x_n+\frac{\omega_0 T}{2\pi}(1+\alpha\mu y_n)+\frac{1}{2\pi}K_0\mu\cos 2\pi x_n \pmod 1, \end{aligned} \tag{6.12}$$

где

$$K_0=\varepsilon\alpha\omega_0 T, \quad \mu=(1-e^{-\bar{\gamma}})/\bar{\gamma}. \tag{6.13}$$

При $\bar{\gamma}=0$ $\mu=1$, и отображение (6.12) переходит в стандартное отображение. Мы будем называть его стандартным диссипативным отображением. Его можно с помощью небольших переобозначений переписать также в виде.

$$\begin{aligned} \bar{z}&=e^{-\bar{\gamma}}z+\frac{1}{2\pi}K_0\mu\sin 2\pi x,\\ \bar{x}&=x+\bar{z} \pmod 1,\\ z&=\alpha\mu(\omega_0 T/2\pi)e^{\bar{\gamma}}y, \end{aligned} \tag{6.14}$$

исключив постоянный поворот.

Якобиан отображения (6.12) или (6.14) равен

$$J=\frac{\partial(y_{n+1},\,x_{n+1})}{\partial(y_n,\,x_n)}=\frac{\partial(\bar{z},\,\bar{x})}{\partial(z,\,x)}=e^{-\bar{\gamma}}<1. \tag{6.15}$$

Он меньше единицы при $\bar{\gamma}\neq 0$ и отражает влияние диссипации.

Физический аналог отображения (6.14) легко находится из уравнений (6.5) с учетом формулы (6.9) для частоты. Нетрудно видеть, что если для простоты исключить постоянное значение ω_0 в (6.9), то мы приходим от (6.5) просто к уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\bar{\gamma}\frac{dx}{d\tau}+\frac{K_0\mu}{2\pi}f_1(\tau)\cos 2\pi x=0, \tag{6.16}$$

описывающему параметрически возбуждаемый маятник с трением (ком. 13)

Условие появления стохастичности. При $\bar{\gamma}=0$ отображение (6.14) переходит в стандартное для гамильтоновских систем, и условие стохастичности для него имеет вид $K_0 \geqslant 1$. Здесь можно поступить так же, учитывая, однако, что вместо K_0 стоит $K_0\mu$. Действительно, из (6.14) следует

$$\left|\frac{\delta\bar{x}}{\delta x}-1\right| \sim K_0\mu \cdot |\sin 2\pi x|. \tag{6.17}$$

Поэтому условие локальной неустойчивости можно записать в виде

$$K_0\mu = \frac{K_0}{\bar{\gamma}}(1-e^{-\bar{\gamma}}) \gg 1. \tag{6.18}$$

Из (6.17) следует также существование островков устойчивости вблизи

$$x^{(1)}=0, \quad x^{(2)}={}^1/_2. \tag{6.19}$$

Если $\bar{\gamma} \gtrsim 1$, то условие (6.18) переходит в следующее:

$$K_0 \gtrsim \bar{\gamma}. \tag{6.20}$$

Пример стохастического аттрактора для уравнения (6.12) приведен на рис. 5.19,

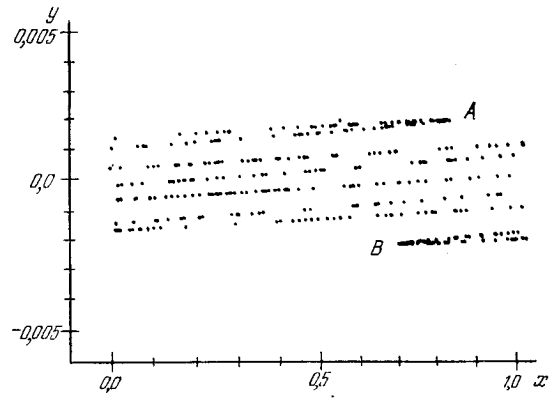


Рис. 5.19. Стохастический аттрактор при $\bar{\gamma}=5$, $\alpha=0{,}3$, $\varepsilon=0{,}3$, $K_0=9{,}03$

а развитие локальной неустойчивости — на рис. 5.20. Величина $D(n)$ определялась следующим образом:

$$D(n)=[(x_n-x'_n)^2+(y_n-y'_n)^2]^{1/2},$$

где (x_n, y_n) и (x'_n, y'_n) относятся к двум траекториям с различными начальными условиями.

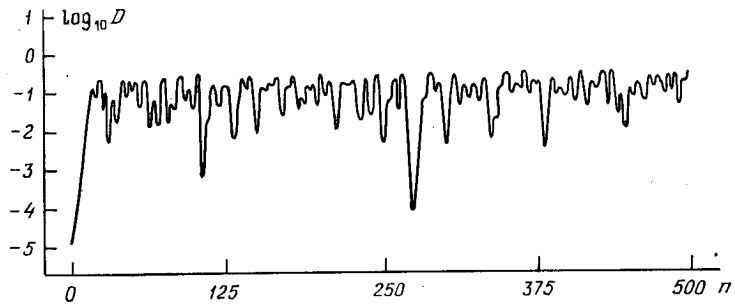


Рис. 5.20. Развитие локальной неустойчивости при тех же данных, что и на рис. 5.19

Корреляционная функция, вычисляемая по формуле

$$\mathcal{R}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\cos 2\pi x_{n+m}\cdot\cos 2\pi x_n,$$

приведена на рис. 5.21.

Итак, все основные характеристики K-систем подтверждаются для диссипативного отображения (6.12) или (6.14), если выполнено некоторое условие (6.20).

Структура стохастического аттрактора. Имеется, однако, существенное различие картин хаоса на фазовой плоскости при $\bar{\gamma}=0$ и при $\bar{\gamma}\neq 0$. На

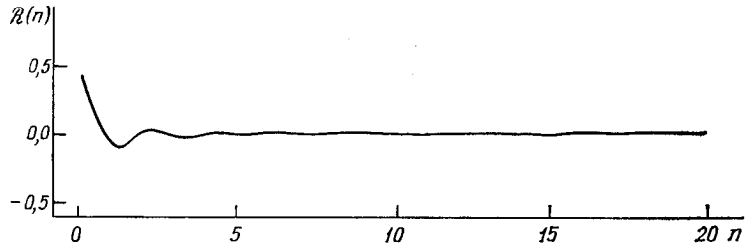


Рис. 5.21. Корреляционная функция при тех же данных, что и на рис. 5.19

рис. 5.19 видна некоторая регулярная структура, которую можно оценить из следующих соображений.

Положим, для простоты, $e^{-\bar{\gamma}}\ll 1$. Из первого уравнения (6.12) следует

$$y_{n+1}\approx \varepsilon e^{-\bar{\gamma}}\cos 2\pi x_n.$$

Исключаем отсюда $\cos 2\pi x_n$, подставляем его значение во второе уравнение (6.12) и пренебрегаем в нем малыми членами с x_n и y_n. Это дает

$$x\approx \frac{\alpha\omega_0 T}{2\pi\bar{\gamma}}e^{\bar{\gamma}}y+\frac{\omega_0 T}{2\pi}\pmod 1, \tag{6.21}$$

где индекс $n+1$ при x и y опущен.

Уравнение (6.21) определяет семейство прямых

$$x=\varkappa y+\omega_0 T/2\pi,$$

где от коэффициента

$$\varkappa=\alpha\omega_0 T e^{\bar{\gamma}}/2\pi\bar{\gamma} \tag{6.22}$$

зависит число отрезков прямых на графике рис. 5.19. Именно, целая часть $\varkappa$ определяет это число.

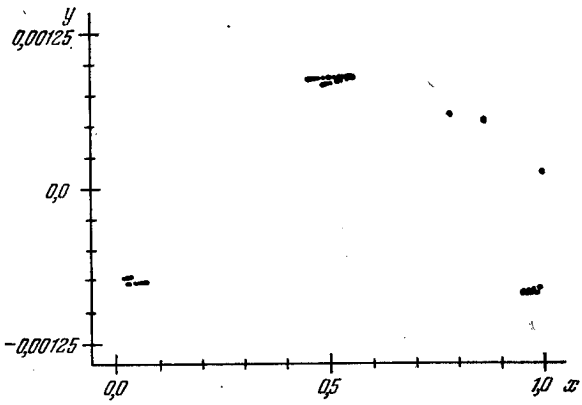


Рис. 5.22. «Умирающий» стохастический аттрактор ($\varepsilon=0{,}3$, $\alpha=0{,}3$, $\bar{\gamma}=5{,}85$, $K=9{,}03$)

Область изменения y легко определить следующим образом (это точки A и B на рис. 5.19). С точностью до $e^{-\bar{\gamma}}$ имеем, используя значения особых точек (6.19):

$$y_A=y_{n+1}(x_n=x^{(1)},\ y_n=0)=\varepsilon e^{-\bar{\gamma}},$$
$$y_B=y_{n+1}(x_n=x^{(2)},\ y_n=0)=-\varepsilon e^{-\bar{\gamma}},$$

$$x_A = x_{n+1}(x_n = x^{(1)},\ y_n = 0) = x^{(1)} + \frac{1}{2\pi}\omega_0 T + \frac{K_0}{\bar{\gamma}}\cos 2\pi x^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\omega_0 T + \frac{K_0}{\bar{\gamma}},$$

$$x_B = x_{n+1}(x_n = x^{(2)},\ y_n = 0) = x^{(2)} + \frac{1}{2\pi}\omega_0 T + \frac{K_0}{\bar{\gamma}}\cos 2\pi x^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\omega_0 T + {}^1/_2 - \frac{K_0}{\bar{\gamma}}.$$

Отсюда, в частности, находим ширину стохастического аттрактора:

$$\Delta y = \max y - \min y = y_A - y_B = 2\varepsilon e^{-\bar{\gamma}}.$$

Простота формулы (6.21) в действительности является обманчивой. Учет отброшенных членов показывает, что каждый отрезок прямой расщепляется на семейство подобных отрезков. В результате весь график стохастического аттрактора образует множество канторового типа, по которому происходят стохастические блуждания точки траектории системы.

Увеличение диссипации $\bar{\gamma}$ приводит к уменьшению числа отрезков в структуре аттрактора. Каждое такое изменение сопровождается некоторого типа бифуркацией, описание которой выходит за пределы наших целей (см. [36]). В результате при достаточно большом значении $\bar{\gamma}$ стохастический аттрактор умирает (рис. 5.22).

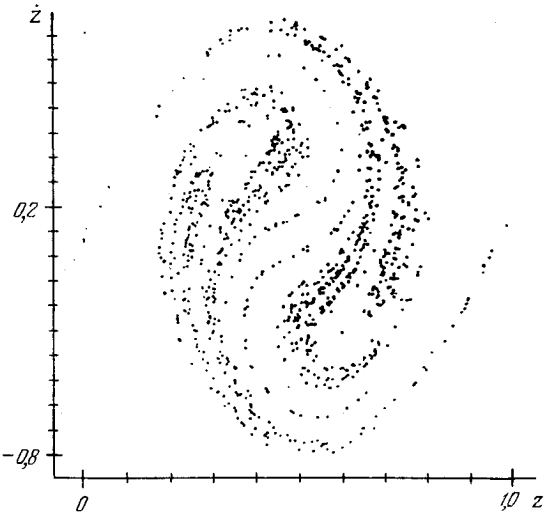


Рис. 5.23. Стохастический аттрактор при перекрытии резонансов

Стохастический аттрактор при перекрытии резонансов. Вернемся снова к уравнению (6.16) или к исходной системе (6.3). До сих пор мы рассматривали случай возмущения $f(\tau)$ (6.6), который содержит бесконечное число гармоник с равными амплитудами. Теперь остановимся на обратном предельном случае, когда $f(\tau) = \cos\tau$.

Вместо (6.16) запишем уравнение

$$\ddot{z} + G\dot{z} = K \sin z \cdot \cos\tau, \qquad (6.23)$$

которое при $G = 0$ переходит в уравнение (2.15) или (2.16). Теперь это маятник с диссипацией G, в котором возможно перекрытие резонансов при $G = 0$ и $K \geqslant 1$ (см. рис. 5.12). Если при том же значении K положить $G = 0{,}129$, то возникает стохастический аттрактор, приведенный на рис. 5.23. Здесь — та же канторова волокнистая структура аттрактора, и отличие лишь в форме кривых, образующих эту структуру. Точки на графике соответствуют одной траектории и наносятся с интервалом $\Delta\tau = 2\pi$.

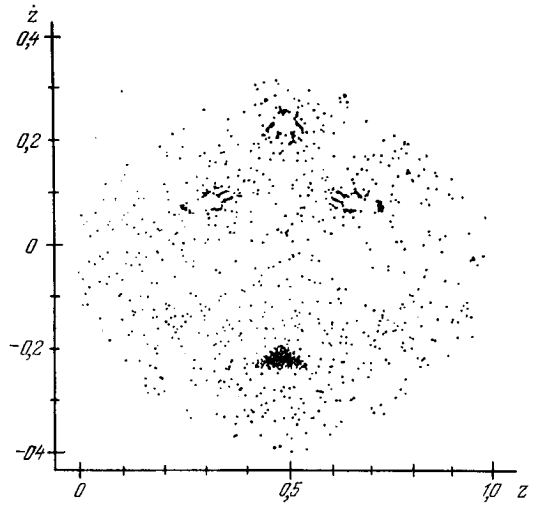


Рис. 5.24. Квазиаттрактор и субструктуры ($G = 0{,}00232$, $K = 2\pi^2 \cdot 0{,}147$)

Уменьшение коэффициента диссипации G приводит к появлению квазиаттрактора (рис. 5.24). В течение длительного времени из-за перекрытия резонансов динамика системы похожа на случайную. Однако в дальнейшем траектория притягивается к фокусу в центре. На этом пути возникают субструктуры, связанные с длительным пребыванием траектории в окрестности квазирезонансов.

Особенно отчетливо существование субструктур видно из фурье-спектра (рис. 5.25) траектории, приведенной на рис. 5.24. Положения максимумов

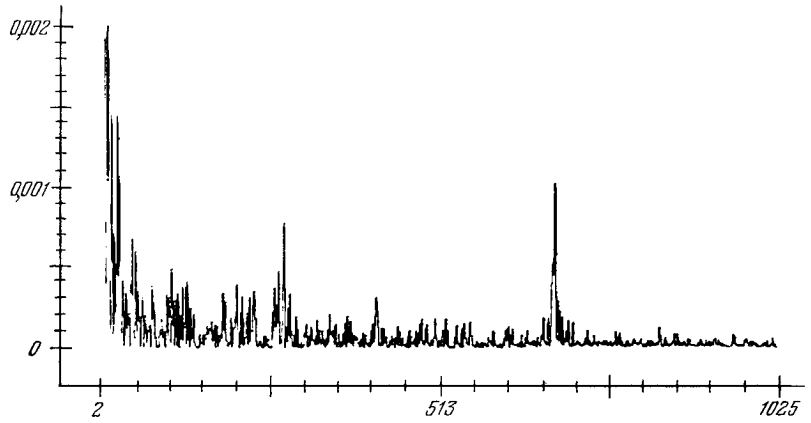


Рис. 5.25. Спектр квазиаттрактора, приведенного на рис. 5.24

соответствуют частотам: 0 (главный максимум, обусловленный притяжением к фокусу), $\Delta\omega/3$, $\Delta\omega/5$, ..., где $\Delta\omega = 2048$ (все числовые данные этого пункта взяты из [35]).

§ 7. Общие замечания о появлении хаоса

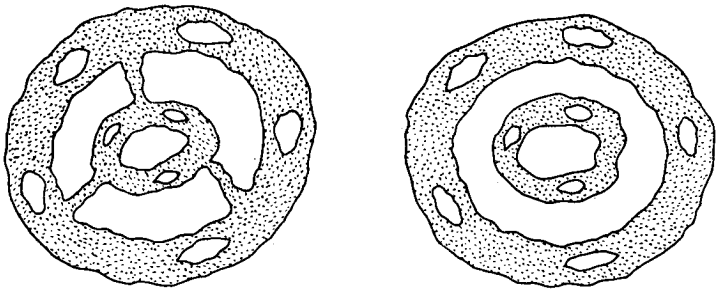
Даже та сравнительно небольшая информация, которой мы теперь располагаем, о появлении стохастичности указывает на необычайную сложность этого явления. Но, пожалуй, самое сложное в нем — это обнаружение новых и подчас неожиданных свойств при каких-либо, на первый взгляд вполне безобидных, изменениях в системе. Поэтому некоторый итог, который мы сейчас подведем, является достаточно условным. Это справедливо тем более, что ряд свойств хаоса мы сможем описать чуть позднее после введения некоторых новых понятий.

Пожалуй, все последующее описание следует начать с замечания о том, что речь все время будет идти о реальных системах, совершающих финитное движение. Это очень важно, так как многие формальные модели имеют строго регламентируемые и вполне доступные для описания свойства.

«Стохастическая паутина». В гамильтоновских системах при произвольном возмущении можно всегда выделить в первом порядке резонансные и нерезонансные члены. Резонансные члены порождают сепаратрисы нелинейного резонанса и связанные с ними системы эллиптических и гиперболических особых точек. В окрестности каждой из сепаратрис образуется стохастический слой некоторой ширины. Стохастические слои различных резонансов могут объединяться, если сепаратрисы резонансов перекрываются, и образовывать более широкие области стохастичности. Каждая ячейка сепаратрисы, таким образом, «одевается» стохастическим слоем, который можно рассматривать в гамильтоновском случае как «квант стохастичности». Стохастическое море в фазовом пространстве образуется в результате слияния квантов стохастичности.

Устройство каждого кванта стохастичности также является сложным. В центре его—островок устойчивости, порожденный эллиптической точкой. Множество эллиптических точек имеется и внутри стохастического слоя. Каждая из них также порождает островок устойчивости в соответствии с теорией КАМ. На этот раз размеры островков второго порядка существенно меньше островка или островков первого порядка и т. д.

Приведенные рассуждения относились к первому порядку теории возмущений. В следующем порядке, очевидно, внутри каждого островка устойчивости возникнут новые сепаратрисы и новые кванты стохастичности.



а *б*

Рис. 5.26. Структура областей стохастичности в зависимости от числа степеней свободы: *а*) $N=2$, *б*) $N\geqslant 3$

Таким образом, возникает иерархия структур в фазовом пространстве, где области устойчивости разделены каналами стохастичности. Если число степеней свободы $N\leqslant 2$, то инвариантные торы делят фазовое пространство, и стохастические слои ограничены инвариантными кривыми (рис. 5.26*а*). Если же $N>2$, то резонансные торы пересекаются в фазовом пространстве. Поэтому пересекающая сеть сепаратрис одевается стохастическим слоем (рис. 5.26*б*). Отсюда следует, что при $N>2$ все фазовое пространство системы независимо от величины возмущения покрыто стохастической паутиной. Хотя толщина паутины может быть и экспоненциально малой, однако важно ее существование и возможность блуждания по ней частицы.

Диффузия Арнольда. Вывод, к которому мы пришли, представляет собой фундаментальное свойство гамильтоновских систем, обусловленное как локальной неустойчивостью системы, так и ее топологией ($N>2$). Блуждание частиц по стохастической паутине носит название диффузии Арнольда [37]. По сети пересекающихся резонансов частица может уйти сколь угодно далеко от своего первоначального состояния. Этим, в частности, объясняется и замечание об условном сохранении адиабатических инвариантов при $N>2$, которое было сделано в соответствующем месте.

Оценим время диффузии Арнольда τ_D. Для относительной ширины стохастического слоя имеем экспоненциальную оценку

$$\frac{\Delta H}{H_c}\sim \varepsilon \exp\left(-\frac{\text{const}}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{7.1}$$

где H_c—значение энергии на сепаратрисе. Для коэффициента диффузии можно написать

$$D\sim \frac{H_c^2}{\tau_D}\sim \frac{(\Delta H)^2}{\tau}, \tag{7.2}$$

где τ—характерное время, за которое энергия изменяется на величину ΔH. Это время очень неоднородно внутри стохастического слоя, и для него можно принять

$$\tau\sim \frac{1}{\Omega}\sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\omega_0}, \tag{7.3}$$

где Ω — частота фазовых колебаний, а ω_0 — частота малых колебаний системы. Соотношения между Ω и ω_0 нами уже были получены.

Подставляя (7.3) и (7.1) в (7.2), находим

$$\tau_D \sim \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\varepsilon^{5/2}}\exp\frac{\text{const}}{\varepsilon^{1/2}}, \tag{7.4}$$

т. е. экспоненциально большое время диффузии. Оно и определяет время потери устойчивости системы.

В действительности оценка (7.4) является достаточно грубой. В ней отсутствует, в частности, зависимость от числа степеней свободы системы N. В работе [38] получена следующая оценка:

$$\tau_D \sim \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\varepsilon}\exp\frac{1}{\varepsilon^a}, \tag{7.5}$$

где

$$a = \frac{2}{12\zeta + 3N + 14}, \quad \zeta \geqslant {}^1/_2 N(N-1).$$

С ростом N параметр a уменьшается, и время неустойчивости τ_D резко возрастает. Различные примеры диффузии Арнольда можно найти в [2, 4].

Кантор-торы. До сих пор мы связывали появление хаоса с разрушением инвариантных торов, которые мы будем называть также КАМ-торы. Остановимся теперь на некоторых деталях этого разрушения. Рассмотрим для удобства универсальное отображение, и здесь будет полезна его механическая аналогия, приведенная в § 7 гл. 1.

Рассмотрим цепочку осцилляторов с потенциальной энергией

$$V = {}^1/_2 a^2 \sum_k (u_{k+1} - u_k)^2 + \sum_k G(u_k), \tag{7.6}$$

где a — константа упругого взаимодействия и $G(u)$ — внешнее силовое поле.

Условия равновесия цепочки получаются из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial u_k} = 0,$$

и это дает

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = \frac{1}{a^2} G'(u_k). \tag{7.7}$$

Уравнение (7.7) можно представить в виде отображения, если ввести переменную $I_k = u_k - u_{k-1}$. Тогда (7.7) переходит в универсальное отображение

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= I_k + \frac{1}{a^2} G'(u_k), \\ u_{k+1} &= u_k + I_{k+1}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

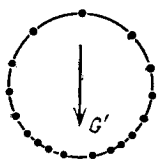


Рис. 5.27. Цепочка осцилляторов в поле тяжести

Рассмотрим теперь периодические решения уравнения (7.7) или (7.8). Расположим цепочку осцилляторов на круге единичного радиуса в вертикальной плоскости (рис. 5.27). Действие силы (например, силы тяжести G') направлено по вертикали вниз. Если, например, $G' = a^2 K \sin u$, то мы в точности получаем стандартное отображение. Координаты осцилляторов есть просто фазы их положения на круге.

Предположим, что мы заменили цепочку осцилляторов упругой нитью, надетой на цилиндр. Если действие силы тяжести достаточно велико, то в верхней части нити на цилиндре появится разрыв. Далее этот разрыв будет распространяться вокруг цилиндра с некоторым интервалом, становясь все меньше в размере. Возникает бесконечная счетная последовательность

разрывов, сумма которых есть, однако, конечная величина. В этом и заключается аналогия с инвариантным тором, который имеет канторову структуру и называется кантор-тором (ком. 14). Иначе, кантор-тором называется инвариантное решение уравнений (7.7) и (7.8)

$$u_k = f(kv + v_0) + kv + v_0, \tag{7.9}$$

в котором f — периодическая функция, v_0 — произвольное число $(0 < v_0 < 1)$ и которое имеет канторовскую (дырявую) структуру. Такое решение имеет несоизмеримый с 2π период. Приведем точный пример такого решения [39]. Положим

$$G = {}^1/_2 [\hat{S}(u)]^2,$$

где пилообразная функция $\hat{S}(x)$ определена выражением

$$\hat{S}(x) = \{x\} - {}^1/_2.$$

Уравнение (7.7) превращается в следующее:

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = \frac{1}{a^2} \hat{S}(u_k).$$

Оно имеет решение:

$$u\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) = \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{1}{(1+4a^2)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-|m|} \hat{S}\left(\frac{\varphi}{2\pi} + mv\right), \tag{7.10}$$

где

$$\rho = 1 + \frac{1}{2a^2}[1 + (1+4a^2)^{1/2}]$$

и φ — координатный угол положения осциллятора на круге.

В области стохастичности на месте КАМ-тора, который разрушается, появляется кантор-тор с частотой v. Его топологическая размерность равна нулю. Поэтому кантор-торы не занимают в фазовом пространстве объем конечной меры. То, что кантор-торы дырявы, позволяет траекториям системы проходить через них, совершая, таким образом, диффузионное движение. Кантор-торы неустойчивы, и в любой их окрестности имеются траектории, экспоненциально удаляющиеся от них.

Чем ближе кантор-торы к границе стохастичности, тем меньше в них щели и тем сильнее они замедляют диффузию. Поэтому в области вблизи границы стохастичности траектория системы должна некоторое время продвигаться вдоль кантор-тора, пока не появится та щель, через которую траектория пересечет его. Вдали от границы стохастичности кантор-торы, по-видимому, существенной роли не играют.

Замедление диффузии. Можно сказать, что кантор-торы образуют барьеры для диффузии частиц в фазовом пространстве. Преодоление барьеров приводит к задержке частиц вблизи них. В результате этого распределение частиц имеет повышенную плотность вблизи кантор-торов. Обычно такая картина хорошо заметна при численном анализе. Более того, по местам большой плотности функции распределения частиц можно судить о существовании в этом месте кантор-тора с малыми щелями и соответственно длинными барьерами. Обычно это имеет место вблизи резонансов не очень высокого порядка. Такие резонансы имеют крупные островки, и ближайший к островку разрушенный КАМ-тор, превратившийся в кантор-тор, имеет очень малые щели.

Отсюда следует очень важный вывод о существовании локальных максимумов функции распределения частиц вблизи резонансных островков. Аналогичные максимумы должны проявляться и в фурье-спектре траектории на соответствующих частотах.

Расширение этого замечания приводит к утверждению о существовании определенной неравномерности в процессе перемешивания в фазовом про-

странстве с несколькими временными масштабами. Эти эффекты проявляются тем более, чем ближе мы находимся к порогу стохастичности. При больших превышениях этого порога эффекты, связанные с кантор-торами и с неоднородностью перемешивания, пренебрежимо малы.

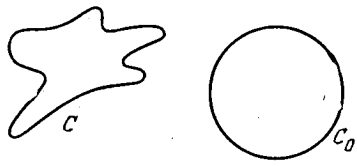


Рис. 5.28. Превращение инвариантной кривой в окружность

Число вращения. Многие примеры, которые мы рассматриваем, сводятся тем или иным способом к дифференцируемому отображению плоскости в себя:

$$\hat{T}\colon\ (I,\ \vartheta) \to (\bar{I},\ \bar{\vartheta}). \tag{7.11}$$

Если рассматривается инвариантная кривая C, то с помощью соответствующей замены переменных она может быть переведена в окружность C_0 (рис. 5.28). Тогда $\hat{T}$ отображает точки окружности на себя. Будем считать, что формула (7.11) задает именно такое отображение, т. е. переменные (I, ϑ) выбраны следующим образом:

$$\hat{T}\colon\ \bar{I} = I, \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + 2\pi A(I, \vartheta) \pmod{2\pi}. \tag{7.12}$$

Формулы (7.12) отображают окружность на себя. Если функция A не зависит от ϑ, то это отображение сохраняет меру. Хотя функция A и зависит от радиуса окружности I на фазовой плоскости (I, ϑ), но при фиксированном I она смещает точку на окружности на угол $2\pi A$ за один шаг. Число

$$\hat{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[A(\vartheta) + A(A(\vartheta)) + \ldots + \underbrace{A(A(\ldots(A}_{n}(\vartheta)\underbrace{\ldots))}_{n}\right] \tag{7.13}$$

называется числом вращения, и зависимость A от I для простоты записи не указана. Его смысл — средний угол поворота за один шаг, деленный на 2π.

Если $\hat{\varphi}$ рационально, то точки отображения (7.12) образуют периодическую траекторию. Если $\hat{\varphi}$ иррационально, то точки траектории равномерно заполняют всю окружность. Для нас важны следующие свойства числа вращения [14].

1. Предел (7.13) существует.

2. Если на окружности есть дуга, свободная от точек траектории, задаваемой уравнениями (7.12), то все образы этой дуги, получаемые последовательными применениями $\hat{T}$-отображения, попарно не пересекаются. Это свойство может объяснить, как образуются кантор-торы.

Переход КАМ-тор → кантор-тор. Интегралу движения соответствует инвариантный тор, или, скажем просто, при $N = 2$ инвариантная окружность в сечении тора. За исключением специальных вырожденных случаев с рациональными $\hat{\varphi}$, точки траектории заполняют окружность всюду плотно.

Можно предположить, что разрушение интеграла движения связано с появлением в этой инвариантной окружности щели конечной меры. Тогда в силу отмеченного выше второго свойства дифференцируемого отображения окружности на себя эта щель «размножает» себя бесконечное число раз без попарных пересечений, образуя канторовскую рыхлую структуру на месте инвариантной окружности. Новое канторовское множество точек траектории, во-первых, инвариантно и, во-вторых, лежит на той же окружности. Что же изменилось? Сечение КАМ-тора имело топологическую меру, соответствующую мере кривой. Теперь сечения кантор-торов имеют меру, по крайней мере, меньше меры кривой.

Можно поэтому высказать такую гипотезу, что разрушение инвариантных нерезонансных торов связано с уменьшением их топологической меры. В этом

и заключается переход от КАМ-торов к кантор-торам при переходе через критические взаимодействия.

«Дьявольская лестница». Еще одно свойство числа вращения $\hat{\varphi}$ полезно привести, хотя мы и не имеем здесь возможности останавливаться на нем подробнее.

Рассмотрим, например, структурно-устойчивые отображения (7.12), где функция A — дифференцируемая. Это возможно в том и только в том случае, когда $\hat{\varphi}$ рационально и все циклы не вырождены [14].

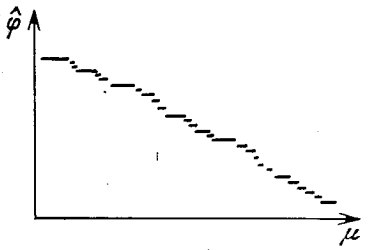


Рис. 5.29. Пример «дьявольской лестницы»

Будем теперь следить за последовательностью изменений числа

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(I, \mu)$$

в зависимости от I и от какого-либо другого параметра μ задачи. Она имеет вид примерно такой, какой изображен на рис. 5.29. Каждой черточке соответствует рациональное значение $\hat{\varphi}$. Последовательность длин интервалов является в высшей степени нерегулярной и, кроме того, интервал $\Delta\hat{\varphi}$ между двумя последовательными отрезками плотно заполнен (как множество рациональных чисел) более тонкой структурой черточек, которые, вообще говоря, не заходят друг на друга. Это и есть ступеньки «дьявольской лестницы».

Введение и исследование аналога числа вращения в многомерном случае пока отсутствуют. Поэтому трудно сказать, что соответствует «дьявольской лестнице» в этом случае.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 5

1. Существует обширная литература, посвященная теории и приложениям универсального отображения [1—4]. Стандартное отображение называют также отображением Чирикова — Тейлора.

2. Значительное количество числовых данных по анализу стандартного отображения имеется в [2, 4].

3. В частности, уже сейчас следует заметить, что вблизи сепаратрисы отображения (1.21) или любого отображения более общего вида образуется всегда стохастический слой. Однако при $K \ll 1$ он оказывается слишком узким, и анализу его свойств будет посвящен специальный параграф (см. также [3]).

4. Все данные на рис. 5.10 и точки (1.36) приводятся для упрощенного варианта положительно определенного синус-отображения $\bar{x} = \{K \sin \pi x\}$.

5. Более совершенная техника вычисления корреляционных функций отображений, приводящих к стохастичности, приведена в работе [7]. Она позволяет вычислять также двумерные корреляторы по (I, ϑ). Приведенный вывод следует [8].

6. Параметр перекрытия резонансов $\bar{K}$ был введен в работе Чирикова [9], который высказал гипотезу о том, что при условии $\bar{K} \geqslant 1$ движение системы должно запутываться очень сложным образом и становиться похожим на стохастическое. Соотношение (2.14), устанавливающее связь между условием перекрытия резонансов и условием локальной неустойчивости, было получено в работах [10, 11] для разных физических моделей.

7. Тот факт, что возмущение сепаратрисы приводит к очень сложной картине ее разрушения, был отмечен еще Пуанкаре. Первая оценка ширины области разрушения принадлежит Мельникову [12]. В работе [10] было впервые показано, что разрушение сепаратрисы носит стохастический характер. В этой же работе было показано, что существует локальная неустойчивость внутри стохастического слоя, в котором движение частицы носит диффузионный характер, и что для оценки ширины слоя может быть использован критерий стохастичности. Это обстоятельство (которое зачастую остается непонятым) было использовано в работе [13] для вычисления ширины стохастического слоя в различных физических ситуациях.

8. Эта картина своеобразного «испарения» резонансов была описана в работе [10].

9. Существование гомоклинических точек было обнаружено впервые Пуанкаре в связи с исследованием задачи трех тел [15]. Рис. 5.15, конечно, не отражает полную картину фазовой плоскости, а только ее нулевое приближение, так как в окрестности каждой гомоклинической точки не изображены осцилляции следующего порядка.

10. Первым примером стохастического разрушения интеграла движения, по-видимому, была модель связанных осцилляторов с кубическим взаимодействием Хенона — Хейлеса [23]. Картина на рис. 5.17 во многом подобна той, что получена в работе [23]. Связь разрушения интегралов движения с возникновением стохастичности при перекрытии резонансов или при локальной неустойчивости была показана на модели разрушения магнитных поверхностей [24, 25], которые представляют собой, если они существуют, реальные инвариантные торы (см. также [26]).

Много других примеров потенциалов, в которых стохастическая динамика обнаружена с помощью численного анализа, имеется в [4].

11. Строгие определения аттракторов и репеллеров можно найти в обзоре [27]. В работе [28] было введено понятие странного аттрактора для обозначения стохастического варианта фазовой динамики. Термин «стохастический аттрактор» также часто используется в литературе, в особенности в тех случаях, когда авторы пытаются подчеркнуть, что в рассматриваемых процессах может [не реализоваться формальная конструкция работы [28]. По-видимому, ближе к реальности является определение стохастического аттрактора, предложенное Синаем [29]. Отметим, что здесь мы встречаемся с теми же проблемами, что и при анализе гамильтоновских систем. Любая идеализация оказывается беднее порождающей динамический процесс физической системы.

12. О квазиаттракторах с близким к данному смыслом см. в [30]. Более существенной в связи с существованием квазиаттракторов оказывается проблема существования термодинамически равновесного состояния. Мы обсудим ее подробнее в разделе о структурах линейных цепочек и о возникновении в них аморфных структур.

13. Стандартное диссипативное отображение было получено в работах [31, 32]. Различные его свойства исследовались в работах [7, 33, 34, 36].

14. Приведенная аналогия принадлежит Персивалю [39]. Доказательство существования кантор-торов было получено в работах [39—41]. Приводимый ниже пример взят из [39].

Глава 6
ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕТИКИ

Примеры двух предыдущих глав привели нас к новому взгляду на нелинейные системы. Он заключается в том, что такие системы могут совершать как регулярное, так и в высшей степени сложное, нерегулярное, хаотическое движение. Не исключены также и промежуточные случаи (например, квазиаттрактор), которые описывать еще сложнее. Поэтому нелинейный анализ динамики должен содержать в себе и элементы кинетического описания даже в тех традиционно не кинетических ситуациях, когда на систему не действуют случайные силы.

Если в системе возникает стохастичность как следствие локальной неустойчивости, то использование кинетических методов становится адекватным для возникшей физической картины приемом. На этом пути анализа эволюции системы происходит потеря части информации о траекториях системы, так как мы переходим к описанию с помощью меньшего числа переменных. Однако возникающие при этом значительные упрощения окупают эту потерю, помогая добраться до конкретного физического результата.

В этой главе мы остановимся на некоторых сравнительно простых кинетических моделях, так как для нас сейчас важно показать, как элементы кинетики включаются в динамическую задачу. Более сложные задачи кинетики будут возникать по мере усложнения круга рассматриваемых явлений (ком. 1).

§ 1. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

Одним из простейших кинетических уравнений является уравнение диффузионного типа, называемое уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) [4, 5]. Приведем некоторые краткие сведения о нем.

Структура уравнения. Пусть (I_j) есть совокупность некоторых переменных, для которых удается записать уравнение ФПК. Пусть также

$$F(t;\ I_1,\ \ldots,\ I_N)$$

есть функция распределения от переменных (I_α) и N—число таких переменных. Тогда уравнение ФПК имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial I_\alpha}(\mathcal{A}_\alpha F) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial I_\alpha \partial I_\beta}(\mathcal{B}_{\alpha\beta}F). \tag{1.1}$$

Его структура определяется, во-первых, тем, что оно второго порядка относительно производных по переменным (I_α), и, во-вторых, видом коэффициентов $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$. Последние можно определить следующим образом. Пусть ΔI_α есть изменение переменной I_α за некоторый характерный малый временной интервал T. Тогда

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{T}\ll\Delta I_\alpha\gg,$$

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{T}\ll\Delta I_\alpha \Delta I_\beta\gg, \tag{1.2}$$

где операция $\ll\ldots\gg$ означает некоторое усреднение, которое мы определим ниже.

Строгий вывод уравнения (1.1) вместе с выражениями (1.2) был дан Колмогоровым [6]. Для того чтобы применить его к той или иной физической задаче, следует вложить конкретный физический смысл в выбор переменных (I_α), функции распределения $F(t;\ I_1,\ \ldots,\ I_N)$ и коэффициентов $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$. Мы приведем соответствующие результаты для K-систем.

Временны́е масштабы. Прежде всего следует отдавать себе отчет в том, что кинетическое описание является не только способом описания динамики системы, но и способом упрощения этого описания. В основе упрощения лежат, как всегда, малость и медленность изменений некоторых величин. В связи с этим представим себе, как выглядят различные характерные времена в какой-либо типичной K-системе.

Обратимся снова к уравнениям движения нелинейного осциллятора

$$\dot{I} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial \vartheta},\quad \dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon\frac{\partial V}{\partial I}, \tag{1.3}$$

где $V = V(I,\ \vartheta,\ t)$—потенциал возмущения. В § 1 гл. 5 мы показали, что при определенных условиях уравнения движения (1.3) могут быть приведены к некоторому отображению $\hat{T}$, которое представляет динамику системы в конечно-разностной форме:

$$(I_{n+1},\ \vartheta_{n+1}) = \hat{T}(I_n,\ \vartheta_n). \tag{1.4}$$

Пусть T есть характерный интервал времени действия отображения (1.4). Это значит, что уравнение (1.4) можно рассматривать как некоторую цепь марковского типа с временем T одного шага.

Если в системе (1.3) происходит перемешивание, то фаза ϑ является быстро меняющейся переменной. Быстро устанавливается некоторое равновесное распределение по фазам, которое позволяет вычислять все средние значения и корреляторы. Характерным временем этих процессов является время перемешивания или время расцепления фазовых корреляций τ_c.

Поскольку ε—малый параметр возмущения, то изменение действия в (1.3) за один шаг отображения $\hat{T}$ является малой величиной. Изменение

величины I, таким образом, является достаточно медленным процессом и происходит в результате накопления большого числа малых изменений:

$$\Delta I_n = I_{n+1} - I_n. \tag{1.5}$$

Обозначим через τ_D характерное время изменения действия I. Это же время определяет изменение функции распределения $F(I, t)$.

В типичных K-системах (например, тех, что рассматривались в гл. 5) имеет место следующее соотношение между временами:

$$\tau_c \ll T \ll \tau_D. \tag{1.6}$$

Оно позволяет выбрать шаг отображения T в качестве естественного интервала усреднения в определениях (1.2). В силу первого неравенства в (1.6) и эргодичности движения можно усреднение по времени заменить усреднением по фазе ϑ. Это позволяет ввести оператор усреднения

$$\langle\langle |\ldots\rangle\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta_0 \ldots, \tag{1.7}$$

где ϑ_0 есть начальная фаза на траектории (I_n, ϑ_n).

Вывод кинетического уравнения. Система неравенств (1.6) оказывается достаточной для того, чтобы получить конкретную форму уравнения ФПК (1.1). Остановимся на какой-либо определенной модели системы с перемешиванием, на которой можно было бы проследить за всеми существенными этапами вывода. Выберем в качестве такой модели отображение (5.1.15),

$$\bar{I} = I - \varepsilon T V'(\vartheta), \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \omega(\bar{I})\, T, \tag{1.8}$$

в котором потенциал $V = V(\vartheta)$ не зависит явно от действия.

Поступим сначала наиболее простым образом. Вычислим коэффициенты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ согласно формулам (1.2) и (1.7).

Из (1.5) и (1.8) имеем

$$\Delta I = \bar{I} - I = -\varepsilon T V'(\vartheta). \tag{1.9}$$

Разложение функции $V'(\vartheta)$ в ряд Фурье по фазе ϑ не содержит постоянного члена (хотя бы из-за наличия производной по ϑ). Распределение по фазам ϑ в первом приближении можно считать равномерным, и это свойство равным образом относится к распределению фаз ϑ_n на любом шаге отображения n. Это утверждение означает пренебрежение корреляциями фаз на разных шагах отображения, т. е. предел

$$\tau_c / T \to 0. \tag{1.10}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{T}\langle\langle \Delta I\rangle\rangle = -\varepsilon\langle\langle V'(\vartheta)\rangle\rangle = 0, \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{T}\langle\langle (\Delta I)^2\rangle\rangle = \varepsilon^2 T\langle\langle [V'(\vartheta)]^2\rangle\rangle = \varepsilon^2 \bar{V}^2 T, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\bar{V}^2$ — некоторая константа, получающаяся при усреднении по углам. В частном случае стандартного отображения (5.1.16) $V = V_0 \cos\vartheta$ и

$$\bar{V}^2 = V_0^2 \langle\langle \sin^2\vartheta\rangle\rangle = {}^1/_2 V_0^2. \tag{1.12}$$

Подстановка формул (1.11) в (1.1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2 \varepsilon^2 \bar{V}^2 T \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} \equiv {}^1/_2 D \frac{\partial^2 F}{\partial I^2}, \tag{1.13}$$

описывающему диффузию в пространстве переменной действия I с коэффициентом диффузии

$$D = \varepsilon^2 \bar{V}^2 T = {}^1/_2 \varepsilon^2 V_0^2 T. \tag{1.14}$$

Умножим уравнение (1.13) на I^2 и проинтегрируем полученное выражение **по** I:

$$\langle I^2\rangle = I_0^2 + Dt. \tag{1.15}$$

Это обычное выражение. Ему можно придать определенный физический смысл.

Пусть, например, системой является частица в прямоугольной яме, на которую действуют периодические δ-импульсы. Ее гамильтониан имеет вид

$$H = {}^1/_2 p^2 + \varepsilon V_0 T \cos\vartheta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \tag{1.16}$$

где

$$\vartheta = \begin{cases} 2\pi \dfrac{x}{2a} & (p>0), \\ 2\pi \dfrac{1-x}{2a} & (p<0) \end{cases}$$

и a — ширина потенциальной ямы, $x \in [0, a]$, p — импульс частицы с массой, равной единице. Кроме того,

$$I = 2pa.$$

Гамильтониан (1.16) приводит к стандартному отображению. Поэтому согласно (1.15) и (1.12) имеем

$$\langle \mathscr{E}\rangle = {}^1/_2 \langle p^2\rangle = \mathscr{E}_0 + \frac{1}{16}\frac{\varepsilon^2 V_0^2 T}{a^2} t. \tag{1.17}$$

Это означает, что энергия частицы растет линейно со временем и происходит своеобразный ее «нагрев». Мы остановимся на нем подробнее ниже, а сейчас обсудим некоторые принципиальные вопросы вывода уравнения ФПК для K-систем.

Дивергентная форма кинетического уравнения. Выражение (1.1) является слишком общей формой уравнения ФПК. В значительном числе случаев его можно преобразовать к так называемой дивергентной форме:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial I_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial I_\beta}, \tag{1.18}$$

где величина $D_{\alpha\beta}$ называется коэффициентом диффузии. Новое название связано с возможностью в случае (1.18) ввести ток плотности вероятности

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta} D_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial I_\beta} \tag{1.19}$$

и представить кинетическое уравнение (1.18) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{\alpha} \frac{\partial J_\alpha}{\partial I_\alpha}. \tag{1.20}$$

Сопоставляем выражения (1.18) и (1.1) и убеждаемся, что форма (1.18) существует, если выполняются соотношения

$$D_{\alpha\beta} = \mathscr{B}_{\alpha\beta}; \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{B}_{\alpha\beta}}{\partial I_\beta} = \mathscr{A}_\alpha. \tag{1.21}$$

Последнее из них, согласно определениям (1.2), означает, что

$$\langle\langle \Delta I_\alpha\rangle\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I_\beta}\langle\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta\rangle\rangle. \tag{1.22}$$

Равенство (1.22) является следствием принципа детального равновесия [5], и у нас еще будет возможность убедиться в этом на ряде конкретных физи-

ческих примеров. В частном случае отображения (1.8) соотношение (1.22) выполняется автоматически в силу (1.11), так как коэффициент диффузии является константой.

Приведем элементарный вывод соотношения (1.22), принадлежащий Ландау [10]. Для простоты рассмотрим систему из одной степени свободы

$$H = H(I, \vartheta, t)$$

и вычислим изменение

$$\Delta I = I(t+\Delta t) - I(t)$$

с точностью до квадратичных по Δt членов.

Имеем

$$\Delta I = \dot{I}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{I}(\Delta t)^2 = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\Delta t - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}\frac{\partial H}{\partial I} - \frac{\partial^2 H}{\partial I\,\partial \vartheta}\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\right\}(\Delta t)^2 =$$
$$= \dot{I}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial H}{\partial t} - \dot{I}\dot{\vartheta}\right](\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}(\dot{I})^2(\Delta t)^2.$$

На этом, собственно, все и кончается, так как нас интересует не величина ΔI, а средние значения по фазам ϑ с точностью до $(\Delta t)^2$. Все производные по ϑ при усреднении исчезают. Поэтому с точностью до $(\Delta t)^2$ имеем

$$\langle\langle \Delta I \rangle\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\langle\langle \dot{I}^2 \rangle\rangle (\Delta t)^2,$$
$$\langle\langle (\Delta I)^2 \rangle\rangle = \langle\langle \dot{I}^2 \rangle\rangle (\Delta t)^2,$$

откуда и следует соотношение (1.22) в одномерном случае.

Из приведенного вывода следует важное замечание, которое показывает роль равномерного распределения по фазам ϑ. Именно благодаря этому обстоятельству пропадают при усреднении члены с производными по ϑ. В реальных K-системах, как уже отмечалось в гл. 5, это всегда не так. Равномерность распределения по фазам является некоторым приближением, которое тем лучше, чем больше параметр стохастичности K. Это обстоятельство всегда следует иметь в виду, когда мы используем уравнение ФПК для кинетического описания.

Еще одно важное замечание, следующее непосредственно из приведенного вывода. Для получения дивергентной формы уравнения ФПК (если это принципиально возможно) необходимо выбирать канонически сопряженную пару переменных (I, ϑ), одна из которых играет роль фазы.

Влияние границы стохастичности. Обратимся снова к стандартному отображению, вытекающему из (1.8) при

$$V = V_0 \cos\vartheta, \quad \omega(\bar{I}) = \alpha\frac{\bar{I}}{I_0}\omega_0, \quad TV_0 \equiv I_0.$$

Вводим безразмерную переменную

$$y = \omega_0 T I / I_0.$$

Тогда (1.8) переходит в стандартное отображение:

$$\bar{y} = y + K_0 \sin\vartheta, \quad \bar{\vartheta} = \vartheta + \bar{y}, \tag{1.23}$$

где параметр

$$K_0 = \varepsilon\alpha\omega_0 T \tag{1.24}$$

определяет границу стохастичности

$$K_0 \sim 1. \tag{1.25}$$

Аналогом формулы (1.17) является выражение

$$\langle y^2 \rangle = y_0^2 + {}^1\!/_2 K_0^2 \frac{t}{T}. \tag{1.26}$$

Теперь мы можем поставить следующий вопрос: в чем отличие диффузионного процесса для K-системы от обычного диффузионного процесса, обусловленного случайной силой? Этот вопрос в действительности достаточно сложен, и трудности ответа связаны с тем, что процесс стохастической динамики K-систем недостаточно хорошо изучен. Тем не менее можно указать некоторые явные отличия.

Наиболее характерной чертой процесса, порождаемого отображение (1.23), является существование границы стохастичности (1.25). Второе отличие, которое также легко отметить,— это существование конечного времени расцепления корреляций фаз при $K_0 < \infty$. Таким образом, обе отмеченные стороны перемешивания K-систем связаны с некоторыми граничными эффектами при конечных значениях K_0.

Учет влияния границы стохастичности на диффузию был проведен в работе [7]. Пусть время t принимает только дискретные значения $t_N = Nt$. Тогда, как показано в [7], вместо выражения (1.26) имеет место формула

$$\langle y_N^2\rangle = y_0^2 + {}^1/_2 K_0^2 \{N - \hat\theta(N-2)[J_2(2K_0)\cos 2K_0 y_0 + (2J_2(K_0) - J_0(K_0))\times \\ \times \cos K_0 y_0] - \hat\theta(N-3)\cdot 2(N-2)J_2(K_0)\}, \quad (1.27)$$

где J_n—функции Бесселя и $\hat\theta$—ступенчатая функция:

$$\hat\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi > 0), \\ 0 & (\xi < 0). \end{cases}$$

При больших временах t, т. е. при $N \gg 1$, формула (1.27) переходит в следующую:

$$\langle y_N^2\rangle = {}^1/_2 K_0^2 N [1 - 2J_2(K_0)]. \quad (1.28)$$

Этот результат был получен в [8]. Из выражения для коэффициента диффузии

$$D = \langle y_N^2\rangle / N \approx {}^1/_2 K_0^2 [1 - 2J_2(K_0)] \quad (1.29)$$

следует, что он осциллирует с изменением параметра K_0.

При $K_0 \gg 1$ формула (1.29) переходит в обычное выражение

$$D = \frac{1}{2T} K_0^2, \quad (1.30)$$

которое соответствует формулам (1.26) или (1.14) для отображения (1.8).

В тех случаях, когда нас интересуют поправки по $1/K$, можно воспользоваться асимптотикой функции Бесселя и написать вместо (1.29)

$$D = {}^1/_2 K_0^2 \left[1 - 2\left(\frac{2}{\pi K_0}\right)^{1/2} \cos\left(K_0 - \frac{5\pi}{4}\right)\right].$$

Корреляционные эффекты. При получении коэффициента диффузии

$$D = \mathcal{B} = \frac{1}{T}\langle\langle (\Delta I)^2\rangle\rangle \quad (1.31)$$

мы действовали достаточно грубо, используя формулу (1.12) и не обращая внимания на момент времени, в который происходит усреднение. В действительности корреляции фаз расцепляются за конечное время, и эффекты, связанные с этим процессом, можно учесть следующим простым способом.

Положим

$$\Delta I(t) = I(t) - I(0)$$

и воспользуемся тождественным представлением

$$(\Delta I(t))^2 = \int_0^t dt_1 \dot I(t_1) \int_0^t dt_2 \dot I(t_2).$$

Преобразуем двойное интегрирование,

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 = 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2,$$

и используем уравнения движения (1.3):

$$(\Delta I(t))^2 = 2\varepsilon^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \frac{\partial V(t_1, \vartheta(t_1))}{\partial \vartheta} \frac{\partial V(t_2, \vartheta(t_2))}{\partial \vartheta}.$$

В случае, который приводит к отображению (1.8), уравнения движения (1.3) имеют вид

$$\dot{I} = -\varepsilon V(t, \vartheta) = -\varepsilon V(\vartheta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(I).$$

Перепишем уравнение движения для I, разлагая его правую часть в ряд Фурье по ϑ и по t:

$$\dot{I} = -\varepsilon \sum_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_n e^{i(n\vartheta - m\Omega t)} + \text{к. с.} \qquad (\Omega = 2\pi/T).$$

В частном случае, когда возникает стандартное отображение,

$V(\vartheta) = V_0 \cos\vartheta$.

Отсюда

$$\dot{I} = -\varepsilon V_0 \sum_{m=0}^{\infty} [\cos(\vartheta(t) - m\Omega t) + \cos(\vartheta(t) + m\Omega t)].$$

Здесь сразу следует заметить, что в правой части стоят члены, для которых могут выполняться резонансные условия

$$\dot{\vartheta} - m\Omega = \omega - m\Omega = 0,$$

и нерезонансные члены. Мы, естественно, должны оставить первые из них, так как именно они дают максимальный вклад в изменение I:

$$\dot{I} \approx -\varepsilon V_0 \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\vartheta(t) - m\Omega t).$$

Полученное выражение позволяет записать квадратичное изменение действия в сравнительно простой форме:

$$(\Delta I(t))^2 = 2\varepsilon^2 V_0^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cos(\vartheta(t_1) - m_1\Omega t_1) \cos(\vartheta(t_2) - m_2\Omega t_2) =$$

$$= \varepsilon^2 V_0^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \sum_{m=0}^{\infty} \cos[\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2) - m\Omega(t_1 - t_2)] + \ldots, \qquad (1.32)$$

где многоточие означает все остальные члены, в том числе и те, которые содержат двойные суммы.

Произведем интегрирование в формуле (1.32). В результате получится некоторое количество различных членов. Многие из них окажутся лишними. Это связано с тем, что мы будем интересоваться достаточно большими временами t. Поэтому мы должны отобрать лишь те члены в формуле (1.32), которые являются старшими при $t \to \infty$. То, что такая возможность существует, легко понять из следующих элементарных соображений. В написанном слагаемом в (1.32) аргумент может обратиться в нуль. Это приведет

при интегрировании к появлению в нем множителя t. В других слагаемых, обозначенных многоточием, такая возможность отсутствует, так как область определения ϑ: (0, 2π). Следовательно, эти слагаемые будут сильно осциллирующими, и их следует отбросить.

Имея сказанное в виду, рассмотрим выражение

$$\langle\langle(\Delta I)^2\rangle\rangle \approx \varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle\langle \cos[\psi_m(t_1) - \psi_m(t_2)]\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\mathcal{R}_m(t_1 - t_2) + \mathcal{R}_m^*(t_1 - t_2)], \quad (1.33)$$

где введен уже встречавшийся нам коррелятор

$$\mathcal{R}_m(t_1 - t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta(t_1) \exp\{i[\psi_m(t_2) - \psi_m(t_1)]\} \quad (1.34)$$

(см. формулу (5.1.41) при $r = s = 1$) и использовано обозначение

$$\psi(t) = \vartheta(t) - m\Omega t.$$

С помощью результата (5.1.45) имеем

$$\mathcal{R}_m(\tau) \sim \exp\left[\left(i(\omega - m\Omega) - \frac{1}{\tau_c}\right)\tau\right], \quad (1.35)$$

где время расцепления корреляций τ_c равно, согласно (5.1.46):

$$\tau_c = 2T/\ln K_0. \quad (1.36)$$

Нам осталось вернуться к исходной формуле (1.33), используя выражение (1.35), и провести элементарное интегрирование. Отбирая старший по t член, находим

$$\langle\langle(\Delta I(t))^2\rangle\rangle \approx \varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t/\tau_c}{(\omega - m\Omega)^2 + 1/\tau_c^2} = \pi\varepsilon^2 V_0^2 t \sum_{m=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, (\omega - m\Omega)^2\right), \quad (1.37)$$

где введена функция

$$\pi\Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega\right) \equiv \frac{1/\tau_c}{\omega^2 + 1/\tau_c^2}. \quad (1.38)$$

Эта функция будет нам часто встречаться. Она представляет собой «размытую» из-за конечного времени расцепления корреляций δ-функцию:

$$\lim_{1/\tau_c \to 0} \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega\right) = \delta(\omega). \quad (1.39)$$

Рассмотрим выражение (1.37) в виде

$$\frac{1}{t}\langle\langle(\Delta I(t))^2\rangle\rangle \approx \pi\varepsilon^2 V_0^2 \sum_m \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, (\omega - m\Omega)^2\right) \quad (1.40)$$

и заметим, что имеет место неравенство $T \gg \tau_c$, которое тем лучше выполняется, чем больше параметр K. Это означает, что достаточно в (1.40) положить $t \sim T$. Тогда определение (1.31) сразу дает коэффициент диффузии

$$D = \pi\varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega - m\Omega\right), \quad (1.41)$$

который учитывает конечное время расцепления корреляции фаз τ_c.

Уравнение диффузии с учетом выражения (1.41) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2\pi\varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial I} \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega - m\Omega\right) \frac{\partial F}{\partial I}. \tag{1.42}$$

Диффузионное уравнение видоизменилось. Это связано с тем, что частота ω зависит от I, и поэтому Δ-функция попадает под знак дифференцирования.

Рассмотрим предел $1/\tau_c \to 0$. Согласно (1.39) уравнение (1.42) переходит в следующее:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2\pi\varepsilon^2 V_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial I} \delta(\omega - m\Omega) \frac{\partial F}{\partial I}. \tag{1.43}$$

В кинетических уравнениях (1.42) и (1.43) происходит суммирование по всем резонансам. В случае (1.43) его легко выполнить, заметив, что

$$\sum_m (\ldots)\,\delta(\omega - m\Omega) \to \frac{1}{\Omega}\int d(m\Omega)\,(\ldots)\,\delta(\omega - m\Omega).$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_4\varepsilon^2 V_0^2 T \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} = {}^1/_2 D \frac{\partial^2 F}{\partial I^2}, \qquad D = {}^1/_2\varepsilon^2 V_0^2 T,$$

что в точности совпадает с выражениями (1.13) и (1.14).

Таким образом, переход (1.39) соответствует случаю нескоррелированных фаз. При $1/\tau_c \to 0$ следует иметь в виду, что неравенство

$$\tau_D \gg \tau_c \tag{1.44}$$

должно при этом выполняться.

Из (1.13) следует, что

$$\tau_D = \frac{2I_0^2}{\varepsilon^2 V_0^2 T} = \frac{2}{\varepsilon^2\omega_0^2 T} = \frac{I_0^2}{D}. \tag{1.45}$$

Поэтому условие (1.44) означает:

$$\frac{\tau_D}{\tau_c} = \frac{2\ln K_0}{\varepsilon^2\omega_0^2 T^2} = \frac{2}{\varepsilon}\frac{\ln K_0}{K_0} \underset{\substack{K_0\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}{\longrightarrow} \infty. \tag{1.46}$$

Формула (1.46) показывает, как должен совершаться предельный переход к нескоррелированным фазам. Возмущение должно стремиться к нулю, а параметр $\omega_0 T$ — к бесконечности таким образом, чтобы предел (1.46) имел место.

§ 2. Кинетика при диссипативных отображениях

Мы увидели, что при определенных условиях уравнение ФПК достаточно успешно описывает усредненную эволюцию K-системы, задаваемой стандартным отображением. В действительности для применимости ФПК-уравнения вовсе нет необходимости в том, чтобы исходные уравнения движения были гамильтоновскими. Однако в этом случае соотношение (1.22) уже не будет иметь места.

Структура кинетического уравнения. Обратимся к движению с диссипацией, рассмотренному в § 6 гл. 5. Это нелинейный маятник с затуханием, находящийся под действием периодических δ-импульсных толчков. Другими словами, это та же модель, что и в предыдущем параграфе, но с затуханием. Она сводится к отображению

$$\begin{aligned} \bar{z} &= e^{-\bar{\gamma}} z + K(\bar{\gamma})\sin\vartheta, \\ \bar{\vartheta} &= \vartheta + \bar{z} \pmod{2\pi}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где переменная z с точностью до постоянного множителя является действием системы, а ϑ — фазой. Параметр K зависит теперь от безразмерного коэффициента диссипации $\bar{\gamma}$. В модели стандартного диссипативного отображения

$$K(\bar{\gamma}) = K_0 \mu(\bar{\gamma}), \qquad \mu(\bar{\gamma}) = \frac{1-e^{-\bar{\gamma}}}{\bar{\gamma}} \tag{2.2}$$

(см. формулы (5.6.13), (5.6.14)).

Простейший анализ основан на усреднении изменений z по быстро меняющейся фазе ϑ при условии стохастичности в модели (2.1). Для этого вычисляем моменты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в уравнении (1.1).

Имеем из (2.1):

$$\begin{aligned} &\langle\langle \Delta z \rangle\rangle = \langle\langle \bar{z} - z \rangle\rangle \approx (1 - e^{-\bar{\gamma}}) z, \\ &\langle\langle (\Delta z)^2 \rangle\rangle = \langle\langle (\bar{z} - z)^2 \rangle\rangle \approx (1 - e^{-\bar{\gamma}})^2 z^2 + {}^1\!/_2 K^2 e^{-2\bar{\gamma}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставляем эти выражения в уравнение ФПК:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\langle\langle \Delta z \rangle\rangle}{T} F\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\langle\langle (\Delta z)^2 \rangle\rangle}{T} F\right). \tag{2.4}$$

Это приводит к уравнению для функции распределения $F = F(z,\ t)$:

$$T\frac{\partial F}{\partial t} = (1 - e^{-\bar{\gamma}})\frac{\partial (zF)}{\partial z} + \frac{1}{2}(1 - e^{-\bar{\gamma}})\frac{\partial^2 (z^2 F)}{\partial z^2} + \frac{1}{4} K^2 e^{-2\bar{\gamma}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{2.5}$$

Динамика моментов. Уравнение (2.5) имеет несколько громоздкий вид, и проще всего рассмотреть его моменты для получения физически понятных соотношений. Введем моменты действий z:

$$\langle z^m \rangle = \int_0^\infty dz\, z^m F(z,\ t).$$

Положим также далее диссипацию малой: $\bar{\gamma} \ll 1$.

Умножим уравнение (2.5) на z^2 и проинтегрируем по z. Это дает

$$T\frac{d}{dt}\langle z^2 \rangle = -(1 - e^{-2\bar{\gamma}})\langle z^2 \rangle + {}^1\!/_2 K^2 e^{-2\bar{\gamma}},$$

которое при малых $\bar{\gamma}$ переходит в следующее:

$$T\frac{d}{dt}\langle z^2 \rangle = -2\bar{\gamma}\langle z^2 \rangle + {}^1\!/_2 K_0^2. \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{4\bar{\gamma}} K_0^2 \left[1 - \exp\left(-2\bar{\gamma}\frac{t}{T}\right)\right] + \exp\left(-2\bar{\gamma}\frac{t}{T}\right) z_0^2, \tag{2.7}$$

где z_0 — начальное значение переменной z.

При $\bar{\gamma} t/T \ll 1$ из (2.7) следует обычный результат стохастического нагрева

$$\langle z^2 \rangle = z_0^2 + \frac{1}{2}\frac{K_0^2}{T} t, \tag{2.8}$$

который нам уже известен из предыдущего параграфа.

При $t \to \infty$ энергия насыщается, и $\langle z^2 \rangle$ стремится к пределу:

$$\langle z^2 \rangle_\infty = \frac{K_0^2}{4\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}\frac{DT}{\bar{\gamma}}. \tag{2.9}$$

Мы получили хорошо известное соотношение из теории броуновского движения, которое теперь, однако, возникло не благодаря действию случайных сил на систему, а из-за перемешивающего характера исходных динамических

уравнений движения. Это обстоятельство важно иметь в виду, так как диссипативный коэффициент $\bar{\gamma}$ в уравнениях (2.1) не обусловлен внутренней стохастичностью системы. Более точно, в обычной теории броуновского движения внешняя случайная сила является одновременно причиной появления как сил трения, так и диффузии. Теперь, в K-системах, это не так. Трение является внешним феноменологическим фактором, и мы не интересуемся его природой. Диффузия возникает из-за локальной неустойчивости траекторий. Поэтому полученное соотношение (2.9) имеет нетривиальное содержание: в нем параметры диссипации $\bar{\gamma}$ и диффузии D имеют разную природу (ком. 2).

§ 3. Стохастическое ускорение и «нагрев» частиц

Одним из очень красивых и важных проявлений стохастичности может служить своеобразный механизм стохастического ускорения и стохастического нагрева частиц. В первом случае происходит ускорение частиц. Во втором — увеличение их энергии, хотя средняя скорость при этом не изменяется. Идея механизма стохастического ускорения частиц была предложена Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах. Она состояла в том, что при столкновениях заряженных частиц с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве частицы должны в среднем ускоряться. Рассматривая облако как гигантскую частицу большой массы, легко понять причину ускорения. При единичных актах столкновения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется ли облако навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены случайно, то можно сказать, что число тел, движущихся в одном направлении, равно числу тел, движущихся в обратном направлении. Поэтому частица будет чаще сталкиваться с телами, движущимися ей навстречу, так как они встречаются чаще. Отсюда следует, что частица будет чаще приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение частиц, называемое ускорением Ферми.

При определенной симметрии задачи может оказаться так, что скорость частицы в среднем не изменяется, хотя ее отдельные значения могут становиться все больше и больше. В этом случае растет среднее значение квадрата скорости, т. е. энергия частицы, и мы приходим к случаю стохастического нагрева. Ускорение всегда сопровождается нагревом. Обратное не всегда верно.

Стохастичность и идеи нагрева и ускорения. В действительности очень часто случайные силы или тела отсутствуют, и тем не менее идеи стохастического ускорения или нагрева могут быть реализованы. Теперь мы это можем хорошо себе представить, так как уже знаем, что в нелинейных системах хаотические движения могут возникнуть в результате локальной неустойчивости. Развитие понятия K-систем и анализ различных физических ситуаций, в которых возникает стохастичность, вдохнуло новую жизнь в идеи ускорения и нагрева. Оказалось, что такие возможности достаточно широко распространены, и мы продемонстрируем очевидность этого на очень простых примерах. Мы покажем, что стохастический нагрев или ускорение частиц могут возникать в регулярных полях очень простой структуры, и это отразит еще одно удивительное явление нелинейных систем.

Модель Улама. То обстоятельство, что механизм ускорения частиц может возникать в результате нелинейных взаимодействий, а не в результате действия случайных полей, по-видимому, было одним из направлений исследований Ферми, к которому он относился с определенной степенью настойчивости. Об этом, в частности, свидетельствуют работы по поиску термализации в одномерных цепочках ангармонических осцилляторов (модель Ферми — Паста — Улама, которая будет рассмотрена в части II). В дальней-

шем Улам предложил рассмотреть совсем простую, на первый взгляд, задачу о частице (шарике), движущейся между двумя упруго отражающими его стенками. Одна из стенок осциллирует по некоторому периодическому закону (ком. 3).

Рис. 6.1 показывает, как устроена модель Улама. Поле тяжести предполагается отсутствующим. Мы приведем здесь наиболее элементарный анализ, чтобы продемонстрировать лишь характер физической ситуации, приводящей к ускорению частицы.

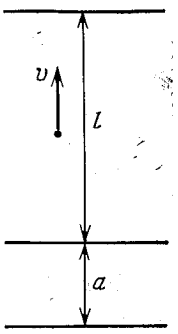


Рис. 6.1. Частица между двумя стенками. Нижняя стенка осциллирует с амплитудой a

Нижняя стенка на рис. 6.1 колеблется с амплитудой a, минимальное расстояние между стенками равно l. Пусть t_n есть момент n-го столкновения шарика с нижней стенкой, а T — период ее колебаний. Введем понятие «фазы» ξ_n при n-м столкновении:

$$\xi_n = t_n/T \pmod 1, \tag{3.1}$$

т. е. область изменения $\xi \in (0,1)$. Обозначим через $x(t)$ координату осциллирующей стенки, отсчитываемой снизу вверх. Примем для $x(t)$ параболический закон:

$$x(t) = 4a\xi(1-\xi). \tag{3.2}$$

Из (3.2) следуют очевидные соотношения:

$$x(0) = x(T) = 0, \quad x(T/2) = a.$$

Закон изменения скорости нижней стенки получается дифференцированием $x(t)$:

$$V(t) = V_0(1-2\xi); \quad V_0 = 4a/T. \tag{3.3}$$

Пусть $v(t)$ — скорость частицы, а v_n — ее скорость перед n-м столкновением:

$$v_n = v(t_n - 0).$$

Эту величину удобно записать в безразмерной форме:

$$u_n = v_n/V_0.$$

Предположим, что

$$a/l \ll 1. \tag{3.4}$$

В этом приближении легко записать уравнения движения частицы в виде отображения:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{V_0} V(t_n) = u_n + 2(1-2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{l}{2au_{n+1}} \pmod 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Вычисление якобиана

$$J = \frac{\partial(u_{n+1}, \xi_{n+1})}{\partial(u_n, \xi_n)} = 1$$

показывает, что переменные (u, ξ) являются канонически сопряженной парой.

В простейшем варианте достаточно больших скоростей $u \gg 1$. Поэтому

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = 2(1-2\xi_n). \tag{3.6}$$

Эта величина $\leqslant 1$, и поэтому имеет место неравенство при $u \gg 1$:

$$\Delta u \ll u.$$

Условие локальной неустойчивости можно получить из (3.5) также в простейшем варианте:

$$K = \left| \frac{\delta\xi_{n+1}}{\delta\xi_n} - 1 \right| = \frac{2l}{au^2} \geqslant 1. \tag{3.7}$$

Условие стохастичности (3.7) показывает, что неравенство (3.4) должно быть достаточно сильным. Из него также вытекает, что существует ограничение на максимально возможную скорость:

$$u \leqslant u_0 = (2l/a)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Условия (3.7) и (3.8) означают, что при достаточно малых скоростях действительно возникает стохастическое ускорение частиц вплоть до скоростей порядка u_0. Быстрой переменной, по которой происходит перемешивание на малых временах, является фаза ξ. По переменной u происходит медленная диффузия.

Конечно, граница стохастичности $K \sim 1$ и граница ускорения $u \sim u_0$ являются весьма приближенными, и существует некоторая переходная область между той частью фазового пространства, где диффузионное движение частицы является достаточно выраженным, и той частью фазового пространства, куда частица проникнуть не может. Мы здесь остановимся лишь на некотором грубом описании кинетики частицы.

Будем считать, что движение происходит в области $u \in (0, u_0)$, т. е. условие нормировки функции распределения имеет вид

$$\int_0^{u_0} du\, F(u, t) = 1.$$

Изменение Δu дается формулой (3.6). Однако время между двумя последовательными столкновениями частицы с верхней стенкой $\Delta t \sim 2l/v$, т. е. оно не является константой и зависит от скорости. Поэтому величину Δt следует вычислить с большей точностью.

Время пролета частицы от верхней стенки до столкновения с нижней стенкой равно l/v. Время пролета от столкновения с нижней стенкой обратно до верхней стенки равно $l/(v+\Delta v)$, так как скорость изменилась на величину Δv. Складывая эти выражения, получаем

$$\Delta t = \frac{l}{v} + \frac{l}{v+\Delta v} \approx \frac{2l}{v}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{v}\right). \tag{3.9}$$

Это место для нас новое. Далее мы увидим, что ситуация, в которой время между двумя последовательными столкновениями в последовательности событий марковского типа является переменным и зависит само от изменения величин при столкновении, является достаточно частой. В формулах для коэффициентов переноса

$$\mathcal{A} = \left\langle\left\langle \frac{\Delta u}{\Delta t} \right\rangle\right\rangle, \qquad \mathcal{B} = D = \left\langle\left\langle \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t} \right\rangle\right\rangle \tag{3.10}$$

величина Δt попадает под знак усреднения.

В нашем случае скобки $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ означают усреднение по ξ. Подставляя в (3.10) выражения (3.6), (3.9), находим

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}\frac{V_0}{l}, \qquad D = \mathcal{B} = \frac{2}{3}\frac{V_0}{l}u, \tag{3.11}$$

т. е. соотношение

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}$$

имеет место. Поэтому уравнение диффузии имеет дивергентный вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{V_0}{3l}\frac{\partial}{\partial u}\, u\, \frac{\partial F}{\partial u} \tag{3.12}$$

с граничным условием

$$u\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=u_0} \approx 0, \tag{3.13}$$

выражающим отсутствие потока частиц через границу.

Стационарное распределение F_0 получается из уравнения (3.12), если положить в нем $\partial F/\partial t = 0$. Отсюда с учетом условия (3.13) имеем

$$F_0 \approx \text{const} = 1/u_0.$$

Время релаксации к равновесному распределению F_0 совпадает со временем диффузии и равно

$$\tau_D \sim \frac{l}{V_0} u_0.$$

Используя (3.8), получаем

$$\tau_D \sim \frac{l}{V_0}\left(\frac{l}{a}\right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим достаточно малые времена $t \ll \tau_D$ такие, что равновесное распределение F_0 еще не успело установиться. Умножим уравнение (3.12) на u и проинтегрируем его по u. В результате получаем уравнение для первого момента

$$\frac{d}{dt}\langle u\rangle = \frac{V_0}{3l}, \tag{3.15}$$

откуда

$$\langle u\rangle = \frac{V_0}{3l}t + \text{const}. \tag{3.16}$$

В этом и есть центральный результат модели. Регулярное движение (осцилляции стенки) привело к хаотическому изменению фазы столкновения ξ. Следствием этого возникло ускорение частиц (3.15) или (3.16) в среднем.

Время расцепления корреляций фаз вычислялось в [12] (см. также [1]). Для него справедливо все то же выражение, которым мы пользовались до сих пор:

$$\tau_C = \frac{\Delta t}{\ln K} = \frac{2l}{V_0 u}\cdot\frac{1}{\ln(2l/au^2)}.$$

С ростом скорости частицы u это время уменьшается, так как время $\Delta t \approx 2l/u$ уменьшается сильнее, чем уменьшается параметр K.

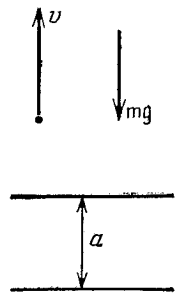


Рис. 6.2. Ускорение частицы в поле тяжести

Ускорение в поле тяжести. Видоизменение рассмотренной задачи превращает ее из модели в часто встречающуюся физическую ситуацию. Частица, подпрыгивающая на осциллирующей плите, представляет собой элемент многих задач, связанных с вибрацией. Специфика задачи определяется тем, каким способом частица возвращается обратно на плиту. В предыдущем случае это была другая стенка. Здесь мы рассмотрим возврат частицы благодаря действию силы тяжести (рис. 6.2). Эта задача была сформулирована в [14] (см. также [1]) как модель так называемой «гравитационной машины», ускоряющей частицы или тела. Роль осциллирующей плиты может играть, например, поле вращающейся двойной звезды. В дальнейшем мы продолжим эти аналогии, указав связь с другими задачами и, в частности, с поверхностными электронами в магнитном поле.

Будем считать, что плита колеблется по тому же закону (3.2), (3.3), что и в предыдущей задаче. Аналогично уравнениям (3.5) можно написать

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2(1-2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + t_{n+1}/T \pmod 1, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где t_{n+1} есть время возврата частицы на плиту после n-го столкновения. В уравнениях (3.17) мы также пренебрегаем членами $\sim a/l$, где $l = v^2/2g$ есть высота, на которую поднимается частица.

В поле тяжести

$$t_{n+1} = \frac{2}{g} v_{n+1} = \frac{2}{g} V_0 u_{n+1}. \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.17), получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2(1-2\xi_n), \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{V_0^2}{2ga} u_{n+1} \pmod 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Отображение (3.19) показывает, что мы имеем дело с U-системой Аносова. Упростим задачу, считая $u \gg 1$. Тогда условие локальной неустойчивости находится просто как

$$K = \left| \frac{\delta\xi_{n+1}}{\delta\xi_n} - 1 \right| \sim \frac{2V_0^2}{ga} \geqslant 1. \tag{3.20}$$

Условие (3.20) не зависит от скорости частицы, как в предыдущем примере. Поэтому ускорение частицы ограничено только релятивистским фактором.

Для симметризованного времени между столкновениями имеем, как и выше,

$$\Delta t = {}^1/_2 (t_n + t_{n+1}) = \frac{V_0}{g}(u_n + u_{n+1}) = \frac{2}{g} u_n V_0 (1 + {}^1/_2 \Delta u_n),$$

где

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = 2(1-2\xi_n).$$

Из этих соотношений с точностью до членов $\sim (V_0/v)^2 = 1/u^2$ следует

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\langle\left\langle \frac{\Delta u}{\Delta t} \right\rangle\right\rangle = -\frac{g}{3V_0 u^2}, \\ \mathcal{B} = D &= \left\langle\left\langle \frac{(\Delta u)^2}{\Delta t} \right\rangle\right\rangle = \frac{2g}{3V_0 u} = {}^1/_2 \frac{d\mathcal{A}}{du}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F(u,t)}{\partial t} = \frac{g}{3V_0} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial F(u,t)}{\partial u} \right). \tag{3.21}$$

Нас сейчас не интересует решение уравнения (3.21), которое легко получить. Мы ограничимся лишь определением темпа ускорения частицы. Это очень просто сделать, домножив (3.21) на u^3 и проинтегрировав его по u от 0 до ∞. Имеем

$$\frac{d}{dt}\langle u^3 \rangle = \frac{3g}{V_0}; \qquad \langle u^3 \rangle = \int_0^\infty du\, u^3 F(u,t).$$

Отсюда

$$\langle u^3 \rangle = u_0^3 + \frac{3g}{V_0} t, \tag{3.22}$$

и следовательно, скорость растет в среднем пропорционально $t^{1/3}$ при $t \to \infty$.

Стохастический нагрев в поле волнового пакета. Хотя многие черты в описанных выше моделях и встречаются в ряде физических задач, тем не менее

реальные ситуации оказываются значительно сложнее. Мы сейчас познакомимся с одной из таких задач, формулировка которой выглядит обманчиво простой. Речь идет о движении частицы в поле волнового пакета, описываемом уравнением

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}\sum_k E_k \sin(kx - \omega_k t). \tag{3.23}$$

Правая часть представляет собой просто суперпозицию некоторого числа плоских волн, движущихся, вообще говоря, с разными фазовыми скоростями из-за существования дисперсии ($d^2\omega_k/dk^2 \neq 0$). Многое, конечно, зависит от того, как устроен волновой пакет, сколько в нем гармоник и какова величина дисперсии. Трудности в исследовании задачи (3.23) становятся очевидными, если даже оставить в (3.23) всего лишь две волны:

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}E_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t) - \frac{e}{m}E_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t). \tag{3.24}$$

Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с первой волной, т. е. положим

$$\xi = k_0 x - \omega_0 t.$$

Тогда (3.24) переходит в следующее уравнение:

$$\ddot{\xi} + \Omega_0^2 \sin\xi = -\varepsilon\Omega_0^2 \sin\left(\frac{k_1}{k_0}\xi - \nu t\right), \tag{3.25}$$

где обозначено

$$\Omega_0^2 = \frac{e}{m}E_0 k_0, \qquad \varepsilon = \frac{E_1}{E_0}, \qquad \nu = \omega_1 - k_1\frac{\omega_0}{k_0}. \tag{3.26}$$

Мы пришли к уже известной задаче о возмущении нелинейного маятника, если $\varepsilon \ll 1$. Если же $\varepsilon \sim 1$, то возникает задача о перекрытии двух резонансов. В любом случае на фазовой плоскости $(\dot{x}, x)$ есть область стохастической динамики частиц.

Нас, однако, сейчас будет интересовать другой случай, в котором имеется большое число гармоник. Эта задача имеет давнюю историю. Она возникла при изучении динамики частиц, взаимодействующих с плазменными колебаниями, и в несколько более общей постановке получила название квазилинейной теории плазмы (ком. 4). Оставляя подробный анализ уравнения (3.23) для специального раздела, мы здесь рассмотрим некоторый специальный случай, который может быть приведен к уже известной нам модели.

Положим в (3.23):

$$\begin{aligned} &k \approx \text{const} = k_0, \qquad E_k \approx \text{const} = E_0, \\ &\omega_k = \omega_0 + n\Delta\omega \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Условия (3.27) означают, что амплитуды пакета достаточно однородны, а длины волн близки друг к другу. Более точно, условия (3.27) эквивалентны неравенству

$$v \ll \frac{d\omega_k}{dk} \equiv v_g, \tag{3.28}$$

т. е. малости скорости относительно групповой скорости.

Будем считать также, что волновой пакет в (3.23) достаточно широкий. Это означает, что суммирование по n, которым мы заменили суммирование по k, происходит в пределах $(-\infty, \infty)$.

Теперь вместо (3.23) можно записать

$$\ddot{x} = -\frac{\Omega_0^2}{k_0}\sin(k_0x-\omega_0t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\Delta\omega t) =$$

$$= -\frac{\Omega_0^2}{k_0}\sin(k_0x-\omega_0t)\cdot T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT), \qquad (3.29)$$

где

$$T = 2\pi/\Delta\omega.$$

Итак, мы снова пришли к задаче о маятнике, возбуждаемом последовательностью δ-импульсов. Теперь очень просто записать отображение, связывающее переменные $(x, \dot{x})$ между двумя последовательными δ-импульсами.

Положим

$$\vartheta = k_0x-\omega_0t, \quad I = (k_0\dot{x}-\omega_0)T. \qquad (3.30)$$

Тогда интегрирование уравнений (3.29) на интервале $(t, t+T)$, включающем δ-функцию в момент времени t, дает:

$$\overline{I} = I - K_0\sin\vartheta, \quad \overline{\vartheta} = \vartheta + \overline{I}, \qquad (3.31)$$

где

$$K_0 = \Omega_0^2T^2.$$

Мы пришли к стандартному отображению, которое позволяет сразу записать условие стохастичности фаз ϑ $(K_0 \geqslant 1)$ и кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2\, D\,\frac{\partial^2F}{\partial I^2}, \qquad (3.32)$$

где

$$D = K_0^2/2T = (e^2/2m^2)\,E_0^2k_0^2T^3.$$

Если вернуться к переменной v, то диффузионное уравнение примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2 D_0\frac{\partial^2F}{\partial v^2}; \quad D_0 = \frac{\pi e^2E_0^2}{m^2\Delta\omega}. \qquad (3.33)$$

Можно воспользоваться формулами (1.41), (1.42) для того, чтобы учесть корреляционные эффекты фаз. Тогда вместо (3.33) следует написать

$$\frac{\partial F}{\partial t} = {}^1/_2\pi\frac{e^2E_0^2}{m^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial v}\Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega(I)-m\Delta\omega\right)\frac{\partial F}{\partial v}, \qquad (3.34)$$

где

$$\omega(I) \equiv k_0v-\omega_0.$$

Учитывая обозначения (3.27), имеем

$$\Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega(I)-m\Delta\omega\right) = \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, k_0v-\omega_m\right). \qquad (3.35)$$

Поэтому уравнение (3.34) представляется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi\frac{e^2E_0^2}{2m^2}\sum_k\frac{\partial}{\partial v}\Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k-k_0v\right)\frac{\partial F}{\partial v} \qquad (3.36)$$

или, при $1/\tau_c \to 0$, используя правило (1.39),

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \pi\frac{e^2E_0^2}{2m^2}\sum_k\frac{\partial}{\partial v}\delta(\omega_k-kv)\frac{\partial F}{\partial v}, \qquad (3.37)$$

где мы намеренно заменили обратно k_0 на k под знаком δ-функции, чтобы придать уравнению (3.37) форму, близкую к квазилинейному уравнению плазмы *).

Конечно, суммирование в (3.37) можно снять, используя наличие δ-функции. Однако сохранение его проясняет физическую структуру диффузионного члена. В нем стоит сумма по всем возможным резонансам, определяемым условием

$$\omega_k - kv = 0. \tag{3.38}$$

Этот резонанс перенормируется тривиальным образом, превращаясь в лоренцевскую форму линии, если учесть конечное время расцепления корреляций фаз τ_c. Тогда вместо δ-функции в (3.37) возникает Δ-функция с лоренцевской структурой в (3.36).

Теперь мы можем достаточно быстро решить вопрос о стохастическом нагреве частиц. Уже из формулы (3.33) видно, что

$$\frac{d\langle v^2\rangle}{dt} = D_0 t + v_0^2$$

и имеет место стохастический нагрев. Поэтому уравнение (3.37), которое тождественно с (3.33), также дает увеличение энергии частиц и не приводит к увеличению их скорости. Действительно, наличие резонанса (3.38), обусловленного δ-функцией, оставляет только одно резонансное значение скорости

$$v_k = \omega_k/k. \tag{3.39}$$

Положение полностью меняется, если учесть конечное время расцепления корреляций фаз. Уравнение (3.36) может содержать стохастическое ускорение частиц, так как в нем уже нет δ-функции, снимающей интегрирование:

$$\frac{d}{dt}\langle v\rangle = -\frac{\pi e^2 E_0^2}{2m^2}\left\langle \sum_k \Delta\left(\frac{1}{\tau_c},\ \omega_k - kv\right)\frac{\partial F}{\partial v}\right\rangle = \frac{\pi e^2 E_0^2}{2m^2}\sum_k \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial v}\Delta\left(\frac{1}{\tau_c},\ \omega_k - kv\right)\right]F\right\rangle. \tag{3.40}$$

Производная от функции Δ по v имеет вид, изображенный на рис. 6.3. Она антисимметрична относительно точки резонанса (3.39). Поэтому знак интеграла в правой части в (3.40) при усреднении зависит от того, каких частиц больше—с $v < v_k$ или $v > v_k$.

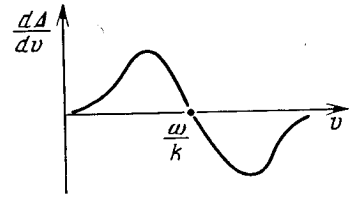


Рис. 6.3. Производная Δ-функции

Равновесная функция распределения $F(v)$ монотонно убывает с ростом v. Поэтому очевидно, что правая часть в (3.40) положительна и, следовательно, имеет место ускорение частиц. Этот результат означает следующее. Если в среде (плазме) возникает флуктуация в виде волнового пакета, то частицы в поле флуктуации ускоряются, набирая энергию в случае монотонно убывающей функции распределения частиц по скоростям. Эту энергию они берут от флуктуации вследствие закона сохранения энергии. В результате флуктуация затухает. Однако если функция распределения неравновесная, то возможно, что частицы не ускоряются, а замедляются, отдавая энергию волновому пакету. В этом случае энергия волнового пакета нарастает. Развивается неустойчивость, приводящая к модификации функции распределения по скоростям.

*) Здесь термин «квазилинейное уравнение» не следует путать с обычным понятием квазилинейных дифференциальных уравнений.

Влияние трения на динамику в волновом пакете. В уравнении (3.23) легко учесть влияние трения на механизм стохастического нагрева. Трение может быть обусловлено различными причинами и, в частности, столкновениями между частицами. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}=-\frac{e}{m}\sum_k E_k \sin(kx-\omega_k t). \tag{3.41}$$

Сделаем все те же предположения (3.27), (3.28) относительно волнового пакета. Положим также для простоты $\omega_0=0$ и перейдем к переменным (3.30). Тогда вместо (3.29) получаем

$$\dot{I}+\gamma I=-K_0\sin\vartheta\cdot T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT). \tag{3.42}$$

Уравнение (3.42) порождает отображение

$$\begin{aligned}&\bar{I}=e^{-\bar{\gamma}}I-K(\bar{\gamma})\sin\vartheta,\\&\bar{\vartheta}=\vartheta+\bar{I}\pmod{2\pi},\end{aligned} \tag{3.43}$$

где $\bar{\gamma}=\gamma T$ и $K(\bar{\gamma})$—то же самое, что и в формуле (2.2). Таким образом, мы получили уже знакомое нам диссипативное отображение (2.1). Теперь ответ можно написать сразу, используя, например, выражение (2.9). Согласно определению (3.30) имеем

$$^1/_2 m\langle v^2\rangle_\infty=\frac{m}{8}\frac{K_0^2}{\bar{\gamma}k_0^2T^2}=\frac{e^2E_0^2T}{8m\gamma}. \tag{3.44}$$

Формула (3.44) показывает максимальную энергию, которую могут набрать частицы в результате механизма стохастического нагрева.

Все приведенные выше соображения интересны, как примеры таких хорошо осязаемых физических моделей, в которых стохастичность проявляется в макроскопических эффектах—ускорении и нагреве. Мы еще встретимся с этими задачами на более сложном уровне, преодолевая ограничение $v\ll v_g$.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 6

1. Существуют различные способы получения кинетического описания систем. Особенность излагаемого здесь подхода связана с тем, что рассматриваемые системы являются K-системами. Поэтому нет необходимости использовать такие приближения, как приближение хаотических фаз или какое-либо другое, эквивалентное ему, приближение. Соответствующие методы и приложения подробно изложены в [1—3].

2. Существуют и более общие результаты для моментов, справедливые также для больших значений диссипации [7]. Стационарная функция распределения на стохастическом аттракторе при $\bar{\gamma}\gg 1$ получена в [9].

3. Сообщения о первых числовых результатах в этой модели были приведены Уламом [11] и оказались отрицательными, т. е. стохастичность не была обнаружена. Это было связано с тем, что, как выяснилось впоследствии [12], область стохастичности лежала в другом месте. В этой работе [12] было получено отображение, описывающее динамику шарика, и проведено его первое исследование, которое мы частично приводим ниже. Обзор других результатов по модели [12] можно найти в монографии [13].

4. Квазилинейная теория плазмы была начата работами [15, 16]. Хотя уравнения, полученные в этих работах, и совпадали (это были просто уравнения ФПК, которые мы выпишем несколько позже), однако исходные предпосылки их вывода существенно различались. В то время как в работе [16] предполагалась априори случайность фаз волн в пакете, в работе [15] исходной была идея о стохастизации траекторий частиц при выполнении некоторых условий. Эти условия заключались в утверждении об отсутствии захваченных частиц и представляли собой некоторый вариант формулировки условий появления внутренней стохастичности. Сейчас стало ясно, что характер сложности задачи (3.23) допускает

многообразие различных форм условий появления хаоса. Мы рассмотрим эти условия в специальном разделе.

Представление о возможности описания динамики частицы в (3.23) с помощью кинетического уравнения оказалось очень плодотворным и привело к анализу многих сложных физических задач плазмы [2, 17, 18].

Глава 7

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ХАОСА

Свойство простейших динамических систем резко менять характер своего движения от регулярного к случайному при малых изменениях какого-либо параметра является столь удивительным, что мы еще не в состоянии понять в полной мере все особенности совершаемой при этом перестройки динамической системы. Как правило, введение в физические процессы случайных факторов или сил производится достаточно ограниченным способом, использующим чаще всего такие шаблоны, как гауссовские или пуассоновские случайные процессы. Однако реальная стохастичность, порождаемая реальными силовыми полями, выглядит совсем не так. Попытки понять ее с различных точек зрения не оказываются безрезультатными и позволяют заглянуть глубже в фундаментальные свойства нелинейной динамики.

Размерностные свойства K-систем являются их новой характеристикой, с которой мы познакомимся в этой главе. В основе ее лежит понятие размерности Хаусдорфа d_H. Эта характеристика позволяет получить более тонкую информацию о множествах, чем обычная топологическая размерность d_T (ком. 1).

§ 1. Фракталы

Фракталы — новое понятие, введенное в употребление Мандельбротом [3]. Он же продемонстрировал на обширном классе объектов распространенность фракталов в природе.

Хаусдорфова размерность. Обычная топологическая размерность d_T, с которой мы в основном привыкли иметь дело, приписывает счетному множеству размерность нуль, кривым — размерность $d_T = 1$, поверхностям — размерность $d_T = 2$ и т. д. Во многих случаях нас не может удовлетворить подобное определение, так как могут быть кривые, трудно отличимые от плоскости. Простым примером сделанного утверждения может служить траектория броуновской частицы (рис. 7.1). Она имеет $d_T = 1$. Однако чем больше время наблюдения, тем плотнее траектория заполняет плоскость. Если отвлечься сейчас от строгих формулировок, то следующее свойство траектории хорошо известно: для произвольного малого ε, характеризующего точность определения положения броуновской частицы на плоскости, можно указать такое конечное время $t(\varepsilon)$, что траектория будет неотличима от плоскости. Более того,

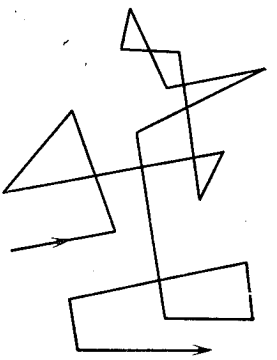


Рис. 7.1. Траектория броуновской частицы

$$t(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^{\alpha}, \qquad (1.1)$$

где α — число порядка единицы, зависящее от характера блуждания частицы. Можно заполнять плоскость траекторией некоторым регулярным образом, как это имеет место, например, при эргодическом, но не перемешивающемся движении. Чем отличаются в этом смысле траектории только эргодического движения и движения с перемешиванием?

Этот вопрос подсказывает нам следующий: можно ли указать какую-либо топологическую характеристику степени сложности траектории частицы в фазовом пространстве? Если бы это было возможно, то в наших руках оказался бы инструмент, различающий меру хаотичности движения по форме его траектории. Подобная проблема особенно важна в тех случаях, когда хаос порождается регулярными взаимодействиями в динамических системах, так как именно в этом случае мы встречаемся со всевозможными переходными состояниями движения от регулярного к стохастическому.

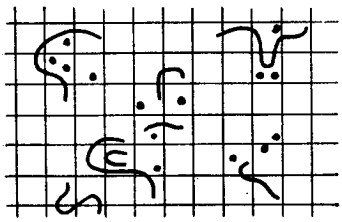


Рис. 7.2. Пример покрытия множества точек на плоскости квадратами с плотной упаковкой

Оказалось, что размерность, введенная Хаусдорфом, является тем удобным определением, которое позволяет различать (до известных пределов) степень сложности и запутанности траекторий. Она вводится следующим образом.

Рассмотрим некоторое множество, точки которого погружены в пространство некоторой размерности d_T. Будем покрывать это множество d_T-мерными кубами, плотно упаковывая их. Кубов надо взять столько, чтобы покрыть ими все рассматриваемое множество. Пример такого покрытия на плоскости приведен на рис. 7.2. Обозначим сторону куба через r и число кубов, в которые попадает хотя бы одна точка множества, через $N(r)$. Тогда хаусдорфова размерность множества равна

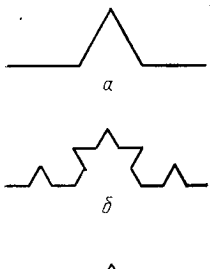


Рис. 7.3. Последовательные стадии образования кривой Коха

$$d_H = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln (1/r)}. \qquad (1.2)$$

Легко убедиться в том, например, что для отрезка прямой или гладкой кривой $d_H = d_T = 1$, а для элемента плоскости $d_H = d_T = 2$ и т. д. Это означает, что в привычных простых случаях хаусдорфова и топологическая размерности совпадают. Различие следует ожидать для необычных случаев. Рассмотрим несколько классических примеров.

Примеры. Первый пример связан с кривой Коха. Она получается следующим образом. Берем отрезок единичной длины и выбрасываем из него $^1/_3$ часть точно посередине. Соединяем внутренние концы получившихся двух отрезков ломаной, состоящей из двух звеньев длиной $^1/_3$ каждое (рис. 7.3*а*). С каждым из четырех отрезков образовавшейся ломаной поступаем точно таким же образом, т. е. выбрасываем третью часть посередине и надстраиваем ломаную из двух звеньев (рис. 7.3*б*). Эту операцию продолжаем до бесконечности (третий шаг изображен на рис. 7.3*в*). Нетрудно видеть, что на n-м шаге длина отрезка ломаной равна

$$r_n = 1/3^n.$$

Эти отрезки и играют роль «кубов», покрывающих образовавшуюся кривую Коха. Так же просто подсчитывается число таких «кубов»:

$$N(r_n) = 4^n.$$

Отсюда

$$d_H = \ln 4 / \ln 3 \approx 1{,}26.$$

Заметим, что для кривой $d_T = 1$, и поэтому в данном случае $d_H > d_T$.

Второй пример связан с классическим канторовым множеством. На рис. 7.4 указаны три последовательные стадии его построения. Из единичного отрезка выбрасывается средняя треть. Так же поступаем с каждым

из образовавшихся двух отрезков (рис. 7.4*б*). Этот процесс продолжается до бесконечности. То, что остается от отрезка после бесконечного числа выбрасываний, и составляет канторово множество. Подсчитаем длину выброшенных отрезков. Она равна

$$l = {}^1/_3 + {}^2/_9 + {}^4/_{27} + \ldots = 1.$$

Таким образом, суммарная «длина» оставшегося канторова множества равна нулю, и, следовательно, для него $d_T = 0$. Однако подсчет хаусдорфовой размерности канторова множества дает

$$d_H = \ln 2/\ln 3,$$

т. е. $0 < d_H < 1$.

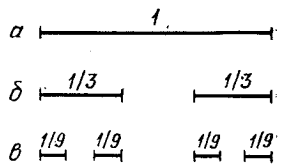


Рис. 7.4. Построение канторова множества

Третий пример также широко известен и носит название ковра Серпинского. На рис. 7.5 приведены две последовательные стадии его образования. Единичный квадрат делится на девять равных частей, и средний квадрат выбрасывается (рис. 7.5*а*). Далее такая же процедура производится с каждой из оставшихся восьми частей квадрата. Этот процесс продолжается до бесконечности. Простой подсчет d_H дает

$$r_n = r^n, \quad r = \sqrt{{}^1/_8} = {}^1/_3,$$
$$N(r_n) = [N(r)]^n, \quad N(r) = 8.$$

Отсюда

$$d_H = \ln 8/\ln 3,$$

т. е. $1 < d_H < 2$.

Мы рассмотрели три довольно близких примера регулярных множеств. В случае броуновского движения на плоскости численный анализ показывает, что $d_H = 2$, в то время как $d_T = 1$. Аналитический подсчет также возможен, однако это увело бы нас от главной цели.

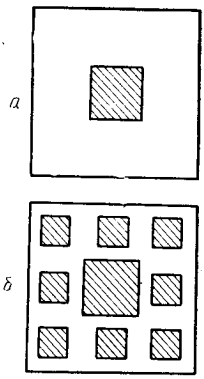


Рис. 7.5. Образование ковра Серпинского. Заштрихованные области выбрасываются

Определение фрактала. Мандельброт предложил называть фракталом множество, для которого его хаусдорфова размерность строго больше топологической:

$$d_H > d_T. \tag{1.3}$$

Все рассмотренные выше примеры являются фракталами. Имеется, однако, одно несоответствие в определении. Первые три примера имеют нецелую хаусдорфову размерность и тем самым оправдывают свое название. Последний пример броуновского движения имеет целую хаусдорфову размерность. Однако название является настолько удачным, что на это несоответствие можно закрыть глаза. Мы будем пользоваться также понятием фрактальной размерности, имея в виду размерность фрактала d_H, удовлетворяющую условию (1.3), хотя d_H может достигать целых значений.

Фракталы могут быть регулярными (например, кривая Коха) и стохастическими (например, траектория броуновского движения).

По существу определения (1.2) фрактальная размерность отражает свойство масштабной инвариантности рассматриваемого множества.

Неравенству (1.3) можно придать определенный физический смысл. Оно характеризует усложнение множества. Если это кривая ($d_T = 1$), то кривую можно усложнять путем бесконечного числа изгибаний до такой степени, что ее фрактальная размерность достигнет двух, если она плотно покроет конечную площадь, или трех, если кривая «упакует» куб.

Реальное определение фрактальной размерности с помощью, например, численных методов в действительности никогда не производится на бесконечном множестве, и число покрываемых точек ограничено некоторой величиной N_0. Поэтому для конечного числа точек всегда существует минимальное расстояние между ними $r_{\min}$. При уменьшении r, когда начинает выполняться неравенство $r_n < r_{\min}$, величина $N(r_n)$ перестает изменяться, достигая значения N_0. Поэтому для определения d_H годится лишь некоторый прямолинейный участок, лежащий между очень большими и очень малыми значениями $1/r$ (рис. 7.6), если, конечно, он существует.

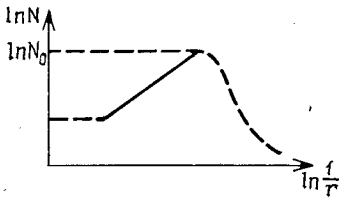


Рис. 7.6. Область определения фрактальной размерности (сплошная прямая)

Использование фрактальной размерности дает возможность получить еще одну важную характеристику сложных образов. Обширный круг приложений этого понятия описан в книге Мандельброта [3]. Нетрудно обнаружить, что формула (1.2) устанавливает некоторое соотношение подобия между объектами. Это, в частности, сразу же обнаруживается на следующем свойстве.

Связь с ренормализационной группой. Рассмотрим некоторую фигуру $\mathcal{A}_0$ и ее последовательные преобразования

$$\mathcal{A}_1 = \hat{T}\mathcal{A}_0, \quad \mathcal{A}_n = \hat{T}\mathcal{A}_{n-1} = \ldots = \hat{T}^n\mathcal{A}_0. \tag{1.4}$$

Одновременно с операцией $\hat{T}$, заключающейся, например, в увеличении детализации фигуры $\mathcal{A}_i$, рассмотрим изменение масштаба r на фактор a:

$$\hat{S}\mathcal{A}_i(r) = \mathcal{A}_i(r/a). \tag{1.5}$$

Будем теперь интересоваться некоторой величиной V, характеризующей объем или поверхность фигуры $\mathcal{A}_i$. Рассмотрим величину

$$V(\hat{S}\mathcal{A}_{n+1}) = V(\hat{S}\hat{T}\mathcal{A}_n). \tag{1.6}$$

Если существует подобие при действии оператора

$$\hat{R} = \hat{S}\hat{T}, \tag{1.7}$$

то можно записать связь между объемами $V(\mathcal{A}_n)$ и $V(\hat{R}\mathcal{A}_n)$ в виде

$$V(\hat{R}\mathcal{A}_n) = a^d V(\mathcal{A}_n), \tag{1.8}$$

где d — некоторая степень.

В общем случае соотношение подобия (1.8) может выполняться только в пределе $n \to \infty$, т. е.

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln [V(\hat{S}\mathcal{A}_{n+1})/V(\mathcal{A}_n)]}{\ln a}. \tag{1.9}$$

Обратимся теперь к последовательности фигур $\mathcal{A}_i$, определенной в (1.4), и предположим, что она имеет неподвижную точку $\mathcal{A}^*$. Тогда выражение (1.9) превращается в следующее:

$$d = \frac{\ln [V(\hat{S}\mathcal{A}^*)/V(\mathcal{A}^*)]}{\ln a}, \tag{1.10}$$

или эквивалентное соотношение:

$$V(\hat{S}\mathcal{A}^*) = a^d V(\mathcal{A}^*). \tag{1.11}$$

Нетрудно заметить, что определение (1.10) для d совпадает с определением d_H при $a \to \infty$. Действительно, согласно (1.5) только величина

$$V(\hat{S}\mathcal{A}^*) = V(\mathcal{A}^*(r/a))$$

зависит в числителе формулы (1.10) от a. Поэтому

$$d \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln V(\hat{S}\mathcal{A}^*)}{\ln a} = d_H.$$

С другой стороны, можно считать оператор $\hat{R}$ соответствующим оператору ренормализационной группы, имеющей по предположению неподвижную точку $\mathcal{A}^*$. Соотношение (1.10) возникло вследствие существования неподвижной точки (ком. 2).

Описанные выше соображения позволяют взглянуть на фрактальную размерность как на размерность подобия объема фигуры, соответствующей неподвижной точке (см. (1.11)).

Следует отметить, что ренормализационным свойством может обладать и такая характеристика системы, которая, вообще говоря, не связана с размерностью множества.

§ 2. Фракталы и хаос

Хаос, возникающий из динамических уравнений, по природе своей фрактален. Его фрактальный характер обусловлен тем свойством траекторий, которое превращает их из регулярных или периодических в стохастические. Действительно, регулярная траектория имеет $d_H = d_T = 1$. Однако локальная неустойчивость усложняет траекторию, делая ее все более запутанной и непредсказуемой. Появление фрактальных свойств в K-системах происходит в разных местах и в разнообразных их свойствах. Здесь мы приведем некоторые примеры фрактального характера K-систем. Заметим предварительно, что они не должны быть для нас неожиданными. Столь сильное перерождение динамической системы, как превращение ее в K-систему, должно сопровождаться не менее сильным изменением ее топологических свойств.

Размерность стохастического аттрактора. Наиболее сильно фрактальные свойства проявляются на стохастических аттракторах. Рассмотрим для определенности стандартное диссипативное отображение (§ 6 гл. 5, формула (5.6.14))

$$\begin{aligned} &\bar{z} = e^{-\bar{\nu}} z + \frac{1}{2\pi} K \sin 2\pi x, \\ &\bar{x} = x + \bar{z} \pmod 1; \qquad K = K_0 \frac{1 - e^{-\bar{\nu}}}{\bar{\nu}}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

куда входят две константы: $\bar{\nu}$ — коэффициент диссипации и K (или K_0) — константа возмущения. Якобиан отображения (2.1) равен

$$J = \frac{\partial(\bar{z}, \bar{x})}{\partial(z, x)} = e^{-\bar{\nu}} < 1, \tag{2.2}$$

и поэтому два характеристических числа на n-м шаге отображения λ_n^+ и λ_n^- удовлетворяют неравенству

$$\lambda_n^+ \lambda_n^- = e^{-\bar{\nu}} < 1, \tag{2.3}$$

которое не зависит от n. В частности, при больших значениях $K \gg 1$ почти всюду, за исключением малых областей по ϑ. имеем оценку

$$\lambda^+ \sim K, \quad \lambda^- \sim e^{-\bar{\nu}}/K. \tag{2.4}$$

Теперь с помощью этой информации поставим вопрос о хаусдорфовой размерности стохастического аттрактора, порождаемого уравнениями (2.1).

Для начала положим, что отображение характеризуется двумя постоянными, т. е. не зависящими от n характеристическими числами Λ^+ и Λ^-. Тогда этот факт можно представить себе следующим образом. Существует направление, вдоль которого элемент фазового объема растягивается в Λ^+ раз

и существует ортогональное направление, вдоль которого фазовый объем сжимается в Λ^- раз. Если в формуле (1.2) для d_H выбирать

$$r_n = \text{const} \cdot (\Lambda^-)^n$$

на n-м шаге отображения, то r_n будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. При этом число областей, покрывающих фазовый объем, равно на n-м шаге

$$N(r_n) = \text{const} \cdot \frac{(\Lambda^+)^n}{r_n} = \text{const} \cdot \left(\frac{\Lambda^+}{\Lambda^-}\right)^n.$$

Используя эти выражения, получаем

$$d_H = \lim_{n\to\infty} \frac{N(r_n)}{\ln(1/r_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{const} + n[\ln \Lambda^+ + \ln(1/\Lambda^-)]}{\text{const} + n \ln(1/\Lambda^-)} = 1 + \frac{\ln \Lambda^+}{\ln(1/\Lambda^-)}. \tag{2.5}$$

Если отображение сохраняет меру, то

$$\Lambda^+\Lambda^- = 1,$$

и, следовательно, согласно (2.5) для него

$$d_H = 2. \tag{2.6}$$

Это и следовало ожидать, так как стохастическая траектория достаточно равномерно заполняет плоскость вследствие перемешивания. Хотя размерность (2.6) — целая, мы имеем дело с фракталом, так как $d_H > d_T = 1$.

В случае

$$\Lambda^+\Lambda^- = e^{-\bar{\nu}} < 1 \tag{2.7}$$

из формулы (2.5) имеем

$$d_H = 1 + \frac{\ln \Lambda^+}{\ln \Lambda^+ + \bar{\nu}} < 2, \tag{2.8}$$

т. е. размерность стохастического аттрактора является дробной. Она лежит в интервале (1.2), так как аттрактор заполняет фазовую плоскость, образуя канторово множество в сечении (см. § 6 гл. 5).

Вернемся теперь к отображению (2.1) и будем считать, что для его параметров K и $\bar{\nu}$ выполнены условия, приводящие к появлению стохастического аттрактора. Характеристические числа $\lambda_n^{\pm}$ зависят от n. В этом случае для хаусдорфовой размерности получается та же формула (2.5), в которой, однако, следует переопределить величины $\Lambda^{\pm}$ следующим образом:

$$\Lambda^{\pm} = \lim_{m\to\infty} |\lambda_1^{\pm}\lambda_2^{\pm} \ldots \lambda_m^{\pm}|^{1/m} \tag{2.9}$$

(ком. 3).

Выражение (2.9) можно сильно упростить, заметив, что оно стремится к некоторому неслучайному пределу [7]. Случайными являются числа $\lambda_i^{\pm}$, так как они зависят от переменных ϑ_i, принадлежащих стохастическому аттрактору. Представим $\Lambda^{\pm}$ из (2.9) в виде

$$\Lambda^{\pm} = \lim_{m\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ln|\lambda_k^{\pm}|\right\}.$$

Вследствие закона больших чисел правая часть самоусредняется и дает

$$\Lambda^{\pm} = \exp\langle \ln|\lambda^{\pm}| \rangle, \tag{2.10}$$

где

$$\langle f(\lambda) \rangle = \int dx\, dz\, f(\lambda(x, z))\, \rho(x, z);$$

$\rho(x, z)$—стационарная функция распределения на стохастическом аттракторе.

Подстановка (2.10) в (2.8) дает

$$d = 1 + \frac{\langle \ln \lambda^+ \rangle}{\bar{\gamma} + \langle \ln \lambda^+ \rangle} = 1 + \frac{h}{\bar{\gamma} + h}, \tag{2.11}$$

где введена K-энтропия:

$$h = \langle \ln \lambda^+ \rangle.$$

При малых значениях диссипации $\bar{\gamma}$ размерность аттрактора близка к двум:

$$d \approx 2 - \bar{\gamma}/h. \tag{2.12}$$

Если считать K большим, то из (2.4) и (2.12) следует формула

$$d \approx 2 - \bar{\gamma}/\ln K,$$

показывающая отклонение размерности от двойки. Это отклонение имеет простой смысл, который можно легко использовать для качественных оценок более сложных систем. Уменьшение размерности происходит на величину, равную отношению коэффициента диссипации (коэффициента сжатия траекторий) к коэффициенту разбегания траекторий (инкременту локальной неустойчивости).

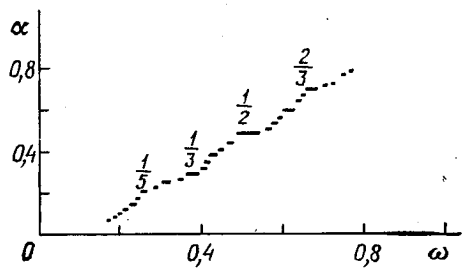


Рис. 7.7. Локализация мод синус-отображения [8]

Фрактальные свойства локализации мод. Проявления фрактальности, будучи необычайно разнообразными, могут неожиданным образом указать способ сравнения таких свойств системы, которые, на первый взгляд, не имеют никакого конкретного количественного параметра для сравнения. Здесь мы приведем пример такого рода, связанный с последовательностью локализации мод синус-отображения

$$x_{n+1} = x_n + \omega + \frac{1}{2\pi} K \sin 2\pi x_n \pmod 1. \tag{2.13}$$

Значение $K = 1$ является критическим. При переходе через него возникает хаотическая динамика. Напомним, что числом вращения называется величина

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}).$$

Рациональным значениям α соответствуют периодические движения. В зависимости от значения ω движение при $K \leqslant 1$ имеет определенную частоту. Это и называется локализацией моды. Для любого рационального α, т. е. периодического движения, при $K \leqslant 1$ можно указать интервал значений ω, в котором такое движение возможно (или невозможно). При $K = 1$ существуют все возможности, т. е. для любого рационального α существует некоторая область $\Delta\omega(\alpha)$ локализации моды. Соответствующая зависимость $\alpha(\omega)$ имеет вид «дьявольской лестницы» и приведена на рис. 7.7. Все щели в ней также заполнены ступеньками, соответствующими промежуточным рациональным числам.

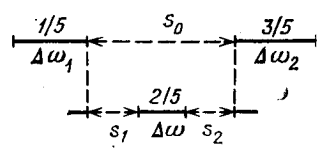


Рис. 7.8. Схема определения фрактальной размерности «дьявольской лестницы»

Теперь возникает вопрос о том, каким свойством можно охарактеризовать получившуюся «дьявольскую лестницу». Одним из возможных способов является определение ее фрактальной размерности, если, конечно, она су-

ществует. Здесь возникает некоторый простор для спекуляций, и положительный эффект достигается при удачном выборе фрактальной характеристики объекта. Одним из возможных способов введения размерности d в данном случае является следующий [8]. Рассмотрим два интервала $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, соответствующих числам вращения p/q и p'/q'. На рис. 7.8 $p/q = {}^1/_5$ и $p'/q' = {}^3/_5$. Величину щели между интервалами $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ обозначим через s_0. Рассмотрим новый интервал локализации $\Delta\omega$, соответствующий числу вращения

$$\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}.$$

На рис. 7.8 это число вращения равно $(1+3)/(5+5) = {}^2/_5$. Образовались две новые щели s_1 и s_2 между интервалами $(\Delta\omega_1, \Delta\omega)$ и $(\Delta\omega, \Delta\omega_2)$ соответственно.

Описанный процесс можно продолжить и получить некоторое число N щелей s_j. Тогда фрактальной размерностью d можно назвать величину, входящую в выражение

$$\sum_{j=1}^{N} s_j^d = s_0^d \qquad (N \to \infty). \tag{2.14}$$

Мы будем называть далее величину d размерностью разветвления.

Численный анализ в [8] показал, что величина d существует и равна

$$d = 0{,}868 \pm 0{,}002. \tag{2.15}$$

Более того, вычисление d только по первым двум щелям, т. е. при $N=2$, дает значение d (2.15) с точностью до 1 %. Величина d не зависит также от положения на дьявольской лестнице, при котором ее вычисляют.

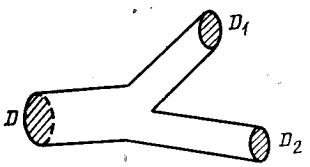


Рис. 7.9. Диаметры разветвления

Размерность разветвления. Описанный способ введения размерности d формулой (2.14) в действительности является вариантом некоторой общей концепции. Ее можно сформулировать так: существует показатель подобия ветвящегося процесса. Для понимания этого утверждения рассмотрим простейший пример разветвляющегося на две части дерева, или потока, на рис. 7.9. В нем D—исходный диаметр потока, а D_1 и D_2—диаметры образовавшихся ветвей. Тогда закон разветвления можно записать в виде [3]

$$D^d = D_1^d + D_2^d, \tag{2.16}$$

где величину d назовем показателем разветвления. В случаях, где действует закон сохранения потока, $d=2$. Однако пример дьявольской лестницы, рассмотренный выше, показывает, что далеко не всегда d—целое (ком 4).

Распределения и спектральная плотность. Рассмотренные примеры показывают, что понятием фрактальности можно пользоваться достаточно широко. Оно выходит за рамки понятия размерности и может характеризовать некоторые свойства подобия структуры или процесса с масштабным показателем, отличающимся от аддитивных случаев. Действительно, если имеется свойство аддитивности рассматриваемых величин, то возникают привычные соотношения. Объем двух частей множества равен сумме их объемов, и формула (1.2) дает $d_H = d_T$. Если бы в примере на рис. 7.8 не было конечного интервала локализации мод, то тогда $s_0 = s_1 + s_2$ и показатель d в (2.14) равнялся бы единице и т. д.

Одно из сильных нарушений аддитивности возникает при сглаживании распределений, имеющих фрактальный характер. Пример такой функции распределения приведен для стохастического аттрактора на рис. 7.10, 7.11. При огрублении таких функций их вид сильно меняется в зависимости от

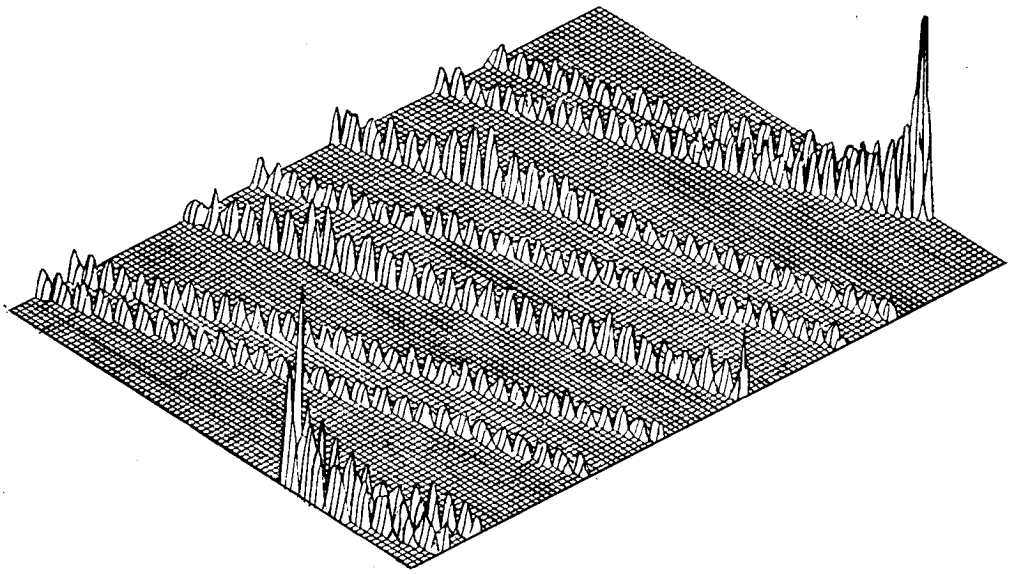


Рис. 7.10. Стационарная функция распределения на стохастическом аттракторе

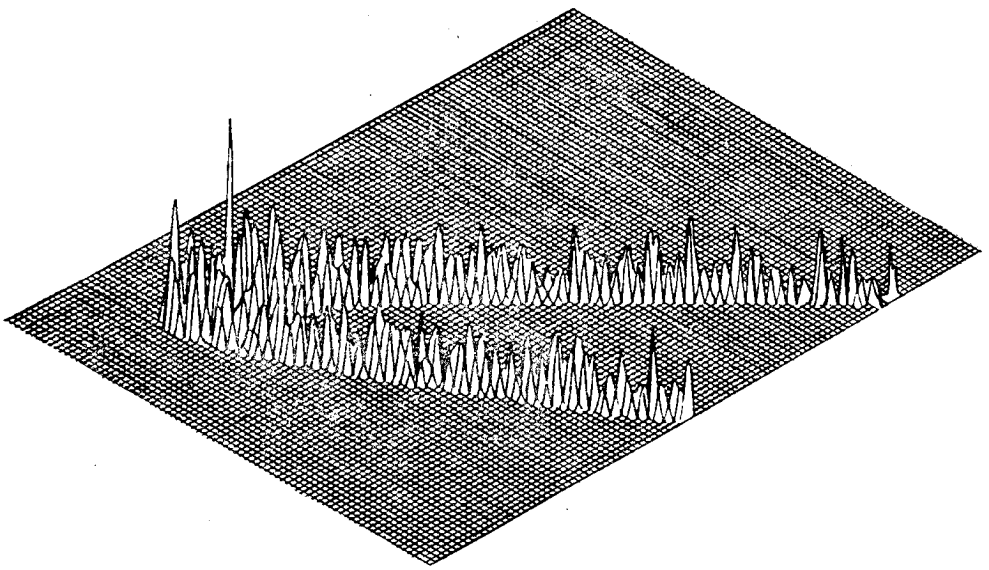


Рис. 7.11. Расслоение функции распределения в окрестности стохастического аттрактора

шага огрубления. Поэтому возникает вопрос о том, можно ли указать какую-либо универсальную характеристику распределений подобного типа, которая бы в некоторых пределах не зависела от шага огрубления. Конечно, ответ на этот вопрос далеко не однозначен. В качестве одного из возможных вариантов ответа рассмотрим следующий.

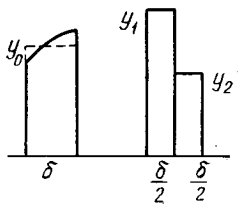


Рис. 7.12. Детализация гистограммы

Пусть дан некоторый участок гистограммы, которая строится с интервалом δ (рис. 7.12). Ордината функции равна на нем y_0, а площадь участка соответственно $s_0 = y_0\delta$. Детализируем гистограмму функции распределения, разбивая участок δ на две равные части длиной $\delta/2$. На них ординаты равны y_1 и y_2, а общая площадь участка равна

$$s_{1+2} = s_1 + s_2 = {}^1/_2\delta\,(y_1 + y_2).$$

Условие равенства площадей $s_{1+2} = s_0$ вследствие нормировки распределения означает, что

$$y_0 = {}^1/_2\,(y_1 + y_2) \tag{2.17}$$

Этот закон соответствует обычному процессу детализации, если речь идет о достаточно гладких функциях. Однако фрактальные кривые таким простым свойством среднего не обладают. Вместо него можно рассмотреть соотношение

$$(2y_0)^d = y_1^d + y_2^d \tag{2.18}$$

с показателем разветвления d. Формула (2.18) аналогична (2.16).

Одним из важных мест, в которых можно использовать показатель d, является спектральная характеристика траектории K-системы. Если $\mathcal{R}(m)$ — корреляционная функция, например, величины x_n из формулы (2.13):

$$\mathcal{R}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \cos 2\pi x_{n+m} \cdot \cos 2\pi x_n,$$

то ее фурье-образ $\mathcal{R}(\omega)$ будет фрактальным. Детализация $\mathcal{R}(\omega)$ обычно приводит к сильным скачкам амплитуд гармоник, и использование показателя d может позволить сравнивать различные спектры $\mathcal{R}(\omega)$.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 7

1. Хаусдорфова размерность была введена в 1919 г. [1]. Ее связь с энтропией K-систем обсуждается в [2].

2. Различные аспекты фракталов и их свойств нашли приложение в теории фазовых переходов и теории перколяции. Связь фрактальной размерности с приближением ренормализационной группы обсуждалась в [4].

3. Формулы (2.5), (2.9) были получены в работе [5]. Численный анализ [6] с большой точностью подтвердил их для различных стохастических аттракторов. Размерность d_H определялась двумя способами: по формуле покрытий (1.2) и по формулам (2.5), (2.9).

4. В книге [3] отмечается, что для бронхов $d \sim 3$, для артерий $d \sim 2{,}7$, для ботанических деревьев ~ 2 и для рек — 2.

Часть II. ВОЛНЫ

Глава 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Подобно тому как колебания являются одним из наиболее характерных и «вездесущих» процессов, встречающихся в природе при анализе движения отдельных тел или частиц, так волновые процессы берут на себя роль типичных явлений, когда мы имеем дело со средами. Задание состояния частицы может быть произведено с помощью некоторого конечномерного вектора

$$z = z(t)$$

в фазовом пространстве. Состояние среды уже нельзя задать таким простым способом, и следует вводить некоторое количество полей

$$F_\mu = F_\mu(\boldsymbol{r}, t),$$

заданных в каждой точке пространства $\boldsymbol{r}$ в момент времени t. Это обстоятельство порождает огромное разнообразие новых явлений. В этой главе мы рассмотрим лишь некоторые особенности в основном нелинейных периодических волн. Наша основная цель будет заключаться в выделении специфически нелинейных черт волновых процессов, обладающих той или иной степенью универсальности.

§ 1. Укручение волн

Задачи о возникновении и эволюции волн достаточно многочисленны и разнородны. Постараемся выделить наиболее характерные и удобные примеры, чтобы показать особенности нелинейной волновой динамики.

Бегущие волны. По-видимому, трудно найти более простой пример, который содержал бы столь значительное количество специфической для нелинейных волн информации, чем движение среды из невзаимодействующих частиц. Если обозначить через $n(x, t)$ плотность частиц в точке x в момент времени t, то факт отсутствия потерь частиц или появления новых частиц имеет тривиальное формальное выражение:

$$\frac{dn}{dt} = 0. \tag{1.1}$$

Оно может быть записано более обстоятельно, если раскрыть смысл полной производной по времени:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

где v — скорость среды

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{1.3}$$

Она является функцией точки и времени.

Если $v = \text{const} = v_0$, то общее решение уравнения (1.2) представляется бегущей волной

$$n = n(x - v_0 t) \tag{1.4}$$

и константа v_0 имеет смысл скорости волны. Начальное условие

$$n(x, 0) = F(x) \tag{1.5}$$

выбирает определенный профиль волны $F(x)$, который движется со скоростью v_0 вдоль x без искажений (рис. 8.1).

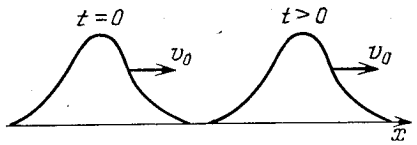


Рис. 8.1. Движение волнового профиля в линейном случае

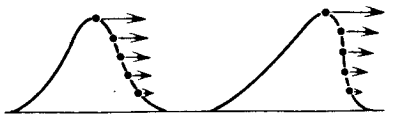


Рис. 8.2. Укручение волны

В нелинейной среде уравнения (1.1) или (1.2) имеют более сложную структуру. Простейшая из нелинейностей связана с зависимостью скорости v от плотности:

$$v = v(n). \tag{1.6}$$

Уравнение (1.2) по-прежнему легко решается, так как оно первого порядка. Уравнения характеристик

$$\frac{dx}{dt} = v(n), \quad \frac{dn}{dt} = 0$$

определяют решение при начальном условии (1.5) в виде

$$n(x, t) = F(x - v(n)\, t). \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) называется простой волной или волной Римана (см. [1, 2]). Это по-прежнему бегущая волна. Однако теперь профиль $n(x, t)$ выражен неявно. Кроме того, скорость движения различных точек профиля различна. Она зависит от самого значения n в этой точке. Это обстоятельство приводит к расползанию волнового профиля. Остановимся на этом явлении подробнее.



Рис. 8.3. Возникновение многопотоковости и обрушение волны

Опрокидывание фронта волны. Если $v'(n) > 0$, то возникает укручение фронта волны (рис. 8.2), о котором мы уже упоминали в § 1 гл. 2. В реальных процессах укручение заканчивается появлением многопотоковых движений и опрокидыванием волны (рис. 8.3). Существует множество примеров опрокидывания волн, из которых, быть может, самым наглядным является образование барашков на поверхности моря при сильном разгоне волн ветром.

Формальное выражение для опрокидывания нетрудно получить из формулы для решения (1.7). Продифференцируем ее по x и по t:

$$n_x = (1 - v' n_x t) F', \quad n_t = (-v - v' n_t t) F',$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу и, в частности, $v' = dv/dn$. Отсюда

$$n_x = \frac{F'}{1 + F' v' t}, \quad n_t = -\frac{vF'}{1 + F' v' t}. \tag{1.8}$$

Формулы (1.8) дают ответ на вопрос о том, когда происходит опрокидывание.

Очевидное условие $F' \neq 0$ означает, согласно (1.5), что изначальный профиль волны неоднороден. Следующее условие, $v' \neq 0$, нам уже знакомо

и выражает тот факт, что задача нелинейна. Теперь остается последнее условие, определяющее момент времени t_0, когда знаменатель в (1.8) обращается в нуль:

$$t_0 = \frac{1}{\max |F'v'|} \qquad (F'v' < 0). \tag{1.9}$$

В волнах сжатия $v' > 0$, и поэтому время t_0 существует, если $F' < 0$. Это как раз имеет место для профилей волн, приведенных на рис. 8.1—8.3.

В частности, рассмотрим вместо уравнения (1.1) уравнение свободного движения несжимаемой среды:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1.10}$$

Оно также имеет решение в виде бегущей волны

$$v(x,\ t) = F_0(x - vt), \tag{1.11}$$

где функция F_0 определяет начальный профиль скорости:

$$v(x,\ 0) = F_0(x) \equiv v(x).$$

По аналогии с получением формул (1.8) теперь из (1.2) имеем $v' = dv/dv = 1$ и $F' = F_0' = dv/dx$. Тогда формула (1.9) для времени опрокидывания дает выражение

$$t_0 = \frac{1}{\max\left|\frac{dv(x)}{dx}\right|} \qquad \left(\frac{dv(x)}{dx} < 0\right), \tag{1.12}$$

которое нами уже было получено совсем из других соображений (см. формулу (2.1.41)).

Выражения (1.9) и (1.12) так же, как и формулы (1.8), имеют вполне наглядный смысл. Опрокидывание сопровождается обращением в бесконечность производных n_x, n_t и точно так же v_x, v_t. Это проявляется в том, что наклон профиля становится перпендикулярным к оси x. Первая малая область профиля, которая достигает такого положения, определяется, очевидно, областью, где максимальна производная начального состояния волны.

Итак, даже в отсутствие взаимодействий мы столкнулись с новым явлением — опрокидыванием, которое присуще только нелинейным задачам.

Роль диссипации. Уравнение Бюргерса. В действительности опрокидывание волны, подобное тому, что возникает на поверхности воды при сильном разгоне, наблюдается далеко не всегда. Это происходит из-за существования некоторых факторов, останавливающих процесс укручения фронта волны. Одним из них является вязкость.

Если уравнение (1.10) дополнить вязким членом, то оно примет вид

$$v_t + vv_x = \nu v_{xx}, \tag{1.13}$$

называемый уравнением Бюргерса, где ν — коэффициент вязкости. Следующие простые соображения показывают, как вязкость останавливает опрокидывание. Из формул (1.8) видно, что опрокидывание сопровождается обращением в бесконечность производных от профиля волны. То же самое относится и к профилю волны скорости (1.11). Если $t < t_0$ и волна еще не достигла границы опрокидывания, то ее фронт очень крут. По мере приближения t к t_0 крутизна фронта возрастает и, следовательно, увеличивается производная $v_x(x,\ t)$. В результате даже при малых вязкостях ν член νv_{xx} в правой части (1.13) станет большим и сравняется с нелинейным членом vv_x. Возникает конкуренция двух противоположных процессов: укручения из-за нелинейности и затухания из-за вязкости. Как следствие конкуренции может возникнуть стационарное движение. Посмотрим теперь, как описанный процесс проявляется в формальном решении уравнения (1.13).

Достопримечательностью уравнения Бюргерса является существование точного решения, построенного Хопфом [3] и Коулом [4]. Сделаем замену переменных:

$$v = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln w. \tag{1.14}$$

Тогда для w получается уравнение диффузии (или теплопроводности):

$$w_t = \nu w_{xx}. \tag{1.15}$$

Примем начальное условие при $t = 0$:

$$v(x,\ 0) = v_0(x). \tag{1.16}$$

Согласно (1.14) условие (1.16) означает для переменной w следующее:

$$w(x,\ 0) = w_0(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x v_0(x')\,dx'\right\}. \tag{1.17}$$

Мы будем также предполагать, что начальный профиль $v_0(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v_0(x) \equiv I < \infty. \tag{1.18}$$

Теперь легко записать общее решение уравнения Бюргерса, так как известно общее решение уравнения теплопроводности:

$$w(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, w_0(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right]. \tag{1.19}$$

Обозначим

$$\psi(x,\ t;\ y) = \frac{1}{2t}(x-y)^2 + \int_0^y v_0(x')\,dx'.$$

Отсюда после подстановки (1.19) и (1.17) в (1.14) получаем окончательно

$$v(x,\ t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{x-y}{t} \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\psi(x,\ t;\ y)\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\psi(x,\ t;\ y)\right]}. \tag{1.20}$$

Выражение (1.20) позволяет получать произвольные решения уравнения Бюргерса, соответствующие различным начальным профилям волн, их взаимодействию и т. д. (см. [2]). Мы здесь остановимся на выяснении асимптотического вида решения (1.20) для больших t при $I \neq 0$ [5].

Обратим внимание на то, что уравнение (1.13) можно записать в дивергентной форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(1/2 v^2 - \nu v_x) = 0. \tag{1.21}$$

Поскольку предполагается, что $v(x \to \pm\infty) = 0$, то интегрирование выражения (1.21) по x от $-\infty$ до ∞ дает

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v(x,\ t) = 0,$$

т. е. величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, v(x,\ t) = \mathrm{inv} = I. \tag{1.22}$$

Инвариант движения определяет асимптотическую форму профиля решения (1.20). Для того чтобы получить этот результат, следует провести несложные оценки.

Рассмотрим случай достаточно малых ν. Это автоматически означает выход решения на стационарный профиль через большое время, что следует из структуры уравнения Бюргерса. Поэтому предел $\nu \to 0$ означает также $t \to \infty$. При малых ν интегралы в (1.20) можно вычислить методом перевала. Точка перевала y_0 определяется из уравнения

$$\frac{d}{dy}\psi(x,\ t;\ y_0) = 0,$$

т. е.

$$\frac{y_0 - x}{t} + v_0(y_0) = 0.$$

Теперь для $v(x,\ t)$ получается совсем простое выражение

$$v(x,\ t) \sim (x - y_0)/t, \tag{1.23}$$

так как экспоненты и предэкспоненты в (1.20) сократились. При $t \to \infty$ отличные от нуля значения $v(x,\ t)$ получаются только при достаточно больших значениях x. Поэтому практически во всей области, где профиль $v(x,\ t)$

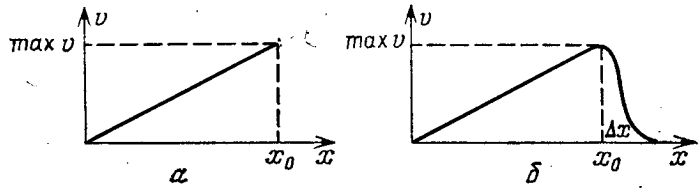


Рис. 8.4. Асимптотическое решение уравнения Бюргерса в виде треугольной волны: *а* — при $\nu \to 0$, *б* — при конечных значениях ν

принимает ненулевые значения, имеет место асимптотическая форма решения $v(x,\ t)$, в котором x и t связаны согласно (1.21) соотношением

$$x = y_0 + v_0(y_0)\, t.$$

Это показывает, что мы получили простую волну, имеющую линейный профиль (1.22). Ее фронт стремится к укручению, однако оно не достигается из-за вязкости.

Нам остается определить границу решения (1.23), так как в подобной форме оно не приводит к конечному значению интеграла (1.22). Поэтому очевидно, что при x, бóльших некоторого x_0, должно быть $v \equiv 0$. Для определения величины x_0 воспользуемся формулой (1.22), подставив в нее (1.23):

$$x_0^2/2t \sim I.$$

Значение интеграла на нижнем пределе не существенно, так как x_0 очень велико:

$$x_0 \sim \sqrt{2It}. \tag{1.24}$$

Отсюда видно, что

$$\max v(x,\ t) \sim x_0/t = \sqrt{2I/t} \to 0. \tag{1.25}$$

Полученное решение приведено на рис. 8.4. При конечных значениях вязкости ν имеется переходной слой с шириной, пропорциональной ν.

Формулы (1.24), (1.25) показывают, что асимптотический профиль волны определяется только значением момента I и не зависит при $I > 0$ от формы начального профиля $v_0(x)$.

Решение уравнения Бюргерса, в котором опрокидывание не происходит, является примером образования ударной волны. Действительно, в ударной волне могут существовать скачки плотности и скорости, нормальной к фронту волны [1]. Это и происходит в данном случае.

Число Рейнольдса. Процесс остановки опрокидывания волны и образования ударной волны определяется, как уже отмечалось, конкуренцией между нелинейностью и затуханием. Это взаимоотношение можно выразить с помощью безразмерного фактора

$$R = \frac{vv_x}{\nu v_{xx}}. \tag{1.26}$$

Он называется числом Рейнольдса и равен просто отношению нелинейного члена к вязкому.

Для оценки R заметим, что

$$R \sim vx/\nu \sim x_0^2/\nu t. \tag{1.27}$$

Отсюда с помощью формулы (1.24) получаем

$$R \sim 2I/\nu. \tag{1.28}$$

Эта формула пригодна для не слишком малых значений I. Предельный переход к малой диссипации ($\nu \to 0$) означает большие числа Рейнольдса ($R \gg 1$).

Число R обладает рядом замечательных свойств, характеризуя различные предельные ситуации. Именно им (или его степенями) определяются различные режимы протекания физических процессов. Рассмотрим в качестве примера определение ширины фронта ударной волны, т. е. ширины области Δx, где происходит сглаживание угла в профиле $v(x, t)$, вблизи границы опрокидывания (случай *б* на рис. 8.4). Очевидно, что на длине Δx сравниваются нелинейный член vv_x и вязкий член νv_{xx}. Отсюда

$$c\Delta x/\nu \sim 1$$

и, используя формулы (1.24), (1.25) и (1.27), получаем

$$\Delta x/x_0 \sim 1/R. \tag{1.29}$$

Ширина фронта ударной волны обратно пропорциональна R.

Спектр ударной волны. Не менее поразительный результат можно получить для спектра ударной волны, используя также число Рейнольдса. Рассмотрим пространственное преобразование Фурье для профиля треугольной волны

$$v(x, t) = \begin{cases} x/t & (0 < x < x_0), \\ 0 & (x < 0,\ x > x_0). \end{cases} \tag{1.30}$$

Формула (1.30) с асимптотической точностью при $\nu \to 0$ определяет профиль решения уравнения Бюргерса (рис. 8.4*а*). Имеем

$$v_k(t) = \int_0^{x_0} dx\, v(x, t)\, e^{ikx} = \frac{1}{t}\frac{d}{ak}\left[\frac{1}{k}\left(1 - e^{ikx_0}\right)\right]. \tag{1.31}$$

Из выражения (1.31) следует, что фурье-компоненты v_k убывают очень медленно с ростом k — пропорционально $1/k^2$. Поэтому спектр v_k волны эффективно не обрезается ни при каких конечных значениях k. Это свойство отражает существование сингулярного разрыва в профиле (1.30).

Перейдем теперь к сглаженному профилю волны, изображенному на рис. 8.4*б* при конечных значениях вязкости ν. Будем считать, что $R \gg 1$. В этом случае для больших значений k фурье-гармоники v_k эффективно

обрезаются. Это происходит при условии

$$k\Delta x \gtrsim 1. \tag{1.32}$$

Поэтому можно ввести понятие эффективной ширины пространственного спектра

$$k_0 \sim \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x_0} R = \frac{R}{\sqrt{2It}}. \tag{1.33}$$

Поскольку длина волны равна x_0, то ей соответствует волновое число $\Delta k = 2\pi/x_0$. Можно ввести безразмерную ширину волнового пакета для треугольной волны:

$$\frac{k_0}{\Delta k} \approx \frac{x_0}{\Delta x} = R. \tag{1.34}$$

Формула (1.34) фактически определяет некоторое эффективное число степеней свободы волны, т. е. число пространственных мод, составляющих волновой пакет в виде треугольной волны, периодически продолженной по оси x.

Приведенная спектральная интерпретация числа Рейнольдса как числа степеней свободы системы могла бы показаться несколько искусственной и излишней, если бы она неожиданно не оказалась универсальной для широкого класса систем, в том числе и не диссипативных. Мы познакомимся с этим обстоятельством ниже.

§ 2. Стационарные волны

Под стационарной волной будет подразумеваться следующая форма возмущения среды:

$$y = y(x - ut) \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) представляет собой некоторый стационарный профиль y, перемещающийся в пространстве с постоянной скоростью u. Можно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью u. Это делается заменой

$$\xi = x - ut. \tag{2.2}$$

Тогда

$$y = y(\xi)$$

является уравнением, определяющим форму профиля.

Мы уже знаем, что нелинейность приводит к укручению профиля волны и к ее опрокидыванию, если только нет какого-либо фактора, препятствующего этому процессу. Тогда в результате компенсации противоположных тенденций и образуется стационарная волна.

Ударная волна. В предыдущем пункте было показано, что диссипация может привести к образованию стационарной волны. Рассмотрим, как это происходит для уравнения Бюргерса. Подставим в (1.13) решение в форме (2.1):

$$v = v(x - ut).$$

Получаем

$$(v - u)v' = \nu v'', \tag{2.3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной ξ (2.2).

Первое интегрирование (2.3) дает

$$^1/_2 v^2 - uv = \nu v' + \text{const}. \tag{2.4}$$

Примем следующие граничные условия:

$$v(\xi \to \infty) = v_1, \quad v(\xi \to -\infty) = v_2,$$
$$v_2 > v > v_1, \quad v'(\xi \to \pm\infty) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда из (2.5) и (2.4) следует, что предельные значения скорости $v_{1,2}$ связаны со скоростью волны u соотношением

$$u = {}^1/_2 (v_1 + v_2) \tag{2.6}$$

и, кроме того, в уравнении (2.4) следует положить

$$\text{const} = -{}^1/_2 v_1 v_2.$$

Теперь легко записать решение уравнения (2.4) в виде

$$v = v_1 + \frac{\Delta v}{1 + \exp\left[\frac{\Delta v}{2\nu}(x - ut)\right]}, \tag{2.7}$$

где

$$\Delta v = v_2 - v_1.$$

Выражение (2.7) представляет собой простейшую структуру ударной волны (рис. 8.5). Ширина фронта волны равна

$$\Delta x = 2\nu/\Delta v. \tag{2.8}$$

Она стремится к нулю при $\nu \to 0$, а профиль ее на рис. 8.5 стремится к ступеньке.

Влияние дисперсии. Уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ). Кроме диссипации, роль «сдерживающего» фактора при укручении фронта волны может сыграть дисперсия волн, т. е. нелинейная зависимость частоты фурье-гармоник от волнового числа:

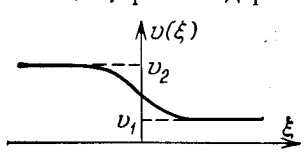


Рис. 8.5. Стационарный профиль ударной волны

$$\omega_k = \omega(k).$$

Это обстоятельство привело к большому числу различных следствий, которые мы собираемся последовательно обсудить (ком. 1).

В линейном случае при отсутствии диссипации закон дисперсии обычно имеет вид

$$\omega_k^2 = \omega^2(k^2). \tag{2.9}$$

Если, например, колебание близко к звуку, то разложение выражения (2.9) в ряд по малым значениям k дает

$$\omega(k) = kc - \beta k^3, \tag{2.10}$$

где β и c — константы и c имеет смысл скорости звука.

Причина, по которой нелинейный член βk^3 ограничивает укручение фронта, заключается в следующем. Пусть начальное возмущение среды было мало и имело вид плоской волны

$$v_k \sim a e^{i(kx - \omega t)}. \tag{2.11}$$

Учет нелинейного члена по теории возмущений приведет к появлению слагаемого

$$\delta v_k \sim a^2 e^{i(2kx - 2\omega t)},$$

т. е. гармоники с волновым числом $k_1 = 2k$ и частотой $\omega_1 = 2\omega$. Это, однако, возможно только в случае линейного закона дисперсии. Таким образом, граничные условия, приводящие к нелинейному дисперсионному соотношению (2.10), тем самым делают невозможным сколь угодно сильное укручение фронта волны.

Для демонстрации этого эффекта рассмотрим уравнение Кортевега — де Вриза, описывающее обширный класс нелинейных задач (ком. 2):

$$v_t + (c + v) v_x + \beta v_{xxx} = 0. \tag{2.12}$$

Если бы мы отбросили нелинейный член и положили решение в форме (2.11), то это привело бы к дисперсионному соотношению (2.10) (ком. 3).

Ищем решение (2.12) в форме стационарной волны типа (2.1):

$$v = v(x - ut) \equiv v(\xi). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12), находим

$$\beta v''' + (v - \alpha) v' = 0, \tag{2.14}$$

где

$$\alpha = u - c > 0. \tag{2.15}$$

Интегрирование (2.14) один раз дает

$$\beta v'' + {}^1/_2 v^2 - \alpha v = \text{const} \equiv C_1.$$

Домножение на v' и повторное интегрирование приводит к выражению

$${}^1/_2 \beta v'^2 + {}^1/_6 v^3 - {}^1/_2 \alpha v^2 - C_1 v = \text{const} \equiv H. \tag{2.16}$$

Мы пришли к уравнению колебаний частицы с гамильтонианом H и потенциалом

$$V(v) = {}^1/_6 v^3 - {}^1/_2 \alpha v^2 - C_1 v.$$

Роль времени играет переменная ξ. Рассмотрим для простоты случай $\beta > 0$ и представим (2.16) в виде

$$3\beta v'^2 = (b_1 - v)(b_2 - v)(b_3 - v), \tag{2.17}$$

где $b_1 > b_2 \geqslant b_3$ — константы, выражающиеся через α, C_1 и H.

Приведем финитные решения уравнения (2.17), следуя [5]. Они существуют при $b_1 \geqslant v \geqslant b_2$. При $b_2 > b_3$ решение представляет собой периодическую волну

$$v(\xi) = (b_1 - b_3)\,\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{\frac{b_1 - b_2}{12\beta}}\,\xi;\ \varkappa\right) + b_3, \tag{2.18}$$

где dn — эллиптическая функция Якоби с модулем

$$\varkappa = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}} < 1.$$

При $\varkappa = 1$, т. е. при $b_2 = b_3$, решение (2.18) переходит в единичный горб:

$$v(\xi) = \frac{b_1 - b_3}{\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\frac{b_1 - b_3}{12\beta}}\,\xi\right)} + b_3, \tag{2.19}$$

называемый уединенной волной или солитоном.

Чтобы несколько упростить выражение (2.19), не нарушая его структуры, положим $b_3 = 0$. Это означает, что солитону соответствует $C_1 = 0$, $H = 0$ в (2.16). Отсюда $b_1 = 3\alpha$, и (2.19) принимает вид

$$v(x - ut) = \frac{3\alpha}{\mathrm{ch}^2\left[\sqrt{\alpha/4\beta}\,(x - ut)\right]}, \tag{2.20}$$

изображенный на рис. 8.6.

Вид решений (2.18) и (2.19) нам уже знаком. Мы встречались с такими решениями при анализе нелинейных колебаний в гл. 1. Солитон (2.19) соответствует движению по сепаратрисе. Периодическая волна (2.18) имеет вид, изображенный на рис. 8.7. Если модуль $\varkappa$ близок к единице, т. е. $1 - \varkappa \ll 1$, то картина на рис. 8.7 очень близка к периодической последовательности

солитонов. Период волны в этом случае равен

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = |K(\varkappa)| \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{12\beta}} \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \ln \frac{16}{1-\varkappa^2}, \tag{2.21}$$

где $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Он, как и полагается вблизи сепаратрисы, логарифмически расходится при $\varkappa \to 1$, т. е. при $b_2 \to b_3 = 0$.

В дальнейшем удобно пользоваться не константами b_1, b_2, а параметрами α и λ (или k).

Мы показали главное, т. е. что стационарное решение существует и дисперсия приостанавливает укручение фронта волны. Формула (2.20)

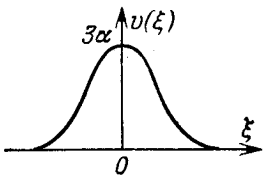


Рис. 8.6. Солитон

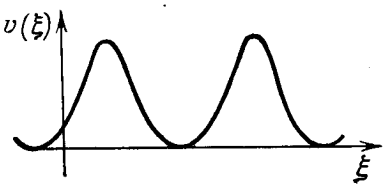


Рис. 8.7. Периодическая стационарная волна

показывает, что характерная ширина фронта имеет порядок

$$\Delta x \sim (\beta/\alpha)^{1/2}. \tag{2.22}$$

Рассмотрим теперь отношение нелинейного члена к дисперсионному в уравнении (2.12). Обозначим это число через

$$R_d \equiv N^2 = vv_x/(\beta v_{xxx}) = vL^2/\beta. \tag{2.23}$$

Из формулы (2.20) следует, что

$$\max v \sim \alpha. \tag{2.24}$$

Этот же результат (2.24) справедлив и для периодического решения (2.18) при $\varkappa \lesssim 1$. В качестве L следует взять период волны λ. Тогда формула (2.23) принимает вид

$$N \sim (\alpha/\beta)^{1/2} \lambda, \tag{2.25}$$

или, если учесть определения (2.21) и (2.22),

$$N \sim \frac{\lambda}{\Delta x} \sim \frac{1}{k\Delta x}. \tag{2.26}$$

Поскольку величина Δx определяет, согласно (2.22), ширину солитонного профиля, то величина N, согласно (2.26), выражает «скважность» импульсов в нелинейной периодической волне (см. рис. 8.7), т. е. отношение расстояния между импульсами к их ширине. Формула (2.26) очень важна для нас. Далее мы увидим, как ею пользоваться. Она в точности соответствует выражению (1.34). Тем самым устанавливается важное соответствие между числом Рейнольдса в диссипативном случае и его аналогом R_d в диспергирующей среде [10]:

$$R \sim R_d^{1/2} \sim N. \tag{2.27}$$

Соотношения (2.23) и (2.27) показывают, что наши рассуждения об отсутствии опрокидывания как при наличии вязкости, так и при учете дисперсии среды, имеют достаточно четкую формальную аналогию. Ее можно продолжить еще в одну важную для нас сторону.

Спектр периодических волн. Рассмотрим, как выглядит спектральное разложение нелинейной стационарной волны. Разлагаем (2.18) в ряд Фурье:

$$v(x-ut) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ink(x-ut)}. \tag{2.28}$$

В случае, близком к линейному, коэффициенты a_n быстро убывают с ростом n. Это позволяет ограничиться лишь первым или несколькими первыми членами разложения.

Однако если $\varkappa \leqslant 1$, то разложение (2.28) имеет совсем другой вид:

$$a_n \sim \begin{cases} 3\alpha/N & (n \leqslant N), \\ \exp(-n/N) & (n \gg N). \end{cases} \tag{2.29}$$

Оно показывает, что амплитуды фурье-разложения (2.28) близки к константе вплоть до $n \sim N$, где характерное число N уже определено в (2.25). При $n > N$ можно с экспоненциальной точностью спектр обрезать.

Важность полученного результата мы сумеем оценить несколько позже. Она основана на том, что движение среды, характеризуемое бесконечным числом степеней свободы, можно при достаточно подходящих условиях свести к конечномерной задаче. Согласно формулам (2.25) и (2.26), связь между величинами k, N и амплитудой скорости $\alpha = u - c$ определяется соотношением

$$N \sim \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} \frac{1}{k}. \tag{2.30}$$

Далее мы увидим, что такого типа соотношения вообще присущи нелинейным периодическим волнам разной природы. Они означают, что следующие характеристики волны оказываются взаимно зависимыми: энергия волны (или ее амплитуда), период волны и ширина спектра.

Нелинейная дисперсия. Обозначим через E некоторую энергетическую характеристику волны, для которой мы сейчас дадим формальное определение. Тогда формула (2.30) выражает существование связи

$$N = N(E, k). \tag{2.31}$$

Поскольку E зависит от амплитуды волны $\alpha = u - c$, то соотношение (2.31) можно представить в виде зависимости

$$k = k(E, \alpha) = k(E, u). \tag{2.32}$$

Физический смысл нового соотношения очевиден — это нелинейный закон дисперсии волн. Действительно, в линейном случае или близко к нему

$$u = \omega/k$$

и соотношение (2.32) означает связь

$$\omega = \omega(k, E). \tag{2.33}$$

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере нелинейного волнового уравнения

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + F(y), \tag{2.34}$$

называемого также нелинейным уравнением Клейна — Гордона. Его линеаризация по малым y дает

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + F_0' y, \tag{2.35}$$

где константа $F(0)$ предполагается равной нулю и $F_0' = F'(0)$. Уравнение (2.35) имеет закон дисперсии

$$\omega = \sqrt{k^2 c^2 - F_0'}. \tag{2.36}$$

Он — нелинейный и приводит к колебаниям с линейным законом дисперсии $\omega = kc$ лишь при $|F_0'| \ll k^2 c^2$. Посмотрим теперь, что происходит в нелинейном случае.

Рассмотрим стационарные волны

$$y = y(\xi), \qquad \xi = x - ut. \tag{2.37}$$

Подставим (2.37) в (2.34):

$$(c^2-u^2)\,y''+F(y)=0. \tag{2.38}$$

Уравнение (2.38) эквивалентно уравнению движения нелинейного осциллятора с массой (c^2-u^2) в поле с потенциалом

$$V(y)=-\int^{y} dx\,F(x)$$

и гамильтонианом

$$H=\tfrac{1}{2}(c^2-u^2)(y')^2-V(y). \tag{2.39}$$

Далее для определенности считаем $c>u$ и предполагаем $V(y)$ таким, что существует финитное движение. Период финитных колебаний равен

$$\lambda=\oint\frac{dy}{y'}=\sqrt{2(c^2-u^2)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{dy}{\sqrt{E+V(y)}}, \tag{2.40}$$

где E—значение энергии $H=E$ и ξ_1, ξ_2—точки поворота в потенциальной яме $V(y)$:

$$V(\xi_1)=V(\xi_2)=-E;\qquad \xi_2\geqslant V(y)\geqslant\xi_1.$$

Поскольку $k=2\pi/\lambda$, то выражение (2.40) является конкретной реализацией соотношения (2.32). Это и есть путь нахождения нелинейного закона дисперсии волн.

§ 3. Примеры стационарных волн

Разнообразие стационарных волн велико. Всевозможные их виды и типы определяются средой, в которой они распространяются, и характером физических процессов. Следующие ниже примеры интересны не только в связи с приложениями к многочисленным задачам физики плазмы, но и для понимания некоторых общих вопросов структуры стационарных волн в диспергирующих средах.

Ионно-звуковые волны. В отсутствие столкновений электроны и ионы в плазме имеют, вообще говоря, разные температуры. В тех случаях, когда электронная температура T_e велика по сравнению с ионной температурой T_i, могут возникнуть колебания типа ионного звука со скоростью

$$c=\sqrt{T_e/M}, \tag{3.1}$$

где M—масса иона. Нелинейная теория этих колебаний может быть описана с помощью следующих уравнений [6, 7]:

$$\begin{aligned}&\rho_t+(\rho v)_x=0, \quad v_t+vv_x=-(e/M)\,\Phi_x,\\ &\Phi_{xx}=-4\pi e[\rho-\rho_e\exp(e\Phi/T_e)].\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь первое уравнение есть уравнение непрерывности для плотности ионов ρ. Второе—уравнение движения для скорости ионов v в потенциале Φ. Третье—уравнение Пуассона, определяющее потенциал. Линеаризация этой системы приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega=kc/\sqrt{1+k^2r_d^2}, \tag{3.3}$$

в котором скорость ионного звука определена выражением (3.1), а r_d—дебаевский радиус:

$$r_d=\sqrt{T_e/(4\pi\rho_0 e^2)}. \tag{3.4}$$

Если рассмотреть случай длинных волн ($kr_d \ll 1$), то закон дисперсии (3.3) принимает все тот же универсальный вид (2.10). Теперь роль характерной длины, определяющей дисперсию волн, играет дебаевский радиус (3.4). Интересно, однако, рассмотреть, какой вид имеют нелинейные волны при произвольных значениях дисперсии, т. е. для любых kr_d. Полагаем

$$\rho = \rho(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \Phi = \Phi(\xi), \quad \xi = x - ut. \tag{3.5}$$

Тогда система (3.2) принимает вид

$$\rho = \frac{u\rho_0}{u-v} \quad (v \leqslant u), \quad (u-v)^2 = u^2 - 2e\Phi/M, \tag{3.6}$$

$$\Phi'' = -4\pi e\left[\frac{u}{(u^2-2e\Phi/M)^{1/2}} - \exp\frac{e\Phi}{M}\right]. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) показывает, что задача снова приводится к колебаниям частицы в некоторой потенциальной яме.

Запишем интеграл энергии E, полагая для простоты $c = r_d = 1$. Имеем из (3.6) и (3.7)

$$2E = (u-v)^2(v')^2 + 1 + uv - \exp(uv - {}^1/_2 v^2). \tag{3.8}$$

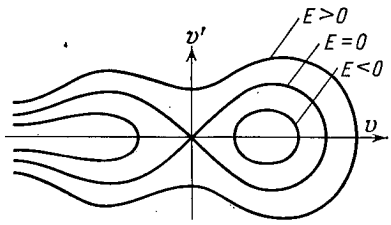


Рис. 8.8. Фазовая плоскость ионно-звуковых колебаний при $u = \text{const}$

Особенностью нелинейных стационарных волн является зависимость их фазового портрета от двух независимых параметров — E и u. Поэтому рассмотрим два разных семейства фазовых кривых на плоскости (v', v).

На рис. 8.8 изображены фазовые кривые при различных значениях E и $u = \text{const}$. Решению с $E = 0$ соответствует солитон. Его амплитуду v_{max} можно найти из уравнения (3.8), положив в нем $v' = 0$, $E = 0$:

$$1 + uv_{max} = \exp(uv_{max} - {}^1/_2 v_{max}^2). \tag{3.9}$$

Это уравнение удобно преобразовать, выразив v_{max} через Φ_{max} с помощью второго уравнения в (3.6). Простые преобразования дают [6]:

$$u^2 = {}^1/_2 c^2 \frac{[\exp(e\Phi_{max}/T_e) - 1]^2}{\exp(e\Phi_{max}/T_e) - 1 - e\Phi_{max}/T_e}. \tag{3.10}$$

При малых амплитудах волн $e\Phi_{max} \ll T_e$ и из выражения (3.10) следует $u = c$. Поскольку $u = \omega/k$, то это означает просто волну ионного звука. Наша цель, однако, связана не с этим результатом, и мы сейчас поясним, зачем понадобилось записывать столь громоздкое выражение, как (3.10).

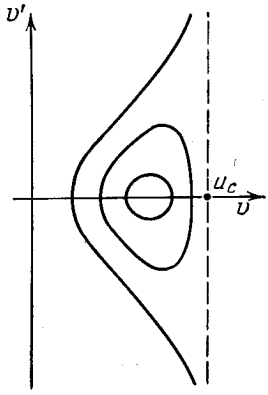


Рис. 8.9. Фазовая плоскость ионно-звуковых колебаний при $E = \text{const}$

Критическая скорость. Рассмотрим семейство фазовых траекторий при $E = \text{const}$ и различных значениях u. Они представлены на рис. 8.9. Из него видно, что для тех значений E, для которых существует периодическое решение, имеется некоторое критическое значение скорости u_c такое, что при $u = u_c$ финитная траектория исчезает и v' достигает бесконечного значения.

Это, как мы уже знаем, соответствует опрокидывающейся волне. Чтобы понять, что здесь происходит, как раз и необходимо выражение (3.10).

С ростом скорости волны u одновременно происходит и рост амплитуды скорости v_{max} (см. (3.9)). Это, в свою очередь, приводит к увеличению амплитуды потенциала $e\Phi_{max}$. В системе координат, связанной с волной, поток ионов из $x=\infty$ набегает на потенциальный барьер, образованный волной, со скоростью u. Их энергия $Mu^2/2$ при не слишком больших амплитудах поля превышает высоту потенциального барьера $e\Phi_{max}$. В результате ионы, несколько задержавшись, переваливают через него.

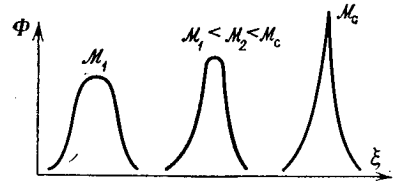


Рис. 8.10. Различные формы солитонов в зависимости от числа Маха

Однако с ростом амплитуды волны происходит рост потенциального барьера. В итоге, начиная с некоторой скорости, набегающие частицы уже не в состоянии перевалить через потенциальный барьер. С этого момента частицы накапливаются у барьера, и их плотность стремится к бесконечности. Последнее вытекает сразу из первого уравнения (3.6), в котором при $u=u_c$ возникает особенность, когда с течением времени $v\to v_{max}=u_c$. Очевидно, что это происходит при

$$e\Phi_{max}={}^1/_2 Mu_c^2. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и полагая в левой части $u=u_c$, получаем уравнение для определения u_c. Оно дает

$$u_c\approx 1{,}6, \qquad e\Phi_{max}/T\approx 1{,}3. \tag{3.12}$$

Этим значениям соответствует критическое значение числа Маха

$$\mathcal{M}_c=u_c/c\approx 1{,}6.$$

Как видно из рис. 8.9, с ростом числа Маха $\mathcal{M}$ амплитуда волны нарастает и ее профиль заостряется. Поэтому, например, форма солитона модифицируется так, как это показано на рис. 8.10.

Существование опрокидывания является следствием сильной нелинейности уравнений. Мы видим, что дисперсионные эффекты не всегда могут остановить процесс укручения волны. В связи с этим возникает возможность появления промежуточного случая умеренной нелинейности

$$\mathcal{M}-1=u/c-1\equiv\alpha/c\ll 1. \tag{3.13}$$

Именно в этом случае волны ионного звука, распространяющиеся в одном направлении, описываются уравнением КдВ. Неравенство (3.13) означает также, что

$$\alpha\ll u_c. \tag{3.14}$$

Важное значение неравенства (3.14) в том, что амплитуда волны α теперь очень мала по сравнению с амплитудой опрокидывающейся волны u_c. Именно поэтому уравнение КдВ, возникающее при условии (3.13), соответствует случаю, далекому от опрокидывания.

Магнитозвуковые волны. Еще один пример, близкий к предыдущему, показывает, что конкурентная игра нелинейности и дисперсии при образовании стационарных волн и существование критических чисел Маха являются достаточно характерной физической ситуацией. Этот пример относится к распространению волн поперек магнитного поля в разреженной плазме. Приведем сразу уравнение для магнитного поля B волны [6,7]:

$$-\frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{dB}{d\xi}\left(\frac{B^2-B_0^2}{2B_0^2\mathcal{M}^2}-1\right)\right]\left(\frac{B^2-B_0^2}{2B_0^2\mathcal{M}^2}-1\right)=B\left(\frac{B^2-B_0^2}{2B_0^2\mathcal{M}^2}-1\right)+B_0. \tag{3.15}$$

Здесь c — скорость света, ω_0 — частота плазменных колебаний электронов:

$$\omega_0^2 = 4\pi\rho_0 e_0^2/m,$$

B_0 — константа интегрирования, имеющая смысл величины магнитного поля при отсутствии возмущения, т. е. в том случае, когда плотность плазмы ρ равна ρ_0, $\mathscr{M}$ — магнитное число Маха:

$$\mathscr{M} = u/c_A, \tag{3.16}$$

где c_A — альвеновская скорость

$$c_A^2 = B_0^2/(4\pi\rho_0\mathscr{M}).$$

Однократное интегрирование уравнения (3.15) приводит к интегралу энергии

$$E = \frac{c^2}{\omega_0^2} B'^2 \left(\frac{B^2 - B_0^2}{2B_0^2\mathscr{M}^2} - 1\right)^2 + \frac{(B^2 - B_0^2)^2}{4B_0^2\mathscr{M}^2} - (B - B_0)^2. \tag{3.17}$$

Структура траекторий на фазовой плоскости (B', B) приведена на рис. 8.11. Значению $B = B_0$ соответствует гиперболическая точка. Через нее проходит сепаратриса при $E = 0$. Эллиптическая точка B_1 определяется согласно (3.17) уравнением

$$B_1 = {}^1/_2 B_0 (\sqrt{1 + 8\mathscr{M}^2} - 1). \tag{3.18}$$

Очевидно, что физически разумные решения получаются при условии $B_1 > B_0$, т. е. при $\mathscr{M} > 1$.

Уединенной волне (солитону) соответствует решение на сепаратрисе. Для него из (3.17) при $E = 0$ следует связь между амплитудой солитона $B_{\max}$ и скоростью волны u, входящей в число Маха:

$$\mathscr{M} = {}^1/_2 (1 + B_{\max}/B_0). \tag{3.19}$$

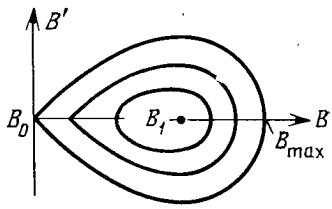


Рис. 8.11. Фазовая плоскость магнитозвуковых колебаний

Остановимся на этом уравнении подробнее. Из рис. 8.11 видно, что амплитуда волны определяется степенью превышения амплитуды поля $B_{\max}$ над невозмущенным значением поля B_0. Другими словами, переход $B_{\max} \to B_0$ соответствует переходу к волнам малой амплитуды. Совершая его и учитывая определение (3.16), получаем из (3.19)

$$u/c_A = \omega/kc_A = 1. \tag{3.20}$$

Это — линейный закон дисперсии магнитного звука. В общем случае выражение (3.19) играет роль нелинейного закона дисперсии.

Решение солитонного типа исчезает при достаточно больших значениях u и B. Для определения их заметим, что уравнение (3.17) имеет особенность при значениях B и $\mathscr{M}$, обращающих в нуль скобку возле B'. Это означает, что

$$B_{\max}^2/B_0^2 = 1 + \mathscr{M}^2. \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.21) выражение (3.19), находим критические поле и скорость:

$$B_{\max} = 3B_0, \qquad \mathscr{M}_c = 2. \tag{3.22}$$

Если

$$u > u_c = 2c_A,$$

то возникает опрокидывание волны, которое полностью аналогично опрокидыванию в предыдущем примере.

При $u = u_c$ ионы на гребне волны «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При еще больших амплитудах ионы просто отражались бы от потенциального барьера, образуя многопотоковое движе-

ние, состоящее из взаимопроникающих потоков набегающих на горб волны ионов и отражающихся от него ионов.

Уравнение синус-Гордона. Рассмотрим еще один пример нелинейного уравнения, который в дальнейшем нам окажется полезным. Это уравнение является частным случаем уравнения (2.34) при

$$F(y) = -\sin y$$

и называется уравнением синус-Гордона. Оно имеет вид

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - \sin y \tag{3.23}$$

и попадает в класс точно интегрируемых моделей, которые будут обсуждаться позже. Примечательной особенностью уравнения (3.23) является удивительное разнообразие различных физических задач, в которых оно появляется в качестве некоторой приближенной модели описания (см., например, [12]).

Мы могли бы с ним встретиться в § 7 гл. 1, если бы совершили элементарные преобразования в гамильтониане для атомных цепочек (1.7.6):

$$H = {}^1/_2 \sum_k \dot{y}_k^2 + {}^1/_2 \sum_k [\Phi_k(y_{k+1} - y_k) - \Phi(y_k - y_{k-1})] + \sum_k V(y_k), \tag{3.24}$$

где положено для удобства $m = 1$. Упростим задачу, считая, как это зачастую бывает, что

$$\Phi(\xi) = \xi^2.$$

Тогда уравнение движения k-го атома имеет вид

$$\ddot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} = [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] - V'(y_k). \tag{3.25}$$

Перейдем в (3.25) к непрерывному пределу

$$y_k \to y(x, t); \quad \dot{y}_k \to y_t; \quad y_k - y_{k-1} \to y_x,$$

где x—безразмерная координата атома. Теперь (3.25) переходит в точности в нелинейное уравнение Клейна—Гордона

$$y_{tt} = y_{xx} - V'(y),$$

которое при $V = -\cos y$ дает выражение (3.23). Таким образом, (3.23) описывает уравнение движения дислокации в определенном потенциальном поле (ком. 4).

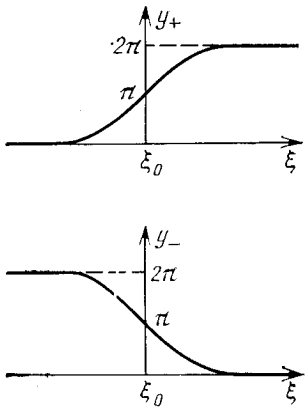


Рис. 8.12. «Кинк» (y_+) и «антикинк» (y_-)

Приведем решение уравнения (3.23) в виде стационарной волны $y = y(x - ut)$. Имеем вместо (3.23)

$$(u^2 - c^2) y'' + \sin y = 0. \tag{3.26}$$

Интеграл энергии удобно представить в виде

$$E = {}^1/_2 (u^2 - c^2)(y')^2 + 2\sin^2 \frac{y}{2}. \tag{3.27}$$

Мы пришли к уравнениям нелинейного маятника, рассмотренным в § 3 гл. 1. Заметим лишь, что при $u > c$ колебания маятника происходят относительно точки $y = 0$, а при $u < c$—относительно точки $y = \pi$.

Приведем решение, соответствующее солитону. Оно получается при $E = 0$:

$$\begin{aligned} y_\pm &= \pi + 4\operatorname{arctg}\exp\left[\pm\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{u^2 - c^2}}\right] \quad (u > c), \\ y_\pm &= 4\operatorname{arctg}\exp\left[\pm\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}\right] \quad (u < c), \end{aligned} \tag{3.28}$$

где ξ_0—некоторое начальное условие для величины $\xi = x - ut$. Решения при

$u < c$ приведены на рис. 8.12. Эти решения называют «кинк» (y_+) и «антикинк» (y_-) (или в теории джозефсоновских контактов — «флюксон» и «антифлюксон»).

Соответственно для скорости атомов, например при $u < c$, имеем

$$\frac{\partial y_\pm}{\partial t} = cy'_\pm = \pm \frac{2uc}{\sqrt{c^2-u^2}} \operatorname{sch} \frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{c^2-u^2}}, \tag{3.29}$$

т. е. солитон (y'_+) и антисолитон ($y'_- = -y'_+$). Это выражение эквивалентно формуле (1.3.7).

§ 4. Бесстолкновительные ударные волны

Идея бесстолкновительных ударных волн появилась в теории разреженной плазмы, и сейчас они стали одним из широко распространенных видов нелинейного движения в различных физических средах. Образование ударной волны обусловлено, во-первых, существованием механизма, ограничивающего опрокидывание волны, и, во-вторых, скачком некоторых физических параметров при переходе через фронт ударной волны. В обычной газодинамике оба этих фактора возникают по одной и той же причине: из-за столкновений или из-за вызываемой ими диссипации (вязкости, теплопроводности и т. д.).

В разреженной плазме длина свободного пробега очень велика. Более того, причины, сдерживающие укручение, и причины, приводящие к диссипации, могут резко отличаться друг от друга. В этом и заключается новая особенность бесстолкновительных ударных волн, которая создает совсем другие, чем в газодинамике, условия, определяющие ширину фронта волны и его структуру. Поэтому слово «бесстолкновительная» не означает отсутствие диссипации вообще, а лишь то, что она обусловлена необычными столкновениями. В результате может возникнуть необычная для газодинамики ситуация, в которой специфический диссипативный механизм играет лишь символическую роль, уступая ламинарной теории приоритет в определении главных процессов формирования волны (ком. 5).

Формирование волны. Итак, нам нужны два определяющих процесса. Причиной, останавливающей укручение фронта волны, может быть дисперсия. Для этого необходимо, чтобы скорость волны лежала в некотором интервале

$$c < u < u_c. \tag{4.1}$$

Можно для упрощения рассмотреть случай слабых надкритичностей:

$$u - c \ll u_c, \tag{4.2}$$

и область слабой дисперсии. В этом случае, как мы уже видели, звуковой тип волн может быть описан с помощью уравнения КдВ. При малых диссипациях достаточно безразлично, как написать соответствующий ей член. Запишем его в виде обычного вязкого члена, хотя коэффициент диссипации ν может определяться совсем не столкновениями.

Эти простые рассуждения приводят нас к уравнению, являющемуся комбинацией КдВ-уравнения и уравнения Бюргерса:

$$v_t + cv_x + vv_x + \beta v_{xxx} = \nu v_{xx}. \tag{4.3}$$

Чуть ниже мы покажем более детально, как возникает подобное (4.3) уравнение. Найдем его решение в виде стационарной волны

$$v = v(x-ut) \equiv v(\xi). \tag{4.4}$$

Имеем после подстановки (4.4) в (4.3):

$$(c-u)v' + {}^1/_2(v^2)' + \beta v''' = \nu v''. \tag{4.5}$$

Для ударной волны следует положить граничное условие

$$v = v' = v'' = 0 \qquad (x \to \infty). \tag{4.6}$$

Тогда интегрирование (4.5) дает

$$\beta v'' - \nu v' + {}^1/_2 v^2 - \alpha v = 0; \qquad \alpha = u - c. \tag{4.7}$$

Если считать, что переменная ξ аналогична времени, то уравнение (4.7) описывает нелинейный осциллятор с трением, движущийся в потенциале

$$V(v) = {}^1/_6 v^3 - {}^1/_2 \alpha v^2 \tag{4.8}$$

(рис. 8.13, 8.14). Правая часть траектории на фазовой плоскости почти близка к солитону

$$v = 3\alpha \operatorname{sch}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}}(x - x_0 - ut)\right], \tag{4.9}$$

движущемуся направо со скоростью u и удовлетворяющему условиям (4.6). Левая часть представляет собой затухающий осциллирующий шлейф (при

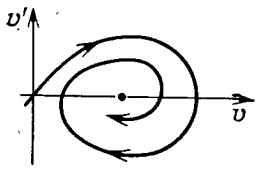


Рис. 8.13. Фазовая плоскость стационарной волны

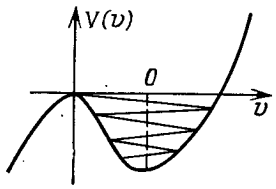


Рис. 8.14. Эффективный потенциал для стационарной волны

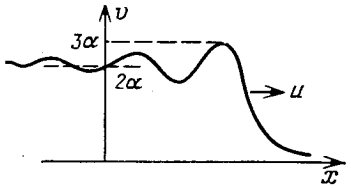


Рис. 8.15. Структура бесстолкновительной ударной волны

малых ν) и соответствует слабо затухающим колебаниям в потенциальной яме (4.8) (рис. 8.15).

Структура фронта волны. Предельное значение

$$v_0 = v \qquad (x \to -\infty),$$

очевидно, соответствует положению частицы на дне ямы $V(v)$. Из (4.8) это дает

$$v_0 = 2\alpha. \tag{4.10}$$

Из (4.9) следует, что

$$v_{\max} = 3\alpha. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.10) дает величину скачка скорости в ударной волне:

$$\Delta v = v(-\infty) - v(\infty) = v_0 = 2\alpha. \tag{4.12}$$

Отсюда следует также связь между скоростью ударной волны и величиной скачка:

$$u = c + {}^1/_2 \Delta v. \tag{4.13}$$

Тонкая структура ударной волны зависит от величины диссипации ν. Ее проще всего исследовать, линеаризуя уравнение (4.7) в окрестности точки v_0. Имеем для отклонения от равновесия $\delta v = v - v_0$:

$$\beta \delta v'' - \nu \delta v' + \alpha \delta v = 0.$$

Характеристические показатели равны

$$q = \frac{\nu}{2\beta} \pm \left(\frac{\nu^2}{4\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что при

$$\nu \ll \nu_c \equiv 2(\beta\alpha)^{1/2} = (2\beta\,\Delta v)^{1/2} \tag{4.14}$$

асимптотический вид профиля волны следующий:

$$v = v_0 + \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\nu}{2\beta}\xi\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\xi\right). \tag{4.15}$$

Ширина фронта волны равна

$$\Delta x = \beta/\nu. \tag{4.16}$$

Это выражение является предельным, т. е. оно имеет место на конце шлейфа ударной волны. В непосредственной близости от фронта ударной волны картина осцилляций выглядит иначе. Это связано с тем, что период осцилляций решения $v(\xi)$ вблизи сепаратрисы логарифмически расходится (см. § 3 гл. 1).

Определим характерное расстояние между двумя последовательными максимумами вблизи фронта волны. Из первых двух членов уравнения (4.7) имеем оценку для изменения энергии E вследствие затухания:

$$\delta E \sim \frac{\nu}{\beta} E\,\delta\xi, \tag{4.17}$$

где $\delta\xi$ — длина, на которой рассматривается затухание. Она имеет порядок периода малых колебаний в яме $V(v)$. Из первого и последнего членов уравнения (4.7) находим

$$\delta\xi \sim \lambda \sim \sqrt{\beta/\alpha}. \tag{4.18}$$

Отсюда после подстановки в (4.17) получаем относительное изменение энергии между двумя последовательными горбами ударной волны

$$\delta E/E \sim \nu/\sqrt{\alpha\beta}. \tag{4.19}$$

Расстояние между горбами определяет характерный период осцилляций тонкой структуры ударной волны. Он равен

$$\Delta x_0 \sim \lambda \ln\frac{E}{\delta E}. \tag{4.20}$$

Подставляя сюда (4.18) и (4.19), получаем

$$\Delta x_0 \sim \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \ln\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\nu} = \sqrt{\frac{\beta}{\mathscr{M}-1}} \ln\frac{\sqrt{\beta(\mathscr{M}-1)}}{\nu}. \tag{4.21}$$

Итак, профиль изменения скорости v внутри фронта теперь представляется следующим образом. Сначала в невозмущенной среде появляется солитон, на гребне которого v достигает значения $v_{\max}$. Из-за наличия необратимой диссипации (причины которой мы обсудим ниже) состояние среды после прохождения такой волны будет отличаться от исходного. На расстоянии $\sim \Delta x_0$ вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций во фронте ударной волны и усреднить значение v по расстояниям, превышающим Δx_0, то можно считать Δx_0 эффективной толщиной фронта ударной волны. Волна связывает два состояния среды: невозмущенное (до прихода первого солитона) и возмущенное состояния, промодулированные колебаниями. В этой части волны вклад диссипации очень незначителен, так как она входит под знак логарифма.

Далее, по мере затухания осцилляций позади фронта волны, они становятся эквидистантными и близкими к периодическим. Это выражается формулой (4.15).

Магнитозвуковая ударная волна. Посмотрим, как изложенные соображения выглядят в некоторых конкретных случаях. Пусть ударная волна

с толщиной Δx_0 распространяется в разреженной плазме перпендикулярно к магнитному полю $\boldsymbol{B}$ (рис. 8.16) и

$$\Delta x_0 \ll l_c, \tag{4.22}$$

где l_c — длина свободного пробега частиц. Более быстрые частицы со скоростью $\overline{v} > v$ из области, нагретой ударной волной (слева), казалось бы, могли свободно пройти в сторону невозмущенной плазмы. Этот перенос быстрых частиц размыл бы переходную область до толщины l_c.

В действительности, как мы уже знаем, размытие фронта не происходит, и одной из причин этого является магнитное поле, которое заворачивает ионы и электроны на расстояниях порядка их ларморовского радиуса r_H.

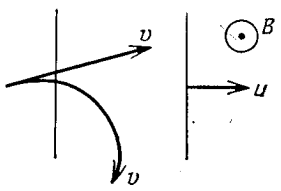


Рис. 8.16. Фронт поперечной ударной магнитозвуковой волны

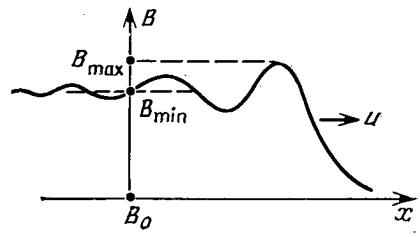


Рис. 8.17. Магнитозвуковая ударная волна

Следует поэтому ожидать, что $\Delta x_0 \sim r_H$. Учет конечной величины r_H приводит к дисперсионным эффектам, сдерживающим размытие и опрокидывание волны.

Одновременно с этим замечанием следует установить причины возможной диссипации, поскольку столкновения из-за неравенства (4.22) не могут сыграть нужную роль. Интенсивные колебания плазмы позади фронта волны приводят к образованию турбулентных пульсаций. Они обусловлены коллективными взаимодействиями в плазме, и далее мы увидим, как это происходит. Процесс возникновения турбулентности и связанной с ней диссипацией аналогичен появлению стохастичности, рассмотренному в предыдущих главах. Одним из других механизмов диссипации может быть также сила трения ионов об электроны. Для магнитозвуковых волн небольшой амплитуды имеем вместо (3.15) [7, 9]:

$$-\frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{d^2B}{d\xi^2} = B_0 - B + B\frac{B^2-B_0^2}{2B_0^2\mathscr{M}^2} + \frac{c^2}{\omega_0^2}\frac{\nu}{u}\frac{dB}{d\xi}. \tag{4.23}$$

Эффективная форма потенциальной ямы теперь определяется выражением

$$V(B) = {}^1/_2(B-B_0)^2\left[\frac{(B+B_0)^2}{4B_0^2\mathscr{M}^2} - 1\right]. \tag{4.24}$$

Из него находится минимальное значение

$$B_{\min} = B(-\infty) = -{}^1/_2 B_0\left(1 - \sqrt{8\mathscr{M}^2+1}\right), \tag{4.25}$$

которое при $\mathscr{M} = 1$ равно просто B_0.

Профиль изменения B внутри волны изображен на рис. 8.17. Он аналогичен виду волны на рис. 8.15. Из (4.24) следует, что

$$B_{\max} = B_0(2\mathscr{M} - 1). \tag{4.26}$$

Расстояние между двумя последовательными максимумами вблизи фронта волны находится так же, как и в (4.21). Оно равно

$$\Delta x_0 \sim \frac{c}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{\mathscr{M}-1}}\ln\frac{\omega_0 u}{cv\sqrt{\mathscr{M}-1}}. \tag{4.27}$$

Поэтому все остальные свойства магнитозвуковой ударной волны совпадают с описанными выше для уравнения (4.7).

Образование «бора». Рассмотренные случаи ударных волн относились к достаточно малым амплитудам. Мы, однако, уже видели в предыдущем параграфе, что существуют критические скорости волн u_c, выше которых дисперсия не может сдержать процесс укручения. Если, например, амплитуда магнитозвуковой волны $B_{\max}$ приближается к значению $3B_0$, ламинарная структура движения нарушается. Происходит опрокидывание волны. В некоторой части волны ионы, первоначально движущиеся сзади, настигают и обгоняют передние частицы. Профиль скорости становится многозначным (рис. 8.18).

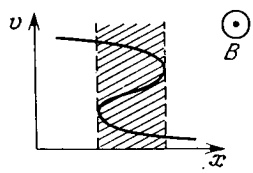


Рис. 8.18. Образование многопотокового движения при больших числах Маха

Аналогичное явление хорошо изучено в теории волны конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Здесь существуют нелинейные установившиеся движения типа уединенных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие опрокидывания. Отсутствие какой-либо строгой теории в этом случае оставляет лишь возможность качественного анализа. Основной вопрос заключается в том, будет ли после опрокидывания движение среды стремиться к какому-либо установившемуся течению или же переходная область (заштрихованная часть на рис. 8.18) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычном газе без столкновений. В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое «прыжок воды» или «бор». Бор представляет собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два плоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения.

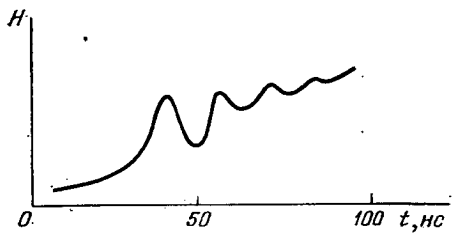


Рис. 8.19. Профиль бесстолкновительной ударной волны, генерируемой с помощью метода «магнитного поршня» (при быстром нарастании магнитного поля) [17]

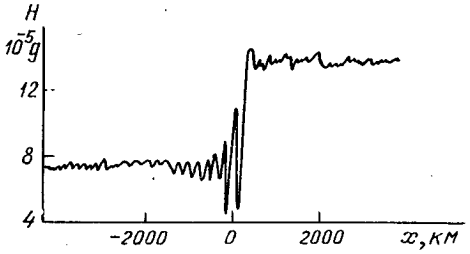


Рис. 8.20. Профиль магнитного поля во фронте косой межпланетной ударной волны с числом Маха $\mathcal{M}=2{,}5$ по измерениям на борту спутника ISEE [18]

В известном смысле бор представляет собой аналог ударной волны. При обрушении волны часть ее смешивается с отстающим участком фронта волны. Можно ожидать, что при определенной скорости волны возникает стационарная ширина переходного слоя. В плазме роль силы тяжести, приводящей к обрушению волны, играет магнитное поле, заворачивающее поток ионов. Ширину переходной области после опрокидывания можно оценить как радиус кривизны ионов в магнитном поле. Скорость потока ионов

$$v \gtrsim u_c = 2v_A.$$

Поэтому

$$\Delta x_0 \sim v/\omega_H \sim v_A/\omega_H = c/\omega_{pi},$$

где $\omega_{pi} = 4\pi n_0 e^2/M$ — плазменная частота ионов.

Однако многоскоростное течение, перпендикулярное магнитному полю, возникающее после опрокидывания, должно быть неустойчивым. Действительно, если для простоты рассмотреть двухпучковое распределение ионов при разности скоростей пучков, превышающей тепловую скорость, то возникает неустойчивость относительно раскачки колебаний с волновым вектором, почти параллельным скорости пучка. В боре также имеет место неустойчивость сходной природы на встречных потоках. Это обычная неустойчивость тангенциального разрыва, возникающая при соприкосновении падающей струи с поверхностью покоившейся жидкости. В результате описанной неустойчивости среда (плазма или жидкость) турбулизуется. Такая турбулентность приводит к аномальной вязкости.

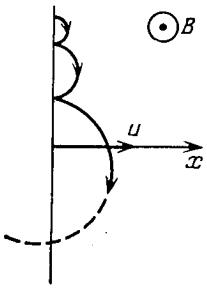


Рис. 8.21. Ускорение заряженных частиц на фронте волны

Примеры бесстолкновительных ударных волн, соответствующие описанной модели, хорошо иллюстрируются лабораторными экспериментами (рис. 8.19) и измерениями ударных волн в солнечном ветре (рис. 8.20).

Ускорение ионов на фронте волны. При движении ударной волны ионы (или электроны), находящиеся непосредственно перед фронтом ударной волны, движутся следующим образом. Они отражаются от фронта волны, заворачиваются магнитным полем, отскакивают снова и т. д. В результате возникает дрейф частиц вдоль поверхности фронта волны (рис. 8.21). При каждом отражении волна передает частицам часть своей энергии. В результате возникает ускорение частиц [7].

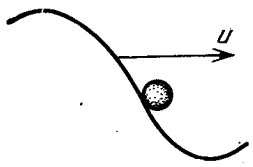


Рис. 8.22. Серфотрон

После многократных отражений скорость частиц может достигнуть очень больших значений. Лоренцева сила, действующая на частицу вблизи фронта волны, равна

$$F_B = \frac{e}{c} v_y B.$$

Эта сила направлена вдоль x. Сила, приводящая к отражению частиц от волны, равна

$$F_E = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -eE_x,$$

где φ — скалярный потенциал. Сила F_E создает отражающий барьер для частиц. Если в результате ускорения частиц сила F_B возрастет и превысит F_E, то частицы преодолеют потенциальный барьер и войдут внутрь фронта волны. Их дальнейшее ускорение прекратится. Описанная динамика частиц является также одним из возможных механизмов диссипации.

Так выглядит динамика частиц в нерелятивистском случае. В релятивистском случае величина F_B ограничена: $F_B < eB$. Поэтому при $E_x \geqslant B$ ускорение частиц продолжается неограниченно. Так выглядит идея ускорения частиц, получившая название «серфотрон» [19—22]. Название отражает аналогию между серфингом и частицей, удерживающейся на гребне волны (рис. 8.22). При этом частица совершает регулярные отскоки от фронта волны малой амплитуды.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 8

1. Особая роль дисперсии в формировании стационарных нелинейных волн впервые начала широко обсуждаться в теории бесстолкновительной плазмы [6, 7], где специфические особенности среды создали большое разнообразие физических условий [6—9]. Когда стало ясно, что многие нелинейные задачи из теории плазмы имеют аналоги

в гидродинамике, это дало толчок к созданию некоторых общих представлений и методов анализа нелинейных сред.

2. Уравнение КдВ появилось в конце прошлого века для описания волн на «мелкой» воде. В дальнейшем возникли другие физические задачи, приводящие также к уравнению КдВ (колебания плазмы в магнитном поле, колебания ангармонической решетки и др. [5]). С ним связано одно из важнейших достижений нелинейной теории — построение метода полного интегрирования задачи. Мы обсудим его несколько позже.

3. Действительно, при одномерном движении жидкости в канале глубины l влиянием глубины можно пренебречь, если длины волн возмущения поверхности жидкости малы по сравнению с l, т. е. $kl \gg 1$. В этом случае говорят о «глубокой» воде. Противоположный случай $kl \ll 1$ называется «мелкой» водой. Дисперсионные эффекты начинают играть заметную роль уже при $kl \gtrsim 1$, а в случае «мелкой» воды их роль мала. Поэтому их можно учесть в виде следующего члена разложения по степеням kl. Продемонстрируем сказанное, используя явное выражение для закона дисперсии волн малой амплитуды в канале глубиной l. Оно имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \operatorname{th} kl,$$

где g — ускорение силы тяжести. При $kl \gg 1$ имеем

$$\omega = \sqrt{kg}.$$

Это закон дисперсии гравитационных волн. При $kl \ll 1$

$$\omega = k\sqrt{gl} = kc.$$

Мы получили обычный звук, скорость которого определяется глубиной канала. Учитывая следующий член разложения, находим

$$\omega = kc\,[1 - {}^1/_6\,(kl)^3].$$

Это дисперсионное соотношение совпадает с (2.10), если принять

$$\beta = {}^1/_6 cl^3.$$

Как мы увидим далее, аналогичная ситуация имеет место для магнитозвуковых волн. Аналогия настолько велика, что роль глубины канала l в точности играет магнитное поле B [11].

4. Укажем еще на некоторые широко распространенные области приложений уравнения синус-Гордона: распределенные джозефсоновские контакты (роль величины y играет разность фаз между макроскопическими квантовыми волновыми функциями двух сверхпроводников [3]), взаимодействие электромагнитного поля с двухуровневыми атомами в резонансной среде [14] (мы еще встретимся с этой задачей в специальном разделе), движение блоховских границ в магнитных кристаллах, задачи в теории элементарных частиц и др.

5. Теория бесстолкновительных ударных волн начала развиваться в работах Сагдеева [15, 7] (см. также [9]). В дальнейшем аналогичные идеи появились для электрозвуковых волн [16]. Сейчас существование бесстолкновительных ударных волн, подтвержденное рядом экспериментов в различных областях физики, представляется вполне естественным и «обычным» процессом. В лабораторной и межпланетной плазме наблюдались магнитозвуковые и ионно-звуковые ударные волны (см. обзор этих результатов в [9]).

Глава 9

ГАМИЛЬТОНОВСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛН

При описании динамики частиц в части I мы имели возможность убедиться в той значительной роли, которую играет гамильтоновская форма уравнений движения. Она не только создает возможность удобного развития различных приближенных методов, но и позволяет ввести некоторые «оптимальные» переменные действие — угол. Введение таких канонически сопряженных пар переменных также обусловлено гамильтоновскими уравнениями движения. Теперь необходимо найти эквивалентный способ

описания для нелинейных волновых уравнений. Задача эта является одновременно и сложной и неоднозначной. Причины этого, может быть, не так легко понять, но, по-видимому, не совсем трудно допустить. Действительно, переход от частиц к полям связан с предельным переходом от дискретных задач к непрерывным. Такой переход всегда нуждается в некотором доопределении, и, в зависимости от того, как это делать, можно получать ту или иную физическую задачу.

Несколько проще обстоит дело, если имеются какие-либо соображения, позволяющие сузить эффективное число степеней свободы в задаче. К числу таких упрощений могут относиться, например, периодические граничные условия, которые позволяют сделать эффективное число степеней свободы хоть и бесконечным, но счетным.

§ 1. Вариационные принципы

Вариационные принципы в динамике играют весьма значительную роль, не только отражая некоторую универсальную тенденцию эволюции системы, но и облегчая формальное исследование этой эволюции. Принцип Ферма, по-видимому, может служить одним из наиболее элементарных примеров. Он устанавливает факт кратчайшего пути распространения луча света и позволяет в сложных средах определить этот путь. В тех задачах механики, которые мы изучали до сих пор, мы использовали гамильтоновский формализм, который позволил нам с помощью переменных действие—угол провести достаточно эффективный анализ весьма сложных явлений.

В теории волновых процессов использование вариационных принципов значительно менее разработано и значительно более неоднозначно, чем в динамике частиц. Мы укажем на некоторые особенности, возникающие в этом новом виде задач.

Степени свободы. Поясним сказанное выше элементарным примером. Пусть $y(x, t)$ есть волновое поле, зависящее для простоты от одной координаты x. Пусть также уравнения движения для поля y могут быть представлены в некоторой простейшей форме:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\hat{Q}(x, t; y), \tag{1.1}$$

где $\hat{Q}$—оператор, который может содержать производные, интегралы и т. д. Разложим $y(x, t)$ в интеграл Фурье по координате:

$$\begin{aligned} y(x, t)&=\frac{1}{2\pi}\int y_k(t)\, e^{-ikx}\, dk,\\ y_k(t)&=\int y(x, t)\, e^{ikx}\, dx. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тогда уравнение движения (1.1) можно представить в виде бесконечномерной системы обыкновенных уравнений

$$\dot{y}_k=\hat{Q}_k(t, [y_k]), \tag{1.3}$$

где $[y_k]$ обозначает, вообще говоря, зависимость от всех амплитуд $y_{k'}$ с произвольными k' и $\hat{Q}_k$—фурье-образ от оператора $\hat{Q}$.

Систему (1.3) можно рассматривать как систему большого числа степеней свободы y_k, взаимодействующих друг с другом из-за нелинейности оператора $\hat{Q}$. Число этих степеней свободы—континуум.

Если, однако, имеется периодическое граничное условие

$$y(x, t)=y(x+l), \tag{1.4}$$

то вместо разложения (1.2) можно записать ряд Фурье:

$$y(x,\ t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{ink x};\qquad k=\frac{2\pi}{l}. \tag{1.5}$$

Уравнения движения (1.3) принимают вид

$$\dot{y}_n=\hat{Q}_n(t,\ [y_n]), \tag{1.6}$$

и задача упрощается.

Еще одна особенность нелинейных уравнений для полей требует обсуждения. Как правило, мы не знаем полный набор решений и зачастую даже не представляем, какого типа решения этот набор может содержать. Обычно нас выручают такие физические ситуации, в которых имеются два принципиальных вида упрощения: 1) задача допускает существенное сокращение числа степеней свободы, 2) эволюция поля во времени не слишком сильно изменяет эффективное число степеней свободы.

Мы увидим ниже, как реализуются эти два принципа. Заметим лишь, что мы уже встречались с подобным явлением уменьшения числа степеней свободы задачи при анализе спектра нелинейных колебаний в гл. 1 и спектра стационарных волн в гл. 8.

Лагранжиан. Наиболее простая форма вариационного принципа связана, по-видимому, с составлением лагранжиана для соответствующей нелинейной волновой задачи. Функция Лагранжа записывается в виде функционала

$$\mathscr{L}=\int dx \int dt\, L, \tag{1.7}$$

где плотность лагранжиана L зависит от полей и их производных:

$$L=L(y,\ y_t,\ y_x,\ y_{tt},\ y_{xt},\ y_{xx},\ \ldots).$$

Она выбирается таким образом, чтобы ее варьирование

$$\delta\mathscr{L}=0 \tag{1.8}$$

приводило к исходным уравнениям движения. Вариационное уравнение (1.8) является уравнением Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial y_t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y_x}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial L}{\partial y_{tt}}-\ldots \tag{1.9}$$

Рассмотрим в качестве примера нелинейное уравнение Клейна—Гордона (8.2.34). Для него

$$\mathscr{L}=\int dx \int dt\,\{{}^1\!/_2 y_t^2-{}^1\!/_2 c^2 y_x^2-V(y)\}. \tag{1.10}$$

Применение уравнений (1.9) к (1.10) дает

$$y_{tt}=c^2 y_{xx}-V'(y). \tag{1.11}$$

Если рассматриваются только периодические решения с периодом λ, то можно использовать вместо (1.7) иной вариационный принцип:

$$\mathscr{L}=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int dt\, L;\qquad L={}^1\!/_2 y_t^2-{}^1\!/_2 c^2 y_x^2-V(y), \tag{1.12}$$

который, как мы увидим далее, порождает решения с дискретным спектром. Выбор пределов по x в (1.12) не существен. Важно лишь, чтобы длина интервала интегрирования равнялась периоду λ. Этот факт можно отразить в более универсальном виде:

$$\mathscr{L}=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} dx \int dt\, L. \tag{1.13}$$

Выражение (1.13) справедливо, по крайней мере, во всех случаях, когда решение задачи периодично с некоторым произвольным периодом.

Метод Уизема. Мы привели некоторые формальные выражения и теперь покажем, каким образом они могут быть использованы. Одной из классических ситуаций является распространение волны в слабо неоднородной и, вообще говоря, медленно нестационарной среде. Будем считать, что если бы среда была однородной и стационарной, то в ней распространялась бы стационарная периодическая волна

$$y = y(x - ut). \tag{1.14}$$

Условие периодичности выражается в том, что функцию (1.14) можно представить в виде разложения

$$y(x,\ t) = \sum_n y_n e^{in\vartheta}, \tag{1.15}$$

где фаза ϑ равна

$$\vartheta = kx - \omega t \tag{1.16}$$

и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = ku = \frac{2\pi}{\lambda} u. \tag{1.17}$$

Если волну (1.14) возбудить в среде, параметры которой медленно изменяются в зависимости от x и t, то очевидно, что параметры решения (1.14) также претерпевают слабые изменения. Волна характеризуется тремя параметрами: энергией $H = E$ (см. формулу (8.2.39) для уравнения Клейна — Гордона), волновым числом k и частотой ω (или скоростью u). Основная идея метода Уизема [1, 2] заключается в том, чтобы сохранить те же три величины для характеристики волны в случае медленных изменений волнового пакета. Теперь, однако, эти величины являются функциями координаты и времени, и уравнения для их изменений надо получить путем соответствующей процедуры усреднения. Проще всего метод усреднения Уизема можно получить так. Обозначим

$$\overline{L} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx\, L, \tag{1.18}$$

т. е. $\overline{L}$ есть среднее значение плотности лагранжиана по периоду. Поэтому $\overline{L}$ не может зависеть от быстро изменяющейся фазы ϑ. Наоборот, $\overline{L}$ зависит только от медленно меняющихся переменных, т. е.

$$\overline{L} = \overline{L}(E,\ k,\ \omega). \tag{1.19}$$

С другой стороны, из (1.16) следует, что с точностью до малых параметров медленности

$$k = \vartheta_x, \qquad \omega = -\vartheta_t. \tag{1.20}$$

Подстановка (1.20) в (1.19) дает

$$\overline{L} = \overline{L}(E,\ \vartheta_x,\ -\vartheta_t). \tag{1.21}$$

Запишем теперь уравнения Эйлера для (1.21). Имеем

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial E} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \vartheta_x} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \vartheta_t} = 0. \tag{1.22}$$

Проанализируем каждое из уравнений (1.22) в отдельности. Прежде всего заметим, что в разложении (1.15) $y_n = y_n(E)$. Поэтому можно записать с помощью определений (1.20)

$$y_t = y_\vartheta \vartheta_t = -\omega y_\vartheta, \qquad y_x = y_\vartheta \vartheta_x = k y_\vartheta. \tag{1.23}$$

В однородном случае уравнения (1.23)—точные. В неоднородном случае от x и t зависит также интеграл энергии E. Эта зависимость, однако, слабая, согласно исходному предположению. Поэтому ею можно пренебречь. Таким образом, выражение (8.2.39) можно также записать в следующем виде:

$$^1/_2(k^2c^2-\omega^2)\,y_\vartheta^2-V=E. \tag{1.24}$$

Из него следует

$$\vartheta=\sqrt{k^2c^2-\omega^2}\int\frac{dy}{\sqrt{2(E+V(y))}}.$$

Отсюда получаем нелинейное дисперсионное соотношение, совершая интегрирование по полному периоду:

$$2\pi=\sqrt{k^2c^2-\omega^2}\oint\frac{dy}{\sqrt{2(E+V(y))}}. \tag{1.25}$$

Оно совпадает с (8.2.40). Кроме того, записывая с помощью (1.23) и (1.12) усредненный лагранжиан

$$\bar{L}=\frac{1}{2\pi}(\omega^2-k^2c^2)\int_0^{2\pi}y_\vartheta^2\,d\vartheta+E=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{k^2c^2-\omega^2}\int_0^{2\pi}dy\sqrt{2(E+V(y))}+E,$$

нетрудно убедиться, что первое уравнение в (1.22) приводит к выражению (1.25).

Это замечание является очень важным и содержит следующий физический вывод: нелинейное дисперсионное соотношение сохраняет свой вид при распространении периодической стационарной волны в слабонеоднородной и слабонестационарной среде.

Рассмотрим теперь второе вариационное уравнение в (1.22). Согласно (1.23), его можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\omega}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\bar{L}}{\partial k}=0 \tag{1.26}$$

Полученное уравнение приводит к закону сохранения волновой энергии. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к аналогии с классической механикой. Введем две величины

$$E_w=\omega\frac{\partial\bar{L}}{\partial\omega}-\bar{L},\qquad P_w=-\omega\frac{\partial\bar{L}}{\partial k}. \tag{1.27}$$

Тождественные преобразования дают с помощью соотношения (1.26):

$$\frac{\partial E_w}{\partial t}+\frac{\partial P_w}{\partial x}=0. \tag{1.28}$$

Отсюда видно, что E_w можно интерпретировать как плотность волновой энергии, а P_w—как плотность потока энергии.

К уравнениям (1.25) и (1.26) теории Уизема следует обавить еще условие совместности соотношений (1.20):

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0. \tag{1.29}$$

Все эти уравнения являются определенной формой метода ВКБ для нелинейных волн (ком. 1). Мы вернемся к ним несколько позже при рассмотрении нелинейной геометрической оптики.

Гамильтоновский формализм. Возможность использовать гамильтоновский формализм при анализе нелинейных волновых полей создает ряд удобств. Здесь снова следует повториться и заметить, что способ гамильтоновского представления нелинейных волновых задач далеко не однозначен и тесно

сопряжен с их характером. Но главное, это то, что мы априори должны знать, какого типа физические эффекты мы рассчитываем получить, и заложить эту информацию в построение метода. Это — общий мотив для всей нелинейной теории. По крайней мере так это выглядит к настоящему моменту, и поэтому мы рассмотрим здесь несколько вариантов гамильтоновского формализма.

Самый «прямолинейный» из них заключается в разложении всех величин в ряд или интеграл Фурье и представлении системы как совокупности бесконечного числа связанных степеней свободы.

Запишем снова разложение некоторой переменной $y(x, t)$ в ряд Фурье

$$y(x, t) = \sum_k y_k e^{ikx}, \tag{1.30}$$

где суммирование происходит по всем возможным значениям волновых чисел и $y_k = y_k(t)$. В случае непрерывного спектра фурье-разложение имеет вид

$$y(x, t) = \int dk\, y(k)\, e^{ikx}. \tag{1.31}$$

Далее мы всюду будем пользоваться формой записи (1.30), предполагая дискретность спектра. Противные случаи будут специально оговариваться.

Условие вещественности величины $y(x, t)$ означает, что

$$y_{-k} = y_k^*. \tag{1.32}$$

Простейший случай нелинейной среды может быть представлен как совокупность взаимодействующих осцилляторов. Гамильтониан ее записывается в виде

$$H = {}^1/_2 \sum_k (\dot{y}_k \dot{y}_{-k} + \omega_k^2 y_k y_{-k}) + \\ + {}^1/_3 \sum_{k_1, k_2, k_3} \overline{V}_{k_1 k_2 k_3} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) + \ldots, \tag{1.33}$$

где многоточие означает члены более высокого порядка по степеням y, а δ-функция понимается здесь как символ Кронекера $\delta(k) \equiv \delta_{k,0}$ и превращается в обычную δ-функцию при переходе к непрерывному случаю и замене суммирования интегрированием. Матричные элементы $\overline{V}_{k_1 k_2 k_3}$ симметричны относительно перестановки любой пары своих индексов.

Канонические уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} y_k = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-k}}, \quad \frac{d}{dt} \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_{-k}}. \tag{1.34}$$

Приведенная форма достаточно примитивна и неинтересна. Мы уже знаем из части I, что желательно отделять медленные и быстрые переменные. Именно в этом месте мы можем продемонстрировать, как наша конечная цель навязывает нам выбор переменных.

Допустим, что нас не интересуют пока нелинейные члены и мы желаем «убить» быстрые переменные в выражении

$$H_0 = {}^1/_2 \sum_k (\dot{y}_k \dot{y}_{-k} + \omega_k^2 y_k y_{-k}). \tag{1.35}$$

Тогда совершаем каноническую замену:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{I_k}{\omega_k} \right)^{1/2} e^{i\vartheta_k} + \left(\frac{I_{-k}}{\omega_{-k}} \right)^{1/2} e^{-i\vartheta_{-k}} \right], \tag{1.36}$$

причем

$$\omega_k = \omega_{-k} = \dot{\vartheta}_k.$$

Выражение (1.35) переходит в

$$H_0 = \sum_k \omega_k I_k, \tag{1.37}$$

т. е. величины (I_k, ϑ_k) играют роль переменных действие—угол. Подстановка формул (1.36) в (1.33) дает также выражение для нелинейной части гамильтониана:

$$H_1 = \sum_{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}}\right)^{1/2} \{V_{k_1k_2k_3} \exp[i(\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_2} + \vartheta_{k_3})] + \\ + V_{k_1, k_2, -k_3} \exp[i(\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_2} - \vartheta_{k_3})]\}, \quad (1.38)$$

где

$$V_{k_1k_2k_3} = \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} \overline{V}_{k_1k_2k_3}.$$

Теперь следует осмотреться и понять, какие возможности имеются в полученных нелинейных членах. Для этого рассмотрим, например, производную по времени от фазы

$$\psi_{k_1, k_2, -k_3} \equiv \vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_2} - \vartheta_{k_3}.$$

Имеем

$$\dot{\psi}_{k_1, k_2, -k_3} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}.$$

Если это выражение может обратиться в нуль (или стать очень малым), то возможен резонанс. В противном случае член при $V_{k_1, k_2, -k_3}$ в (1.38) является быстро осциллирующим. Тогда операцию «убивания» осциллирующего члена можно продолжить, совершая новую каноническую замену переменных [7].

Описанная последовательность действий, как мы увидим далее, хороша в тех случаях, когда линейное решение является достаточно хорошим приближением. Если же нас интересует возмущение какого-либо нелинейного решения, то приходится действовать иным способом.

Стационарные волны. Пусть, например, рассматривается нелинейная стационарная волна уравнения Клейна—Гордона (1.11). Положим в нем для определенности

$$V'(y) = \omega_0^2 y + \beta y^3.$$

Тогда

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - \omega_0^2 y - \beta y^3. \quad (1.39)$$

Пользуясь разложением (1.15), находим

$$\ddot{y}_n + (k^2c^2n^2 + \omega_0^2) y_n + \beta \sum_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n - n_1 - n_2 - n_3) = 0. \quad (1.40)$$

Для этого уравнения движения гамильтониан имеет вид

$$H = {}^1/_2 \sum_n [\dot{y}_n \dot{y}_{-n} + (k^2c^2n^2 + \omega_0^2) y_n y_{-n}] - \\ - {}^1/_3 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} y_{n_4} \delta(n_1 + n_2 + n_3 + n_4). \quad (1.41)$$

Нетрудно убедиться, что канонические уравнения движения

$$\frac{d\dot{y}_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_{-n}}, \qquad \frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-n}} \quad (1.42)$$

эквивалентны уравнениям (1.40).

Теперь нам необходимо сделать одно из наиболее важных замечаний. Мы могли бы исследовать уравнение (1.40) или (1.39), используя разложение в ряды, выделяя резонансные члены и т. п. При этом мы обращались бы с уравнением (1.40) как с системой большого числа независимых пере-

менных y_n. В действительности для стационарной волны, согласно (1.15)—(1.17),

$$\ddot{y}_n = -k^2u^2n^2y_n. \tag{1.43}$$

Поэтому уравнение (1.40) есть интегральное уравнение для определения y_n:

$$y_n(\omega^2n^2-\omega_0^2-k^2c^2n^2)=\beta\sum_{n_1,n_2,n_3} y_{n_1}y_{n_2}y_{n_3}\delta(n-n_1-n_2-n_3). \tag{1.44}$$

Здесь все y_n являются функцией только одной переменной E:

$$y_n = y_n(E),$$

и формула (1.44) отражает лишь специфическое правило сумм для эллиптических функций, через которые выражается решение $y(x-ut)$. Это сразу следует из эквивалентности (1.44) нелинейному дисперсионному соотношению (1.25).

Приведенный пример, конечно, не является специфическим только для нелинейных волн. Однако именно в этой области существует большое и далеко не всегда доступное для анализа множество различных типов решений. Этим объясняется необходимость привязки развиваемых методов к определенному типу задач.

Канонические переменные. В общем случае нелинейных сред введение канонических переменных и гамильтониана, зависящего от них, является далеко не всегда очевидной задачей. Мы приведем здесь несколько примеров для того, чтобы показать необычность этой процедуры.

Рассмотрим уравнения идеальной жидкости:

$$\begin{aligned}&\rho_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,\\&\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla\frac{\delta W}{\delta\rho}=0,\end{aligned} \tag{1.45}$$

где

$$W=\int d\rho\, w(\rho);$$

$w(\rho)$—удельная энергия жидкости.

Определим гамильтониан выражением

$$H=\tfrac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\,\rho\boldsymbol{v}^2+W \tag{1.46}$$

и введем три новые переменные μ_1, μ_2, φ соотношением

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mu_1}{\rho}\nabla\mu_2+\nabla\varphi. \tag{1.47}$$

Тогда можно убедиться в справедливости следующих уравнений [8]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mu_1}{\partial t}=-\operatorname{div}(\mu_1\boldsymbol{v})=\frac{\delta H}{\delta\mu_2},\\&\frac{\partial\mu_2}{\partial t}=-(\boldsymbol{v}\nabla)\mu_2=-\frac{\delta H}{\delta\mu_1},\\&\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+\frac{\mu_1}{\rho}(\boldsymbol{v}\nabla)\mu_2-\frac{\delta W}{\delta\rho}=-\frac{\delta H}{\delta\rho},\\&\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=\frac{\delta H}{\delta\varphi}.\end{aligned} \tag{1.48}$$

Отсюда следует, что система (1.45) эквивалентна каноническим уравнениям (1.48), и переменные (μ_1, μ_2), (ρ, ρ) являются двумя канонически сопряженными парами. Они называются переменными Клебша. При этом гамильтониан H выражает полную энергию жидкости.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение движения магнитного момента $\boldsymbol{M}$, который удовлетворяет уравнению Ландау—Лифшица:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -g\left[\boldsymbol{M} \times \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{M}}\right], \tag{1.49}$$

где g — гиромагнитное отношение и W — плотность энергии. Мы считаем, что

$$W = W(M_x, M_y, M_z). \tag{1.50}$$

Три уравнения (1.49) не являются независимыми, так как сохраняется величина момента:

$$\boldsymbol{M}^2 = M_0^2 = \text{const}. \tag{1.51}$$

Далее для простоты всюду положим $M_0 = 1$. Обозначим

$$M^{\pm} = M_x \pm iM_y. \tag{1.52}$$

Согласно (1.51)

$$M_z = \sqrt{1 - M_x^2 - M_y^2} = \sqrt{1 - M^+M^-}. \tag{1.53}$$

Переопределим энергию W следующим образом, подставляя в (1.50) формулы (1.52) и (1.53):

$$\tilde{W} = W(M^+, M^-, \sqrt{1 - M^+M^-}). \tag{1.54}$$

Теперь легко проверяется, что уравнения (1.49) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^+}{\partial t} &= i\sqrt{1 - M^+M^-}\,\frac{\partial \tilde{W}}{\partial M^-}, \\ \frac{\partial M^-}{\partial t} &= -i\sqrt{1 - M^+M^-}\,\frac{\partial \tilde{W}}{\partial M^+}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Формулы (1.55) можно рассматривать как модифицированную форму гамильтоновских уравнений движения с гамильтонианом $\tilde{W}$ в форме (1.54) и канонически сопряженной парой переменных (M^+, M^-). Модификация обусловлена множителем M_z. Его можно убрать двумя способами. Во-первых, можно ввести новое время τ:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^+M^-}}\,\frac{d}{dt}.$$

Такая замена неявно использует решение, и, хотя это не очень удобно, тем не менее вопрос о канонизации записи уравнений (1.49) решен.

Другой способ основан на использовании преобразований типа Гольдштейна—Примакова. Положим

$$M^+ = a(1 - {}^1/_4 |a|^2)^{1/2}, \qquad M^- = a^*(1 - {}^1/_4 |a|^2)^{1/2}. \tag{1.56}$$

Тогда убеждаемся с помощью (1.55), что

$$\dot{a} = i\frac{\partial W(a, a^*)}{\partial a}, \qquad \dot{a}^* = -i\frac{\partial W(a, a^*)}{\partial a^*}, \tag{1.57}$$

где $W(a, a^*)$ получается из $\tilde{W}$ заменой переменных (1.56).

Еще один вариант замены переменных демонстрирует ее неоднозначность. Положим

$$M^+ = \left[\frac{b}{b^*}(1 - |b|^4)\right]^{1/2}, \qquad M^- = \left[\frac{b^*}{b}(1 - |b|^4)\right]^{1/2},$$

и, кроме того, $\tau = -t/2$. Тогда

$$\dot{b} = i\frac{\partial W(b, b^*)}{\partial b^*}, \qquad \dot{b}^* = -i\frac{\partial W(b, b^*)}{\partial b}.$$

Сам по себе факт возможности введения различных канонических переменных не является удивительным. Однако зачастую даже построение любых канонически сопряженных пар является не простым делом. При этом само понятие гамильтоновских уравнений движения приходится видоизменять (ком. 2).

§ 2. Резонансное взаимодействие волн

Резонансное взаимодействие волн является первым нетривиальным процессом взаимодействия, который играет фундаментальную роль в нелинейной волновой теории. Он характеризуется двумя условиями. Пусть имеется совокупность взаимодействующих волн с волновыми числами $\boldsymbol{k}_i$ и частотами ω_i. Тогда при резонансе выполняются два равенства

$$\sum_i \boldsymbol{k}_i = 0, \qquad \sum_i \omega_i = 0, \tag{2.1}$$

где $\omega_i = \omega_i(k_i)$ — закон дисперсии i-й волны. Первое из уравнений (2.1) — закон сохранения импульса, второе — закон сохранения энергии фотонов или фононов, или каких-либо других квазичастиц, которые представляют волны.

Распадные и нераспадные спектры. Условия (2.1) напоминают резонансы между различными степенями свободы в динамике частиц. Однако главное

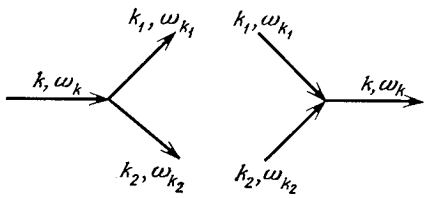


Рис. 9.1. Процессы распада и слияния трех волн

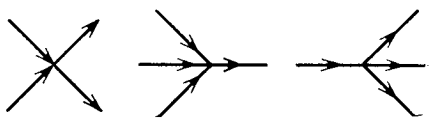


Рис. 9.2. Процессы рассеяния, слияния и распада четырех волн

отличие волновых резонансов от резонансов, рассматривавшихся ранее для частиц, заключается в особой роли, которую играет закон дисперсии $\omega_i(k_i)$. Остановимся на этом подробнее.

В рассматриваемых далее задачах основную роль будут играть частные случаи условий (2.1) для трехволновых и четырехволновых процессов. В первом из них

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 \tag{2.2}$$

происходит распад волны на две волны или слияние двух волн в одну (рис. 9.1). Аналогично (2.2) можно записать законы сохранения для различных четырехволновых процессов (рис. 9.2):

$$\begin{aligned} &\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, && \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4; \\ &\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, && \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.2) может быть рассмотрена как система уравнений относительно k_1, k_2, k. Она не всегда имеет решение. Это зависит от вида функции $\omega(k)$. В зависимости от того, существуют или нет решения уравнений (2.1), спектр волн $\omega(k)$ называется распадным или нераспадным. Спектр волн может быть нераспадным относительно трехволновых взаимодействий, но распадным относительно четырехволновых взаимодействий; нераспадным в одномерном случае, но распадным в двумерном случае и т. д. На рис. 9.3 приведены примеры нераспадных и распадных спектров в одномерном трехволновом процессе. Графический способ решения системы (2.2) в одномерном случае изображен на рис. 9.4.

Наиболее просто провести исследование волновых резонансов в случае волн малой амплитуды.

Уравнения для волн. Часто бывает удобно вместо непосредственного введения действия I_k, как это было сделано в формуле (1.36), ввести комплексные амплитуды a_k и a_k^*. Положим

$$y_k = (1/\sqrt{2\omega_k})(a_k + a_k^*), \qquad \dot{y}_k = i\sqrt{\omega_k/2}\,(a_k - a_k^*). \tag{2.4}$$

Общая форма гамильтониана с точностью до членов четвертого порядка по a имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k a_k a_k^* + \frac{1}{3}\sum_{k_1,\,k_2,\,k_3} V_{k_1k_2k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3), \tag{2.5}$$

а канонические уравнения движения приобретают форму

$$\dot{a}_k = i\frac{\partial H}{\partial a_k^*}, \qquad \dot{a}_k^* = -i\frac{\partial H}{\partial a_k}. \tag{2.6}$$

Учитывая, что

$$a_{-k} = a_k^*,$$

замечаем, что в нелинейной части гамильтониана есть разные слагаемые, например такое: $V_{k_1,\,-k_2,\,-k_3} a_{k_1} a_{k_2}^* a_{k_3}^* \delta(k_1 - k_2 - k_3)$.

Рассмотрим теперь гамильтониан трех волн (a_k, a_{k_1}, a_{k_2}), для которых могут быть выполнены распадные условия (2.2). Имеем

$$H = {}^1/_2(\omega_k a_k a_k^* + \omega_{k_1} a_{k_1} a_{k_1}^* + \omega_{k_2} a_{k_2} a_{k_2}^*) + \\ + (V_{k,\,-k_1,\,-k_2} a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^* + V_{k,\,-k_1,\,-k_2}^* a_k^* a_{k_1} a_{k_2}) \qquad (k = k_1 + k_2). \tag{2.7}$$

Уравнения движения (2.6) в данном случае приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= i\omega_k a_k + iV^* a_{k_1} a_{k_2}, \\ \dot{a}_{k_1} &= i\omega_{k_1} a_{k_1} - iV a_k a_{k_2}^*, \\ \dot{a}_{k_2} &= i\omega_{k_2} a_{k_2} - iV a_k a_{k_1}^* \qquad (V \equiv V_{k,\,-k_1,\,-k_2}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Это — уравнения волнового триплета. Можно исключить из него члены,

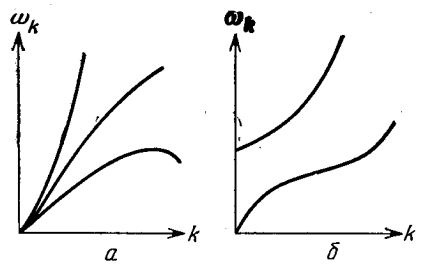


Рис. 9.3. Примеры нераспадных (*а*) и распадных (*б*) спектров в одномерном трехволновом процессе

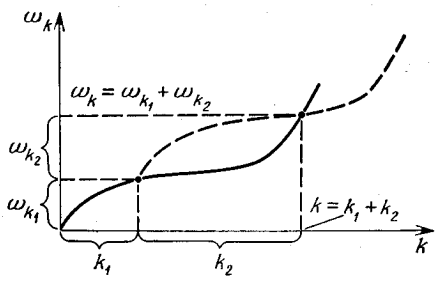


Рис. 9.4. Пример графического решения уравнения (2.2) в одномерном случае

содержащие частоту. Для этого достаточно сделать замену

$$a_k = e^{i\vartheta_k} c_k, \qquad \dot{\vartheta}_k = \omega_k, \tag{2.9}$$

после чего система (2.8) принимает совсем простой вид:

$$\dot{c}_k = i\bar{V} c_{k_1} c_{k_2}, \qquad \dot{c}_{k_1} = -i\bar{V}^* c_k c_{k_2}^*, \qquad \dot{c}_{k_2} = -iV^* c_k c_{k_1}^*, \tag{2.10}$$

где

$$\bar{V} = |V| e^{-i\psi}; \qquad \psi = \vartheta_k - \vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_2} + \psi_0. \tag{2.11}$$

Для нее выполняется условие резонанса

$$\omega-\omega_1-\omega_2=0, \quad \omega>\omega_1,\ \omega_2, \tag{2.12}$$

где индекс k для простоты опущен.

Эволюция волнового триплета. Еще одно переобозначение также окажется полезным (см. (1.36)):

$$\frac{I}{2\omega_k}=|c_k|^2=|a_k|^2, \quad \frac{I_1}{2\omega_{k_1}}=|c_{k_1}|^2=|a_{k_1}|^2, \quad \frac{I_2}{2\omega_{k_2}}=|c_{k_2}|^2=|a_{k_2}|^2. \tag{2.12a}$$

Уравнения для этих переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot I &= 2|V|(II_1I_2)^{1/2}\sin\psi \equiv V_0\sin\psi,\\ \dot I_1 &= -2|V|(II_1I_2)^{1/2}\sin\psi \equiv -V_0\sin\psi,\\ \dot I_2 &= -2|V|(II_1I_2)^{1/2}\sin\psi \equiv -V_0\sin\psi, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где обозначено

$$V_0=2|V|\left(\frac{II_1I_2}{\omega_k\omega_{k_1}\omega_{k_2}}\right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

Отсюда, в частности, следуют законы сохранения:

$$I+I_1=\text{const}\equiv m_1, \quad I+I_2=\text{const}\equiv m_2, \quad I_1-I_2=\text{const}\equiv m_3. \tag{2.15}$$

Они позволяют записать точное решение системы (2.13), которую следует дополнить уравнением для фазы ψ:

$$\dot\psi=\operatorname{ctg}\psi\cdot\frac{d}{dt}(II_1I_2)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) сразу интегрируется и дает

$$|a_ka_{k_1}a_{k_2}|\cos\vartheta=\left(\frac{II_1I_2}{2\omega_k\omega_{k_1}\omega_{k_2}}\right)^{1/2}\cos\vartheta=\text{const}\equiv Q. \tag{2.17}$$

Система (2.13) также легко интегрируется с помощью законов сохранения (2.15). В частности, имеем

$$I(t)=I^{(0)}+(I^{(1)}-I^{(0)})\,\mathrm{sn}^2\left(V_0\sqrt{I^{(2)}-I^{(1)}}\,t;\ \varkappa\right), \tag{2.18}$$

где $I^{(2)}>I^{(1)}>I^{(0)}$ — корни уравнения

$$I(I-m_1)(I-m_2)=Q^2. \tag{2.19}$$

В зависимости от вида начальных условий можно выделить два физически различных случая. Остановимся на них.

Без ограничения общности можно положить $Q=0$. Действительно, из (2.17) видно, что это означает лишь определенный выбор начальной фазы ($\vartheta=\pi/2$). Тогда при $Q=0$ корни уравнения (2.19) равны

$$I^{(0)}=0, \quad I^{(1)}=m_1, \quad I^{(2)}=m_2.$$

Рассмотрим теперь два варианта начальных условий.

В первом из них

$$I(0)=0, \quad I_1(0)=m_1\gg I_2(0)=m_2. \tag{2.20}$$

Соответствующие решения приведены на рис. 9.5. Чуть ниже мы поясним, что́ они обозначают. Здесь лишь заметим, что волновой триплет имеет сохраняющуюся полную энергию. Поэтому картина эволюции волн на рис. 9.5 указывает на характер периодической перекачки энергии между волнами.

Во втором варианте начального условия

$$I_2(0)=0, \quad I(0)=m_2 \gg I_1(0)=m_3. \tag{2.21}$$

Решения для этого случая приведены на рис. 9.6. Они также описывают периодическое перераспределение энергии между волнами, однако иного характера, чем в случае на рис. 9.5. Разберемся в том, что здесь происходит.

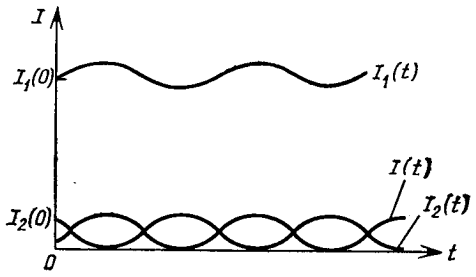


Рис. 9.5. Триплет с волной $I_1(t)$, устойчивой по отношению к распаду

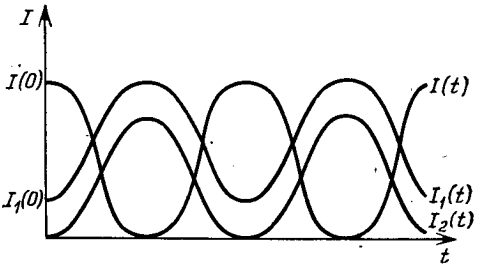


Рис. 9.6. Триплет с волной $I(t)$, неустойчивой по отношению к распаду

Распадная неустойчивость. Для этого будем считать, что одна из волн имеет достаточно большую (конечную) амплитуду. Под этим подразумевается, что в первом приближении амплитуду этой волны можно считать не изменяющейся под действием двух других волн. Однако оставшиеся две волны участвуют во взаимодействующем триплете так, как если бы это были волны в нестационарной среде.

Положим, для определенности, сначала $c_k = \text{const} \equiv c_0$. Система (2.10) превращается в следующую:

$$\dot{c}_{k_1} = -i\bar{V}^* c_0 c^*_{k_2}, \quad \dot{c}_{k_2} = i\bar{V} c_0^* c_{k_1}. \tag{2.22}$$

Отсюда

$$c_{k_1} = c_1(0)\, e^{\gamma t}, \quad c_{k_2} = c_2(0)\, e^{\gamma t}, \tag{2.23}$$

где

$$\gamma = |c_0| \cdot |\bar{V}|. \tag{2.24}$$

Это означает неустойчивость с инкрементом γ, проявляющуюся в росте амплитуд волн c_{k_1} и c_{k_2}. Конечно, полученная неустойчивость отражает лишь начальную стадию динамического процесса. На его последующей стадии уже нельзя пользоваться соотношением $c_k = \text{const}$, и следует рассматривать полное решение системы (2.13). Этот случай приведен на рис. 9.6 и соответствует начальным условиям (2.21). Из рис. 9.6 видно, как медленно убывает амплитуда волны c_k и нарастают на начальной стадии амплитуды двух других волн, на которые распадается волна c_k. В этом и раскрывается содержание названия распадной неустойчивости, поскольку она сопровождается процессом (2.2).

Наоборот, в случае, когда, например, амплитуда волны $c_{k_1} = \text{const} = c_{10}$, имеем уравнения

$$\dot{c}_k = i\bar{V} c_{10} c_{k_2}, \quad \dot{c}_{k_2} = i\bar{V} c_{10} c_k, \tag{2.25}$$

которые описывают осцилляции с частотой $|\bar{V} c_{10}|$. Именно этот процесс изображен на рис. 9.5.

Различие в характере решений в зависимости от начальных условий имеет простую физическую интерпретацию. Условие распада волны (2.2) для частот может быть выполнено лишь только в том случае, когда распадающаяся волна имеет частоту ω_k больше, чем частоты волн ω_{k_1}, ω_{k_2}, на которые происходит распад (ком. 3).

Аналогия с параметрическим резонансом. Распадные неустойчивости могут быть описаны двумя альтернативными способами, которые просто отражают двойственный характер волновых процессов, близких к линейным волнам. С одной стороны, можно использовать аналогию волн с квазичастицами подобно тому, как это делалось до сих пор и как это отражено в законах сохранения (2.2) и на рис. 9.1. С другой стороны, мы можем обратиться к языку теории колебаний и воспользоваться аналогией с параметрическим резонансом и уравнением Матье. Остановимся подробнее на этой второй возможности.

Очевидным обобщением уравнения Матье на случай волновой среды могло бы служить, например, уравнение

$$y_{tt} = c^2 [1 + V_0 \cos (kx - \omega_k t)] y_{xx} + \hat{L}y. \tag{2.26}$$

Подобно тому как в уравнении Матье модулируется собственная частота осциллятора, в уравнении (2.26) модулируется скорость распространения волны c. Слагаемое $\hat{L}y$ с линейным оператором $\hat{L}$ учитывает отклонение закона дисперсии от линейного ($\omega = kc$). Например, можно положить

$$\hat{L}y = \beta y_{xxxx}.$$

Вообще говоря, коэффициенты в члене $\hat{L}y$ также могут модулироваться.

Покажем теперь, как распадная неустойчивость (2.22)—(2.24) может быть описана в качестве неустойчивости при параметрическом резонансе. Для этого разложим y в ряд Фурье:

$$y(x, t) = \sum_k y_k(t) e^{ikx},$$

и перепишем (2.26) в виде

$$\ddot{y}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 y_{k_1} = -\frac{1}{c^2} V_0 [(k - k_1)^2 e^{-i\omega_k t} y^*_{k-k_1} + (k + k_2)^2 e^{i\omega_k t} y_{k+k_1}], \tag{2.27}$$

где

$$\omega_{k_1}^2 = k_1^2 c^2 - L(k_1)$$

есть закон дисперсии волн в том случае, когда параметры в $\hat{L}$ (например, β) не модулируются.

Теперь мы должны в выражении (2.27) оставить в правой части лишь тот член, который может привести к резонансу. Заметим, что в процессе взаимодействия участвуют три волны с волновыми числами k, k_1 и $k_2 = k \pm k_1$. Зафиксируем знак в k_2 и пусть $k = k_1 + k_2$. Пусть также частоты волн равны соответственно ω_k, ω_{k_1} и ω_{k_2}. Зафиксируем условие резонанса в виде

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}.$$

Тогда из (2.27) следует, если оставить только резонансное слагаемое в правой части:

$$\ddot{y}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 y_{k_1} \approx -{}^1/_2 c^2 V_0 k_2^2 e^{-i\omega_k t} y^*_{k_2}. \tag{2.28}$$

Аналогично из (2.26) можно получить уравнение для волны с волновым числом k_2:

$$\ddot{y}_{k_2} + \omega_{k_2}^2 y^*_{k_2} \approx -{}^1/_2 c^2 V_0 k_1^2 e^{i\omega_k t} y_{k_1}. \tag{2.29}$$

Итак, задача свелась к двум взаимодействующим осцилляторам в условиях параметрического возбуждения их с частотой ω_k. Отыскивая решение системы (2.28) и (2.29) в форме

$$y_{k_1} = y_1(0) \exp(\gamma t - i\omega_{k_1} t),$$
$$y^*_{k_2} = y_2^*(0) \exp(\gamma t + i\omega_{k_2} t),$$

получаем систему

$$\begin{aligned}[(\gamma - i\omega_{k_1})^2 + \omega_{k_1}^2]\, y_1(0) &= -{}^1/_2 c^2 k_2^2 V_0 y_2^*(0),\\ [(\gamma + i\omega_{k_2})^2 + \omega_{k_2}^2]\, y_2^*(0) &= -{}^1/_2 c^2 k_1^2 V_0 y_{k_1}(0).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Условие ее разрешимости в пренебрежении членами γ^2 в скобках в (2.30) дает

$$\gamma^2 = \frac{1}{16} c^4 V_0^2 \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}, \tag{2.31}$$

и неустойчивость имеет место, если $\omega_{k_1}\omega_{k_2} > 0$, т. е. если $|\omega_k| > |\omega_{k_1}|, |\omega_{k_2}|$. Это — уже известный нам результат. Теперь, однако, мы сумели до конца проследить аналогию распадной и параметрической неустойчивости.

Распад плазмона. Первым теоретически предсказанным и детально исследованным типом параметрической распадной неустойчивости в плазме явилась неустойчивость электронной ленгмюровской волны [11, 21]. Она соответствует распаду плазмона на плазмон и фонон.

Основной нелинейный эффект, приводящий к связи плазменных и звуковых колебаний, — это модуляция плотности плазмы низкочастотной звуковой волной.

Естественной физической величиной, характеризующей ленгмюровские колебания, является электрическое поле колебаний $E(x, t)$. В линейной теории уравнение для монохроматической волны плазменных (ленгмюровских) колебаний сводится к хорошо известному дисперсионному соотношению:

$$[\omega^2 - \omega_0^2(1 + 3k^2 r_d^2)]\, E(\omega_k, k) = 0. \tag{2.32}$$

В присутствии звуковой волны происходит модуляция плотности плазмы. Поэтому в слагаемом $\omega_0^2 E$ появляется нелинейный член, пропорциональный ρE. (Член $\omega_0^2 k^2 r_d^2$ при этом не зависит от плотности ρ.) С учетом этого слагаемого плазменная волна уже не является более монохроматической. В ней появляются новые гармоники на биениях ленгмюровской и звуковой волн. Соответствующее уравнение легко получается из (2.32), если заменить в нем

$$ik \to \frac{\partial}{\partial x}, \qquad -i\omega \to \frac{\partial}{\partial t}.$$

В результате получаем

$$E_{tt} = 3\omega_0^2 r_d^2 E_{xx} - \omega_0^2 E + \frac{\omega_0^2}{\rho_0}\rho E.$$

Уравнение для модуляции плотности плазмы при медленных ее движениях имеет вид [21]

$$\rho_{tt} = c^2 \rho_{xx} + \frac{1}{16\pi M}\frac{\partial^2}{\partial x^2} E^2,$$

где c — скорость ионного звука, M — масса ионов и член с E^2 возникает как давление высокочастотного поля

$$P = \frac{1}{16\pi} E^2.$$

Далее полагаем по уже изложенной выше схеме

$$\rho = {}^1/_2 \tilde{\rho} e^{i(k_1 x - \omega_{k_1} t)} + \text{к.с.},$$
$$E = E_0 e^{i(kx - \omega_k t)} + E_1 e^{i(k - k_1)x - i(\omega_k - \omega_{k_1})t} + \text{к. с.},$$

где E_0 — поле накачки плазмонов, имеющее конечную амплитуду, а E_1 — поле рождающихся плазмонов в результате неустойчивости. Отсюда получаем

систему уравнений, аналогичную (2.30):

$$[(\omega_{k_1}+i\gamma)^2-k_1^2c^2]\tilde{\rho}=\frac{e^2\rho_0k_1^2}{2mM\omega_0^2}E_0E_1^*,$$

$$[(\omega_k-\omega_{k_1}-i\gamma)^2-\omega_{k-k_1}^2]E_1^*=\frac{\omega_0^2}{2\rho_0}E_0^*\tilde{\rho},$$

где частоты ω_k и $\omega_{k-k_1}\equiv\omega_{k_2}$ относятся к плазмонам, а частота ω_{k_1} — к фонону. В результате аналогично (2.31) находим

$$\gamma^2=\frac{1}{16}\omega_0k_1c\frac{|E_0|^2}{4\pi\rho_0T}. \tag{2.33}$$

Условие, при котором существует распадная неустойчивость, заключается в том, что один из плазмонов распадается на плазмон меньшей частоты и фонон. Поскольку для плазмонов

$$\omega_k=\omega_0(1+{}^3/_2k^2r_d^2),$$

то условие распада имеет вид

$${}^3/_2r_d^2(k^2-k_2^2)=k_1r_d(m/M)^{1/2},$$

где $k_2=k-k_1$. Отсюда получаем, что параметрическая неустойчивость распада плазмона на звук возможна только для не слишком длинноволновых плазмонов:

$$kr_d>{}^1/_3(m/M)^{1/2}.$$

Эти результаты получили подтверждение в лабораторном эксперименте [22] (см. также их обсуждение и обзор других возможных ситуаций распадной неустойчивости в [13, 21]).

§ 3. Резонансы нелинейных волн

При переходе от резонансов волн малой амплитуды к резонансным взаимодействиям сильно нелинейных волн трудности резко возрастают. И здесь превалирующую роль начинают играть различные эвристические соображения, которые позволяют сначала понять, что нам необходимо сделать, и затем найти адекватный способ описания физического процесса.

Константа связи. Мы уже отмечали, что нелинейная волна может быть интерпретирована как суперпозиция некоторого большого числа плоских волн, между которыми организуется сильная связь. Это означает, что представление нелинейной периодической стационарной волны в виде

$$y=y(x-ut)=\sum_n y_ne^{inkx} \tag{3.1}$$

обладает, по крайней мере, двумя характерными особенностями, отличающими разложение (3.1) от произвольного волнового пакета.

Во-первых, разложение (3.1) эффективно обрезается на некотором числе N, которое, по существу, определяет реальное число степеней свободы в волне.

Во-вторых, амплитуды разложения y_n не являются независимыми, а могут быть выражены все как функции одного (или нескольких) параметров — например,

$$y_n=y_n(E, u, k). \tag{3.2}$$

Для волны с заданным периодом $2\pi/k$ и фиксированной скоростью u имеем просто

$$y_n=y_n(E). \tag{3.3}$$

Интерпретация соотношения (3.3) настолько же важна, насколько она может показаться простой. Формула (3.3) означает, что все $\sim N$ гармоник не являются независимыми, а находятся в сильной связи. Эта связь тем сильнее, чем больше число связанных волн N. Мы уже демонстрировали это свойство формальным образом для уравнения КдВ, вводя число

$$R_d = N^2, \tag{3.4}$$

пропорциональное нелинейности (см. формулу (8.2.23)).

Сделанные замечания позволяют придать числу N (или R_d) смысл константы связи для стационарной периодической волны. При $N \sim 1$ связь гармоник слабая. Ниже мы увидим, что многие задачи взаимодействия нелинейных волн могут быть решены путем разложения по обратным степеням N при $N \gg 1$. В основе такого разложения лежит простое физическое соображение: сильно связанные N волновых гармоник трудно «разорвать», превратив их в независимые степени свободы. Поэтому слабость возмущения будет проявляться в процессе эволюции системы, главным образом, в том, что эффективное число гармоник, характеризуемых из-за сильной связи лишь одним параметром, изменяется очень мало ($\Delta N \ll N$).

Внешнее возмущение. Рассмотрим для определенности возмущенное нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + F(y) + \varepsilon \Phi(x, t; y), \tag{3.5}$$

где Φ — возмущение и ε — безразмерный параметр возмущения. Зададим также периодические по координате граничные условия, которым должно удовлетворять решение

$$y(x + \lambda, t) = y(x, t),$$

и возмущение

$$\Phi(x + \lambda, t; y(x + \lambda, t)) = \Phi(x, t; y(x, t)).$$

Запишем разложение в ряд Фурье для y:

$$y(x, t) = \sum_n y_n e^{ink x}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad y_{-n} = y_n^*. \tag{3.6}$$

Аналогичные разложения запишем для силы F и возмущения Φ:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_n F_n e^{ink x}; \qquad F_{-n} = F_n^*; \\ \Phi(y) &= \sum_n \Phi_n e^{ink x}; \qquad \Phi_{-n} = \Phi_n^*. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя приведенные разложения (3.6) и (3.7), перепишем уравнение (3.5) в виде

$$\ddot{y}_n + n^2 k^2 c^2 y_n - F_n = \varepsilon \Phi_n. \tag{3.8}$$

В отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$) системе уравнений

$$\ddot{y}_n + n^2 k^2 c^2 y_n - F_n = 0 \tag{3.9}$$

может быть придана еще одна форма.

Если рассматривать только решение в форме стационарной волны, распространяющейся со скоростью u, т. е.

$$y = y(x - ut),$$

то справедливо также разложение

$$y(x, t) = \sum_n a_n e^{ink(x - ut)}; \qquad a_n^* = a_{-n}. \tag{3.10}$$

Сравнение (3.10) и (3.6) показывает, что

$$y_n = a_n e^{-inkut}, \tag{3.11}$$

где a_n не зависят от t. Поэтому

$$\ddot{y}_n = -n^2k^2u^2 \tag{3.12}$$

и уравнение (3.9) с помощью (3.11) и (3.12) приводит к соотношению

$$u^2 = c^2 + \frac{F_n}{n^2k^2}, \tag{3.13}$$

которое является другой формой дисперсионного соотношения (1.25). Величина F_n/n^2, естественно, не зависит от n.

Гамильтониан для задачи (3.5) можно представить в следующей форме:

$$H = {}^1/_2 \sum_n (\dot{y}_n \dot{y}_{-n} + n^2k^2c^2 y_n y_{-n}) + V[y] + \varepsilon\Psi[x, t; y], \tag{3.14}$$

где выражения

$$\begin{aligned} V[y] &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} dx\, V(y), \\ \Psi[x, t; y] &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} dx\, \Psi(x, t; y) \end{aligned} \tag{3.15}$$

являются потенциалами силы F и силы возмущения Φ:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \Phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \tag{3.16}$$

Гамильтониан (3.14) порождает гамильтоновские уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\dot{y}_n = -\frac{\delta H}{\delta y_{-n}}, \qquad \frac{d}{dt} y_n = \frac{\delta H}{\delta \dot{y}_{-n}}, \tag{3.17}$$

которые эквивалентны исходному уравнению (3.8).

Следующий пример показывает, как надо обращаться с выражениями типа (3.15). Пусть, например,

$$\Psi(x, t; y) = \psi(x, t)\, y^2.$$

Тогда гармоника Ψ_n разложения Ψ в ряд Фурье по x имеет вид

$$\Psi_n = \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1}(t)\, y_{n_2} y_{n_3} \delta(n - n_1 - n_2 - n_3).$$

Соответственно

$$\Psi[x, t; y] = \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 + n_2 + n_3).$$

В частности, если в уравнении (3.5)

$$\Phi = \Phi(x, t) = \sum_n \Phi_n e^{inkx},$$

то вклад от возмущения в гамильтониан имеет вид

$$\Psi[x, t; y] = {}^1/_2 \sum_n (\Phi_n y_{-n} + \Phi_{-n} y_n). \tag{3.18}$$

Пусть $Q(y)$ — произвольная функция y и $Q[y]$ — функционал, полученный тем же способом, что в (3.15). Тогда скобки Пуассона определяются из

соотношения

$$\frac{dQ}{dt}=\sum_n\left(\frac{\delta Q}{\delta y_n}\dot{y}_n+\frac{\delta Q}{\delta \dot{y}_n}\ddot{y}_n\right)=\sum_n\left(\frac{\delta Q}{\delta y_n}\frac{\delta H}{\delta \dot{y}_{-n}}-\frac{\delta Q}{\delta \dot{y}_n}\frac{\delta H}{\delta y_{-n}}\right)\equiv[Q,\,H]. \tag{3.19}$$

Теперь мы воспользуемся приведенными уравнениями для рассмотрения достаточно сложных явлений — нелинейного резонанса между волной и внешним возмущением и нелинейного резонанса между волнами (ком. 4).

Укороченные уравнения. Воспользуемся высказанными выше соображениями о числе N как параметре, характеризующем эффективное число сильно взаимодействующих гармоник. Положим далее

$$N\gg 1. \tag{3.20}$$

Это неравенство является принципиальным для многих, рассматриваемых ниже задач. Оно лежит в основе вывода укороченных уравнений движения для задачи о возмущении стационарных волн.

Определим невозмущенный гамильтониан выражением

$$H_0=\tfrac{1}{2}\sum_n(\dot{y}_n\dot{y}_{-n}+n^2k^2c^2y_ny_{-n})+V[y] \tag{3.21}$$

и представим решение возмущенной задачи в виде

$$y_n=a_ne^{-in\vartheta}. \tag{3.22}$$

В отсутствие возмущения, согласно (3.19) и (3.11), имеем

$$\dot{H}_0=0,\quad \dot{\vartheta}=ku(H_0)\equiv\omega(H_0). \tag{3.23}$$

При наличии возмущения скобки Пуассона (3.19) дают возможность получить

$$\dot{H}_0=[H_0,\,H]=\varepsilon[H_0,\,\Psi]=\varepsilon\sum_n\left(\frac{\delta H_0}{\delta y_n}\frac{\delta\Psi[x,t;y]}{\delta\dot{y}_{-n}}-\frac{\delta H_0}{\delta\dot{y}_n}\frac{\delta\Psi[x,t;y]}{\delta y_{-n}}\right).$$

Поскольку рассматриваемое возмущение не зависит от скорости, то возникает упрощение:

$$\dot{H}_0=-\varepsilon\sum_n\dot{y}_{-n}\frac{\delta\Psi[x,t;y]}{\delta y_{-n}}=-\varepsilon\sum_n\dot{y}_n\frac{\delta\Psi[x,t;y]}{\delta y_n}.$$

Наконец, в случае, когда $\Phi=\Phi(x,\,t)$, находим в соответствии с (3.18):

$$\dot{H}_0=-\varepsilon\sum_n\dot{y}_n\Phi_{-n}. \tag{3.24}$$

Все уравнения для $\dot{H}_0$, в том числе (3.24), являются точными.

Несколько сложнее обстоит дело с уравнением для фазы ϑ. Его можно получить, используя определение (3.22). Это, однако, будет выглядеть несколько громоздко. В дальнейшем мы будем интересоваться в основном резонансными взаимодействиями, и это создаст некоторые упрощения.

Согласно (3.23), уравнение для $\dot{\vartheta}$ должно иметь структуру

$$\dot{\vartheta}=\omega(H_0)+O(\varepsilon). \tag{3.25}$$

При значениях ω, не слишком близких к нулю, изменение ω из-за возмущения имеет порядок

$$\Delta\omega=\left|\frac{d\omega}{dH_0}\right|\Delta H. \tag{3.26}$$

Это выражение надо сравнить со вторым членом в (3.25), который имеет порядок ε. Очевидно, что в отсутствие особенностей

$$\Delta H/H_0\sim\varepsilon.$$

Поэтому оба члена в (3.25) одного и того же порядка по ε. Иначе обстоит дело, когда возмущение в (3.24) имеет резонансный член. Тогда в выражении для

$$\Delta H = \int^{t} dt\, \dot{H}_0$$

появляется резонансный знаменатель и величина ΔH сильно возрастает. В этом случае первый член в (3.25) становится большим по сравнению с поправкой, и укороченное уравнение для фазы принимает вид

$$\dot{\vartheta} = \omega(H_0(t)). \tag{3.27}$$

Последний шаг заключается в использовании выражений (3.22) и (3.23) для преобразования правой части в (3.24). В результате мы приходим к следующей замкнутой системе укороченных уравнений [16]:

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -i\varepsilon\omega(H_0)\sum_n n a_n(H_0)\, e^{in\vartheta}\, \Phi_{-n}(t), \\ \dot{\vartheta} &= \omega(H_0). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ее анализ можно производить так же, как это делалось в динамике частиц.

Нелинейный резонанс. Рассмотрим такой случай внешнего возмущения, который допускает возможность резонанса между возмущением и волной. Пусть возмущение является периодической функцией времени с частотой ν. Разложим $\Phi_n(t)$ в ряд Фурье по t:

$$\Phi_n(t) = \sum_l \Phi_{nl} e^{il\nu t}; \qquad \Phi_{-n,\,-l} = \Phi_{nl}^{*}. \tag{3.29}$$

Из (3.28) и (3.29) следует, что при выполнении условия

$$n\omega(H_r) - l\nu = 0 \tag{3.30}$$

в некоторой точке $H_0 = H_r$ возникает резонанс. Вообще, для каждой пары чисел (n, l) может существовать значение $H_0^{(n,\,l)}$, при котором удовлетворяется уравнение (3.30).

Как и в § 1 гл. 2, рассмотрим случай изолированного резонанса. Это означает, что в уравнениях (3.28) основную роль играет один резонанс (3.30) в точке H_r. Поэтому всеми остальными членами можно пренебречь. Введем более удобные переменные. Опустим всюду индекс 0 при H и положим

$$\omega(I) = \omega(H(I)) = \frac{dH}{dI}, \qquad \mathcal{V} = 2n\,|a_n|\cdot|\Phi_{nl}|. \tag{3.31}$$

Первая формула в (3.31) вводит вместо переменной H переменную действия I.

Теперь система (3.28) принимает совсем простой вид:

$$\dot{I} = \varepsilon\mathcal{V}\cos\psi, \qquad \dot{\psi} = n\omega(I) - l\nu, \tag{3.32}$$

где использована новая фаза

$$\psi = n\vartheta - l\nu. \tag{3.33}$$

Уравнения (3.32) описывают изменение действия (I) и фазы (ψ) в окрестности резонанса (3.30). Относительная величина изменения действия $\Delta I/I$ мала. Поэтому можно положить

$$\mathcal{V} \approx \text{const} = \mathcal{V}(I_r)$$

и разложить $\omega(I)$ в ряд, ограничившись первым неисчезающим членом:

$$\omega(I) \approx \omega(I_r) + \frac{d\omega(I_r)}{dI}(I - I_r).$$

Отсюда находим первый интеграл системы (3.32):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} n \frac{d\omega(I_r)}{dI} (I - I_r)^2 - 2\varepsilon \mathcal{V}^{\circ} \sin \psi. \tag{3.34}$$

Выражение (3.34) для $\mathcal{H}$ является также гамильтонианом для нелинейного резонанса с канонической парой переменных $(\Delta I, \psi)$, где

$$\Delta I = I - I_r.$$

Оно полностью совпадает с эффективным гамильтонианом нелинейного резонанса в § 1 гл. 2, и поэтому весь дальнейший анализ проводится аналогично.

Из (3.34) следует, что ΔI и ψ колеблются со временем периодически. Ширина резонанса по действию равна

$$\max \Delta I = \left(\frac{4\varepsilon \mathcal{V}^{\circ}}{m |\omega'(I_r)|} \right)^{1/2}. \tag{3.35}$$

Колебания приводят к периодической модуляции параметров волны. Этот факт совсем нетрудно установить. Он следует из существования сильной связи между гармониками нелинейной волны и выражается, в частности, равенством (3.3). В новых переменных мы можем записать

$$a_n = a_n(I) = a_n(I_r) + \frac{da_n(I_r)}{dI} \Delta I. \tag{3.36}$$

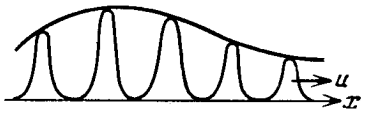


Рис. 9.7. Резонансная крупномасштабная модуляция нелинейной волны

Второй член в формуле (3.36), содержащий ΔI, приводит к периодической модуляции, наложенной на волну. Ее период определяется начальными условиями, задающими величину $\mathcal{H}$. Аналогичные осцилляции испытывает и скорость волны:

$$u = \frac{1}{k} \omega(I) = \frac{1}{k} [\omega(I_r) + \omega'(I_r) \Delta I]. \tag{3.37}$$

Таким образом, при резонансном взаимодействии нелинейной волны с внешним возмущением возникает своеобразное связанное состояние внешнего поля с волной. Это взаимодействие в первом приближении не разрушает волну, а приводит к периодической модуляции ее параметров во времени. Максимальное значение частоты модуляции (частоты фазовых колебаний), согласно (3.34) и (3.35), равно

$$\Omega = |\omega'(I_r)| \max \Delta I = \left[\frac{4\varepsilon}{n} \mathcal{V}^{\circ} |\omega'(I_r)| \right]^{1/2}. \tag{3.38}$$

Величина (3.38) определяет с помощью формулы (3.37) глубину модуляции скорости волны:

$$\max \Delta u = \max [u(I) - u(I_r)] = \Omega/k. \tag{3.39}$$

Период модуляции в зависимости от константы $\mathcal{H}$ изменяется от $2\pi/\Omega$ до ∞. Поэтому модуляция представляет собой крупномасштабную «рябь» на фоне стационарной волны (рис. 9.7). Рябь бежит по волне. Скорость этого движения и амплитуда ряби пропорциональны $\varepsilon^{1/2}$ и, следовательно, существенно превышают величину возмущения ($\varepsilon \ll \varepsilon^{1/2}$).

Ширина резонанса (3.35), (3.38), (3.39) зависит от пространственного спектра внешнего возмущения. Действительно, из уравнения (3.24) видно, что при взаимодействии внешнего поля с волной существенно выделяются только те гармоники Φ_n, номерам которых соответствуют заметно отличные от нуля гармоники волны a_n. Иными словами, если возмущение таково, что в его спектре основная энергия приходится на гармоники с $n > N$, то взаимодействие такого возмущения с волной экспоненциально мало. В этом проявляется особенность взаимодействия волн с внешним полем.

Период возмущения, например, ветрового воздействия может быть существенно мал в сравнении с длиной волн на поверхности океана. Однако для интенсивной накачки волн достаточно лишь, чтобы волны были достаточно «остры», т. е. чтобы в их спектре существовали с заметно ненулевой амплитудой гармоники с высокими частотами и, соответственно, мелкими масштабами. Возмущение действует интенсивно именно на эти масштабы. Вследствие сильной связи эти масштабы вытягивают за собой и гармоники со значительно более крупными масштабами. Легко найти тот минимальный масштаб возмущения δ_s, ниже которого его взаимодействие с волной становится неэффективным. Очевидно,

$$\delta_s \sim \lambda/N. \tag{3.40}$$

Нетрудно понять, что это означает. Для этого вспомним, что, например, для уравнения КдВ число N равно отношению длины волны к ширине горба солитона. Поэтому граничное значение (3.40) для δ_s есть просто ширина солитона. Если длина волны возмущения очень мала по сравнению с шириной солитона, то взаимодействие его с волной мало. Более сложные варианты взаимодействия, например с плазменными колебаниями вблизи границы опрокидывания, приведены в [19].

В заключение этого пункта полезно показать, как возникает реально малость взаимодействия со внешним полем, если число $N \gg 1$. Из (3.28) следует, что даже при $\varepsilon \sim 1$ величина

$$\Delta H/H \sim a_n/H \sim M/N, \tag{3.41}$$

где M — число резонансных гармоник в возмущении. Мы рассматривали выше $M = 1$. Тем самым параметр малости устанавливается явным и очевидным образом.

§ 4. Взаимодействие нелинейных волн

Существуют специальные случаи нелинейных уравнений, для которых точное решение может быть указано в явном виде при произвольном начальном условии — например, уравнение Бюргерса или уравнение КдВ. Мы остановимся на этих случаях позже. Однако в общем случае уравнения являются неинтегрируемыми, и можно указать лишь приближенные способы анализа их. В этом параграфе остановимся на некоторых вопросах, связанных с взаимодействием нелинейных волн.

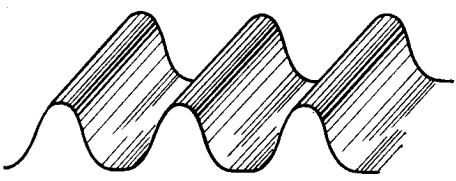


Рис. 9.8. Одномерная стационарная волна

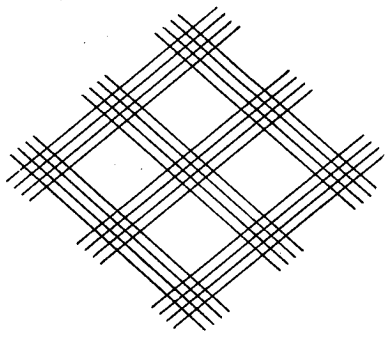


Рис. 9.9. Малая область перекрытия нелинейных волн

Малый параметр взаимодействия. Прежде чем перейти к рассмотрению какой-либо задачи, следует хотя бы качественно показать, что оно не будет лишено перспективы. Другими словами, мы должны понять, существует ли такой параметр, который мог бы определить малость взаимодействия нелинейных волн, и как он должен выглядеть.

Если волны достаточно сильно нелинейные, то оказывается, что такой параметр существует и очень нагляден [16, 18]. Представим себе одномерную нелинейную волну, имеющую форму периодической последовательности длинных гребней возвышения, у которых профиль сечения близок к солитону (рис. 9.8). Пусть такого же вида волна распространяется под углом к первой волне. В этом случае возникает картина пересечения волн, вид сверху которой приведен на рис. 9.9. Рассмотрим случай, когда область перекрытия волн мала. Это означает, по крайней мере, что ширина горбов мала по сравнению с периодом волн. Теперь в этом случае следует ожидать, что энергия взаимодействия волн пропорциональна области их перекрытия. Следовательно, она мала относительно энергии волн, а это и означает, что взаимодействие волн может оказаться слабым. Таким образом, можно ожидать, что малый параметр взаимодействия волн будет пропорционален $1/N$ и, следовательно, его появление является спецификой именно сильно нелинейных волн, для которых $N \gg 1$.

Неодномерный ионный звук. Рассмотрим для иллюстрации высказанных соображений уравнения ионного звука, с которыми мы уже встречались в § 3 гл. 8. В неодномерном случае они имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{e}{M}\nabla\varphi,$$
$$\Delta\varphi = -4\pi e\left(\rho - \rho_0 \exp\frac{e\varphi}{T}\right), \tag{4.1}$$

где φ — потенциал поля и $(\rho, \boldsymbol{v})$ — плотность и скорость ионов, причем ρ_0 — невозмущенная плотность электронов, имеющих распределение Больцмана.

При $kr_d \ll 1$, $e\varphi \ll T$ можно произвести упрощение системы (4.1). Представим $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ и оставим в (4.1) лишь члены первого и второго порядков по величинам $(\delta\rho, v, \varphi)$. Кроме того, введем потенциал скорости w соотношением $\boldsymbol{v} = \nabla w$. После этого система (4.1) принимает вид

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla(\nabla w) + \nabla(\delta\rho\,\nabla w) = 0,$$
$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c^2\left(\delta\rho + r_d^2 \Delta\,\delta\rho - \frac{1}{2}\frac{(\delta\rho)^2}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2}\rho_0 (\nabla w)^2 = 0 \tag{4.2}$$
$$\left(c^2 = \frac{T}{M},\ r_d^2 = \frac{T}{4\pi\rho_0 e^2}\right).$$

Можно также положить $c = r_d = \rho_0 = 1$ и разложить $\delta\rho$ и w в ряд Фурье:

$$\delta\rho = \sum_q \left(\frac{q}{\omega_q}\right)^{1/2}(a(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}r} + a^*(\boldsymbol{q})\, e^{-i\boldsymbol{q}r}),$$
$$w = \sum_q \frac{1}{q}\left(\frac{\omega_q}{q}\right)^{1/2}(a(\boldsymbol{q})\, e^{i\boldsymbol{q}r} - a^*(\boldsymbol{q})\, e^{-i\boldsymbol{q}r}). \tag{4.3}$$

Здесь введена линейная частота

$$\omega_q = q(1 - {}^1/_2 q^2). \tag{4.4}$$

Уравнение для фурье-гармоник принимает вид [20]

$$\dot{a}(\boldsymbol{q}) + iq(1 - {}^1/_2 q^2)\, a(\boldsymbol{q}) + \frac{i}{4} q \sum_{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2} V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}[a(\boldsymbol{q}_1)\, a(\boldsymbol{q}_2)\, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) +$$
$$+ 2a(\boldsymbol{q}_1)\, a^*(\boldsymbol{q}_2)\, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) + a^*(\boldsymbol{q}_1)\, a^*(\boldsymbol{q}_2)\, \delta(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)] = 0, \tag{4.5}$$

где матричный элемент $\hat{V}$ имеет симметричную форму:

$$V_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2} = \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_1}{qq_1} + \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_2}{qq_2} + \frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{q_1 q_2} - 1. \tag{4.6}$$

Гамильтониан для уравнения (4.5) определяется формулой

$$H=\sum_{q}(1-{}^1/_2q^2)\,a(q)\,a^*(q)+{}^1/_4\sum_{q_1,\,q_2,\,q_3}V_{q_1q_2q_3}\times$$
$$\times[{}^1/_3a(q_1)\,a(q_2)\,a(q_3)\,\delta(q_1+q_2+q_3)+$$
$$+a(q_1)\,a(q_2)\,a^*(q_3)\,\delta(q_1+q_2-q_3)+\text{к. с.}]. \quad (4.7)$$

С помощью (4.5)—(4.7) легко убеждаемся в том, что уравнения движения (4.5) могут быть записаны в гамильтоновском виде

$$\dot a(q)=-iq\frac{\partial H}{\partial a^*(q)},\qquad \dot a^*(q)=iq\frac{\partial H}{\partial a(q)}. \quad (4.8)$$

Укажем связь полученных уравнений с одномерным случаем (см. § 3 гл. 8). Имеем $V_{qq_1q_2}=2$, и уравнение (4.5) переходит в следующее уравнение в пространственных координатах:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\delta\rho\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3\delta\rho}{\partial x^3}=0. \quad (4.9)$$

Это — уже знакомое нам уравнение КдВ, соответствующее малым нелинейностям.

Для его одномерных решений в виде нелинейных стационарных волн

$$\delta\rho=\delta\rho(x-ut)$$

имеем следующее разложение:

$$\delta\rho=\sum_m c_me^{imk(x-ut)}=\sum_m a_me^{imkx}, \quad (4.10)$$

где u — скорость в направлении x. Мы уже знаем, что многие свойства решения (4.10) определяются параметром

$$\alpha=u-1>0,$$

причем $\alpha\ll 1$.

Сравнивая (4.10) с (4.5), устанавливаем связь в одномерном случае:

$$a_m=a(q),\qquad q=mk.$$

Параметр сильной связи

$$N=\sqrt{\alpha}/k\gg 1 \quad (4.11)$$

определяет отношение длины волны (λ) к ширине горба волны ($\sim 1/\sqrt{\alpha}$). В частности,

$$\begin{aligned} a_m&\sim\alpha/N \qquad (m\ll N),\\ a_m&\sim e^{-m/N} \qquad (m>N). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Взаимодействие двух волн. Идея рассмотрения взаимодействия сильно нелинейных волн (выполняется неравенство (4.11)) основана на том, что в нулевом приближении их суперпозиция является решением, а их взаимодействие мало из-за малости их перекрытия, как на рис. 9.9. Посмотрим, как эти соображения могут реализоваться в том случае, когда имеются всего лишь две волны, распространяющиеся под углом γ друг к другу [18].

Нулевым приближением является выражение

$$\delta\rho(\boldsymbol{r},\,t)=\sum_{s=1,\,2}\delta\rho(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{u}_st);\qquad \boldsymbol{r}_s\|\boldsymbol{u}_s, \quad (4.13)$$

определяющее простую сумму двух стационарных волн, движущихся со скоростями $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$, причем

$$\widehat{(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2)}=\gamma.$$

Гамильтониан (4.7) представим в виде

$$H=\sum_s H_s+H_{\text{int}};$$

$$H_s=\sum_{q_s}(1-{}^1\!/_2 q_s^2)\,a(q_s)\,a^*(q_s)+{}^1\!/_2\sum_{q_s,\,q_s',\,q_s''}[{}^1\!/_3 a(q_s)\,a(q_s')\,a(q_s'')\,\delta(q_s+q_s'+q_s'')+$$
$$+\,a(q_s)\,a(q_s')\,a^*(q_s'')\,\delta(q_s+q_s'-q_s'')+\text{к. с.}]; \quad (4.14)$$

$$H_{\text{int}}=\sum_{s_1\neq s_2} a(q_{s_1}=0)\,a(q_{s_2}=0)+{}^1\!/_4\sum_{s_1,\,s_2,\,s_3}{}'\sum_{q_{s_1},\,q_{s_2},\,q_{s_3}} V_{q_{s_1}q_{s_2}q_{s_3}}\times$$
$$\times[{}^1\!/_3 a(\boldsymbol{q}_{s_1})\,a(\boldsymbol{q}_{s_2})\,a(\boldsymbol{q}_{s_3})\,\delta(\boldsymbol{q}_{s_1}+\boldsymbol{q}_{s_2}+\boldsymbol{q}_{s_3})+a(\boldsymbol{q}_{s_1})\,a(\boldsymbol{q}_{s_2})\,a^*(\boldsymbol{q}_{s_3})\times$$
$$\times\,\delta(\boldsymbol{q}_{s_1}+\boldsymbol{q}_{s_2}-\boldsymbol{q}_{s_3})+\text{к. с.}].$$

Здесь различные индексы s указывают на различные одномерные нелинейные волны; q_s, q_s', q_s''—относятся к одной и той же волне с номером s; штрих в сумме означает исключение члена с $s_1=s_2=s_3$; направление вектора $\boldsymbol{q}_s$ совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{u}_s$.

Величина H_{int} должна быть малой, для того чтобы соотношение (4.13) могло быть взято в качестве нулевого приближения. Мы эту малость будем определять непосредственно для каждой из рассматриваемых дальше задач.

Для двух волн индекс s в (4.14) принимает только значения $s=1,2$. Поэтому δ-функция в H_{int} отбирает только члены с

$$q_1=q_1', \quad q_2=0; \qquad q_1=0, \quad q_2=q_2'.$$

Кроме того, согласно (4.6)

$$V_{q_1q_10}=V_{q_2q_20}=2\cos\gamma. \quad (4.15)$$

Будем также считать неравенство (4.11) выполненным для всех волн:

$$N_s=\sqrt{\alpha_s}/k_s\gg 1. \quad (4.16)$$

Тогда выражение для H_{int} принимает следующий простой вид:

$$H_{\text{int}}\approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\left\{\sum_{q_1}|a(q_1)|^2\,a(q_2=0)+\sum_{q_2}|a(q_2)|^2\,a(q_1=0)\right\}\approx$$
$$\approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{N_1N_2}. \quad (4.17)$$

Аналогичная оценка дает для нелинейного члена в H_s порядок α_s^3/N_s. Таким образом, критерием малости взаимодействия двух волн является неравенство

$$\varepsilon=|\operatorname{ctg}\gamma|/N\ll 1, \quad (4.18)$$

которое выполняется для достаточно больших N и не слишком малых углов γ, как это и ожидалось.

В частном случае перпендикулярного распространения волн ($\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2$) матричный элемент взаимодействия (4.6) обращается тождественно в нуль. Поэтому в этом случае следует учитывать взаимодействие двух волн в более высоком порядке по a.

Прежде чем анализировать выражение (4.17), проделаем еще некоторые простые вычисления.

Определим скобки Пуассона с помощью уравнений (4.8). Для произвольной функции $P(a, a^*)$ имеем

$$\frac{dP(a,a^*)}{dt}=-i\sum_s\sum_{q_s} q\left[\frac{\partial P}{\partial a(\boldsymbol{q}_s)}\frac{\partial H}{\partial a^*(\boldsymbol{q}_s)}-\frac{\partial P}{\partial a^*(\boldsymbol{q}_s)}\frac{\partial H}{\partial a(\boldsymbol{q}_s)}\right]. \quad (4.19)$$

С помощью выражения (3.19) для двух волн получаем

$$\dot{H}_1=\dot{H}_2=0. \quad (4.20)$$

Этот результат имеет простое объяснение. Энергия взаимодействия (4.17) не зависит от времени, что легко понять из рис. 9.9. Область перекрытия двух волн постоянна. Поэтому спецификой взаимодействия двух волн является лишь перенормировка их параметров и, в частности, скоростей движения u_s. Найдем эти изменения.

Для этого обратимся к уравнениям движения (4.5). Имеем

$$\dot{a}(q_1) + iq_1u_1a(q_1) + iq_1\frac{V_{q_1q_20}}{|\sin\gamma|}a(q_2=0)\,a(q_1) = 0,$$
$$\dot{a}(q_2) + iq_2u_2a(q_2) + iq_2\frac{V_{q_2q_20}}{|\sin\gamma|}a(q_1=0)\,a(q_2) = 0.$$

Отсюда видно, что взаимодействие приводит к изменению скорости движения волны на величину

$$\Delta u_1 = 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}a(q_2=0) \approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\frac{\alpha_2}{N_2} \sim \varepsilon\alpha_2,$$
$$\Delta u_2 = 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}a(q_1=0) \approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\frac{\alpha_1}{N_1} \sim \varepsilon\alpha_1. \qquad (4.21)$$

Эти соотношения показывают в явном виде порядок малости возмущения: $\Delta u/\alpha \sim \varepsilon \ll 1$.

Полученный результат важен для нас вдвойне. Кроме того, что мы решаем задачу о взаимодействии двух волн, мы получили возможность убедиться в правильности наших представлений о малых взаимодействиях нелинейных волн и о выборе условий, когда эта малость реализуется. Теперь мы имеем возможность перейти к рассмотрению более сложной и более содержательной задачи.

Если $\gamma \to 0$, то относительная величина области перекрытия волн стремится, вообще говоря, к единице. Здесь, однако, тоже существуют случаи слабого взаимодействия, которые по-прежнему связаны с неравенством (4.16) [16].

Взаимодействие трех волн. Перейдем теперь к рассмотрению случая взаимодействия трех нелинейных волн [18]. Он существенно отличается от случая двух волн, так как здесь возможен резонанс, подобно тому как это имеет место для волн малой амплитуды. В гамильтониан H в (4.14) теперь входят члены с $s = 1, 2, 3$. В той его части, которая описывает взаимодействие волн, есть два типа слагаемых. Одни из них, в которых s принимает только два каких-либо значения, приводят, как мы только что видели, к перенормировке скоростей волн на постоянную малую величину. Далее будем считать, что эта перенормировка уже выполнена, и квадратичные члены в H_{int} опустим. Другие члены содержат произведения типа $a(q_{s_1}) \times a(q_{s_2})\,a(q_{s_3})$, которые принадлежат трем различным волнам, т. е. в которых $s_1 \neq s_2 \neq s_3$. Именно эти члены содержат нетривиальное взаимодействие, и мы будем удерживать только их.

Введем новые канонические переменные — действие I_s и фазу ϑ_s — с помощью соотношений

$$\frac{dH_s}{dI_s} = k_su_s(H_s) = \dot{\vartheta}_s. \qquad (4.22)$$

Вычислим $\dot{H}_s$ с помощью скобок Пуассона (4.19):

$$\dot{H}_s = -i\sum_{q_s} q_s\left(\frac{\partial H_s}{\partial a(q_s)}\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial a^*(q_s)} - \frac{\partial H_s}{\partial a^*(q_s)}\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial a(q_s)}\right),$$

где знак вектора при q_s опущен, так как одному и тому же значению s соответствует одно строго фиксированное направление для всех q_s.

Воспользуемся двумя соотношениями: гамильтоновскими уравнениями движения (3.8) и структурой решения в виде стационарной бегущей волны.

Это дает

$$q_s \frac{\partial H_s}{\partial a(q_s)} = -i\dot{a}^*(q_s) = q_s u_s a^*(q_s). \tag{4.23}$$

Отсюда

$$\dot{H}_s = -iu_s \sum_{q_s} q_s \left[a^*(q_s) \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial a^*(q_s)} - a(q_s) \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial a(q_s)} \right] =$$

$$= -\frac{i}{4} u_s \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_1 \neq s_2 \neq s}} \sum_{q_s, q_{s_1}, q_{s_2}} q_s V_{q_s q_{s_1} q_{s_2}} \times$$

$$\times [a^*(q_s) a^*(q_{s_1}) a^*(q_{s_2}) \delta(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_{s_1} + \boldsymbol{q}_{s_2}) + a^*(q_s) a(q_{s_1}) a(q_{s_2}) \delta(\boldsymbol{q}_s - \boldsymbol{q}_{s_1} - \boldsymbol{q}_{s_2}) +$$

$$+ 2a^*(q_s) a^*(q_{s_1}) a(q_{s_2}) \delta(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_{s_1} - \boldsymbol{q}_{s_2})] + \text{к. с.} \tag{4.24}$$

Мы получили общее выражение, которое является точным для производной по времени от энергии какой-либо волны. Оставим теперь в нем только три волны, соответственно полагая, что тройка (s_1, s_2, s_3) состоит из перестановки чисел (1, 2, 3). Кроме того, следует иметь в виду конечную цель для того, чтобы упростить уравнения. Будем интересоваться только такой ситуацией, при которой возможен трехволновый резонанс. Посмотрим, что это означает в нелинейном случае. Как и в линейном случае, должны одновременно выполняться соотношения

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3, \qquad m_1\omega_1 = m_2\omega_2 + m_3\omega_3, \tag{4.25}$$

где нелинейные частоты ω_s выражаются из нелинейного дисперсионного соотношения

$$\omega_s = \omega_s(H_s) = k_s u_s(H_s) \tag{4.26}$$

и m_1, m_2, m_3 — положительные целые числа. Заметим, что резонансное условие для частот непосредственно следует из разложения (4.10). С его помощью перепишем резонансные условия (4.25) в виде

$$m_1\boldsymbol{k}_1 - m_2\boldsymbol{k}_2 - m_3\boldsymbol{k}_3 = 0, \qquad m_1k_1u_1 - m_2k_2u_2 - m_3k_3u_3 = 0. \tag{4.27}$$

Будем далее для простоты записывать $a(q_s) \equiv a_s$ и оставим в (4.24) только резонансные члены. Здесь тоже есть неоднозначность, так как резонансы в (4.24) могут реализовываться разными способами в зависимости от направления движения волн и значений их периодов и скоростей. Поэтому мы рассмотрим случай только одного определенного резонанса (4.27), в котором зафиксирована также тройка чисел (m_1, m_2, m_3). Это не означает отсутствие или невозможность других резонансов между волнами, а лишь предполагает, что другие резонансы находятся достаточно далеко от данного и не влияют на него.

Запишем уравнения резонансного триплета, полагая в (4.24) $s = 1, 2, 3$. Имеем

$$\dot{H}_1 = -\frac{i}{2} m_1k_1u_1V_{123}a_1^*a_2a_3 + \text{к. с.},$$

$$\dot{H}_2 = -\frac{i}{2} m_2k_2u_2V_{123}a_1a_2^*a_3^* + \text{к. с.},$$

$$\dot{H}_3 = -\frac{i}{2} m_3k_3u_3V_{123}a_1a_2^*a_3^* + \text{к. с.}$$

Используем определение (4.22) и связь комплексных амплитуд a_s с фазой ϑ_s:

$$a_s = |a_s| e^{-im_s\vartheta_s}.$$

Отсюда

$$\dot{I}_1 = m_1\Gamma \sin\vartheta, \qquad \dot{I}_2 = -m_2\Gamma \sin\vartheta, \qquad \dot{I}_3 = -m_3\Gamma \sin\vartheta, \tag{4.28}$$

где

$$\Gamma = |V_{123}| \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{N_1N_2N_3},$$
$$\vartheta = m_1\vartheta_1 - m_2\vartheta_2 - m_3\vartheta_3 + \vartheta_0 \tag{4.29}$$

и ϑ_0—фаза матричного элемента V_{123}. Из (4.28) следуют интегралы движения

$$m_2I_1 + m_1I_2 = \text{const}, \quad m_3I_1 + m_1I_3 = \text{const}, \quad m_3I_2 - m_2I_3 = \text{const}, \tag{4.30}$$

которые позволяют, как и раньше, сразу написать решение через квадратуры.

Рассмотрим нелинейный резонанс волн более детально и получим интеграл движения в окрестности резонанса. Пусть I_{10}, I_{20}, I_{30} являются резонансными значениями действий, удовлетворяющими соотношениям (4.27). Умножая каждое из уравнений (4.28) на соответствующее значение k_iu_i и интегрируя, находим

$$\int_{I_{10}}^{I_1} dI_1\omega_1(I_1) + \int_{I_{20}}^{I_2} dI_2\omega_2(I_2) + \int_{I_{30}}^{I_3} dI_3\omega_3(I_3) = -\Gamma_0\cos\vartheta + \text{const}, \tag{4.31}$$

где

$$\Gamma_0 = \Gamma(I_{10}, I_{20}, I_{30}).$$

Вблизи резонанса можно разложить частоты ω_s:

$$\omega_s(I_s) = \omega_s(I_{s0}) + \frac{d\omega_s}{dI_s}(I_s - I_{s0}).$$

Подставляем это выражение в (4.31). Линейные члены по I_s при этом сокращаются в силу соотношений (4.30):

$$\omega_1I_1 + \omega_2I_2 + \omega_3I_3 = \omega_1I_1 - \frac{m_2}{m_1}\omega_2I_1 - \frac{m_3}{m_1}\omega_3I_1 =$$
$$= \frac{1}{m_1}I_1(m_1\omega_1 - m_2\omega_2 - m_3\omega_3) = 0.$$

Поэтому остаются только квадратичные члены, которые дают

$$\mathcal{H} = {}^1/_2\sum_{s=1}^{3}\frac{d\omega_s}{dI_s}(I_s - I_{s0})^2 + \Gamma_0\cos\vartheta = \text{const}. \tag{4.32}$$

Выражение для $\mathcal{H}$ есть интеграл нелинейного трехволнового резонанса. Он определяет ширину резонанса по действию:

$$\Delta I \sim \left(\frac{\Gamma_0}{|d\omega/dI|}\right)^{1/2}, \tag{4.33}$$

или по частоте:

$$\Delta\omega \sim \left(\Gamma_0\left|\frac{d\omega}{dI}\right|\right)^{1/2}. \tag{4.34}$$

Поскольку в системе, движущейся с волной,

$$H_s \sim k_s\alpha_s^{3/2}, \quad \alpha_s = u_s - 1,$$

то

$$\frac{d\omega_s}{dH_s} \sim \alpha_s^{-1/2}, \quad \frac{d\omega_s}{dI_s} \sim \frac{k_s}{\alpha_s^{1/2}}. \tag{4.35}$$

Подставляя (4.35) в (4.34), находим

$$\Delta\omega \sim (|V_{123}|\alpha^3k^4)^{1/2}. \tag{4.36}$$

В частности, m-я гармоника нелинейной волны имеет порядок уширения из-за нелинейного резонанса $m\Delta\omega$. При переходе от (4.33), (4.34) к (4.36) мы учитываем, что для $m_s < N_s$ имеется соотношение

$$N_s = \alpha_s^{1/2}/k_s.$$

Взаимодействие трех волн приводит к появлению на их профилях малых по амплитуде модуляций, имеющих вид регулярной ряби. Она аналогична фазовым колебаниям связанных осцилляторов. Однако рябь на волнах сопровождается не только модуляцией амплитуды волн, но и модуляцией скорости распространения волн. Амплитуда колебаний скорости волн равна

$$\Delta u \sim \Delta\omega/k.$$

Решение уравнений движения (4.28) может быть получено подобно тому, как это делалось в предыдущем пункте для уравнений (4.13). Мы их здесь не выписываем. Важно лишь, что задача о резонансном взаимодействии стационарных нелинейных волн сводится к укороченным уравнениям с той же физической интерпретацией.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 9

1. Одно и то же нелинейное уравнение может иметь сильно различающиеся типы решений. Это приводит, в частности, к тому, что, например, существуют различные варианты — аналоги метода ВКБ. Каждый из них автоматически учитывает тот круг препятствий, которые следует преодолеть. Различные варианты усреднения, использующие параметры медленности и малости, содержатся в работах Боголюбова и Митропольского [3, 4]. Экспоненциально малые поправки к изменению величины действий волны в слабонеоднородной среде также могут быть вычислены в определенном варианте метода усреднения [5]. Мы здесь не затрагиваем уже таких более сложных вопросов, как распространение волн в случайно неоднородных средах, где существует своя специфика задач (см., например, [6]).

2. Многообразие различных видов нелинейных сред привело к большому числу различных структур гамильтоновских уравнений. Укажем здесь на ряд обзоров [7, 9, 10], в которых обсуждаются эти вопросы.

3. Распадная неустойчивость волн представляет собой некоторый универсальный тип неустойчивостей и имеет различные модификации в зависимости от той или иной физической ситуации. По существу, она представляет собой вариант параметрической неустойчивости или в нелинейном варианте — нелинейного резонанса, которые мы рассматривали в части I.

Распадная неустойчивость была описана в работе [11]. Различные модификации параметрических неустойчивостей изложены в обзорах [12—14, 21].

Картина распада имеет аналогию в классической механике [14] и сходна с процессом свободного вращения несимметричного волчка вокруг оси, близкой к главной оси инерции (см. [15]).

Особую роль распадная неустойчивость играет в теории кинетического описания нелинейного волнового поля. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

4. Излагаемый гамильтоновский формализм развивался в работах [16—18]. В них же он применялся к исследованию различных нелинейных резонансов и стохастичности.

Глава 10

ХАОС В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

Движение нелинейных сред представляет собой сложную, более многообразную картину, чем динамика отдельных частиц. Существование неустойчивостей во всех без исключений нелинейных средах делают их объектом, в котором возникновение хаоса должно представляться

не менее, если не более, типичным по отношению к системам с малым числом степеней свободы. Здесь, однако, более распространен термин «турбулентность», чем «хаос», хотя оба они выражают по существу одно и то же, если в системе нет внешних случайных источников. Наш глаз давно привык наблюдать на поверхности жидкости переход от регулярного движения волн к их неупорядоченной, сложной и завихренной картине, когда сила ветра приводит к увеличению волнения. С турбулентным движением мы сталкиваемся повсеместно, и его возникновение нам кажется естественным.

Парадоксальность ситуации заключается в том, что там, где мы давно считаем появление хаоса, или турбулентности, обычным явлением, его формальное объяснение оказывается неожиданно трудным. В то же время не мешает вспомнить о том, что существование хаоса в системе всего лишь из двух степеней свободы казалось в значительной мере невероятным, хотя его объяснение не столь уж технически сложно, по крайней мере, для некоторых упрощенных моделей.

Это небольшое введение показывает, что нас ожидают определенные проблемы. Конечно, они связаны с тем, что даже регулярные волновые движения определяются большим числом степеней свободы. Однако эти трудности, по-видимому, не являются единственными.

§ 1. Слабонелинейные поля

Каким бы путем мы ни желали построить достаточно наглядную картину временной эволюции волновых процессов, нам приходится сначала использовать то или иное понятие степени свободы. Мы уже обсуждали частично этот вопрос в § 1 гл. 9. Удобство, связанное с этим понятием, может не только отражать реально существующий факт, но и приводить к очень сильным упрощениям в решаемых задачах. Классическими примерами таких степеней свободы являются различного рода квазичастицы в линейных средах. Слабое возмущение не очень сильно портит «язык квазичастиц», и это просто означает, что квазичастица является достаточно устойчивым образованием. Слабое взаимодействие квазичастиц позволяет говорить об аналогии с взаимодействием частиц, которое меняет состояние частиц, не разрушая их при этом или переводя их в другие частицы.

В случае сред со слабой нелинейностью затравочными степенями свободы являются плоские волны с соответствующим законом дисперсии. Они и играют роль квазичастиц, взаимодействие которых обусловливается нелинейными свойствами среды. В § 3 гл. 9 было показано, что взаимодействия, в которых участвуют три и более волны, могут приводить к резонансам и неустойчивостям параметрического характера. Именно здесь и следует искать причины, порождающие турбулентную динамику.

Построение отображения. Мы будем исходить из того, что в слабонелинейной среде возбуждены колебания с дискретным спектром. Число их достаточно велико, а нелинейность достаточно мала. Гамильтониан такой системы мы уже выписывали в § 1 гл. 9 (см. формулу (9.1.33)). Если ограничиться для простоты только кубической нелинейностью и нелинейностью четвертой степени в гамильтониане, то он будет иметь вид

$$H = {}^1/_2 \sum_k (\dot{y}_k \dot{y}_{-k} + \omega_k^2 y_k y_{-k}) + {}^1/_3 \sum_{k_1,\, k_2,\, k_3} V_{k_1 k_2 k_3} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} \delta(k_1 + k_2 + k_3) + \\ + {}^1/_4 \sum_{k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4} V_{k_1 k_2 k_3 k_4} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} y_{k_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \qquad (1.1)$$

В нем величина V предполагается малой.

Мы уже видели ранее, что выражениям типа (1.1) можно придать различный физический смысл, так как многие и очень не похожие друг на друга задачи могут быть приведены к гамильтониану (1.1). Сейчас нам удобно рассматривать его просто как энергию взаимодействия системы из большого

числа осцилляторов с амплитудой y_k. Тогда индекс k просто обозначает номер осциллятора, уравнение движения которого имеет вид

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = -\sum_{k_1, k_2} V_{kk_1k_2} y_{k_1} y_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) - \\ - \sum_{k_1, k_2, k_3} V_{k_1k_2k_3} y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3} \delta(k - k_1 - k_2 - k_3). \quad (1.2)$$

Оно получается с помощью обычных гамильтоновских уравнений

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_{-k}}, \qquad \frac{d\dot{y}_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_{-k}}$$

и имеет элементарную физическую интерпретацию. Это — уравнение движения k-го осциллятора, взаимодействующего нелинейным образом со всеми остальными осцилляторами. Если пренебречь взаимодействием, т. е. правой частью в (1.2), то

$$y_k = y_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \varphi_{k,(0)}), \quad (1.3)$$

где $y_k^{(0)}$ — амплитуда колебания и $\varphi_{k,(0)}$ — начальное значение фазы φ_k.

Нашей ближайшей целью будет понять более детально структуру возмущения свободного движения (1.3), т. е. понять, как устроена правая часть уравнения (1.2). Для этого подставим нулевое приближение (1.3) в правую часть (1.2). Это дает

$$\ddot{y}_k + \bar{\omega}_k^2 \varphi_k = -\sum_{k_1, k_2} V_{kk_1k_2} y_{k_1}^{(0)} y_{k_2}^{(0)} \times \\ \times \cos(\omega_{k_1} t + \varphi_{k_1,(0)}) \cos(\omega_{k_2} t + \varphi_{k_2,(0)}) \delta(k - k_1 - k_2), \quad (1.4)$$

где величина $\bar{\omega}_k$ получена следующим образом. Выделим в члене четвертого порядка в (1.2) те слагаемые, которые содержат амплитуду y_k. Они имеют вид

$$3 y_k \sum_{k_1} V_{k, k_1, k_1, -k_1} y_{k_1} y_{-k_1}.$$

Если подставить сюда нулевое приближение (1.3) и усреднить это выражение по быстрым временным осцилляциям, то возникает поправка к частоте k-го осциллятора:

$$\bar{\omega} \approx \omega_k + \frac{3}{4\omega_k} \sum_{k_1} V_{k, k, k_1, -k_1} (y_{k_1}^{(0)})^2. \quad (1.5)$$

Остальными членами третьего порядка в (1.4) можно пренебречь по сравнению с более старшими членами второго порядка малости по амплитуде y. Этого, однако, нельзя было сделать в выражении (1.5), так как невозмущенные частоты осцилляторов вообще не зависят от амплитуд. Поэтому в формуле (1.5) мы оставляем первую, отличную от нуля, поправку к частоте.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (1.4). Ее зависимость от времени определяется суммой слагаемых следующего типа:

$$\exp[\pm i(\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2}) t],$$

где различные знаки принимают независимые значения.

Сделаем некоторые предположения относительно того, как устроено волновое возбуждение среды в нулевом приближении, т. е.

$$y(x, t) = \sum_k y_k^{(0)} \exp[i(kx - \omega_k t) \pm i\varphi_{k,(0)}].$$

Обозначим через ω_{max} и ω_{min} соответственно максимальную и минимальную частоты возбужденного спектра гармоник. Пусть Δk — характерное расстояние между соседними волновыми числами в пакете. Если, например, колебания среды происходят в области размером L, то

$$\Delta k \sim 2\pi/L.$$

Характерное расстояние между частотами в волновом пакете равно

$$\Omega_k = \left|\frac{d\omega_k}{dk}\right| \Delta k. \tag{1.6}$$

Если возбужден достаточно широкий пакет, то число возбужденных мод равно

$$N = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\Omega} \gg 1. \tag{1.7}$$

Далее будем считать $\omega_{\min}$ близким к нулю.

Последнее и важное предположение состоит в том, что все характеристики гармоник в пакете $y_k^{(0)}$, $\varphi_{k,(0)}$ и Ω_k медленно изменяются с изменением k. Таким же свойством пусть обладают и матричные элементы взаимодействия $V_{kk_1k_2}$.

При сделанных предположениях можно приближенно представить уравнение (1.4) при $N \to \infty$ в виде

$$\ddot{y}_k + \bar{\omega}_k^2 y_k \approx -{}^1/_4 \beta V y_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} =$$

$$= -{}^1/_2 \pi V \frac{y_0^2}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega}, \tag{1.8}$$

где V, y_0, Ω — некоторые средние значения по пакету от величин $V_{kk_1k_2}$, $y_k^{(0)}$, Ω_k.

Основное достижение, связанное с введением аппроксимации (1.8), заключается в том, что непрерывная задача (1.4) теперь может быть приведена к дискретному виду, с которым мы уже умеем обращаться. Напомним кратко, в чем проявляется удобство введения отображения. Во-первых, явно выделены моменты времени, в которые происходит существенное изменение адиабатического инварианта осциллятора, — это моменты действия δ-функций. Интервал времени между двумя их последовательными действиями имеет порядок

$$\dot{T} = \frac{2\pi}{\Omega} \sim 2\pi \left(\left|\frac{d\omega_k}{dk}\right| \Delta k\right)^{-1}. \tag{1.9}$$

Величина (1.9), вообще говоря, изменяется от толчка к толчку, т. е. $T \neq \text{const}$. Однако эти изменения очень малы, и ими можно пренебречь. Как будет видно далее, грубый эффект возникновения хаоса не зависит от этих малых модуляций интервалов T.

Во-вторых, удобство представления (1.8) состоит в том, что коэффициент при δ-функции явно учитывает величину изменения адиабатического инварианта осциллятора.

Аналогично (9.1.36), положим

$$\begin{aligned} y_k &= \left(\frac{I_k}{2\tilde{\omega}_k}\right)^{1/2} e^{i\vartheta_k} + \text{к. с.}, \\ \dot{y}_k &= i\,({}^1/_2 I_k \tilde{\omega}_k)^{1/2} e^{i\vartheta_k} + \text{к. с.}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

вводя тем самым переменные действие (I) — угол (ϑ). Здесь

$$\tilde{\omega}_k = \bar{\omega}_k - \frac{3}{8\omega_k} V_{k,-k,k,-k} (y_k^{(0)})^2. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.8) эквивалентно задаче со следующим гамильтонианом:

$$H_k \approx \tilde{\omega}_k I_k + \frac{2\pi}{\Omega} V_0 \left(\frac{2I_k}{\omega_k}\right)^{1/2} \cos\vartheta_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{1.12}$$

где

$$V_0 = {}^1/_8 \pi V \frac{I}{\omega}. \tag{1.13}$$

Она описывает k-й осциллятор с частотой $\tilde{\omega}_k$, находящийся под действием последовательности δ-импульсов. Уравнения движения его в переменных (I_k, ϑ_k) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial \vartheta_k} = \frac{2\pi}{\Omega} V_0 \left(\frac{2I_k}{\omega_k}\right)^{1/2} \sin \vartheta_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \\ \dot{\vartheta}_k &= \tilde{\omega}_k, \end{aligned} \tag{1.14}$$

и в точности эквивалентны (1.8).

Мы уже встречались с подобным уравнением в § 1 гл. 5. Теперь, однако, имеется существенное отличие от примера, рассмотренного в § 1 гл. 5. Оно заключается в том, что нелинейность осциллятора обусловлена не только зависимостью частоты $\tilde{\omega}_k$ от собственного действия I_k, а ее зависимостью также от действий $I_{k'}$ других осцилляторов, как это видно из формул (1.5) и (1.11).

Теперь достаточно просто записать отображение, интегрируя (1.14) в окрестности δ-функций. Полагаем

$$I_{k,(n)} = I_k(t = nT - 0), \qquad \vartheta_{k,(n)} = \vartheta_k(t = nT - 0).$$

Из (1.14) получаем

$$\begin{aligned} I_{k,(n+1)} &= I_{k,(n)} + \Delta I_{k,(n)}, \\ \vartheta_{k,(n+1)} &= \vartheta_{k,(n)} + \frac{2\pi}{\Omega} \tilde{\omega}_k(I_{\bullet,(n+1)}), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $I_{\bullet,(n+1)}$ означает зависимость $\tilde{\omega}_k$ от всех действий $I_{k',(n+1)}$ и

$$\Delta I_{k,(n)} = \frac{2\pi}{\Omega} V_0 \left(\frac{2I_{k,(n)}}{\omega_k}\right)^{1/2} \sin \vartheta_{k,(n)}. \tag{1.16}$$

Локальная неустойчивость фаз. До сих пор все, что мы делаем, напоминает вывод универсального отображения нелинейных колебаний. Очевидно, что главное отличие содержится в том месте, которое учитывает взаимодействие различных волн. Это взаимодействие входит в зависимость нелинейной добавки к частоте $\tilde{\omega}_k$ от амплитуд других волн.

Для того чтобы получить самую простую оценку условий появления хаоса в системе (1.15), исследуем локальную устойчивость траекторий системы. Величины ΔI_k, как это видно из (1.16) и (1.13), являются малыми по сравнению с I_k, так как взаимодействие волн мало по амплитуде. Однако изменение фаз ϑ_k может быть большим, и именно здесь могут возникнуть такие соотношения параметров, которые приводят к локальной неустойчивости.

Действительно, из (1.15), (1.16) и (1.11) получаем

$$\frac{\delta \vartheta_{k,(n+1)}}{\delta \vartheta_{k',(n)}} = \delta_{kk'} + \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\partial \tilde{\omega}_{k,(n+1)}}{\partial I_{k',(n+1)}} \frac{\partial \Delta I_{k',(n)}}{\partial \vartheta_{k',(n)}} = \delta_{kk'} + K_{kk'} \cos \vartheta_{k',(n)}, \tag{1.17}$$

где параметр $K_{kk'}$ имеет порядок

$$K_{kk'} \sim \frac{V V_{k,-k,k',-k'}}{\omega_k \omega_{k'} \Omega^2} \frac{I}{\omega} \left(\frac{I_{k'}}{\omega_{k'}}\right)^{1/2}. \tag{1.18}$$

Упростим выражение (1.18). Будем считать переменную y безразмерной. Тогда гамильтониан H имеет размерность ω^2. Такую же размерность имеют и все матричные элементы V, $V_{kk_1k_2}$ и т. д. Однако если мы, например, рассмотрим выражение (1.1) для H, то уже из него видно, что матричные эле-

менты $V_{k_1k_2k_3}$ должны быть нормированы на N, чтобы квадратичные и кубические члены в (1.1) давали результаты одного порядка. Это означает, что

$$V \sim \omega_k^2/N.$$

С другой стороны, для большинства гармоник можно использовать определение (1.7) для N. Это дает

$$V \sim \omega\Omega, \tag{1.19}$$

где индексы k опущены, так как оценка (1.19) справедлива для всех матричных элементов.

Оценку матричных элементов $V_{k,\,k,\,k_1,\,-k_1}$, ответственных за нелинейные поправки к частотам (см. (1.5)), следует провести несколько иначе. Это связано с тем, что число диагональных элементов в $V_{k_1k_2k_3k_4}$ может быть очень малым. Мы обозначим это число через $\tilde{N}$ и заметим, что оно может быть ~ 1 и не зависит, вообще говоря, от предельного перехода $N \to \infty$. Поэтому примем просто

$$V_{k,\,k,\,k_1,\,-k_1} \sim \omega_k^2.$$

Теперь можно переписать (1.18) в виде

$$K \sim \frac{\omega}{\Omega} y_0^3, \tag{1.20}$$

где y_0 — характерная амплитуда гармоник y_k.

Параметр K может принимать различные значения даже при малых амплитудах $y_0 \ll 1$, так как расстояние между гармониками Ω может быть очень малым:

$$\Omega \ll \omega. \tag{1.20а}$$

Полезно еще до анализа сложных соотношений (1.17) остановиться подробнее на том, каков истинный малый параметр задачи. Очевидно, что изменение действия под влиянием δ-функционального толчка ΔI_k должно удовлетворять неравенству

$$\Delta I_k/I_k \ll 1. \tag{1.21}$$

Подставляем (1.16) и (1.13) в (1.21). Это дает с учетом оценки (1.19):

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \frac{V}{\omega\Omega} y_0 \sim y_0 \ll 1. \tag{1.22}$$

Таким образом, используемая нами нормировка выбрана естественным образом, при котором безразмерная амплитуда фурье-гармоники является малым параметром.

Теперь можно обратиться снова к уравнению вариации фазы колебания (1.17). Оно имеет структуру, близкую к аналогичным уравнениям, с которыми мы встречались в § 1 гл. 5 при анализе стохастической неустойчивости нелинейных колебаний. Если

$$K_{kk'} \gtrsim 1, \tag{1.23}$$

то возникает локальная неустойчивость в фазовом пространстве всюду, за исключением некоторых областей фаз ϑ вблизи точек $\vartheta_{k'} = \pi/2,\ 3\pi/2$. Размер этих областей тем меньше, чем больше K.

Представим отображение (1.15) в более явной форме. Имеем

$$\begin{aligned} I_{k,\,(n+1)} &= I_{k,\,(n)} + \left(\frac{I_{k,\,(n)}}{\omega_k}\right)^{1/2} I \sin\vartheta_{k,\,(n)}, \\ \vartheta_{k,\,(n+1)} &= \vartheta_{k,\,(n)} + 2\pi\frac{\omega_k}{\Omega} + \sum_{k'} K_{kk'} \sin\vartheta_{k',\,(n)}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

где произведено разложение величин $\tilde{\omega}_k(I_{k',\,(n+1)})$ в ряд по $\Delta I/I_{k',\,(n)}$. Хотя аналогия уравнения для фаз в (1.24) с универсальным отображением в § 1 гл. 5 очевидна, тем не менее одно обстоятельство является новым. Растяжение фазы ϑ_k происходит по многим направлениям $\vartheta_{k'}$, вдоль которых выполнено условие (1.23). Это приводит к важным физическим следствиям. Остановимся сначала на энтропии Колмогорова—Синая для такого рода системы.

***K*-энтропия.** Ранее, в § 2 гл. 4, энтропия Колмогорова—Синая вводилась из простых качественных соображений об эволюции огрубленного фазового объема $\overline{\Delta\Gamma}$ в неустойчивом случае (см. формулу (4.2.12)):

$$\overline{\Delta\Gamma}(t) = \Delta\Gamma_0 e^{ht}. \tag{1.25}$$

В том случае, когда имеется N_0 неустойчивых степеней свободы с инкрементами неустойчивости h_i, выражение (1.25) легко обобщается:

$$\overline{\Delta\Gamma} = \Delta\Gamma_0 \exp\left(t\sum_{i=1}^{N_0} h_i\right). \tag{1.26}$$

Отсюда в соответствии с определением (4.2.15) получаем обобщение динамической энтропии:

$$h = \lim_{\Delta\Gamma_0 \to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\overline{\Delta\Gamma} = \sum_{i=1}^{N_0} h_i. \tag{1.27}$$

Грубо говоря, при наличии N_0 приблизительно одинаково неустойчивых направлений K-энтропия возрастает в N_0 раз.

Выражение (1.27) можно применить для волнового поля, в котором взаимодействие гармоник определяется отображением (1.24). Из формулы (1.17) при условии сильной локальной неустойчивости

$$K_{kk'} \gg 1 \tag{1.28}$$

следует, что

$$\left|\frac{\delta\vartheta_{k,\,(n+1)}}{\delta\vartheta_{k',\,(n)}}\right| \sim K, \tag{1.29}$$

где индексы k, k' в K в дальнейшем опускаются. При этом под K понимается некоторое усредненное значение $K_{kk'}$ по волновому пакету. Кроме того в (1.29) опущен множитель $\cos\vartheta_{k,\,(n)}$, т. е. тем самым делается пренебрежение малыми островками устойчивости. Пусть теперь

$$D(\vartheta_{k,\,(n)}) = d\vartheta_{k_1,\,(n)}\, d\vartheta_{k_2,\,(n)} \ldots d\vartheta_{k_{N_0},\,(n)}$$

есть элемент фазового объема подпространства фазового пространства на n-м шаге отображения, причем осями этого подпространства являются только неустойчивые направления. Рассмотрим величину

$$\frac{D(\vartheta_{k,\,(n)})}{D(\vartheta_{k,\,(0)})} = \left|\frac{\delta\vartheta_{k_i,\,(n)}}{\delta\vartheta_{k_j,\,(n)}}\right| \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ N_0).$$

Она характеризует изменение фазового объема за n шагов, которое выражается через соответствующий якобиан. Имеем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{D(\vartheta_{k,\,(n)})}{D(\vartheta_{k,\,(0)})} = \left|\frac{\delta\vartheta_{k_i,\,(n)}}{\delta\vartheta_{k_j,\,(n-1)}}\right| \cdot \left|\frac{\delta\vartheta_{k_i,\,(n-1)}}{\delta\vartheta_{k_j,\,(n-2)}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{\delta\vartheta_{k_i,\,(1)}}{\delta\vartheta_{k_j,\,(0)}}\right|.$$

Воспользуемся выражением (1.29). Это дает

$$D(\vartheta_{k,\,(n)}) \sim (N_0^2 K^{N_0})^n D(\vartheta_{k,\,(0)}).$$

Подставляя отсюда выражение для $D(\vartheta_{k,(n)})$ вместо $\overline{\Delta\Gamma}$ в (1.27), получаем

$$h \sim N_0 \ln K + 2 \ln N_0 \approx N_0 \ln K \tag{1.30}$$

при $N_0 \gg 1$.

Отметим, что главный член в формуле (1.30) соответствует обычному выражению для K-энтропии системы, в которой локальная неустойчивость развивается независимо по N_0 координатным направлениям фазового пространства. Поправочный член в (1.30) обусловлен в рассматриваемой модели тем, что различные степени свободы не независимы.

Расцепление корреляций. Выражение (1.30) показывает в явном виде, что инкремент локальной неустойчивости траекторий в фазовом пространстве увеличивается примерно в N_0 раз по сравнению со случаем одной степени свободы. На основании этого следует ожидать, что время расцепления корреляций фаз волн должно соответственно уменьшаться в N_0 раз. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий коррелятор:

$$\mathcal{R}_k(t) = \langle\langle \exp i(\vartheta_{k,(n)} - \vartheta_{k,(0)}) \rangle\rangle, \tag{1.31}$$

где $n \approx 2\pi\Omega t \quad (n \gg 1)$; операция усреднения по фазам обозначена как

$$\langle\langle \ldots \rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N_0}} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_1,(0)} \ldots d\vartheta_{k_{N_0},(0)} (\ldots) = \frac{1}{(2\pi)^{N_0}} \int_0^{2\pi} D(\vartheta_{k,(0)})(\ldots). \tag{1.32}$$

Один из способов оценки $\mathcal{R}_k$ состоит в следующем. Воспользуемся неравенством (1.28) и будем оставлять в рекуррентном соотношении для фаз (1.24) только наиболее быстро меняющиеся члены. Тогда

$$\vartheta_{k,(n)} - \vartheta_{k,(0)} \sim \omega_k t + \sum_{k_1} K_{kk_1} \sin \left\{ \sum_{k_2} K_{k_1 k_2} \sin \left[K_{k_2 k_3} \ldots \sin \left(\sum_{kn} K_{k_{n-1}, k_n} \sin \varphi_{k_n,(0)} \right) \right] \right\}. \tag{1.33}$$

Далее следует подставить (1.33) в (1.31) и, используя определение (1.32), произвести оценку интеграла методом стационарной фазы так же, как это делалось ранее для одной фазовой переменной в § 1 гл. 5. Приведем сразу результат:

$$\mathcal{R}_k(t) \sim \exp(-t/\tau_k + i\omega_k t), \tag{1.34}$$

где время расцепления корреляций τ_k равно

$$\tau_k = \frac{2}{\Omega N_0 \ln K} = \frac{2}{N_0 \left| \frac{d\omega_k}{dk} \right| \Delta k \cdot \ln K}. \tag{1.35}$$

Формула (1.35) содержит искомый результат. Время релаксации фаз обратно пропорционально числу степеней свободы, по которым происходит перемешивание. Из сравнения (1.35) и (1.30) следует соотношение между τ_k и безразмерной K-энтропией:

$$h \sim 1/\tau_k \Omega. \tag{1.36}$$

Следует помнить, что неравенство (1.28) означало лишь, что мы рассматриваем только очень сильное перемешивание. В действительности даже при $K \ll 1$ стохастизация существует, если число степеней свободы достаточно велико. Исследование подобных случаев является сложным и требует иного подхода. Во всяком случае, можно принять условие

$$K_{kk_1} \sim 1 \tag{1.37}$$

как условие для границы сильной стохастичности. Поэтому выражение (1.37) можно рассматривать в качестве уравнения для k, которое определяет спектральные области быстрого перемешивания и отделяет их от областей, где стохастизация, если и происходит, то достаточно медленно (ком. 1).

§ 2. Проблема Ферми — Паста — Улама (ФПУ)

Эта проблема является одной из первых попыток убедиться в справедливости применения законов статистической механики к нелинейной системе с достаточно большим числом степеней свободы N. В первой работе [3] это число достигало значения 64 и, конечно, было достаточно велико. Несмотря на значительное время, которое прошло с тех пор, и на значительное число публикаций, посвященное проблеме ФПУ, некоторые вопросы, связанные с ней, остаются неясными и заслуживают внимательного к ним отношения.

Уравнения и предпосылки. Рассмотрим колеблющийся континуум — нелинейную струну. Приближенно этот континуум может быть заменен конечным числом колеблющихся осцилляторов. Запишем уравнения для движения осцилляторов в виде

$$\ddot{y}_n=(y_{n-1}-2y_n+y_{n+1})+\beta[(y_{n+1}-y_n)^2-(y_n-y_{n-1})^2] \qquad (n=0, 1, \ldots, N-1), \tag{2.1}$$

где смещение осцилляторов y_n удовлетворяет граничному условию цикличности

$$y_0=y_N.$$

Системе (2.1) приближенно соответствует уравнение колебаний струны:

$$y_{tt}=y_{xx}(1+3\beta y_x^2)+\gamma y_{xxxx}, \tag{2.2}$$

где $\gamma=a^2/12$ и a — шаг цепочки, который в дальнейшем полагается равным единице.

Допустим, что создана некоторая простая конфигурация струны, соответствующая возбуждению одной или нескольких низших мод струны. Если ожидать статистическое поведение системы, то ее термализация означает передачу энергии из возбужденных мод во все остальные. Возбуждение новых гармоник должно происходить таким образом, чтобы энергии каждой из них были в среднем близки друг к другу. Это соответствует закону равнораспределения энергии по степеням свободы. Те же рассуждения можно перенести на цепочку осцилляторов (2.1). Взаимодействие гармоник или осцилляторов осуществляется благодаря нелинейным членам в (2.1) и (2.2).

Известно, что авторы работы [3] провели первые численные эксперименты в начале 50-х годов с моделью (2.1) и термализацию состояний не получили. Вместо этого энергия, которая изначально содержалась в некоторых гармониках, очень слабо передавалась в ближайшие соседние гармоники и совсем не распространялась в далекие от возбужденных гармоники. Более краткая формулировка результата: вместо термализации имело место квазипериодическое движение. В дальнейшем квазипериодичность была получена еще в ряде работ. Возникшие противоречия между исходными рассуждениями о необходимости перемешивания между гармониками и результатами численного анализа получили название проблемы ФПУ. После работы Крускала и Забуского [6] проблема ФПУ дала толчок к развитию теории совсем по другому направлению — создание методов точного интегрирования некоторых нелинейных задач (ком. 2).

О переходе «дискретность — непрерывность». Следует заметить, что всякий реальный численный анализ всегда обращен к решению конечно-разностной задачи, которая может быть представлена в данном случае системой (2.1) с достаточно большим N. Поэтому мы оказываемся перед необходимостью ответа, по крайней мере, на два очень трудных вопроса: что мы теряем, переходя от уравнения струны (2.2) к системе осцилляторов (2.1) и что мы приобретаем нового при этом переходе. Сравнительно долго было трудно даже представить себе, на каком пути следует искать ответы. Сейчас положение изменилось, и мы при анализе дискретных цепочек в третьей

части приведем некоторые результаты, объясняющие, что происходит при переходе от дискретного к непрерывному случаю. Здесь мы сделаем лишь некоторые предварительные замечания, указывающие путь, на котором следует искать различие. Рассмотрим, например, уравнение

$$\ddot{x}+K\sin x=0, \tag{2.3}$$

где значения параметра K произвольны. Уравнение (2.3) решается в квадратурах и не содержит никаких неожиданностей. Заменим (2.3) конечно-разностным уравнением

$$I_{n+1}=I_n-\tau K\sin x_n, \qquad x_{n+1}=x_n+\tau I_{n+1}, \tag{2.4}$$

где τ — интервал разбиения временной оси и

$$x_n\equiv x(t_n)=x(n\tau), \qquad I_n\equiv I(t_n)=I(n\tau)=(x_n-x_{n-1})/\tau.$$

Уравнения (2.4) содержат стохастические траектории. Мы уже с ними встречались для стандартного отображения. Избежать таких решений в системе (2.4) нельзя, даже если $\tau^2K\ll 1$. Это становится очевидным, если совершить точный переход от (2.4) к дифференциальному уравнению движения. Вместо (2.3) имеем

$$\ddot{x}+K\sin x\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(2\pi n\frac{t}{\tau}\right)=0. \tag{2.5}$$

Тот член в сумме в (2.5), который соответствует $n=0$, приводит к уравнению (2.3). Все остальные члены — «лишние». Они приобретаются из-за использования конечно-разностной схемы (2.4), и их роль легко оценить. Рассмотрим, например, первые гармоники в (2.5) с $n=\pm 1$. Мы уже знаем, что обусловленное ими возмущение разрушает сепаратрису системы (2.3) и образует в ее окрестности стохастический слой. Его ширина пропорциональна $\exp(-1/4\tau\sqrt{K})$ и определяет в фазовом пространстве область, где происходит движение с перемешиванием при любых τ.

Неадекватность перехода к конечно-разностному описанию становится еще более ощутимой при увеличении числа степеней свободы. В общем случае дискретизация уравнений даже при малых значениях τ всегда приводит к появлению малых областей стохастичности $\sim\exp(-\text{const}/\tau)$, которые принципиально изменяют характер решений. Это обстоятельство всегда следует иметь в виду. Оно определяет минимальную степень качественных отличий, возникающих при замене непрерывной задачи дискретной.

При анализе проблемы ФПУ мы будем обращаться к системе (2.1), описывающей конечное число осцилляторов (ком. 3).

Оценка области стохастичности. Введем нормальные координаты q_k с помощью соотношений

$$y_m=\left(\frac{2}{N}\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{N}q_k\sin\frac{\pi km}{N}. \tag{2.6}$$

Они удовлетворяют уравнениям движения

$$\ddot{q}_k+\omega_k^2\left[1-\frac{3\beta}{4N}\omega_k^2(2-\omega_k^2)\,q_k^2\right]q_k=\frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,\,k_2,\,k_3}V_{kk_1k_2k_3}q_{k_1}q_{k_2}q_{k_3}, \tag{2.7}$$

где $V_{kk_1k_2k_3}$ — матричный элемент, вид которого легко устанавливается, и мы его для простоты выписывать не будем, а нормальные частоты осцилляторов равны

$$\omega_k=2\sin\frac{\pi k}{2N}. \tag{2.8}$$

Система связанных осцилляторов (2.7) уже знакома нам. Параметр β характеризует взаимодействие осцилляторов и далее полагается малым.

В нулевом приближении

$$q_k^{(0)} = c_k(t)\cos\vartheta_k; \qquad \vartheta_k = \bar{\omega}_k t + \text{const}, \tag{2.9}$$

где c_k — амплитуды колебаний, а $\bar{\omega}_k$ — частоты

$$\bar{\omega}_k = \omega_k + \delta\omega_k; \qquad \delta\omega_k = -\frac{3\beta}{16N}\omega_k^3(2-\omega_k^2)c_k^2. \tag{2.10}$$

Здесь $\delta\omega_k$ — поправка к частоте за счет ангармонизма колебаний. Подстановка (2.9) в (2.7) дает первое приближение

$$\ddot{q}_k + (\omega_k + \delta\omega_k)^2 q_k = \frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,\,k_2,\,k_3} V_{kk_1k_2k_3}c_{k_1}c_{k_2}c_{k_3}\cos\vartheta_{k_1}\cos\vartheta_{k_2}\cos\vartheta_{k_3}. \tag{2.11}$$

Отсюда видно, что в системе (2.11) могут возникать резонансы при условиях

$$n\bar{\omega}_k + \sum_{i=1}^{3} n_i\omega_i \approx 0; \qquad n,\ n_i = \pm 1. \tag{2.12}$$

Определим ширину резонанса. Для этого подставим (2.9) в (2.11) и удержим лишь старшие члены. Это дает уравнение для амплитуд c_k

$$-2\omega_k\dot{c}_k\sin\vartheta_k = \frac{\beta}{8N}\sum_{k_1,\,k_2,\,k_3} V_{k_1k_2k_3k}c_{k_1}c_{k_2}c_{k_3}\cos\vartheta_{k_1}\cos\vartheta_{k_2}\cos\vartheta_{k_3}.$$

В этой формуле зафиксируем какой-либо резонансный член и оставим только его. Например, пусть это будет член, в котором резонанс (2.12) выполняется при $n=1$, $n_1=n_2=n_3=-1$. Тогда

$$\dot{c}_k \sim \frac{\beta}{64N\omega_k}V_{kk_1k_2k_3}\cos(\vartheta_k - \vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_2} - \vartheta_{k_3}). \tag{2.13}$$

Предположим далее, что ширина резонанса определяется амплитудой Δc_k. Это означает, что ширина резонанса по частоте равна

$$\Delta\omega_k = \frac{d\bar{\omega}_k}{dc_k}\Delta c_k = \frac{d\delta\omega_k}{dc_k}\Delta c_k. \tag{2.14}$$

Та же величина $\Delta\omega_k$ определяет и расстройку резонанса. Поэтому интегрирование (2.13) по времени с учетом (2.9), (2.10) и (2.14) дает

$$\Delta\omega_k \sim \frac{\beta}{64N\omega_k}V_{kk_1k_2k_3}c_{k_1}c_{k_2}c_{k_3}\frac{1}{\Delta\omega_k}.$$

Отсюда

$$\Delta\omega_k \sim \left[\frac{\beta}{64N\omega_k}V_{kk_1k_2k_3}c_{k_1}c_{k_2}c_{k_3}\right]^{1/2}. \tag{2.15}$$

Формула (2.15) выражает ширину изолированного резонанса.

Положение ближайших резонансов определяется структурой спектра. Расстояние между ними равно

$$\Delta_k \sim |\omega_{k+1} - \omega_k| \sim \left|\frac{d\omega_k}{dk}\right| = \frac{\pi}{N}\left|\cos\frac{\pi k}{2N}\right|.$$

Отсюда условие возникновения стохастичности может быть записано как условие перекрытия резонансов

$$\overline{K} = \Delta\omega_k/\Delta_k \geqslant 1. \tag{2.16}$$

Его можно также переписать в другом виде. Для этого введем безразмерный параметр нелинейного возмущения, который согласно (2.1), (2.6) и (2.7) равен

$$\varepsilon \sim \beta\omega^2 y^2 \sim \beta E/N, \tag{2.17}$$

где E — полная энергия колебаний цепочки. Если k — некоторый средний номер возбужденных мод и $k \ll N$, то условие (2.16) с помощью (2.17) можно

переписать в виде

$$\varepsilon > \text{const}/k. \tag{2.18}$$

Это означает, что для возникновения достаточно сильного хаоса следует возбуждать достаточно широкие пакеты гармоник с большими значениями k.

Конечно, способ получения границы стохастичности, использующий неравенство (2.16), является достаточно грубым. Он, в частности, не дает возможности отделить точно интегрируемые задачи от тех, в которых возникает стохастичность. Иными словами, он ничем не выделяет особые (интегрируемые) случаи. Это и естественно, так как все упрощения, которые были сделаны, для того чтобы получить конечный ответ в очень сложной задаче, рассчитаны на типичные ситуации. Именно к таким случаям и относятся неинтегрируемые модели с числом степеней свободы $N \geqslant 2$.

Как уже отмечалось, более конкретное замечание об условиях возникновения хаоса в цепочках будет сделано в специальном разделе.

§ 3. Турбулентность слабонелинейного поля

Мы рассмотрели некоторые варианты слабонелинейного волнового поля. Нелинейное взаимодействие волн может быть описано либо как взаимодействие осцилляторов, либо как взаимодействие отдельных гармоник. В определенных условиях это взаимодействие приводит к хаотизации фаз волн. В таких случаях можно перейти к статистическому способу описания волн и ввести функцию распределения по некоторым подходящим переменным. Эта возможность порождает другой взгляд на волновое поле, так как в результате хаотической динамики фаз волн возникает макроскопическое движение, обычно называемое турбулентным.

Здесь, пожалуй, стоит несколько задержаться на понятии турбулентности. В классической гидродинамике за ним закрепилось понятие не просто нерегулярного движения, а движения, в котором, кроме нерегулярности, происходит еще направленный поток энергии от крупных масштабов к мелким. Последние годы, в течение которых происходило развитие теории хасса, многое изменилось в этих представлениях. О масштабах изменений проще всего судить по появлению таких новых понятий, как турбулентные структуры и турбулентный кристалл. Последний пример особенно эффектен, так как никаких макропотоков энергии в нем не существует.

Мы будем употреблять, как это делалось на протяжении всей книги, понятие турбулентности в самом широком смысле, имея в виду возникновение хаотического движения из регулярного. В то же время обсуждение специальных случаев турбулентности гидродинамического типа будет всегда специально оговариваться. Более того, по аналогии с классической гидродинамикой мы будем использовать термин ламинарного движения для обозначения его регулярного (неслучайного) характера. Остановимся подробнее на различных особенностях перехода от ламинарного движения к турбулентному в слабонелинейных полях.

Основное кинетическое уравнение. Обычно статистическое описание задачи связано с некоторой процедурой огрубления информации о траектории частицы. Она приводит к сокращению числа переменных, характеризующих состояние системы. Хотя при этом теряется значительная доля сведений о состоянии частицы (или квазичастицы, т. е. волны), но сохраняется достаточная информация о макроскопическом характере движения или вероятном распределении по состояниям системы. Таких процедур огрубления может быть несколько. В результате возникает некоторая иерархия процессов сокращения описания системы.

Простейшим примером такой последовательности может служить самая обычная ситуация. Газ частиц можно описать с помощью одночастичной функции распределения. Не интересуясь ею, можно разработать процедуру

обрезания моментов функции распределения частиц, приводящую к гидродинамическим уравнениям. Однако и здесь движение может характеризоваться несколькими масштабами, и можно провести дальнейшее огрубление системы уравнений. Например, не интересуясь какими-либо мелкомасштабными возмущениями, можно получить описание только эволюции на больших расстояниях и на больших временах.

Сейчас нам предстоит в известной степени проделать подобного рода путь с нелинейным волновым полем. Главная трудность здесь связана с пониманием не только того, как огрубляется движение, но и с представлением об условиях, когда эта возможность существует. Редко когда удается формально строго провести всю отмеченную программу. Поэтому, как правило, в основе всех операций сокращения описания задачи лежит понимание происходящих физических процессов.

Нам понадобилось это предисловие, так как теперь мы встретились с физическим объектом, принципиально отличающимся от частиц. Нелинейное волновое поле, вообще говоря, не позволяет единственным способом свести задачу к некоторой конечномерной динамической системе. Каждый случай, когда такое происходит, следует рассматривать как удачу в физической интерпретации задачи.

Возможность получить некоторые, даже весьма грубые, условия хаотизации фаз волн при слабой нелинейности прокладывает путь для первого шага сокращения описания (ком. 4). Действительно, пусть газ волн описывается совокупностью переменных (I_k, ϑ_k), т. е. переменными действие—угол для каждой из волн. Тогда в силу, например, уравнений движения (1.24) и условий (1.22) и (1.23) свойства переменных (I_k, ϑ_k) резко разделяются. Изменение ΔI_k на одном шаге отображения мало, в то время как изменение фаз $\Delta\vartheta_k$ очень велико. Поэтому можно провести усреднение по случайно изменяющимся фазам ϑ_k. В результате этого состояние системы, т. е. волнового поля, будет описываться функцией распределения

$$F = F(I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_N}; t). \tag{3.1}$$

Она зависит уже от N, а не от $2N$ переменных и нормирована следующим образом:

$$\int dI\, F(I, t) = 1,$$

где принято сокращенная запись и

$$dI \equiv dI_{k_1} \ldots dI_{k_N}.$$

Кроме того, что функция распределения (3.1) не содержит информации о фазах гармоник поля, она автоматически отражает еще одну информационную потерю. Мы уже видели, что не все фурье-компоненты поля эквивалентны. Некоторые обладают свойством локальной неустойчивости по фазам, но есть и такие, которые ее не имеют. Это те гармоники, для которых не выполняются условия (1.23) или (2.18) или у которых начальные условия попадают в область устойчивости. Степени свободы, соответствующие таким гармоникам, не попадают в число переменных, от которых зависит F.

Если бы мы рассмотрели все координаты N степеней свободы, для которых существует перемешивание по фазам, то нам следовало бы ввести функцию распределения

$$f(I, \vartheta) \equiv f(I_{k_1}, \vartheta_{k_1}; I_{k_2}, \vartheta_{k_2}; \ldots; I_{k_N}, \vartheta_{k_N}; t),$$

зависящую от N действий и N фаз. Она удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \dot{\vartheta}_k \frac{\partial f}{\partial I_k} + \sum_k \dot{I}_k \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} = 0. \tag{3.2}$$

Используя канонические уравнения движения

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_k} = -\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial \vartheta_k},$$
$$\dot{\vartheta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k} = \frac{\partial H_0}{\partial I_k} + \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial I_k} = \omega_k + \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial I_k}, \tag{3.3}$$

представляем уравнение (3.2) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} = \sum_k \left(\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial I_k} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_k} \right). \tag{3.4}$$

Переход от функции распределения f к функции F осуществляется с помощью оператора огрубления:

$$F = \langle\langle f \rangle\rangle, \quad \langle\langle (\ldots) \rangle\rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\vartheta_{k_1} \ldots d\vartheta_{k_N} (\ldots), \tag{3.5}$$

идентичного (1.32).

Качественная сторона дальнейших действий заключается в следующем. Уравнение (3.4) решается путем разложения в ряд по степеням H_{int}. Потом производится усреднение по фазам (3.5). При этом возникают корреляторы фаз типа (1.31). Для них следует воспользоваться свойством экспоненциального расцепления корреляций (1.34). В результате возникает, например для гамильтониана (1.1), следующее уравнение для функции распределения F [1]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 4\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta[\omega] \delta[k] \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] F, \tag{3.6}$$

где принято сокращенное обозначение

$$[a] \equiv (a_{k_1} + a_{k_2} - a_{k_3}).$$

Уравнение (2.24) называется основным кинетическим уравнением. Оно имеет структуру уравнения типа Фоккера—Планка—Колмогорова и описывает диффузию в пространстве действий волновых гармоник.

Хотя уравнение (3.6) неизмеримо проще исходных уравнений (3.3) или (3.2), тем не менее оно все еще очень сложное (ком. 5). Один из путей его упрощения связан с переходом к уравнению для моментов функции распределения F, и с этим связан второй шаг в иерархии огрубленных описаний.

Кинетика фононов. Введем понятие моментов функции $F(I, t)$:

$$\langle I_{k_1} \ldots I_{k_m} \rangle = \int dI\, I_{k_1} \ldots I_{k_m} F(I, t). \tag{3.7}$$

В формуле (3.7) могут быть и совпадающие значения k_i. В этом случае возникают степени I_{k_i}.

Умножим уравнение (3.7) на I_k и проинтегрируем по всем I. В результате получаем

$$\frac{d\langle I_k \rangle}{dt} = 18\pi \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \times$$
$$\times (\delta(k_1 - k) + \delta(k_2 - k) - \delta(k_3 - k)) \delta(k_1 + k_2 - k_3) (\langle I_{k_2} I_{k_3} \rangle + \langle I_{k_1} I_{k_3} \rangle - \langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle). \tag{3.8}$$

Мы получили незамкнутое уравнение, так как в правой части (3.8) стоят моменты второго порядка. Если для них также написать уравнение движения, используя (3.6), то в него войдут моменты третьего порядка, и т. д. Так возникает бесконечная система зацепляющихся уравнений, которая эквивалентна основному кинетическому уравнению (3.6). Неэквивалентность возникает, если использовать подходящую процедуру обрезания этой цепочки и замыкания системы уравнений.

Один из наиболее простых способов получения замкнутого уравнения для $\langle I_k \rangle$ основан на методе Боголюбова и принципе ослабления корреляций в разреженных газах [9]. В данном случае он выглядит следующим образом. Величина

$$n_k \equiv \langle I_k \rangle$$

имеет смысл среднего числа квазичастиц, например фотонов, фононов, плазмонов, магнонов и др., в зависимости от того, каков физический смысл рассматриваемого нелинейного волнового поля. В дальнейшем мы, для определенности, будем называть их фононами, имея в виду под этим понятием произвольный тип квазичастиц.

Если средние числа n_k достаточно малы, то это соответствует разреженному фононному газу. Условие разреженности приводит к тому, что различные фононы слабо взаимодействуют друг с другом и, следовательно, ведут себя более или менее независимо друг от друга. Поэтому возникает основание считать фононы с различными значениями k слабо скоррелированными друг с другом. Это приводит к возможности воспользоваться соотношением

$$\langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle = \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle \quad (k_1 \neq k_2). \tag{3.9}$$

С его помощью уравнение (3.8) превращается в следующее:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 18\pi \sum_{k_1,\, k_2} \frac{|V_{k_1,\, k_2,\, -k_3}|^2}{\omega_{k_1}\omega_{k_2}\omega_{k_3}} \times$$
$$\times [2(n_{k_1}n_{k_2} + n_k n_{k_2} - n_k n_{k_1})\,\delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\,\delta(k + k_1 - k_2) -$$
$$- (n_k n_{k_1} + n_k n_{k_2} - n_{k_1} n_{k_2})\,\delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})\,\delta(k - k_1 - k_2)]. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) является аналогом уравнения Больцмана. Оно называется кинетическим уравнением для фононов. Его правая часть представляет собой специфическую форму столкновительного члена

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \mathrm{St}\{n,\ n\} \tag{3.11}$$

и приводит к возрастанию энтропии, в чем легко убедиться, вычисляя величину

$$\frac{d}{dt} \sum_k \ln n_k.$$

Прямой подстановкой убеждаемся также, что распределение

$$n_k = \mathrm{const}/\omega_k \tag{3.12}$$

является равновесным. Его физический смысл очевиден, если записать его в виде

$$\omega_k n_k = \omega_k \langle I_k \rangle = \mathrm{const} = T.$$

Полученное равенство выражает закон равнораспределения энергии по степеням свободы, а константу T можно интерпретировать как температуру фононного газа. Структура (3.10) или (3.11) не является единственной. Если бы мы рассматривали такое волновое поле, в котором резонансные условия

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \qquad k = k_1 + k_2$$

не выполнялись, а, наоборот, возможны были бы распады и рассеяния четвертого порядка, то столкновительный член приобрел бы иной вид. Вместо (3.11)

было бы уравнение типа

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \mathrm{St}\{n, n, n\},$$

в котором правая часть была бы кубической по числам квазичастиц.

Слабая турбулентность. Традиционное понятие гидродинамической турбулентности связано с возникновением статистического поля скоростей $v(x, t)$ вследствие развития неустойчивости. Это происходит следующим образом. Существует источник неустойчивости, который приводит к накачке энергии в крупномасштабные движения среды — вихри. Далее нелинейность приводит к взаимодействию различных масштабов, в результате которого происходит их дробление и образование все более и более мелких вихрей. Однако на очень малых масштабах, т. е. больших значениях волновых чисел k, начинает работать какой-либо диссипативный механизм, например вязкость. В результате этого энергия турбулентного волнового поля начинает эффективно поглощаться. Действие всех перечисленных факторов — накачки, дробления вихрей и их затухания, — приводит к установлению некоторого стационарного состояния. Оно характеризуется определенным видом спектра, т. е. зависимости спектральной плотности энергии $\mathcal{E}_k$ от k (рис. 10.1). Можно выделить три характерные области спектра. Область $k \leqslant k_s$, где функция $\mathcal{E}_k$ определяется характером источника накачки энергии; область $k \geqslant k_\nu$, где $\mathcal{E}_k$ определяется вязкими силами, и, наконец, главная область $k_s \leqslant k \leqslant k_\nu$, называемая инерционным интервалом.

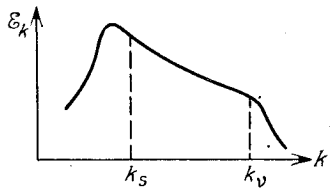


Рис. 10.1. Спектр турбулентности при постоянном потоке энергии

Теория Колмогорова, основанная на постоянстве потока энергии $\mathcal{E}_k$ по спектру в инерционном интервале, дает возможность использовать размерностные соображения для определения зависимости $\mathcal{E}_k$ от k. Согласно закону Колмогорова — Обухова, для развитой изотропной турбулентности

$$\mathcal{E}_k \sim k^{-5/3}. \tag{3.13}$$

Центральное место в исходных предположениях Колмогорова занимает предположение о локальном характере турбулентности. Оно означает, что изменение энергии масштаба с волновым числом k определяется в инерционном интервале взаимодействием только с близлежащими масштабами, т. е. с вихрями, которые имеют близкие значения волновых чисел. Иными словами, взаимодействие вихрей с сильно различающимися размерами мало.

Близкие соображения можно развить и в случае слабонелинейного волнового поля. В этом случае принято говорить о слабой турбулентности. Роль степеней свободы с разными масштабами играют квазичастицы с различными значениями k. Взаимодействие между масштабами реализуется через резонансы какого-либо порядка. В отличие от сильной турбулентности, здесь имеется в явной форме кинетическое уравнение типа, например (3.11), описывающее взаимодействие масштабов. Поэтому степенные спектры турбулентности типа (3.13) удается построить в явном виде, не прибегая к размерностным оценкам (ком. 6).

§ 4. Стохастическая неустойчивость нелинейной волны

Некоторые идеи, которые использовались при анализе слабонелинейного волнового поля, могут быть перенесены для изучения сильнонелинейных волн. Мы уже отмечали в гл. 9, что параметр сильной связи N для нелинейных периодических волн можно эффективно использовать для изучения их эволюции с помощью подходящей теории возмущения. Именно так исследовалось резонансное взаимодействие в § 3 гл. 9 между

внешним возмущением и волной. Сейчас мы пойдем дальше и рассмотрим, как существование большого числа резонансов может привести к стохастизации нелинейной волны (см. обзоры [12, 2]).

Канонические уравнения. Пусть снова, как и в § 3 гл. 9, нелинейная периодическая волна возмущается внешним периодическим источником. В § 9.3 нам удалось ввести переменные действие—угол (I, ϑ) и получить укороченные уравнения (3.28). Для анализа более общего случая нам понадобится и более точная форма уравнений движения в переменных (I, ϑ).

Для этой цели представим гамильтониан системы H в виде невозмущенной части H_0 и возмущения $\varepsilon\Psi$:

$$H = H_0[y,\ y] + \varepsilon\Psi[y;\ x,\ t]. \tag{4.1}$$

Ограничимся, как и в § 3 гл. 9, случаем, когда Ψ линейно зависит от y. Пользуясь условием периодичности по координате, представим величины y и Ψ в виде разложений

$$\begin{aligned} y &= \sum_n a_n e^{in\vartheta}, \\ \Psi &= [y;\ x,\ t] = \sum_n y_n \Phi_{-n}(t) = \sum_n a_n e^{in\vartheta}\Phi_{-n}(t), \end{aligned} \tag{4.2}$$

которые эквивалентны (9.3.22) и (9.3.18), а функция $\Phi(x,\ t)$ имеет смысл силы возмущения (см. формулы (9.3.16)).

Теперь повторим кратко процедуру введения переменных (I, ϑ). С помощью невозмущенного гамильтониана H_0 находим при $\varepsilon = 0$ функциональную зависимость

$$a_n = a_n(k,\ H_0), \qquad u = u(k,\ H_0), \tag{4.3}$$

где u—скорость невозмущенного движения волны. Определение происходит с помощью уравнения

$$\frac{dH_0}{dI} = \omega(k,\ H_0) = ku. \tag{4.4}$$

Далее полагаем, что определенная нами функциональная зависимость

$$y_n = a_n(I)\, e^{in\vartheta} \tag{4.5}$$

справедлива всегда, т. е. для системы (4.1). Это и есть производимая нами замена переменных.

Убедимся в том, что уравнения движения для (I, ϑ) являются каноническими. Имеем вместо (4.1), пользуясь разложением (4.2):

$$H = H_0(I) + \varepsilon \sum_n a_n(I)\, e^{in\vartheta}\, \Phi_{-n}(t). \tag{4.6}$$

Если бы переменные (I, ϑ) были канонически сопряженной парой, то должно было бы быть:

$$\begin{aligned} \dot I &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -i\varepsilon \sum_n n a_n(I)\, e^{in\vartheta}\, \Phi_{-n}(t), \\ \dot\vartheta &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \sum_n \frac{da_n(I)}{dI}\, e^{in\vartheta}\, \Phi_{-n}(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Первое уравнение (4.7) действительно имеет место, так как из него следует точное уравнение

$$\dot H_0 = -i\varepsilon\omega(H_0) \sum_n n a_n(H_0)\, e^{in\vartheta}\, \Phi_{-n}(t). \tag{4.8}$$

Наконец, при больших n и l может оказаться существенным еще один случай:

$$\delta\omega_{11} = \left|\frac{l}{n} - \frac{l+1}{n+1}\right| \nu \approx \frac{|n-l|}{n^2}\nu, \qquad |n-l| > 1. \tag{4.19}$$

При $n \sim l \gg 1$ и $|n-l| \sim 1$ величина $\delta\omega_{11}$ оказывается существенно меньше, чем $\delta\omega_{10}$ и $\delta\omega_{01}$, что вытекает сразу из сравнения (4.19) с (4.17) и (4.18). Поэтому этот случай приводит к минимальным расстояниям между соседними резонансами.

Перекрытие резонансов. Напомним, что ширина отдельного резонанса определяется выражением (Э.3.38):

$$\Omega = \left[\frac{4\varepsilon}{n}\mathscr{V}|\omega'(I)|\right]^{1/2}, \tag{4.20}$$

где

$$\mathscr{V} = 2n|a_n|\cdot|\Phi_{nl}|.$$

Подставляя $\mathscr{V}$ в (4.20), приводим Ω к виду

$$\Omega = (8\varepsilon|a_n|\cdot|\Phi_{nl}|)^{1/2}. \tag{4.21}$$

Условие возникновения стохастичности можем записать как условие перекрытия резонансов

$$K = (\Omega/\delta\omega)^2 \geqslant 1, \tag{4.22}$$

где под $\delta\omega$ понимается минимальное возможное значение $\delta\omega_{\alpha\beta}$. Подставляя формулы (4.17)—(4.19) и (4.21) в (4.22), получаем следующие три случая:

$$\begin{aligned}
K_{10} &= \frac{8\varepsilon n^2}{\omega^2}|a_n\Phi_{nl}\omega'(I)| \geqslant 1 \qquad (n \gg 1,\ l \geqslant 1),\\
K_{01} &= \frac{8\varepsilon n^2}{\nu^2}|a_n\Phi_{nl}\omega'(I)| \geqslant 1 \qquad (n \geqslant 1,\ l \gg 1),\\
K_{11} &= \frac{8\varepsilon n^4}{\nu^2(n-l)^2}|a_n\Phi_{nl}\omega'(I)| \geqslant 1 \qquad (n,\ l \gg 1;\ |n-l| \geqslant 1).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Выполнение какого-либо из условий (4.23) означает, что фаза волны ϑ становится случайной функцией времени и ее корреляция экспоненциально убывает со временем. Нелинейная волна покрывается стохастической рябью (рис. 10.2), и эволюцию волны можно описать с помощью кинетического уравнения.



Рис. 10.2. Стохастическая рябь на волне

Диффузионная динамика волны. Дальнейшую картину эволюции волны можно представить себе следующим образом. Внешние силы действуют на волну резонансным образом. Сначала какая-то гармоника (одна или несколько) находятся в резонансе с соответствующими гармониками волны. Вследствие сильной связи в резонанс с внешним полем накачки оказывается втянутой вся волна. На ней появляется рябь возмущения, а энергия и скорость волны изменяются. Волна выходит из резонанса, в котором она находилась. Однако вследствие перекрытия резонансов она оказывается «втянутой» в другое, тоже резонансное взаимодействие. В нем участвуют уже другие гармоники волны. Волна блуждает по резонансам, «подставляя под резонанс» различные свои гармоники.

Описанное случайное блуждание волны может быть формализовано с помощью функции распределения $f(I, t)$, в которой состояние волны характеризуется всего лишь одной переменной I. Соответствующее уравнение представляет собой уравнение типа Фоккера—Планка—Колмогорова. Его можно получить обычным способом из уравнений движения (4.7) путем усреднения по случайным фазам ϑ. То обстоятельство, что переменные (I, ϑ)

являются канонически сопряженной парой, позволяет записать это уравнение в дивергентной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial f}{\partial I}. \tag{4.24}$$

Коэффициент диффузии $D(I)$ определяется выражением

$$D(I) = \frac{1}{t_0} \langle\langle [I(t_0) - I(0)]^2 \rangle\rangle. \tag{4.25}$$

В нем скобки $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ обозначают усреднение по фазе ϑ, а время t_0 должно быть велико по сравнению со временем затухания фазовых корреляций и мало по сравнению со временем диффузии.

Из уравнения (4.11) выражаем $I(t_0)$:

$$I(t_0) - I(0) = -i\varepsilon \sum_{n,\, l} n a_n(I) \Phi_{-n,\, -l} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt_1 \exp\{i[n\vartheta(t_1) - l\nu t_1]\}.$$

Подставляем это выражение в (4.25) и выполняем усреднение по фазе при $t_0 \to \infty$. Это дает

$$D = \pi\varepsilon^2 \sum_n n^2 |a_n(I)|^2 \sum_l |\Phi_{nl}|^2 \delta(n\omega - l\nu). \tag{4.26}$$

Упростим выражение (4.26) для типичных нелинейных волн.

Как мы уже видели, для них фурье-гармоники a_n обладают простой зависимостью от n:

$$a_n \sim \begin{cases} a/N, & n \lesssim N, \\ \exp(-n/N), & n \gg N, \end{cases}$$

где a — амплитуда волны. Поэтому

$$D \sim \pi\varepsilon^2 \frac{a^2}{N^2} \Phi_0^2 \sum_{n,\, l} n^2 \delta(n\omega - l\nu), \tag{4.27}$$

где эффективная ширина δ-функции равна $\delta\omega$ и определяется одной из формул (4.17)—(4.19), а $\Phi_0 \sim |\Phi_{nl}|$. Если, например, возмущение почти монохроматично по времени, то в нем $l \sim 1$, и следует воспользоваться выражением $\delta\omega_{10}$. Это дает с учетом того, что сумма по l состоит из одного члена:

$$\sum_{n,\, l} n^2 \delta(n\omega - l\nu) \sim \frac{1}{\omega}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^3 = \frac{\nu^3}{\omega^4}. \tag{4.28}$$

Подставляя (4.28) в (4.27), получаем

$$D \sim \pi\varepsilon^2 \frac{a^2}{N^2} \frac{\nu^3}{\omega^4} \Phi_0^2. \tag{4.29}$$

Для нелинейных волн такого же типа, как решение уравнения КдВ, имеем

$$a = \alpha = u - 1, \qquad N = \sqrt{\alpha}/k, \qquad \omega = ku.$$

Отсюда

$$D \sim \pi\varepsilon^2 \Phi_0^2 \nu^3 \frac{\alpha}{k^2}. \tag{4.30}$$

Поле накачки $\Phi(x, t)$ приводит к росту энергии волны за счет передаваемой ей энергии в результате резонансных взаимодействий. Этот рост можно оценить следующим образом. Для тех же волн

$$H_0 \sim k\alpha^{3/2}. \tag{4.31}$$

Отсюда

$$I \sim \alpha^{3/2}$$

и, следовательно,

$$D \sim \pi\varepsilon^2\Phi_0^2 \frac{\nu^3}{k^2} I^{2/3}. \tag{4.32}$$

Подстановка (4.32) в (4.24) дает следующую оценку роста действия волны:

$$\langle I^{4/3} \rangle \sim \pi\varepsilon^2\Phi_0^2 \frac{\nu^3}{k^2} t.$$

Согласно (4.31), рост энергии волны можно установить из соображений размерности:

$$\langle H \rangle \sim k \left(\pi\varepsilon^2\Phi_0^2 \frac{\nu^3}{k^2} t \right)^{3/4}. \tag{4.33}$$

Это — довольно быстрый рост. Он имеет степень t, более высокую, чем при обычном броуновском движении ($\sim t^{1/2}$). Полученный эффект имеет очевидную интерпретацию. Волна сильно нелинейная, и ее энергия определяется не квадратичной зависимостью от гармоник, как в слабонелинейном случае, а кубической. Это и повышает, как нетрудно убедиться, степень t диффузионного роста энергии.

Мы показали, каким образом решается задача о диффузии нелинейной волны во внешнем поле. В основе решения лежит возможность сокращенного описания волны. Поэтому можно таким же способом исследовать накачку любых нелинейных волн. В частности, можно оценить время достижения такой энергии волны (или скорости), при которой происходит опрокидывание. Например, в случае (4.33), где критические скорости для разных видов волн $\alpha_c \sim 1$, имеем

$$t_c \sim \frac{k^2}{c_0}; \qquad c_0 = \pi\varepsilon^2\Phi_0^2\nu^3. \tag{4.34}$$

Мы получили ее, приравняв (4.33) критической энергии $k\alpha_c^{3/2} \sim k$. В действительности эта оценка несколько груба. Надо иметь в виду, что с ростом α соотношения (4.31) в волне исчезают, и закон дисперсии сильно отличается от того, которым мы пользуемся при $\alpha \ll 1$.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 10

1. Весь изложенный выше подход к исследованию возможностей перемешивания в уравнениях нелинейного волнового поля был развит в работе [1] (см. также более детальный анализ в [2]). Возможность возникновения стохастичности связывается с условиями распадных свойств спектра $\omega(k)$. В тех случаях, когда спектр является нераспадным в первом порядке, следует рассматривать в качестве основных четырехфононные процессы. Выполнение условий перемешивания по фазам и оценка коррелятора фаз позволила в [1] вывести основное кинетическое уравнение для фононов без априорной гипотезы о случайности начальных фаз. Эта часть исследований дает обоснование кинетического описания многих физических моделей с указанием границы применимости этого описания как границы стохастичности. Эти исследования были инициированы проблемой Ферми — Паста — Улама [3], с одной стороны, и проблемой слабой турбулентности [4, 5], с другой стороны. Обе они обсуждаются ниже.

2. Именно при численном анализе различных упрощенных вариантов проблемы ФПУ выяснилось, что солитоны могут в течение длительного времени не взаимодействовать друг с другом [6]. Результатом этих исследований явилось появление метода обратной задачи рассеяния для точного интегрирования уравнения КдВ [7].

3. Анализ условий появления стохастичности и численные результаты, подтверждающие его, были проведены впервые в [8]. Изложение далее следует этой работе.

4. Излагаемый далее путь получения основного кинетического уравнения был реализован в работе [1]. Обсуждение его имеется также в [2]. В полной мере он выглядит громоздко, и поэтому ниже приводится лишь главный результат.

5. Несмотря на всю свою сложность, уравнение (3.6) позволяет получать некоторые частные решения для достаточно простых видов матричных элементов $V_{k_1k_2k_3}$. С его помощью проводится оценка характерных времен различных процессов, также определяемых видом $V_{k_1k_2k_3}$.

6. Понятие слабой турбулентности появилось сначала в теории плазмы. Ему посвящен ряд обзоров [4, 5, 10, 13]. Практически сразу стало ясно, что понятие слабой турбулентности имеет прямое отношение не только к плазменной среде, но и к ряду проблем классической гидродинамики. К их числу относится турбулентность слабого волнения на поверхности жидкости. Именно в связи с последним кругом задач появились первые результаты по степенным спектрам слабой турбулентности (см. их обзор в [11]).

Глава 11

СИЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

В § 3 гл. 10 понятие турбулентности уже было кратко затронуто. Теперь мы обсудим его более подробно. В различных областях физики понятие турбулентности эксплуатируется в самых необычных ситуациях. В этом нет ничего удивительного. Классическое понятие турбулентности как хаотического движения жидкости возникло давно. Оно явилось следствием понимания того, что турбулентное движение возникает из регулярного (ламинарного) движения из-за сложных нелинейных процессов, приводящих к развитию специфических неустойчивостей. Эти неустойчивости рождают на определенном этапе стохастическую динамику. Поэтому понятие турбулентности естественным образом вошло в те области физики, где смена физической картины под влиянием каких-либо причин отражала переход от регулярного явления к хаотическому. Мы будем пользоваться понятием турбулентности именно в этом широком смысле, подразумевая возникновение локальной неустойчивости, K-энтропии и т. д.

Понятие сильной турбулентности вводится для того, чтобы отличить ее от слабой турбулентности. Мы уже видели в § 3 гл. 10, что в слабой турбулентности динамика представлена как слабое взаимодействие плоских волн, или квазичастиц. К сильной турбулентности относятся все те случаи, где подобное представление отсутствует. Существуют различные причины, по которым слабая турбулентность невозможна. Первая из них, и достаточно очевидная, заключается в том, что волны являются сильно нелинейными, хотя взаимодействие между ними может быть и слабое. Вторая причина связана с тем, что неустойчивость плоских волн имеет инкремент, сравнимый или превышающий частоту волн. В этом случае быстро теряется применимость понятия плоской волны и следует вводить иное описание (и иное представление) о последующей динамике в системе.

Существует и более конкретный круг вопросов, включающийся в понятие турбулентности,— это хаотическое движение жидкости, динамика которой удовлетворяет уравнению Навье—Стокса

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F},$$

где p—давление, $\boldsymbol{F}$—внешние силы, ν—вязкость. Если жидкость несжимаема, то уравнение непрерывности принимает вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Это направление задачи может быть охарактеризовано как необходимость получения турбулентного описания из уравнения Навье—Стокса. В этой главе мы приведем несколько характерных примеров сильной турбулентности.

§ 1. Модель Лоренца

Модель Лоренца появилась в результате целенаправленного поиска некоторых модельных уравнений, которые имели бы непериодические решения стохастического типа. Идея Лоренца заключалась в использовании таких решений для долгосрочного прогноза погоды. Стохастическая динамика, как мы уже знаем, делает бессмысленным какие-либо предсказания на времена, бо́льшие времени размешивания. Непредсказуемость обусловлена локальной неустойчивостью траекторий и существованием реальных конечных неточностей в определении начальных условий. Однако макроскопическая динамика усредненных величин на больших временах, сравнимых, например, со временем диффузии, вполне предсказуема (ком. 1).

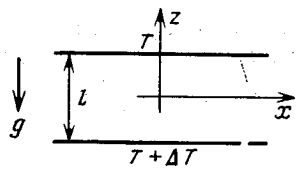


Рис. 11.1. Модель двумерной конвекции ($\Delta T > 0$)

Уравнения модели Лоренца. Физическим процессом, лежащим в основе модели Лоренца, является двумерная тепловая конвекция (рис. 11.1). Она развивается в результате подогревания нижнего слоя под действием градиента температуры и силы тяжести. Подогретая у нижней пластинки жидкость становится легче. Ее вытесняет вверх более холодная и потому более тяжелая жидкость (архимедова сила). Далее холодная жидкость, попав вниз, подогревается; теплая, поднявшись вверх, охлаждается. Процесс конвекции описывается двумя уравнениями — уравнением для функции тока ψ и уравнением теплопроводности для отклонения θ температуры от равновесного (линейного по z) закона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi &= -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{l}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \varkappa\nabla^2\theta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь ν — коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент теплового расширения, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, l — расстояние между пластинками, ΔT — разница между нижней и верхней температурами ($\Delta T > 0$). Обе границы (верхняя и нижняя) предполагаются свободными, и на них ψ и $\nabla^2\psi$ обращаются в нуль.

Рэлей рассмотрел возмущения в системе (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \sin\left(\pi k\frac{x}{l}\right)\sin\left(\pi\frac{z}{l}\right), \\ \theta &= \theta_0 \cos\left(\pi k\frac{x}{l}\right)\sin\left(\pi\frac{z}{l}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где k — волновое число возмущения. Он показал [8], что существует некоторое число

$$R_a = g\alpha l^3\frac{\Delta T}{\varkappa\nu} \tag{1.3}$$

такое, что если

$$R_a > R_c = \frac{\pi^4}{k^2}(1+k^2)^3, \tag{1.4}$$

то возмущения (1.2) неустойчивы и нарастают. Число R_a называется числом Рэлея. Максимум R_c достигается при $k = 1/\sqrt{2}$ и равен

$$\max R_c = {}^{27}/_4\pi^4.$$

Естественно, что весь этот анализ проводился в линейном приближении, и центральный вопрос заключается в том, что представляет собой динамика системы в результате развития неустойчивости. На этот вопрос можно ответить, пользуясь только нелинейной системой, а точнее,— какой-либо

разумной аппроксимацией уравнений (1.1). Используя результаты Зальцмана, Лоренц получил аппроксимирующие уравнения следующим образом.

Представим ψ и θ в виде

$$\psi = C_1 \sqrt{2}\, X \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{l}\right),$$
$$\theta = C_2 \left\{ \sqrt{2}\, Y \cos\left(\pi k \frac{x}{l}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{l}\right) - Z \sin\left(2\pi \frac{z}{l}\right) \right\}, \tag{1.5}$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы, вид которых далее не потребуется, а X, Y, Z — новые неизвестные переменные, зависящие только от времени. Если подставить (1.5) в (1.1) и отбросить осциллирующие члены, то оказывается, что полученная система уравнений является замкнутой в переменных X, Y, Z. Подобная процедура обрезания тригонометрических сумм для уравнений носит название галеркинской аппроксимации. Существенно, что в данном случае вид нелинейности системы (1.1) порождает единственную аппроксимацию с системой уравнений минимального порядка. Она имеет вид

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY \tag{1.6}$$

и называется системой Лоренца. В ней точка означает дифференцирование по безразмерному времени

$$\tau = \frac{\pi^2}{l^2}(1 + k^2)\varkappa t;$$

$\sigma = \nu/\varkappa$ — число Прандтля,

$$r = R_a/R_c, \quad b = 4/(1 + k^2)$$

(ком. 2).

Физический смысл переменных X, Y, Z очевиден из определений (1.5). Величина X пропорциональна скорости конвекции, Y — разности температур между восходящим и нисходящим потоками, Z пропорционально отклонению вертикального профиля температуры от линейного.

Фазовое пространство системы (1.6) трехмерно, и она имеет число степеней свободы $N = {}^3/_2$. Изменение фазового объема Γ со временем определяется выражением

$$\dot{\Gamma} = \mathrm{Sp}\left\| \frac{\partial(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})}{\partial(X, Y, Z)} \right\| \cdot \Gamma = \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \right) \Gamma = -(\sigma + b + 1)\Gamma. \tag{1.7}$$

Отсюда видно, что объем фазовой жидкости стремится к нулю экспоненциально с показателем

$$\gamma = \sigma + b + 1.$$

Кроме того, второе равенство в (1.7) также указывает на сжимаемость фазовой жидкости.

Если при этом траектории не выходят из сжимающегося объема, то существует некоторое предельное множество — аттрактор — с нулевым фазовым объемом, к которому притягиваются траектории при $t \to \infty$. Аттрактор может быть обычным (например, предельным циклом), но может быть и стохастическим. Последнее и было обнаружено Лоренцем при

$$\sigma = 10, \quad b = {}^8/_3, \quad r = 28$$

(рис. 11.2). Значение b соответствует $k^2 = {}^1/_2$, т. е. максимальному инкременту. Критическое число для неустойчивости стационарной конвекции (см. ниже) равно при этом $r \approx 24{,}74$. Поэтому $r = 28$ означает слабую надкритичность.

Линеаризация. Система Лоренца зависит от нескольких параметров, и поэтому исследование ее динамики является достаточно сложной задачей.

Тем не менее усилиями многих исследователей стало ясно, как возникает стохастический аттрактор. Эти результаты начинаются с работы самого Лоренца.

Простейшая операция, с которой следует начать, заключается в определении критических точек в фазовом пространстве. Линеаризация системы (1.1) в окрестности стационарного решения $X=Y=Z=0$ приводит к характеристическому уравнению

$$(\lambda+b)[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)]=0. \tag{1.8}$$

При $r>0$ уравнение (1.8) имеет три действительных корня. В области

$$0<r<1 \tag{1.9}$$

все корни $\lambda<0$, и решения устойчивы. В этом случае имеется единственный аттрактор, которым является неподвижная точка в начале координат. Ей соответствует стационарная теплопроводность Рэлея—Бенара.

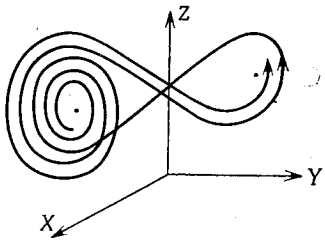


Рис. 11.2. Траектория на стохастическом аттракторе Лоренца при $r=28$ [3]

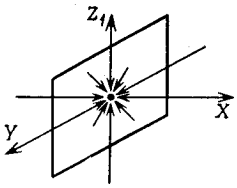


Рис. 11.3. Устойчивый аттрактор в начале координат

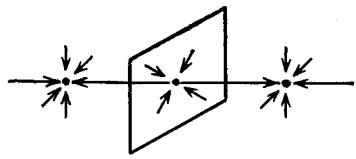


Рис. 11.4. Два устойчивых и одно неустойчивое положения равновесия

Однако при $r>1$ возникает один положительный корень. Он вызывает развитие неустойчивости и связанной с ней конвекции. Критическое значение $r_c=1$ как раз соответствует критическому числу Рэлея.

Переход через $r=1$ сопровождается потерей устойчивости аттрактора в начале координат. Появляются две новые неподвижные точки с координатами

$$X_{1,2}=Y_{1,2}=\pm\sqrt{b(r-1)}, \qquad Z_{1,2}=r-1. \tag{1.10}$$

Последовательность бифуркаций. В точке $r=1$ происходит первая бифуркация в модели Лоренца. Ее легче понять, обратившись к рис. 11.3 и 11.4. В области (1.9) все траектории притягиваются к началу координат. Поэтому говорят, что все траектории образуют устойчивое многообразие начала координат.

При $r>1$ (рис. 11.4) ответвляются два устойчивых положения равновесия (1.10). Появляется неустойчивое многообразие начала координат. С дальнейшим ростом r два собственных значения λ становятся комплексно сопряженными. Им соответствуют две спирали на рис. 11.5, а точкам притяжения спиралей — стационарная конвекция Рэлея—Бенара.

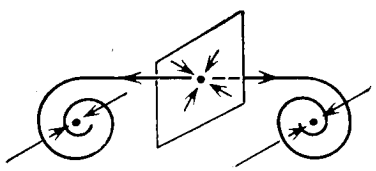


Рис. 11.5. Появление спиралей при $r>1$

Дальнейший рост r приводит к увеличению диаметра спиралей, пока они не коснутся друг друга. Это происходит при $r\approx 13{,}926$ (рис. 11.6). В результате этой бифуркации образуется гомоклиническая траектория.

При $r>13{,}926$ происходят еще некоторые бифуркации и появляются квазистохастические траектории. Мы не будем их описывать и перейдем сразу к бифуркации при $r\approx 24{,}74$.

Аттрактор Лоренца. Две устойчивые точки в центрах спиралей превращаются в неустойчивые. В результате при $r > 24{,}74$ траектория, приблизившись к одной из них, «оттолкнется» от нее и начнет путь ко второй точке (рис. 11.7). Там произойдет то же отталкивание. Возникает случайное блуждание траектории между двумя неустойчивыми точками. При этом вокруг каждой из них траектория совершает некоторое число оборотов (ср. с рис. 11.2). В пределе возникает стохастический аттрактор Лоренца.

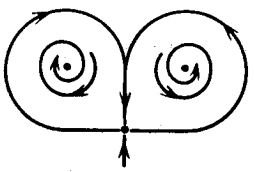


Рис. 11.6. Образование гомоклинической траектории при $r \approx 13{,}926$

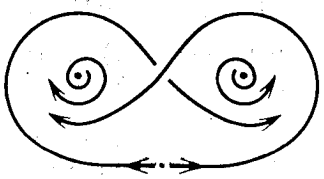


Рис. 11.7. Траектории аттрактора Лоренца

Если не быть слишком точным в определениях, то можно сказать, что любая траектория спустя какое-то время притягивается и «садится» на некоторую область в фазовом пространстве. Область устроена сложно и имеет канторову структуру. Движение на ней является стохастическим (точнее, в очень малой окрестности вблизи этой области, так как она является предельной для траектории). Описанная предельная область и является аттрактором Лоренца.

Исследование модели Лоренца показало, прежде всего, что новое понятие стохастического аттрактора может быть связано с понятием турбулентности. Действительно, модель Лоренца слишком проста, для того чтобы не ожидать стохастичности в значительно более сложных системах. Кроме того, бифуркационный анализ ее показал, что иногда существует реальная возможность построить «бифуркационное дерево», указывающее последовательность различных метаморфоз с решениями в пространстве параметров системы. Таким образом, казалось бы, можно искать путь появления турбулентности, или, иначе, построить сценарий ее развития. Мы еще остановимся на этом вопросе более подробно в конце главы.

Здесь лишь отметим главную особенность модели Лоренца, значительно ограничивающую возможности ее сравнения с реальными экспериментальными данными. Она связана, конечно, с обрезанием системы уравнений. Задача с очень большим числом степеней свободы заменена задачей с минимальным их числом. Волновое число фактически входит в систему Лоренца как параметр. Тем самым исключаются из рассмотрения всевозможные структурные элементы движения жидкости. В действительности эта сторона динамики чрезвычайно богата [10], и мы приведем в следующем параграфе небольшую информацию о структурной эволюции конвекции при переходе к турбулентности (ком. 3).

§ 2. Конвективные ячейки

Конвекция жидкости между двумя пластинками, одна из которых подогревается снизу (см. рис. 11.1), явилась моделью, в которой богатое многообразие структур и неустойчивостей дало обильный материал для изучения механизма возникновения турбулентности. Сравнительно недавно появилась еще одна система, в которой также оказалось возможным достаточно хорошо наблюдать смены структур и даже образование дефектов в них. Это — электрогидродинамическая конвекция в жидких кристаллах. Ниже мы остановимся кратко на особенностях наблюдаемых структур. Мы приведем экспериментальные результаты, из которых следует, что

бифуркации структур сопровождаются сменами волновых чисел, определяющих эти структуры. Путь, ведущий к турбулентности, не может быть описан только временной динамикой. Конечно, пространственная и временная последовательности бифуркаций скорее всего зацеплены друг с другом. Однако то, как это происходит, остается пока неясным. Мы увидим, что существует очень много эквивалентных физических ситуаций между структурами в твердом теле и структурами в конвективной жидкости. Отсюда останется совсем немного для того, чтобы ввести понятие турбулентного кристалла.

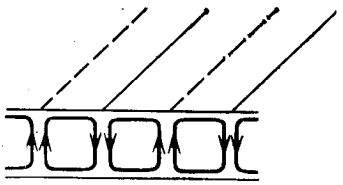


Рис. 11.8. Конвективные валы

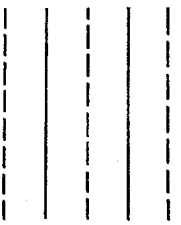


Рис. 11.9. Конвективные валы (вид сверху)

Но точно так же, как в твердом теле, можно будет ввести понятие дальнего порядка в структурной организации ячеек жидкости. И точно так же, как в твердом теле, появятся различные дефекты в структурах.

Конвекция Бенара — Рэлея. Такая конвекция определяется уже приведенными уравнениями (1.1), которые принято записывать в переменных $(\boldsymbol{v}, \theta)$ в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = P_r\{-\nabla p + \Delta \boldsymbol{v} - \boldsymbol{g}\theta\}, \\ &\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\theta = \Delta\theta + R_a \boldsymbol{g}\boldsymbol{v}, \\ &\nabla \boldsymbol{v} = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где P_r — число Прандтля, обозначаемое как σ в системе Лоренца, а $\boldsymbol{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, направленный по $-z$.

Основные приближения, в которых принято исследовать экспериментально и теоретически тепловую конвекцию,— это малые надкритичности и большое отношение горизонтальных размеров к вертикальному.

Из уже упоминавшихся результатов Рэлея [8] следовало, что вследствие неустойчивости при $R_a > R_c$ должны возникать стационарные конвективные валы (рис. 11.8), где стрелками указаны направления линий тока, а координатные оси те же, что и на рис. 11.1. Их структура определяется лишь одним волновым числом, для которого инкремент максимален. Поэтому валы образуют правильный решеточный слой, подобно кристаллическому монослою. Чем резче граница валов (рис. 11.9), тем меньшее влияние оказывает вклад других значений волнового числа [11].

В то же время исследование Бенаром термоконвекции в силиконовом масле показало [12], что образуются вертикальные ячейки шестигранной формы — гексагоны (рис. 11.10). Приведем элементарные соображения, показывающие, откуда вообще могут взяться какие-либо структуры.

Уравнения (2.1) содержат квадратичную нелинейность. Поэтому, если записать систему (2.1) для фурье-гармоник v_x, v_z и θ, то возникнут ограничения, связанные с законом сохранения импульса волн. Для любой взаимодействующей тройки волн должно выполняться условие

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0, \tag{2.2}$$

где все векторы $\boldsymbol{k}_i$ лежат в плоскости (x, y). Простейший способ удовлетворить соотношение (2.2)—взять $\boldsymbol{k}_i$ в качестве сторон правильного треугольника:

$$k_1 = k_2 = k_3 \equiv k. \tag{2.3}$$

Это означает, что любая из трех волн a представима в виде

$$a = b(z)\{A_1 e^{i\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r}} + A_2 e^{i\boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r}} + A_3 e^{i\boldsymbol{k}_3 \boldsymbol{r}}\}, \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Направляя $\boldsymbol{k}_1$ вдоль x, получаем из (2.3), что

$$\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r} = kx, \quad \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r} = {}^1/_2 k(x - \sqrt{3}\,y), \quad \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{r} = -{}^1/_2 k(x + \sqrt{3}\,y).$$

Эти уравнения и определяют гексагональную структуру. Условие стационарности решения означает, что следует положить

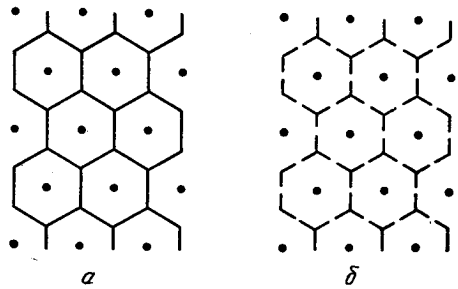
$$\dot{A}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

У этих уравнений есть правые части, которые являются квадратичными полиномами амплитуд a_i. Они, в силу симметрии, дают также простое решение

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = A$$

(см. [13]).

Если включить в рассмотрение нелинейные процессы более высокого порядка, то можно получить много других структур, не говоря уже о не-



а *б*

Рис. 11.10. Гексагональная структура для осходящих по краю и нисходящих в центре (*а*) и для нисходящих по краю и восходящих в центре (*б*) шестиугольника потоков

симметричных решениях уравнения (2.2). Отбор той или иной структуры определяется ее устойчивостью. В этом и заключается наиболее сложная часть анализа при малых надкритичностях, т. е. при не слишком больших

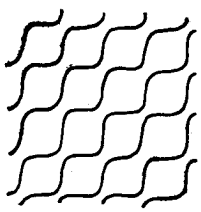


Рис. 11.11. Структура поверхности слоя при бимодальной конвекции

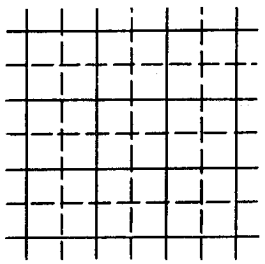


Рис. 11.12. Образование поперечных валов

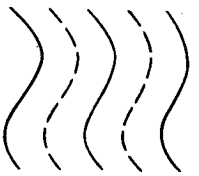


Рис. 11.13. Синусоидальная неустойчивость, или «зигзаг»

амплитудах a. Все материальные константы α, ν, $\varkappa$ являются функциями температуры. Разложение их по θ меняет характер нелинейных членов, создает асимметрию в задаче и влияет на устойчивость той или иной структуры. В частности, зависимость вязкости от температуры определяет область, где выживают конвективные валы, а гексагональные ячейки неустойчивы [14]. Различие картин на рис 11.10 также обусловлено зависимостью вязкости от температуры. При $d\nu/dT > 0$ жидкость поднимается по краям ячейки и опускается в центре; при $d\nu/dT < 0$ происходит обратное движение.

Возможные конвективные структуры не исчерпываются валами и гексагонами. При больших числах Прандтля и Рэлея ($P_r = 450$, $R_a = 25\,000$) возникает так называемая бимодальная структура, характеризуемая уже двумя масштабами (рис. 11.11) [15].

Неустойчивости. Переходу от одной структуры к другой и образованию дефектов внутри какой-либо определенной структуры предшествует развитие

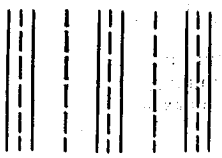


Рис. 11.14. Неустойчивость параллельных валов

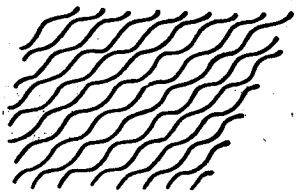


Рис. 11.15. Варикозная неустойчивость, или пинчевание

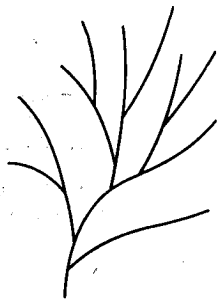


Рис. 11.16. Условный вид бифуркационного дерева

какой-либо из неустойчивостей. Существуют некоторые очень характерные неустойчивости, которые мы просто перечислим.

1. Образование поперечных валов (рис. 11.12) приводит к прямоугольным структурам с несоизмеримыми периодами. При этом может возникнуть бимодальная конвекция.

2. Синусоидальная неустойчивость (рис. 11.13) соответствует одинаковому изгибанию всего слоя как целого. Этот вид возмущения называется также «зигзаг».

3. Существует неустойчивость параллельных валов, приводящая к их уплотнению и разрежению (рис. 11.14). В физике твердого тела подобное изменение структуры соответствовало бы удвоению периода. Действительно, неустойчивость характеризуется лишь одним волновым числом, направленным вдоль x, и, если период невозмущенных валов был равен a, то, как видно из рис. 11.14, после возмущения он равен $2a$. Априори возможно возмущение и более сложной конструкции, которой соответствует еще больший период. В III части мы увидим, как это может происходить.

4. Возмущение «варикозного» типа и варикозные структуры (рис. 11.15) соответствуют появлению перетяжек на валах. В электродинамических средах такие неустойчивости называются пинчеванием. Варикозные структуры могут быть перекошенными.

Переход к турбулентности. Разнообразие структур и неустойчивостей порождает необычайно сложный путь возникновения турбулентности. Сложность обусловлена разными факторами и, в частности, большим числом параметров, определяющих свойства системы. Поэтому реальную последовательность бифуркаций можно изобразить в виде некоторого бифуркационного дерева (рис. 11.16). На нем различным областям соответствуют различные устойчивые решения, а границе между областями соответствует бифуркационная кривая.

Выбирая тот или иной путь в пространстве параметров, например на плоскости (R_a, P_r), мы будем получать различные последовательности бифуркаций, предшествующие образованию турбулентного движения. Это было продемонстрировано в экспериментах по конвекции, опубликованных в [16]. Четыре разных пути были указаны в этой работе при малых числах Прандтля. Параметрами, от которых зависит тот или иной путь, были R_a, P_r и отношение вертикального размера к горизонтальному. В основе экспериментов в [16] лежало определение зависимости скорости жидкости от времени и по-

строение ее фурье-спектра. Такой метод не определяет структур, но дает возможность различать следующие состояния:

а) периодическое (P), отличающееся от стационарного (S) тем, что содержит в спектре скорости только один острый пик. Наличие кратных частот обозначается соответственно P_2, P_4 и т. д.;

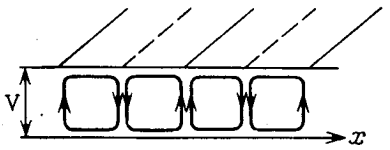


Рис. 11.17. Электродинамическая конвекция в жидких кристаллах

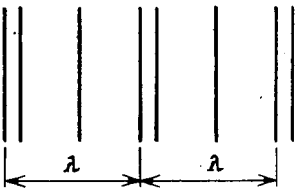


Рис. 11.18. На один период внешнего поля λ приходится точно три конвективных вала

б) квазипериодическое (QP_2) и (QP_3) — их спектр содержит две или три несоизмеримые частоты;

в) непериодическое (N) — существует достаточно широкая полоса в спектре.

Приведем два примера из [16] при одном и том же отношении сторон, двух значениях P_r и переменном R_a:

$$S \to P \to P_2 \to P_4 \to N \qquad (P_r = 2{,}5),$$
$$S \to P \to QP_2 \to QP_3 \to N \qquad (P_r = 5).$$

Эти примеры очень поучительны, поскольку они демонстрируют отсутствие универсальности в общей закономерности возникновения турбулентности.

Электрогидродинамическая конвекция. Существует интересная модификация обычной конвекции. Между двумя прозрачными пластинами (рис. 11.17) помещается жидкий кристалл (нематик). Его поляризационные свойства являются сильно анизотропными. Вместо градиента температуры на пластинки подается переменное электрическое поле. В результате этого изменение скорости зацепляется с поляризацией жидкой частицы. Если амплитуда потенциала V поля превышает некоторое критическое значение, то возникают конвективные валы, называемые доменами Вильямса. Дальнейшее увеличение потенциала или изменение частоты приводит к разнообразным неустойчивостям и к образованию новых структур подобно тому, как это имеет место в конвекции Бенара—Рэлея.

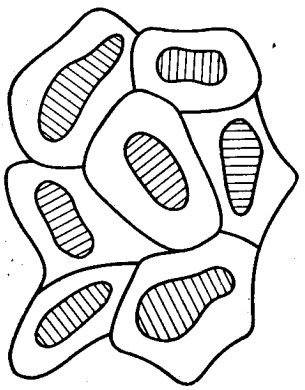


Рис. 11.19. Структурный хаос с разрушенным дальним порядком

Использование внешнего электрического поля для изменения условий конвекции создает благоприятные условия для наблюдения бифуркаций, структур и их дефектов. Если, например, поле обладает пространственным периодом λ, несоизмеримым с периодом валов λ_0, то при значениях разности

$$|\lambda_0/2 - \lambda/3| < \varepsilon\lambda_0,$$

где $\varepsilon \sim 0{,}05$, возникает пространственная периодическая структура, в которой на период поля λ приходится ровно три вала (рис. 11.18). Дальнейшее увеличение ε приводит к появлению двумерной периодической картины с несоизмеримыми периодами [17], аналогичной той, что на рис. 11.15. Эти эксперименты устанавливают непосредственную аналогию между перестройкой

конвективных структур и переходами соразмерность — несоразмерность в твердом теле (такие переходы мы опишем в части III).

С другой стороны, увеличение разности потенциалов V приводит после ряда бифуркаций к турбулентному движению [18]. Этот переход обладает столь важными свойствами, что они требуют специального акцента.

Турбулентность и неупорядоченные структуры. Опишем более подробно последовательность переходов, наблюдавшихся в [18] по мере роста V при частоте поля $\sim$60 Гц.

1. Валы слегка искажают свою форму и возникают структуры типа «зигзаг».

2. Форма структур усложняется и появляется варикозная структура.

3. Она сменяется двумерной прямоугольной структурой с различными периодами. Увеличение частоты поля здесь приводит к образованию дефектов, которые случайным образом блуждают по структуре.

4. При дальнейшем увеличении V роль дефектов столь сильна, что квадратные структуры теряют дальний порядок. Возникает структурный хаос (рис. 11.19). При $V \sim 60$ В структуры разбиваются на мелкие нерегулярные ячейки, движущиеся также нерегулярно. Их размеры порядка 2—5 мкм.

Эти результаты устанавливают непосредственную связь между неупорядоченной, аморфной структурой и турбулентной динамикой. Они помогут нам в дальнейшем при интерпретации структурных переходов в одномерных цепочках.

§ 3. Особенности возникновения турбулентности

Понимание условий появления хаоса в типичных динамических системах помогает приблизиться к созданию теории возникновения турбулентности. Сейчас это все еще сложная задача. Причину сложности мы укажем ниже. Приведем некоторые достаточно общие соображения, которые с той или иной степенью достоверности можно приписать турбулентности. В дальнейшем мы все время в этом параграфе будем иметь в виду не развитую турбулентность, а переходный режим от ламинарной динамики к развитой сильно турбулентной динамике.

Существует ли сценарий турбулентности? Первый вопрос, который следует задать,— это вопрос о реальном механизме перехода от ламинарного движения к турбулентному. По-видимому, первая физическая интерпретация, в которой на слове «физическая» следует сделать особое ударение, принадлежит Ландау [19]. Ее суть заключается в последовательном ступенчатом увеличении числа частот $\omega_1, \omega_2, \ldots$, характеризующих появление новых степеней свободы (мод) по мере роста числа Рейнольдса (или какого-либо другого характерного для данной задачи числа). В конце концов, решение принимает вид

$$v(t) = v(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots),$$

где частоты ω_i несоизмеримы. При большом их числе движение является достаточно сложным, для того чтобы его можно было считать хаотическим.

Сейчас мы знаем, что в этом нет необходимости, так как существует вполне ясная картина возникновения хаоса в регулярных уравнениях движения. Эта возможность породила ряд строго сформулированных признаков перехода регулярность — хаос. Попытки положить их в основу развития турбулентности привели к созданию ряда сценариев (ком. 4).

По-видимому, вопрос о типе сценария, приводящего к турбулентности, имеет узко специфический характер. Это всего лишь вопрос в том, какая неустойчивость развивается в данной системе и при данных условиях. Существование сложного бифуркационного дерева в многомерном пространстве параметров не позволяет ожидать, что это дерево будет изотропным и универсальным. Это соображение подтверждается многочисленными эксперимен-

тами. Хотя ограниченная точность экспериментальных данных не позволяет полностью исключить возможность существования универсально устроенного бифуркационного дерева, тем не менее подобную возможность сейчас трудно себе представить.

Необходима ли диссипация? Каноническое представление о турбулентности обычно привязывает ее зарождение к системам с диссипацией. Достаточно заметить, что число Рейнольдса, определяющее возникновение турбулентности в задачах с течениями, содержит вязкость в знаменателе. Однако уже давно существует представление, свободное от этого условия. Это — большая область явлений слабой турбулентности, которую мы уже обсуждали. При слабой диссипации случайная динамика системы хотя и отличается от гамильтоновской динамики, однако это отличие мало́ [22, 23]. Тот же вывод следует из сравнительного анализа тепловой конвекции и электродинамической конвекции. Поэтому универсальная природа возникновения турбулентности, скорее всего, не связана с существованием диссипативных факторов. Последние, однако, определяют характер ведущей неустойчивости.

Заметим также, что стационарное решение, реализующее поток энергии в область малых масштабов, предполагает определенные граничные условия, создающие накачку и сток. В этом смысле, конечно, диссипация существует всегда для турбулентных движений. Однако в инерционной области, по-видимому, наличие диссипации не есть непременное условие турбулентности.

Локальная неустойчивость и фрактальность. Главным свойством как гамильтоновской, так и диссипативной систем, определяющим переход от ламинарного движения к турбулентности, является локальная неустойчивость в фазовом пространстве Г:

$$D(t) = D(0)\, e^{h_0 t}; \qquad h_0 > 0.$$

Это свойство должно выполняться для некоторой подобласти $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Более точная формулировка требует, чтобы оно выполнялось при $D(0) \to 0$. Это приводит к тому, что область Γ_0 должна быть устроена очень сложно. Теперь мы предполагаем с большой вероятностью, что область Γ_0 — фрактал, и это свойство также не зависит от существования или отсутствия диссипации. В зависимости от последнего меняется лишь вид фрактальности.

Упрощение может быть достигнуто путем использования некоторого огрубленного объема $\bar{\Gamma}_0$. Тогда турбулентность развивается в области $\bar{\Gamma}_0$, достаточно хорошей и в которой предел $D(0) \to 0$ легко выполняется. Тем самым упрощается определение локальной неустойчивости.

Центральный пик. По-видимому, еще одно свойство универсального характера может быть приписано зарождению турбулентности. Оно связано со спектральными свойствами движения.

Одна из главных особенностей динамики в переходе к турбулентности связана с существованием островков. Размеры островков тем больше, чем ближе мы находимся к границе возникновения хаоса. Существование островков также не связано с тем, имеется ли в системе диссипация, хотя структура островков при этом видоизменяется. При слабой диссипации островки локализуются вблизи сепаратрис. Поэтому появление хаоса на самом начальном этапе сопровождается существованием большого числа траекторий с большими периодами. Мы уже обсуждали это явление в § 1 гл. 5 (см. рис. 5.7, 5.8). Оно сразу же проявляется в спектральной функции динамических переменных. Область низких частот после перехода границы зарождения хаоса резко становится отличной от нуля, демонстрируя зачастую максимум в нуле.

Пространственно-временной хаос. При фиксировании пространственной структуры исследование динамики среды сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, в которых может возникнуть хаотическая динамика только во времени. Элементарным примером является модель Лоренца. В ней жестко зафиксированы пространственные масштабы трех гармоник. Измене-

ние амплитуд этих гармоник во времени может испытывать последовательность бифуркаций, приводящих, в конце концов, к хаосу. Эта модель демонстрирует лишь одну сторону перехода к турбулентности. При анализе слабой турбулентности (гл. 10) был использован тот же временно́й подход, фиксирующий пространственную регулярность системы и, следовательно, дискретность набора волновых чисел. Более того, все виды сценариев турбулентности [20] не выходят за пределы того же взгляда.

Действительность скорее всего выглядит иначе, хотя, конечно, изложенное выше представление имеет какие-то свои области применимости. Имеется другая — пространственная — характеристика турбулентной среды. Она, как это видно уже из многочисленных экспериментов, определяется образованием нерегулярных пространственных структур. Поэтому спектр волновых чисел при достижении критических параметров также становится непрерывным. Сейчас мы не знаем, возникают ли временной хаос и пространственный хаос одновременно или нет. Ясно лишь, что оба эти явления связаны, и следует говорить о пространственно-временном хаосе, если речь идет о турбулентности. В части III мы покажем, как в одномерной цепочке атомов может быть описано образование пространственного хаоса. Однако результаты сочетания временной и пространственной стохастичности пока что остаются не выясненными.

Можно заметить лишь, что, если условия возникновения временного и пространственного хаоса различны, то могут существовать области параметров, где реализуется либо только динамическая турбулентность, либо только структурная турбулентность.

§ 4. Ленгмюровская турбулентность

Последовательность неустойчивостей и бифуркационных явлений, заканчиваясь на своем конечном этапе турбулентностью, может подчас иметь очень своеобразный вид. Одним из таких необычных процессов является возникновение турбулентных плазменных (ленгмюровских) колебаний вследствие развития так называемой модуляционной неустойчивости (ком. 5).

Турбулентность ленгмюровских колебаний не только не может быть описана в рамках теории слабой турбулентности, но и вообще развивается совсем не так, как в сильной гидродинамической турбулентности. На ее начальной стадии происходит интенсивный поток энергии в область длинноволновых колебаний. Эта картина полностью противоположна картине дробления масштабов и перекачки энергии в коротковолновую часть спектра. В результате этого в ленгмюровской турбулентности должен был бы существовать механизм поглощения энергии не при малых масштабах, а при больших. Но эффективного механизма поглощения в области длинных волн нет. Поэтому происходит сильное накопление энергии плазменных колебаний в области малых значений волновых чисел k. Как развивается эта картина дальше и каким образом происходит сток энергии, будет описано ниже. Пример ленгмюровской турбулентности очень поучителен. Хотя здесь еще не все детали ясны и картина зарождения хаоса не описана, тем не менее этот пример в определенной степени сбивает нас с проторенных путей, указывая на возможное разнообразие механизмов появления турбулентности в нелинейных средах.

Образование «плазмо́нного конденсата». Мы уже встречались с плазменными и ионно-звуковыми колебаниями плазмы. В линейном приближении и при слабой дисперсии они имеют следующие дисперсионные уравнения соответственно:

$$\omega_k^2 = \omega_0^2(1 + 3k^2r_d^2), \qquad \omega_s^2 = c_s^2k^2, \tag{4.1}$$

где ω_0 — частота плазменных колебаний:

$$\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m, \tag{4.2}$$

r_d — дебаевский радиус электронов; c_s — скорость ионного звука [25]:

$$c_s^2 = \frac{1}{M}\left(T_e + \frac{5}{3}T_i\right). \tag{4.3}$$

Формула (4.3) при $T_i \ll T_e$ переходит в уже известную нам формулу. Из достаточно общих соображений можно сказать, что нелинейные уравнения плазменной среды должны приводить к взаимодействию плазмонов между собой и с фононами. Спектр (4.1) для плазмонов ω_k, как нетрудно убедиться, не является распадным в первом порядке. Иначе, процесс типа

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$$

невозможен. Однако возможными оказываются процесс

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{s,\, k_2}$$

либо процесс

$$\omega_k + \omega_{s,\, k_2} = \omega_{k_1}.$$

Первый из них описывает распад плазмона на другой плазмон и фонон, второй — индуцированное рассеяние плазмона на фононе. Эти два процесса и определяют начальные нелинейные стадии на пути к турбулентности. В любом из них плазмон отдает энергию фонону. Поэтому процессы взаимодействия волн сопровождаются «покраснением» ленгмюровских колебаний, т. е. перекачкой энергии в область бóльших масштабов и бóльших фазовых скоростей. Однако чем с бóльшей скоростью движется волна, тем слабее ее взаимодействие с частицами при $k \to 0$. Действительно, во-первых, уменьшается плотность частиц с увеличением скорости и, во-вторых, частота колебаний частиц в потенциальной яме волны уменьшается, делая невозможными резонансы «волна — частица».

Таким образом начинается накопление длинноволновых плазмонов и образование так называемого «плазмонного конденсата». Какова его дальнейшая судьба?

Модуляционная неустойчивость. Плазмоны имеют высокую частоту, фононы — низкую. Конденсат плазмонов оказывается неустойчив относительно модуляции его плотности. Приведем сначала качественные соображения, поясняющие физический смысл возникающей неустойчивости.

Представим себе, что на первоначально однородном фоне ленгмюровских волн происходит флуктуация, в результате которой появляется область, где амплитуда колебаний несколько превышает средний уровень. В результате в этой области возрастает и высокочастотное давление, так что электроны из нее вытесняются. Возникающее в результате поляризации плазмы электростатическое поле вытягивает ионы вслед за электронами. Образуется квазинейтральный профиль пониженной плотности. Опишем движение плазмонов в таком профиле плотности.

Удобно рассматривать плазмон как частицу с энергией ω_k, определяемой формулой (4.1), и импульсом $\boldsymbol{k}$. Неоднородное возмущение приводит к изменению плотности электронов:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 + \delta n(\boldsymbol{r}).$$

Если это возмущение крупномасштабное, т. е. ширина, например, ямы на рис. 11.20 велика по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, то по-прежнему можно пользоваться понятием квазичастиц, рассматривая их как частицы. Тогда

$$\omega_k = \omega_k(\boldsymbol{r}) \approx \omega_0\left(1 + {}^3/_2 k^2 r_d^2 + {}^1/_2\,\delta n(\boldsymbol{r})/n_0\right), \tag{4.4}$$

и уравнения движения плазмона можно записать в виде гамильтоновских уравнений, считая (4.4) гамильтонианом:

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial r} = -\frac{\omega_0}{2n_0}\frac{\partial \delta n}{\partial r}, \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial \boldsymbol{k}} = 3k^2 r_d^2 \omega_0. \tag{4.5}$$

Из этих уравнений видно, что профиль с пониженной плотностью играет роль потенциальной ямы для плазмона. В этом случае сила $\boldsymbol{F} \sim \dot{\boldsymbol{k}}$ ускоряет те плазмоны, которые движутся на дно ямы, и тормозит те из них, которые движутся в обратном направлении. Поэтому происходит скопление плазмонов в области пониженной плотности, т. е. захват их в потенциальную яму.

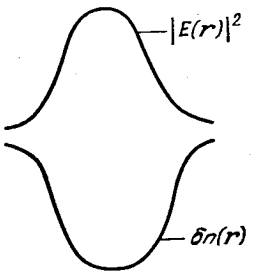


Рис. 11.20. Образование потенциальной ямы для плазмонов

Описанный процесс означает, что амплитуда поля в области ямы увеличивается (рис. 11.20). Тем самым возрастает давление высокочастотного поля и, следовательно, деформация профиля плотности электронов. Потенциальная яма для плазмонов становится глубже, что приводит к дальнейшему росту локальной амплитуды ленгмюровских колебаний и высокочастотного давления. Таким образом, развивается неустойчивость автомодуляции пространственного распределения плазмонов, приводящая их к стягиванию в сгустки-каверны.

Получим количественные результаты для описанной неустойчивости Запишем линеаризсванные уравнения движения квазинейтральной плазмы

$$n_0 M \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \tag{4.6}$$

где δp — возмущение давления. Рассмотрим возмущение в виде

$$v,\ \delta n,\ \delta p \sim e^{i(kx-\omega t)}$$

и подставим эти выражения в (4.6):

$$-n_0 M i\omega v = -ik\delta p, \qquad -i\omega\delta n + ikn_0 v = 0. \tag{4.7}$$

Для замыкания этой системы необходимо разобраться с членом δp, представляющим полную вариацию давления — газокинетического и высокочастотного:

$$\delta p = T\delta n + \delta\tilde{p}, \tag{4.8}$$

где T — температура среды. Найдем $\delta\tilde{p}$.

Невозмущенное давление высокочастотного поля равно

$$\tilde{p} = \frac{1}{8\pi}\langle E^2\rangle = \frac{1}{16\pi}|\tilde{E}|^2, \tag{4.9}$$

где $\tilde{E}$ — огибающая высокочастотного электрического поля:

$$E = \tfrac{1}{2}(\tilde{E}e^{-i\omega_0 t} + \tilde{E}^* e^{i\omega_0 t}).$$

Из формулы (4.4) видно, что кинетической энергии плазмонов соответствует член $\frac{3}{2}\omega_0 k^2 r_d^2$, а потенциальной энергии их возмущения — член $\omega_0\delta n/2n_0$. Поэтому относительное возмущение энергии равно $\delta n/(3n_0 k^2 r_d^2)$. Отсюда, используя (4.9), находим

$$\delta\tilde{p} = -\tilde{p}\frac{\delta n}{3n_0 k^2 r_d^2} = -\frac{|E|^2}{16\pi}\frac{\delta n}{n_0}\frac{1}{3k^2 r_d^2}, \tag{4.10}$$

где возмущение высокочастотного поля по знаку противоположно возмущению плотности, как это уже было установлено (см. рис. 11.20). Собирая

формулы (4.10), (4.8) и (4.7), получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k^2 \frac{T}{M}\left(1 - \frac{\tilde{p}}{3k^2 r_d^2 n_0 T}\right). \tag{4.11}$$

Условие неустойчивости $\omega^2 < 0$ дает

$$\tilde{p}/n_0 T > 3k^2 r_d^2. \tag{4.12}$$

Соотношение (4.12) означает, что в процессе накопления длинноволновых ($k \to 0$) плазмонов обязательно возникает модуляционная неустойчивость. По мере перекачки энергии в область малых значений k становится применимым неравенство

$$\tilde{p}/n_0 T \gg k^2 r_d^2,$$

и из (4.11) следует выражение для инкремента модуляционной неустойчивости

$$\operatorname{Im}\omega \approx \left(\frac{\tilde{p}}{3n_0 M r_d^2}\right)^{1/2} = \omega_0 \left(\frac{m}{3M}\frac{\tilde{p}}{n_0 T}\right)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Следующий вопрос, который предстоит решить, — какова дальнейшая динамика образующихся в результате неустойчивости каверн.

Коллапс ленгмюровских колебаний. Мы описали выше модуляционную неустойчивость. Ее роль удобно описать еще раз, обращаясь к эффективному гамильтониану плазмонов (4.4), т. е. к ω_k. Пусть сначала энергия плазмонов сосредоточена в области некоторых, не малых значений k. Их кинетическая энергия $^3/_2 k^2 r_d^2$ достаточно велика, а потенциальная энергия $\delta n/2n_0$ мала вследствие малости возмущения. Далее, вследствие модуляционной неустойчивости кинетическая энергия может уменьшаться, а потенциальная возрастает из-за роста δn. Предел этого процесса очевиден — кинетическая и потенциальная энергии должны сравняться, т. е.

$$k^2 r_d^2 \sim |\delta n|/n_0. \tag{4.14}$$

Выражение (4.14) определяет также характерное волновое число k_0, т. е. характерный размер каверны:

$$l \sim 1/k_0. \tag{4.15}$$

Здесь возникает тонкое место, заключающееся в том, что уравнение (4.14) определяет не столько конечное значение k_0 или δn, сколько только связь между ними. Поэтому, если только неустойчивость не прекращается, а это действительно оказывается так, то $|\delta n|$ продолжает нарастать. Рост $|\delta n|$ сопровождается согласно (4.14) и (4.15) схлопыванием каверн, так как

$$l \sim 1/|\delta n|^{1/2}$$

и уменьшается. При этом плотность энергии колебаний возрастает, и происходит ускорение процесса выталкивания плазмы и схлопывания каверн. Поэтому он носит взрывной характер.

Естественно, возникает вопрос о том, что останавливает схлопывание. Глубина модуляции плотности в каверне $|\delta n|$ мала при $kr_d \ll 1$. Соответственно мало́ и изменение частоты $\delta\omega \ll \omega$. Это означает сохранение величины

$$I_0 = \int (d\boldsymbol{r})\,|\tilde{E}|^2 = \text{const}.$$

Таким образом, высокочастотное поле в каверне возрастает при схлопывании обратно пропорционально объему каверны, т. е.

$$|\tilde{E}|^2 \sim 1/l^s, \tag{4.16}$$

где $s = 1, 2, 3$ в зависимости от размерности каверны.

В то же время для схлопывания необходимо преодолеть давление вытесняемой плазмы $\delta n\, T$. Согласно (4.14)

$$\delta n\, T \sim 1/l^2. \tag{4.17}$$

Отсюда видно, что в одномерной каверне газокинетическое давление при схлопывании возрастает быстрее высокочастотного. В результате при некотором l установится баланс давлений и образуется ленгмюровский сгусток конечного размера, который, в свою очередь, неустойчив относительно модуляции в двух других направлениях.

В двумерном случае ($s=2$), если только в начальный момент было

$$\tilde{p} > \delta n\, T,$$

то в дальнейшем процесс схлопывания каверны не останавливается.

Наконец, в трехмерном случае высокочастотное давление при схлопывании возрастает быстрее газокинетического, и процесс схлопывания идет с нарастающей скоростью. Явление схлопывания каверны с плазмонами, запертыми в ней, получило название коллапса ленгмюровских волн.

В каждом из двух указанных случаев, когда возможен коллапс, схлопывание каверны происходит до малых размеров, сравнимых с дебаевским радиусом, а фазовая скорость при этом становится сравнимой с тепловой скоростью. Здесь на этом этапе эффективно начинает работать затухание Ландау в результате резонансного поглощения плазмонов частицами плазмы.

Приведем некоторые количественные оценки для закона, по которому развивается коллапс. Выпишем сначала нелинейные уравнения для звуковых колебаний. Воспользуемся для этого вторым дисперсионным уравнением в (4.1) и заменим в нем

$$\boldsymbol{k} \to -i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \omega_s \to i\frac{\partial}{\partial t}.$$

Это дает

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta n = 0. \tag{4.18}$$

Далее считаем $T_i \ll T_e = T$, и поэтому из (4.3) следует

$$c_s^2 = T/M.$$

Учтем теперь давление высокочастотного поля $\tilde{p}$. Поступим так же, как и при написании уравнения (4.8). Считаем, что на начальной стадии эволюции каверны изменение плотности δn сопровождается одновременно появлением $\tilde{p}$. Тогда в уравнении (4.18) следует сделать замену

$$T\delta n \to T\delta n + \tilde{p} = T\delta n + \frac{1}{16\pi M}|\tilde{E}|^2. \tag{4.19}$$

Подставляем это выражение в (4.18):

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \delta n = \frac{1}{16\pi M}\Delta |\tilde{E}|^2. \tag{4.20}$$

В квазистатическом случае уравнение (4.20) определяет соотношение между δn и $\tilde{p}$:

$$\delta n = -\frac{|\tilde{E}|^2}{16\pi T}. \tag{4.21}$$

Наоборот, при сверхзвуковом движении в уравнении (4.20) можно пренебречь вторым членом и получить

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = \frac{1}{16\pi M}\Delta |\tilde{E}|^2. \tag{4.22}$$

Вторым уравнением, связывающим δn и $|\tilde{E}|^2$, является уравнение для плазмонов. Вместо него мы воспользуемся соотношением (4.14), учитывая, что сверхзвуковое схлопывание каверны должно приводить к ее малым размерам. Поэтому

$$\Delta |\tilde{E}|^2 \sim k_0^2 |\tilde{E}|^2 \sim \frac{\delta n}{n_0} \frac{|\tilde{E}|^2}{r_d^2},$$

и уравнение (4.22) дает

$$\frac{1}{(t_0-t)^2} \delta n \sim \delta n |\tilde{E}|^2 \frac{1}{16\pi M n_0 r_d^2}. \tag{4.23}$$

Здесь t_0 — момент схлопывания каверны. Отсюда сразу следует, что

$$|\tilde{E}|^2 \sim 1/(t_0-t)^2. \tag{4.24}$$

Последний шаг для получения закона «взрыва» делается с помощью соотношения (4.16), учитывающего постоянство числа запертых в каверне плазмонов. Подставляя его при $s=3$ и используя (4.15) и (4.14), находим искомые законы:

$$\begin{aligned} l &\sim |\tilde{E}|^{-2/3} \sim (t_0-t)^{2/3}, \\ \delta n &\sim 1/l^2 \sim 1/(t_0-t)^{4/3}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Законы схлопывания каверн (4.23)—(4.25) описывают автомодельную стадию развития процесса эволюции плазмонов в каверне. Она была подтверждена путем численного анализа (см. обзор [29]).

Турбулентность. Выясним теперь, как выглядит картина ленгмюровской турбулентности при наличии коллапса каверн. Вначале энергия ленгмюровских волн путем слабого взаимодействия, как при слабой турбулентности, перекачивается в длинноволновую область. В этой области действует модуляционная неустойчивость. Из-за неустойчивости энергия ленгмюровских волн локализуется в большом числе случайно расположенных каверн. Характерный размер каверн определяется с помощью соотношения (4.14), т. е.

$$l_0 \sim 1/k_0 \sim r_d (n_0/\delta n)^{1/2}. \tag{4.26}$$

На этой стадии еще $\delta n/n_0 \ll 1$. Поэтому $k_0 r_d \ll 1$, а для оценки δn можно использовать дозвуковое приближение (4.21). В результате из (4.26) получаем

$$l_0 \sim r_d (n_0 T/\tilde{p})^{1/2}. \tag{4.27}$$

Далее начинается процесс коллапса, перекачивающий энергию из длинноволновой части спектра (порядка l_0) в коротковолновую часть до таких масштабов, где начинает эффективно действовать затухание Ландау. Минимальный масштаб определяется дебаевским радиусом:

$$l^* \sim r_d.$$

Таким образом, область инерционного интервала заключена в диапазоне $(1/l_0,\ 1/l^*)$. Спектр турбулентности в этой области можно найти из условия постоянства потока энергии по спектру. Его можно оценить следующим образом. Энергия, приходящаяся на малый спектральный интервал Δk, равна $|\tilde{E}_k|^2 \Delta k$. Поток ее в единицу времени равен

$$|\tilde{E}_k|^2 \frac{\Delta k}{\Delta t} = \text{const}. \tag{4.28}$$

Заменим $\Delta k/\Delta t$ на производную dk/dt. Положим $k \sim 1/l$, где l — характерный размер каверны. Тогда зависимость $l(t)$ определяется формулой (4.25). Ис-

пользуя (4.24) и (4.25), получаем из (4.28):

$$W_k \sim |\tilde{E}_k|^2 \sim k^{-5/2}. \qquad (4.29)$$

Это и есть спектр ленгмюровской турбулентности в инерционном интервале (ком. 6).

§ 5. Солитонная турбулентность

Последние замечания этой главы связаны с обсуждением возможности существования турбулентности, которую будем называть солитонной. Ее также следует отнести к категории сильной турбулентности, так как в ее основе лежит взаимодействие сильно нелинейных волн.

В главе 9 мы видели, что даже в неодномерной волновой картине существует малый параметр взаимодействия сильно нелинейных стационарных волн. Его качественное объяснение приведено на рис. 9.9. В этой же главе рассмотрено нетривиальное резонансное взаимодействие трех волн, волновые векторы которых не коллинеарны. Нетривиальность взаимодействия волн заключается в том, что в процессе взаимодействия изменяется их энергия. Иными словами, процесс взаимодействия волн аналогичен процессу столкновения частиц. Поэтому можно ожидать, что в случае большого числа волн можно ввести понятие газа нелинейных волн и рассмотреть в них условия появления хаоса и кинетику релаксации к равновесному распределению. Остановимся на этом вопросе подробнее.

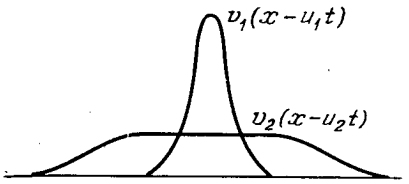


Рис. 11.21. Малое перекрытие солитонов приводит к их слабому взаимодействию

Для этого обратимся сначала к уравнению Кортевега—де Вриза. Солитоны в нем не взаимодействуют. Точно так же отсутствует взаимодействие и нелинейных стационарных волн [34]. При рассеянии двух одномерных солитонов друг на друге, т. е. при прохождении их друг через друга не происходит изменение их энергии. Состояния солитонов после того, как они разойдутся достаточно далеко, восстановятся и станут теми же, что были до рассеяния. Единственным результатом столкновения солитонов является изменение их фаз обусловленной задержкой во времени при столкновении [35]. Эти же свойства столкновений сохраняются и в случае, когда в область взаимодействия попадают не два, а произвольное число солитонов. Естественно, что в этом случае обычную теорию релаксации построить не удается. Все это является следствием интегрируемости КдВ-уравнения. Заметим, что малый параметр взаимодействия солитонов также обусловлен малой областью их перекрытия. Это может произойти, если скорости, а следовательно, и амплитуды солитонов, сильно отличаются друг от друга, как на рис. 11.21 (ком. 7).

Однако ситуация, описываемая КдВ-уравнением, является специальным случаем. Достаточно хотя бы вспомнить те некоторые исходные физические модели, в которых возникает КдВ-уравнение: ионно-звуковые и магнитозвуковые колебания, волны на поверхности мелкой воды и др. Все эти задачи содержат возможность опрокидывания волн, в то время как КдВ-уравнение получается как приближение вдали от границы опрокидывания. Это означает, что реальные задачи не могут быть точно проинтегрированы и, следовательно, всегда есть реальное взаимодействие любых волн. Взаимодействуют также стационарные волны, близкие к далеко раздвинутым, почти свободным солитонам.

Взаимодействие реальных солитоноподобных волн является нетривиальным и сопровождается обменом энергии. Это означает, что при слабом взаимодействии нелинейных волн их можно рассматривать как ансамбль, в кото-

ром при выполнении некоторых неравенств должно возникать турбулентное движение. Пусть I_s есть действие для волны с номером s, которое уже вводилось в гл. 9. Тогда в результате хаотизации фаз волн ϑ_s возникает статистический ансамбль волн, описываемый функцией распределения

$$F = F(t;\ I_1,\ \ldots,\ I_M),$$

где M — число волн. Подобно тому как слабая турбулентность описывалась уравнением типа Фоккера—Планка—Колмогорова для M-частичной функции F, здесь можно получить аналогичное описание.

Соответствующее уравнение несколько громоздко и имеет для кубической нелинейности вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{n_{m_1}, n_{m_2}, n_{m_3}} |\hat{V}_{m_1 m_2 m_3}|^2 \hat{D}\left(\left[n\frac{\partial}{\partial I}\right]\right) \times$$

$$\times\ |a(n_{m_1})\, a(n_{m_2})\, a(n_{m_3})|^2\, \delta([n\omega])\, \delta([n\boldsymbol{k}])\, \hat{D}\left(\left[n\frac{\partial}{\partial I}\right]\right) F, \qquad (5.1)$$

где принято следующее обозначение:

$$[P] \equiv P_{m_1} + P_{m_2} - P_{m_3},$$

$a(n_m)$ — фурье-амплитуда с номером n для m-й волны. Индекс m изменяется от 1 до M. Индекс n изменяется от $-\infty$ до ∞. Однако мы знаем, что при некотором N_m амплитуды $a(n_m)$ экспоненциально обрезаются; $\hat{V}$ — матричный элемент взаимодействия волн, зависящий только от векторов $\boldsymbol{k}_m$ (ком. 8). Для нас важно, что, правильно определив новые переменные, мы можем снова получить такое описание задачи, которое в главных своих чертах аналогично известному уже примеру слабой турбулентности.

Возможность введения своеобразной перенормировки переменных обусловлена слабым взаимодействием солитоноподобных решений при выполнении условий их достаточной разреженности. Возникающее при этом турбулентное движение может быть названо солитонной турбулентностью. Она является одним из примеров сильной турбулентности, в которой различные этапы ее развития могут быть прослежены аналитически вплоть до определения спектра турбулентности [37].

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 11

1. Уравнения модели Лоренца [1] появились в результате упрощения системы Зальцмана [2] для описания конвекции конечной амплитуды. Существует большое число работ, посвященных ее математическим и численным исследованиям. Укажем на некоторые из них [3—6]. Сам Лоренц обнаружил стохастичность и описал ряд ее свойств. Различные приложения модели Лоренца для долгосрочного прогноза погоды имеются в книге [7].

2. Метод Галеркина обладает определенными достоинствами при анализе двумерной гидродинамики. Используемая аппроксимация точно удовлетворяет граничным условиям и сходится к точному решению для широкого класса внешних возмущений. Эти его качества дополняются удобством проведения вычислений.

3. Модель Лоренца, не описывая многих принципиальных особенностей турбулентного движения среды, тем не менее важна, как такой пример динамической системы, на котором можно проследить различные этапы эволюции и бифуркаций. Качественный анализ многомерных систем является очень сложным. Модель Лоренца явилась своеобразным генератором реально возможных бифуркаций. Система уравнений, подобных (1.6), может встречаться в различных физических задачах, в которых ведущим является трехмодовое взаимодействие.

4. Описание различных сценариев можно найти в [20, 21]. Примеры образования пространственно-временного хаоса при параметрическом возбуждении ряби Фарадея обсуждаются в [39, 40].

5. Модуляционная неустойчивость, приводящая к коллапсу плазмонов, была описана в [24]. Уравнения коллапса были получены Захаровым в 1972 г. (см. подробнее в [26]).

В течение ряда лет было проведено много исследований аналитических и, главным образом, численных, ставящих своей целью выяснение возможности существования коллапса (см. обзоры [25—30]). Положительный ответ на этот вопрос был недавно поддержан плазменным экспериментом [31].

6. Теория сильной ленгмюровской турбулентности была сформулирована в работах [32, 33]. См. также обзоры [27, 29]. Значительное место в теории коллапса и турбулентности занимают вопросы зависимости конечных результатов от геометрии каверн и от выбора начальных условий для различных значений параметров. Их обзор можно найти в [29, 30].

7. Результаты, получаемые здесь приближенным методом, описанным в § 9.4, приводят естественно к тому же, что и точный анализ в том же приближении [36].

8. Подробный вывод уравнения (5.1) для конкретной физической модели см. в [37]. Обсуждение его свойств имеется также в [38].

Глава 12

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Несмотря на большую сложность нелинейных волновых уравнений, некоторые из них обладают уникальным свойством — они являются точно интегрируемыми. Мы уже познакомились с одним из таких уравнений — уравнением Бюргерса. Однако оно является простым, и способ его интегрирования не имеет обобщений. В действительности могут быть указаны некоторые формальные схемы, позволяющие «вылавливать» из множества различных уравнений те из них, которые интегрируются точно. Начало этим методам положило открытие Гарднера — Грина — Крускала — Миуры (ГГКМ) [1], которые показали, что уравнение КдВ может быть проинтегрировано точно с помощью метода обратной задачи рассеяния (ОЗР); этот результат был усилен Лаксом, сформулировавшим метод LA-пары [2]. Идеи Лакса сразу получили многочисленные обобщения, после которых начался период открытия новых уравнений, допускающих точную интегрируемость. К сожалению, методы, используемые здесь, выходят за рамки книги. Поэтому мы остановимся лишь на изложении некоторых простейших их вариантов (ком. 1).

§ 1. Интегрирование КдВ-уравнения

Здесь мы изложим метод точного интегрирования уравнения Кортвега — де Вриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

которое явилось первым из уравнений, решаемых методом ОЗР. При изложении его мы используем метод LA-пар Лакса, который позволяет взглянуть на результаты ГГКМ с более общей точки зрения.

Операторные пары Лакса. Введем специально подобранную пару линейных дифференциальных операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$, которые составляют суть замены переменных. Положим сначала

$$\hat{L} = -\hat{D}^2 + u(x, t); \qquad \hat{D} \equiv \frac{d}{dx}. \tag{1.2}$$

Этот оператор действует на некоторые комплексные функции $\psi(x, t)$, которые достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$. То же свойство поведения на бесконечности будем предполагать относительно u.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L}\psi = [-\hat{D}^2 + u(x, t)]\psi = \lambda\psi. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) является стационарным уравнением Шредингера с потенциалом $u(x, t)$. Однако переменная t не является в нем обычным временем — это просто параметр, от которого зависит потенциал. Поэтому, вообще говоря, и собственные значения λ, и собственные функции ψ_λ зависят от t.

Подберем такой унитарный сператор $\hat{U}(t)$, что произведение $\hat{U}^{-1}(t)\hat{L}\hat{U}(t)$ не зависит от параметра t. Это означает, что

$$\hat{U}^{-1}(t)\hat{L}(t)\hat{U}(t) = \hat{U}^{-1}(0)\hat{L}(0)\hat{U}(0) = \hat{L}(0). \tag{1.4}$$

Действуя этим выражением на функцию $\psi(x, 0)$, где параметр $t = 0$, получаем также

$$\hat{U}^{-1}(t)\hat{L}(t)\hat{U}(t)\psi(x, 0) = \hat{L}(0)\psi(x, 0) = \lambda\psi(x, 0). \tag{1.5}$$

Как мы сейчас увидим, найти $\hat{U}$ можно далеко не единственным образом. Если такой оператор $\hat{U}$ существует, то собственные значения λ не зависят от t. Это — важное место, так как собственные значения задачи (1.3) не зависят от изменения потенциала $u(x, t)$ от t.

Здесь и далее все время следует обращать внимание на то, что для функции $u(x, t)$, являющейся решением КдВ-уравнения, величина t является временем. В то же время в операторах $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{U}$ и в собственных функциях $\psi(x, t)$ величина t — параметр, не имеющий ничего общего с временной зависимостью уравнения Шредингера.

Удобно отыскивать оператор $\hat{U}$ в виде

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{A}t}, \tag{1.6}$$

где $\hat{A}$ — самосопряженный оператор. Тогда условие того, что (1.4) не зависит от t, эквивалентно равенству

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial t} = i(\hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A}) \equiv i[\hat{A}, \hat{L}]. \tag{1.7}$$

Оператор $\hat{A}$ имеет важное значение, которое легко выясняется. Для этого достаточно заметить, что согласно (1.5), (1.6),

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi(0) = e^{i\hat{A}t}\psi(0). \tag{1.8}$$

Это выражение эквивалентно уравнению для $\psi(t)$:

$$\psi_t = -i\hat{A}\psi. \tag{1.9}$$

Таким образом, итог наших выкладок в следующем. Пусть потенциал уравнения Шредингера $u(x, t)$ зависит от t как от параметра. Тогда однопараметрические семейства операторов Шредингера $\hat{L}(t)$ для разных t унитарно эквивалентны. Их собственные значения λ не зависят от t, а собственные функции ψ изменяются в зависимости от t, согласно уравнению (1.9). В нем оператор $\hat{A}$ является дополнительным к $\hat{L}$ в том смысле, что он удовлетворяет уравнению (1.7), реализующему унитарное преобразование $\hat{L}$ при изменении t.

Теперь остается сделать последний шаг и выбрать какой-либо вид $\hat{A}$. Из определения $\hat{L}$ (1.2) имеем просто

$$\hat{L}_t = u_t. \tag{1.10}$$

Положим

$$\hat{A} = \hat{D}.$$

Тогда равенство (1.7) эквивалентно тривиальному уравнению

$$u_t = u_x.$$

Нетривиальное уравнение получим, если положить

$$\hat{A} = i[-4\hat{D}^3 + 3(u\hat{D} + \hat{D}u)]. \tag{1.11}$$

Простые выкладки после подстановки (1.11) в (1.7) и учета (1.10) дают уравнение КдВ (1.1). В этом интересующем нас случае собственные функции $\psi(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi_t = [-4\hat{D}^3 + 3(u\hat{D} + \hat{D}u)]\psi. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) является очень примечательным. Если рассмотреть асимптотику $x \to \pm\infty$, где $u(x, t)$ по условию обращается достаточно быстро в нуль, то

$$\psi_t = -4\hat{D}^3\psi \qquad (x \to \pm\infty). \tag{1.13}$$

Это выражение сразу интегрируется и дает

$$\psi(x, t) = e^{-4t\hat{D}^3}\psi(x, 0) \qquad (x \to \pm\infty). \tag{1.14}$$

Таким образом, зависимость $\psi(x, t)$ от t при $x \to \pm\infty$ можно определить независимо от уравнения (1.3). Достаточно лишь знать $\psi(x, 0)$ при значении параметра $t = 0$. Поэтому наше продвижение заключается в следующем: собственные значения λ уравнения (1.1) можно определить при начальном условии $u(x, 0)$, но не только их, а также асимптотики собственных функций $\psi(x, t)$ при $x \to \pm\infty$.

Если мы все это сможем сделать, то тогда по собственным значениям λ (не зависящим от t) и по асимптотикам собственных функций $\psi(x \to \pm\infty, t)$ следует определить потенциал уравнения Шредингера $u(x, t)$ для произвольного значения параметра t. Но им как раз и является решение уравнения КдВ в момент времени t.

Метод ОЗР. Мы показали, что задача определения решения $u(x, t)$ уравнения (1.1) сводится к восстановлению потенциала уравнения Шредингера по некоторой информации о его собственных значениях и об асимптотике его собственных функций. Определим эти данные более точно.

Если $u(x, 0)$ достаточно быстро убывает при $x \to \pm\infty$, то оператор $\hat{L}$ имеет не более, чем конечное число невырожденных собственных значений

$$\lambda_n = -\varkappa_n^2. \tag{1.15}$$

Собственные функции ведут себя при $x \to \infty$, как

$$\psi_n \to c_n e^{-\varkappa_n x} \qquad (x \to \infty), \tag{1.16}$$

где c_n имеют смысл нормировочных констант. Подставляя (1.16) в (1.14), получаем

$$c_n(t) = c_n(0)\, e^{4\varkappa_n^3 t}. \tag{1.17}$$

Формула (1.17) — первый результат. Перейдем теперь к непрерывному спектру оператора $\hat{L}$ и обозначим $\lambda = k^2$.

Асимптотику волновой функции при $x \to \pm\infty$ можно представить в виде

$$\psi^{\pm}(x, t) = a^{\pm}(k, t)\, e^{ikx} + b^{\pm}(k, t)\, e^{-ikx}. \tag{1.18}$$

Известно, что для уравнения Шредингера (для оператора $\hat{L}$) имеют место соотношения

$$|a^{\pm}|^2 - |b^{\pm}|^2 = 1. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.18) в (1.14), получаем

$$a^{\pm}(k, t) = a^{\pm}(k, 0)\, e^{4ik^3t}, \qquad b^{\pm}(k, t) = b^{\pm}(k, 0)\, e^{-4ik^3t}. \tag{1.20}$$

Запишем теперь задачу о рассеянии на потенциале в стандартной форме. Это означает:

$$\begin{aligned} &a^{+}(k, 0) = 1, \quad b^{+}(k, 0) = r(k, 0); \\ &a^{-}(k, 0) = d(k, 0), \quad b^{-}(k, 0) \equiv 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

где введены комплексные амплитуды прохождения r и отражения d:

$$|r|^2 + |d|^2 = 1. \tag{1.22}$$

Соотношение (1.22) следует непосредственно из (1.21). Для того чтобы сохранить единичную амплитуду падающей волны при любых t, необходимо, очевидно, положить

$$r(k, t) = \frac{b^{+}(k, t)}{a^{+}(k, t)} = e^{8ik^3t} r(k, 0). \tag{1.23}$$

Так же из формул (1.20) и (1.21) следует

$$d(k, t) = e^{-4ik^3t} d(k, 0). \tag{1.24}$$

Теперь мы имеем замечательные соотношения, установленные ГГКМ, — это выражения (1.23), (1.24) и (1.17) для коэффициентов c_n, r, d как функций времени, выраженных через их начальные значения.

Введем следующую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2 e^{-\varkappa_n z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, r(k)\, e^{ikz}, \tag{1.25}$$

где N — число собственных значений дискретного спектра. С ее помощью происходит восстановление потенциала по данным рассеяния. Для этого используется уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_{x}^{\infty} dz\, B(y + z) K(x, z) = 0 \tag{1.26}$$

для неизвестной функции двух переменных $K(x, y)$. Это уравнение линейно. Потенциал определяется через его решение следующим образом:

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \tag{1.27}$$

Поскольку c_n и $r(k)$ зависят от времени, следует считать, что функция $B = B(z, t)$. Для ее получения необходимо выражения (1.17) и (1.23) подставить в формулу (1.25):

$$B(z, t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(k, 0)\, e^{\varkappa_n^3 t - \varkappa_n z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, r(k, 0)\, e^{i(8k^3t + kz)}. \tag{1.28}$$

Поэтому вместо (1.27) имеем

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t). \tag{1.29}$$

Это и есть конечный результат, решающий проблему интегрирования КдВ-уравнения.

Солитонные решения. Покажем, как реально выглядит процедура решения для некоторых частных случаев.

Существует некоторый специальный класс начальных условий, для которого точное решение может быть выписано в явном виде. Это так называемые N-солитонные решения.

Решение уравнения КдВ начинается с задания начального профиля $u(x, 0)$. Выберем его в виде

$$u(x, 0) = -2\,\mathrm{sch}^2 x. \tag{1.29a}$$

Задача на собственные значения в потенциале (1.29а) решается точно [6]. Имеется только одно собственное значение в дискретном спектре:

$$\varkappa_1 = 1; \quad c_1(0) = \sqrt{2}. \tag{1.30}$$

Однако наиболее интересное свойство потенциала (1.29а)—это отсутствие отраженной волны в области непрерывного спектра, т. е.

$$b(k, 0) = 0 \tag{1.31}$$

для всех k. Частица произвольной энергии $\lambda = k^2$ не может «обнаружить» существование этого потенциала вследствие отсутствия рассеяния на нем. Мы еще вернемся к этому вопросу чуть ниже.

Подстановка формул (1.30) и (1.31) в уравнение (1.28) дает просто

$$B(z, t) = 2e^{8t-z}.$$

Тогда уравнение (1.26) принимает вид

$$K(x, y; t) + 2e^{8t-x-y} + 2e^{8t-y}\int_x^\infty dz\, K(x, z; t)\, e^{-z} = 0.$$

Это уравнение решается разделением переменных. Полагая

$$K(x, y; t) = K_0(x; t)\, e^{-y},$$

получаем

$$K(x, x; t) = -2/[1 + \exp(2x - 8t)].$$

Отсюда решение (1.29) дает

$$u(x, t) = -2\,\mathrm{sch}^2(x - 4t),$$

т. е. движущийся солитон с правильным соотношением между скоростью и амплитудой.

В той же работе [1] было показано, что, если $b(k, t) = 0$, т. е. потенциал $u(x, 0)$ является безотражательным, то решение уравнения (1.26) приводит к N-солитонному решению. Это решение имеет не совсем простую структуру. Однако асимптотический ее вид при $t \to \infty$ стремится к суперпозиции N далеко отстоящих друг от друга солитонов. Это получается естественным образом, так как в одномерном потенциале $u(x, 0)$ нет вырожденных уровней. Поэтому скорости всех солитонов должны быть различны. За большое время «квазисолитоны», движущиеся с различными скоростями, разойдутся достаточно сильно друг от друга и перестанут взаимодействовать.

Мы видим, что N-солитонная задача непосредственно связана с безотражательными потенциалами для уравнения Шредингера. Решение такой задачи, которое не является единственным, было получено еще ранее в [7] в связи с задачами оптики.

Условие безотражательности $b(k, t) = 0$ позволяет свести проблему решения КдВ-уравнения к чисто алгебраической задаче. Хотя она и требует некоторых выкладок, полезно привести соответствующее решение. Многие черты этого решения, как способа получения, так и его структуры, оказываются типичными для других интегрируемых уравнений.

***N*-солитонные решения.** Итак, пусть начальное условие $u(x, 0)$ представляет собой безотражательный потенциал, имеющий N дискретных уровней $\varkappa_i$ и N соответствующих нормировочных констант $c_i(0) \equiv c_i$. Тогда в

соответствии с (1.25) имеем

$$B(x+y;\ t)=\sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\exp[-\varkappa_n(x+y)],$$

где

$$c_n^2(t)=c_n^2\exp(8\varkappa_n^3 t). \tag{1.32}$$

Уравнение (1.26) принимает вид

$$K(x,\ y;\ t)+\sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\exp(-\varkappa_n x)\exp(-\varkappa_n y)+$$
$$+\sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\exp(-\varkappa_n y)\int_x^{\infty} dz\exp(-\varkappa_n z)K(x,\ z)=0.$$

Так же, как и в случае односолитонного решения, N-солитонное решение можно получить из этого уравнения разделением переменных. Полагаем

$$K(x,\ y)=\sum_{n=1}^{N} K_n(x;\ t)\exp(-\varkappa_n y). \tag{1.33}$$

Это дает

$$K_n(x;\ t)+c_n^2(t)\sum_{m=1}^{N}\frac{\exp[-(\varkappa_n+\varkappa_m)x]}{\varkappa_n+\varkappa_m}K_m(x;\ t)=-c_n^2(t)\exp(-\varkappa_n x). \tag{1.34}$$

Обозначим через P определитель системы (1.34):

$$P=\left|\delta_{nm}+c_n^2(t)\frac{\exp[-(\varkappa_n+\varkappa_m)x]}{\varkappa_n+\varkappa_m}\right|\equiv\det\|P_{nm}\|. \tag{1.35}$$

Решение системы (1.34) имеет вид

$$K_n(x;\ t)=\frac{1}{P}\det P^{(n)}, \tag{1.36}$$

где $P^{(n)}$—матрица, получающаяся из P_{nm} заменой n-го столбца на столбец, составляющий правую часть (1.34).

Согласно (1.33), (1.36) и известному правилу дифференцирования определителей, имеем

$$K(x,\ x;\ t)=\frac{1}{P}\sum_{n=1}^{N}\det P^{(n)}\cdot\exp(-\varkappa_n x)=\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}=\frac{d}{dx}\ln P.$$

Отсюда следует формула

$$u(x,\ t)=-\frac{d^2}{dx^2}\ln P. \tag{1.37}$$

Новым, по сравнению с результатом работы [1], здесь является зависимость коэффициентов c_n от t.

Решение (1.37) и представляет N-солитонное решение. Если использовать для $c_n(t)$ формулу (1.32), то получается выражение, связывающее скорость распространения солитона v_n с собственным значением $\varkappa_n$:

$$v_n=4\varkappa_n^2. \tag{1.38}$$

Мы здесь не будем исследовать асимптотические выражения формулы (1.37). Заметим лишь, что это сравнительно просто делается, поскольку компонентами детерминанта P являются «бегущие экспоненты» типа $\exp[\varkappa_i(x-v_i t-\theta_i)]$. Поэтому при больших t решение сосредоточено вблизи точки $x=v_i t$. Это и есть уединенная волна, движущаяся со скоростью v_i и сдвинутая по фазе на θ_i.

Сдвиг фазы обусловлен взаимодействием солитонов. Проходя друг сквозь друга, солитоны сначала деформируются, а потом полностью восстанавливают свою форму. Единственным последствием их взаимодействия является сдвиг фазы на величину θ_i.

Интегралы движения. Уравнение КдВ имеет бесконечное число законов сохранения. Это — уравнения в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \tag{1.39}$$

где ρ — сохраняющиеся плотности, а J — потоки. Функции ρ и J являются полиномами от u, u_x и т. д. Если u и все производные достаточно быстро убывают при $x \to \pm\infty$, то интегрирование (1.39) дает интегралы движения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(u, u_x, u_{xx}, \ldots). \tag{1.40}$$

Факт существования бесконечного числа интегралов движения был установлен в [8]. Их можно представить в виде некоторой рекуррентной формулы. Воспользуемся представлением из [3]:

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho_{2n+1}, \tag{1.41}$$

где плотности ρ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\rho_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} \rho_n + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \rho_{n-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\rho_1 = -u.$$

Приведем явный вид нескольких первых интегралов движения:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u, \qquad I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u^2,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (u_x^2 + 2u^3), \qquad I_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4). \tag{1.42}$$

Интеграл I_2 выделен, так как он является гамильтонианом для КдВ-уравнения: $H = I_2$. Уравнения движения записываются в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \tag{1.43}$$

и приводят к (1.1).

Факт существования бесконечного числа интегралов движения в данном случае однозначно связан с интегрируемостью задачи. Инварианты, не зависящие от t, можно было указать еще раньше. Это — собственные значения дискретного спектра $\varkappa_n$ и комбинация амплитуд $a^+(k, t)\, b^+(k, t)$ в непрерывном спектре (см. формулу (1.20)) (ком. 2). Их представление через $u(x, t)$ и производные от u приводят к формуле (1.41).

Еще одно важное свойство интегралов движения следует отметить. Используя уравнение (1.43), можно определить понятие скобок Пуассона для уравнения КдВ:

$$[A, B] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta A}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B}{\delta u}. \tag{1.44}$$

Все интегралы движения I_n попарно коммутируют друг с другом, т. е. для любой их пары скобки Пуассона (1.44) тождественно обращаются в нуль.

§ 2. Интегрируемые уравнения

Уравнение КдВ не является единственным точно интегрируемым уравнением. Существует несколько других, часто встречающихся в физике уравнений, обладающих аналогичными свойствами: интегрируемостью методом ОЗР, существованием $\hat{L}\hat{A}$-пары, бесконечным числом интегралов движения, N-солитонными решениями. Укажем кратко на некоторые из них.

1. Нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0 \tag{2.1}$$

возникает, в частности, при анализе распространения узких волновых пакетов. Мы познакомимся с его получением несколько позже. Его интегрирование изложено в [3—5]. Соответствующие $\hat{L}\hat{A}$-пары имеют вид матриц 2×2.

2. Уравнение синус-Гордона

$$v_{tt} = v_{xx} - \sin v \tag{2.2}$$

уже знакомо нам. Простая замена переменных

$$\xi = {}^1/_2 (x - t), \qquad \eta = {}^1/_2 (x + t)$$

приводит (2.2) к виду

$$v_{\xi\eta} = \sin v. \tag{2.3}$$

Обзор различных результатов по (2.2) имеется в [3, 4].

3. Цепочка Тода, которая также уже упоминалась:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = a [\exp(-br_n) - \exp(-br_{n+1})], \tag{2.4}$$

где a и b — константы и

$$r_n = y_n - y_{n-1}$$

есть расстояние между соседними атомами цепочки. Если цепочка состоит из N атомов, то ставятся циклические граничные условия:

$$y_{N+1} = y_1, \qquad \dot{y}_{N+1} = \dot{y}_1.$$

При произвольном N существует столько же первых интегралов, находящихся в инволюции. Уравнение (2.4) также относится к числу точно интегрируемых [9].

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 12

1. Для ознакомления с методом ОЗР и с другими вариантами нахождения точно интегрируемых задач см. монографии [3, 4]. Существенное обобщение метода Лакса было сделано в работе [5]. При анализе уравнения Бюргерса была найдена замена переменных, линеаризующая задачу. Так и в методе ОЗР находится широкий класс подстановок, приводящих различные нелинейные задачи к линейным. Здесь, однако, эти подстановки выглядят намного сложнее.

2. Существование бесконечного числа интегралов движения, вообще говоря, еще не достаточно для полной интегрируемости уравнений сплошной среды. Эти уравнения также эквивалентны бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для фурье-гармоник. Однако обе бесконечности могут быть разными.

Часть III. ПРИМЕРЫ

Глава 13

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

Мы уже частично обсуждали в § 3 гл. 6 вопросы, связанные с движением заряженных частиц в поле волнового пакета

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}\sum_k E_k \sin(kx - \omega_k t).$$

Волновой пакет представляет собой суперпозицию большого числа волн, движущихся с различными фазовыми скоростями. Вследствие дисперсии скорости различных гармоник различны, и поэтому поле, в котором движется частица, очень сильно деформируется со временем. Многочисленны приложения этой задачи в плазме, астрофизике, теории твердого тела и др. Это связано с тем, что в среде, например такой, как плазма, в результате какой-либо из неустойчивостей начинают возбуждаться много мод колебаний. Амплитуды возбужденных волн существенно превышают уровень тепловых флуктуаций. Поэтому возникают волновые пакеты скоррелированных мод, которые в течение достаточно большого времени можно считать квазистационарными. Вследствие этого оказывается возможным резонансное взаимодействие частиц с волнами, если выполняется условие резонанса Ландау

$$\omega_k = kv.$$

Однако если есть хотя бы две волны, то возникает стохастический слой, где разрушены интегралы движения, и дальнейший анализ взаимодействия частиц с волнами становится сложным. В этой главе мы рассмотрим некоторые случаи взаимодействия частица—волна, допускающие достаточно полный анализ (ком. 1).

§ 1. Регулярная и стохастическая динамика частиц в поле волнового пакета

Резонансы Ландау между частицей и волной не являются единственным физическим процессом, определяющим динамику частиц. По крайней мере, вторичные резонансы, обусловленные сильно нелинейным характером задачи, также могут давать существенный вклад в общую динамическую картину. Поэтому задача о движении частиц в волновом пакете произвольного вида в значительной степени теряет свой смысл из-за сильной нечеткости подобной постановки. Ее можно улучшить, если зафиксировать некоторые свойства волнового пакета, которые указывали бы его структуру. Именно в этом направлении и будут продемонстрированы ниже некоторые виды динамики частиц, различие которых связано с различием волновых пакетов.

Времени- и пространственноподобные волновые пакеты. Будем считать, что волновой пакет имеет дискретный спектр. Это означает, что он состоит из счетного набора гармоник с волновыми числами k_n, и n меняется, вообще говоря, от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому перепишем уравнение движения частицы

в виде

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \cos(k_n x - \omega_n t) \equiv \frac{e}{m} E(x, t), \tag{1.1}$$

где $\omega_n = \omega(k_n)$.

Сделаем относительно структуры волнового пакета следующие упрощающие предположения:

$$k_n = k_0 + n\Delta k, \quad \omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega, \quad E_n \equiv E_0. \tag{1.2}$$

Здесь величина Δk имеет смысл характерного расстояния между волновыми числами пакета, а $\Delta\omega$ — характерное расстояние между частотами пакета. Между ними существует соотношение

$$\Delta\omega = \frac{d\omega(k)}{dk} = v_g \Delta k, \tag{1.3}$$

где v_g — групповая скорость. Можно также положить

$$\Delta\omega = 2\pi/T, \quad \Delta k = 2\pi/L, \tag{1.4}$$

где T — характерный временной период поля, а L — его характерный пространственный период.

Теперь уравнение (1.1) переписывается в виде

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[n(\Delta k x - \Delta\omega t)]. \tag{1.5}$$

Рассмотрим параметр

$$\eta = \frac{x}{t} \frac{\Delta k}{\Delta\omega} = \frac{v}{v_g},$$

где $v = \dot{x}$ — скорость частицы. Обозначим также

$$\vartheta(x, t) = k_0 x - \omega_0 t, \quad \xi = \Delta k x - \Delta\omega t. \tag{1.6}$$

В зависимости от значений параметра η можно различать два предельных случая. В случае скоростей, малых по сравнению с групповой скоростью пакета $E(x, t)$, имеем $\eta \ll 1$, и поэтому в (1.6) можно приближенно положить

$$\xi \approx -\Delta\omega t \qquad (\eta \ll 1). \tag{1.7}$$

Приближение (1.7) будем называть случаем времениподобного волнового пакета. В обратном случае $v \gg v_g$ и

$$\xi \approx \Delta k x \qquad (\eta \gg 1). \tag{1.8}$$

Его можно назвать случаем пространственноподобного волнового пакета. Каждому из двух пределов (1.7) и (1.8) соответствует определенная физическая ситуация.

Отображения. Для того чтобы разобраться в такой ситуации, перепишем уравнение (1.1) при условии (1.7) в виде

$$\ddot{x} = \frac{\Omega_0^2}{k_0} \cos\vartheta(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\Delta\omega t = \frac{\Omega_0^2}{k_0} T \cos\vartheta(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{1.9}$$

где мы использовали обозначения (1.4) и (1.6) и ввели частоту

$$\Omega_0 = \left(\frac{e}{m} E_0 k_0\right)^{1/2}, \tag{1.10}$$

равную частоте малых колебаний частицы в потенциальной яме, создаваемой центральной гармоникой волнового пакета ($n = 0$).

Физический смысл времениподобного волнового пакета $E(x, t)$ легко раскрывается из уравнения (1.9). На свободно движущуюся частицу действуют периодические по времени δ-образные импульсы, промодулированные по фазе ϑ. Легко записать отображение, эквивалентное уравнению (1.9). Для этого обозначим моменты действия силы через $t_n = nT$ и положим

$$\begin{aligned} &v \equiv v(t = nT - 0), \qquad \bar{v} \equiv v(t = (n+1)T - 0), \\ &\vartheta \equiv \vartheta[x(t = nT - 0);\ t = nT - 0], \\ &\bar{\vartheta} \equiv \vartheta[x(t = (n+1)T - 0);\ t = (n+1)T - 0], \end{aligned} \tag{1.11}$$

т. е. v и ϑ — скорость и фаза частицы непосредственно перед n-м толчком, а $\bar{v}$, $\bar{\vartheta}$ — то же перед $(n+1)$-м толчком.

Интегрирование уравнения (1.9) по интервалу в окрестности точки $t_n = nT$ приводит к уравнениям

$$\hat{T}: \begin{cases} \bar{v} = v + \dfrac{K}{k_0 T} \cos\vartheta, \\ \bar{\vartheta} = \vartheta + \omega(\bar{v})\, T, \end{cases} \tag{1.12}$$

которые мы будем называть $\hat{T}$-отображением и где

$$\omega(v) = k_0 v - \omega_0, \qquad K = \Omega_0^2 T^2 = \frac{e}{m} E_0 k_0 T^2. \tag{1.13}$$

Мы видим, что (1.12) есть стандартное отображение, и при $K \gtrsim 1$ траектории частицы становятся стохастическими. Более того, соответствующая кинетика, описываемая уравнением типа Фоккера—Планка—Колмогорова, была рассмотрена в § 3 гл. 6. Полученные в нем результаты показывают, что при $K \gtrsim 1$ возникает стохастический нагрев частиц. Он проявляется в том, что с течением времени частица все большую часть периода своего движения имеет скорость, превышающую любое зафиксированное ее значение. Другими словами, спустя некоторое время скорость частицы, в основном, становится больше, чем v_g, и условие (1.7) перестает быть применимым. Однако теперь начинает работать второе условие (1.8). Тот же волновой пакет $E(x, t)$, который раньше мы считали времениподобным, теперь приобретает свойства пространственноподобного пакета. Это приводит нас к необходимости рассмотреть другой предельный случай уравнения (1.1).

Используя выражение (1.8), перепишем уравнение (1.1):

$$\ddot{x} = \frac{\Omega_0^2}{k_0} \cos\vartheta(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\Delta k x = \frac{\Omega_0^2}{k_0} L \cos\vartheta(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL). \tag{1.14}$$

Это уравнение во многом аналогично (1.9), однако теперь δ-импульсы возмущения следуют на равных пространственных интервалах длиной L. Это можно представить себе следующим образом. Частица движется между двумя стенками, расположенными на расстоянии L друг от друга. Подлетая к какой-либо из них, она испытывает действие силового импульса. Попробуем теперь построить соответствующее отображение, которое связывало бы переменные между двумя последовательными столкновениями частицы со стенками.

Обозначим через t_n такие моменты времени, при которых выполняется условие

$$x_n = x(t_n) = nL \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.15}$$

Пусть $\mathscr{E} = mv^2/2$ — энергия частицы. Введем новую переменную [6]

$$w = {}^1\!/_2 mv|v| = \mathscr{E} \operatorname{sign} v = \mathscr{E} \operatorname{sign} w. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.14) с помощью обозначения (1.16) можно переписать в виде

$$\dot{w} = m \frac{\Omega_0^2}{k_0} L \cos\vartheta |\dot{x}| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL).$$

Его интегрирование в окрестности точки x_n дает

$$\bar{w} = w + m\frac{\Omega_0^2}{k_0} L\cos\vartheta, \tag{1.17}$$

где обозначено аналогично (1.11):

$$w = w(t_n - 0), \qquad \bar{w} = w(t_{n+1} - 0),$$

с той лишь разницей, что момент времени t_n теперь равен не nT, а определяется формулой (1.15).

Теперь построим уравнение для отображения фазы ϑ. Между двумя δ-импульсами силы частица движется свободно, так как правая часть в (1.14) равна нулю. Поэтому $w = \text{const}$. Интервал длиной L частица пролетает за время

$$T = T(\mathscr{E}) = \frac{L}{|v|} = \frac{L}{(2\mathscr{E}/m)^{1/2}}. \tag{1.18}$$

Поэтому сдвиг фазы ϑ между двумя последовательными действиями δ-импульсов равен

$$\bar{\vartheta} - \vartheta = k_0 L \operatorname{sign}\bar{v} - \omega_0 T(\bar{\mathscr{E}}) = k_0 L \operatorname{sign}\bar{w} - \omega_0 L\left(\frac{m}{2|\bar{w}|}\right)^{1/2}, \tag{1.19}$$

где определение ϑ и $\bar{\vartheta}$ аналогично формуле (1.11) с заменой моментов времени t_n и t_{n+1} на те, которые получаются из (1.15).

Теперь уравнения (1.17) и (1.19) можно представить в виде следующего отображения в пространстве переменных (w, ϑ):

$$\hat{L}: \begin{cases} \bar{w} = w + Q_0\cos\vartheta, \\ \bar{\vartheta} = \vartheta + k_0 L \operatorname{sign}\bar{w} - \omega_0 L\left(\dfrac{m}{2|\bar{w}|}\right)^{1/2}, \end{cases} \tag{1.20}$$

где величина

$$Q_0 = mL\frac{\Omega_0^2}{k_0} = eE_0 L \tag{1.21}$$

характеризует значение передаваемой частице энергии под действием возмущения. Она имеет простой смысл, так как равна потенциальной энергии, приобретаемой частицей в постоянном поле E_0 на отрезке длиной L.

Нетрудно убедиться в том, что

$$J = \frac{\partial(\bar{w}, \bar{\vartheta})}{\partial(w, \vartheta)} = 1,$$

и, следовательно, $\hat{L}$-отображение сохраняет фазовый объем, а переменные (w, ϑ) являются канонически сопряженной парой. Это последнее замечание очень важное, и мы его используем ниже.

Динамика в пространственноподобном пакете. Простейшая информация о динамике частицы, описываемой $\hat{L}$-отображением, может быть получена обычным путем. Для этого рассмотрим условие локальной неустойчивости фаз

$$K = \max\left|\frac{d\bar{\vartheta}}{d\vartheta} - 1\right| = \frac{\omega_0}{k_0}\frac{L^2\Omega_0^2}{|v|^3} = \frac{e}{m}E_0\frac{\omega_0 L^2}{|v|^3} \geqslant 1. \tag{1.22}$$

Это условие можно переписать в виде

$$|v|^3 \leqslant u_0 L^2\Omega_0^2, \qquad u_0 = \omega_0/k_0. \tag{1.23}$$

При его выполнении динамика частицы становится стохастической. Сравним (1.23) с аналогичным условием $K \geqslant 1$ для $\hat{T}$-отображения. Согласно (1.13), при $v < v_g$ условие стохастичности

$$\Omega_0^2 T^2 = \frac{e}{m}E_0 k_0 \Big/ \left(\left|\frac{d\omega}{dk}\right|\Delta k\right)^2 \geqslant 1 \tag{1.24}$$

выполняется при достаточно больших амплитудах поля и не зависит от энергии частицы. Именно в этом месте и возникает отличие между случаями $v \ll v_g$ и $v \gg v_g$, так как в последнем случае условие хаотизации фаз (1.23) выполняется для скоростей, меньших некоторой максимальной:

$$|v| \leqslant v_{\max} = (u_0 L^2 \Omega_0^2)^{1/3} = \left(\frac{e}{m} E_0 L^2 \omega_0\right)^{1/3}. \tag{1.25}$$

Мы пришли к уже знакомому нам явлению, с которым мы встречались в § 3 гл. 6 в связи с моделью Улама. Стохастическая динамика частицы (по крайней мере, сильная стохастичность) происходит в ограниченной области скоростей $(0, v_{\max})$—(ком. 2).

Еще одно принципиальное отличие динамики при $v \ll v_g$ от динамики при $v \gg v_g$ связано также с зависимостью критерия стохастичности от скорости (1.22). Условие (1.22) выполняется всегда, независимо от значения поля E_0. Меняется лишь область скоростей (1.25), где имеет место стохастическая динамика. С уменьшением поля эта область уменьшается пропорционально $E_0^{1/3}$.

Кинетика стохастического нагрева частиц. В области стохастичности динамика частицы может быть описана с помощью кинетического уравнения. Если относительное изменение энергии частицы на одном шаге отображения мало́, т. е.

$$\frac{\Delta \mathscr{E}}{\mathscr{E}} \sim \frac{Q_0}{\mathscr{E}} \ll 1, \tag{1.26}$$

то можно воспользоваться уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова. Заметим, что $\mathscr{E} = |w|$. Поэтому условие (1.26) справедливо всюду, за исключением области значений w, где

$$\mathscr{E} = |w| \leqslant Q_0. \tag{1.27}$$

Будем считать эту область малой по сравнению со всей областью, в которой справедливо вообще кинетическое описание. Составим соответствующее неравенство. Очевидно, что оно должно выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon \equiv \frac{Q_0}{2|w_{\max}|} = \frac{Q_0}{m v_{\max}^2} \ll 1. \tag{1.28}$$

Случай, выражаемый неравенством (1.28), будем называть случаем слабых полей. Его физическое содержание в том, что почти во всей области стохастической динамики столкновения являются слабыми, согласно определению (1.26).

Запишем условие (1.28) подробнее, используя выражения (1.21) для Q_0 и (1.25) для $v_{\max}$. Имеем

$$\varepsilon = \left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^{2/3} \frac{1}{(k_0 L)^{1/3}} = \left(\frac{eE_0}{mL\omega_0^2}\right)^{1/3} \ll 1. \tag{1.29}$$

Оно всегда выполняется для слабых полей.

Таким образом, при $\varepsilon \ll 1$ можно воспользоваться кинетическим уравнением диффузионного типа. Здесь следует вспомнить, что переменные (w, ϑ) являются канонически сопряженной парой. Поэтому функция распределения $F = F(w, t)$ удовлетворяет кинетическому уравнению в дивергентной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} D \frac{\partial F}{\partial w}, \tag{1.30}$$

где коэффициент диффузии D находится обычным способом:

$$D = \left\langle\left\langle \frac{(\Delta w)^2}{T} \right\rangle\right\rangle, \tag{1.31}$$

и скобки $\langle\langle \ldots \rangle\rangle$ означают усреднение по фазе. Из первого уравнения (1.20)

имеем

$$\langle\langle(\Delta w)^2\rangle\rangle = {}^1/_2 Q_0^2 = {}^1/_2 (eE_0L)^2.$$

Подставляя это выражение и (1.18) в (1.31), находим

$$D = \frac{e^2E_0^2}{\sqrt{2m}}\sqrt{|w|} \equiv D_0\sqrt{|w|}. \tag{1.32}$$

Теперь кинетическое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial}{\partial w}\sqrt{|w|}\,\frac{\partial F}{\partial w} \tag{1.33}$$

с граничным условием отсутствия потока частиц при $w = \pm w_{\max}$, т. е.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{w=\pm w_{\max}} = 0.$$

Это условие приводит к распределению

$$F(w) \approx \text{const} = 1/2w_{\max}. \tag{1.34}$$

На рис. 13.1 приведено заполнение точками траектории фазовой плоскости. Соответствующая функция распределения изображена на рис. 13.2. Она с точностью до граничных эффектов достаточно хорошо передает закон (1.34).

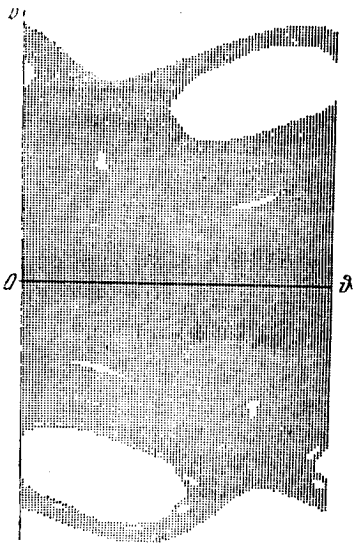


Рис. 13.1. Точки траектории частицы для $\hat{L}$-отображения при $\varepsilon^3 = 1{,}01\cdot10^{-3}$ [7]

Исследование динамики в пространственноподобном волновом пакете позволяет получить достаточно полную картину стохастического нагрева частиц. Если выполнено условие (1.24), то частицы с малой скоростью $v \ll v_g$ начинают ускоряться. Механизм ускорения является стохастическим и описан в § 3 гл. 6. Энергия частиц возрастает, и их скорости, в среднем, достигают и начинают превышать групповую скорость волнового пакета v_g. Теперь характер стохастического нагрева изменяется. Из (1.33) следует, что энергия частиц растет со временем по закону

$$\langle\mathscr{E}\rangle \sim \mathscr{E}_0 + \text{const}\cdot t^{2/3}.$$

Так происходит до тех пор, пока энергия частиц не достигнет значений $\sim \mathscr{E}_{\max} = w_{\max}$. Это и есть граница ускорения. Существование ее имеет принципиальное значение. Оно не может быть получено из времениподобного волнового пакета, и в этом заключается особая роль случая $v > v_g$, описываемого $\hat{L}$-отображением (ком. 3).

Еще одно важное различие динамики частицы при $v \ll v_g$ и $v \gg v_g$ связано с видом соответствующих кинетических уравнений. При малых скоростях частиц, когда волновой пакет можно считать времениподобным, уравнение имеет вид (§ 3 гл. 6)

$$\frac{\partial F(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F(v,t)}{\partial v}; \qquad D = \pi\frac{e^2}{m^2}\frac{E_0^2}{\Delta\omega}. \tag{1.35}$$

В нем коэффициент диффузии постоянен, и поэтому рост энергии происходит линейно со временем:

$$\langle\mathscr{E}\rangle \sim \mathscr{E}_0 + \text{const}\cdot t.$$

Если бы задача (1.35) решалась в некоторой ограниченной области скоростей при отсутствии потока частиц из этой области, то в этой области

установилось бы равновесное распределение

$$F(v) = \text{const}. \tag{1.36}$$

Распределение (1.36) имеет вид плато в пространстве скоростей.

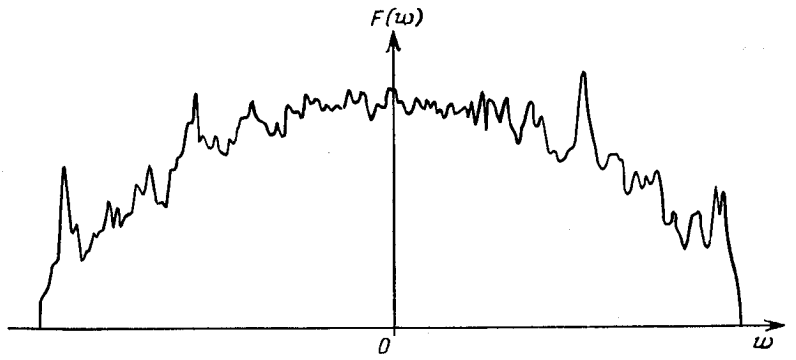


Рис. 13.2. Функция распределения для $\hat{L}$-отображения при том же значении ε, что и на рис. 13.1

Уравнение (1.33) можно переписать, используя его симметрию относительно замены $w \to -w$. В результате получаем

$$\frac{\partial F(v^2, t)}{\partial t} = \frac{D_0}{2} \frac{\partial}{\partial v^2} |v| \frac{\partial F(v^2, t)}{\partial v^2}; \qquad D_0 = 4\pi \frac{e^2}{m^2} \frac{E_0^2}{\Delta k}. \tag{1.37}$$

Уравнение (1.37) имеет дивергентную форму для функции распределения, зависящей от v^2, а не от v. Поэтому в тех случаях, когда в ограниченной области по v устанавливается равновесное распределение, оно имеет вид

$$F(v^2) = \text{const}. \tag{1.38}$$

Выражение (1.38) существенно отличается от (1.36). Это различие происходит из-за того, что вид взаимодействия частицы с волновым пакетом различен в зависимости от того, является он времени- или пространственноподобным.

Обобщение. Исходная задача (1.1), (1.2) может быть решена и в общем случае без выделения времениподобного или пространственноподобного пакета. Это было сделано в работе [6], и мы здесь приведем лишь краткий результат.

Первое обобщение связано с выбором новых переменных, играющих роль действия. Оказывается, что в качестве такой переменной следует взять

$$w = {}^1/_2 m (v - v_g) |v - v_g| \qquad (v_g \neq \infty). \tag{1.39}$$

При $v \ll v_g$

$$w \to \text{const} + m v_g v,$$

т. е. w пропорционально скорости. Наоборот, при $v \gg v_g$ выражение (1.39) переходит в (1.16).

Фаза ϑ, определенная в (1.6), является канонически сопряженной к (1.39).

Интервал времени между двумя шагами отображения (n-м и $(n+1)$-м) находится с помощью определения фазы в (1.5). Он равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta k |v_{n+1} - v_g|} = L \left(\frac{m}{2 |w_{n+1}|} \right)^{1/2}.$$

Здесь также имеются предельные переходы при $v \ll v_g$ и $v \gg v_g$.

Наконец, универсальное отображение, справедливое при любых v в области $(-\infty, \infty)$, имеет следующую форму:

$$\hat{L}_u: \begin{cases} \bar{w} = w + eE_0 L\cos\vartheta, \\ \bar{\vartheta} = \vartheta + k_0 L \operatorname{sign}\bar{w} - k_0 L|(u_0 - v_g)\left(\frac{m}{2|\bar{w}|}\right)^{1/2}. \end{cases} \tag{1.40}$$

Сравним выражение (1.40) с (1.20). Оно получается из (1.20) заменами

$$v \to v - v_g, \quad u_0 = \frac{\omega_0}{k_0} \to u_0 - v_g, \tag{1.41}$$

что видно непосредственно из определения (1.39). Это означает просто, что $\hat{L}$-отображение (1.20) получается из универсального отображения, если в последнем положить $v_g = 0$, или в силу (1.41) эквивалентно

$$v \gg v_g, \quad u_0 \gg v_g. \tag{1.42}$$

Однако наиболее интересным в переходе (1.41) является то, что вид отображения не изменяется, а переопределяются лишь переменные и константы.

Запишем условие стохастизации динамики для универсального отображения $\hat{L}_u$. Аналогично (1.22), можно получить

$$K = \frac{|u_0 - v_g| L^2\Omega_0^2}{|v - v_g|^3} \geqslant 1. \tag{1.43}$$

Теперь условие (1.43) обладает также универсальностью. При неравенствах (1.42) из него получается критерий возникновения хаотического движения в пространственноподобном волновом пакете (1.22), а при обратных неравенствах

$$v \ll v_g, \quad u_0 \ll v_g$$

из (1.43) следует критерий (1.24) для времениподобного пакета.

В общем случае сохраняется также кинетическое уравнение (1.33), в котором переменная w теперь определяется формулой (1.39). Таким образом, некоторая идеализация структуры волнового пакета позволяет установить строгие условия появления хаоса и дать кинетическое описание эволюции функции распределения частиц.

§ 2. Движение в магнитном поле и поле волнового пакета

Выше рассматривалась динамика частиц в поле волнового пакета. Во многих областях физики, и в особенности физики плазмы, возникает более усложненный вариант этой задачи, в котором к полю волнового пакета добавляется еще внешнее магнитное поле. Симметрия задачи изменяется, и возникают новые качественные эффекты. Достаточно заметить, что частица в магнитном поле $\boldsymbol{B}$ движется по винтовой линии с ларморовским радиусом

$$r_H = v_\perp/\omega_H$$

и ларморовской частотой вращения

$$\omega_H = eB/mc,$$

где $v_\perp$ — поперечная к магнитному полю компонента скорости. Траектория частицы уже не может быть уложена на плоскости и становится трехмерной.

Сочетание потенциального поля волнового пакета и вихревого магнитного поля делает задачу богатой различными физическими случаями, которые могут оказаться характерными не только в физике плазмы, но и в других областях физики.

Мы будем рассматривать задачу о движении частицы в поле одной волны или волнового пакета и во внешнем постоянном магнитном поле. Можно выделить два характерных случая, когда волновой пакет или волна движутся под углом к магнитному полю и когда движение пакета или волны происходит перпендикулярно магнитному полю. В этом параграфе мы остановимся на первом из них (ком. 4).

Уравнение движения. Пусть постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$ направлено вдоль оси z, а все волновые векторы $\boldsymbol{k}$ волн в пакете лежат в плоскости (x, z). Тогда гамильтониан частицы, движущейся в этих полях, имеет следующий вид:

$$H=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P}-\frac{e}{c}B_0x\boldsymbol{y}^0\right)^2-e\sum_k\Phi_k\cos(zk_z+xk_\perp-\omega_kt), \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{P}$—обобщенный импульс частицы, $\boldsymbol{y}^0$—орт вдоль оси y, Φ_k—амплитуды потенциалов плоских волн. Даже при сделанных предположениях относительно структуры волнового пакета задача все еще очень сложна. Мы примем, что каждому значению k_z соответствует одно значение $k_\perp$.

Из (2.1) следует, что

$$P_y=\text{const},$$

так как в нем отсутствует зависимость от y. Обозначим новую координату

$$\bar{x}=x-\frac{1}{m\omega_H}P_y;\qquad \dot{\bar{x}}=\dot{x}=v_x,$$

и введем с ее помощью полярные координаты:

$$\bar{x}=r_H\sin\varphi;\qquad \dot{\bar{x}}=r_H\omega_H\cos\varphi.$$

Эти выражения описывают в явной форме ларморовское вращение в магнитном поле. Положим также

$$I=\tfrac{1}{2}m\omega_Hr_H^2=mv_\perp^2/2\omega_H. \tag{2.2}$$

Гамильтониан (2.1) можно переписать, используя введенные обозначения:

$$H=\frac{1}{2m}P_z^2+\omega_HI-e\sum_k\Phi_k\cos(zk_z+k_\perp r_H\sin\varphi-\omega_kt).$$

Воспользуемся разложением

$$e^{i\xi\cos\varphi}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(\xi)e^{il\varphi},$$

где $J_l(\xi)$—функции Бесселя, и представим с его помощью H в виде

$$H=\frac{1}{2m}P_z^2+\omega_HI-e\sum_k\Phi_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(k_\perp r_H)\cos(zk_z+l\varphi-\omega_kt). \tag{2.3}$$

Теперь, вводя более удобную запись, представим динамику частицы как эволюцию динамической системы с двумя степенями свободы под действием зависящего от времени возмущения. Для этого положим

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_2),\qquad \mathcal{J}_1=P_z,\qquad \mathcal{J}_2=I;\\ &\vartheta=(\vartheta_1,\ \vartheta_2),\qquad \vartheta_1=z,\qquad \vartheta_2=\varphi.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Переменные $(\mathcal{J}, \vartheta)$ являются канонически сопряженной парой переменных типа действие—угол. С их помощью гамильтониан (2.3) представляется в канонической форме

$$H=H(\mathcal{J},\ \vartheta)=H_0(\mathcal{J})+V(\mathcal{J},\ \vartheta,\ t), \tag{2.5}$$

где

$$H_0(\mathcal{J}) = \frac{1}{2m}\mathcal{J}_1^2 + \omega_H \mathcal{J}_2,$$

$$V(\mathcal{J}, \vartheta, t) = \sum_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{V_{kl}(\mathcal{J}) \exp[i(\vartheta_1 k_z + \vartheta_2 l - \omega_k t)] + \text{к. с.}\}, \qquad (2.6)$$

$$V_{kl}(\mathcal{J}) = -{}^1/_2 e\Phi_k J_l(k_\perp r_H);\ \Phi_{-k} = \Phi_k^*.$$

Уравнения движения теперь записываются в простой форме:

$$\dot{\mathcal{J}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i}, \qquad \dot{\vartheta}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{J}_i} \qquad (i = 1, 2), \qquad (2.7)$$

и совпадают, как легко убедиться, с исходными уравнениями движения в старых переменных (P_z, P_x; z, x).

Переменные (2.4) позволяют далее воспользоваться уже известными приемами анализа нелинейных резонансов в системе и их перекрытия.

Резонансы волна—частица. Рассмотрим сначала взаимодействие частицы с одной волной. Выделим в потенциале $V(\mathcal{J}, \vartheta, t)$ одну какую-либо гармонику с фиксированными номерами k_z и l и обозначим соответствующий ей гамильтониан как

$$H_{kl} = H_0(\mathcal{J}) + U_{kl}\cos\psi, \qquad (2.8)$$

где

$$U_{kl} = e|\Phi_k| J_l(k_\perp r_H),$$
$$\psi = k_z\vartheta_1 + l\vartheta_2 - \omega_k t + \psi_0 \qquad (2.9)$$

и ψ_0—фаза комплексной амплитуды Φ_k (рис. 13.3). Если в уравнения движения (2.7) подставить вместо H выражения (2.8), (2.9), то получатся уравнения, описывающие взаимодействие частицы с одной плоской волной:

$$\dot{\mathcal{J}}_1 = -k_z U_{kl}\sin\psi, \qquad \dot{\mathcal{J}}_2 = -lU_{kl}\sin\psi,$$
$$\dot{\psi} = k_z\dot{\vartheta}_1 + l\dot{\vartheta}_2 - \omega_k = k_z v_z + l\omega_H - \omega_k \equiv \omega_{kl}(v_z). \qquad (2.10)$$

Здесь введена нелинейная частота $\omega_{kl}(v_z)$ в системе отсчета, сопровождающей волну. Это очень важная характеристика. Ее зависимость от продольной компоненты скорости v_z определяет нелинейный характер резонанса между движением частицы и волной. Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля, $k_z = 0$, и зависимость частоты от действия $\mathcal{J}_1$ пропадает. Это создает, как мы увидим в следующем параграфе, новую физическую ситуацию. Поэтому очень важно, что в рассматриваемом нами случае k_z не слишком мало́.

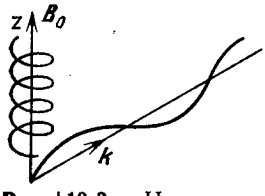


Рис. 13.3. Невозмущенная траектория в поле одной волны и в магнитном поле

Условие резонанса волна—частица вытекает из последнего уравнения в (2.10):

$$\omega_{kl}(v_z^{(r)}) = k_z v_z^{(r)} + l\omega_H - \omega_k = 0. \qquad (2.11)$$

В окрестности резонанса происходит сильное взаимодействие двух степеней свободы, описываемых переменными $\mathcal{J}_i$, ϑ_i ($i = 1, 2$). Совершая некоторое число оборотов l при ларморовском вращении, частица попадает все время в одну и ту же фазу волны. Это взаимодействие известно как циклотронный резонанс при нормальном эффекте Доплера ($l > 0$) или аномальном эффекте Доплера ($l < 0$). В частности, если $\omega_k = 0$, то резонанс остается возможным при $l < 0$ (ком. 5).

Исследование резонанса происходит так же, как это делалось до сих пор. Из первых двух уравнений (2.10) следует интеграл движения

$$\bar{\mathcal{J}} \equiv l\mathcal{J}_1 - k_z\mathcal{J}_2 = \text{const}, \qquad (2.12)$$

или

$$\overline{\mathcal{J}} = lP_z - {}^1/_2 k_z m\omega_H r_H^2 = \text{const}. \tag{2.13}$$

Это делает систему (2.10) интегрируемой и приводит ее к уравнению для нелинейного маятника

$$\ddot{\psi} + \Omega_{kl}^2 \sin\psi = 0,$$

где введена частота фазовых колебаний частицы

$$\Omega_{kl} = k_z (U_{kl}/m)^{1/2} = k_z \left| \frac{e}{m} \Phi_k J_l (k_\perp r_H) \right|^{1/2}. \tag{2.14}$$

В случае сильных магнитных полей $k_\perp r_H \ll 1$ и частота Ω_{kl} становится равной

$$\Omega_{kl} = k_z \left[\frac{e}{2m} |\Phi_k| (k_\perp r_H)^{|l|} \right]^{1/2}.$$

Условие применимости рассмотренного резонансного приближения заключается в том, что частота Ω_{kl} мала по сравнению с невозмущенными частотами, т. е.

$$\Omega_{kl} \ll \frac{\partial H_0}{\partial \mathcal{J}_1}, \qquad \Omega_{kl} \ll \frac{\partial H_0}{\partial \mathcal{J}_2}.$$

Эти условия приводят к неравенствам

$$\Omega_{kl} \ll \omega_H, \qquad \Omega_{kl} \ll k_z v_z.$$

Первое из них очевидно; второе неравенство является очень важным, так как оно устанавливает нижнюю границу для компонент продольного движения по отношению к магнитному полю. Поэтому мы не можем перейти к пределу $k_z v_z \to 0$.

Посмотрим теперь, как выглядит решение при резонансе. Условие резонанса (2.11) определяет $v_z^{(r)}$ и $P_z^{(r)}$:

$$P_z^{(r)} = m v_z^{(r)} = \frac{m}{k_z} (\omega_k - l\omega_H). \tag{2.15}$$

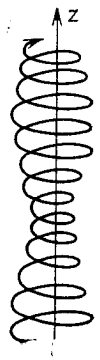


Рис. 13.4. Модуляция ларморовского радиуса

Отсюда с помощью соотношения (2.13) можно выразить значение ларморовского радиуса $r_H^{(0)}$ при резонансе:

$$r_H^{(0)} = \frac{2}{k_z m \omega_H} \left[\frac{lm}{k_z} (\omega_k - l\omega_H) - \overline{\mathcal{J}} \right] = \frac{v_\perp^{(r)}}{\omega_H}. \tag{2.16}$$

Действие резонанса проявляется в модулированных отклонениях от резонансных значений скоростей v_z, $v_\perp$ и ларморовского радиуса r_H (рис. 13.4).

Стандартное решение уравнений (2.10) дает

$$k_z v_z = k_z v_z^{(r)} + 2\Omega_{kl} \varkappa \,\mathrm{cn}\,(\Omega_{kl} t;\ \varkappa), \tag{2.17}$$

где cn — эллиптический косинус,

$$\varkappa^2 = {}^1/_2 (1 + H^{(r)}/\Omega_{kl}^2) \leqslant 1$$

и $H^{(r)}$ — значение интеграла «энергии» в (2.10), определяющее амплитуду фазовых колебаний. Аналогично можно записать и решение при $\varkappa > 1$. Выражение (2.17) описывает модуляцию скорости v_z около резонансного значения $v_z^{(r)}$. Используя выражения (2.13) и (2.16), легко находим величину модуляции поперечной скорости $v_\perp$ и r_H. Описанный резонанс будем называть резонансом продольного движения, так как для него нельзя устранить движение вдоль z. Он аналогичен также резонансу волна — частица при отсутствии магнитного поля.

Перекрытие резонансов продольного движения. Выше мы рассмотрели движение частицы в поле лишь одной гармоники, описываемое гамильтониа-

ном (2.8). Однако даже в том случае, когда плоская волна состоит из одной только моды с волновым числом $\boldsymbol{k}=(k_\parallel, k_\perp)$, наличие магнитного поля создает много гармоник. Это видно непосредственно из выражения (2.6). Уравнение (2.11) определяет теперь большое число резонансов при различных значениях l и различных значениях k_z.

Если $v_z^{(l)}$ и $v_z^{(l+1)}$ — значения v_z, удовлетворяющие условию резонанса (2.6) при фиксированном k_z и, соответственно, номерах l и $l \pm 1$, то расстояние между резонансами по частоте равно

$$\delta\omega = \omega_H.$$

Для времениподобного волнового пакета расстояние между резонансами при фиксированном l равно

$$\delta\omega_k = \left|\frac{d\omega_k}{dk}\right| \delta k_z,$$

а в пространственноподобном случае пакета

$$\overline{\delta\omega}_k = v_z \delta k_z,$$

где δk_z — расстояние между соседними гармониками в волновом пакете. Поэтому в общем случае следует взять в качестве величины $\delta\omega$ выражение

$$\delta\omega = \min(\nu_k, \omega_H), \tag{2.18}$$

где

$$\nu_k = \max(\delta\omega_k, v_z\delta k_z). \tag{2.19}$$

Условие перекрытия резонансов

$$K = (\Omega_{kl}/\delta\omega)^2 \gtrsim 1 \tag{2.20}$$

означает хаотизацию фаз волн ψ. Неравенство (2.20) и определения (2.18), (2.19) показывают, что диффузионная эволюция параметров частицы имеет ограничения так же, как и в случае отсутствия магнитного поля, рассмотренного в предыдущем параграфе. При условии (2.20) хаотическая динамика частиц сопровождается «нагревом» частиц, т. е. увеличением их энергии в среднем. Это приводит к росту скорости частиц v_z. В результате становится существенным ограничение (2.18), так как $\nu_k = v_z\delta k_z$ начинает превышать ω_H. В этом случае критерий (2.20) может перестать выполняться, так как существует максимальное значение l_0, начиная с которого функции Бесселя, входящие в (2.14), экспоненциально обрезаются.

Кинетическое уравнение. При выполнении условия (2.20) можно записать соответствующее кинетическое уравнение. Это очень просто сделать, если использовать введенные нами канонические переменные $(\mathcal{J}, \vartheta)$ в (2.4) [9]. Пусть

$$F = F(\mathcal{J}, t) = F\left(p_z, \frac{1}{2}m\frac{v_\perp^2}{\omega_H}, t\right) \tag{2.21}$$

есть функция распределения в пространстве действий. Обратим внимание, что она зависит, с точностью до постоянных множителей, от v_z и $v_\perp^2$. Напомним теперь, что именно использование канонических переменных позволяет получить кинетическое уравнение типа ФПК в дивергентной форме. Для этого используем следующие обозначения:

$$s = (s_1, s_2); \quad s_1 = k_z; \quad s_2 = l;$$
$$(s, \vartheta) = s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 = \vartheta_1 k_z + \vartheta_2 l.$$

Тогда коэффициенты разложения потенциала в (2.6) в ряды Фурье можно обозначить так:

$$V_{kl}(\mathcal{J}) \equiv V_s(\mathcal{J}),$$

поскольку каждому k_z соответствует одно определенное значение $k_\perp$. Теперь с помощью этих обозначений кинетическое уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi \sum_s \hat{D}(s) |V_s|^2 \Delta((s, \omega) - \omega_k) \hat{D}(s) F, \tag{2.22}$$

где введен дифференциальный оператор

$$\hat{D}(s) = \left(s, \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}}\right) = s_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_2}$$

и принято обычное выражение для Δ-функции

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1/\tau_c}{\xi^2 + 1/\tau_c^2}.$$

Время τ_c расцепления корреляций фаз ψ может быть оценено при $K \gg 1$ так же, как это делалось до сих пор:

$$\tau_c \sim \frac{1}{\delta\omega \ln K}.$$

Кинетическое уравнение (2.22) можно также переписать в обычном виде, используя обозначение F в форме (2.21):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \pi e^2 \sum_k \sum_l |\Phi_k|^2 \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z} - 2l\omega_H \frac{\partial}{\partial (mv_\perp^2)}\right) \times$$
$$\times J_l^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H}\right) \Delta(k_z v_z + l\omega_H - \omega_k) \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z} - 2l\omega_H \frac{\partial}{\partial (mv_\perp^2)}\right) F. \tag{2.23}$$

Это уравнение описывает, в частности, стохастический нагрев в магнитном поле.

§ 3. Парадокс исчезновения затухания Ландау

При распространении волны перпендикулярно магнитному полю динамика частицы может стать особенно сложной. Об этом свидетельствует, например, известный парадокс исчезновения затухания Ландау [10]. Если бы магнитного поля не было, то движение частицы происходило бы только в поле плоской волны

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \sin(kx - \omega t).$$

Наиболее сильно взаимодействуют с волной частицы, находящиеся с ней в резонансе. Для них выполнено условие

$$kv - \omega = 0. \tag{3.1}$$

При заданной функции распределения $f(v)$ существует конечная область скоростей

$$\Delta v \sim (eE_0/mk)^{1/2}$$

частиц, которые близки к резонансу с волной. Совсем иначе обстоит дело при наличии сколь угодно малого, но конечного постоянного магнитного поля $\boldsymbol{B}_0$, направленного по z. Вместо приведенного условия (3.1) возникает новое:

$$\omega - n\omega_H = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3.2}$$

в которое скорость частиц уже не входит. Поэтому линейная теория сразу приводит к выводу об отсутствии затухания волны. Разрешение этого парадокса заключается в необходимости рассмотрения нелинейных эффектов,

связанных с перекрытием резонансов и возникновением стохастического движения частиц вследствие этого.

Действительно, на плоскости (v_x, v_y) траектории частицы при $E_0 = 0$ имеют вид окружностей. В поле волны, движущейся со скоростью $u = \omega/k$, траектория частицы всегда пересекает фронт волны (рис. 13.5), если только ее энергия достаточно велика $(v > u)$. У этих высокоэнергетических частиц наступает такой момент, когда достигается равенство $v_x = u$. Тогда начинается резонансное взаимодействие частицы с волной. На одном витке траектории частицы есть два таких «столкновения» с волной. При некоторых условиях эти столкновения приводят к хаотизации фазы вращения частицы. В результате этого возникает броуновское движение частицы в пространстве скоростей (v_x, v_y), приводящее к ее стохастическому нагреву. Энергия частицы в среднем нарастает. Однако систе а «поля и частицы» в плазме является самосогласованной. Это означает, что рост энергии частицы сопровождается потерей энергии волной. В результате волна затухает. Еще одно небольшое замечание решает описанный выше парадокс. При $B_0 \to 0$ радиус траектории на рис. 13.5 возрастает. Это облегчает условие стохастизации фазы, так как между двумя столкновениями частицы с волной проходит больший интервал времени (ком. 6).

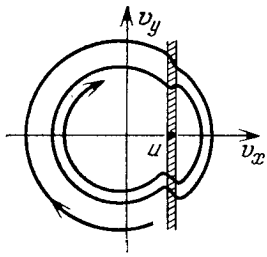


Рис. 13.5. Траектория частицы в магнитном поле и ее «столкновение» с плоской волной, движущейся со скоростью u

Для декремента затухания волны в [13] получено

$$\gamma \sim B_0^2 \ln \frac{1}{B_0},$$

т. е. при $B_0 \to 0$ получаем $\gamma \to 0$. Начиная с некоторого, достаточно малого значения B_0, время выхода частиц, захваченных потенциальной ямой волны, станет большим и начнет превышать величину $1/\gamma$. Тогда взаимодействие частиц с волной приводит к обычному нелинейному затуханию Ландау. Однако теперь, даже в очень слабом магнитном поле, затухание Ландау на захваченных волной частицах отличается от затухания в отсутствие магнитного поля. Это различие обусловлено тем, что на него накладывается слабый диссипативный механизм из-за столкновений с волной части пролетных частиц в присутствии магнитного поля. Поэтому даже очень слабое магнитное поле приводит к смене обычного обратимого затухания Ландау на необратимое.

§ 4. Стохастическая паутина

Магнитное поле при наличии электрического поля плоских волн создает очень своеобразную специфику движения, нарушая ту симметрию задачи, которая была в отсутствие магнитного поля. Ниже мы приведем очень яркий пример, демонстрирующий различные тонкие эффекты нелинейной динамики системы, имеющей всего лишь полторы степени свободы. Задача, рассматриваемая ниже, интересна также своими приложениями в связи, например, с проблемой стохастического нагрева плазмы в магнитном поле (ком. 7).

Отображение с подкручиванием. Пусть частица движется во времениподобном волновом пакете

$$E(x, t) = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(k_0 x - \omega_0 t - n\,\Delta\omega t) =$$

$$= -E_0 \sin\vartheta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\,\Delta\omega t) = -E_0 T \sin\vartheta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (4.1)$$

где фаза

$$\vartheta = k_0 x - \omega_0 t$$

и вся конструкция волнового пакета — та же, что и в § 1 гл. 13. Добавим к полю $\boldsymbol{E}(x, t)$, направленному вдоль x (продольная волна), еще и постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$ вдоль оси z. Тогда уравнение Лоренца приводится к одному уравнению движения вдоль оси x

$$\ddot{x} + \omega_H^2 x = -\frac{e}{m} E(x, t) = -\frac{e}{m} E_0 T \sin\vartheta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \tag{4.2}$$

Это уравнение следует дополнить интегралом движения

$$p_y + \omega_H m x = \text{const}, \tag{4.3}$$

определяющим движение вдоль y через движение вдоль оси x.

Определенное неудобство в исследовании движения (4.2) можно отметить сразу. Невозмущенное движение ($E_0 = 0$) является линейным. Поэтому с точки зрения условий теоремы КАМ оно оказывается вырожденным, и к нему нельзя применить сразу результаты КАМ-теории.

Наличие δ-функций в правой части (4.2) позволяет записать это уравнение в виде отображения. Для этой цели произведем некоторые элементарные упрощения. Положим $\omega_0 = 0$, что означает отсутствие движения центральной гармоники волнового пакета (4.1), и выберем const $= 0$ в (4.3), т. е.

$$v_y = p_y/m = -\omega_H x.$$

Обозначим также

$$k_0 v_x/\omega_H = u, \qquad k_0 v_y/\omega_H = v. \tag{4.4}$$

В этих обозначениях можно получить путем сшивки решения на δ-функциях следующее отображение:

$$\hat{M}_\alpha: \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + K_H \sin v_n)\cos\alpha + v_n \sin\alpha, \\ v_{n+1} = v_n \cos\alpha - (u_n + K_H \sin v_n)\sin\alpha, \end{cases} \tag{4.5}$$

где положено

$$\alpha = \omega_H T, \qquad K_H = \frac{K}{\omega_H T} = \frac{K}{\alpha} = \frac{\Omega_0^2 T^2}{\alpha}. \tag{4.6}$$

Здесь параметр K — тот же, что и в формуле (1.13), а угол α будет называться далее углом подкручивания (ком. 8).

Предельный переход $\omega_H \to 0$, учитывающий обозначения (4.4), приводит к стандартному отображению $\hat{T}$ (1.12) (с точностью до переопределения фазы ϑ, которую следует сдвинуть на $\pi/2$).

Отображение $\hat{M}_\alpha$ будем называть отображением с подкручиванием.

Резонансное подкручивание. Резонансным подкручиванием будем называть случаи рациональных значений

$$\alpha_{p,q} = 2\pi \frac{p}{q} \qquad (p < q), \tag{4.7}$$

где p и q — целые. Случай $p = 1$ будем обозначать как

$$\alpha_q = 2\pi/q,$$

а соответствующее отображение как $\hat{M}_q$. Физический смысл резонансного подкручивания можно понять из рис. 13.6. Вместо одной прямой, как на рис. 13.5, теперь прямых, соответствующих фронтам отдельных плоских волн, много. Они отстоят друг от друга на одну и ту же величину

$\Delta u = k_0 \Delta\omega$. В точках пересечения прямых с круговой орбитой ларморовского вращения происходит интенсивное взаимодействие частицы с волной. Если выполнено условие (4.7), то, пройдя одну волну, частица попадает в резонанс

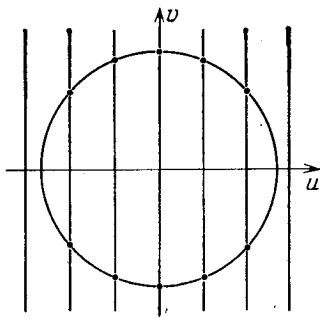


Рис. 13.6. Большое число областей взаимодействия частицы с волнами пакета обозначено жирными точками

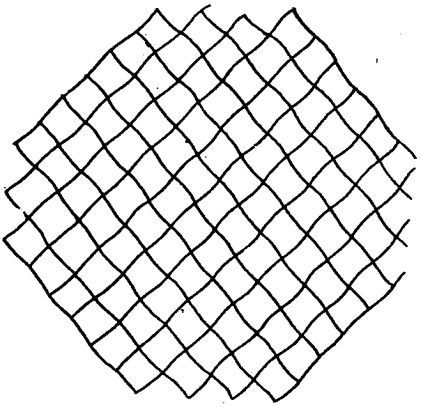


Рис. 13.7. Фазовая плоскость при $\alpha = \alpha_4$

со следующей волной и т. д. Другими словами, рациональным $\alpha_{p,q}/2\pi$ соответствуют сфазированные столкновения частицы с волнами. Это приводит к особым свойствам фазового портрета частицы.

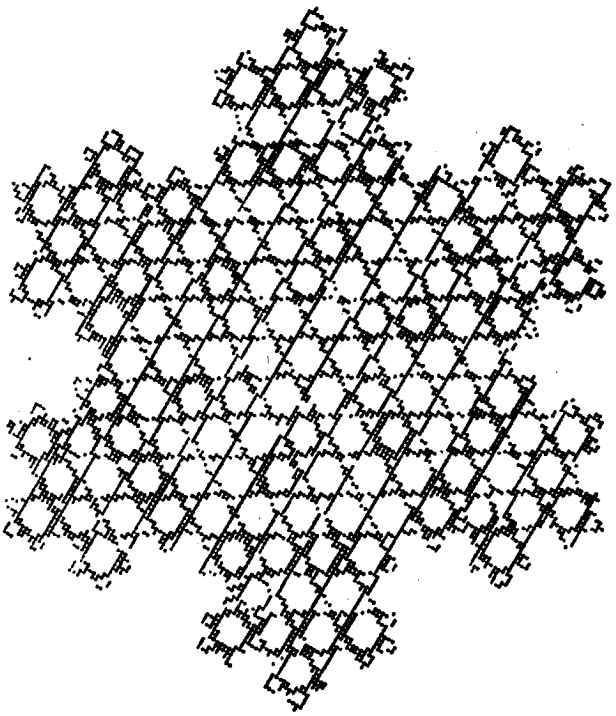


Рис. 13.8. Фазовая плоскость при $\alpha = \alpha_3$

Фазовая плоскость. Чтобы понять фазовый портрет частицы, обратимся сначала к результатам численного анализа, которые приведены на рис. 13.7 и 13.8 для малых значений K_H при $\alpha = \alpha_4$ и $\alpha = \alpha_3$. На фазовой плоскости имеется правильная сепаратрисная сетка. Внутри центрального островка находятся замкнутые фазовые траектории. Все другие ячейки сетки запол-

няются замкнутыми кривыми одновременно по четыре ячейки при $\alpha = \alpha_4$ и по три ячейки при $\alpha = \alpha_3$. Заполнение ячеек имеет соответствующую симметрию поворота. Таким образом, вся фазовая плоскость выкладывается правильным «паркетом», обусловленным симметрией подкручивания.

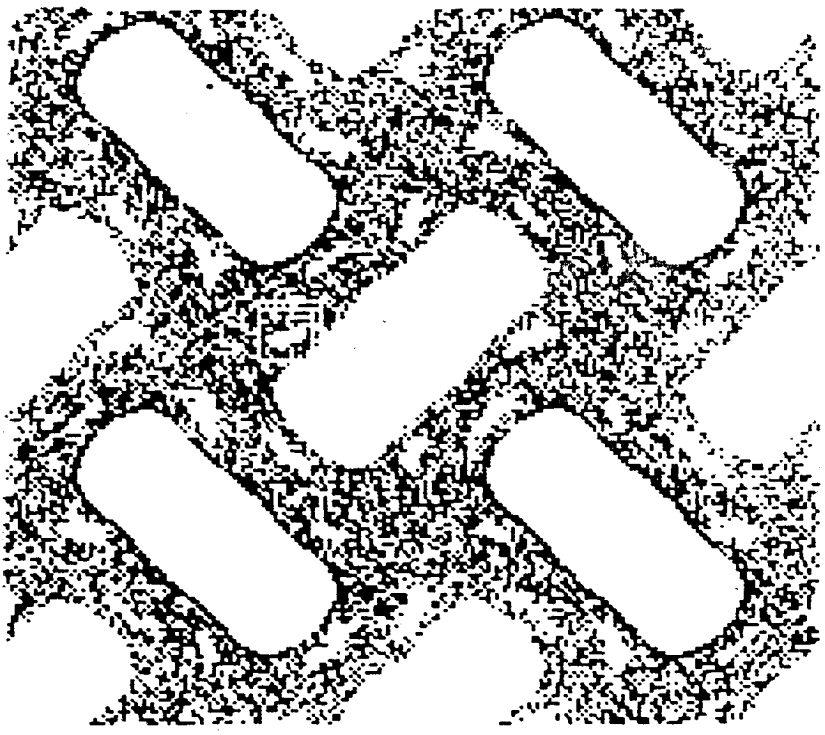


Рис. 13.9. Область стохастичности при $\alpha = \alpha_4$

В действительности сепаратрисная сетка не является сколь угодно тонкой. Ее толщина тем больше, чем больше параметр возмущения K_H. Мы будем далее называть эту сетку стохастической паутиной, так как динамика частиц внутри нее является стохастической. С ростом K_H стохастическая паутина деформируется и расширяется, образуя большие стохастические области (рис. 13.9), по которым происходит быстрая диффузия частиц. Кроме того, с ростом K_H возникает последовательно бесконечное число бифуркаций, связанных с делением островков и появлением вокруг них новых ожерелий островков произвольного порядка [15]. Эти бифуркации происходят с островками всех порядков. Каждый вновь образовавшийся островок также испытывает бифуркации. Таким образом, возникает сложное бифуркационное дерево фрактального типа. Примеры отделения ожерелий из четырех и трех островков приведены на рис. 13.10.

Резонанс α_4. В качестве примера расчета траектории при резонансном подкручивании и малых значениях K_H рассмотрим случай $\alpha = \alpha_4 = \pi/2$. Отображение (4.5) сводится к следующему:

$$\hat{M}_4: \begin{cases} u_{n+1} = v_n, \\ v_{n+1} = -(u_n + K_H \sin v_n). \end{cases} \tag{4.8}$$

Будем далее считать $K_H \ll 1$. Исключим из (4.8) подкручивание. Для этого найдем отображение $\hat{M}_4^4$, удержав в нем лишь старшие по K_H члены.

Получаем следующее отображение:

$$\hat{M}_4^4: \begin{cases} \bar{u} = u + 2K_H \sin \bar{v}, \\ \bar{v} = v - 2K_H \sin u, \end{cases} \tag{4.9}$$

сохраняющее меру. Шаг отображения $\hat{M}_4^4$ равен $4T$.

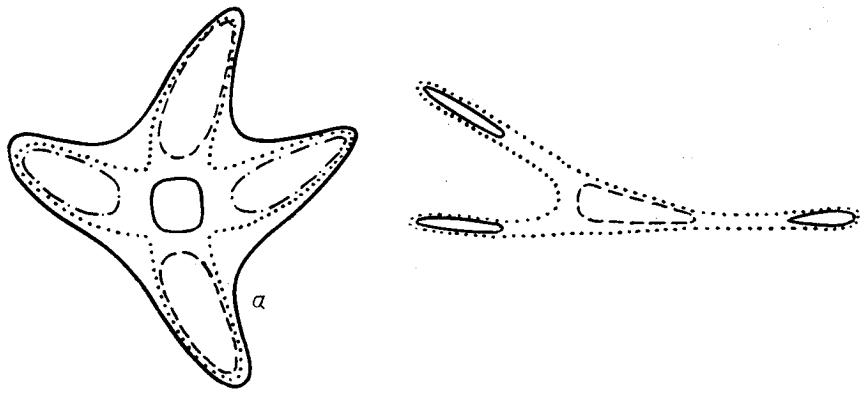


Рис. 13.10. Примеры отделения ожерелий из четырех и трех островков при $\alpha = \alpha_4$: *а*) $K_H = 3{,}15$, *б*) $K_H = 4{,}7815$

Можно записать эквивалентную гамильтоновскую систему, порождающую отображение (4.9). Для этого определим гамильтониан H_4 следующим образом:

$$H_4 = -\Omega_4 \left\{ \cos v + \cos u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{4T} - n\right) \right\}, \tag{4.10}$$

где введена частота колебаний при резонансе подкручивания

$$\Omega_4 = K_H/2T. \tag{4.11}$$

Уравнения движения для (4.10) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial H_4}{\partial v} = \Omega_4 \sin v, \\ \dot{v} &= -\frac{\partial H_4}{\partial u} = -\Omega_4 \sin u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{4T} - n\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Если рассмотреть интервал времени

$$4nT - 0 \leqslant t \leqslant 4(n+1)T - 0 \tag{4.13}$$

и определить (u, v) и $(\bar{u}, \bar{v})$ как значения переменных на концах этого интервала, то из уравнений движения (4.12) интегрирование в точности приводит к отображению (4.9). Покажем, как это происходит.

Имеем обозначения:

$$u(4nT - 0) \equiv u, \quad v(4nT - 0) \equiv v,$$
$$u(4(n+1)T - 0) \equiv \bar{u}, \quad v(4(n+1)T - 0) \equiv \bar{v}.$$

В интервале $(4nT + 0, \quad 4(n+1)T - 0)$ δ-функции равны нулю. Поэтому на этом интервале

$$\dot{u} = \Omega_4 \sin v, \quad \dot{v} = 0.$$

Иначе,

$$v(t) = \text{const} = \bar{v},$$
$$u(t) = \Omega_4 t \sin \bar{v} + u(4nT + 0).$$

Из последнего уравнения имеем

$$\bar{u} = u(4(n+1)T - 0) = 2K_H \sin \bar{v} + u(4nT + 0).$$

Интегрирование системы (4.12) в бесконечно малой окрестности момента времени $t = 4nT$ дает

$$u = u(4nT + 0) = \bar{u} - 2K_H \sin \bar{v},$$
$$\bar{v} = v - 2K_H \sin u.$$

Эта система после некоторых преобразований совпадает с (4.9).

Посмотрим теперь на гамильтониан (4.10) с другой точки зрения, заменив сумму δ-импульсов ее разложением в ряд Фурье:

$$H_4 = -\Omega_4(\cos v + \cos u) - \Omega_4 \cos u \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cos({}^1/_4 n \Delta\omega t). \tag{4.14}$$

Отсюда видно, что величину Ω_4 можно считать частотой нелинейного резонанса, а сумма представляет собой высокочастотные возмущения из-за того, что

$$\frac{4\Omega_4}{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} K_H \ll 1.$$

Поэтому можно рассмотреть усредненный гамильтониан

$$\bar{H}_4 = -\Omega_4(\cos v + \cos u). \tag{4.15}$$

Траектории, определяемые им, описывают движение частицы внутри одной ячейки «паркета» с симметрией α_4. Гамильтониан (4.15) приводит к уравнениям движения

$$\dot{u} = \Omega_4 \sin v, \qquad \dot{v} = -\Omega_4 \sin u,$$

или

$$\ddot{u} + \Omega_4^2 (C \sin u - {}^1/_2 \sin 2u) = 0, \tag{4.16}$$

где C — безразмерный интеграл энергии:

$$C = \cos v + \cos u. \tag{4.17}$$

Устойчивым положениям равновесия (эллиптическим точкам) соответствуют значения

$$C = 2, \quad v = 2\pi n, \quad u = 2\pi n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Значениям

$$C = 0, \quad v = (2n+1)\pi/2, \quad u = (2n+1)\pi/2 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

соответствуют неустойчивые (гиперболические) точки, через которые проходят сепаратрисы.

Траектория усредненного движения находится из уравнения (4.16) и имеет вид при $0 < C < 2$:

$$\cos v = {}^1/_2 C + (1 - {}^1/_2 C)\,\mathrm{cd}[(1 + {}^1/_2 C) K_H t;\ \varkappa],$$
$$\cos u = {}^1/_2 C - (1 - {}^1/_2 C)\,\mathrm{cd}[(1 + {}^1/_2 C) K_H t;\ \varkappa],$$

где

$$\mathrm{cd} = \mathrm{cn}/\mathrm{dn}$$

— отношение эллиптических функций с модулем

$$\varkappa = (2-C)/(2+C).$$

Образование стохастической паутины. Описанное выше движение является усредненным. В действительности возмущение гамильтониана H_4 разрушает сепаратрису и порождает на ее месте стохастический слой, называемый стохастической паутиной.

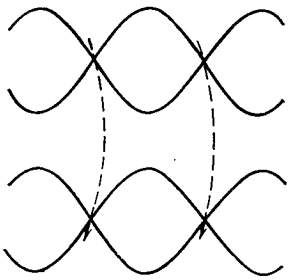


Рис. 13.11. Схема образования сепаратрисной сетки

Уравнения сепаратрис получаются из условия $C = 0$, т. е. согласно (4.17)

$$\cos u + \cos v = 0.$$

Решением этого уравнения является семейство прямых

$$v = \pm(u + \pi/2) + 2\pi n \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Они образуют на фазовой плоскости квадратную сетку. Учет следующих по порядку членов, пропорциональных $K_H \cos u$ или $K_H \cos v$, приводит к появлению периодической модуляции полученной сетки (см. рис. 13.7).

Приведем наглядную физическую картину образования сепаратрисной сетки.

Рассмотрим на плоскости две неперекрывающиеся сепаратрисные цепочки, соответствующие двум плоским волнам (рис. 13.11). Пусть одна из них движется относительно другой со скоростью $\Delta u = \Delta\omega/k_0$. Вращение в магнитном поле с частотой ω_H может привести к появлению инвариантной кривой, соединяющей гиперболические точки, соответствующие разным сепаратрисам волн. Очевидно, что это произойдет, если выполнено условие

$$\frac{\Delta\omega}{k_0} = \frac{q}{p}\frac{\omega_H}{k_0}.$$

Это и есть условие резонансного подкручивания.

Оценим толщину стохастической паутины. Для этого рассмотрим возмущенный гамильтониан (4.14), оставив в нем первые гармоники возмущения с $n = \pm 1$:

$$H_4 \approx -\Omega_4(\cos v + \cos u) - 2\Omega_4 \cos u \cos({}^1\!/_4\,\Delta\omega t).$$

Используя уже известную оценку (см. § 3 гл. 5) для толщины стохастического слоя при условии $\Omega_4 \ll \Delta\omega$, т. е. $K_H \ll 1$, имеем

$$\frac{\delta H}{\max H_4} = {}^1\!/_2\delta H \sim \exp\left(-\pi\frac{\Delta\omega}{8\Omega_4}\right) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{2K_H}\right). \tag{4.18}$$

Внутри стохастической паутины происходит случайное блуждание частицы, которое может привести к сколь угодно большому изменению ее энергии и действия.

Стохастическая паутина — универсальное свойство динамической системы с подкручиванием. Оно возникает при любых резонансах, т. е. при любых рациональных значениях $\alpha_{p,q}/2\pi$.

Появление стохастической паутины и ее следствия для динамики частиц практически полностью аналогичны диффузии Арнольда, которая возникает в многомерном случае. Отличие заключается в том, что теперь стохастическая паутина образовалась для уравнения (4.2), описывающего движение системы всего лишь с полутора степенями свободы. Это — минимальная размерность фазового пространства, в котором возможна неинтегрируемость.

Симметрия фазовой плоскости. Рассмотрим исходное отображение $\hat{M}_\alpha$, определяемое формулой (4.5). Можно утверждать точно, что расположение его сепаратрис и особых точек обладает симметрией вращения на угол

$\alpha_q = 2\pi/q$ при рациональном соотношении

$$\frac{\omega_H}{\Delta\omega} = 2\pi\frac{p}{q}.$$

Это свойство симметрии является прямым следствием симметрии уравнения движения (4.2). В этом легко убедиться, если сделать замену времени

$$\tau = \omega_H t.$$

Тогда имеется инвариантность уравнений при сдвиге

$$\tau_q \to q\tau + 2\pi q\frac{\omega_H}{\Delta\omega} = q(\tau + \omega_H T) = q(\tau + \alpha)$$

при условии, что $\alpha = \alpha_{p,\,q}$. Однако здесь возникает неожиданный вопрос. Известно, что плоскость можно покрыть правильным паркетом из фигур

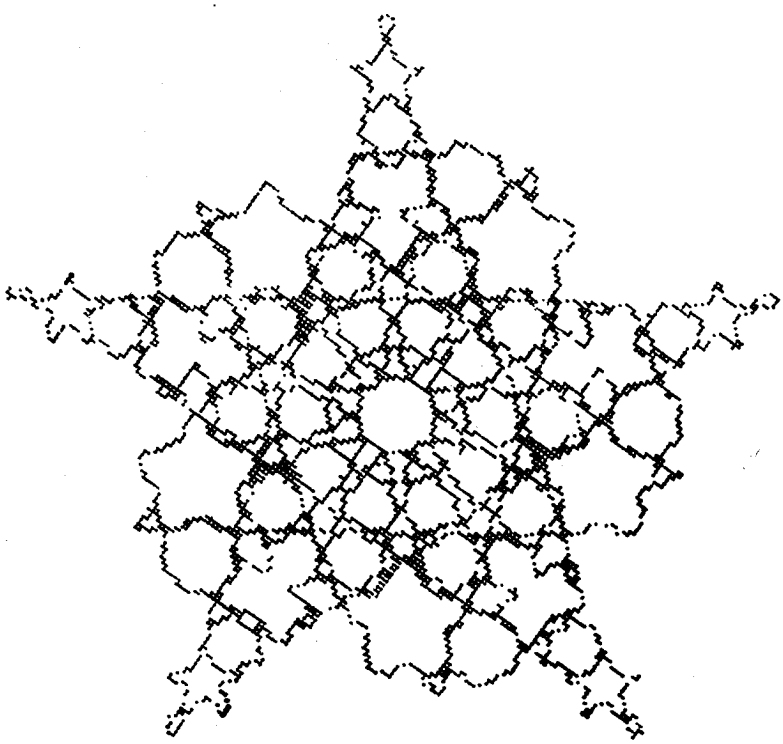


Рис. 13.12. Стохастическая паутина при $\alpha_q = 2\pi/5$ ($K_H = 0{,}7$)

одного типа только треугольниками, квадратами и шестиугольниками, сохранив при этом симметрии трансляции и вращения. Это соответствует значениям

$$\alpha_q = \frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{4};\ \frac{2\pi}{6}.$$

Поскольку введение значений $p < q$ не изменяет симметрии покрытия, то первый и последний случай создают одинаковую сепаратрисную сетку. Таким образом, случаи $\alpha_q = 2\pi/4;\ 2\pi/6$ исчерпывают все «простые» симметрии.

Симметрию для всех других значений α_q можно обеспечить, лишь выкладывая плоскость фигурами разного вида. Это приводит к тому, что в фигурах появляется слабый разброс в форме, позволяющей им «упаковаться» на плоскости. Искажение их формы носит также случайный характер. В результате мы получаем удивительную картину (рис. 13.12 и 13.13), в которой дальний порядок глобальной симметрии стохастической паутины совмещается

с хаотическим разрушением ближнего порядка при $q \neq 4$; 6 в структуре ячеек паутины.

Ближний порядок разрушается с ростом K_H. В результате становится невозможным указать определенное число сторон в ячейках паутины. Паркет сильно деформируется, и возникает типичная картина аморфного тела (ком. 9).

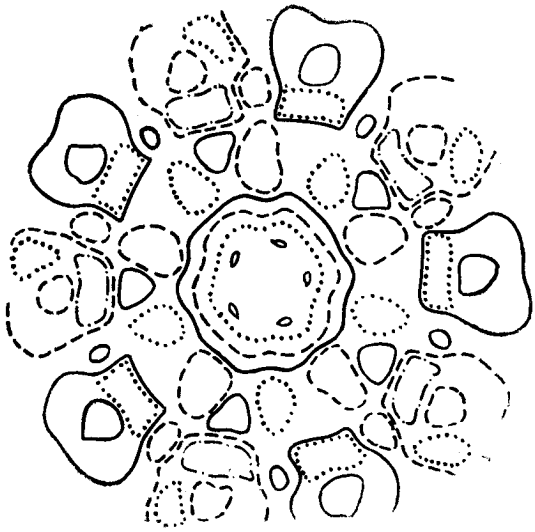


Рис. 13.13. Фазовый портрет при тех же параметрах, что и на рис. 13.12.

Диффузия. Опишем диффузию частиц при больших K_H. Для этого введем переменные действие — угол:

$$I = v_x^2 + v_y^2 = 2\mathscr{E}/m, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(v_x/v_y), \tag{4.19}$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы. Тогда отображение $\hat{M}_\alpha$ эквивалентно следующему:

$$\bar{I} = I + 2\frac{e}{m}E_0T\sqrt{I}\sin\varphi\sin(k_0r_H\cos\varphi) + \left(\frac{e}{m}E_0T\right)^2\sin^2(k_0r_H\cos\varphi),$$

$$\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{I}\sin(\omega_HT)\cos\varphi + \left[\sqrt{I}\sin\varphi + \frac{e}{m}E_0T\sin(k_0r_H\cos\varphi)\right]\cos(\omega_HT)}{\sqrt{I}\cos(\omega_HT)\cos\varphi - \left[\sqrt{I}\sin\varphi + \frac{e}{m}E_0T\sin(k_0r_H\cos\varphi)\right]\sin(\omega_HT)}, \tag{4.20}$$

$$r_H = \sqrt{I}/\omega_H = \sqrt{2\mathscr{E}/m}/\omega_H.$$

Приближение уравнения ФПК начинает быть справедливым при достаточно больших значениях I, так чтобы выполнялось условие

$$|\Delta I| = |\bar{I} - I| \ll I.$$

Это означает согласно (4.19) и (4.20), что фазу φ можно считать быстро меняющейся и почти равномерно распределенной на интервале $(0, 2\pi)$. Это происходит при условии локальной неустойчивости фаз:

$$\max\left|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varphi} - 1\right| \gg 1,$$

которое означает, что

$$\frac{e}{m}\frac{E_0T}{\sqrt{I}}k_0r_H = \frac{\Omega_0^2T^2}{\omega_HT} = K_H \gg 1. \tag{4.21}$$

Простые вычисления моментов:

$$\mathscr{A} = \frac{1}{T}\langle\langle\bar{I} - I\rangle\rangle, \quad \mathscr{B} = \frac{1}{T}\langle\langle(\bar{I} - I)^2\rangle\rangle,$$

приводят к выражениям

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2T}\left(\frac{e}{m}E_0T\right)^2[1-J_0(2k_0r_H)],$$
$$\mathcal{B}=\frac{1}{T}\left(\frac{e}{m}E_0T\right)^2 I\left[1-\frac{1}{k_0r_H}J_1(2k_0r_H)\right].$$

Отсюда видно, что имеет место принцип детального равновесия и $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial I}$. Поэтому уравнение ФПК принимает дивергентную форму

$$\frac{\partial F(\mathcal{E},t)}{\partial t}=\frac{e^2}{2m}E_0^2T\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\mathcal{E}\left[1-\frac{1}{k_0r_H}J_1(2k_0r_H)\right]\frac{\partial F(\mathcal{E},t)}{\partial\mathcal{E}}. \quad (4.22)$$

Формула (4.22) показывает, что происходят осцилляции коэффициента диффузии в зависимости от величины k_0r_H, т. е. в зависимости от энергии частицы. В частности, при $k_0r_H\gg 1$ имеем $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{e^2}{2m}E_0^2T\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\mathcal{E}\frac{\partial F}{\partial\mathcal{E}}$. Отсюда получаем рост средней энергии частиц со временем:

$$\langle\mathcal{E}\rangle=\mathcal{E}_0+\frac{e^2}{2m}E_0^2Tt.$$

Это и есть асимптотический закон стохастического нагрева частиц при $t\to\infty$.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 13

1. Различные аспекты взаимодействия частиц с волнами составляют часть так называемой квазилинейной теории плазмы [1, 2]. Мы уже обсуждали частично эти вопросы в § 3 гл. 6 (см. также ком. 3 к гл. 6). Условия стохастизации движения частиц при некоторых частных случаях приведены в [3, 4]. Одной из причин, затрудняющих исследование этой задачи, является существование движения волн относительно друг друга. Это приводит к тому, что простое условие перекрытия резонансов как условие возникновения стохастической динамики перестает действовать. Более общая картина связана с исследованиями в [5—7] и излагается частично в этой главе.

2. В действительности область применимости модели (1.20) есть $v>v_g$. Поэтому, казалось бы, нижней границей интервала скоростей должна быть скорость v_g. Однако мы рассматриваем случай $v\gg v_g$. Поэтому можно приближенно считать, что формальная область стохастичности $(0, v_{max})$ соответствует реальной с точностью до поправок вблизи особой области $v\sim v_g$. Подробнее о переходе через особую область $v\sim v_g$ см. в [6, 7].

3. Случай сильных полей ($\varepsilon>1$) рассмотрен в [7]. Он также представляет значительный физический интерес, так как при $\varepsilon\gg 1$ скорость стохастического нагрева сильно возрастает. Одновременно увеличивается значение $\mathcal{E}_{max}$ для максимальной энергии частиц.

4. Исследование резонансов и условия их перекрытия в поле одной волны, движущейся под углом к магнитному полю, было приведено в [8]. Рассмотрение волнового пакета, кинетическое описание, ограничения стохастического нагрева и ряд других вопросов исследовались в [9]. Результаты, приводимые ниже, следуют, в основном, этой работе.

5. При $\omega_k\equiv 0$ для всех k возникает задача, типичная для динамики электронов в твердом теле, помещенном в магнитное поле. Вместо поля волнового пакета здесь пишется поле кристаллической решетки.

6. Стохастический нагрев частиц при перпендикулярном к $\boldsymbol{B}_0$ распространении волны был исследован в работах [11, 12]. Условие стохастичности в них было получено для достаточно сильных магнитных полей, удовлетворяющих неравенству $\omega_H\gg\frac{\Omega_0^2}{\omega}=\frac{eE_0k}{m\omega}$. Однако, как уже отмечалось, для разрешения парадокса затухания Ландау необходимо рассмотреть случай $B_0\to 0$, т. е. неравенства, обратного написанному. Соответствующее исследование было проведено в работах [13, 14]. В них получены характеристики диффузии частиц и затухания волны при $B_0\to 0$.

7. Подробное изложение этой задачи см. в работе [15], содержанию которой мы следуем ниже. Новые аспекты этой задачи, связанные с проблемой покрытия плоскости и с симметрией квазикристаллического типа, обсуждаются подробно в [16—18].

8. Вывод отображения (4.5) делается так же, как и во всех аналогичных предыдущих случаях. Между двумя δ-функциями уравнение движения имеет простой вид

$$\ddot{x}+\omega_H^2 x=0,$$

и его решение можно сразу написать. На каждой δ-функции происходит сшивка решений по следующему правилу:

$$x(t=nT+0)=x(t+nT-0)\equiv x_n,$$

$$\dot{x}(t=nT+0)=\dot{x}(t=nT-0)-\frac{e}{m}E_0T\sin k_0x_n.$$

Эти соотношения и приводят к формулам (4.5).

9. Структуры нового типа симметрии, называемой также квазикристаллической, могут возникать и при переходе к турбулентности [16, 18].

Глава 14

БИЛЛИАРДЫ

Биллиарды очень наглядны и удобны для изучения свойств гамильтоновских динамических систем. Интерес к ним связан с существованием аналогий между траекториями частиц в биллиарде и траекториями в исследуемых системах. Примером такой связи может служить задача о динамике лучей в неоднородных средах, которая будет рассмотрена ниже.

§ 1. Перемешивающие биллиарды

Перемешивающим называется биллиард, в котором возможно движение с перемешиванием. Область фазового пространства, занимаемая стохастическими траекториями, может составлять часть всей области фазового пространства допустимого движения. Мы уже встречались с перемешивающими биллиардами в § 3 гл. 4 и здесь остановимся на их обсуждении подробнее.

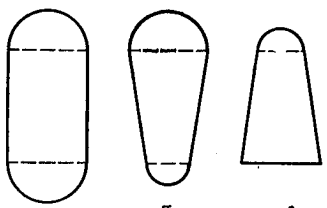


Рис. 14.1. Примеры нерассеивающих биллиардов со стохастическими траекториями

Общая картина динамики частицы в биллиарде определяется его геометрией. Биллиарды как динамические системы очень быстро приобрели популярность, когда стало ясно, что самым наглядным примером динамической системы с перемешиванием является биллиард отрицательной кривизны. Последующие исследования показали, что биллиарды с фокусирующими участками также могут приводить к перемешиванию. Примеры таких биллиардов приведены на рис. 14.1. Сейчас ясно, что ни существование фокусирующих и рассеивающих участков, ни гладкость границ не служат препятствием для хаотической динамики в биллиардах. Трудно указать такой биллиард (конечно, не очень правильной формы), который не создавал бы стохастических траекторий частиц. Биллиарды с регулярными траекториями являются редкими исключениями. Перейдем к более детальному анализу траекторий в некоторых типах биллиардов, которые встречаются в физических приложениях [1].

Анализ траекторий. Рассмотрим сначала биллиард в форме, изображенной на рис. 14.2. Как будет видно, для нас не важно, являются ли дуги выпуклыми или вогнутыми. Уравнения кривой, представляющей дугу биллиарда, запишем следующим образом:

$$\chi=\chi(\xi),\quad \xi=\left\{\frac{x}{a}\right\},\quad \max\chi(\xi)=\frac{b}{a}, \tag{1.1}$$

где координата ξ и параметры a, b указаны на рис. 14.2. Знак дробной части $\{\ldots\}$ сейчас не существен, так как координата x, направленная вдоль ξ, изменяется в интервале $(0, a)$. Однако в дальнейшем мы расширим область изменения x, и этот знак будет использован по существу.

Следующие неравенства используются для упрощения задачи:

$$b \ll a \ll l, \tag{1.2}$$

где l — длина прямолинейных участков биллиарда.

Рассмотрим траекторию частицы после нескольких отражений от боковых прямолинейных участков. Изображать каждый отрезок луча траектории между двумя последовательными отражениями от прямолинейных участков будем на отдельном листе. Сложим листы с последовательными отрезками траектории в стопку и склеим их попарно вдоль тех прямолинейных участков биллиарда, от которых происходит отражение (рис. 14.3). В результате траектория частицы изображается на «плиссированной» поверхности. Подчеркнем, что падающий и отраженный лучи криволинейных участков биллиарда изображаются на одном и том же листе.

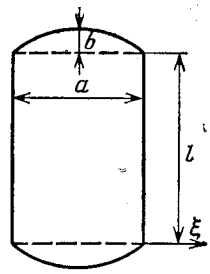


Рис. 14.2. Биллиард с фокусирующими дугами и прямолинейными участками

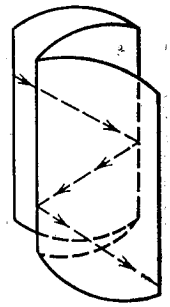


Рис. 14.3. Образование «плиссированной» поверхности

Растянем теперь полученную «плиссированную» поверхность и будем изучать траекторию частицы на образовавшейся однолистной поверхности (рис. 14.4). До сих пор все рассуждения были точными. Введем последовательно ряд упрощений технического характера. Если биллиард симметричный, то поверхность с траекторией удобно согнуть вдоль оси x вдвое и склеить. Теперь задача сводится к биллиарду типа «гусеница» (рис. 14.5). Следующее упрощение связано с использованием неравенств (1.2). Они позволяют пренебречь участками траектории частицы, которые содержат более чем одно последовательных столкновений внутри дуги биллиарда.

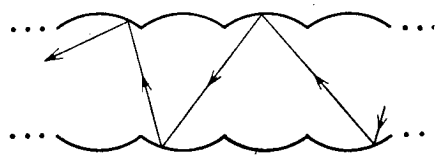


Рис. 14.4. Развертка «плиссированной» поверхности

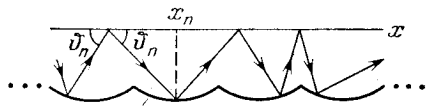


Рис. 14.5. Образование из «плиссированной» поверхности биллиарда типа «гусеница»

Введем координаты (x_n, ϑ_n) так, как это показано на рис. 14.5. Тогда

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n - 2\operatorname{arctg}\chi'(\xi_n), \qquad x_{n+1} \approx x_n + l\operatorname{ctg}\vartheta_{n+1}$$

или, вводя вместо x переменную ξ с помощью (1.1), получим

$$\vartheta_{n+1} \approx \vartheta_n - 2\chi'(\xi_n), \qquad \xi_{n+1} \approx \left\{\xi_n + \frac{l}{a}\operatorname{ctg}\vartheta_{n+1}\right\}. \tag{1.3}$$

Неравенства (1.2) позволяют увидеть различие в свойствах переменных ϑ и ξ. Значение производной $\chi'(\xi)$ мало из-за условия $b \ll a$. Поэтому изменение переменной ϑ на одном шаге отображения также мало, и, следовательно, фаза ϑ является медленно изменяющейся функцией. Наоборот, изменения ξ велики, и поэтому локальная неустойчивость возникает именно в связи с этими изменениями. Из полученного отображения находим

коэффициент растяжения фаз ξ:

$$K_0 = \left|\frac{d\xi_{n+1}}{d\xi_n} - 1\right| = \frac{2l}{a}|\chi''|\frac{1}{\sin^2\vartheta_{n+1}}.$$

Отсюда следует условие стохастичности траекторий частицы в биллиарде

$$K = \frac{2l}{a}\max\chi'' \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Если, например, дуга биллиарда является параболой, то из (1.1) следует, что

$$\chi(\xi) = 4\frac{b}{a}\xi(1-\xi), \quad \max\chi(\xi) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{a},$$

и выражение (1.4) переходит в

$$K = 16\frac{bl}{a^2} \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Граница стохастичности определяется из условия $K \sim 1$, а K-энтропия при $K \gg 1$ равна

$$h \sim \ln K = \ln(16bl/a^2).$$

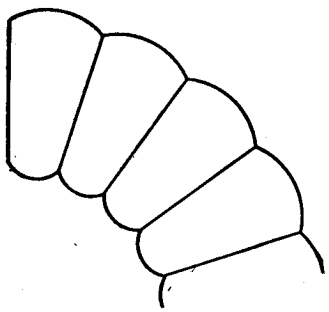


Рис. 14.6. Образование из «плиссированной» поверхности биллиарда типа «веер»

Тот способ, с помощью которого были получены уравнения отображения (1.3), нигде не предполагал знание явного вида кривой $\chi(\xi)$. Аналогично может быть рассмотрен и более сложный случай биллиарда, изображенного на рис. 14.1*б*. Для него строится «плиссированная» поверхность, которая при растяжении переходит в многозаходный «веер» (рис. 14.6). Дальнейший анализ траекторий частицы производится так же, как и в предыдущем случае.

Кинетика частицы в биллиарде. Следующий шаг в анализе динамики частицы в биллиарде связан с получением ее кинетического описания, если выполнено условие (1.4) или (1.5). Оно производится с помощью уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова, которое имеет в данном случае вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\left\langle\left\langle\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right\rangle\right\rangle w\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left[\left\langle\left\langle\frac{(\Delta\vartheta)^2}{\Delta t}\right\rangle\right\rangle w\right], \tag{1.6}$$

где функция распределения $w = w(\vartheta, t)$ и скобки $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ означают усреднение по быстрой переменной ξ:

$$\langle\langle(\ldots)\rangle\rangle = \int_0^1 d\xi\,(\ldots).$$

Величина $\Delta\vartheta$ означает изменение ϑ на одном шаге отображения, а Δt — интервал времени между двумя последовательными отображениями. Кроме того, функция w должна удовлетворять граничному условию

$$w(-\pi/2, t) = w(\pi/2, t)$$

и условию нормировки

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta\, w(\vartheta) = 1.$$

Из уравнений (1.3) находим

$$\Delta\vartheta = \vartheta_{n+1} - \vartheta_n = -2\chi'(\xi) = -8\frac{b}{a}(1-2\xi),$$

где индекс n в конечном результате для удобства опущен. Из рис. 14.5 следует, что

$$\Delta t = \frac{l}{2v}(|\operatorname{tg}\vartheta_n| + |\operatorname{tg}\vartheta_{n+1}|) \approx l|\operatorname{tg}\vartheta| + \frac{1}{2} l \frac{\Delta\vartheta}{\cos^2\vartheta} =$$

$$= l|\operatorname{tg}\vartheta|\left(1 - 8\frac{b}{a}\frac{1-2\xi}{|\sin 2\vartheta|}\right),$$

где v — скорость частицы. Поскольку распределение по ξ при больших значениях K близко к равномерному на интервале (0,1), то с точностью до членов второго порядка малости по χ' имеем

$$\left\langle\left\langle\frac{\Delta\vartheta}{2}\right\rangle\right\rangle = -\frac{32}{3}\frac{b^2 v}{a^2 l}\frac{1}{\sin^2\vartheta},$$

$$\left\langle\left\langle\frac{(\Delta\vartheta)^2}{\Delta t}\right\rangle\right\rangle = \frac{64}{3}\frac{b^2 v}{a^2 l}\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}. \tag{1.7}$$

Формулы (1.7) показывают, что принцип детального равновесия имеет место, т. е.

$$\left\langle\left\langle\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right\rangle\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\langle\left\langle\frac{(\Delta\vartheta)^2}{\Delta t}\right\rangle\right\rangle.$$

Поэтому уравнение (1.6) принимает дивергентную форму

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vartheta} D(\vartheta)\frac{\partial w}{\partial\vartheta}, \tag{1.8}$$

где коэффициент диффузии равен

$$D(\vartheta) = \frac{64}{3}\frac{b^2 v}{a^2 l}\frac{1}{|\operatorname{tg}\vartheta|}. \tag{1.9}$$

С его помощью оценивается характерное время установления равновесного распределения $w(\vartheta)$:

$$\tau_D = \frac{l}{v}\cdot\frac{3}{32}\frac{a^2}{b^2}.$$

Само равновесное распределение $w(\vartheta)$ легко находится из (1.8) и (1.9) и имеет вид

$$w(\vartheta) = \frac{1}{\pi\ln 2}|\ln\cos\vartheta| \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Это выражение удовлетворяет граничному условию $w(-\pi/2) = w(\pi/2)$ и условию нормировки.

§ 2. Нелинейная динамика лучей

Звуковые волны в океане и атмосфере и радиоволны в ионосфере могут распространяться на очень большие расстояния. Причина этого явления заключается в том, что в соответствующей среде существует немонотонная зависимость фазовой скорости волны от некоторой координаты (например, от глубины в океане). В результате возникает естественный волноводный канал, в котором распространяется волна. Зачастую реальные параметры среды таковы, что можно воспользоваться приближением геометрической оптики. Поэтому задача о распространении волн в естественных средах может быть сведена к соответствующей задаче о динамике лучей.

Существует также непосредственная связь между биллиардными задачами и траекториями лучей в волноводных каналах. Эта аналогия обусловлена тем приемом, который был использован выше. Он заключался в том, что задача о траектории частицы в биллиарде на рис. 14.2 была сведена

к задаче о движении на неограниченной развернутой «плиссированной» поверхности (рис. 14.4 или 14.5). Траектории в последнем случае полностью подобны траекториям лучей в волноводных каналах. Эта связь позволяет получить новую информацию в различных задачах о динамике лучей и, главное, обнаружить возникновение их стохастической неустойчивости, которая радикально изменяет все передающие характеристики волноводного канала [2, 3].

Уравнения траектории луча. Для описания траектории луча воспользуемся гамильтоновским формализмом. Пусть ось z совпадает с осью волноводного канала, а координата есть $\boldsymbol{r}=(x, y)$. Тогда координаты луча (x, y, z) связаны гамильтоновскими уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{2.1}$$

с гамильтонианом

$$H=-[n^2(\boldsymbol{r}, z)-\boldsymbol{p}^2]^{1/2}. \tag{2.2}$$

Точка обозначает дифференцирование по z. Эта переменная, таким образом, играет роль времени. Импульс $\boldsymbol{p}$ равен

$$\boldsymbol{p}=\frac{n\dot{\boldsymbol{r}}}{(1+\dot{\boldsymbol{r}}^2)^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Параметр $n=n(\boldsymbol{r}, z)$ является показателем преломления. Выражения (2.2) и (2.3) показывают, что уравнения (2.1) эквивалентны уравнениям движения релятивистской частицы.

Записанные уравнения упрощаются, если показатель преломления слабо отличается от постоянного значения. Тогда можно написать

$$n^2(\boldsymbol{r}, z)=n^2(\boldsymbol{r})+\varepsilon v(\boldsymbol{r}, z),$$

где $n(\boldsymbol{r})$ соответствует регулярному (однородному по z) случаю, а возмущение εv учитывает влияние неоднородности. Величина $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный параметр возмущения. Благодаря его малости можно записать H в виде

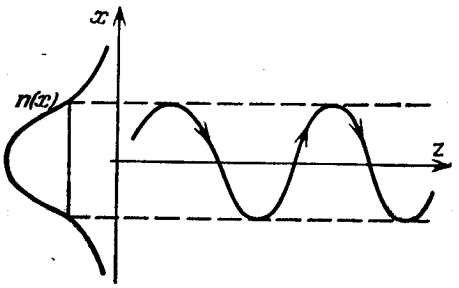


Рис. 14.7. Траектория луча (справа от оси x) в волноводном канале и профиль показателя преломления (слева от оси x)

$$H=H_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})+\varepsilon V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}; z), \tag{2.4}$$

где

$$H_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})=-[n^2(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{p}^2]^{1/2},$$
$$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}; z)=v(\boldsymbol{r}, z)/2H_0. \tag{2.5}$$

Гамильтониан H_0 определяет невозмущенные траектории луча. Система уравнений (2.1), (2.4) и (2.5) показывает, что мы пришли к обычной динамической задаче о влиянии нестационарного возмущения на частицу, совершающую финитные колебания, которые описываются гамильтонианом H_0. Роль времени играет переменная z, неоднородность вдоль которой эквивалентна нестационарности соответствующей динамической задачи.

Наиболее простым является плоский случай, когда n не зависит от y. Уравнения (2.1) и (2.4), (2.5) переходят в следующие:

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad p\equiv p_x,$$
$$H=H_0+\varepsilon V(x, p; z), \quad H_0=-[n^2(x)-p^2]^{1/2} \tag{2.6}$$

(см. рис. 14.7).

Опишем сначала невозмущенное движение луча. Пусть значение n_∞ определяет соответствующие асимптотики $n(x)$ при $x \to \pm\infty$ и $n(x)$ имеет простой вид горба с одним максимумом. Тогда гамильтониану H_0 соответствует движение в простой потенциальной яме. Финитным периодическим траекториям эквивалентной динамической системы соответствуют лучи, распространяющиеся в естественном волноводном канале. Далее можно говорить также о релятивистской частице, движение которой эквивалентно траектории луча.

Пусть E — энергия эквивалентной частицы, соответствующая значению интеграла движения

$$E = H_0(x, p). \tag{2.7}$$

Тогда из (2.6) следует, что на сепаратрисе

$$E = -n_\infty \equiv E_s.$$

В области финитного движения

$$-n(0) < E < -n_\infty, \tag{2.8}$$

а в области инфинитного движения

$$-n_\infty < E < 0.$$

Введем в области (2.8) переменные действие — угол (I, ϑ) по стандартным правилам. В этих переменных система (2.6) принимает канонический вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, z), \tag{2.9}$$

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \qquad \dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}.$$

Частота

$$\omega(I) = dH_0/dI$$

характеризует число колебаний луча между стенками волноводного канала, приходящееся на единицу длины пути. Иными словами, $2\pi/\omega$ есть пространственный период луча в волноводе.

Нелинейный пространственный резонанс. Представим сначала, что возмущение обладает пространственной периодичностью по z. Тогда можно записать разложение в ряд Фурье для потенциала возмущения:

$$V(I, \vartheta, z) = \frac{1}{2} \sum_{m,s=-\infty}^{\infty} V_{ms}(I)\, e^{im\vartheta + is\varkappa z} + \text{к.с.}, \tag{2.10}$$

где $2\pi/\varkappa$ — пространственный период возмущения. Из этого уравнения видно, что возможны резонансы при выполнении условия

$$m\omega(I) + s\varkappa = 0. \tag{2.11}$$

Фактически мы имеем дело с обычным нелинейным резонансом, который, однако, развивается не во времени, а в пространстве.

Приведем сразу результат для движения луча в окрестности одного изолированного резонанса. Пусть I_0 есть то значение I, для которого выполняется резонансное условие (2.11). Тогда ширина резонанса по действию равна

$$\Delta I = \max |I - I_0| = 4 \left| \frac{\varepsilon V_{ms}}{d\omega(I_0)/dI} \right|^{1/2}. \tag{2.12}$$

Отсюда также следует ширина резонанса по частоте

$$\Delta\omega = \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \Delta I = 4 \left| \varepsilon V_{ms} \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right|^{1/2} \equiv \frac{\Omega}{m}. \tag{2.13}$$

Физический смысл приведенных результатов в следующем. Траектория луча в отсутствие возмущения осциллирует с частотой $\omega(I)$. В окрестности резонансной частоты $\omega(I_0)$ на это движение накладывается дополнительная модуляция луча по z. Амплитуда модуляции определяется выражениями (2.12), (2.13). Они же определяют и область локализации луча в плоскости (x, y). Таким образом, вдоль траектории невозмущенного луча, соответствующего действию I_0, образуется дополнительный волноводный канал с эффективным размером ΔI. Лучи, захваченные в этот канал, совершают в нем колебания относительно невозмущенной траектории с частотой Ω. Это приводит, в свою очередь, к периодической модуляции групповой скорости волнового поля.

Пример. Рассмотрим в качестве примера часто используемый солитоноподобный профиль показателя преломления

$$n^2(x) = n_\infty^2 + \frac{\mu^2}{\operatorname{ch}^2(x/a)}, \tag{2.14}$$

где величина μ характеризует глубину соответствующей потенциальной ямы, а величина a — ее эффективную ширину. Подставим (2.14) в выражение (2.5) для H_0. Простые вычисления действия по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx = \frac{1}{2\pi}\oint [n^2(x) - H_0]^{1/2}\,dx$$

дают

$$H_0(I) = -[n_\infty^2 + \mu^2(1 - I/I_s)^2]^{1/2}, \tag{2.15}$$

где $I_s = \mu a$. Из (2.15) сразу же следует выражение для нелинейной частоты

$$\omega(I) = (I_s - I)/a^2 |H_0|$$

и частоты малых колебаний

$$\omega_0 = \omega(0) = \mu/an(0) = \mu/(a\sqrt{n_\infty^2 + \mu^2}).$$

Решения для x и p легко представляются как функции действия и фазы:

$$p = \beta(1-\beta^2)^{1/2}\sin\vartheta/(\cos^2\vartheta + \beta^2\sin^2\vartheta)^{1/2},$$

$$x = \omega\,\operatorname{arcsh}\left[\frac{1}{\beta}(1-\beta)^{1/2}\cos\vartheta\right],$$

где обозначено

$$\beta = \frac{1}{\mu}[H_0^2(I) - n_\infty^2]^{1/2}.$$

На сепаратрисе $I = I_s$ и $H_0(I_s) = -n_\infty$. Поэтому параметр β определяет расстояние по «энергии» E до сепаратрисы.

Если имеется возмущение в виде периодических отклонений оси волновода от прямолинейной вдоль z, то в этом случае

$$n(x, z) = n(x - f(z)),$$

где в качестве функции отклонений $f(z)$ можно принять

$$f(z) = f_0\cos\varkappa z.$$

Считая

$$\varepsilon = f_0/a \ll 1,$$

разложим n в ряд по ε и ограничимся первыми двумя членами:

$$n^2(x - f(z)) \approx n^2(x) + f(z)\frac{dn^2(x)}{dx}.$$

Отсюда, используя обозначение (2.5), получаем

$$\varepsilon V = \frac{\varepsilon'}{2H_0} f(z) \frac{dn^2(x)}{dx} = -\dot{p} f(z). \tag{2.16}$$

Выражение (2.16) связывает потенциал возмущения V с возмущением показателя преломления.

Условие резонанса (2.11) в данном случае принимает вид

$$(2m+1)\omega(I) = \varkappa,$$

так как импульс p разлагается в ряд Фурье лишь по нечетным гармоникам. При больших m расстояние между резонансами равно

$$\delta\omega = 2\omega^2/\varkappa.$$

Для ширины резонанса по действию и по частоте получаем из формул (2.12) и (2.13) при $\beta \to 0$, т. е. вблизи сепаратрисы:

$$\frac{\Delta I}{I_s} = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\frac{n_\infty}{n(0)}\right)^{1/2},$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\frac{n(0)}{n_\infty}\right)^{1/2}.$$

Вблизи сепаратрисы резонансы должны перекрываться, образуя стохастический слой. Условие их перекрытия имеет вид

$$K = (\Delta\omega/\delta\omega)^2 \geqslant 1.$$

Это выражение в явном виде дает

$$K = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\varepsilon\left(\frac{\varkappa}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^3\frac{n_0}{n_\infty} \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Отсюда может быть найдена граница стохастического слоя $\bar{\omega}$ по частоте. Она получается, если приравнять $K = 1$:

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \left[4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\varepsilon\left(\frac{\varkappa}{\omega_0}\right)^2\frac{n_0}{n_\infty}\right]^{1/3}. \tag{2.18}$$

Если начальное состояние луча таково, что его действие I лежит в области (2.18), то это значит, что его движение в пространстве вдоль z носит диффузионный характер. Диффузия луча приводит к тому, что он достигает области вблизи невозмущенной сепаратрисы и «высвечивается» из волноводной области. Это показывает, что действие неоднородности как возмущения приводит к уменьшению эффективной ширины волноводного канала. В область стохастического слоя попадают моды колебаний поля с большими номерами. Поэтому излучение поля стохастического слоя означает также процесс фильтрации высоких мод в волноводном канале.

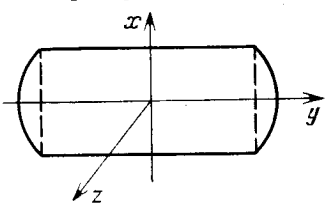


Рис. 14.8. Сечение волноводного канала, близкого к форме «стадион»

Двумерные сечения. Выше мы рассматривали очень упрощенную модель распространения луча в случае, когда показатель преломления зависит от одной переменной. В общем случае

$$n = n(x, y),$$

и поэтому невозмущенному волноводному каналу всегда соответствует потенциал эквивалентной динамической системы $V(x, y)$, зависящий от двух переменных. Это обстоятельство означает, что мы всегда имеем дело с системой из двух степеней свободы. Даже в том случае, когда отсутствует неоднородность вдоль z, потенциалы $V(x, y)$, отличные от квадратичного, приводят к появлению областей резонансов и областей стохастичности. Достаточно даже упомянуть такой элементарный пример сечения волноводного канала, как тот, что изображен на рис. 14.8. Кривизна его боковых стенок

является реальным следствием двумерности. Траектория луча в таком канале полностью идентична траектории частицы в биллиарде типа изображенного на рис. 14.2. Это сразу же позволяет сделать вывод о том, что при определенных геометрических соотношениях в сечении волноводного канала его траектории стохастически блуждают вдоль оси волновода. При этом происходит потеря информации об изображении, которую несут лучи [4].

Глава 15

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

Круг вопросов, который может быть отнесен к понятию нелинейной оптики, обладает большим разнообразием. В этой главе мы остановимся лишь на двух темах. Это, во-первых, идеи геометрической оптики в нелинейных средах, и, во-вторых, взаимодействие поля с резонансной средой. Причины, по которым отобраны эти две темы, определяются необычайно обширным кругом приложений первой темы и неожиданным результатом во второй теме. Идеи нелинейной геометрической оптики, по существу, представляют собой развитие методов, аналогичных методу ВКБ в квантовой механике для исследования распространения узких волновых пучков в нелинейных средах. Эти методы имеют многочисленные приложения не только в оптике, и поэтому результаты здесь следует отнести к категории универсальных (ком. 1). Пример взаимодействия поля с резонансной средой также обладает определенной степенью универсальности, и мы его обсудим в § 2.

§ 1. Нелинейная геометрическая оптика

В § 1 гл. 9 мы уже частично останавливались на методе Уизема при рассмотрении нелинейных волновых пакетов с медленно изменяющимися параметрами. Этот параграф будет посвящен более подробному обсуждению метода геометрической оптики в нелинейных средах.

Узкие волновые пучки. Обычная, линейная, геометрическая оптика рассматривает узкий волновой пучок

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r}, t) = A\cos\vartheta \tag{1.1}$$

или просто луч, который распространяется в слабонеоднородной и слабонестационарной среде. В уравнении (1.1) $A(\boldsymbol{r}, t)$ — амплитуда волны, а ϑ — ее фаза, для которой справедливы соотношения

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{k}, \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = -\omega(k). \tag{1.2}$$

Слабая неоднородность и нестационарность среды означают, что параметры A, $\boldsymbol{k}$ и ω зависят от координаты и времени достаточно медленно.

Таким образом, выражение (1.1) является достаточно близким к плоской волне, и ее медленное расплывание обусловлено явлениями дифракции и нестационарности.

Теперь перейдем к случаю нелинейной среды. Мы уже знаем, что это, в частности, отражается в нелинейном законе дисперсии

$$\omega = \omega(k, A^2). \tag{1.3}$$

К дифракции добавляется еще одна причина расплывания волнового пакета — нелинейность. Заметим, что термин «расплывание» подразумевает лишь определенный тип деформации волнового пучка. В действительности пучок может как расплываться, так и фокусироваться.

Весь дальнейший анализ проводится при двух предположениях:

1) пучок является узким, т. е. близким к монохроматическому, и поэтому отклонения волнового вектора $\boldsymbol{k}$ от некоторого значения $\boldsymbol{k}_0$ малы;

2) нелинейность мала, и поэтому дисперсионное уравнение (1.3) может быть разложено в ряд по степеням амплитуды A:

$$\omega = \omega_0(\boldsymbol{k}) + \frac{\partial\omega}{\partial A^2} A^2 \equiv \omega_0(\boldsymbol{k}) + \alpha A^2, \tag{1.4}$$

где $\omega_0(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}, 0)$, а через α обозначен параметр нелинейности частоты

$$\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial A^2}.$$

Здесь производная берется в точке $A^2 = 0$.

В духе идей метода геометрической оптики следует сохранить представление волны в форме (1.1). Однако выражение для фазы ϑ теперь должно быть обобщено:

$$\vartheta(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r} - \omega_0 t + \varphi(\boldsymbol{r}, t), \tag{1.5}$$

где выделены те части волнового числа и частоты, которые волна (1.1) имела бы, если бы среда была однородной, стационарной и линейной. В частности, $\omega_0 = \omega(\boldsymbol{k}_0, 0)$. Это означает, что полное волновое число $\boldsymbol{k}$ и полная частота ω, определяемые все теми же уравнениями геометрической оптики (1.2), равны

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{k}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}, \qquad \omega = -\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Следующая операция, которая предстоит, достаточно проста. В уравнении для частоты (1.6) в левой части следует воспользоваться дисперсионным уравнением (1.3), которое, как уже отмечалось, сохраняется в неоднородной среде. Однако нет необходимости использовать (1.3) или даже (1.4) в полной мере, так как разброс волновых чисел в окрестности $\boldsymbol{k}_0$ мал. Это есть приближение узких пучков, и им следует воспользоваться явно.

Введем групповую скорость

$$v_g = \frac{d\omega_0}{dk_0}$$

и учтем, что $\omega_0(\boldsymbol{k}) = \omega_0(k^2)$. Выберем также ось $\boldsymbol{x}$ вдоль $\boldsymbol{k}_0$. Разложим в (1.4) $\omega_0(\boldsymbol{k})$ в ряд по $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$ до второго порядка включительно:

$$\omega(\boldsymbol{k}, A^2) \approx \omega_0 + v_g\left(\sqrt{(k_0 + \varkappa_x)^2 - \varkappa_\perp^2} - k_0\right) + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2 + \alpha A^2 \approx$$

$$\approx \omega_0 + v_g\left(\varkappa_x + \frac{1}{2k_0}\varkappa_\perp^2\right) + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2 + \alpha A^2, \tag{1.7}$$

где обозначено $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0$. Формула (1.7) представляет собой достаточно общий вид нелинейного закона дисперсии для узких пучков с малыми амплитудами. Ее можно эффективно использовать для получения дифференциального уравнения, которое описывает эволюцию узких пучков.

Параболическое уравнение. Вместо представления поля в виде (1.1) с фазой ϑ в (1.5) введем комплексную амплитуду ψ:

$$\psi = Ae^{i\varphi}. \tag{1.8}$$

Из определений (1.5) и (1.6) следует, что амплитуда ψ должна удовлетворять уравнению

$$\hat{D}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0, \omega - \omega_0)\psi = 0, \tag{1.9}$$

в котором $\hat{D} = 0$ есть дисперсионное уравнение со сдвинутыми частотой и волновым числом. Его можно представить согласно (1.7) в виде

$$\left[(\omega - \omega_0) - v_g\left(\varkappa_x + \frac{1}{2k_0}\varkappa_\perp^2\right) - \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2 + \alpha|\psi|^2\right]\psi = 0,$$

где мы заменили $A^2 = |\psi|^2$ вследствие (1.8).

Теперь следует сделать последний шаг и перейти к дифференциальному уравнению для ψ. Это делается путем замен

$$\omega - \omega_0 \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \varkappa = k - k_0 \to -i\frac{\partial}{\partial r}.$$

В результате получаем нелинейное параболическое уравнение

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v_g\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{v_g}{k_0}\Delta_\perp\psi - \alpha|\psi|^2\psi = 0. \tag{1.10}$$

Оно имеет следующую структуру. Вся его левая часть, кроме нелинейного члена, является линейным параболическим уравнением, хорошо известным в теории дифракции узких пучков (ком. 2). Добавка нелинейного члена обусловлена поправкой к частоте из-за нелинейного закона дисперсии. Поэтому, если бы мы взяли линейное параболическое уравнение в готовой форме

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v_g\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \hat{L}\psi = 0$$

с известным оператором $\hat{L}$, то его обобщение на слабонелинейный случай заключалось бы просто в замене

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha|\psi|^2$$

в соответствии с (1.4).

Заметим, что оператор $\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{v_g}{k_0}\Delta_\perp, \tag{1.11}$$

которым мы еще воспользуемся.

Уравнение (1.10) лежит в основе многочисленных задач нелинейной оптики, и, прежде чем использовать его, опишем некоторые важные физические процессы.

Самосжатие волновых пакетов. Рассмотрим упрощенный вариант одномерного распространения узкого волнового пакета. Условие совместности уравнений для фаз (1.2) в неоднородной и нестационарной среде приводит к уже известному соотношению

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}. \tag{1.12}$$

Если подставить сюда вместо ω разложение (1.4) по амплитуде, то тогда волновое число удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g\frac{\partial k}{\partial x} - \alpha\frac{\partial A^2}{\partial x} = 0. \tag{1.13}$$

Это уравнение не замкнуто, так как необходимо еще уравнение для амплитуды. Поскольку величина A^2 пропорциональна энергии волны, то для нее можно использовать просто уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_g A^2) = 0. \tag{1.14}$$

Оно означает, что в первом приближении перенос энергии происходит с групповой скоростью.

Система (1.13), (1.14) является замкнутой. С ее помощью можно показать, что одномерный волновой пакет неустойчив относительно самосжатия в направлении его распространения. Для этого рассмотрим малое возмущение переменных A^2 и k и линеаризуем систему относительно этих

возмущений. Положим

$$k = k_0 + \delta k\, e^{i(\varkappa x - \nu t)}, \qquad A = A_0 + \delta A\, e^{i(\varkappa x - \nu t)}. \tag{1.15}$$

Возмущения в (1.15) представляют собой малые (по амплитуде) и медленные и длинноволновые (по сравнению с основной частотой и длиной волны) модуляции волнового пакета (рис. 15.1), т. е.

$$\delta A \ll A_0, \quad \delta k \ll k_0, \quad \varkappa \ll k_0, \quad \nu \ll \omega_0.$$

При линеаризации уравнения переноса энергии (1.14) следует учесть, что групповая скорость зависит от k. Поэтому для нее следует также записать разложение

$$v_g(k) \approx v_g(k_0) + \frac{dv_g(k_0)}{dk}(k - k_0).$$

Ниже индекс k_0 при v_g и ее производной для удобства будет опущен.

Подставляя (1.15) в систему (1.13), (1.14) и отбрасывая нелинейные члены, найдем дисперсионное соотношение между ν и $\varkappa$:

$$\nu = \left[v_g \pm \left(\alpha A^2 \frac{dv_g}{dk} \right)^{1/2} \right] \varkappa. \tag{1.16}$$

Оно показывает, что продольная модуляция волны приводит к неустойчивости возмущения, если

$$\alpha \frac{dv_g}{dk} < 0 \tag{1.17}$$

(ком. 3).

Условие (1.17) означает, что амплитуда модуляции пучка на рис. 15.1 нарастает. В результате степень перетяжек пучка с характерным масштабом $2\pi/\varkappa$ увеличивается, т. е. увеличивается глубина модуляции. В результате волновой пучок разбивается на отдельные пакеты, или волновые сгустки. В этом и заключается неустойчивость относительно самосжатия волновых пакетов, или, иначе, модуляционная неустойчивость. Она имеет следующую простую интерпретацию [5].

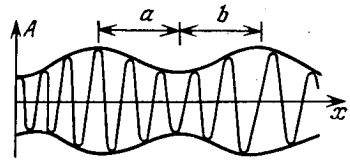


Рис. 15.1. Самосжатие волнового пакета

Пусть, для определенности, $\alpha > 0$. Тогда с ростом A частота ω возрастает согласно (1.4). Поэтому возникшее возмущение амплитуды, изображенное на рис. 15.1, возрастает на интервале b и убывает на интервале a. Посмотрим на соотношение (1.12). На том пространственном интервале, где частота возрастает (т. е. на интервале b), волновое число убывает со временем, а на интервале a, где частота убывает, волновое число будет возрастать со временем. Это, в свою очередь, означает, что изменение групповой скорости

$$\delta v_g = \frac{dv_g}{dk}\, \delta k\, e^{i(\varkappa x - \nu t)}$$

будет при условии (1.17) уменьшать полную групповую скорость на интервале a и увеличивать ее на интервале b. Таким образом, волновой пакет на интервале a отстает, усиливая амплитуду в точке максимума, и ускоряется на интервале b, также усиливая амплитуду в точке следующего максимума. Впадина модуляции при этом углубляется.

Простейшим примером волн, для которых имеет место неустойчивость самосжатия волновых пакетов, являются гравитационные волны на поверхности глубокой воды. Для стационарной волны конечной амплитуды дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(k, A^2) = \sqrt{gk}\,(1 + {}^1/_2 A^2 k^2 + \ldots),$$

где g — ускорение силы тяжести [9]. Из (1.17) следует, что

$$\alpha \frac{dv_g}{dk} = -{}^1/_8 kg < 0.$$

Ниже мы приведем более точный анализ рассмотренной неустойчивости, который будет учитывать также дифракционное расплывание волнового пакета.

Самофокусировка. Мы показали, что одним из специфических свойств нелинейной среды является связь между ее амплитудными изменениями и изменениями волнового числа. Эта связь может приводить к неустойчивости возмущений, проявляющейся не только в нарастании амплитуды, но и в деформации волнового пакета. Кроме неустойчивости относительно продольных возмущений амплитуды и волнового числа, возможна также неустойчивость поперечных возмущений. Она заключается в том, что возмущение поперечной компоненты волнового числа $\delta k_\perp$ может при определенных условиях нарастать со временем. В результате возникает явление самофокусировки волнового пакета (рис. 15.2). В его основе лежат следующие простые физические соображения.

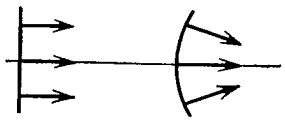


Рис. 15.2. Изгибание волнового фронта может приводить к самофокусировке

Вследствие какого-либо нелинейного эффекта (например, нелинейной электрострикции или поляризуемости) изменяется показатель преломления среды. В результате та область среды, в которой распространяется луч, становится оптически более прозрачной или более плотной. В последнем случае область лучевого канала подобна фокусирующей линзе. Развитие неустойчивости, связанной с нарастанием поперечного волнового числа $\delta k_\perp$, может останавливаться эффектами дисперсии волнового пакета. Для получения более точной информации следует снова рассмотреть задачу об эволюции малых возмущений.

В качестве исходного рассмотрим нелинейное параболическое уравнение (1.10). Преобразуем это уравнение в систему уравнений для амплитуды и фазы, подставляя в него выражение (1.8). Это дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{v_g}{2k_0}(\nabla_\perp)\varphi^2 + \alpha A^2 - \frac{1}{A}\hat{L}A = 0; \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{dv_g}{dk}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} A^2\right) + \frac{v_g}{k_0}\nabla_\perp (A^2 \nabla_\perp \varphi) = 0.$$

Система (1.18) так же, как и уравнение (1.10), обладает универсальной формой и зависит только от коэффициентов при первых членах разложения нелинейного закона дисперсии. Она содержит в себе все упоминавшиеся нами эффекты: самофокусировку и самосжатие волнового пакета, его расплывание из-за дифракции и стабилизацию расплывания из-за дисперсии. Приведем линеаризованный анализ системы (1.18).

Пороги устойчивости. Рассмотрим малые возмущения амплитуды A и фазы φ:

$$A = (A_0 + \delta A)\exp[i(\delta\varphi - \nu_0 t)],$$
$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi; \quad \varphi_0 = \nu_0 t \equiv \alpha A_0^2 t.$$

Если подставить эти выражения в (1.18) и оставить только линейные члены, то возникнет система

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta A + A_0 \hat{L}\delta\varphi = 0,$$
$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta x + (\hat{L} + 2\alpha A_0^2)\,\delta A = 0. \tag{1.19}$$

Система (1.19) могла бы, естественно, быть полученной и непосредственно из нелинейного параболического уравнения (1.10). Ищем ее решение в виде

$$\delta A = \delta A_0 \exp[i(\varkappa r - \nu t)], \quad \delta\varphi = \delta\varphi_0 \exp[i(\varkappa r - \nu t)]. \tag{1.20}$$

Это приводит к следующему дисперсионному уравнению для частот ν:

$$\nu = v_g \varkappa_x \pm [L_0 (2\alpha A_0^2 + L_0)]^{1/2}, \tag{1.21}$$

где через L_0 обозначено собственное значение оператора $\hat{L}$ на классе функций (1.20)

$$L_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{v_g}{k_0}\varkappa_\perp^2 + \frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2\right). \tag{1.22}$$

Рассмотрим различные случаи выражения (1.21). Прежде всего положим $\varkappa_\perp = 0$, что соответствует только продольным возмущениям. Тогда

$$\nu = v_g \varkappa_x \pm \varkappa_x \left[\frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\left(2\alpha A_0^2 + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2\right)\right]^{1/2}. \tag{1.22а}$$

Условие возникновения самосжатия имеет вид

$$\frac{dv_g}{dk}\left(2\alpha A_0^2 + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\varkappa_x^2\right) < 0. \tag{1.23}$$

Если $\alpha > 0$ и $\varkappa_x$ достаточно мало, то неравенство (1.23) сводится к прежнему условию (1.17). Если же

$$\varkappa_x^2 > -4\alpha A_0^2 \Big/ \frac{dv_g}{dk}, \tag{1.24}$$

то происходит стабилизация неустойчивости. Член, сдерживающий самосжатие, пропорционален $\varkappa_x^2$ и, следовательно, обусловлен дифракционным расплыванием волнового пакета.

Пусть теперь, наоборот, $\varkappa_x = 0$. Тогда из (1.21) и (1.22) следует:

$$\nu = \pm\frac{1}{2}\frac{v_g}{k_0}\varkappa_\perp^2\left[1 + 4\alpha A_0^2 \Big/ \left(\frac{v_g}{k_0}\varkappa_\perp^2\right)\right]^{1/2}. \tag{1.25}$$

Отсюда видно, что самофокусировка возможна лишь при $\alpha < 0$ и условии

$$\varkappa_\perp^2 < 4|\alpha| A_0^2 \frac{k_0}{v_g}. \tag{1.26}$$

Если же неравенство (1.26) не выполнено, то самофокусировка стабилизируется, как и в случае $\varkappa_\perp = 0$, дифракционным расплыванием.

Условия (1.24) и (1.26), а также общие выражения (1.22) и (1.25) позволяют сделать вывод о возможности существования стационарных решений, которые реализуются в условиях стабилизации неустойчивостей. Приведем простейший пример такого решения.

Стационарные волны. Для этой цели рассмотрим исходное нелинейное параболическое уравнение (1.10) в одномерном случае:

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v_g\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.27}$$

где обозначено для удобства

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}. \tag{1.28}$$

В уравнении (1.27) можно избавиться от члена с ψ_x. Для этого следует перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью v_g:

$$\psi = \bar{\psi}(x - v_g t, t) \equiv \bar{\psi}(\bar{x}, t). \tag{1.29}$$

Тогда $\bar{\psi}$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.30}$$

где черта при ψ и x для простоты записи опущена.

Уравнение (1.30) называется нелинейным уравнением Шредингера. Решение в виде стационарной волны ищется, как обычно, в виде

$$\psi = v(x-ut)\,e^{i(qx-rt)} = e^{i(qx-rt)}\,v(\xi), \tag{1.31}$$

где r, s и u — некоторые постоянные. Подстановка (1.31) в (1.30) дает

$$\beta v'' + i(2q-u)\,v' + (r-q^2)\,v - \alpha|v|^2 v = 0. \tag{1.32}$$

Поскольку член с v' всегда может быть исключен заменой переменных, выберем константу r так, чтобы коэффициент при нем сразу обращался в нуль:

$$q = u/2.$$

Обозначим также

$$r = {}^1/_4 u^2 - \gamma.$$

Теперь v можно считать действительным и переписать уравнение (1.32) в виде

$$v'' - \frac{\gamma}{\beta} v - \frac{\alpha}{\beta} v^3 = 0. \tag{1.33}$$

Оно имеет интеграл энергии

$$W = \frac{1}{2} v'^2 - \frac{\gamma}{2\beta} v^2 - \frac{\alpha}{4\beta} v^4 \tag{1.34}$$

и сразу интегрируется в эллиптических функциях. Уравнение (1.33) и выражение (1.34) нам уже хорошо знакомы. Приведем лишь решение в форме солитона при $\gamma/\beta > 0$ и $\alpha/\beta < 0$. Оно реализуется при $W = 0$ и имеет вид

$$v = \left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \operatorname{sech}\left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{1/2}(x-ut)\right]. \tag{1.35}$$

Форма решения (1.31) такова, что в нем плоская волна модулируется функцией $v(\xi)$. Поэтому мы вправе говорить о волновом пакете с огибающей в виде функции (1.35). Это решение возникает при условии $\alpha/\beta < 0$, которое можно также переписать в виде $\alpha\beta < 0$. Если мы вспомним обозначение (1.28), то приходим к неравенству

$$\alpha \frac{dv_g}{dk} < 0.$$

Оно совпадает с условием (1.17) неустойчивости волнового пакета относительно самосжатия. Таким образом, развитие неустойчивости происходит на начальной, линейной стадии процесса самосжатия. Затем этот процесс стабилизируется дифракционным расплыванием волнового пакета. В результате возникает стационарная модуляция в виде нелинейных волновых сгустков.

Заметим в заключение, что в отличие от уравнения КдВ у солитона (1.35) скорость является свободным параметром и не зависит от амплитуды.

§ 2. Нелинейные кооперативные явления при взаимодействии поля излучения с веществом

Взаимодействие сильных полей с атомами становится в значительной степени нелинейным. Существует некоторое разнообразие в проявлении нелинейного характера взаимодействия. Одну из весьма важных причин нелинейности можно охарактеризовать как пленение излучения. Квант света поглощается атомом на резонансном переходе и затем излучается обратно. Излученный квант практически не успевает пробыть в свободном состоянии и снова поглощается, но уже другим атомом. В результате

квант на длительное время, или, иначе, на длинном пути, оказывается плененным системой атомов. Возникает когерентное взаимодействие атомов с полем излучения. Среда приобретает активные свойства, индуцированные полем. Этот процесс играет в современной квантовой радиофизике важную роль. Рассмотрим его подробнее (ком. 4).

Кооперативные эффекты. Система энергетических уровней атома, как правило, сильно неэквидистантна (рис. 15.3). Поэтому при взаимодействии атома с полем, имеющим фиксированную частоту, основную роль играет лишь та пара уровней, переход между которыми резонансен частоте поля. Это приводит к тому, что атомы часто рассматривают как двухуровневую систему, и такое приближение оказывается достаточным. Оно приводит к тому, что атом становится сильно нелинейной системой. Действительно, линейный осциллятор имеет эквидистантный полуограниченный спектр. Двухуровневая система имеет минимальное сходство с ним.

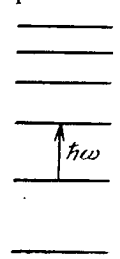


Рис. 15.3. Неэквидистантный энергетический спектр атомов

Если атомов много, то при взаимодействии их с полем могут возникнуть кооперативные эффекты. Простейшее представление о них можно получить следующим образом. Для этого рассмотрим, как может происходить излучение системы, состоящей из многих атомов.

В классической электродинамике интенсивность излучения системы равна

$$I = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\boldsymbol{d}})^2, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{d}$ — дипольный момент системы. Система из N атомов имеет дипольный момент

$$\boldsymbol{d} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{d}_k, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{d}_k$ — дипольный момент k-го атома. По существу, ответ на вопрос об излучении системы из N атомов зависит от того, чему равна сумма (2.2). В процессе взаимодействия с полем излучения дипольный момент атома не остается постоянной величиной. Он осциллирует, и это есть прямое следствие нелинейности атома, которую мы объяснили выше. Поэтому сумма дипольных моментов атомов (2.2) может принимать значения в очень широком диапазоне. Если в процессе излучения атомы ведут себя нескоррелированным образом, то

$$d \sim \sqrt{N} d_0, \tag{2.3}$$

где d_0 — дипольный момент одного атома. Соответственно с (2.3) и (2.1)

$$I \sim \frac{2\omega^4}{3c^3} d_0^2 N, \tag{2.4}$$

где ω — частота излучения. Мы приходим к хорошо известному и тривиальному результату: интенсивность излучения пропорциональна сумме интенсивностей отдельных излучателей. Однако этот результат не является единственно возможным.

Предположим, что взаимодействие атомов с полем излучения происходит скоррелированным образом. Изменение со временем дипольных моментов отдельных атомов происходит когерентным образом, и в результате для суммы (2.2) имеем

$$d \sim N d_0. \tag{2.5}$$

Это сразу приводит к

$$I \sim N^2, \tag{2.6}$$

т. е. интенсивность излучения увеличивается в N раз по сравнению со случаем некогерентного движения атомов. Излучение, описываемое формулами

(2.5), (2.6), называется сверхизлучением. Аналогично сверхизлучению возможно сверхпоглощение и сверхрассеяние.

Когерентная динамика дипольных моментов отдельных атомов вызвана их коллективным движением в результате взаимодействия с полем. В этом случае говорят о кооперативных эффектах, которые вызваны образованием связанного состояния между системой атомов как целого и полем излучения. Это связанное состояние, как будет видно ниже, полностью аналогично многим, уже рассмотренным нами, случаям резонансного взаимодействия нелинейных систем с внешним полем. Если поле излучения «заперто» внутри резонатора, то говорят о сложной системе «атомы + поле». Мы ниже будем иметь дело именно с такого типа системой.

Атомы + поле излучения как динамическая система. Для ее описания можно воспользоваться так называемой полуклассической моделью, в которой поле излучения считается классическим, а атомы — квантовой двухуровневой системой (ком. 5). Состояние k-го атома описывается волновой функцией

$$\psi_k = a_k\psi^{(1)} + b_k\psi^{(2)},$$

представляющей суперпозицию двух базисных состояний атома $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$. Коэффициенты a_k, b_k удовлетворяют условию нормировки

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1. \tag{2.7}$$

Состояние атома удобно характеризовать тремя величинами:

$$n_k = |b_k|^2 - |a_k|^2, \quad m^+ = a_k b_k^*, \quad m^- = a_k^* b_k, \tag{2.8}$$

где величина n_k называется разностью населенностей.

Дипольный момент атома равен

$$d_k \equiv \mu m_k = \mu\,(a_k b_k^* + a_k^* b_k), \tag{2.9}$$

где μ — матричный элемент дипольного момента.

Для системы из N атомов вводятся плотности соответствующих величин

$$n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_i, \qquad m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k. \tag{2.10}$$

С их помощью уравнения движения системы атомы + поле для поля с частотой ω, равной частоте перехода атома, и с длиной волны, превышающей размеры системы, принимают вид [13]:

$$\begin{aligned} &\ddot{E} + \omega^2 E = 4\pi\omega^2\rho\mu m, \\ &\ddot{m} + \omega^2 m = -\frac{2\mu\omega}{\hbar} En, \\ &\dot{n} = \frac{2\mu}{\hbar\omega}\dot{E}\dot{m}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где E — поле излучения и ρ — плотность атомов. В теории взаимодействия атомов с излучением важную роль играет величина r, называемая кооперационным числом. Оно равно

$$r^2 = n^2 + m^2 + \frac{1}{\omega^2}\dot{m}^2. \tag{2.12}$$

Из двух последних уравнений системы (2.11) получаем

$$r = \text{const} \tag{2.13}$$

и, следовательно, кооперационное число является интегралом движения. Кроме того, система (2.11) имеет интеграл энергии

$$C = \frac{1}{\omega^2}\dot{\tilde{E}}^2 + \tilde{E}^2 + n - \Lambda\tilde{E}m, \tag{2.14}$$

где введена безразмерная величина поля

$$\tilde{E} = \frac{1}{(4\pi\hbar\omega\rho)^{1/2}} E$$

и безразмерная константа взаимодействия

$$\Lambda = (16\pi\rho\mu^2/\hbar\omega)^{1/2}. \tag{2.15}$$

Выражение (2.14) можно после простых преобразований рассматривать как гамильтониан системы, состоящей из двух степеней свободы — атомы и поле. Атомы характеризуются коллективными переменными (2.10). Согласно (2.8), величина n имеет смысл эффективной населенности, приходящейся на один атом. Поскольку величине $n_k = 1$ соответствует возбуждение атома на верхний уровень, т. е. поглощение одного кванта поля с энергией $\hbar\omega$, то можно сказать, что n есть также плотность на один атом числа фотонов с частотой ω, поглощенных атомами и, следовательно, находящихся в связанном состоянии. Величина m в силу (2.9) есть просто средний дипольный момент, приходящийся также на один атом.

Удобно далее ввести переменные действие — угол:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left(\frac{I_E}{\omega}\right)^{1/2} \cos\varphi_E, \qquad \dot{\tilde{E}} = -(\omega I_E)^{1/2} \sin\varphi_E; \\ m &= \left(\frac{I_m}{\omega}\right)^{1/2} \cos\varphi_m, \qquad \dot{m} = -(\omega I_m)^{1/2} \sin\varphi_m, \end{aligned} \tag{2.16}$$

и определить гамильтониан системы с помощью (2.14) следующим образом:

$$H = \omega^2 C = \omega I_E + \omega^2 (r^2 - I_m/\omega)^{1/2} - {}^1/_2\omega\Lambda (I_E I_m)^{1/2} (\cos\Psi + \cos\varphi), \tag{2.17}$$

где обозначено

$$\Psi = \varphi_E - \varphi_m, \qquad \varphi = \varphi_E + \varphi_m \tag{2.18}$$

и сделана замена

$$n = (r^2 - I_E/\omega)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Первый член в (2.17) имеет очевидную форму энергии линейного осциллятора с частотой ω и соответствует энергии поля. Второй член описывает энергию двухуровневой системы. Он соответствует энергии прецессирующего момента с проекцией ωn на фиксированную ось. Наконец, третий член описывает взаимодействие атомов с полем, и в нем есть два слагаемых. Первое содержит косинус разности фаз, второе — косинус суммы фаз состояний атомов и поля. Чтобы понять разницу между ними, запишем уравнения движения в переменных действие — угол.

Из (2.17) имеем

$$\begin{aligned} \dot{I}_E &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_E} = -{}^1/_2\omega\Lambda (I_E I_m)^{1/2} (\sin\Psi + \sin\varphi), \\ \dot{\varphi}_E &= \frac{\partial H}{\partial I_E} = \omega - {}^1/_4\omega\Lambda \left(\frac{I_m}{I_E}\right)^{1/2} (\cos\Psi + \cos\varphi), \\ \dot{I}_m &= 2n\frac{\partial H}{\partial \varphi_m} = -\omega\Lambda n (I_E I_m)^{1/2} (\sin\Psi - \sin\varphi), \\ \dot{\varphi}_m &= -2n\frac{\partial H}{\partial I_m} = \omega + {}^1/_2\omega\Lambda n \left(\frac{I_E}{I_m}\right)^{1/2} (\cos\Psi + \cos\varphi). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Обратим внимание на то, что последние два уравнения соответствуют обобщенному гамильтоновскому принципу, который мы уже обсуждали ранее. Нетрудно убедиться в том, что система (2.20) эквивалентна системе (2.11). Мы видим, что при малых Λ частота поля и частота прецессии момента, характеризующего состояния атомов, равны ω. Поэтому член с $\cos\Psi$ в гамильтониане (2.17) соответствует резонансному взаимодействию. Наоборот, член с $\cos\varphi$ в H соответствует нерезонансному взаимодействию.

Связанное состояние атомов с полем излучения. Рассмотрим сначала случай малых Λ и ограничимся лишь резонансным членом в гамильтониане. Тогда

$$\tilde{H} = \omega I_E + \omega^2 \left(r^2 - \frac{I_m}{\omega} \right)^{1/2} + P, \tag{2.21}$$

где через P обозначена энергия взаимодействия атомов с полем:

$$P = -{}^1/_2 \omega \Lambda (I_E I_m)^{1/2} \cos \Psi. \tag{2.22}$$

Соответствующая система уравнений движения совпадает с системой (2.20), если в последней отбросить все слагаемые, содержащие $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$. С точностью до этих отброшенных слагаемых просто получить, что

$$P = \text{const}, \tag{2.23}$$

и, следовательно, в резонансном случае возникает дополнительный к H (или C) интеграл движения. Это позволяет проинтегрировать точно задачу в резонансном случае.

Движение, определяемое гамильтонианом $\tilde{H}$, происходит по поверхности $\tilde{H} = \omega^2 C = \text{const}$. Фазовые траектории приведены на рис. 15.4. На нем $\vartheta = \arccos n$. Каждая траектория определяется двумя интегралами движения (C, P) и описывает периодические колебания разности населенностей атомов n. Одновременно с этим происходит колебание энергии поля ωI_E. Этому процессу можно придать очень наглядный физический смысл. Для этого заметим, что величина

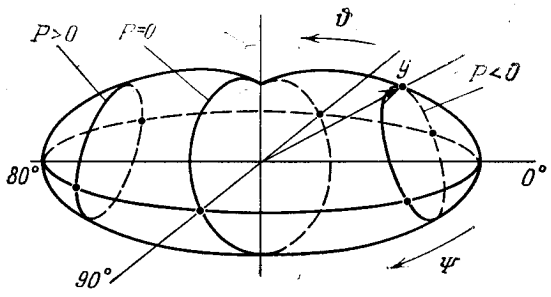


Рис. 15.4. Поверхность постоянной энергии $C = 1$ в фазовом пространстве (y, ϑ, Ψ)

$$y = I_E/\omega$$

есть число фотонов поля излучения, приходящееся на объем, занимаемый одним атомом. Поэтому величина

$$\mathcal{E} = n + y \tag{2.24}$$

есть полное число фотонов в объеме одной атомной ячейки. Часть из них (y) находится в «полевом состоянии», а часть (n) поглотилась атомами и возбудила их, переводя на верхний уровень. Из соотношений (2.19), (2.20) и (2.22) следует, что

$$\mathcal{E} = \tilde{H}/\omega^2 - P = \text{const}, \tag{2.25}$$

т. е. выражение (2.24) также есть интеграл движения. Поэтому колебания величин n и y означают, что некоторая доля фотонов периодически переходит из поля в атомы и обратно. В этом и заключается физический смысл фазовых траекторий на рис. 15.4. Их проекции на плоскость (n, Ψ) приведены на рис. 15.5. Принято говорить, что в системе (2.21) происходят периодические преобразования поля.

Полное преобразование поля происходит на особой траектории с $C = 1$, $P = 0$. Это — сепаратриса. Она описывает решение типа солитона, при котором поле может полностью перейти в атомы, т. е. может произойти полное поглощение поля. Соответствующее обращение этого решения во времени описывает полное излучение атомами поля.

Приведем решение, описывающее в явной форме процесс периодического преобразования поля. Для этого совершим некоторые вспомогательные преобразования. Сначала заметим, что согласно уравнениям (2.11) и (2.12) можно исключить r заменами $y \to y/r$, $n \to n/r$, $m \to m/r$, $\dot{m} \to \dot{m}/r$, $\rho \to \rho/r$,

$\Lambda \to \Lambda/\sqrt{r}$. Поэтому без ограничения общности можно положить просто $r=1$, что мы и будем далее предполагать.

Переменные (n, Ψ) являются канонически сопряженной парой, если принять в качестве гамильтониана интеграл движения P, записанный в виде

$$P = P(n, \Psi;\ y = \mathscr{E} - n) = -{}^1/_2\Lambda\,[(\mathscr{E}-n)(1-n^2)]^{1/2}\cos\Psi. \tag{2.26}$$

Действительно, выражения

$$\dot{n} = \omega\frac{\partial P(n, \Psi;\ \mathscr{E})}{\partial\Psi}, \qquad \dot{\Psi} = -\omega\frac{\partial P(n, \Psi;\ \mathscr{E})}{\partial n} \tag{2.27}$$

соответствуют уравнениям движения, получаемым из (2.20) в резонансном приближении.

Еще одно упрощение можно получить, если перейти от переменных (n, Ψ) к переменным $(n, \dot{n})$. В качестве гамильтониана возьмем (2.26) в виде

$$\mathscr{P} = -{}^1/_2\omega^2 P,$$

в котором следует исключить $\cos\Psi$ с помощью первого уравнения (2.27). Это дает

$$\mathscr{P} = {}^1/_2\dot{n}^2 - {}^1/_8\omega^2\Lambda^2(\mathscr{E}-n)(1-n^2). \tag{2.28}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости уравнений

$$\frac{d}{dt}n = \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\dot{n}}, \qquad \frac{d}{dt}\dot{n} = -\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial n}, \tag{2.29}$$

т. е. $(n, \dot{n})$ есть также канонически сопряженная пара переменных для гамильтониана (2.28).

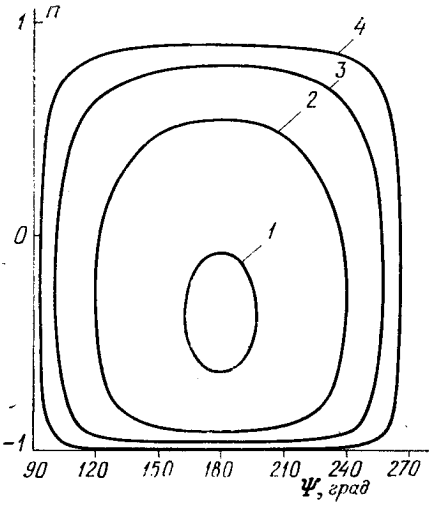


Рис. 15.5. Проекции траекторий в резонансной модели при различных значениях Λ

Теперь уже гамильтониан $\mathscr{P}$ в форме (2.28) имеет привычную для нас форму энергии осциллятора с кубическим потенциалом. Система (2.29) легко интегрируется, и решение $n(t)$, зависящее от двух интегралов движения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{P}$, имеет вид

$$n = n_1 + (n_2 - n_1)\,\mathrm{sn}^2\left[{}^1/_4\omega\Lambda\sqrt{n_3-n_1}\,t;\ \varkappa\right], \tag{2.30}$$

где $n_1 < n_2 < n_3$ — корни уравнения

$$(1-n^2)(\mathscr{E}-n) + 8\mathscr{P}/(\omega^2\Lambda^2) = 0,$$

$\varkappa$ — модуль эллиптической функции

$$\varkappa = [(n_2-n_1)(n_3-n_1)]^{1/2}.$$

Решение типа (2.30) нам хорошо известно. В данном случае оно описывает периодические переходы энергии (или квантов) из поля в атомы и обратно. Этот процесс, естественно, является когерентным и соответствует образованию связанного состояния между атомами и полем излучения. Связанное состояние аналогично внутреннему нелинейному резонансу. В частности, в окрестности сепаратрисы $\mathscr{P} \approx 0$, $\mathscr{E} \approx C \approx 1$. Частота малых колебаний переходов равна при $\mathscr{E} \approx 1$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda\omega. \tag{2.31}$$

Одной из примечательных особенностей рассматриваемой системы является существование в резонансном приближении дополнительного интеграла движения, который выделяется в явном виде как энергия взаимодействия двух

степеней свободы. Учет нерезонансного отброшенного члена приводит к разрушению этого интеграла движения и потере когерентности. Рассмотрим, как это происходит.

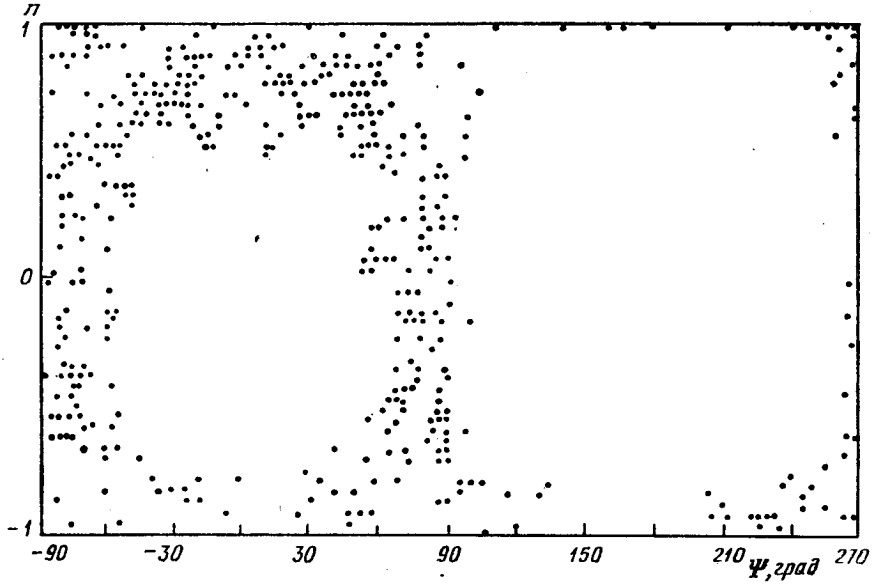


Рис. 15.6. Стохастическая траектория при $\Lambda = 0{,}9$ и $C = 1$

Разрушение связанного состояния. Влияние нерезонансных членов можно рассматривать как возмущение. Оно обусловлено в системе уравнений (2.20) теми слагаемыми, которые содержат $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$. При малых значениях Λ,

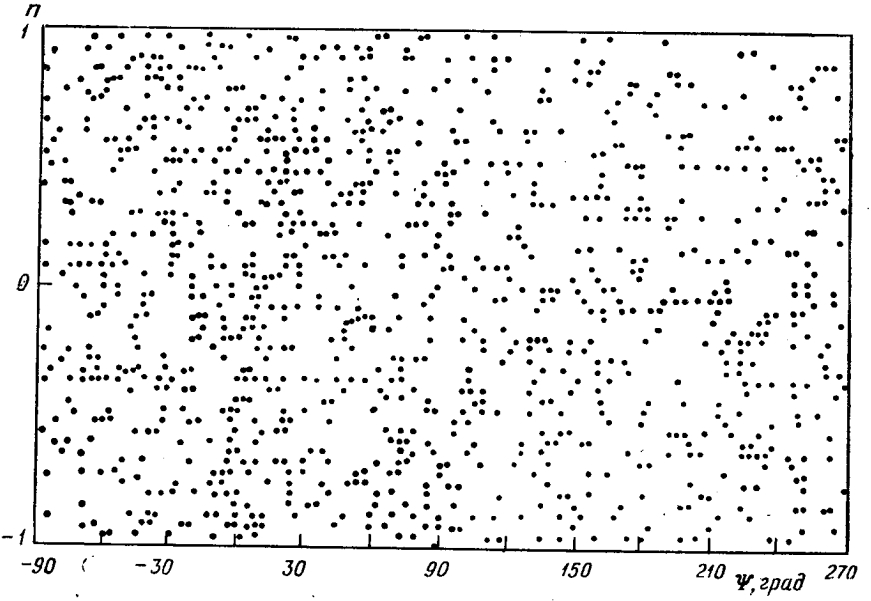


Рис. 15.7. Полная стохастизация при $\Lambda = 1{,}8$ и $C = 1$

т. е. при слабом взаимодействии атомов с полем, $\dot{\varphi} \sim 2\omega$, и, следовательно, эти члены являются быстро осциллирующими.

Невозмущенное движение имеет сепаратрису при $\mathscr{E} = 1$, $C = 0$. Поэтому высокочастотное возмущение, обусловленное нерезонансными членами, приводит к образованию в окрестности сепаратрисы экспоненциально узкого сто-

хастического слоя. Оценка его ширины приведена в § 3 гл. 5. В данном случае стохастический слой имеет ширину

$$\Delta P \sim \pi \sqrt{32}\,\Lambda \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{2}}{\Lambda}\cdot \text{const}\right), \qquad \Lambda \ll 1, \tag{2.32}$$

где const ~ 1.

Поскольку полное преобразование энергии из атомов в поле и обратно происходит вблизи сепаратрисы, то именно этот режим подвержен стохастическому разрушению. При этом происходит потеря когерентности поля. Однако теперь она связана не с потерей корреляции отдельных атомов,

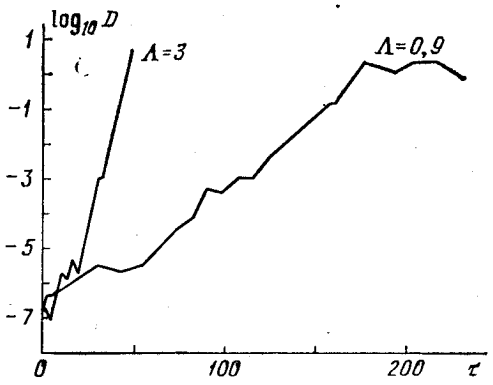


Рис. 15.8. Зависимость расстояния между начально близкими траекториями от времени при $C=1$ и $\Lambda=0{,}9$, $\Lambda=3$

а с некогерентной динамикой всей атомной системы как целого. Формула (2.32) показывает, что существует универсальная граница когерентного преобразования энергии при взаимодействии атомов с полем излучения. Граница зависит, в основном, от одного параметра — константы взаимодействия. Хотя область разрушения когерентности и мала, однако потеря когерентности является сильной. Ее можно характеризовать степенью уширения спектральных линий колебаний, например, разности населенностей n. Поскольку перемешивание внутри стохастического слоя является достаточно интенсивным, то относительная ширина линий γ_c/ω оказывается достаточно большой. Для ее оценки можно написать

$$\frac{\gamma_c}{\omega} \sim \frac{1}{\tau_c \omega} \sim \frac{\bar{\omega}}{\omega} \ln K,$$

где τ_c — среднее время расцепления фаз Ψ внутри стохастического слоя, $\bar{\omega}$ — характерная частота внутри слоя и $\ln K$ — параметр локальной неустойчивости (K-энтропия). Численный анализ, например, показывает, что при $\Lambda=0{,}4$ получается $\gamma_c/\omega \sim 10^{-2}$. Это очень большая величина, которая означает фактическую потерю когерентности (ком. 6).

С увеличением Λ ширина стохастического слоя растет. Кривые из области $P<0$ на рис. 15.4 переходят в область $P>0$ и обратно. Пример стохастической траектории при $\Lambda=0{,}9$ приведен на рис. 15.6. Точки обозначают места пересечения траекторией плоскости (n, Ψ). Сама же траектория теперь не лежит на поверхности, как в резонансном приближении, а заполняет трехмерное многообразие $C=\text{const}$. Однако наиболее сильное разрушение когерентности происходит при переходе значения Λ через критическое значение

$$\Lambda_c = 1.$$

Оно сопровождается практически полным разрушением регулярного движения и заполнением траекторией всего фазового объема. Пример такой траектории

при $\Lambda = 1{,}8$ приведен на рис. 15.7. Ей соответствует полное исчезновение когерентных свойств в системе «атомы + поле». Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть локальную неустойчивость при таких значениях Λ и найти γ_c. На рис. 15.8 приведены два случая вычисления $\log_{10} D(\tau)$, где D — расстояние между точками двух траекторий с близкими начальными значениями и $\tau = \omega t$ — безразмерное время. Из этих кривых легко получить:

1) $\frac{\gamma_c}{\omega} \sim 0{,}1$ $(\Lambda = 0{,}9)$; 2) $\frac{\gamma_c}{\omega} \sim 0{,}35$ $(\Lambda = 3)$.

Таким образом, относительная ширина линии перехода быстро приближается к единице с ростом Λ.

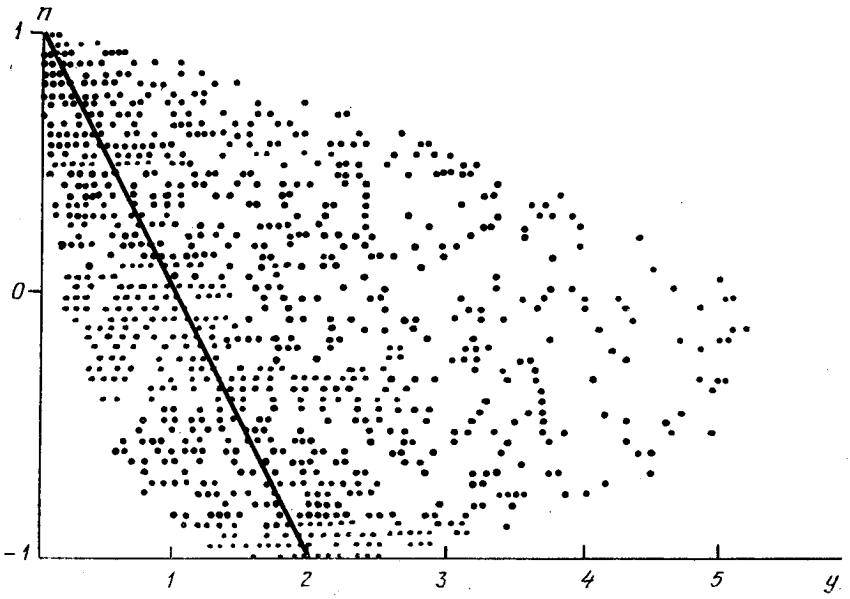


Рис. 15.9. Стохастическая траектория на плоскости (n, y) при $C = 1$ и $\Lambda = 1{,}8$. Прямой изображена невозмущенная траектория

Еще одна характеристика системы позволяет глубже понять физический смысл происходящих в ней процессов. При отбрасывании нерезонансных членов взаимодействия в системе остается дополнительный интеграл движения (2.24). Это означает, что при $\mathscr{E} = \text{const}$ значения y и n на траектории лежат на прямой (2.24). Однако в точной постановке задачи, где возникает стохастичность, величина $\mathscr{E}$ уже не есть интеграл движения, и поэтому точки траектории системы не лежат на прямой (2.24). Характер разрушения интеграла движения $\mathscr{E}$ при $\Lambda = 1{,}8$ хорошо виден из рис. 15.9. Число фотонов поля y, так же как и число возбужденных атомов, хаотически изменяется со временем, разрушая когерентность всех процессов взаимодействия атомов и поля излучения (ком. 7).

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 15

1. Идеи нелинейной геометрической оптики и узких волновых пакетов развивались во многих работах. Укажем на некоторые из них, носящие также обзорный характер [1—6].

2. Параболическое уравнение было предложено в работе [7].

3. Этот результат был получен в работе [8].

4. Существование когерентного состояния атомов, взаимодействующих с полем излучения, было описано в известной работе Дике [9]. В ней же было предсказано существование сверхизлучательного состояния системы «атомы + поле». Далее используется упрощенная

модель, в которой атомы рассматриваются как двухуровневые системы. Несмотря на упрощенный характер модели, в ее рамках описываются многочисленные физические процессы: преобразование излучения, резонансная флюоресценция, сверхизлучение, комбинационное рассеяние и др. Неустойчивость основного состояния системы «атомы + поле» при условии $\Lambda > 1$ (Λ — безразмерная константа взаимодействия атома с полем, которая вводится ниже) была обнаружена в [11]. Стохастический механизм разрушения когерентного связанного состояния системы «атомы + поле» описан в работе [12]. Изложение далее следует этой работе.

5. Подробное описание полуклассической модели можно найти в [13] и в обзоре [14].
6. Все числовые данные здесь и далее взяты из работы [12].
7. См. также обсуждение квантового аспекта этой задачи в [15].

Глава 16

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПОЧЕК

Одномерные цепочки взаимодействующих атомов, молекул, вихрей или каких-либо других физических объектов являются сравнительно простой моделью, на которой можно проследить за структурными превращениями в системе. Это привлекает внимание к ним в связи с различными задачами в физике твердого тела и в теории турбулентности. Задачи при этом оказываются на различных стадиях исследования разными. При анализе возможных состояний твердого тела следует отобрать из всех возможных состояний то, которое реализует минимум свободной энергии. В теории турбулентности интерес представляет более широкий класс состояний, поскольку стационарной турбулентности соответствует не равновесное состояние, а стационарное, возникающее под действием накачки и стока энергии. Однако на некоторой стадии исследования — определении различных возможных структур и их зависимости от параметров системы — используемые методы являются близкими (ком. 1).

Мы уже показывали в § 7 гл. 1, как задача о равновесии атомных цепочек может быть приведена к исследованию отображений, типичных для нелинейных динамических систем. Ниже эта аналогия будет рассмотрена подробнее для двух видов цепочек: атомной и спиновой. Кроме того, понятия «атомной» или «спиновой» цепочек различаются по виду взаимодействия и по структуре переменных. С равным успехом можно было бы заменить атомы молекулами или другими сходными объектами, а спины — вихрями или ларморовскими орбитами. Еще одно замечание выделяет одномерные системы по отношению к неодномерным. Расположение атомов или спинов вдоль одной координаты позволяет придать этой координате смысл «времени». Техническая реализация этой операции будет видна ниже. В многомерном случае подобная возможность, вообще говоря, отсутствует (ком. 2).

§ 1. Атомные цепочки

Исследование динамики нелинейной системы показывает, что в зависимости от характера и величины взаимодействий система может проходить через ряд бифуркаций, проявляющихся в смене различных видов движения. При определенных условиях практически во всех динамических системах с числом степеней свободы $N > 1{,}5$ существует область в фазовом пространстве и в пространстве параметров, где движение является хаотическим. Пусть

$$H = H(p_1, q_1; \ldots; p_N, q_N)$$

является гамильтонианом системы с N степенями свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.1}$$

а условия равновесия получаются отсюда, если положить равными нулю производные $\dot{p}_k$, $\dot{q}_k$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.2}$$

До сих пор мы говорили о бифуркациях, нелинейном резонансе и хаосе в системе (1.1). Эти же явления возможны в системе (1.2), однако теперь это будут переходы от одной структуры к другой структуре, которая может быть также хаотической, или нерегулярной.

Дискретное уравнение синус-Гордона. Рассмотрим простейший вариант цепочки осцилляторов, взаимодействующих только с ближайшими соседями:

$$H = \sum_{k=1}^{N} [\tfrac{1}{2} p_k^2 + \tfrac{1}{2}(u_k - u_{k-1} - a)^2 + V(u_k)], \tag{1.3}$$

где $q_k = u_k$ — смещение осциллятора, масса которого принята равной единице, $V(u_k)$ — локальный потенциал поля, в котором движется осциллятор. Величина a имеет смысл периода невозмущенной цепочки. Действительно, при $V \equiv 0$ условие минимума потенциальной энергии дает

$$u_{k+1} - u_k = a$$

для всех значений k. Далее для конкретности положим

$$V(u) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a_0} u\right). \tag{1.4}$$

Это означает, что осцилляторы находятся в периодическом внешнем поле с пространственным периодом a_0. В твердом теле поле (1.4) обусловлено действием всей решетки на данный атом. В гидродинамике это может быть поле скоростей или внешнее силовое поле.

Уравнения движения (1.1) с учетом (1.3) и (1.4) приобретают вид

$$\ddot{u}_k = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} + \frac{2\pi}{a_0} V_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a_0} u_k\right) \qquad (k = 1, \ldots, N). \tag{1.5}$$

Это уравнение можно также записать в более общей форме

$$u_{tt} = \hat{D}_2 u + \frac{2\pi}{a_0} V_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a_0} u\right), \tag{1.6}$$

где $\hat{D}_2$ — разностный оператор:

$$\hat{D}_2 = \exp\frac{\partial}{\partial x} + \exp\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - 2.$$

Уравнение (1.5) или (1.6) будем называть разностным уравнением синус-Гордона. При малых значениях производной u_x оно переходит в обычное уравнение синус-Гордона. В то время как последнее уравнение является интегрируемым, его разностный аналог (1.6) — неинтегрируем. Более того, неинтегрируемой является даже стационарная задача, соответствующая системе уравнений (1.2):

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} + \frac{2\pi}{a_0} V_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a_0} u_k\right) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N). \tag{1.7}$$

Остановимся подробнее на решениях системы (1.7).

Стационарные состояния цепочки. Как и в § 7 гл. 1, введем переменную

$$I_k = u_k - u_{k-1}. \tag{1.8}$$

С ее помощью (1.7) переписывается в виде отображения

$$\bar{I} = I + \frac{2\pi}{a_0} V_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a_0} u\right), \qquad \bar{u} = u + I, \tag{1.9}$$

которое совпадает со стандартным отображением.

Если задать начальные значения (u_0, I_0), то все последующие значения положений атомов как элементов цепочки могут быть получены последовательными итерациями системы (1.9). Теперь мы можем перечислить все возможные решения уравнений (1.7). Отображение (1.9) имеет периодические и хаотические решения. Их локализация в фазовом пространстве зависит от параметра V_0. При $K \lesssim 1$, где

$$K = (2\pi/a_0)^2 V_0, \tag{1.10}$$

стохастические решения занимают в фазовом пространстве узкие стохастические слои (см. § 1 гл. 5). При $K \gtrsim 1$ исчезают инвариантные кривые с числом вращения больше «золотого сечения» (точнее, они превращаются в неустойчивые кантор-торы нулевой меры). Размер островков устойчивости уменьшается с ростом V_0. При этом происходят бифуркации деления островков, сопровождающиеся превращением эллиптической точки в гиперболическую и рождением новых эллиптических точек.

Поскольку отображение (1.9) определяет расположение атомов в цепочке, то тем самым определяются возможные структуры. В частности, бифуркациям решений соответствуют структурные бифуркации.

Остановимся на некоторых простейших конфигурациях цепочки.

Нелинейный резонанс в структурах. В основе анализа условий равновесия (1.2) лежит отображение (1.9). При анализе динамических систем мы старались перейти от дифференциальных уравнений движения к уравнениям отображения. Сейчас проделаем обратный путь и перейдем от уравнений (1.9) к эквивалентной динамической системе, порождающей их. Это уже было сделано в § 7 гл. 1. Согласно (1.7.12), рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I, u) = \tfrac{1}{2} I^2 + V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a_0} u\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{a} - n\right). \tag{1.11}$$

Роль времени играет переменная x, а канонической парой переменных являются (I, u). Уравнения движения

$$\frac{1}{a}\frac{dI}{dx} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, \qquad \frac{1}{a}\frac{du}{dx} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \tag{1.12}$$

порождают в точности отображение (1.9), если принять, как обычно,

$$I_k = I(x = ka - 0), \qquad u_k = u(x = ka - 0). \tag{1.13}$$

Формулы (1.12) показывают другой путь решения задачи о равновесных структурах. Необходимо рассмотреть динамическую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}$ (1.11) и уравнениями движения (1.12), найти возможную траекторию системы и определить ее фазовые координаты (I, u) в «моменты времени» $x = ka$ $(k = 1, \ldots, N)$. Это и будут смещения атомов u в узлах цепочки, фиксирующие ее структуру.

Представим сумму δ-функций в (1.11) в виде разложения в ряд Фурье

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2} I^2 + V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a_0} u\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x/a}. \tag{1.14}$$

Отсюда видно, во-первых, что частота свободного движения для эквивалентной динамической системы равна, согласно (1.12):

$$\omega(I) = \frac{d\mathcal{H}_0}{dI} = I; \qquad \mathcal{H}_0 \equiv \tfrac{1}{2} I^2. \tag{1.15}$$

Во-вторых, условие резонанса имеет вид

$$2\pi a_0 \frac{du}{dx} = \frac{2\pi}{a} m,$$

где m — целое число. Поэтому его можно переписать с точностью до возмущения и с помощью (1.15) в виде

$$\omega(I) = a_0 m \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{1.16}$$

или эквивалентным образом:

$$I_m = a_0 m \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) определяет резонансные значения переменной, играющей роль действия. Поскольку a_0 — период возмущения и a — период невозмущенной цепочки, то условие (1.17) имеет очевидный физический смысл: частота решения должна быть кратна частоте вынуждающей силы.

Теперь мы можем следовать точно основным идеям рассмотрения нелинейного резонанса в § 1 гл. 3. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta I &= I - I_m = I - m a_0, \\ \psi &= \frac{2\pi}{a_0}\left(u - \frac{a_0}{a} mx\right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

и рассмотрим динамику системы в окрестности m-го резонанса. Это означает, что в выражении (1.14) следует оставить только член, содержащий фазу ψ, и пренебречь всеми остальными. Тогда эффективный гамильтониан нелинейного резонанса имеет вид

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{a_0}(\Delta I)^2 + 2\cdot\frac{2\pi}{a_0} V_0 \cos\psi, \tag{1.19}$$

где использованы обозначения (1.18).

Условие применимости приближения изолированного нелинейного резонанса имеет вид

$$K = \left(\frac{2\pi}{a_0}\right)^2 V_0 \ll 1. \tag{1.20}$$

Переменные ΔI и ψ — канонически сопряженные. Поэтому они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Delta I &= -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \psi} = \frac{4\pi}{a_0} V_0 \sin\psi, \\ \frac{d}{dx}\psi &= \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \Delta I} = \frac{2\pi}{a_0}\Delta I, \end{aligned}$$

которые интегрируются и приводят к уже знакомым нам выражениям

$$\begin{aligned} u_n &= m a_0 n + \tfrac{1}{2} a_0 + \frac{a_0}{\pi}\begin{cases} \arcsin\left[\varkappa\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{K}\,n;\ \varkappa\right)\right], & \varkappa \leqslant 1, \\ \mathrm{am}\left(\varkappa\sqrt{K}\,n;\ 1/\varkappa\right), & \varkappa \geqslant 1, \end{cases} \\ I_n &= m a_0 + 2\varkappa\sqrt{V_0}\begin{cases} \mathrm{cn}\left(\sqrt{K}\,n;\ \varkappa\right), & \varkappa \leqslant 1, \\ \mathrm{dn}\left(\varkappa\sqrt{K}\,n;\ 1/\varkappa\right), & \varkappa \geqslant 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.21}$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{E + 2\pi V_0/a_0}{4\pi V_0/a_0} \tag{1.22}$$

и E — произвольная постоянная, определяющая значение интеграла энергии на траектории.

Значению $\varkappa = 1$ соответствует сепаратриса нелинейного резонанса. Таким образом, формулы (1.21) и (1.22) определяют два типа решений — внутри сепаратрисы ($\varkappa < 1$) и вне сепаратрисы ($\varkappa > 1$).

Несоразмерные структуры. Дальнейшая судьба этих решений определяется условиями задачи. В задачах динамики жидкости это — условия накачки. В физике твердого тела это — условие минимума свободной энергии

$$F = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2}(I_n - a)^2 + V(u_n) \right]. \tag{1.23}$$

Остановимся на последнем случае. Если подставить решения (1.21) в (1.23), то выражение для F будет функцией только одного параметра $\varkappa$. Это и есть тот параметр, по которому следует минимизировать $F = F(\varkappa)$. Выполнение соответствующей операции [5] приводит в области $\varkappa < 1$ к решению $\varkappa = 0$, которое означает, что

$$u_{n+1} - u_n = \text{const} = ma_0 \qquad (\varkappa < 1). \tag{1.24}$$

Условие (1.24) показывает, что отобранное решение соответствует расстоянию ma_0 между атомами цепочки, т. е. кратно периоду поля $V(u)$.

При $\varkappa \geqslant 1$ минимизация выражения (1.23) приводит к уравнению

$$ma_0 - a = \frac{4}{\pi} \sqrt{V_0}\, \varkappa_0 E\left(\frac{1}{\varkappa_0}\right), \tag{1.25}$$

которое определяет величину $\varkappa_0$ такую, что

$$\min F(\varkappa) = F_k(\varkappa_0).$$

Основной вопрос заключается в том, имеет ли уравнение (1.25) решение $\varkappa_0$ или нет. Простой анализ правой части показывает, что решение существует, если выполнено неравенство

$$ma_0 - a \geqslant \frac{4}{\pi} \sqrt{V_0} \equiv \delta_c. \tag{1.26}$$

Тогда значению $\varkappa_0 \geqslant 1$ соответствуют решения, приведенные в (1.21) и взятые при $\varkappa = \varkappa_0$. Они описывают периодические модуляции положений атомов в цепочке. Период модуляции равен

$$\lambda = \frac{a_0}{\pi \varkappa_0 \sqrt{V_0}} K\left(\frac{1}{\varkappa_0}\right), \tag{1.27}$$

и $\lambda \to \infty$ при $\varkappa_0 \to 1$.

Удобно представить результат вычислений графически, изобразив зависимость величины $k = 2\pi/\lambda$ от

$$\delta = ma_0 - a$$

(рис. 16.1). Поскольку значения a лежат вблизи ma_0, то δ можно назвать расстройкой периода. Величина k называется параметром порядка. Если $\delta < \delta_c$, то решения с $\varkappa \geqslant 1$ невозможны, и реализуется только решение (1.24). У него длина волны модуляции равна бесконечности, т. е. $k = 0$. Однако при $\delta > \delta_c$ возникает новая возможность. Появляется нетривиальное решение с $k \neq 0$ и амплитудой модуляции $\sim \sqrt{V_0}$. Бифуркационный переход на рис. 16.1 аналогичен также структурному фазовому переходу. Поясним его подробнее.

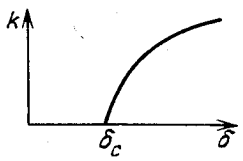


Рис. 16.1. Зависимость параметра порядка от расстройки периодов

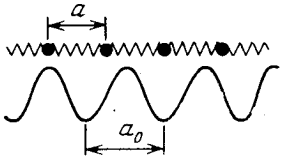


Рис. 16.2. Конкурирующие взаимодействия в атомной цепочке

В исходной цепочке атомов имеются два конкурирующих взаимодействия (рис. 16.2). Первое из них обусловлено упругим взаимодействием ближайших атомов. Оно стремится установить в системе период a. Второе взаимодействие

обусловлено внешним полем $V(u)$. Оно стремится расположить атомы в точках минимума потенциала, т. е. с периодом a_0 или кратным ему. Результирующее равновесное состояние цепочки получается как компромисс между конкурирующими факторами. Этот компромисс, однако, достигается лишь выше некоторого порога, т. е. при условии (1.26). В результате в цепочке появляется модулированная структура с периодом, несоразмерным периоду внешнего поля a_0.

Появление несоразмерных периодов и частот присуще также состояниям, которые предшествуют турбулентности. С ростом V_0 амплитуда модуляции несоразмерных структур возрастает. При больших значениях V_0 неупорядоченная, турбулентная структура становится значительно более вероятной, чем регулярная. Такие структуры называются также аморфными. Мы обсудим их подробнее в следующем параграфе.

§ 2. Спиновые цепочки

Гамильтониан (1.3) описывает достаточно типичные упругие цепочки. Другим широко распространенным классом систем являются цепочки взаимодействующих спинов. Их гамильтониан может быть в простейшем случае представлен в форме

$$H = -J\sum_n \sigma_n\sigma_{n+1} + G\sum_n f(\sigma_n), \tag{2.1}$$

где первый член описывает взаимодействие соседних спинов σ; $f(\sigma)$ — потенциал внешнего поля, в котором находятся спины (оно называется также полем анизотропии); J и G — константы взаимодействия.

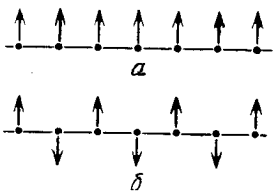


Рис. 16.3. Примеры различных конфигураций спиновых цепочек: *а* — ферромагнитный порядок, *б* — антиферромагнитный порядок

Условия равновесия. В отличие от упругих цепочек, в спиновых цепочках расстояние между спинами фиксировано. Взаимодействие приводит к изменению взаимной ориентации спинов. Будем считать, что

$$\sigma_i \boldsymbol{z} = \cos\vartheta_i, \tag{2.2}$$

где ϑ_i — угол, образованный направлением i-го спина с фиксированной осью, ортогональной к цепочке, а $\boldsymbol{z}$ — орт этой оси. Если, например, $G = 0$, то равновесными являются ферромагнитная ($J > 0$) или антиферромагнитная ($J < 0$) конфигурации расположения спинов (рис. 16.3). Добавление поля анизотропии может сделать более выгодными конфигурации иного типа. Примем для $f(\vartheta)$ типичное выражение

$$f(\vartheta) = \cos^2(\vartheta - \gamma), \tag{2.3}$$

где γ — некоторый угол, фиксирующий положение оси анизотропии относительно цепочки.

Используя выражения (2.2) и (2.3), перепишем гамильтониан (2.1) в виде

$$H = -J\sum_n [\cos(\vartheta_{n+1} - \vartheta_n) + \beta\cos^2(\vartheta_n - \gamma)], \tag{2.4}$$

где β — безразмерный параметр внешнего поля. Условия равновесия спинов цепочки должны иметь тот же вид, что и в упругой цепочке:

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta_n} = 0 \tag{2.5}$$

для всех n.

Обозначим

$$s_n = \sin(\vartheta_n - \vartheta_{n-1}). \tag{2.6}$$

Тогда система уравнений равновесия (2.5) может быть записана в виде следующего отображения:

$$s_{n+1} = s_n + \beta \sin 2(\vartheta_n - \gamma),$$
$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \omega_\nu(s_{n+1}), \tag{2.7}$$

где

$$\omega_\nu(s_n) = \nu\pi + (-1)^\nu \arcsin s_n \qquad (\nu = 0, 1), \tag{2.8}$$

и индекс ν определяет выбор одной из возможных ветвей отображения (2.7). Из (2.7) следует, что отображение (2.7) сохраняет меру при любом ν.

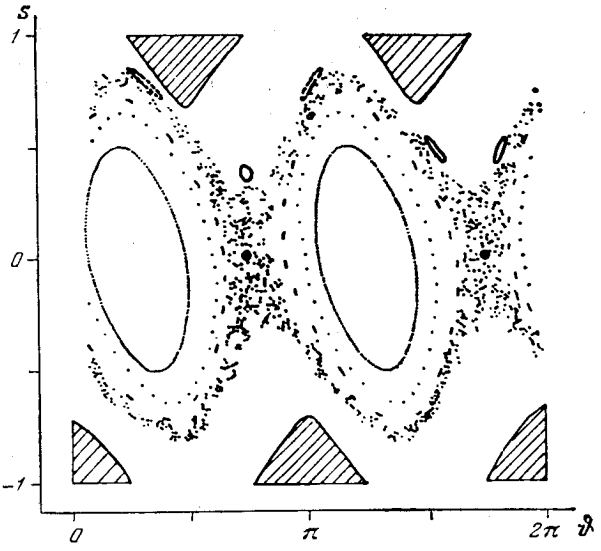


Рис. 16.4. Фазовый портрет при антиферромагнитном взаимодействии соседних спинов ($J < 0$): $\beta = 0{,}3$, $\gamma = \pi/4$. Заштрихованы запрещенные области, куда траектория не попадает; жирные точки — неподвижные гиперболические точки

Эквивалентная динамическая система. Рассмотрим (2.7) для каждой из ветвей в отдельности. Составим, как и в предыдущем разделе, гамильтониан эквивалентной динамической системы:

$$\mathcal{H} = H_0(s) + \beta \cos^2(\vartheta - \gamma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n);$$
$$H_0(s) = \nu\pi s + (-1)^\nu (s \arcsin s + \sqrt{1 - s^2}), \tag{2.9}$$

в которой безразмерная переменная x вдоль цепочки играет роль времени. Гамильтониан $\mathcal{H}$ приводит к следующим уравнениям движения:

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = \beta \sin[2(\vartheta - \gamma)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n),$$
$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \omega_\nu(s). \tag{2.10}$$

Интегрированием в окрестности δ-функции можно получить из уравнений (2.10) формулы для отображения, которые совпадают с (2.7).

Система (2.10) описывает нелинейный маятник с частотой ω_ν, возмущаемый толчками с периодом единица. Свойства устойчивости решений системы определяются характеристическими множителями $\lambda_{1,2}$ для отображения (2.7). Они удовлетворяют уравнению

$$\lambda_{1,2} = 1 + K \pm [(1 + K)^2 - 1]^{1/2},$$

где

$$K = \beta \sqrt{1 - s^2} \cos[2(\vartheta - \gamma)]. \tag{2.11}$$

Таким образом, динамика системы (2.10) определяется параметром K, и при достаточно больших K:

$$K > K_c \sim 1,$$

возникает хаос.

Хаотические структуры и ближний порядок в них. На рис. 16.4 приведен фазовый портрет системы (2.7) (ком. 3). На нем изображены точки нескольких траекторий, из которых одна является стохастической. Жирными

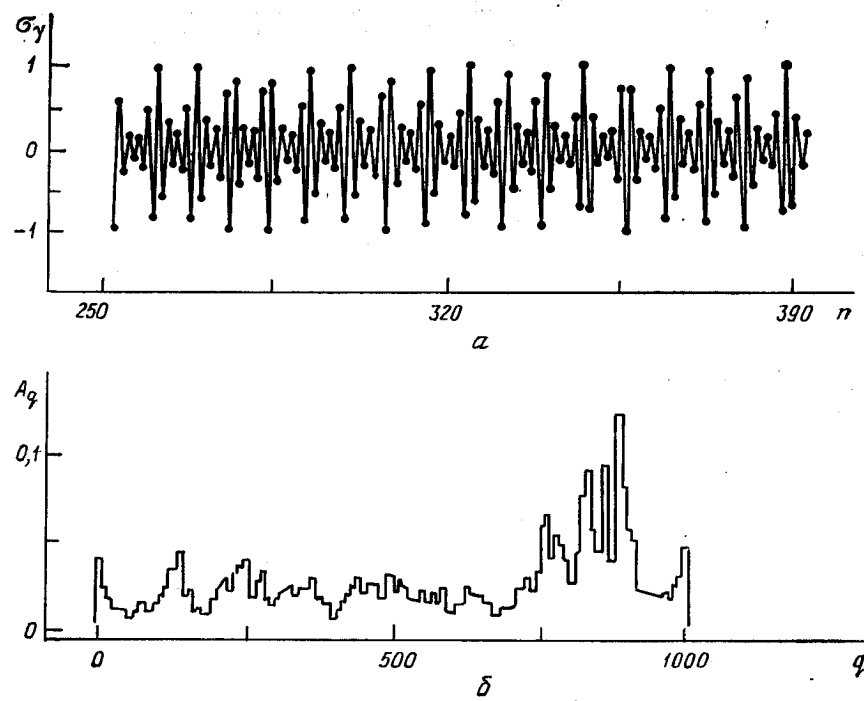


Рис. 16.5. Хаотическая структура антиферромагнитной цепочки ($J < 0$, $\beta = 0{,}3$, $\gamma = \pi/4$, $N = 2048$): *а* — проекции спинов на ось анизотропии, *б* — фурье-спектр угла ϑ_n

точками помечены гиперболические точки траектории, соответствующие минимуму свободной энергии F_0. Структура основного состояния — антиферромагнитная. Стохастическая траектория имеет наиболее близкое к F_0 значение F. Это связано с тем, что она проводит наибольшее «время» по сравнению с другими (периодическими) траекториями вблизи гиперболических точек.

Далее для исследования хаотических структур спиновой цепочки удобно ввести величину

$$\sigma_\gamma = \cos(\vartheta - \gamma),$$

определяющую проекцию спина на ось анизотропии. Для стохастической структуры зависимость σ_γ от n приведена на рис. 16.5*а*. Спектральные свойства этой структуры можно описывать фурье-образом фазы:

$$\vartheta_q = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \vartheta_n \exp\left(-2\pi i q \frac{n}{N}\right); \qquad q \in (-\tfrac{1}{2}N, \tfrac{1}{2}N).$$

Величины $A_q = |\vartheta_q|$ для той же стохастической траектории приведены на рис. 16.5*б*. Максимум вблизи значения $q = N/2$ указывает на образование антиферромагнитного ближнего порядка внутри аморфной (хаотической)

структуры. Действительно, значению $q = N/2$ соответствует период 2, как и должно быть в антиферромагнитной структуре (см. рис. 16.3).

Возникновение аморфной структуры при достаточно больших значениях β происходит и в случае взаимодействия спинов ферромагнитного типа ($J > 0$). Соответствующие данные численного анализа приведены на рис. 16.6. Из рис. 16.6*б* видно, что аморфная структура представляет собой неупорядоченную последовательность солитонов типа блоховских доменных стенок. Спектр системы (рис. 16.6*в*) имеет максимум вблизи периода 8. Это соответствует структурам, в которых направление спина вдоль оси анизотропии ($\gamma = \pi/4$) является выделенным.

Таким образом, несмотря на существование аморфной структуры, в цепочке сохраняется ближний порядок при не очень больших надкритичностях параметра β. Он показывает, что существуют определенного типа

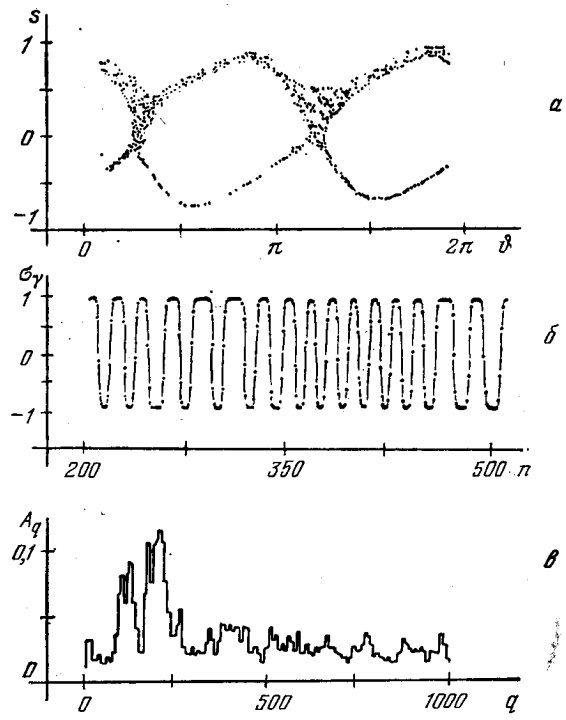


Рис. 16.6. Хаотическая структура ферромагнитной цепочки ($J > 0$, $\beta = 0{,}3$; $\gamma = \pi/4$, $N = 2048$): *а* — точки траектории на фазовой плоскости, *б* — проекции спинов на ось анизотропии, *в* — фурье-спектр угла ϑ_n

структуры, которые находятся из соотношения между конкурирующими полями.

Мы уже обращали внимание на то, что равновесной структуре цепочки спинов (т. е. минимуму F) соответствуют гиперболические точки отображения (2.7) (см. рис. 16.4). Они являются неустойчивыми точками отображения. Парадоксальность того обстоятельства, что энергетически устойчивому состоянию цепочки соответствует неустойчивая неподвижная точка отображения эквивалентной динамической системы, нуждается в более подробном обсуждении.

Пусть сначала константы взаимодействия β и γ таковы, что стохастические траектории либо отсутствуют, либо могут появиться лишь в экспоненциально малых областях фазового пространства отображения. Поставим вопрос о влиянии малого постоянного возмущения на состояние системы, которому соответствуют координаты гиперболической точки. Под влиянием изменения параметров траектория отображения отойдет от гиперболической точки. Возмущенная траектория для нелинейного осциллятора (2.9) отойдет от гиперболической точки и будет периодически приближаться и отдаляться

от положения равновесия. Поскольку возмущение мало, то период траекторий будет очень велик. Поэтому возмущенной траектории соответствует очень малое отклонение энергии от ее равновесного значения в гиперболической точке и очень большой период модуляции структуры. В этом смысле можно сказать, что малым возмущениям системы относительно положения равновесия структуры соответствуют малые возмущения структуры.

Положение полностью изменяется, если значения параметров β, γ таковы, что возникает заметная область фазового пространства, в которой траектории отображения являются стохастическими. Прежде всего разрушению подвергается окрестность гиперболической точки. Даже очень малые возмущения траектории вблизи гиперболической точки приводят к попаданию на стохастическую траекторию с вероятностью, близкой к единице. Поэтому основное состояние цепочки становится реально неустойчивым. Более того, энергия хаотической структуры, соответствующей стохастической траектории отображения, отличается от энергии основного состояния на конечную величину ΔH. Эта величина не зависит от возмущения, так как сумма большого числа случайных слагаемых в H самоусредняется. Существуют, однако, два масштаба длины в процессе самоусреднения H. Малый масштаб $l_c \sim a$, на котором хаотизируется фаза отображения ϑ, и больший масштаб l_D, на котором происходит установление равновесного распределения взаимных ориентаций соседних спинов. Масштаб l_D равен длине диффузии переменной s, играющей в данном случае роль действия для системы.

§ 3. Возбуждение в молекулярных цепочках

В этом параграфе мы сделаем важное замечание, касающееся увеличения числа степеней свободы на одном узле в цепочках. Обычно это имеет место в так называемых молекулярных цепочках. Молекулярные группы, расположенные на узле, могут участвовать в разных типах движения. Связь между этими различными степенями свободы может порождать особые изменения структуры в цепочке, связанные с ее коллективным возбуждением по какой-либо из степеней свободы. В некотором смысле мы уже встречались с близкой ситуацией в § 2 гл. 15. Возбужденное состояние атомов связывалось с резонансными фотонами электромагнитного поля. Это приводило к пленению фотонов, создавая тем самым когерентную динамическую сверхструктуру в системе с длиной волны, равной длине волны фотонов. Характерной моделью такого типа являются коллективные возбуждения в α-спиральных белковых молекулах (ком. 4).

Описание модели. В общих чертах структура белковой молекулы образуется из так называемых пептидных групп, соединенных тремя цепочками водородных связей. Среди различных пространственных конфигураций белковой цепочки существует спиральная структура, называемая α-спиралью. Шаг спирали равен 5,4 Å, радиус спирали — 2,8 Å, а среднее число пептидных групп, приходящееся на один виток спирали, равно 3,6.

Вопрос, стимулировавший появление описываемой ниже модели, был связан с определением механизма переноса вдоль белковых молекул довольно большой энергии ($\sim$0,43 эВ). Эта энергия почти в 20 раз превышает тепловую энергию в нормальных условиях. Вместе с тем ее недостаточно для возбуждения электронных состояний. Вибрационные колебания в пептидных группах (они называются Амид I) имеют энергию $\sim$0,21 эВ, и поэтому они могли бы играть роль основного вида возбуждения, с помощью которого происходит передача энергии вдоль молекулы. Однако эти колебания в отдельной пептидной группе имеют очень малое время жизни ($\sim 10^{-12}$ с). В работах Давыдова (см. [9]) было предложено рассматривать коллективное возбуждение вибрационных колебаний. Их связь друг с другом в различных ячейках цепочки осуществляется через смещения пептидных групп. В результате может возникнуть коллективное возбуждение, распространяющееся вдоль

цепочки и переносящее необходимую большую энергию. Процесс распространения возбуждения деформирует цепочку, создавая в ней определенную сверхструктуру локальных равновесных положений центров пептидных групп. Фактически существование двух различных степеней свободы в каждом узле цепочки (вибрационные колебания и смещения вдоль цепочки) создает возможность появления новых структурных состояний цепочки.

Коллективные возбуждения. Приведем элементарный вывод уравнений движения для цепочки, обладающей описанными выше свойствами. Пусть φ_n — комплексная амплитуда вероятности, а $|\varphi_n|^2$ — плотность вероятности возбуждения молекулярной (пептидной) группы с номером n. Для нее принята нормировка

$$\sum_n |\varphi_n|^2 = 1. \tag{3.1}$$

Обозначим через u_n смещение n-й группы, а через p_n — импульс, канонически сопряженный смещению u_n.

Связи между молекулярными группами обладают упругими свойствами. Поэтому при не очень больших смещениях энергию деформации молекулярной цепочки можно записать в простом виде, учитывающем только взаимодействие ближайших соседей:

$$W = {}^1/_2 \sum_n \left[\frac{1}{M} p_n^2 + \alpha (u_n - u_{n-1})^2 \right], \tag{3.2}$$

где M — масса молекулярной группы и α — продольная упругость цепочки.

Введем еще две константы, определяющие взаимодействия внутри цепочки. Пусть χ — константа связи между процессами возбуждения одной молекулярной группы и ее смещением, а J — энергия резонансного взаимодействия между соседними группами. За счет этого последнего взаимодействия может осуществляться прямой перескок возбуждения вдоль цепочки.

Теперь можно записать гамильтониан цепочки в следующей простейшей форме [9]:

$$H = \sum_n \{ |\varphi_n|^2 [E_0 + W + {}^1/_2 \chi (u_n - u_{n-1})^2] - J \varphi_n^* (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}), \tag{3.3}$$

где E_0 — энергия возбуждения молекулярной группы. Переменные φ_n и φ_n^* удовлетворяют гамильтоновским уравнениям движения:

$$i\hbar \dot{\varphi}_n = \frac{\partial H}{\partial \varphi_n^*}, \qquad i\hbar \dot{\varphi}_n^* = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_n},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Поэтому гамильтониан (3.3) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} &i\hbar \dot{\varphi}_n = [E_0 + W - {}^1/_2 \chi (u_{n+1} - u_{n-1})] \varphi_n - J (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}), \\ &M \ddot{u}_n - \alpha (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = {}^1/_2 \chi (|\varphi_{n+1}|^2 - |\varphi_{n-1}|^2), \\ &p_n = M \dot{u}_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

При достаточно плавных изменениях величин φ_n и u_n вдоль цепочки можно перейти от уравнений (3.4) к дифференциальным уравнениям. Для этого, очевидно, надо ввести координату z вдоль цепочки и считать малой величину $a\partial/\partial z$, где a — расстояние между группами в цепочке. Положим

$$\varphi_{n \pm 1}(t) = \exp \{ i [k (z \pm a) - Et/\hbar] \} \cdot \left\{ 1 \pm a \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \ldots \right\} \Phi (z, t),$$

$$u_{n \pm 1} = \left\{ 1 \pm a \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \ldots \right\} u (z, t).$$

Здесь возникли две новые константы задачи: энергия возбуждения E и его импульс k. Их появление обусловлено инвариантностью гамильтониана (3.3)

относительно преобразования $u_n \to u_n \exp(i\psi)$, смещения времени $t \to t+\tau$ и трансляции $n \to n+m$. Это приводит к законам сохранения числа возбуждений, энергии E и импульса k. Первый из них выражается в условии нормировки амплитуд φ_n (3.1). Полученная система уравнений в частных производных заменяет систему (3.4):

$$\begin{aligned} &\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}+2aJ\sin ka\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\\ &\left[E-E_0-W+2J\cos ka\left(1+\frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\chi\rho\right]\Phi=0,\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\rho+\frac{\chi}{\alpha}c^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\rho=-a\frac{\partial u}{\partial z}$$

и c—скорость звука в цепочке:

$$c=a\sqrt{\alpha/M}.$$

Будем искать решение системы (3.5) в виде стационарной волны

$$\Phi=\Phi(\xi), \qquad \rho=\rho(\xi); \qquad \xi=z-z_0-Vt, \tag{3.6}$$

распространяющейся вдоль z со скоростью V. Подстановка (3.6) в (3.5) приводит к окончательным уравнениям:

$$\begin{aligned} &(\hbar V-2aJ\sin ka)\frac{d\Phi}{d\xi}=0,\\ &\left[E-E_0-W+2J\cos ka\left(1+\frac{1}{2}a^2\frac{d^2}{d\xi^2}\right)+\chi\rho\right]\Phi=0,\\ &\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\left(1-\frac{V^2}{V_0^2}\right)\rho-\frac{\chi}{\alpha}\Phi^2\right]=0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Условие нормировки (3.1) требует конечности Φ при $\xi \to \infty$. Поэтому из первого уравнения (3.7) следует связь между скоростью волны V и импульсом возбуждения k:

$$\sin ka=\hbar V/(2aJ). \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что возбуждение не может распространяться вдоль цепочки со сколь угодно большой скоростью. Существует предельная скорость распространения V_g резонансного переноса вибрационного возбуждения от одной молекулярной группы к другой:

$$V_g=\frac{2}{\hbar}aJ. \tag{3.9}$$

Она определяется только константой J резонансного взаимодействия между соседними группами.

Соотношение (3.8) показывает также, что длинноволновому приближению $ka \ll 1$ соответствует адиабатическое приближение медленных движений вдоль цепочки $V \ll V_g$. В этом случае

$$k=\hbar V/2a^2J=V/aV_g. \tag{3.10}$$

Третье уравнение в (3.7) приводит к соотношению между ρ и Φ:

$$\rho=\frac{\chi\Phi^2}{\alpha(1-V^2/c^2)}. \tag{3.11}$$

Определение упругой энергии (3.2) также можно переписать в континуальной форме:

$$W=\frac{MV_0^2}{2a^3}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)\int d\xi\,\rho^2(\xi). \tag{3.12}$$

Теперь благодаря соотношению (3.11) у нас остается только одно уравнение относительно Ф. Для этого достаточно во втором уравнении (3.7) и в (3.12) выразить ρ через Ф. При скоростях V, меньших скорости звука c, можно получить решение в виде солитона

$$\Phi(\xi) = (1/2 aQ)^{1/2} \operatorname{sch}(Q\xi), \tag{3.13}$$

где

$$Q = \frac{ma\chi^2}{2\alpha\hbar^2(1-V^2/c^2)}; \quad \frac{\hbar^2}{2m} \equiv a^2 J. \tag{3.14}$$

Решение (3.13) называют также солитоном Давыдова. С помощью формулы (3.11) сразу определяются смещения в цепочке:

$$\rho(\xi) = \frac{a\chi Q}{2\alpha(1-V^2/c^2)} \operatorname{sch}^2(Q\xi). \tag{3.15}$$

Солитонное решение возникает при определенном значении энергии E:

$$E - E_0 - W + 2J\cos ka = -\frac{\hbar^2}{2m} Q^2.$$

При $V \ll c$ эта энергия может быть представлена в стандартной форме

$$E(V) = E(0) + 1/2 M_s V^2 \qquad (V \ll c), \tag{3.16}$$

определяющей эффективную массу солитона

$$M_s = m\left(1 + \frac{a^2\chi^4}{6\alpha^3\hbar^2}\right) = \frac{\hbar^2}{2a^2 J}\left(1 + \frac{a^2\chi^4}{6\alpha^3\hbar^2}\right).$$

В белковых молекулах упругая константа продольных деформаций α мала из-за слабости водородных связей. Это обусловливает довольно большую массу солитона M_s. Поэтому даже при малых скоростях движения солитон может переносить большую энергию.

Общая картина структурного изменения цепочки выглядит следующим образом. Возбуждение распространяется вдоль цепочки со скоростью $V < c$, оказываясь как бы плененным молекулярными группами. Его распространение сопровождается упругой деформацией цепочки. Волна деформации может быть также периодической. Устойчивость такой картины определяется разными факторами. Один из них заключается в том, что движение солитона может происходить со скоростью, очень малой по отношению к скорости звука. Поэтому солитон не может излучить фононы и затухнуть, преобразуя свою энергию в тепловую энергию. Еще одна очень важная причина, способствующая стабильности солитона, связана с существованием энергетической щели, которая согласно (3.16) есть просто $E(0)$:

$$E(0) = E_0 - \frac{\hbar^2}{ma^2} - \frac{ma^2\chi^4}{24\alpha^2\hbar^2}.$$

Это означает, что для возбуждения солитона надо создать начальную энергию больше, чем $E(0)$. Но это же означает, что для разрушения солитона необходимо разорвать связанное состояние упругих деформаций цепочки с резонансным взаимодействием между молекулярными группами. Для подобного «разрушения» требуется та же энергия $E(0)$.

Таким образом, мы видим, что увеличение числа степеней свободы в цепочке может привести к новым структурным возможностям, обусловленным спецификой связи между этими степенями свободы.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 16

1. Следует специально оговорить некоторую условность употребления понятия турбулентности в одномерном случае. Реальной одномерной турбулентности не бывает. Однако некоторые частные вопросы могут быть рассмотрены в одномерных

моделях с эвристической целью. Мы уже встречались с подобным положением, например при рассмотрении уравнения Бюргерса. В § 2 гл. 11 мы также отмечали существование одномерных структур в виде конвективных валов в задачах конвекции.

2. Применение методов нелинейной динамики к исследованию равновесных структур одномерных цепочек было начато в работах [1, 2] и продолжено далее в [3—7]. Излагаемые в этой главе результаты получены в [5—7].

3. Числовые данные здесь и далее приводятся по работе [7].

4. Теория излагаемого ниже явления принадлежит А. С. Давыдову [8]. Она очень подробно развита (см. монографию [9]) и интересна не только своими приложениями к биологически важным молекулам. Как мы увидим ниже, уравнения движения в молекулярных цепочках представляют некоторую общую картину образования связанных нелинейных состояний, в которых возможность возникновения коллективного возбуждения (например, в виде солитона) играет определяющую роль.

Глава 17

ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КЕПЛЕРА

Задача Кеплера является одной из классических задач современной физики. Существует много аспектов этой задачи, объединяющих совершенно различные физические объекты. Это связано в значительной степени с тем, что кулоновский закон взаимодействия присущ столь разным по масштабу системам, как атом водорода и гравитирующие массы Вселенной. В различных реальных физических задачах, как правило, имеется возмущение, которое накладывается на основное движение в кулоновском поле. В этой главе мы рассмотрим несколько таких примеров, которые связаны как с воздействием лазерного поля на атом водорода, так и с некоторыми астрофизическими проблемами.

§ 1. Нелинейная динамика в кулоновском поле

Этот параграф является вспомогательным. Его цель — рассмотреть некоторые свойства движения частицы в кулоновском поле как нелинейной динамической системы.

Параметры движения. Гамильтониан движения в сферических координатах (r, ϑ, φ) имеет вид [1]:

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\varphi^2\right) - \frac{G}{r}, \tag{1.1}$$

где

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} \tag{1.2}$$

и константа взаимодействия с полем G принимает положительные значения в случае притяжения частицы и отрицательные значения в случае отталкивания частицы.

Отсутствие явной зависимости гамильтониана (1.1) от ϑ и от φ приводит к существованию двух интегралов движения орбитального момента

$$L = \left(p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}p_\varphi^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

и его проекции на ось z, перпендикулярной плоскости орбиты частицы:

$$M = p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}. \tag{1.4}$$

Эти два инварианта совместно с полной энергией

$$E_0 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}L^2\right) - \frac{G}{r} \tag{1.5}$$

позволяют точно проинтегрировать задачу Кеплера (1.1) в квадратурах.

То же самое обстоятельство сводит уравнения движения частицы к уравнению для одной степени свободы:

$$m\ddot{r} = -\frac{G}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}, \tag{1.6}$$

которое легко интегрируется и позволяет записать решение в следующем параметрическом виде (например, в случае эллиптических орбит при $E < 0$):

$$r = a(1 - e_0 \cos \xi); \quad \omega t = \xi - e_0 \sin \xi. \tag{1.7}$$

Здесь введены три новые константы движения: большая полуось эллиптической орбиты

$$a = \frac{|G|}{2|E_0|} = \frac{L^2}{m|G|(1-e_0^2)}, \tag{1.8}$$

эксцентриситет орбиты

$$e_0 = \left(1 - \frac{2|E_0|L^2}{mG^2}\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

и частота движения по орбите

$$\omega = \left(\frac{|G|}{ma^3}\right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Ближайшая к силовому центру точка — перигелий — имеет согласно (1.7) координату

$$r_{\min} = a(1 - e_0), \tag{1.11}$$

а наиболее удаленная — афелий — имеет координату

$$r_{\max} = a(1 + e_0).$$

При $E_0 > 0$ частица движется по гиперболе, огибающей силовой центр ($e_0 > 1$). Если $E = 0$, то движение происходит по параболе ($e_0 = 1$).

Уже из решения (1.7) видно, что динамика в кулоновском поле является нелинейной. Для получения более полной картины перейдем к уже привычному для нас рассмотрению, введя переменные действие — угол (ком. 1).

Переменные действие — угол. Опуская соответствующие выкладки, приведем сразу конечный результат для действий, определяемых по формуле

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j \, dq_j \quad (j = r, \vartheta, \varphi).$$

Результат интегрирования равен:

$$I_\varphi = p_\varphi = M, \quad I_\vartheta = L - M, \quad I_r = -L + \left(\frac{G^2}{2|E_0|}\right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

Удобно совершить каноническое преобразование и ввести новые действия:

$$\begin{aligned} I &\equiv I_3 = I_r + I_\vartheta + I_\varphi = (mG^2/2|E_0|)^{1/2}, \\ I_2 &= I_\vartheta + I_\varphi = L, \quad I_1 = I_\varphi = M. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Им соответствуют три фазы: $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \equiv \psi$. Гамильтониан (1.1) теперь принимает вид

$$H_0 = -mG^2/2I^2, \tag{1.14}$$

явно указывающий на двойное вырождение, так как отсутствует зависимость от двух действий — I_1 и I_2. По этой причине динамика частицы определяется лишь одной частотой

$$\omega \equiv \omega_3 = \frac{dH}{dI} = \frac{mG^2}{I^3}, \tag{1.15}$$

которая совпадает с (1.10). В этом можно убедиться, используя выражение (1.13) для I и (1.8) для a.

Еще одно представление для ω может быть полезно, если обратиться к (1.14) и положить $H_0 = E_0$:

$$\omega = \sqrt{(2|E_0|)^3/mG^2}. \tag{1.16}$$

То обстоятельство, что частота обращения ω зависит от действия, определяет нелинейный характер динамики частицы. Более полную информацию о движении можно получить, анализируя фурье-спектры координат частицы (ком. 2).

Спектральные свойства. Разложим координатные зависимости от времени в ряды Фурье. Кроме параметрической формы решения (1.7) воспользуемся также уравнением эллиптической орбиты

$$1 + e_0 \cos\chi = \frac{a}{r^2}(1 - e_0^2), \tag{1.17}$$

где χ — полярный угол в плоскости траектории. Отсюда и из (1.7) получаем

$$x = r\cos\chi = a(\cos\xi - e_0), \qquad y = r\sin\chi = a(1-e_0^2)^{1/2}\sin\xi \tag{1.18}$$

или для фурье-разложений этих координат

$$x = \sum_k x_k e^{-ik\omega t}, \qquad y = \sum_k y_k e^{-ik\omega t}. \tag{1.19}$$

Для фурье-компонент x_k и y_k имеем

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{i}{\omega k}\dot{x}_k = -\frac{i}{k\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, e^{ik\omega t}\dot{x} = \frac{2a}{k}J_k'(ke_0), \\ y_k &= \frac{i}{\omega k}\dot{y}_k = -\frac{i}{k\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, e^{ik\omega t}\dot{y} = \frac{2ia}{ke_0}(1-e_0^2)^{1/2}J_k(ke_0), \end{aligned} \tag{1.20}$$

где $J_k(ke_0)$ — функции Бесселя и штрих означает дифференцирование по аргументу.

Сильно вытянутым орбитам соответствуют значения эксцентриситета, близкие к единице, т. е.

$$1 - e_0 \ll 1. \tag{1.21}$$

Рассмотрим спектр (1.20) именно в этом случае, который в дальнейшем будет для нас важен. Будем также считать значения $k \gg 1$. Тогда имеет место асимптотика

$$J_k(e_0 k) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}}(1-e_0^2)^{1/2}K_{1/3}[{}^1\!/_3 k(1-e_0^2)^{3/2}], \tag{1.22}$$

где $K_{1/3}$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Определим число

$$N = (1-e_0^2)^{-3/2}. \tag{1.23}$$

Если использовать соотношения (1.8) и (1.9), то выражение для N можно представить также в виде

$$N = \left(\frac{2|E_0|L^2}{mG^2}\right)^{-3/2} = \left(\frac{m|G|a}{L^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{L_{\max}}{L}\right)^3, \tag{1.24}$$

где введено максимально возможное значение орбитального момента

$$L_{\max} = (m|G|a)^{1/2} = \left(\frac{mG^2}{2|E_0|}\right)^{1/2} = I. \tag{1.25}$$

Смысл параметра N легко понять из разложений формулы (1.22). При $1 \ll k \ll N$ имеем

$$J_k(e_0 k) \sim \frac{A}{k^{1/3}}; \qquad A = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/6}. \tag{1.26}$$

При $k \gg N$

$$J_k(e_0 k) \sim \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} k^{-1/2} N^{1/6} \exp\left(-\frac{k}{3N}\right). \tag{1.27}$$

Таким образом, число N определяет эффективную границу спектра. При приближении к границе финитного движения $|E_0| \to 0$. При этом действие $I \to \infty$ и, согласно (1.23) и (1.24), число N также стремится к бесконечности. Это означает, что по мере приближения к параболической траектории из-за вытягивания орбиты ее спектр расширяется, стремясь к бесконечности, как

$$N = (I/L)^3.$$

Нам пригодятся также следующие формулы разложения в ряд Фурье:

$$\cos\chi = \sum_k B_k e^{-ik\omega t}, \qquad \frac{1}{r} = \sum_k C_k e^{-ik\omega t}. \tag{1.28}$$

Для коэффициентов B_k и C_k находим

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2i}{k}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2} (1 - e_0^2)^{1/2} J_k'(e_0 k), \\ C_k &= \frac{2}{a} J_k(e_0 k), \end{aligned} \tag{1.29}$$

т. е. спектр величин (1.28) также экспоненциально обрезается при $k > 3N$.

Полученные нами общие характеристики динамики частицы в задаче Кеплера демонстрируют многие черты, аналогичные нелинейным динамическим системам, совершающим финитное движение. Здесь также имеется нелинейная зависимость частоты от действия, причем нелинейность всегда отлична от нуля. Интересной особенностью задачи Кеплера является то, что независимо от степени близости к сепаратрисе, отделяющей финитное движение от инфинитного ($E_0 = 0$), безразмерный параметр нелинейности равен константе:

$$\left|\frac{I}{\omega}\frac{d\omega}{dI}\right| = 3.$$

Однако в задаче Кеплера число степеней свободы равно трем, и их роль в создании нелинейного движения различна. Хотя зависимость частоты от действия определяется только энергией частицы, число гармоник в спектре зависит от орбитального момента L. Это создает сильную связь между величинами L и E_0. По мере приближения к сепаратрисе $I \to \infty$ и, следовательно, стремится к бесконечности и $L_{\max}$ (см. формулу (1.25)). Отсюда согласно (1.24) происходит увеличение эффективного числа N гармоник в спектре. Таким образом, приближение к сепаратрисе приводит к нарастанию гармоник в спектре за счет вытягивания орбит, хотя нелинейность частоты при этом остается неизменной.

§ 2. Возбуждение и ионизация атома водорода

Воздействие когерентного лазерного поля на атом водорода представляет нам один из красивых примеров возмущенной задачи Кеплера, в которой нелинейная динамическая картина может принимать свои крайние формы. Несмотря на то, что система является квантовой, многие результаты могут быть получены из классического анализа.

Если поле возмущения является сильным, то, вообще говоря, возможны два механизма возбуждения или ионизации атома. Первый из них — многофотонный — представляет собой переход электрона сразу на очень высокий уровень или даже ионизацию атома. Это означает, что разность между верхним и нижним уровнями энергий существенно превышает энергию кванта воздействующего поля. Другой механизм возбуждения и ионизации подобен ускорению Ферми. Динамика электрона становится стохастической. Электрон совершает движение, близкое к броуновскому. Его энергия в среднем возрастает и достигает значения, превышающего порог ионизации (рис. 17.1). Существуют эксперименты, которые указывают на возможность реализации второго механизма, и мы остановимся на нем подробнее (ком. 3).

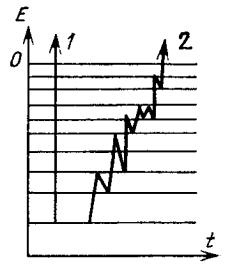


Рис. 17.1. Схематическое представление многофотонной (*1*) и стохастической (*2*) ионизации атома

В связи с описанным «многоступенчатым» механизмом возбуждения атома интересно отметить существование аналогичного обратного механизма рекомбинации атома. Он был предложен в работе [19]. Образование нейтральных атомов в ионизованном газе происходит вследствие процесса рекомбинации, который заключается в захвате электрона при тройном столкновении. Однако процесс попадания электрона сразу на очень глубокий уровень при одном столкновении маловероятен. Значительно более вероятным является постепенный переход электрона на нижние уровни в результате многих столкновений, сопровождающихся малой передачей энергии от электрона. В результате происходят диффузионные перескоки электрона по уровням, направленные в сторону перехода атома в основное состояние.

Основой классического анализа задачи является то обстоятельство, что электромагнитное поле воздействует на атом водорода, который уже «приготовлен» в высоковозбужденном состоянии, где хорошо работает квазиклассическое приближение. Гамильтониан электрона, находящегося в поле ядра и в поле линейно поляризованного света, может быть записан в атомных единицах следующим образом:

$$H = -\frac{1}{2I^2} + \varepsilon \cos \nu t \sin \bar{\vartheta} \,[x \sin \bar{\psi} + y \cos \bar{\psi}], \tag{2.1}$$

где $\bar{\vartheta}$ и $\bar{\psi}$ — эйлеровы углы, ε — амплитуда поля, ν — частота поля. Для x и y могут быть использованы разложения (1.19) и (1.20). Поэтому условие резонанса имеет вид

$$k\omega(I) = \nu, \tag{2.2}$$

где $\omega(I)$ определено формулой (1.15), в которой следует положить $mG^2 = 1$:

$$\omega(I) = \frac{dH_0}{dI} = \frac{1}{I^3}. \tag{2.3}$$

Далее нас будет интересовать область значений параметров $k \gg 1$ и $e_0 \ll 1$, т. е. высокие резонансы и слабый ангармонизм. Оставляя в (2.1) только один резонансный член, получаем в окрестности k-го резонанса

$$\begin{aligned} H_k &= -\frac{1}{2I^2} + \frac{A_1 \varepsilon \sin \bar{\vartheta}}{6\,|E|\,k^{7/3}} [-\cos \varphi_k \sin \bar{\psi} + 3k\,(2\,|E|\,L^2)^{1/2} \sin \varphi_k \cos \bar{\psi}], \\ A_1 &= \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} \cdot 3^{1/6} \pi}, \qquad \dot{\varphi}_k = k\omega(I) - \nu. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Отсюда находим уравнение для изменения действия

$$\dot{I} = -k \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_k} = \frac{A_1 \varepsilon \sin \bar{\vartheta}}{2\,|E|\,k^{4/3}} [\sin \bar{\psi} \sin \varphi_k + 3k\,(2\,|E|\,L^2)^{1/2} \cos \varphi_k \cos \bar{\psi}]$$

и оценку для ширины резонанса по частоте

$$\delta\omega \sim \text{const} \cdot (\varepsilon\omega^{7/3}/I^2\nu^{7/3})^{1/2}.$$

Из условия (2.2) следует, что расстояние между резонансами равно

$$\Delta\omega \sim \nu/k^2 = \omega^2/\nu.$$

Поэтому условие стохастичности движения электрона имеет вид

$$K = (\delta\omega/\Delta\omega)^2 \sim \text{const} \cdot \varepsilon I^3/\nu^{1/3} \geqslant 1. \tag{2.5}$$

В самом простом виде следует положить $\omega \sim \nu$, и тогда (2.5) превращается в неравенство для амплитуды поля

$$\varepsilon \geqslant \text{const}/I^4. \tag{2.6}$$

В атомных единицах I равно квантовому номеру уровня, а величина const $\sim 10^{-2}$. Это показывает, что реализация соотношения (2.6) является вполне возможной. Необычность стохастического механизма ионизации водорода связана с сильной нелинейностью динамики электрона. Она проявляется в том, что электронные уровни сильно неэквидистантны. Поскольку свет строго монохроматичен, то его резонансная настройка на какую-либо пару соседних уровней может вызвать только несколько ближайших к ним переходов. Вдали от этих уровней резонанс должен исчезать. Однако ангармонизм динамики электрона позволяет включить во взаимодействие также и другие резонансы, приводящие к случайному блужданию электрона по уровням.

На первый взгляд может показаться необычным то, что близкие черты подобной картины можно увидеть в некоторых астрофизических задачах.

§ 3. Диффузия эксцентриситета орбит в гравитационном поле планет

Появление искусственных спутников Земли привело к ряду открытий при измерении гравитационного поля Земли и Луны. Если бы Земля имела сферическую форму, а распределение плотности в ней было бы сферически-симметричным, то ее гравитационное поле также имело бы ту же симметрию и определялось простой формулой

$$V = -G/r. \tag{3.1}$$

В действительности поле Земли таким свойством не обладает и имеются малые отклонения от сферической симметрии. Они обусловлены разными причинами — неоднородностью распределения массы, волнами сжатия, геометрической формой Земли и др. В настоящее время измерения со спутников показывают, что земное гравитационное поле достаточно хорошо описывается выражением

$$V = -\frac{G}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 A_2 P(\cos\vartheta)\right], \tag{3.2}$$

где

$$P_2(\cos\vartheta) = {}^1/_2(3\cos\vartheta - 1)$$

— второй полином Лежандра и константа $A_2 = 1{,}08265 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, отклонение от сферичности порядка 1/300.

Масконы. Иначе обстоит дело, например, с гравитационным полем Луны. Неожиданно оказалось, что в Луне имеются большие области, в которых плотность превышает среднюю плотность. В результате создаются зоны сосредоточения крупных масс, названные областями концентрации масс или масконами. Открытие масконов произошло на видимой стороне Луны в 1968 г., и масса наиболее крупных из них имеет порядок 10^{21} г, т. е. $\sim 10^{-5}$ от массы Луны.

Масконы существуют и на других планетах, и их обнаружение приводит к тому, что гравитационное поле уже не может описываться ни формулой (3.1), ни формулой (3.2). Наиболее адекватным действительности становится поле мультиполя, в котором могут оказаться эффективными достаточно большое число гармоник. Например, для Луны определены первые 13 коэффициентов мультипольного разложения гравитационного потенциала. Это приводит к новой постановке задачи о движении тела в поле, например, Луны, так как влияние масконов, как мы увидим ниже, может принципиально изменить общий характер траектории тела.

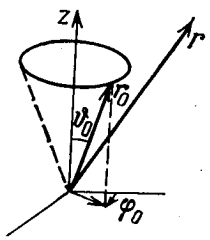


Рис. 17.2. Координата возмущающей массы определяется вращающимся вектором r_0

Мультипольное разложение. Наиболее просто представить себе возмущающее поле как результат воздействия вращающегося мультиполя. Пусть потенциал определяется в точке r, а возмущающая масса имеет координату, определяемую вращающимся относительно оси z вектором r_0 (рис. 17.2). Для простоты массу возмущения можно считать точечной. Поэтому она создает потенциал

$$V(r,\ t)=-\frac{g}{|r-r_0|}, \tag{3.3}$$

где g — константа взаимодействия тела с полем возмущения и координаты вектора r_0 зависят от t.

Разложение выражения (3.3) по мультиполям имеет вид [4]

$$V(r,\ t)=-\frac{g}{r_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{ml}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{l+1}e^{im(\varphi-\varphi_0)}P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\,P_l^{|m|}(\cos\vartheta_0), \tag{3.4}$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра и

$$A_{ml}=\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}. \tag{3.5}$$

Если возмущение не является точечным, а имеется некоторое более сложное его распределение, то разложение (3.4) имеет ту же структуру, но с другими коэффициентами, отличными от (3.5). Можно, например, принять

$$A_{ml}=a_{ml}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}, \tag{3.6}$$

где новые коэффициенты разложения a_{ml} обладают тем свойством, что

$$a_{ml}\sim 0 \qquad (l>l_{\max}). \tag{3.7}$$

Мы будем обозначать гамильтониан тела, движущегося в описанном гравитационном поле, следующим образом:

$$H=H_0+V(r,\ t), \tag{3.8}$$

а безразмерный параметр возмущения

$$\varepsilon=g/G \tag{3.9}$$

будем считать малым.

Важной особенностью системы (3.8) является суточное вращение вектора r_0 вокруг оси z с частотой ν. Тогда координаты вектора r_0 обладают следующим свойством:

$$r_0=\text{const}, \qquad \vartheta_0=\text{const}, \qquad \varphi_0=\nu t+\text{const}. \tag{3.10}$$

Благодаря зависимости φ_0 от t в формуле (3.4) возникают осциллирующие экспоненты и становятся возможными резонансы.

Соотношения (3.10) являются специальным случаем, в котором массы, создающие возмущение, имеют фиксированное расстояние от силового центра

основного поля в точке $r=0$, как это указано на рис. 17.2. В дальнейшем мы познакомимся и с другим видом возмущения, в котором координата r_0 определяет положение тела, движущегося по эллиптической орбите.

Изменение интегралов движения. Невозмущенная задача Кеплера имеет три независимых интеграла движения: E_0, L и M ($M\leqslant L$), которые были введены в § 1 гл. 17. Наличие возмущения приводит к их изменению со временем. Выпишем формулы, определяющие это изменение.

Изменение интеграла энергии E_0 можно определить из выражения

$$\dot{E}_0=\frac{\partial V}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\dot{\varphi}. \tag{3.11}$$

Используя формулы (1.1) и (1.2), получаем также

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}L^2=mr^2\left(\dot{\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}+\dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right), \qquad \frac{dM}{dt}=\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \tag{3.12}$$

Эти выражения позволяют вычислить изменения со временем эксцентриситета e_0 и перигелия $r_{\min}$, которые нам понадобятся позже.

Резонансы и их ширина. Возмущение (3.4) имеет довольно сложную структуру и приводит к большому числу возможных резонансов. Проведем их качественный анализ. Многомерность системы означает, что в ней возможна диффузия Арнольда. Мы здесь будем, однако, интересоваться лишь более сильной неустойчивостью, связанной с сильным перекрытием резонансов.

Заметим сначала, что для $r(t)$ в (3.4) можно воспользоваться нулевым приближением в силу малости возмущения из-за неравенства (3.9). Разложение величины $1/r(t)$ в ряд Фурье уже проведено (см. формулу (1.28)). Поэтому не представляет особого труда получить фурье-разложения и для любой степени $1/r^n$. Единственное изменение, которое следует сделать, связано с изменением записи разложения. Вместо (1.28) следует писать

$$\frac{1}{r(t)}=\sum_k C_k e^{-ik\psi}, \qquad \dot{\psi}=\omega(|E|), \tag{3.13}$$

где $\psi=\psi_3$—фаза, сопряженная действию I_3 (см. формулу (1.13) и следующее за ней пояснение), и нулевой индекс при E в дальнейшем опускается.

Приведенные простые соображения показывают, что формула (3.11) для корости изменения энергии тела может быть представлена в следующей форме:

$$\frac{d|E|}{dt}=\varepsilon\sum_{n,\,k}\mathcal{B}_{nk}e^{i(n\psi-kvt)}, \tag{3.14}$$

где $\mathcal{B}_{nk}$—некоторые коэффициенты разложения, которые будут оценены позже. В формуле (3.14) происхождение множителей типа $\exp(in\psi)$ обусловлено разложением (3.13), а множители типа $\exp(ikvt)$ возникают из $\exp(ik\varphi_0)$, так как $\varphi_0=vt$.

В принятой модели жесткого вращающегося мультиполя величина $\vartheta_0=$ $=\text{const}$. Еще одно упрощение можно сделать, рассмотрев движение тела в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Тогда оставшиеся множители типа $\exp(im\varphi)$ и $P_n^{|m|}(\cos\vartheta)$ в потенциале возмущения (3.4) также можно разложить в ряды Фурье типа (3.13) по фазам ψ. Это не изменит общей структуры выражения (3.14). Важно лишь, откуда появляются вклады в коэффициенты разложения $\mathcal{B}_{nk}$.

Проведенный анализ, несмотря на свою схематичность, позволяет сделать довольно существенные выводы. Прежде всего, из (3.14) следует условие для резонансов

$$n\omega(|E_{nk}|)-kv=0. \tag{3.15}$$

Оно достаточно очевидно и связано с сильным вырождением движения в кулоновском поле. Поэтому в условие резонанса (3.15) входит только одна частота

невозмущенного движения ω и частота возмущения ν, обусловленная вращением мультиполя.

Расстояние между ближайшими резонансами $\Delta\omega$ может быть определено из (3.13) и из такого же условия, в котором совершена какая-либо из замен

$$n \to n+1;\ k \to k+1;\ n \to n+1,\ k \to k+1.$$

Это дает

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{10} &= |\omega(E_{nk}) - \omega(E_{n+1,\,k})| \approx k\nu/n^2 = \omega^2/k\nu,\\
\Delta\omega_{01} &= |\omega(E_{nk}) - \omega(E_{n,\,k+1})| = \nu/n = \omega/k,\\
\Delta\omega_{11} &= |\omega(E_{nk}) - \omega(E_{n+1,\,k+1})| \approx \frac{\nu|n-k|}{n^2} = \frac{\omega^2}{\nu}\frac{|n-k|}{k^2}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Наиболее опасным для неустойчивости системы является случай, в котором $\Delta\omega$ минимально. Имеются следующие возможные случаи:

$$\min\Delta\omega = \begin{cases} \Delta\omega_{10} & (k \ll n),\\ \Delta\omega_{01} & (k \gg n),\\ \Delta\omega_{11} & (|n-k| \ll k,\ n). \end{cases} \tag{3.17}$$

Формулы (3.16) и (3.17) решают вопрос о расстоянии между резонансами.

Для определения ширины резонанса пользуемся уже известным нам приемом. Оставляем в (3.14) один предполагаемый резонансный член и интегрируем полученное выражение

$$\delta E \sim \frac{\varepsilon\mathcal{B}}{|n\dot{\psi} - k\nu|} \sim \frac{\varepsilon\mathcal{B}}{|n\omega(|E|) - k\nu|}. \tag{3.18}$$

Минимальное значение знаменателя имеет порядок

$$n\left|\frac{d\omega}{dE}\right|\delta E.$$

Подставляя это выражение в (3.18), получаем обычную формулу для ширины нелинейного резонанса по энергии

$$\delta E \sim \left(\frac{\varepsilon\mathcal{B}}{n\,|d\omega/dE|}\right)^{1/2} \tag{3.19}$$

или для ширины по частоте

$$\delta\omega = \left|\frac{d\omega}{dE}\right|\delta E \sim \left(\frac{\varepsilon}{n}\,\mathcal{B}\left|\frac{d\omega}{dE}\right|\right)^{1/2} \tag{3.20}$$

Всюду в формулах (3.18)—(3.20) опущены индексы при $\mathcal{B}$ и E. Предполагается, что резонансное движение соответствует окрестности некоторого значения энергии E_{nk} с фиксированными n и k.

Перекрытие резонансов. Теперь в нашем распоряжении есть выражения для ширины резонанса (3.20) и для расстояния между резонансами (3.17). Поэтому мы можем составить условие возникновения стохастической неустойчивости как условие перекрытия резонансов:

$$K = (\delta\omega/\Delta\omega)^2 \geqslant 1. \tag{3.21}$$

Мы уже перечисляли различные возможности при определении расстояния между резонансами. Они выражаются формулами (3.16) и (3.17), отражающими различные физические случаи. Среди этих случаев следует отобрать тот, который приводит к наиболее легкому выполнению условия неустойчивости (3.21). Для этой цели рассмотрим условие, при котором расстояние между резонансами равно $\Delta\omega_{01}$ (см. (3.16)). Он интересен тем, что условие резонанса (3.15) может быть выполнено даже при $n \sim 1$. В этом случае

$$\omega \approx k\nu. \tag{3.22}$$

Рассмотрим сначала малые эксцентриситеты. Будем также считать $r_0 \sim a$. Поскольку орбита близка к круговой, то в формуле (3.4) значения m невелики. Исходя из уравнений (3.11) и (3.4) имеем

$$\mathcal{B} = \frac{G}{a} l^2 \frac{L}{mr_0^2} \sim l^2 L \frac{G}{ma^3} \sim l^2 \frac{|E|\omega^2}{\omega} = l^2 \omega |E|, \tag{3.23}$$

где l — номер гармоники в мультипольном разложении, на которой происходит резонанс. Выражение (1.16) связывает частоту с энергией тела. Из него находится производная

$$\left|\frac{d\omega}{dE}\right| = \frac{3}{2}\frac{\omega}{|E|}. \tag{3.24}$$

Подставляя (3.23) и (3.24) в (3.20), получаем ширину резонанса

$$\delta\omega \sim (\varepsilon/n)^{1/2} l\omega. \tag{3.25}$$

Теперь мы можем определить параметр перекрытия резонансов K, если для расстояния между резонансами принять выражение $\Delta\omega_{01}$:

$$K = \left(\frac{\delta\omega}{\Delta\omega_{01}}\right)^2 \sim \varepsilon l^2 k^2 = \varepsilon l^2 \frac{\omega^2}{\nu^2}.$$

Поскольку $\max k \sim l_{\max}$, то

$$\max K \sim \varepsilon l_{\max}^4,$$

и условие появления хаотической динамики сводится к неравенству

$$\varepsilon l_{\max}^4 \gtrsim 1. \tag{3.25а}$$

Конечно, условие (3.25а) является довольно грубой оценкой. Однако можно рассчитывать на то, что реальные условия не ухудшают его, а улучшают. Связано это с тем, что чем больше гармоник в разложении (3.4), тем большее число резонансов имеется в возмущающей силе. Поэтому даже отсутствие перекрытия в резонансах первого порядка, которые мы только и принимали во внимание, оставляет возможность пересечения резонансов следующих порядков. В последнем случае, конечно, происходит замедление диффузии из-за стохастической динамики. Но и это замедление, как мы сейчас увидим, может оказаться вполне «земным» временем.

Рассмотрим сначала некоторые числовые оценки для формулы (3.25а). Для Луны, как уже отмечалось, относительная масса масконов $\sim 10^{-5}$, т. е. $\varepsilon \sim 10^{-5}$. Для спутника Луны, движущегося с первой космической скоростью, $\omega \sim 2\pi/3$ часа. Если принять для полного числа масконов число ~ 20, то

$$\nu \sim \frac{2\pi}{27 \text{ дней}} \cdot 20 \sim \frac{1}{32}\frac{2\pi}{\text{час}}.$$

Отсюда

$$\omega/\nu \sim 11 < l_{\max}, \tag{3.26}$$

так как $l_{\max} \gtrsim 20$. Из (3.26) следует, что резонансы типа (3.22) существуют. Это очень важное заключение. Условие их сильного перекрытия (3.25) принимает вид

$$l_{\max} \gtrsim \varepsilon^{-1/4} \sim 18. \tag{3.27}$$

Оценка (3.27) показывает, что стохастическая динамика может возникать. Точнее, существование масконов может столь сильно нарушить траекторию тел, что она станет неустойчивой и возникнет диффузионное движение тел. Можно показать также, что если для тел выбрать сильно вытянутые орбиты с $1 - e_0 \ll 1$, то условие стохастизации будет выполняться еще легче. Проанализируем, к чему это приводит и как развивается диффузионная динамика тела.

Диффузионные орбиты. При условии (3.25) фазы ϑ и φ стохастизируются. Вследствие этого возникает медленное диффузионное изменение интегралов невозмущенного движения E, L, M. Диффузия по энергии E означает, что энергия тела может принимать в результате малых случайных изменений как меньшие, так и большие значения по сравнению с невозмущенным значением. Аналогично диффузия по моменту L означает, что даже если в невозмущенном движении траектория тела была близка к круговой ($e_0 \ll 1$), то возмущение при перекрытии резонансов может приводить к появлению траекторий с малым моментом ($1-e_0 \ll 1$). Так же можно проинтерпретировать дуффузию проекции момента M. Одновременно с величинами E, M и L изменяется диффузионным образом перигелий.

В общем случае функция распределения является многомерной и зависит от трех действий:

$$f = f(I_1, I_2, I_3; t),$$

которые определены в (1.13). Усреднение производится по фазам ψ_1, ψ_2, ψ_3, канонически сопряженным действиям. Поэтому коэффициент диффузии

$$D = D(E, L, M),$$

т. е. зависит от всех трех переменных.

Оценим, например, изменение момента L. Из (3.12) и мультипольного разложения можно написать простую оценку следующим образом:

$$\Delta(L^2/2) \sim ma^2 \int dt \left(\dot{\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right).$$

Как обычно при оценке коэффициента диффузии, это выражение следует возвести в квадрат и усреднить по фазам. В результате этой операции «выживают» только диагональные члены, содержащие квадратичные выражения по фазам. В результате

$$D_L \sim \frac{1}{4\tau} \langle\langle (\Delta L^2)^2 \rangle\rangle \sim \nu \varepsilon^2 l_{\max}^2 \frac{L^4}{(1-e_0^2)^2}. \tag{3.28}$$

Обратимся теперь к диффузии перигелия:

$$r_{\min} = a(1-e_0).$$

Его изменение равно

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta e_0}{1-e_0}.$$

Это выражение можно переписать иначе, если использовать выражение (1.8), связывающее L, a и e_0:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta L^2}{L^2} + 2\frac{e_0 \Delta e_0}{1-e_0^2}.$$

Отсюда, исключая Δe_0, находим

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} = -\frac{1-e_0}{2e_0}\frac{\Delta a}{a} + \frac{1+e_0}{2e_0}\frac{\Delta L^2}{L^2}.$$

Изменение большой полуоси Δa однозначно связывается с изменением энергии ΔE (см. (1.18)). Поэтому окончательно

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{1-e_0}{2e_0}\frac{\Delta |E|}{|E|} + \frac{1+e_0}{2e_0}\frac{\Delta L^2}{L^2}. \tag{3.29}$$

Эта формула показывает, что в общем случае изменение перигелия обусловлено двумя факторами: изменением энергии и изменением орбитального момента. При малых эксцентриситетах ($e_0 \ll 1$) оба фактора изменения входят

равноправно:

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} \approx \frac{1}{2e_0}\left(\frac{\Delta|E|}{|E|}+\frac{\Delta L^2}{L^2}\right). \tag{3.30}$$

Однако положение изменяется для вытянутых орбит при $1-e_0 \ll 1$. Тогда

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} \approx \frac{\Delta L^2}{L^2}. \tag{3.31}$$

В этом случае диффузия перигелия полностью определяется коэффициентом диффузии (3.28)

$$D_r \sim \frac{1}{\tau}\langle\langle(\Delta r_{\min})^2\rangle\rangle \sim \frac{r_{\min}^2}{L^4}\nu\varepsilon^2 l_{\max}^2 \frac{L^4}{(1-e_0^2)^2} = \varepsilon^2 r_{\min}^2 l_{\max}^2 \frac{\nu}{(1-e_0^2)^2}. \tag{3.32}$$

Отсюда легко находится характерное время изменения перигелия на величину порядка $\delta r_{\min}$:

$$\tau_D \sim \frac{(\delta r_{\min})^2}{D} = \left(\frac{\delta r_{\min}}{r_{\min}}\right)^2 \frac{(1-e_0^2)^2}{\varepsilon^2 l_{\max}^2 \nu}. \tag{3.33}$$

В том случае, когда речь идет о вращении спутника, для него $\delta r_{\min} \ll r_{\min}$. Поэтому, несмотря на малость значения коэффициента диффузии, величина τ_D может оказаться не очень большой. Достаточно малого изменения перигелия, чтобы движущееся тело или спутник коснулись поверхности планеты. Это показывает, что гравитационные аномалии могут вносить заметные поправки в траекторию тел.

Особенно заметными могут оказаться эти поправки при больших эксцентриситетах, когда $1-e_0 \ll 1$. Для пояснения этого утверждения уточним формулу (3.31), сохраняя в ней изменение энергии, имеющее порядок $1-e_0 \ll 1$. Из общего выражения (3.29) имеем

$$\frac{\Delta r_{\min}}{r_{\min}} \approx \frac{\Delta L^2}{L^2} + \frac{1-e_0}{2}\frac{\Delta|E|}{|E|}.$$

Отсюда следует, что при некотором фиксированном значении изменения перигелия $\Delta r_{\min}$ вклады от изменения момента и от изменения энергии могут стать сравнимыми, если только изменения энергии достаточно велики. Последнее, однако, возможно лишь в области очень малых энергий $|E| \to 0$, т. е. вблизи сепаратрисы, где финитное движение может смениться на нефинитное. Этот вывод для нас очень важен, и в следующем параграфе мы увидим, к каким он может привести следствиям.

§ 4. Диффузия комет из облака Оорта

Кометы, появляющиеся в зоне видимости в Солнечной системе, постепенно изменяют свой состав по мере выгорания в них наиболее летучих компонент. Это позволяет ввести понятие новых комет и отличить их от тех, которые наблюдаются уже не в первый раз. Анализ новых комет с большим периодом привел к гипотезе о существовании гигантского кометного облака, называемого облаком Оорта [13].

Облако Оорта. Оно расположено далеко за пределами планетной зоны, и анализ данных наблюдения за кометами позволяет оценить это расстояние примерно в $10^3 \div 2\cdot 10^5$ а. е. (астрономических единиц). По предположению Оорта, кометное облако опоясывает Солнечную систему и простирается почти до середины расстояния до ближайших к Солнцу звезд. Время от времени облако возмущается близко проходящими звездами, и каждое такое возмущение приводит к возможному появлению комет в планетной зоне Солнечной системы. Исследование гипотезы Оорта о механизме «доставки» комет из кометного облака показало, что ее реализация нетривиальна (ком. 4). В настоящее время облако Оорта принято делить на две части: внешнюю часть

(гало) и внутреннюю часть (резервуар). Граница между ними проходит на расстоянии $a_c = (1 \div 2)\,10^4$ а. е. и находится из условий равенства среднего времени τ_s между звездными столкновениями с Солнцем на расстоянии a_c и периодом обращения комет $\omega = 1/a_c^3$ [16]. В области гало может происходить до 100 столкновений кометы со звездами. Наоборот, в резервуаре комет звездные толчки могут происходить лишь раз примерно в 10^8 лет. Эти редкие столкновения оказываются очень сильными и являются предположительно причиной интенсивных кометных ливней.

Среди других источников возмущения комет нельзя исключить гравитационное поле Галактики, столкновения с гигантскими молекулярными комплексами и воздействие гипотетического невидимого тела — компаньона Солнца — Немезиды.

Существует также иная возможность механизма доставки комет из облака Оорта, которую мы обсудим здесь [17]. Она рождена новыми представлениями о нелинейной динамике в кулоновском поле, где, как это было видно выше, также возможны нелинейные резонансы и стохастическая неустойчивость. Эту возможность можно сформулировать следующим образом. Гравитационное поле Солнечной системы создается, в основном, полем Солнца и полем планет. Поле наиболее крупных планет (Юпитер, Сатурн) можно рассматривать как возмущение поля Солнца. Это возмущение создает область стохастического слоя для других тел, движущихся в Солнечной системе. Стохастический слой и представляет собой часть комет облака Оорта. Его заполнение могло произойти как за счет внутренних масс, принадлежащих Солнечной системе, так и за счет внешних масс. С точки зрения динамики, этот фактор не является существенным. Важным является то, что для появления комет в планетной зоне не требуются постоянные внешние возмущения от случайно проходящих звезд. Динамика комет внутри стохастического слоя носит диффузионный характер. Перигелий комет совершает броуновское движение, которое и приводит к некоторой конечной вероятности возникновения комет в зоне видимости и которое можно рассматривать как флуктуации этого движения. Таким образом, существует вариант, при котором часть кометного облака является органической и естественной частью Солнечной системы, и наши наблюдения просто отражают внутреннюю эволюцию этой части.

Важным обстоятельством здесь является то, что кометы могут проходить на достаточно большом расстоянии от больших планет (до 20 а. е.). Однако, несмотря на малость такого возмущения, оно может накапливаться, и уход комет на гиперболическую орбиту будет происходить лишь после 100—1000 обращений вокруг Солнца. Диффузия комет в течение этого периода приводит как к появлению их в зоне видимости (т. е. к диффузионному потоку к Солнцу), так и к потоку комет из резервуара в гало Оорта.

Существует важный экспериментальный закон, связанный с появлением комет из облака Оорта. Он описывает распределение комет в зависимости от параметра $1/a$ (обратной величины большой полуоси), приведенное на рис. 17.3 [18]. Пик распределения комет приходится на новые кометы вблизи их нулевой энергии. Длинный хвост распределения обусловлен многократным появлением уже не новых комет. Основная доля новых комет из облака Оорта сосредоточена в области орбит с

$$1/a \leqslant 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{(а. е.)}^{-1}.$$

Существует также доля комет, принадлежащих гиперболическим орбитам. Для них $1/a < 0$ на рис. 17.3.

Простейшее отображение. Считая, что комета движется в поле Солнца и планеты (например, Юпитера) представим ее гамильтониан в виде

$$H = E + V; \qquad V = \varepsilon/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|, \tag{4.1}$$

E — невозмущенная часть, соответствующая энергии кометы в поле Солнца, r — координата кометы, r_0 — координата планеты, ε — отношение массы планеты к массе Солнца (для Юпитера $\varepsilon = 0{,}001$) и остальные константы положены равными единице (рис. 17.4). Упростим задачу, считая, что $r_0 \ll r$ и

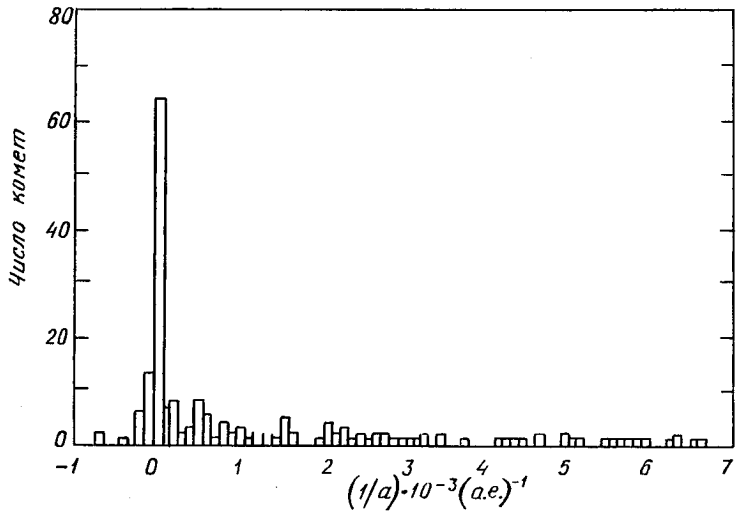


Рис. 17.3. Распределение обратной величины большой полуоси для комет с большим периодом [18]

что все три тела движутся в одной плоскости. Тогда (4.1) можно представить в виде

$$H \approx E - \varepsilon \frac{r_0}{r^2} \cos(\varphi - \varphi_0), \tag{4.2}$$

где φ и φ_0 — полярные углы кометы и планеты.

Вращение планеты вокруг Солнца создает зависимость r_0 и φ_0 от времени. Для орбиты планеты, близкой к круговой,

$$r_0 = \text{const}, \quad \varphi_0 = \omega_0 t + \text{const}. \tag{4.3}$$

Плоский характер задачи приводит к тому, что ее можно описать только двумя действиями:

$$I_1 \equiv I = -\sqrt{2|E|}, \quad I_2 \equiv M. \tag{4.4}$$

В отсутствие возмущения E и M — инварианты движения. Из-за возмущения они изменяются согласно уравнениям (3.11), (3.12):

$$\dot{E} = -\left(\dot{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right), \quad \dot{M} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \tag{4.5}$$

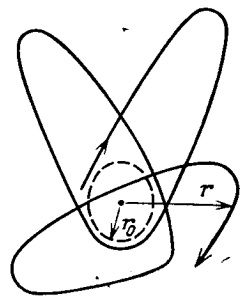


Рис. 17.4. Вытянутые орбиты комет $r(t)$, возмущаемые движением планеты $r_0(t)$

Зависимость от времени координат планеты (4.3) приводит к нестационарности возмущения. Однако величины $1/r^2(t)$ и $\cos\varphi(t)$ для сильно вытянутых орбит содержат очень много гармоник. Поэтому снова, как и в предыдущих параграфах этой главы, возможно большое число резонансов типа

$$k\omega(E) = \omega_0, \tag{4.6}$$

если только орбиты достаточно вытянуты. Иначе, число k должно удовлетворять неравенству $k < N$, т. е.

$$\omega_0/\omega < N. \tag{4.7}$$

Ввиду того, что орбита кометы сильно вытянута, наиболее интенсивное взаимодействие кометы и планеты происходит в зоне движения планеты

размером $R \sim r_0$. Длительность такого взаимодействия порядка $\Delta t \sim 2\pi/\omega_0$. В силу условий (4.6) и (4.7) и того, что $k \gg 1$, интервал Δt мал по сравнению с периодом обращения кометы. Возникает следующая наглядная картина: комета движется вокруг Солнца по невозмущенной орбите в течение длительного времени $\sim 2\pi/\omega$, до тех пор пока она не войдет в зону «столкновения» радиуса R. Здесь она испытывает кратковременный толчок, длящийся Δt. Это дает возможность построить отображение, связывающее переменные E, M и φ между двумя последовательными столкновениями кометы с планетой.

Обозначим $\psi = \varphi - \varphi_0$. Тогда из (4.2)—(4.5) получаем искомую связь

$$\bar{I} \sim I + \varepsilon r_0^{1/2} \theta (R - r) \cos(\psi + \delta), \qquad \bar{\psi} \sim \psi + 2\pi\omega_0/\omega(\bar{I}) \qquad (r \ll R), \tag{4.8}$$

где δ — некоторая несущественная фаза,

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\bar{M} \sim M + \varepsilon r_0^{1/2} \theta (R - r) \sin\psi. \tag{4.9}$$

Из (4.8) следует для K, определяющего локальную неустойчивость:

$$K = \left| \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \psi} - 1 \right| \sim \varepsilon r_0^{1/2} \frac{\omega_0}{\omega^2} \left| \frac{d\omega}{dI} \right| \cdot |\sin(\psi + \delta)|.$$

Отсюда условие неустойчивости имеет вид

$$K_0 = \max K = \varepsilon \frac{a}{r_0} \gtrsim 1. \tag{4.10}$$

Граничное значение a_0, начиная с которого динамика кометы стохастизируется, равно

$$a_0 \sim r_0/\varepsilon. \tag{4.11}$$

Полагая для r_0 расстояние от Юпитера до Солнца ($r_0 = 5$ а. е.) и $\varepsilon \sim 10^{-3}$, мы получаем $a_0 = 5 \cdot 10^3$ а. е. Таким образом, действительно, кометы из резервуара Оорта (и, безусловно, из гало Оорта) могут совершать хаотическое движение, если они проходят не слишком далеко от зоны влияния больших планет.

Конечно, этот анализ является слишком упрощенным. Однако он показывает, как малые возмущения в задаче Кеплера способны хаотизировать регулярное движение. Более того, возмущения двух крупнейших планет Солнечной системы Юпитера или Сатурна могут привести именно к такому сильному эффекту.

Одним из наиболее важных следствий описанного механизма диффузионной динамики комет является существование порога стохастизации (4.11). Это означает наличие резкой границы для величины большой полуоси, такой, что транспорт комет в видимую зону возможен лишь при $a \gtrsim a_0$. Этот эффект может служить объяснением наблюдаемой резкой границы в распределении комет по энергиям на рис. 17.3.

Диффузия орбит. При выполнении условия (4.10) или (4.11) мы можем описывать динамику комет с помощью кинетического уравнения диффузионного типа. Для функции распределения $F(I_1, I_2, t)$ оно имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j,\, k = 1,\, 2} \frac{\partial}{\partial I_j} D_{jk} \frac{\partial F}{\partial I_k} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_c, \tag{4.12}$$

где последний член учитывает возможные столкновения со звездами. Коэффициенты диффузии D_{jk} определяются выражениями

$$D_{11} = \langle\langle (\Delta I)^2 \rangle\rangle \omega, \qquad D_{12} = D_{21} = \langle\langle \Delta I \cdot \Delta M \rangle\rangle \omega, \qquad D_{22} = \langle\langle (\Delta M)^2 \rangle\rangle \omega, \tag{4.13}$$

в которых скобки означают усреднение по фазам ψ.

Простые оценки формул (4.13), использующие (4.8) и (4.9), дают

$$D_{jk} \sim \varepsilon^2\omega/q \qquad (j,\ k=1,\ 2), \tag{4.14}$$

где q — перигелий комет. Для вытянутых орбит $q \ll a$ и

$$q \sim M^2, \qquad a = I^2. \tag{4.15}$$

Следовательно, изменение δe_0 определяется выражением $\frac{\delta e_0}{1-e_0} = \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta I}{I} \sim \frac{\delta M}{M}$.

Из соотношений (4.14) и (4.15) следует также $\delta q/q \sim \delta M/M \gg \delta a/a$.

Время изменения перигелия на величину δq следует из (4.12)—(4.14):

$$\tau_d \sim \frac{a^{3/2}}{\varepsilon^2}\left(\frac{\delta q}{r_0}\right)^2. \tag{4.16}$$

Оценим с помощью (4.16) время сильной диффузии перигелия ($\delta q \sim r_0$). Для $\varepsilon = 0{,}001$ и $a = 10^4$ а. е. получаем $\tau_d \sim 10^{11}$ лет. Это в 20 раз больше времени жизни Солнечной системы. Поэтому наблюдаемый поток комет в планетную зону из-за рассмотренных возмущений Юпитера может составлять $^1/_{20}$ часть общего числа диффундирующих комет. Аналогичный поток комет имеется и в сторону удаления от Солнца. Таким образом, осуществляется «подъем» комет из резервуара в гало, где начинают играть существенную роль столкновения со звездами.

Другие возмущения. Описанный механизм хаотизации кометных орбит достаточно универсален и позволяет сделать простые оценки влияния поля Галактики. Возмущения, связанные с ним, имеют период $\sim 10^8$ лет. За время жизни Солнечной системы произошло много «столкновений» с Галактикой. Наши исследования о природе хаоса в задаче Кеплера показывают, что этого достаточно для диффузии комет с сильно вытянутыми орбитами.

Последнее замечание следует сделать относительно предполагаемого невидимого компаньона Солнца — Немезиды. Его осцилляционное движение в области $a \sim a_c \sim 10^4$ а. е. с периодом $\sim 10^7$ лет привело бы к тому же эффекту, что и влияние Юпитера. По существу, это просто обращенная задача о хаотизации длиннопериодических орбит под действием периодического возмущения. Теперь, однако, источник возмущения находится не в зоне перигелия (как в случае Юпитера), а в зоне афелия.

Возможно, что более глубокое понимание кометной динамики позволит заглянуть в невидимую пока область на окраине Солнечной системы. И в этом новом представлении новым методам нелинейной механики суждено сыграть не последнюю роль.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 17

1. Подробно о введении переменных действие — угол см. в книге [2]. Значительная информация о задаче Кеплера имеется также в книге [3].

2. Детали определения фурье-гармоник для задачи Кеплера см. в [4], § 70.

3. Теория многофотонной ионизации была предложена в [5] и в настоящее время является широко используемым инструментом анализа движения атомов в сильных полях [6, 7]. Эксперименты по ионизации возбужденных атомов водорода, в которых наблюдалась, по-видимому, стохастическая ионизация, были начаты в работах [8, 9]. Теория стохастической ионизации была предложена в [10]. Недавний эксперимент [11] подтвердил справедливость классических оценок порога стохастической ионизации. Обзор различных случаев взаимодействия высоковозбужденных атомов с полем можно найти в [12].

4. Существует большое число работ, посвященных анализу и развитию гипотезы Оорта (см., например, обзоры [14, 15]). Трудности, возникающие при попытках численного моделирования задачи, связаны с «неудобством» задачи Кеплера. Отсутствие конечной области локализации тел при кулоновском взаимодействии приводит к необходимости расчетов очень длинных орбит. Кроме того, эти орбиты должны совершать большое число прецессирующих вращений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе 1

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
3. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* // Ядер. синтез.— 1961.— Т. 1.— С. 82.
4. *Сагдеев Р. З.* // Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.— Вып. 4.— С. 20.
5. *Ахиезер А. И., Любарский Г. Я.* // Докл. АН СССР.— 1951.— Т. 80.— С. 193.
6. *Берман Г. П., Заславский Г. М.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1972.— Т. 15.— С. 1456.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
8. *Caruthers P., Nieto M.* // Rev. Mod. Phys.— 1968.— V. 40.— P. 411.
9. *Арнольд В. П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1971.
10. *Einstein A.* // Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.— 1917.— Bd 19.— S. 82. (Перевод: *Эйнштейн А.* Собр. научных трудов.— М.: Наука, 1966.— Т. 3.— С. 407.)
11. *Toda M.* Theory of Nonlinear Lattices.— B.: Springer, 1981. (Перевод: *Тода М.* Теория нелинейных решеток.— М.: Мир, 1984.)
12. *Henon M.* // Phys. Rev.— 1974.— V. B9.— P. 1921.
13. *Aubry S.* Soliton and Condensed Matter Physics/Ed. Bishop A. and Schneider T.— N. Y.: Springer, 1979.— P. 264.
14. *Belobrov P. I., Tretyakov A. G., Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1983.— V. 97A.— P. 409.

К главе 2

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.
5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
8. *Гапонов А. В., Миллер М. А.* // ЖЭТФ.— 1958.— Т. 39.— С. 242.
9. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
10. *Литвак А. Г.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1964.— Т. 7.— С. 562.
11. *Einstein A.* Conseil de Physique, Institute Solvay, 1911. Rapports.— Paris.— Gauthier, 1912.— P. 407. (Перевод: *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1966.— С. 277.)
12. *Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.* // Укр. мат. журн.— 1955.— Т. 7.— С. 5.
13. *Kulsrud R. M.* // Phys. Rev.— 1957.— V. 106.— P. 205.
14. *Kruscal M.* Rep. on Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research.— Salzburg, 1961. (Перевод: *Крускал М.* Адиабатические инварианты.— М.: ИЛ, 1962.)
15. *Дыхне А. М.* // ЖЭТФ.— 1960.— Т. 38.— С. 570.
16. *Бакай А. С., Степаноеский Ю. Н.* Адиабатические инварианты.— Киев: Наук. думка, 1981.
17. *Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.
18. *Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З.* // Прикл. мех. и техн. физика.— 1964.— Т. 5.— С. 44.
19. *Заславский Г. М., Моисеев С. С.* // Докл. АН СССР.— 1965.— Т. 161.— С. 318.
20. *Сивухин Д. В.* // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 1.— С. 7.

21. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Госатомиздат, 1963.— Вып. 2.— С. 177.
22. *Родионов С. Н.* // Атом. энергия.— 1959.— Т. 6.— С. 623.
23. *Арнольд В. И.* // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 142.— С. 758.
24. *Чириков Б. В.* // Вопросы теории плазмы/Под ред. Б. Б. Кадомцева.—М.: Энергоатомиздат, 1983.— Вып. 13.— С. 3.
25. *Покровский В. Л., Халатников И. М.* // ЖЭТФ.— 1961.— Т. 40.— С. 1713.
26. *Ерохин Н. С., Моисеев С. С.* // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1973.—Вып. 7.— С. 146.
27. *Галеев А. А.* // ЖЭТФ.— 1964.— Т. 46.— С. 1335.

К главе 3

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
2. *Chirikov B. V.* // Phys. Report.— 1979.— V. 59.— P. 265.
3. *Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.* Regular and stochastic motion.— N. Y.: Springer-Verlag, 1983. (Перевод: *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984).
4. *Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavskii G. M.* // Nucl. Fusion.— 1966.— V. 6.— P. 297.
5. *Колмогоров А. Н.* // Докл. АН СССР.— 1954.— Т. 98.— С. 527.
6. *Арнольд В. И.* // Изв. АН СССР.— 1961.— Т. 25.— С. 25; УМН.— 1963.— Т. 18.— С. 13, 81.
7. *Moser J.* // Machr. Acad. Wiss. Gottingen. Math. Phys. Kl.— 1962.— V. IIa.— P. 1. (Перевод: *Мозер Ю.* Математика 6:5 (1963) 51.)
8. *Арнольд В. И.* // Докл. АН СССР.—1964.— Т. 156.— С. 9.
9. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.
10. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1984.
11. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
12. *Andronov A. A.* // C. R. Ac. Sci., Paris.—1929.— V. 189.
13. *Заславский Г. М., Сынах В. Н.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1970.— Т. 13.— С. 604.
14. *Feigenbaum M.* // J. Stat. Phys.—1978.— V. 19.— P. 25.
15. *Шарковский А. Н.* // Укр. мат. журн.—1964.— Т. 16.— С. 61.
16. *Collet P., Eckmann J. P.*— Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.— Birkhauser: Cambridge, Mass., 1980.

К главе 4

1. *Халмош П. Р.* Лекции по эргодической теории.— М.: ИЛ, 1959.
2. *Arnold V. I., Avez A.* Problèmes ergodiques de la mécanique classique.— Paris: Gauthier, Villars, 1967.
3. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
4. *Sinay Ya. G.* Introduction to ergodic theory.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.
5. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики.— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
6. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
7. *Chirikov B. V.* // Phys. Rep.— 1979.— V. 52.— P. 263.
8. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
9. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
11. *Колмогоров А. Н.* // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 119.— С. 861; 1959.— Т. 125.— С. 754.
12. *Синай Я. Г.* // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 124.— С. 768; 1959.— Т. 125.— С. 1200.
13. *Волковысский К. Л., Синай Я. Г.* // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— Т. 5.— С. 19.
14. *Аносов Д. В.* // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1967.— Т. 90.— С. 3.
15. *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* // УМН.— 1967.— Т. 22.— С. 107.
16. *Синай Я. Г.* // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 153.— С. 1261; УМН.— 1970.— Т. 25.— С. 141.
17. *Бунимович Л. А.* // Функцион. анализ и его прил.— 1974.— Т. 8.— С. 73.
18. *Bunimovich L. A.* // Commun. Math. Phys.— 1979.—V. 65.— P. 290.
19. *Benettin G., Strelcyn J. M.* // Phys. Rev.— 1978.— V. 17.— P. 773.
20. *Robnik M.* // J. Phys.— 1983.— V. A16.—P. 3971.
21. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике.— М.: Мир, 1965.
22. *Синай Я. Г.* // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.—Т. 30.— С. 1275.
23. *Маргулис Г. А.* // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— Т. 3.— С. 80; 1970.— Т. 4.— С. 62.
24. *Bowen R.* // Amer. J. Math.— 1972.— V. 94.— P. 413.

К главе 5

1. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
2. *Chirikov B. V.* // Phys. Reports.— 1979.— V. 52.— P. 265.
3. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
5. *Beloshapkin V. V., Zaslavskii G. M.* // Phys. Lett.— 1983.— V. 97A.— P. 121.
6. *Заславский Г. М., Сынах В. Н.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1970.— Т. 13.— С. 604.
7. *Jensen R. V., Oberman G. R.* // Physica.— 1982.—V. 4D.— P. 183.
8. *Berman G. P., Zaslavskii G. M.* // Physica.— 1979.— V. 97A.— P. 367.
9. *Чириков Б. В.* // Атом. энергия.— 1959.— Т. 6.— С. 630.
10. *Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavskii G. M.* // Nucl. Fusion.— 1967.— V. 7.— P. 253.
11. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* // ЖЭТФ.— 1967.— Т. 52.— С. 1081.
12. *Мельников В. К.* // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 148.— С. 1257.
13. *Заславский Г. М., Филоненко Н. Н.* // ЖЭТФ.—1968.— Т. 54.— С. 1590.
14. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.:—Наука, 1978.
15. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1971, 1972.
16. *Smale S.* // Bull. Amer. Math. Soc.—1967.— V. 73.— P. 747. (Перевод: УМН.— 1970.— Т. 25.— С. 113.)
17. *Alekseev V. M., Yakobson M. V.* // Phys. Rep.—1981.— V. 5.— P. 287.
18. *Воробьев П. А., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.—1987.— Т. 92.— С. 1564.
19. *Новиков С. П.* // УМН.—1982.— Т. 37—С. 3.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
21. *Feingold M., Peres A.* // Physica.—1983.— V. 9D.— P. 433.
22. *Белобров П. И., Заславский Г. М., Тартаковский Г. Х.* // ЖЭТФ.— 1976.— Т. 71.— С. 1799.
23. *Henon M., Heiles C.* // Astron. J.— 1964.— V. 69.— P. 73.
24. *Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavsky G. M.* // Nucl. Fusion.— 1966.— V. 6.— P. 297.
25. *Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.* // Nucl. Fusion.—1967.— V. 7.— P. 253.
26. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
27. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Современные проблемы математики. Динамические системы. Т. 1, 2.— М.: ВИНИТИ, 1985.
28. *Ruelle D., Takens F.* // Commun. Math. Phys.—1971.— V. 20.— P. 167.
29. *Синай Я. Г.* Современные проблемы математики. Динамические системы.— Т. 2.— М.: ВИНИТИ, 1986.
30. *Afraimovich V. S., Shilnikov L. P.* // Nonlinear Dynamics and Turbulence/Eds. Barenblatt, Loos, Joseph.— Boston: Pitman, 1983.— P. 1.
31. *Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.—1978.— V. 69A.— P. 145.
32. *Заславский Г. М., Рачко Х.— Р. Я.* // ЖЭТФ.—1979.— Т. 76.— С. 2052.
33. *Russel D. A., Hanson J. D., Ott. E.* // Phys. Rev. Lett.— 1980.— V. 45.— P. 1175.
34. *Tsang K. Y., Lieberman M. A.* // Phys. Lett.—1984.— V. 103A.— P. 175.
35. *Vlasova O. F., Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1983.— V. 99A.— P. 405.
36. *Vlasova O. F., Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1984.— V. 105A.— P. 1.
37. *Арнольд В. И.* // Докл. АН СССР.—1964.— Т. 156.— С. 9.
38. *Нехорошев Н. Н.* // УМН.—1977.— Т. 32.— С. 6.
39. *Percival I. C.* // Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction/M. Month and J. C. Herrera eds. Amer Inst. of Physics Conf. Proc.— 1979.— No. 57.— P. 302.
40. *Aubry S.* // Solitons and condensed matter physics/Eds. A. R. Bishop and T. Schneider.— Springer, 1978.— P. 264.
41. *Mather J. N.* // Topology.—1982.— V. 21.— P. 457.
42. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.

К главе 6

1. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
2. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
3. *Chirikov B. V.* // Phys. Rep.—1979.—V. 52.— P. 263.
4. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М.: ИЛ, 1947.
5. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
6. *Колмогоров А. Н.* // УМН.—1938.— Т. 5.— С. 5.
7. *Jensen R. V., Oberman C. R.* // Physica.— 1982.— V. 4D.— P. 183.
8. *Rechester A. B., White R. B.* // Phys. Rev. Lett.—1980.— V. 44.— P. 1583.
9. *Tsang K. Y., Lieberman M. A.* // Phys. Lett.—1984.— V. 103A.— P. 175.
10. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ.—1937.— Т. 7.— С. 203.

11. *Ulam S.* // Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. and Probability.— Berkeley Los Angeles.—1961.— V. 3.— P. 315. (Перевод: Математика.—1963.— Т. 7.— С. 137.)
12. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.* // Докл. АН СССР.—1964.— Т. 159.— С. 306.
13. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
14. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
15. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* // Ядер. синтез.—1961.— Т. 1.— С. 82.
16. *Drummond W. E., Pines D.* // Nucl. Fusion. Suppl. Part 3.— 1962.— P. 1049.
17. *Sagdeev R. Z., Galeev A. A.* Nonlinear Plasma theory.— N. Y.: Benjamin, 1969.
18. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.— Вып. 4.— С. 188.

К главе 7

1. *Hausdorff F.* // Math. Ann.— 1919.— Bd 79.— S. 157.
2. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация.— М.: Мир, 1969.
3. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature.— N. Y.: Freeman, 1983.
4. *Suzuki M.* // Progr. Theor. Phys.— 1983.— V. 69.— P. 65.
5. *Kaplan J. L., Yorke J. A.* Lecture Notes in Mathematics. V. 730.— N. Y.: Springer-Verlag, 1979.— P. 228.
6. *Russel D. A., Hanson J. D., Ott E.* // Phys. Rev. Lett.— 1980.— V. 45.— P. 1175.
7. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
8. *Cvitanovic P., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I.* // Phys. Rev. Lett.—1985.— V. 55.—P. 343.
9. *Заславский Г. М., Рачко Х.— Р. Я.* // ЖЭТФ.—1979.— Т. 76.— С. 2052.

К главе 8

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
3. *Hopf E.* // Comm. Pure Appl. Math.—1950.— V. 3.— P. 201.
4. *Cole J. D.* // Q. Appl. Math.—1951.— V. 9.— P. 225.
5. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
6. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* // Ядер. синтез.—1961.— Т. 1.— С. 82.
7. *Сагдеев Р. З.* // Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.— Вып. 4.— С. 20.
8. *Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.* // УФН.—1971.— Т. 103.— С. 193.
9. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
10. *Заславский Г. М.* // УФН.—1973.— Т. 111.— С. 395.
11. *Сагдеев Р. З.* // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы.— Рига, 1960.— С. 275.
12. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.— М.: Сов. радио, 1977.
13. *Parmentier R. D.* // Solitons in Action/Eds. K. Lonngren and A. Scott.— N. Y.: Academic Press, 1978. (Перевод: Солитоны в действии.— М.: Мир, 1981.— С. 185.)
14. *Lamb G. L., Jr.* // Rev. Mod. Phys.— 1971.— V. 43.— P. 99.
15. *Сагдеев Р. З.* Ударные волны в разреженной плазме. Доклад на IV конф. по ионизационным явлениям.— Уппсала, 1959.
Сагдеев Р. З. // ЖТФ.— 1961.— Т. 31.— С. 1955.
16. *Белянцев А. М., Гапонов А. В., Фрейдман Г. И.* // ЖТФ.— 1965.— Т.35.— С. 677.
17. *Alikhanov S. G. e. a.* // Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res.— 1969.— V. 1.— P. 47 (Intern. Atomic Energy Agency.—Vienna).
18. *Russel G. T., Greenstadt E. W.* Report of Inst. of Geophys. and Planet. Phys.— 1978.— No. 1847.
19. *Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д.* // Письма в ЖЭТФ.— 1973.— Т. 17.— С. 389.
20. *Katsouleas T., Dawson J. M.* // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51.— P. 392.
21. *Грибов Б. Э., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* // Письма в ЖЭТФ.— 1985.— Т. 45.— С. 54.
22. *Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Черников А. А.* // Письма в ЖЭТФ.— 1986.—Т. 43.— С. 18.

К главе 9

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях.— М.: Мир, 1981.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.
5. *Заславский Г. М.* // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 192.— С. 760.
6. *Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1974.— Т. 66.— С. 1633.

7. *Захаров В. Е.* // Изв. вузов. Радиофизика.—1974.— Т. 17.— С. 431.
8. *Лэмб Г.* Гидродинамика.— М.: ОНТИ, 1947.
9. *Новиков С. П.* // УМН.— 1982.— Т. 37.— С. 3.
10. *Marsden J. E., Weinstein A.* // Physica.— 1982.— V. D4.— P. 394; 1983.— V. 7.— P. 305.
11. *Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З.* // ЖТФ.— 1962.— Т. 32.— С. 1291.
12. *Sagdeev R. Z., Galeev A. A.* Nonlinear Plasma Theory.— N. Y.: Benjamin, 1969.
13. *Ораевский В. Н.* Параметрические неустойчивости магнитоактивной плазмы. Основы физики плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— Т. 2.— С. 7.
14. *Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.* // УФН.— 1971.— Т. 103.— С. 193.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
16. *Заславский Г. М.* // УФН.— 1973.— Т. 111.— С. 395.
17. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
18. *Берман Г. П., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1970.— Т. 58.— С. 1453.
19. *Берман Г. П., Заславский Г. М.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1972.— Т. 15.— С. 1456.
20. *Захаров В. Е.* // ЖЭТФ.— 1966.— Т. 51.— С. 1107.
21. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
22. *Franklin R. N., Hamberger S. M., Smith G. J.* // Plasma Phys.— 1973.— V. 15.— P. 935.
23. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.

К главе 10

1. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* // ЖЭТФ.— 1967.— Т. 52.— С. 1081.
2. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
3. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems. Los-Alamos Scientific Report, LA—1940, 1955. (Перевод: *Ферми Э.* Научные труды.— М.: Наука, 1972.— Т. 2.— С. 647.)
4. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1964.— Вып. 4.— С. 188.
5. *Sagdeev R. Z., Galeev A. A.* Nonlinear Plasma Theory.— N. Y.— L.: Benjamin, 1969.
6. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* // Phys. Rev. Lett.— 1965.— V. 15.— P. 240.
7. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* // Phys. Rev. Lett.— 1967.— V. 19.— P. 1095.
8. *Израилев Ф. М., Чириков Б. В.* // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 166.— С. 57.
9. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. Избранные труды.— Киев: Наук. думка, 1970.— Т. 2.— С. 99.
10. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Методы теории слабой турбулентности плазмы. Основы физики плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— Т. 1.— С. 590.
11. *Захаров В. Е.* Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности. Основы физики плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— Т. 2.— С. 48.
12. *Заславский Г. М.* // УФН.— 1973.— Т. 111.— С. 395.
13. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.

К главе 11

1. *Lorenz E. N.* // J. Atmosph. Sci.— 1963.— V. 20.— P. 130.
2. *Saltsman B.* // J. Atmosph. Sci.— 1962.— V. 19.— P. 329.
3. *Kaplan J. L., Yorke A.* // Comm. Math. Phys.— V. 67, № 2.— B.: Springer-Verlag, 1979.
4. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 234.— С. 336.
5. *Williams R. F.* The structure of Lorenz Attractors. Lecture Notes in Mathematics, 615.— B.: Springer-Verlag, 1977.— P. 94.
6. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979.— С. 212.
7. *Сонечкин Д. М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
8. *Rayleigh* // Phil. Mag.— 1916.— V. 32.— P. 529.
9. *Lanford O.* // Turbulence Seminar/Eds. Bernard, Rativ.— Springer Lecture Notes in Mathematics.— 1977.— V. 615.— P. 114.
10. Cellular Structures in Instabilities. Lecture Notes in Physics. 210/Eds J. E. Wesfreid and S. Zaleski.— B.: Springer—Verlag, 1984.
11. *Wesfreid J. E., Zaleski S.*— In [10]—P. 1.
12. *Benard H.* // Revue générale des sciences pures et appliquées.— 1900.— V. 11.— P. 1261, 1309.
13. *Горьков Л. П.* // ЖЭТФ.— 1957.— Т. 33.— С. 402.
14. *Busse F. H.* // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 30.— P. 625.
15. *Busse F. H., Whitehead J. A.* // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 47.— P. 305.
16. *Gollub J. P., Benson S. V.* // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 100.— P. 449.
17. *Lowe M., Gollub J. P., Lubensky T. C.* // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51.— P. 786.

18. *Joets A., Ribotta R.*— In [10].— P. 294.
19. *Ландау Л. Д.* // Докл. АН СССР.— 1944.— Т. 44.— С. 339.
20. *Eckmann J. P.* //Rev. Mod. Phys.— 1981.— V. 53.— P. 643.
21. *Ott E.* // Rev. Mod. Phys.— 1981.— V. 53.— P. 655.
22. *Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1978.— V. 69A.— P. 145.
23. *Заславский Г. М., Рачко Х.— Р. Я.* // ЖЭТФ.— 1979.— Т. 76.— С. 2052.
24. *Веденов А. А., Рудаков Л. И.* // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 159.— С. 767.
25. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1949.
26. *Захаров В. Е.* Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн. Основы физики плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— Т. 2.— С. 79.
27. *Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* Сильная турбулентность плазменных колебаний.— Там же.— С. 119.
28. *Sagdeev R. Z.* // Rev. Mod. Phys.— 1979.— V. 51.— P. 1.
29. *Rubenchik A. M., Sagdeev R. Z., Zakharov V. E.* Comments on Plasma Phys. Contr. Fusion.— 1986.
30. *Goldman M. V.* // Rev. Mod. Phys.— 1984.— V. 56.— P. 1709.
31. *Wong A., Cheung P. Y.* // Phys. Rev. Lett.—1984.— V. 52.— P. 1744.
32. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Сигов Ю. С., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* // Физика плазмы.— 1975.— Т. 1.— С. 10.
33. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З. и др.* // ЖЭТФ.— 1977.— Т. 73.— С. 1352.
34. *Дубровин Б. А , Матвеев В. Б., Новиков С. П.* // УМН.— 1976.— Т. 31.— С. 55.
35. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
36. *Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1972.— Т. 62.— С. 2129.
37. *Берман Г. П., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1969.— Т. 57.— С. 1240.
38. *Заславский Г. М.* // УФН.— 1973.— Т. 111.— С. 395.
39. *Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М.* // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91.— С. 2070.
40. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Рогальский А. В., Сагдеев Р. З.*/ Препринт № 163. ИПФ АН СССР.— Горький, 1987.

К главе 12

1. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* // Phys. Rev. Lett.— 1967.— V. 19.— P. 1095.
2. *Lax P. D.* // Commun. Pure Appl. Math.— 1968.— V. 21.— P. 467.
3. *Захаров В. Е. и др.* Теория солитонов.— М.: Наука, 1980.
4. *Калоджеро Ф., Дегаспарис А.* Спектральное преобразование и солитоны.— М.: Мир, 1985.
5. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* // ЖЭТФ.—1971.— Т. 61.— С. 118.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3.— М.: Физматгиз, 1963.
7. *Kay I., Moses H. E.* // Nuove Cimento (10).— 1956.— V. 3.— P. 276.
8. *Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J.* // J. Math. Phys.— 1970.— V. 11.— P. 952.
9. *Тода М.* Теория нелинейных решеток.— М.: Мир, 1984.

К главе 13

1. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
2. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* // Основы физики плазмы.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— Т. 1.— С. 590.
3. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
4. *Заславский Г. М., Филоненко Н. Н.* // ЖЭТФ.— 1968.— Т. 54.— С. 1590.
5. *Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1985.— Т. 88.— С. 1984.
6. *Заславский Г. М., Черников А. А.* // ЖЭТФ.— 1985.— Т. 89.— С. 1632.
7. *Берзин А. А. и др.* // Физика плазмы.— 1987.— Т. 13.— С. 592—600.
8. *Smith G. R., Kaufman A. N.* // Phys. Rev. Lett.— 1975.— V. 34.— P. 1613.
9. *Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.* // Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics/Eds R. Z. Sagdeev.— Moscow: Mir, 1986.
10. *Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д.* // Письма в ЖЭТФ.— 1973.— Т. 17.— С. 389.
11. *Karney C. F. F.* // Phys. Fluids.— 1978.— V. 21.— P. 1584.
12. *Karney C. F. F.* // Phys. Fluids.— 1979.— V. 22.— P. 2188.
13. *Заславский Г. М., Мальков М. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д.* // Физика плазмы.— 1986.— Т. 12.— С. 788.
14. *Malkov M. A., Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1984.— V. 106A.— P. 257.
15. *Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.* // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91.— С. 500.
16. *Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.* // Письма в ЖЭТФ.— 1986.— Т. 44.— С. 349.
17. *Chernikov A. A., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zakharov M. Yu., Zaslavsky G. M.* // Nature.— 1987.— V. 326.— P. 559.
18. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.* // Препринт ИКИ.— М., 1987.

К главе 14

1. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
2. *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1981.— Т. 80.— С. 524.
3. *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1983.— Т. 85.— С. 1573.
4. *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.* // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 87.— С. 763.

К главе 15

1. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* // УФН.— 1967.— Т. 93.— С. 19.
2. *Аскарьян Г. А.* // УФН.— 1973.— Т. 111.— С. 249.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
5. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
6. *Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И.* // Нелинейная оптика.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1968.
7. *Леонтович М. А.* // Изв. АН СССР. Сер. физ.— 1944.— Т. 8.— С. 16.
8. *Lighthill M. J.* // J. Inst. Math. Appl.— 1965.— V. 1.— P. 269.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
10. *Dicke R. H.* // Phys. Rev.— 1954.— V. 93.—P. 99.
11. *Sharf G.* // Helv. Phys. Acta.— 1970.— V. 43.— P. 806.
12. *Белобров П. И., Заславский Г. М., Тартаковский Т. Х.* // ЖЭТФ.— 1976.— Т. 71.— С. 1799.
13. *Jaynes E. T., Cummings F. W.* // Proc. IEEE.— 1963.— V. 51.— P. 126.
14. *Stenholm S.* // Phys. Rep.— 1973.— V. 6.— P. 3.
15. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.

К главе 16

1. *Aubry S.* // Solitons and Condensed Matter Physics/Eds Bishop A. R., Schneider T.— N. Y.: Springer — Verlag, 1979.— P. 264.
2. *Axel F., Aubry S.* // J. Phys.— 1981.— V. C14.— P. 5433.
3. *Pokrovsky V. L.* // J. Physique.— 1981.— V. 42.— P. 761.
4. *Синай Я. Г.* // ЖЭТФ.— 1982.— Т. 83.— С. 1223.
5. *Belobrov P. I., Tretyakov A. G., Zaslavsky G. M.* // Phys. Lett.— 1983.— V. 97A.— P. 409.
6. *Belobrov P. I., Tretyakov A. G., Zaslavsky G. M.* // J. Stat. Phys.— 1985.— V. 38.— P. 393.
7. *Белобров П. И., Белошапкин В. В., Заславский Г. М., Третьяков А. Г.* // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 87.— С. 310.
8. *Давыдов А. С.* // ТМФ.— 1979.— Т. 40.— С. 408.
9. *Давыдов А. С.* Солитоны в молекулярных системах.— Киев: Наук. думка, 1984.

К главе 17

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика.— М.: Наука, 1973.
2. *Голдстейн Г.* Классическая механика.— М.: Гостехиздат, 1957.
3. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.— М.: ОНТИ, 1937.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
5. *Келдыш Л. В.* //ЖЭТФ.— 1964.— Т. 45.— С. 1945.
6. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П.* Атом в сильном световом поле.— М.: Атомиздат, 1978.
7. *Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л.* Теория многофотонных процессов в атомах.— М.: Атомиздат, 1978.
8. *Bayfield J. E., Koch P. M.* // Phys. Rev. Lett.— 1974.— V. 33.— P. 258.
9. *Bayfield J. E., Gardner L. D., Koch P. M.* // Phys. Rev. Lett.— 1977.— V. 39.— P. 76.
10. *Меерсон Б. И., Окс Е. А., Сасоров П. В.* // Письма в ЖЭТФ.— 1979.— Т. 29.— С. 79.
11. *Van Leeuwen K. A. H. e. a.* // Phys. Rev. Lett.— 1985.— V. 55.— P. 2231.
12. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Шепелянский Д. Л.* // УФН.— 1983.— Т. 140.— С. 355.
13. *Oort J. H.* // Bull. Astron. Inst. Neth.— 1950.— V. 11.— P. 91.
14. *Weissman P. R.* Dynamical history of the Oort cloud // Comets/Ed. L. L. Wilkening.— The Univ. of Arizona Press. Tucson, 1982.— P. 637.
15. *Everhart E.* Evolution of long- and short-period orbits.— Ibid.— P. 659.
16. *Hills J. G.* // Astron. J.— 1981.— V. 86.— P. 1730.
17. *Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.* // Nuovo Cimento.— 1987.—V. 97B.— P. 119.
18. *Marsden B. G., Sekanina Z., Everhart E.* // Astron. J.— 1978.— V. 83.— P. 64.
19. *Беляев С. Т., Будкер Г. И.* Многоквантовая рекомбинация в ионизованном газе // Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958.— Т.3.— С. 41.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатический инвариант 54, 62, 63, 70, 71
Аносова система 107
Арнольда диффузия 153
Атомная цепочка 33, 331
Аттрактор 144
— Лоренца 262
— стохастический 145, 151

Бегущие волны 187
Бесстолкновительные ударные волны 203
Биллиарды 109, 308
Бифуркации 87
Бор 207
Боуэна теорема 114
Бюргерса уравнение 189

Ван дер Поля уравнение 48
Вариационный принцип 210
Взаимодействие волн 230
Вихревой дрейф 52
Возмущений теория 37
Волновой триплет 220, 234
Волновые пучки 316
Вращения число 156
Время возврата 112

Гиперболическая точка 13
Гомоклиническая структура 135

Действие 29
Действие — угол переменные 13, 28, 345
Дивергентная форма 161
Динамика лучей 311
Диффузия волн 255
— орбит 358
Дрейф в магнитном поле 60
Дьявольская лестница 157

Знаменатели малые 39, 41

Излучение переходное 68
Инвариант адиабатический см. Адиабатический инвариант
— интегральный 25
— почти адиабатический 60
Инвариантный тор 27
Интегралов разрушение 139
Ионно-звуковые волны 198, 231

КАМ-теория 77
Канонические переменные для волн 214, 216
Кантор-тор 154
Квазиаттрактор 146, 151
Кеплера задача 344
Колебания в яме 23
— плазмы 21
Конвективные ячейки 262
Константа связи волн 224
Контур неприводимый 29
Кооперативные эффекты 323
Коррелятор одномерный 99, 123, 125
Критическая скорость 199, 201
K-системы 103

Лагранжиан волн 211
Ленгмюровская турбулентность 269
Ленгмюровский коллапс 272
Лиувилля — Арнольда теорема 27
Лиувилля теорема 11, 25
Лоренца модель 259
Ляпунова показатель 101

Магнитозвуковая волна 201
— — ударная 205
Масконы 349
Матрица перехода 67
Маятник нелинейный 16
Мера в фазовом пространстве 96
Метод обратной задачи рассеяния 279
— Уизема 212
Модуляционная неустойчивость 270
Молекулярные цепочки 340

Надбарьерное отражение 56
Нелинейная дисперсия 216
Нелинейный резонанс волн 228
Несоразмерные структуры 335
Неустойчивость локальная 100, 241

Облако Оорта 355
Опрокидывание волны 43, 188, 189
Опрокидывания время 45, 189
Особые точки 80
Отображение 31
— диссипативное 147
— Пуанкаре 33
— с подкручиванием 299
— сепаратрисное 131
— стандартное 34, 35, 119
— универсальное 116

Параболическое уравнение 317
Перемешивание 99
Перемешивающий биллиард 308
Период колебаний 20
Периодические орбиты 112
Плазмонный конденсат 269
Предельные циклы 82, 91
Пуанкаре индекс 85
— теорема о возвратах 111
Пуассона скобки 26

Размерность разветвлений 184
— стохастического аттрактора 181
— Хаусдорфа 177
Распад плазмона 223
Распадная неустойчивость 221
Распадный спектр 218
Резонанс 27
— внутренний 41
— волн 228
— волна — частица 42, 294
— нелинейный 72, 313, 333
— — внутренний 76
Резонансов перекрытие 127, 128, 133
Рейнольдса число 192
Ренормализационная группа 180
Репеллер 145
Ротатор 24
Ротаторы связанные 142
Ряды степенные 38

Самосжатие волновых пакетов 318
Самофокусировка 320
Сепаратриса 12, 17
Солитон 195
Спектр динамической системы 100
— колебаний 14
— маятника 18
— ударной волны 192
Спектральное разложение 30
Спиновые цепочки 336
Стационарная волна 193, 215, 321
Степени свободы волны 210
Стохастическая паутина 152, 298
Стохастический нагрев 168, 175, 289
— слой 129, 137
Стохастическое море 120
— ускорение 168, 171, 175
Стохастичности критерий 119
Стохастичность 96

Тода цепочка 31
Топологическая эквивалентность 37, 83
Тор инвариантный 27
Турбулентность сильная 252, 258
— слабая 252
— солитонная 275

Ударная волна 192, 193
Укручение волн 45, 188
Улама модель 168
Уравнение КдВ 194
— Ландау — Лифшица 217
— синус-Гордона 202
Усреднение в быстрых полях 49
Усреднения метод 46
Устойчивость структурная 86

Фазовая капля 15
Фазовый объем 10
— портрет 12
Ферми — Паста — Улама проблема 245
Финитность движения 10, 144
Фокера — Планка — Колмогорова уравнение 159
Фононов кинетика 250
Фракталы 177, 179

Хаос 96

Циклы Пуанкаре 111

Число Маха 200

Эллиптическая точка 13
Энтропия Колмогорова — Синая 104
Эргодичность 98

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Часть I. **ЧАСТИЦЫ** 9

Глава 1. **Элементы динамики** 9

§ 1. Фазовое пространство 9

Траектории и фазовый поток (9). Гамильтоновские системы (10). Теорема Лиувилля (11). Уравнение непрерывности (11).

§ 2. Системы с одной степенью свободы 12

Фазовый портрет (12). Переменные «действие — угол» (13). Спектр нелинейных колебаний (14). Расплывание фазовой капли (15).

§ 3. Пример: нелинейный маятник 16

Траектории нелинейного маятника (16). Спектр нелинейного маятника (18). Общие свойства периода колебаний (20).

§ 4. Еще два примера нелинейных колебаний 21

Нелинейные колебания плазмы (21). Колебания в прямоугольной яме (23). Ротатор (24).

§ 5. Интегральные инварианты Пуанкаре 25

Первый интегральный инвариант (25). Теорема Лиувилля (25).

§ 6. Многомерные интегрируемые системы 26

Первые интегралы движения (26). Теорема Лиувилля — Арнольда (27). Инвариантные торы (27). Резонансы (27). Переменные «действие — угол» (28). Однозначность инвариантных торов (29). Следствия (29). Спектральное разложение (30). Нетривиальный пример (цепочка Тоды) (31).

§ 7. Отображения 31

Дискретное время (32). Отображение Пуанкаре (33). Равновесие атомных цепочек (33).

§ 8. Заключительные замечания 35

Комментарии к главе 1 36

Глава 2. **Приближенные методы** 36

§ 1. Теория возмущений 37

Возмущение и топология фазового пространства (37). Ряды по степеням возмущения (38). Возмущение свободного движения (38). Резонансы и малые знаменатели (39). Внутренние резонансы (41). Резонанс волна — частица (42). Опрокидывание фронта волны (43). Замечание о степенных рядах (45).

§ 2. Метод усреднения 46

Теорема об усреднении (46). Усредненные уравнения (47). Уравнение Ван дер Поля (48). Движение в быстропеременных полях (49). Маятник с осциллирующей точкой подвеса (51). Вихревой дрейф (52).

§ 3. Адиабатические инварианты 54

Определение адиабатических инвариантов (54). Усреднение уравнений (55). Изменение адиабатического инварианта (56). Адиабатические инварианты при $N \geqslant 2$ (57) Нарушение адиабатической инвариантности (58). Почти адиабатические инварианты (60).

§ 4. Заряженные частицы в магнитном поле 60

Дрейфовое приближение (60). Адиабатические инварианты (62).

§ 5. Линейные аналогии адиабатической инвариантности 63

Линейный осциллятор с переменной частотой (63). Квантовомеханическая аналогия (64). Обход особенностей в комплексной плоскости (65). Матрица перехода (67). Переходное излучение (68). Замечание о роли нелинейности (69).

Комментарии к главе 2 70

Глава 3. **Специальные методы** 71

§ 1. Нелинейный резонанс 72

Уравнения резонанса (72). Свойства нелинейного резонанса (74). Внутренний нелинейный резонанс (76).

§ 2. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ) 77
Основная задача динамики (78). Теорема об устойчивости (78). Теорема о сохранении инвариантных торов (Колмогоров — Арнольд) (78). Следствие (79).
§ 3. Структурные свойства фазовых траекторий 80
Классификация особых точек (80). Предельные циклы (82). Топологическая эквивалентность (83). Индексы Пуанкаре (85). Пример 1 (85). Пример 2 (85). Пример 3 (85). Пример 4 (85). Следствие (86). Структурная устойчивость (86).
§ 4. Простейшие бифуркации 87
Тангенциальная бифуркация (88). Смена устойчивости (89). Бифуркация удвоения (89). Бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа (ПАХ) (89). Бифуркация удвоения периода (92). Теорема Шарковского (95). Замечание о бифуркациях (95).
Комментарии к главе 3 95

Глава 4. **Эргодическая теория и хаос** 95
§ 1. Эргодичность и перемешивание 96
Мера в фазовом пространстве (96). Эргодичность (98). Перемешивание (99). Спектр (100).
§ 2. *K*-системы 100
Локальная неустойчивость (100). Пример (102). Связь перемешивания с локальной неустойчивостью (103). *K*-системы (103). Энтропия Колмогорова — Синая (104).
§ 3. Примеры 105
Пример 1 (106). Пример 2 (107). *У*-системы Аносова (107). Биллиарды (109).
§ 4. Возвраты и периодические орбиты 110
Теорема Пуанкаре о возвратах (111). Периодические орбиты (112). Пример (113). Синус-отображение (114). Теорема Боуэна (114).
Комментарии к главе 4 115

Глава 5. **Хаос в деталях** 116
§ 1. Универсальное отображение для нелинейных колебаний 116
Структура отображения (116). Вывод отображения (118). Критерий стохастичности (119). Структура фазового пространства (120). Стохастическое море (120). Спектральные свойства (121). Временные масштабы (124). Редукция к одномерному перемешиванию (125). Одномерный коррелятор (125).
§ 2. Перекрытие резонансов 127
Построение системы резонансов (127). Условие перекрытия резонансов (128).
§ 3. Образование стохастического слоя 129
Динамика вблизи сепаратрисы (129). Отображение вблизи сепаратрисы (130). Ширина стохастического слоя (131). Перекрытие резонансов вблизи сепаратрисы (133). Гомоклиническая структура (135). Стохастический слой нелинейного резонанса (137).
§ 4. Разрушение интегралов движения 139
Природа разрушения интегралов (139). Двумерные колебания (140). Связанные роторы (142).
§ 5. Стохастические аттракторы 144
Финитность движения (144). Аттракторы и репеллеры (144). Стохастический аттрактор (145). Квазиаттракторы (146).
§ 6. Примеры стохастических аттракторов 146
Стандартное диссипативное отображение (147). Условие появления стохастичности (149). Структура стохастического аттрактора (150). Стохастический аттрактор при перекрытии резонансов (151).
§ 7. Общие замечания о появлении хаоса 152
«Стохастическая паутина» (152). Диффузия Арнольда (153). Кантор-торы (154). Замедление диффузии (155). Число вращения (156). Переход КАМ-тор → кантор-тор (156). «Дьявольская лестница» (157).
Комментарии к главе 5 157

Глава 6. **Элементы кинетики** 158
§ 1. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова 159
Структура уравнения (159). Временные масштабы (159). Вывод кинетического уравнения (160). Дивергентная форма кинетического уравнения (161). Влияние границы стохастичности (162). Корреляционные эффекты (163).
§ 2. Кинетика при диссипативных отображениях 166
Структура кинетического уравнения (166). Динамика моментов (167).
§ 3. Стохастическое ускорение и «нагрев» частиц 168
Стохастичность и идеи нагрева и ускорения (168). Модель Улама (168). Ускорение в поле тяжести (171). Стохастический нагрев в поле волнового пакета (172). Влияние трения на динамику в волновом пакете (176).
Комментарии к главе 6 176

Глава 7. **Фрактальные свойства хаоса** 177
§ 1. Фракталы 177
Хаусдорфова размерность (177). Примеры (178). Определение фрактала (179). Связь с ренормализационной группой (180).

§ 2. Фракталы и **хаос** 181
Размерность стохастического аттрактора (181). Фрактальные свойства локализации мод (183). Размерность разветвления (184). Распределения и спектральная плотность (184).
Комментарии к главе 7 186

Часть II. **ВОЛНЫ** 187

Глава 8. **Нелинейные нестационарные волны** 187
§ 1. Укручение волн 187
Бегущие волны (187). Опрокидывание фронта волны (188). Роль диссипации. Уравнение Бюргерса (189). Число Рейнольдса (192). Спектр ударной волны (192).
§ 2. Стационарные волны 193
Ударная волна (193). Влияние дисперсии. Уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ) (194). Спектр периодических волн (196). Нелинейная дисперсия (197).
§ 3. Примеры стационарных волн 198
Ионно-звуковые волны (198). Критическая скорость (199). Магнитозвуковые волны (200). Уравнение синус-Гордона (202).
§ 4. Бесстолкновительные ударные волны 203
Формирование волны (203). Структура фронта волны (204). Магнитозвуковая ударная волна (205). Образование «бора» (207). Ускорение ионов на фронте волны (208).
Комментарии к главе 8 208

Глава 9. **Гамильтоновское описание волн** 209
§ 1. Вариационные принципы 210
Степени свободы (210). Лагранжиан (211). Метод Уизема (212). Гамильтоновский формализм (213). Стационарные волны (215). Канонические переменные (216).
§ 2. Резонансное взаимодействие волн 218
Распадные и нераспадные спектры (218). Уравнения для волн (219). Эволюция волнового триплета (220). Распадная неустойчивость (221). Аналогия с параметрическим резонансом (222). Распад плазмона (223).
§ 3. Резонансы нелинейных волн 224
Константа связи (224). Внешнее возмущение (225). Укороченные уравнения (227). Нелинейный резонанс (228).
§ 4. Взаимодействие нелинейных волн 230
Малый параметр взаимодействия (230). Неодномерный ионный звук (231). Взаимодействие двух волн (232). Взаимодействие трех волн (234).
Комментарии к главе 9 237

Глава 10. **Хаос в волновых полях** 237
§ 1. Слабонелинейные поля 238
Построение отображения (238). Локальная неустойчивость фаз (241). *K*-энтропия (243). Расцепление корреляций (244).
§ 2. Проблема Ферми — Паста — Улама (ФПУ) 245
Уравнения и предпосылки (245). О переходе «дискретность — непрерывность» (245). Оценка области стохастичности (246).
§ 3. Турбулентность слабонелинейного поля 248
Основное кинетическое уравнение (248). Кинетика фононов (250). Слабая турбулентность (252).
§ 4. Стохастическая неустойчивость нелинейной волны 252
Канонические уравнения (253). Расстояние между резонансами (254). Перекрытие резонансов (255). Диффузионная динамика волны (255).
Комментарии к главе 10 257

Глава 11. **Сильная турбулентность** 258
§ 1. Модель Лоренца 259
Уравнения модели Лоренца (259). Линеаризация (260). Последовательность бифуркаций (261). Аттрактор Лоренца (262).
§ 2. Конвективные ячейки 262
Конвекция Бенара — Рэлея (263). Неустойчивости (265). Переход к турбулентности (265). Электрогидродинамическая конвекция (266). Турбулентность и неупорядоченные структуры (267).
§ 3. Особенности возникновения турбулентности 267
Существует ли сценарий турбулентности? (267). Необходима ли диссипация? (268). Локальная неустойчивость и фрактальность (268). Центральный пик (268). Пространственно-временной хаос (268).
§ 4. Ленгмюровская турбулентность 269
Образование «плазмóнного конденсата» (269). Модуляционная неустойчивость (270). Коллапс ленгмюровских колебаний (272). Турбулентность (274).
§ 5. Солитонная турбулентность 275
Комментарии к главе 11 276

Глава 12. **Точно интегрируемые волновые уравнения** 277
§ 1. Интегрирование КдВ-уравнения 277
Операторные пары Лакса (277). Метод ОЗР (279). Солитонные решения (280). N-солитонные решения (281). Интегралы движения (283).
§ 2. Интегрируемые уравнения 284
Комментарии к главе 12 284

Часть III. **ПРИМЕРЫ** 285

Глава 13. **Движение частиц в волновых полях** 285
§ 1. Регулярная и стохастическая динамика частиц в поле волнового пакета . . 285
Времени- и пространственноподобные волновые пакеты (285). Отображения (286). Динамика в пространственноподобном пакете (288). Кинетика стохастического нагрева частиц (289). Обобщение (291).
§ 2. Движение в магнитном поле и поле волнового пакета 292
Уравнение движения (293). Резонансы «волна — частица» (294). Перекрытие резонансов продольного движения (295). Кинетическое уравнение (296).
§ 3. Парадокс исчезновения затухания Ландау 297
§ 4. Стохастическая паутина 298
Отображение с подкручиванием (298). Резонансное подкручивание (299). Фазовая плоскость (300). Резонанс α_1 (301). Образование стохастической паутины (304). Симметрия фазовой плоскости (304). Диффузия (306).
Комментарии к главе 13 307

Глава 14. **Биллиарды** 308
§ 1. Перемешивающие биллиарды 308
Анализ траекторий (308). Кинетика частицы в биллиарде (310).
§ 2. Нелинейная динамика лучей 311
Уравнения траектории луча (312). Нелинейный пространственный резонанс (313). Пример (314). Двумерные сечения (315).

Глава 15. **Нелинейная оптика** 316
§ 1. Нелинейная геометрическая оптика 316
Узкие волновые пучки (316). Параболическое уравнение (317). Самосжатие волновых пакетов (318). Самофокусировка (320). Пороги устойчивости (320). Стационарные волны (321).
§ 2. Нелинейные кооперативные явления при взаимодействии поля излучения с веществом 322
Кооперативные эффекты (323). Атомы + поле излучения как динамическая система (324). Связанное состояние атомов с полем излучения (326). Разрушение связанного состояния (328).
Комментарии к главе 15 330

Глава 16. **Структурные свойства одномерных цепочек** 331
§ 1. Атомные цепочки 331
Дискретное уравнение синус-Гордона (332). Стационарные состояния цепочки (332). Нелинейный резонанс в структурах (333). Несоразмерные структуры (335).
§ 2. Спиновые цепочки 336
Условия равновесия (336). Эквивалентная динамическая система (337). Хаотические структуры и ближний порядок в них (338).
§ 3. Возбуждение в молекулярных цепочках 340
Описание модели (340). Коллективные возбуждения (341).
Комментарии к главе 16 343

Глава 17. **Возмущения в задаче Кеплера** 344
§ 1. Нелинейная динамика в кулоновском поле 344
Параметры движения (344). Переменные действие — угол (345). Спектральные свойства (346).
§ 2. Возбуждение и ионизация атома водорода 347
§ 3. Диффузия эксцентриситета орбит в гравитационном поле планет 349
Масконы (349). Мультипольное разложение (350). Изменение интегралов движения (351). Резонансы и их ширина (351). Перекрытие резонансов (352). Диффузионные орбиты (354).
§ 4. Диффузия комет из облака Оорта 355
Облако Оорта (355). Простейшее отображение (356). Диффузия орбит (358). Другие возмущения (359).
Комментарии к главе 17 359
Список литературы 360
Предметный указатель 367