

ХАОС И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Настоящая монография является одним из классических обзоров по хаосу. Автор проводит читателя от традиционных курсов по дифференциальным уравнениям и классической механике к быстро развивающимся областям нелинейной динамики и хаоса, представляя при этом «старые» и «новые» понятия с единой точки зрения. В книге удачно сочетается одновременное рассмотрение проблем нелинейной динамики и хаоса с одной стороны, и вопросов интегрируемости динамических систем с другой стороны. Большое внимание уделяется хаосу в гамильтоновых системах, показываются взаимосвязи между классическим хаосом и соответствующим квантовомеханическим поведением систем, а также изучаются интегрируемые уравнения, обладающие солитонными решениями. Материал излагается с использованием современных геометрических и аналитических методов.

Для студентов математических, физических и инженерных специальностей, а также всех, интересующихся проблемами хаоса в динамических системах.

Содержание

Предисловие	3
Глава 1. Динамика дифференциальных уравнений	5
1.1. Интегрирование линейных уравнений второго порядка	5
1.1. а. Интегрирование в квадратурах	5
1.1. б. Затухающий осциллятор	8
1.2. Интегрирование нелинейных уравнений второго порядка	9
1.2. а. Эллиптические функции Якоби	10
1.2. б. Эллиптические функции Вейерштрасса	12
1.2. в. Периодическая структура эллиптических функций	13
1.2. г. Уравнение маятника	13
1.3. Динамика в фазовой плоскости	15
1.3. а. Фазовый портрет маятника	17
1.3. б. Фазовые портреты консервативных систем	18
1.4. Линейный анализ устойчивости	21
1.4. а. Матрица устойчивости	21
1.4. б. Классификация неподвижных точек	22
1.4. в. Примеры анализа неподвижных точек	24
1.4. г. Предельные циклы	28
1.5. Интегралы, зависящие от времени	30
1.6. Неавтономные системы	31
1.6. а. Осциллятор с вынуждающей силой	32
1.6. б. Затухающий осциллятор с вынуждающей внешней силой	33
1.7. Дальнейшие замечания об интегрировании дифференциальных уравнений	34
Приложение 1.1. Эллиптические функции	37
Список литературы	39
Глава 2. Динамика гамильтоновых систем	40

2.1. Формализм Лагранжа	40
2.1. а. Функция Лагранжа и принцип Гамильтона.	40
2.1. б. Свойства Лагранжиана	43
2.1. в. Свойства обобщенных импульсов	44
2.2. Формализм Гамильтона	45
2.2. а. Переход к формализму Гамильтона	45
2.2. б. Уравнения Гамильтона	47
2.2. в. Скобки Пуассона	49
2.3. Канонические преобразования	50
2.3. а. Сохранение фазового объема	51
2.3. б. Оптимальное преобразование	53
2.3. в. Производящие функции	53
2.4. Уравнение Гамильтона— Якоби и переменные действие— угол	57
2.4. а. Уравнение Гамильтона— Якоби в случае одной степени свободы	58
2.4. б. Переменные действие— угол в случае одной степени свободы	59
2.5. Интегрируемые гамильтонианы	62
2.5. а. Сепарэбельные системы	62
2.5. б. Свойства интегрируемых систем	63
2.5. в. Примеры интегрируемых систем	66
2.5. г. Движение на торах	69
2.5. д. Фундаментальные вопросы	70
Приложение 2.1. Преобразования Лежандра	71
Приложение 2.2. Геометрические представления в классической механике	72
Список литературы	79
Глава 3. Классическая теория возмущений	80
3.1. Элементарная теория возмущений	80
3.1. а. Регулярные ряды возмущений	81
3.1. б. Сингулярные ряды возмущений	81
3.1. в. Регулярные ряды возмущений для дифференциальных уравнений	82
3.2. Каноническая теория возмущений	85
3.2. а. Ряды возмущений для уравнения Гамильтона— Якоби	86
3.2. б. Решения с точностью до первого порядка по ε	87
3.2. в. Решения с точностью до более высоких степеней по ε	89
3.2. г. Возмущенный осциллятор	90
3.3. Большое число степеней свободы и проблема малых знаменателей	91
3.3. а. Малые знаменатели	92
3.3. б. Фундаментальная проблема	93
3.4. Теорема Колмогорова— Арнольдз— Мозера	93
3.4. а. Суперсходящаяся теория возмущений	95
3.4. б. Теоретико-числовые свойства частот	96
3.4. в. Другие аспекты КАМ-теоремы	99
3.5. Резюме по КАМ-теореме и ее вариантам	99

3.5. а. Автономные системы	99
3.5. б. Отображения	100
3.5. в. Периодические системы	101
3.5. г. Точки устойчивого равновесия	102
Список литературы	103
Глава 4. Хаос в гамильтоновых системах и сохраняющие площадь отображения	104
4.1. Поверхность сечения	104
4.1. а. Поверхности сечения для гамильтонианов с двумя степенями свободы	104
4.1. б. Гамильтониан Хенона— Хейлеса	106
4.1. в. Цепочка Toda	107
4.1. г. Поверхность сечения как симплектическое отображение	108
4.2. Сохраняющие площадь отображения	110
4.2. а. Отображения поворота	110
4.2. б. Отображения на плоскости	112
4.2. в. Взаимосвязь между сохраняющими площадь отображениями и гамильтонианами	115
4.2. г. Дискретные лагранжианы	116
4.2. д. Стандартное отображение	116
4.3. неподвижные точки и теорема Пуанкаре— Биркгофа о неподвижной точке	117
4.3. а. Касательное отображение	118
4.3. б. Классификация неподвижных точек	119
4.3. в. Теорема Пуанкаре— Биркгофа о неподвижной точке	120
4.4. Гомоклинные и гетероклинные точки	123
4.4. а. Пересечения H^+ и H^-	123
4.4. б. Усы и завитки	126
4.5. Критерии локального хаоса	127
4.5. а. Показатели Ляпунова	127
4.5. б. Спектры мощности	131
4.6. Критерии возникновения глобального хаоса	132
4.6. а. Метод перекрытия резонансов	133
4.6. б. Метод Грина	140
4.7. Статистические понятия сильно хаотических систем	143
4.7. а. Эргодичность	143
4.7. б. Перемешивание	144
4.7. в. Преобразование пекаря и системы Бернулли	146
4.7. г. Иерархия неупорядоченности	148
4.8. Гамильтонов хаос в гидродинамических системах	149
4.8. а. Основные положения гидродинамики	149
4.8. б. Модельная система	151
4.8. в. Экспериментальные результаты	152

Приложение 4.1. Поверхность сечения как симплектическое отображение	157
Список литературы	158
Глава 5. Динамика диссипативных систем	161
5.1. Диссипативные системы и турбулентность	161
5.1. а. Уравнение Навье— Стокса	161
5.1. б. Понятие турбулентности	162
5.1. в. Гамильтоновз дигрессия	163
5.2. Экспериментальные наблюдения возникновения турбулентности	165
5.2. а. Течение Куэтта	165
5.2. б. Конвекция Рэлея— Бенара	166
5.3. Теоретические представления о возникновении турбулентности	168
5.3. а. Теория Ландау— Хопфа	168
5.3. б. Теория бифуркации Хопфа	169
5.3. в. Теория Рюэля— Тэкенса	171
5.3. г. Другие сценарии	173
5.3. д. Фракталы	173
5.4. Математические модели странных аттракторов	175
5.4. а. Модель Лоренца	175
5.4. б. Варианты модели Лоренца	180
5.4. в. Отображение Хенона	181
5.5. Бифуркации удвоения периода	184
5.5. а. Механизм удвоения периода	185
5.5. б. Бифуркационная диаграмма	188
5. 5. в. Поведение за пределами $A^{\wedge}$	190
5.5. г. Другие классы универсальности	192
Список литературы	193
Глава 6. Хаос и интегрируемость в квазиклассической механике	195
6.1. Взаимосвязь квантовой и классической механики	195
6.1. а. Квазиклассический предел для задач, зависящих от времени	195
6.1. б. Квазиклассический предел для задач, не зависящих от времени	196
6.2. Метод ВКБ и условия квантования Бора— Зоммерфельда	197
6.2. а. Разложение ВКБ	198
6.2. б. Квантование Бора — Зоммерфельда	199
6.3. Квазиклассическое квантование в случае большого числа степеней свободы	200
6.3. а. Условие квантования Эйнштейна	201
6.3. б. ЭБК-квантование	201
6.3. в. Квазиклассические волновые пакеты	203
6.4. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными значениями	205
6.4. а. Регулярные и нерегулярные связанные состояния	205
6.4. б. Спектр мощности и принцип соответствия	206
6.4. в. Чувствительность к возмущению	207
6.4. г. Распределение расстояний между уровнями	208

6.4. д. Спектральная жесткость	210
6.5. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными векторами	211
6.5. а. Волновые функции регулярных связанных состояний	211
6.5. б. Функция Вигнера	212
6.5. в. Пространственные корреляции волновых функций	213
6.5. г. Некоторые численные результаты	214
6.5. д. Узловые структуры	216
6.5. е. Теоремы локализации	216
6.5. ж. Эксперименты по микроволновой ионизации	217
6.6. Квантовые отображения: эволюция волновых пакетов	217
6.6. а. Классическое отображение	218
6.6. б. Квантовое отображение	218
6.6. в. Эволюция классических и квантовых состояний	220
6.7. Квантовые отображения: квантование с использованием замкнутых траекторий	225
6.7. а. Предварительные сведения из квантовой механики	225
6.7. б. Квазиэнергетический спектр	226
6.7. в. Пропагатор квантового отображения	227
6.7. г. Вычисление следа пропагатора	229
6.7. д. Обсуждение метода замкнутых траекторий	231
Приложение 6.1. Метод стационарной фазы	232
Список литературы	235
Глава 7. Нелинейные эволюционные уравнения и солитоны	237
7.1. История вопроса	237
7.1. а. Наблюдения Рассела	237
7.1. б. Эксперимент ФУП	238
7.1. в. Открытие солитона	239
7.2. Основные свойства уравнения КдФ	240
7.2. а. Эффекты нелинейности и дисперсии	240
7.2. б. Решение типа бегущей волны	242
7.2. в. Автомодельные решения	243
7.2. г. Законы сохранения	244
7.2. д. Преобразование Миуры	245
7.2. е. Инвариантность Галилея	246
7.3. Обратное преобразование рассеяния: основные принципы	247
7.3. а. Взаимосвязь с квантовой механикой	247
7.3. б. Аналогия с преобразованиями Фурье	248
7.3. в. Прямая задача рассеяния	250
7.3. г. Обратная задача рассеяния	250
7.4. Обратное преобразование рассеяния: уравнение КдФ	251
7.4. а. Изоспектральная деформация	252
7.4. б. Эволюция данных рассеяния	253
7.4. в. Двухсолитонное решение	255

7.4. г. Более общие решения	256
7.4. д. Пара Лакса	258
7.5. Другие солитонные системы	259
7.5. а. Модифицированное уравнение КдФ	259
7.5. б. Уравнение $\sin$ -Гордона	260
7.5. в. Нелинейное уравнение Шрёдингера	262
7.5. г. Общая схема ОНР	263
7.6. Гамильтонова структура интегрируемых систем	265
7.6. а. Функциональная производная	265
7.6. б. Гамильтонова структура уравнения Кортвега— де Фриза	267
7.6. в. Гамильтонова структура нелинейного уравнения Шрёдингера	269
7.7. Динамика неинтегрируемых эволюционных уравнений	269
7.7. а. Самофокусирующие сингулярности	270
7.7. б. Уравнения Захарова	271
7.7. в. Когерентность и хаос	272
Список литературы	272
Глава 8. Аналитическая структура динамических систем	275
8.1. В поисках интегрируемых систем	275
8.1. а. Работа Ковалевской	276
8.1. б. Работа Пенлеве	279
8.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной области	280
8.2. а. Локальные представления	280
8.2. б. Общие и особые решения	284
8.2. в. Пси-ряд	285
8.2. г. Эллиптические функции и алгебраические кривые	286
8.3. Интегрируемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений	288
8.3. а. Система Хенона— Хейлеса	288
8.3. б. Интегрируемые системы с подвижными точками ветвления	292
8.3. в. Система Лоренца	293
8.3. г. Почему «работает» свойство Пенлеве?	296
8.3. д. Структура сингулярностей неинтегрируемых систем	297
8.4. Свойство Пенлеве дифференциальных уравнений в частных производных	299
8.4. а. Обобщенное разложение Лорана	299
8.4. б. Примеры свойства Пенлеве для у.ч.п.	301
8.4. в. Пара Лакса и преобразования Бэклунда	303
Список литературы	304
Указатель	306

Указатель

Абелевы интегралы, многообразия, функции	288	уравнения $\sin$ -Гордона	262
Абель Нильс	288	уравнения КдФ	243
автомодельные		уравнения мКдФ	259
решения:		алгебраически интегрируемые системы	297

алгебраические кривые 287
анализ ведущего члена разложения
 вблизи особенности 280
аналитическая структура и
 интегрируемость 36
— — эллиптических функций
 13
Аносова системы 148
антикинк 261
Арнольда диффузия 66
— отображение 144-146
Бернулли система 148
— уравнение 83
бионы 265
бифуркация:
 камертона 192
 касательная 191
 сверхкритическая 170
 седло-узел 192
 удвоения периода 173, 184
Бора—Зоммерфельда правило
 квантования 200
бризеры 265
Бугру преобразование 279
Бэклунда преобразование
 304
Бюргерса уравнение 301
Ван-дер-Поля осциллятор 28
вариационная производная
 265-267
Вигнера распределение 208
— функция 212
В КБ разложение 198
внешнее дифференцирование 77
— произведение 51, 76
внутренний кризис 189
Вольтерра уравнения 25
вычет периодической траектории
 142, 229
Галилея инвариантность уравнения
 КдФ 246
Гамильтона принцип 40-41
Гамильтона—Якоби уравнение:

в случае одной степени свободы
58-59
зависящее от времени 57
и каноническая теория
возмущений 86-87
не зависящее от времени
57
гамильтониан:
 86
 переход к формализму 45, 71-72
уравнения движения 47-49
функция 45-47
гамильтонова
 структура:
 нелинейного уравнения
 Шрёдингера 269
уравнения Кортвега—де Фриза
267
Гарднера уравнение 246
Гельфанда—Левитана—Марченко
уравнение 251
гетероклидная точка 124
гетероклинные точки, их свойства
123—125
— — отображения Арнольда
145
гидродинамика:
 формализм Лагранжа 149
 формализм Эйлера 149
гиперболическая неподвижная
точка 22
— — — для сохраняющего площадь
отображения 119
гиперболическая-с-отражением
 неподвижная точка для
 сохраняющего площадь
 отображения 119
гиперэллиптические интегралы 34,
287
голономные связи 40, 46
гомоклидная точка 124
— траектория 124
гомоклинные осцилляции
126

- точки, их свойства 123-125
- — отображения Арнольда 145
- Грина метод и возникновение хаоса 140-143
- функция в квантовой механике 225
- Данные рассеяния 248
- —, их эволюция 253
- двойкопериодические функции 12, 13
- двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера 270
- двухкинковое решение уравнения $\sin$ -Гордона 262
- двухсолитонное решение уравнения КдФ 255-256
- де Бройля длина волны 197
- деформационный параметр 248, 251
- дискретные лагранжианы 116
- — и квантовые отображения 218
- дисперсионное соотношение для уравнения КдФ 242
- дифференциальные формы:
 - 1-форма 56, 74
 - 2-форма 51, 76
 - n-форма 77
- Дюффинга осциллятор 33
- Естественная граница 298
- Зависящий от времени интеграл для модели Лоренца 295-296
- завитки:
 - в лагранжевой турбулентности 150, 152
 - их свойства 126, 127
- завихренность 164
- задача двух тел 80
- трех тел 80
- законы сохранения 244-245
- — и уравнение Гарднера 246
- замкнутые траектории 69
- — и квазиклассическое квантование 225-232
- — и спектральная жесткость 210
- затухающий осциллятор 8
- — с вынуждающей внешней силой 33
- Захарова уравнения 271—272
- золотое сечение:
 - и метод Грина 143
 - и цепные дроби 98
- Излучение в нелинейных эволюционных уравнениях 258
- изоспектральная деформация 252
- изотропность пространства 42
- изоэнергетическая невырожденность 100
- инертные многообразия 181
- инерциальная система отсчета 42
- интеграл движения 6
- действия 41
- , зависящий от времени 9, 30—31
- интегралы эллиптические 9
- интегрирование в квадратурах 5-8
- дифференциальных уравнений, дальнейшие замечания 34-36
- интегрируемые гамильтоновы системы:
 - и уравнения в частных производных 265-269
 - их свойства 63, 66
 - примеры 66-68
- иррациональные числа 98
- КАМ-теорема:
 - для автономных систем 99
 - для отображений 100
 - для периодически возмущаемых систем 101
 - для устойчивых точек равновесия 102
 - основные понятия 93—95
- камертона бифуркация 192

каноническая теория
возмущений:
85-91
высших порядков 89
для большого числа степеней
свободы 91-92
для возмущенного осциллятора
90
и малые знаменатели 92
первого порядка 87-89
канонические преобразования 50-
57
канторово множество 173, 174
канторы 117
Карри аттрактор 180
касательная бифуркация 191
касательное отображение 118
— пространство 74
— расслоение 44,
74
касательный вектор
73
катастроф теория
234
каустики 199
— в квантовых отображениях 222
квазиклассические волновые пакеты
203-204
квазиклассический предел:
для задач, зависящих от
времени 195-196
как сингулярный предел
196
квазипериодические
траектории 69
квазиэнергетический спектр
226
квантовое отображение:
квантование с использованием
замкнутых орбит 229-232
пропагатор 227-228
формулировка 218-220
эволюция состояний 220-224
кинк 261

Клеро уравнение 284
Ковалевская Софья 276
Ковалевской экспоненты
282
ковариантные величины
44, 72
Колмогорова энтропия 130
консервативные системы
18
— —, их фазовые портреты 18—
20
контравариантные величины 44,
72
Кортевега—де Фриза (КдФ)
уравнение:
93
гамильтонова структура 267-
269
двухсолитонное решение 255-
256
обратное преобразование
рассеяния 251-254
основные свойства 240-247
открытие солитона 239-240
первоначальный вывод
238
Коха снежинка 173
Коши—Ковалевской теорема
300
коэффициент отражения 250
— прохождения 250
кремоново преобразование
112
кризис 189
Лагранжа многообразие
203
лагранжева турбулентность
150
лагранжиан:
дискретный 116
общие свойства 43-44
переход к гамильтонову
формализму 45-47, 72
уравнения движения 42

функция и принцип Гамильтона 40-42
лазерный измеритель скорости Допплера 165
Лакса пара 258
— — и свойство Пенлеве 279, 303
Ландау—Хопфа теория турбулентности 168
Лежандра преобразования 45, 71—72
Ли алгебра 50
линеаризующие преобразования 7
линейный анализ устойчивости 21—29
линии тока 150
— уровня 18
Лиувилля теорема 48
— — в терминах дифференциальной геометрии 78
— — и канонические преобразования 52
логистическое отображение: бифуркационная диаграмма 188—189
его необратимость 191
удвоение периода 185-188
феноменология 184
эргодическое поведение 190
Лози отображение 184
локальные представления решений дифференциальных уравнений 280
Лорана ряд 281-282
Лоренца модель: зависящие от времени интегралы 296
ее аналитическая структура 293-296
зависящие от времени интегралы 295
и странный аттрактор 178-180
классы интегрируемости 295

основные свойства 175-180
Ляпунова
показатели: 127
для отображений 128
для потоков 129
их расчет 130
Малые знаменатели, проблема 92
Маслова индексы 203
матрица устойчивости 21
маятник: его период 14
сепаратриса 17
фазовый портрет 17
и метод перекрытия резонансов 137-138
решение в терминах эллиптических функций 13-14
мероморфные функции 13
метод стационарной фазы 227, 232-234
микроволновая ионизации атомов водорода 217
микроканонический ансамбль 66
Миуры преобразование 245-246
многопериодические траектории 69
модифицированное уравнение КдФ (мКдФ): и преобразование Миуры 245
обратное преобразование рассеяния 264
простейшие свойства 259-260
Навье—Стокса — 161
неавтономные системы 31-34
— — с невырожденными гамильтонианами 67,70
нелинейная обратная связь 33
нелинейное преобразование Фурье 254
— уравнение Шрёдингера 262, 264

необратимое отображение 191

неподвижные точки:

21

их классификация:

гиперболическая 22

звезда, устойчивая и

неустойчивая 23

несобственный узел,

устойчивый и неустойчивый

23

узел, устойчивый и

неустойчивый 22

фокус, устойчивый и

неустойчивый 22

эллиптическая 22

несостоятельность линейного

анализа 27

примеры:

затухающий линейный

осциллятор 24

маятник 25

нерегулярный спектр:

определение 205

свойства собственных значений

205-210

свойства собственных функций

211-217

Нетер теорема 44

неустойчивые многообразия 22,

123-125

неустойчивый узел 22

— фокус 22

нормировочная константа 250

Ньюеля—Уайтхеда уравнение 272

Ньютона уравнения движения 40

Ньютона—Рафсона метод и

суперсходящаяся теория

возмущений 95

Обобщенные импульсы:

их свойства 44-45

как градиент действия 45

как ковариантные

величины 43

— координаты 40

образование ударной волны 240

обратимые отображения 113, 182

обратная задача рассеяния 248, 250-

251

обратное преобразование рассеяния

(ОПР):

254

для нелинейного уравнения

Шрёдингера 264

для уравнения $\sin$ -Гордона 264

для уравнения КдФ 251-258

для уравнения мКдФ 264

основные принципы 247-

251

общие и особые решения 284

однородность времени 42

осциллятор:

Ван-дер-Поля 28

Дюффинга 33, 34

гармонический 5—6

затухающий линейный 8—9

неавтономный 31-34

с вынуждающей силой 32

с кубическим потенциалом 20

с потенциалом четвертой

степени 19

отображения, сохраняющие площадь:

Хенона 112-114

и гамильтонианы 115-116

и поверхность сечения 108-110

на плоскости 112-114

поворота 110-112

Параболическая неподвижная

точка 120

пекаря преобразование 146

Пенлеве Поль 279

— свойство:

279

для обыкновенных

дифференциальных

уравнений 282, 288-292

для уравнений в частных

производных 299-303

и интегрируемость 296

и пара Лакса 303
и преобразование
Бэклунда 303
— уравнения:
первого и второго типов 35, 244
третьего типа 262
первая вариация интеграла
действия 41
первый интеграл 6 перекрытие
резонансов:
для стандартного отображения
138
метод 133-139
основная идея 134
перемежаемость 173, 180
переменные действие—
угол:
в квазиклассическом
квантовании 200, 201
для большого числа степеней
свободы 62-63, 66-68
для одной степени свободы
59-62
перемешивание 144
период колебаний 7
плотность состояний:
и квантование с
использованием замкнутых
траекторий 225-232
формула Томаса—Ферми
208
поверхность сечения:
в экспериментах по
хаотической адвекции 151-156
для систем, зависящих от
времени 109
для системы Хенона—Хейлеса
106
для цепочки Тода 107
как симплектическое
отображение 108-110, 157
основные свойства 104—106
подвижные особенности,
определение 278

понижение порядка
дифференциального уравнения
6
предельные циклы 28-29, 168
принцип соответствия 206
производящие функции 53—57
пространственно-временной хаос 162
пространственные корреляции
волновых функций 213
прямая задача рассеяния 247, 250
пси-ряд 283, 285-286
Пуазейля течение 167
Пуанкаре инварианты 51, 78
Пуанкаре—Биркгофа теорема о
неподвижной точке 120-123
Пуанкаре—Картана инвариант:
и поверхность сечения 157
как дифференциальная 1-форма
56, 75
Пуассона распределение
энергетических
уровней 209
— скобки:
49
в гамильтоновой механике
49-50
для уравнения КдФ 268
— формула суммирования 227
Равномерное приближение 199, 234
распределение расстояний между
уровнями 208-209
Рассел Джон Скотт 237
растяжение и складывание 172
расширенное фазовое
пространство 47
регулярный спектр:
определение 205
свойства собственных значений
205-210
свойства собственных функций
211-217
резонансы в обыкновенном
осцилляторе 33

- и исследование аналитической структуры 282
- , иллюстрация 134
- рекуррентные
 - соотношения 281
- Реслера аттрактор 181
- решение типа бегущей волны:
 - уравнения $\sin$ -Гордона 260
 - уравнения КдФ 242
 - уравнения мКдФ 259
- Риккати уравнение 29, 31
- Рэля число 176
- Рэля—Бенара конвекция:
 - в модели Лоренца 175-176
 - экспериментальные наблюдения 166-167
 - неустойчивость 167
- Рюэля—Тэкенса теория 171-173
- Самофокусирующиеся сингулярности 270-271
- сверхкритическая бифуркация 170
- седло-узел бифуркация 192
- секулярные члены в теории возмущений 84
- сепарабельные системы 58, 62—63
- сепаратриса:
 - 17
 - для осцилляторов с потенциалом третьей и четвертой степени 20
 - маятника 17
 - устойчивые и неустойчивые многообразия 123
- симплектическое многообразие 44
- сингулярные задачи теории возмущений 81
- многообразия 299
- след пропагатора 229
- Смэйла отображение подковы 172
- солитон:
 - первое наблюдение 237
 - построение численного решения 239-240
- сохраняющие площадь отображения:
 - и гамильтоновы системы 115
 - и поверхность сечения 108
 - на плоскости 112
 - обратимое ИЗ отображения поворота 110
- спектральная жесткость 210
- спектры мощности:
 - 131
 - в гидродинамических экспериментах 166
 - для классических траекторий 131-132
 - и принцип соответствия 206
- стадион:
 - собственные значения 207
 - собственные функции 214-216
- стандартное отображение:
 - и метод Грина 141-143
 - метод перекрытия резонансов 138
 - на фазовой плоскости 116
- Стокса теорема 77
- странные аттракторы:
 - для модели Карри 180
 - для модели Лоренца 178-180
 - для модели Реслера 181
 - для осциллятора Дюффинга 34
 - для отображения Хенона 181-184
 - основные свойства 171-173
- структура особенностей:
 - неинтегрируемых систем 297, 298

и Ковалевская 276-279
субдукция 189
субкритическая бифуркация 170
суперсходящаяся теория возмущений
95-96
существенные особенности 278, 283
Теорема о неподвижной точке
Пуанкаре— Биркгофа 122
— Пуанкаре—Хопфа
64
теоремы локализации
216
теория возмущений:
для дифференциального
уравнения второго порядка 84-
85
для дифференциального
уравнения первого порядка 82-
84
и секулярные члены 84-85
регулярная 81
сингулярная 81-82
— чисел и свойства частот
96—99
течение Куэтта 165-166
Хода цепочка 107
тождества соответствия 200
торы:
движение на них 69—70
и интегрируемые гамильтоновы
системы 64
и определение переменных
действия 64
их сохранение при возмущении
70, 94
точечные вихри 164
— преобразования 51
точка неустойчивого равновесия 17
— устойчивого равновесия
17
точки ветвления:
логарифмические 286
рациональные 292
— равновесия маятника 17

траектории с периодом 3, 3-циклы
188, 191
турбулентность, понятие 162
Удвоение периода:
бифуркационная диаграмма
188—189
в сохраняющих площадь
отображениях 192
основной механизм 185-188
универсальность 184, 188
узловые структуры собственных
функций 216
уравнения Гамильтона 47
усреднение в канонической теории
возмущений 88
устойчивые многообразия 22, 123-
125
устойчивый фокус 22
усы:
в лагранжевой турбулентности
150, 152
их свойства 126
Фазовая плоскость 15
— траектория 15
фазовое
пространство:
15
гамильтоновых систем 48
его симплектическая структура
44, 49, 72-78
фазовый объем, его сохранение:
в терминах дифференциальной
геометрии 51, 78
и теорема Лиувилля 48
при канонических
преобразованиях 51
— портрет:
15
консервативных систем 18—
21
маятника 17-18
— поток 15
Фейгенбаума число 184
Ферми—Улама—Паста эксперимент:

и статистическое распределение по энергии 93
и уравнение КдФ 238
фракталы 171, 173-175
фундаментальная проблема Пуанкаре 93
функции эллиптические 9
функциональная итерация 185
— ренормализация групп 188
функция тока 150, 163
Фурье преобразование и линейные эволюционные уравнения 248
Хаос, определение 32
хаотическая адвекция 150
характеристики 240
Хаусдорфа—Безиковича размерность 174
Хенона отображение: сохраняющее площадь 112-114
странный аттрактор 181-184
Хенона—Хейлеса
 гамильтониан:
 аналитическая структура 288-293
 поверхность сечения 106-107
 собственные функции 214
Хопфа теория бифуркации 169-171
Хопфа—Коле преобразование 301
Целые функции 13
— — и интегрируемость 296
цепные дроби 97-98
— — и метод Грина 140
циклические координаты 43
цилиндрический подшипник, эксперимент по хаотической адвекции 151
Число Рейнольдса 151, 162
чувствительность к возмущению 207

— к начальным условиям 32
Шварца производная 188
ЭБК-квантование 201-203
Эйлера—Пуассона уравнение 276
Эйнштейн и квазиклассическое квантование 201
Эйри функция 7
— — и равномерное приближение 234
эллиптическая неподвижная точка 22
эллиптические кривые 287
— неподвижные точки и сохраняющие площадь отображения 119
— — — и теорема Пуанкаре—Биркгофа 117-123
— функции:
 Вейерштрасса 10, 12-13
 Якоби 10-12
 и алгебраическая геометрия 10, 287—288
 и решение уравнения маятника 13-15
 их общие свойства 37-38
 их периодическая структура 13
 их аналитическая структура 287
эллиптический интеграл первого рода 11
энергетическая поверхность 66
эргодичность 66
Якоби тождество 50, 268
якобиан преобразований 51
С-системы 148
К -системы 148
N-солитонное решение 258
sin-Гордона уравнение:
 в поле внешней силы 272
 обратное преобразование рассеяния 264
 простейшие свойства 260—262

Предисловие

Цель данного вводного курса состоит в том, чтобы обеспечить переход от традиционных курсов по дифференциальным уравнениям и классической механике к быстро развивающимся областям нелинейной динамики и хаоса и представить «старые» и «новые» концепции в едином широком контексте.

Такой подход к изложению обусловлен тем, что многие студенты физических и инженерных специальностей (с соответствующим базовым образованием по дифференциальным уравнениям и классической механике), стремящиеся освоить новые интересные результаты, связанные с хаосом в динамических системах, склонны иногда считать, что эта «новая» область знаний существенно отличается от «старых» курсов. Я полагаю, что более полное понимание «новых» идей может быть достигнуто, если рассматривать их как естественное развитие «старых». Один из способов подчеркнуть эту преемственность основан на использовании уравнений движения Гамильтона. Эти фундаментальные уравнения классической механики создают естественную основу для обсуждения динамики (в фазовом пространстве) систем дифференциальных уравнений, которые могут проявлять как регулярное, так и хаотическое поведение. Большое внимание уделено концепции интегрируемости, поскольку прочное ее усвоение существенно углубляет понимание динамики неинтегрируемых систем и значение фундаментальной КАМ-теоремы. Эта концепция лежит также в основе изложения интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных и динамики солитонов в заключительных главах книги.

Первые четыре главы, а именно «Динамика дифференциальных уравнений», «Динамика гамильтоновых систем», «Классическая теория возмущений» и «Хаос в гамильтоновых системах и сохраняющие площадь отображения» составляют ядро книги; уровень изложения вполне доступен способным студентам старших курсов и начинающим аспирантам и предполагает наличие знаний, лишь немного выходящих за рамки стандартных курсов по дифференциальным уравнениям и классической механике. Конечно, определенную часть материала, составляющего содержание этих глав, можно найти в других книгах и обзорах, но цель (и надежда на ее достижение) состояла в том, чтобы изложить «старые» и «новые» понятия с единой точки зрения. При этом гамильтонова динамика изложена во второй главе хотя и «традиционным» образом, но с определенным «геометрическим» уклоном. Для этого в главу включено приложение «Геометрические представления в классической механике», связанное с основным текстом посредством ряда подстрочных примечаний. Оно призвано помочь студентам по возможности безболезненно перейти (если они хотят этого) от «традиционного» к «геометрическому» формализму механики.

Основное содержание большинства недавно появившихся прекрасных книг по хаосу и нелинейной динамике составляют диссипативные динамические системы. По приведенным выше соображениям данный курс посвящен в основном хаосу в гамильтоновых системах. Тем не менее для полноты изложения в книгу включена одна глава (глава 5), посвященная диссипативной динамике. По возможности подчеркнута взаимосвязь с динамическими концепциями предыдущих глав, а также с реальными задачами гидродинамики.

Последние три главы представляют собой попытку показать широту и разнообразие проблем нелинейной динамики. Уровень изложения по сравнению с пре-

дыдущими главами несколько повышается; предполагаются знания в рамках курсов элементарной квантовой механики (главы 6 и 7) и теории функций комплексной переменной (глава 8). Глава 6 служит введением в современное изучение возможных взаимосвязей между классическим хаосом и соответствующим квантовомеханическим поведением систем в «квазиклассическом пределе». Глава 7 посвящена динамике нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе и интегрируемых уравнений, обладающих солитонными решениями. На первый взгляд может показаться, что изучение хаоса и солитонов взаимно исключает друг друга, поскольку в первом случае речь идет о свойствах неинтегрируемых, тогда как во втором — о свойствах интегрируемых систем. Мне, однако, представляется весьма важным совместное изучение этих концепций. Существенно продвинуться в понимании реальных физических задач, связанных с пространственно-временным хаосом (таких, как гидродинамическая турбулентность) можно, лишь изучая одновременно хаос и интегрируемость как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в случае дифференциальных уравнений в частных производных.

Последняя глава «Аналитическая структура динамических систем» вводит читателя в круг идей другой современной области исследований, связанной с попытками отыскать общность в труднообозримом разнообразии свойств обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных — независимо от того, интегрируемы они или нет — путем анализа особенностей их решений в комплексной области.

Книга может быть использована для чтения двухсеместрового курса, в котором материал общего характера первых четырех или пяти глав излагается в первом семестре; второй семестр посвящается более специальным темам, изложенным в последних трех главах. При этом необходимо учитывать, что по своему замыслу книга в значительной степени рассчитана на прочтение в целом. Разделы и подразделы, помеченные звездочкой, содержат более сложный материал или технические детали и при первом чтении могут быть опущены, что не нарушит связности изложения.

Необходимо подчеркнуть, что книга не является исчерпывающим, даже с современной точки зрения, обзором по хаосу. В соответствии с этим я старался включать в рассмотрение только хорошо обоснованные физические модели и соответствующие ссылки. Число публикаций чрезвычайно возросло за последние годы, и я не пытался составить полную библиографию (задача на данном этапе практически нереальная). Поэтому я приношу свои извинения тем многочисленным авторам, чьи блестящие работы здесь не упомянуты.

Мне особенно приятно поблагодарить моих аспирантов Франка Кариелло, Джоел Чекен и Грегори Левина за их существенную помощь в подготовке рукописи. Ни одну из глав я не считал завершенной без их скрупулезного анализа и конструктивной критики. Если окажется, что в глазах студенческой аудитории эта книга имеет какие-либо достоинства, то в немалой степени этому способствовали их старания.

Наконец, я хочу поблагодарить В. Г. Льюиса за помощь в подготовке рисунков и Луизу Винтер за героические усилия по переписке рукописи.

М. Табор
Нью-Йорк
Ноябрь 1988

Глава 1

Динамика дифференциальных уравнений

1.1. Интегрирование линейных уравнений второго порядка

Интегрирование даже простых дифференциальных уравнений следует рассматривать как нечто существенно большее, чем просто технические упражнения в математике. Оно может — особенно в случае уравнений, описывающих динамические системы, — проливать свет на глубинные геометрические свойства этих систем.

Хорошо известное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.1.1)$$

(здесь « $\cdot$ » означает производную по времени $\frac{d}{dt}$) описывает движение частицы под действием линейной возвращающей силы, т. е. малые колебания. Преимущественно здесь используются стандартные обозначения; так, $\omega = \sqrt{k/m}$, где k — силовая постоянная, m — масса частицы. Для такого простого уравнения решение «автоматически» находится с помощью подстановки $x(t) = e^{at}$:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (1.1.2)$$

Две постоянных интегрирования — амплитуду a и сдвиг фазы δ — можно найти из начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)}, \quad \delta = \arctg \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)} \right). \quad (1.1.3)$$

1.1.а. Интегрирование в квадратурах

Вернемся к уравнению (1.1.1) и решим его другим способом, который на первый взгляд может показаться более сложным. В качестве первого шага удобно, хотя в этом и нет особой необходимости, представить (1.1.1) в виде пары взаимосвязанных уравнений первого порядка, а именно

$$\dot{x} = y, \quad (1.1.4a)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \quad (1.1.4b)$$

Такое представление, как мы вскоре убедимся, весьма целесообразно, особенно для гамильтоновых систем (рассматриваемых в главе 2), так как позволяет получить гораздо более «геометрическую» картину движения. Умножая обе стороны (1.1.4a) на $\omega^2 x$, а обе стороны (1.1.4b) на y , и складывая оба уравнения, приходим к тождеству

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \quad (1.1.5)$$

Левая часть представляет собой производную по времени $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2)$, откуда очевидным образом следует, что заключенное в скобки выражение есть постоянная величина:

$$\frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2) = I_1. \quad (1.1.6)$$

Постоянную (по времени) функцию I_1 называют обычно *интегралом движения* или *первым интегралом*. Поскольку $y = \dot{x}$, I_1 можно отождествить с механической энергией системы. Эта величина может быть использована для перехода от системы из двух уравнений (1.1.4) к одному уравнению. Выразив y в явном виде через x и I_1 из (1.1.6), $y = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}$, преобразуем (1.1.4а) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}. \quad (1.1.7)$$

Это уравнение можно представить в виде интегралов с разделенными переменными или в *квадратурах*:

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}}. \quad (1.1.8)$$

Интегрируя обе части (1.1.7), мы, разумеется, получаем вторую постоянную интегрирования (которую обозначим I_2), что позволяет написать

$$t + I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}}. \quad (1.1.9)$$

Легко видеть, что интегрирование в правой части приводит к функции арксинуса:

$$t + I_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{x\omega}{\sqrt{2I_1}} \right). \quad (1.1.10)$$

На данном этапе t представлено как (многозначная) функция от x , но простое обращение приводит в этом случае к результату

$$x(t) = \frac{\sqrt{2I_1}}{\omega} \sin(\omega t + I_2\omega), \quad (1.1.11)$$

который, разумеется, полностью эквивалентен полученному ранее (1.1.2). Отметим, что наши рассуждения включали четыре существенных этапа:

- 1) идентификация первого интеграла;
- 2) использование интеграла I_1 для понижения порядка дифференциального уравнения на единицу;
- 3) «интегрирование» в явном виде, т.е. в квадратурах;
- 4) обращение, приводящее к однозначному решению.

Для такого простого уравнения, как (1.1.1), может показаться, что этот путь (представляющийся довольно запутанным) не имеет преимуществ по сравнению с подстановкой $x(t) = e^{\alpha t}$, приводящей к тому же решению. Однако с появлением в дифференциальном уравнении нелинейных членов более естественно «интегрирование в квадратурах», так как метод простых подстановок неприменим. Вместе с тем, как это скоро станет ясно в ходе изложения, существуют серьезные причины

динамического характера, в силу которых многие — если не большинство — уравнений не могут быть проинтегрированы в квадратурах, особенно если их порядок превышает два¹⁾.

Вновь подчеркнем, что возможность проинтегрировать уравнение представляет собой нечто большее, чем просто математическую тонкость. Здесь мы проникаем в самое сердце системы, познавая глубинные ее свойства.

В историческом аспекте развитие методов интегрирования дифференциальных уравнений (первая попытка принадлежит Исааку Ньютону²⁾) составляло основной предмет деятельности математиков восемнадцатого и девятнадцатого столетий. Значительной виртуозности достиг выдающийся математик Якоби, разработавший эффективную теорию эллиптических функций, которая может быть использована при интегрировании определенных классов нелинейных дифференциальных уравнений. Прежде чем перейти к рассмотрению таких уравнений, целесообразно обсудить некоторые дополнительные аспекты линейной системы (1.1.1) и ее модификаций.

Период движения линейной системы (1.1.1) легко находится из решения (1.1.2), представленного в явном виде: полный цикл движения завершается за время $T = 2\pi/\omega$. Этот результат можно также получить, исходя из решения в квадратурах (1.1.8), если вычислить определенный интеграл, пределы которого определяются концевыми точками движения. Выражая первый интеграл I_1 в явном виде как механическую энергию $E = \frac{1}{2}(\dot{x} + \omega^2 x^2)$, определяем эти пределы интегрирования: $x = \pm\sqrt{2E}/\omega$ (квадратный корень в (1.1.8) в этих двух точках обращается в ноль). Таким образом, время, необходимое для завершения полного цикла движения, составляет

$$T = 2 \int_{-\sqrt{2E}/\omega}^{\sqrt{2E}/\omega} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.1.12)$$

Очевидно, что период в случае данной линейной системы не зависит от энергии (или, что эквивалентно, от начальных условий). Сравним с простой нелинейной системой

$$\ddot{x} + \beta x^3 = 0, \quad (1.1.13)$$

которая может соответствовать движению частицы под действием нелинейной возвращающей силы (с «силовой постоянной» β). Первый интеграл для (1.1.13) легко

¹⁾ Действительно, технические трудности могут иногда возникать даже в случае уравнений низших порядков. Например, нелинейное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = x^2$$

интегрируется элементарно (проделайте это!), в то время как неавтономный вариант

$$\dot{x} = x^2 - t$$

не может быть разрешен в квадратурах (проверьте!). В данном конкретном случае, однако, подстановка $x = \dot{y}/y$ позволяет перейти к линейному уравнению второй степени

$$\ddot{y} + ty = 0,$$

для которого известно сходящееся решение в виде степенного ряда, именуемого *функцией Эйри*. Используемая подстановка служит примером «линеаризующего» преобразования. Такая линеаризация равносильна полному аналитическому решению задачи в квадратурах. Мы вернемся к такого рода точным линеаризациям в главе 7.

²⁾ Однако первое интегрирование в современных обозначениях обычно связывают с именем Лейбница — по всей видимости, оно было выполнено 11 ноября 1672 г. (Краткий исторический обзор Инца (1956).)

вычисляется, $I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$, и снова может быть интерпретирован как механическая энергия системы E . Определенный интеграл, эквивалентный (1.1.12), имеет в данном случае вид

$$T = 2 \int_{-(4E/\beta)^{1/4}}^{(4E/\beta)^{1/4}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{4}\beta x^4)}} \quad (1.1.14)$$

и допускает (что весьма удачно) явное представление в терминах гамма-функции (Γ):

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta^{1/2}}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) E^{-1/4}. \quad (1.1.15)$$

Теперь период явным образом зависит от энергии. В данном конкретном случае он убывает с ростом энергии, т. е. чем сильнее возбуждена частица, тем быстрее завершается цикл ее движения. Мы можем также связать с движением эквивалентную характеристику (теперь тоже зависящую от энергии) — частоту $\omega(E)$, задаваемую соотношением $\omega(E) = 2\pi/T(E)$.

Этот простой пример иллюстрирует чрезвычайно важное различие между линейными и нелинейными системами: в случае последних характеристическая частота зависит от энергии (или, что эквивалентно, от начальных условий). Это становится особенно важным, когда система подвергается возмущению или воздействию внешней силы.

1.1.6. Затухающий осциллятор

Вернемся к линейному уравнению (1.1.1), которое легко преобразовать таким образом, чтобы включить в рассмотрение действие силы трения:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1.16)$$

где λ — коэффициент «затухания» или коэффициент «трения». Решение (1.1.16) вновь наиболее просто находится с помощью подстановки $x(t) = e^{\alpha t}$, что приводит к

$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \delta), \quad (1.1.17)$$

где в данном случае частота ν задается соотношением $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$ (предполагается, что $4\omega^2 > \lambda^2$, так как при $4\omega^2 < \lambda^2$ решение чисто затухающее), а амплитуда a и фаза δ могут быть определены из начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ (хотя они и не такие, как для (1.1.1)). Понятно, что наличие силы трения приводит к замедлению движения, и решение (1.1.17) соответствует затухающим колебаниям. При $\lambda \ll \omega$ характеристический период $2\pi/\nu$ мало отличается от соответствующей величины $2\pi/\omega$ для случая незатухающих колебаний. В этом пределе еще имеет смысл говорить о средней механической энергии, представляющей собой сумму среднего (т. е. усредненного по периоду) квадрата скорости $(\dot{x})^2$ и среднего квадрата смещения $(x)^2$: $\bar{E} = \frac{1}{2}[(\dot{x})^2 + \omega^2(x)^2]$. Однако она не является сохраняющейся величиной, и легко показать, что

$$\bar{E}(t) = E(0)e^{-\lambda t}, \quad (1.1.18)$$

где $E(0)$ — начальное значение «энергии». Придавая особое значение идее интегрирования в квадратурах, естественно задать вопрос, можно ли и систему (1.1.16), записанную в виде пары уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad (1.1.19a)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \lambda y, \quad (1.1.19b)$$

представить в полностью интегрируемом виде. В случае незатухающих колебаний энергия представляла собой не зависящий от времени первый интеграл, что позволяло понизить порядок системы. В рассматриваемом случае эта величина, как было показано, не сохраняется. Поэтому не исключено, что интегрирование в квадратурах невозможно. Однако, как мы увидим в разделе 1.5, для одного значения λ можно ввести *зависящий от времени интеграл*, позволяющий в явном виде понизить порядок. Такие зависящие от времени интегралы встречаются довольно редко, и, соответственно, те немногочисленные случаи, в которых они могут быть найдены, представляют определенный интерес.

1.2. Интегрирование нелинейных уравнений второго порядка

Нелинейность дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы (колебания, химические реакции, рост популяций и т. д.), — скорее правило, чем исключение. Достаточно широкий класс нелинейных уравнений второго порядка может быть представлен в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x), \quad (1.2.1)$$

где $F(x)$ — полином, рациональная или трансцендентная функция от x . В случае полинома, например,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (1.2.2)$$

мы легко можем записать уравнение в квадратурах

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1)}}, \quad (1.2.3)$$

где I_1 — интеграл движения. Задача заключается в вычислении интеграла в правой части (1.2.3). Если нелинейность не превышает x^3 , задача может быть решена в «явном виде», и решение (1.2.1) представимо в терминах так называемых *эллиптических функций*. Эллиптические функции представляют собой естественное обобщение обычных тригонометрических функций ($\sin$, $\cos$ и т. д.). *Эллиптические интегралы*, соответственно, являются обобщением обратных тригонометрических функций ($\arcsin$, $\arccos$ и т. д.). Следуя простой логике, не так уж трудно понять, каким образом могут возникать такие функции. Для линейной задачи (1.1.1) ключом к решению являлось вычисление интеграла (1.1.8), который представлялся в виде функции $\arcsin$. Если интеграл включает более высокую степень x (скажем, $\sqrt{1-x^3}$, $\sqrt{1-x^4}$ и т. д.), то вполне естественно предположить, что соответствующий интеграл должен представлять собой функцию, обратную к более сложной периодической функции. Теория эллиптических функций была развита независимо Абелем и Якоби. Якоби изложил свои взгляды в фундаментальном труде «Fundamenta Nova Theoriae

Functionum Ellipticarum» (1829). Гаусс (проявивший чрезвычайную осторожность при публикации результатов — замечательное отличие по сравнению с тенденцией, складывающейся в современной науке), вероятно, получил некоторые из этих результатов раньше — ситуация, типичная для того времени. Хотя эллиптические функции позволяют разрешить лишь относительно небольшой класс уравнений вида (1.2.1), в него входят (после соответствующего преобразования) и важные системы, такие, как маятник; уже одно это дает основание немного пополнить наши знания в этой области. Тема чрезвычайно обширна, поэтому мы лишь кратко обсудим некоторые основные идеи³⁾. (Дополнительные технические детали приведены в приложении 1.1.)

Рассмотрим какое-нибудь общее уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \quad (1.2.4)$$

которое может, например, соответствовать уравнению движения частицы под действием силовой функции, разложенной по смещению в ряд до третьего порядка. Как мы скоро увидим, решение этого уравнения может быть представлено в терминах эллиптических функций *Якоби*. Если степень x в правой части (1.2.4) не превышает двух, решение может быть представлено в терминах эллиптических функций *Вейерштрасса*. (Между этими двумя типами функций, как легко понять, существуют различные взаимосвязи.) Более того, если правая часть (1.2.4) имеет другой вид и включает определенные рациональные функции от x и простые трансцендентные функции типа $\sin(x)$ и $\cos(x)$ (возникающие в очень важном уравнении для маятника), интеграл также может быть представлен в терминах тех или иных эллиптических функций.

1.2.a. Эллиптические функции Якоби

Первый интеграл для (1.2.4) может быть легко представлен в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Cx^3 + \frac{1}{4}Dx^4 \right) = I_1. \quad (1.2.5)$$

Для удобства перепишем это выражение следующим образом:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4). \quad (1.2.6)$$

Правая часть может быть факторизована,

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = e(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta), \quad (1.2.7)$$

и затем преобразована (см. приложение 1.1) к каноничному виду (Лежандра)

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2). \quad (1.2.8)$$

³⁾ Рассмотрение эллиптических функций может показаться в чем-то «старомодным». Но на более глубоком уровне связанная с ними алгебраическая геометрия позволяет глубже проникнуть в суть понятия «интегрируемость». Эти идеи будут обсуждаться в дальнейших главах, главным образом в главе 8.

Интегрирование последнего уравнения приводит к выражению

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (1.2.9)$$

правая часть которого называется *эллиптическим интегралом первого рода* и часто обозначается как $F(x, k)$:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}} \quad (1.2.10)$$

(очевидно, что в пределе $k = 0$ это выражение сводится просто к функции $\arcsin$). Эквивалентное выражение может быть получено с помощью преобразования $x = \sin \theta$:

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta'}}. \quad (1.2.11)$$

С эллиптическими интегралами связана обширная терминология (чтобы не перегружать изложение, обсуждение эллиптических интегралов второго и третьего родов вынесено в приложение 1.1); к числу наиболее важных понятий относятся:

- 1) k — модуль;
- 2) $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль;
- 3) $K = F(1, k) = F(\pi/2, k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода;
- 4) $K' = F(1, k') = F(\pi/2, k')$ — дополнительный полный интеграл первого рода.

Эллиптические функции Якоби обратны по отношению к интегралу (1.2.11) (или 1.2.10). Введем величину

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta'}}. \quad (1.2.12)$$

Эллиптическая функция, обозначаемая символом sn , определяется как⁴⁾

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \theta. \quad (1.2.13)$$

Существуют и другие эллиптические функции — например, функция, обозначаемая символом cn , определяется следующим образом:

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \theta. \quad (1.2.14)$$

⁴⁾ При первом чтении определение (1.2.13) может вызвать некоторое замешательство. Происхождение этого определения можно понять, рассмотрев вычисление эллиптического интеграла (1.2.12) (или 1.2.10)) в случае $k = 0$. Это интеграл $\arcsin$, и мы имеем

$$u = \theta \equiv \arcsin(x). \quad (1)$$

Соответственно, для $\sin u$ получаем выражение

$$\sin u = \sin \theta (\equiv x). \quad (3)$$

Теперь вернемся к случаю $k \neq 0$. Правая часть (1) уже не является $\arcsin$, а представляет собой функцию, обратную к более сложной функции, которую мы обозначили sn . Таким образом, (2) трансформируется к виду

$$\operatorname{sn} u = \sin \theta (\equiv x). \quad (3)$$

Аналогия с тригонометрическими функциями ($\sin$, $\cos$), по-видимому, ясна, так же как определение обратных эллиптических функций,

$$u = \operatorname{arcsn}(\sin \theta, k) = \operatorname{arccn}(\cos \theta, k). \quad (1.2.15)$$

Существует множество сбивающих с толку соотношений и тождеств, включающих эллиптические функции; некоторые из них приведены в приложении. Здесь мы коснемся лишь свойств, связанных с их периодичностью. Периоды определяются с помощью введенного выше полного эллиптического интеграла; интеграл K играет роль, аналогичную числу π в случае тригонометрических функций, т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u \pm 2K, k) &= -\operatorname{sn}(u, k), \\ \operatorname{cn}(u \pm 2K, k) &= -\operatorname{cn}(u, k). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Дополнительный полный интеграл K' (точнее, iK') играет роль, аналогичную периоду $i\pi$ гиперболических функций sh и ch ⁵⁾:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u \pm iK', k) &= \frac{1}{k \sin(u, k)}, \\ \operatorname{cn}(u \pm iK', k) &= \frac{i \operatorname{dn}(u, k)}{k \operatorname{sn}(u, k)}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Таким образом, эллиптические функции являются *двоякопериодическими*, т. е. имеют как действительный, так и мнимый периоды.

1.2.6. Эллиптические функции Вейерштрасса

Как отмечалось выше, уравнение вида (1.2.4), если ограничиться членами не выше второй степени по x , может быть решено в терминах эллиптических функций Вейерштрасса. Уравнение, аналогичное (1.2.6), имеет в этом случае кубическую правую часть и может быть представлено в стандартной форме как⁶⁾

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad (1.2.18)$$

(коэффициенты 4 , g_2 и g_3 выбраны здесь так, чтобы обозначения совпадали со стандартными). Квадратура в этом случае имеет вид

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \quad (1.2.19)$$

где кубическая форма факторизована. Величины e_i и g_j связаны стандартными соотношениями

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

⁵⁾ Определение эллиптической функции $\operatorname{dn}(u, k)$ приводится в приложении. — Прим. ред.

⁶⁾ Квадратичные по x члены удалены с помощью простой замены переменных $x \rightarrow x - c/3d$.

Функция, обратная к (1.2.19), представляет собой эллиптическую функцию Вейерштрасса $\mathcal{P}(t)$, т. е.

$$x = \mathcal{P}(t). \quad (1.2.21)$$

Она также двоякопериодична. Обозначив два периода как Ω и Ω' , находим:

$$\mathcal{P}(t + 2\Omega) = \mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(t + 2\Omega') = \mathcal{P}(t). \quad (1.2.22)$$

Существует целый ряд соотношений между Ω , Ω' и K , K' функций Якоби.

1.2.в. Периодическая структура эллиптических функций

Двойная периодичность (т. е. существование как действительного, так и мнимого периодов) эллиптических функций позволяет предположить, что они имеют нетривиальную структуру в комплексной плоскости, т. е. если рассматривать их как функции независимой комплексной переменной. Тригонометрические функции с единственным периодом, такие как $\sin(z)$ и $\cos(z)$, имеют в комплексной z -плоскости очень простую структуру. Они представляют собой *целые* функции, т. е. не имеют сингулярностей в конечной комплексной плоскости. В противоположность им эллиптические функции, как Якоби, так и Вейерштрасса, *мероморфны*, т. е. имеют в комплексной плоскости (изолированные) полюса. Эти полюса образуют регулярную структуру, напоминающую решетку, которая отражает двойную периодичность рассматриваемых функций. Может оказаться, что поведение этих функций в комплексной плоскости (т. е. их *аналитическая структура*) представляет собой фундаментальный фактор, определяющий возможность «проинтегрировать» соответствующие дифференциальные уравнения. Этот глубокий и до сих пор до конца не разрешенный вопрос подробнее обсуждается в главе 8.

1.2.г. Уравнение маятника

Классическое уравнение маятника является наиболее важным нелинейным уравнением, которое может быть точно проинтегрировано в терминах эллиптических функций Якоби. Легко показать, что уравнение движения колеблющейся частицы единичной массы имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (1.2.23)$$

где θ — угол отклонения, L — длина нити, g — гравитационная постоянная (рис. 1.1). В пределе малых отклонений можно ограничиться первым членом разложения функции $\sin$ в ряд, что приводит к стандартному уравнению движения для обыкновенного гармонического осциллятора (ср. (1.1.1))

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (1.2.24)$$

Решение этого уравнения имеет характеристическую частоту $\omega = \sqrt{g/L}$. Первый интеграл (1.2.23) вновь можно рассматривать как (приведенную) механическую энергию E' системы:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{L} \cos \theta = E'. \quad (1.2.25)$$

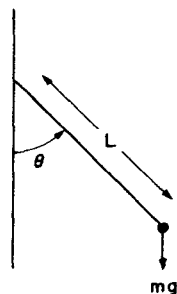


Рис. 1.1. Отклонение классического маятника на угол θ в поле силы тяжести mg

(Здесь $E' = \frac{E}{mL^2}$, где E — истинная энергия системы с массой m .) Квадратура принимает вид

$$t = \int \frac{d\theta'}{\sqrt{2(E' + (g/L) \cos \theta')}} \quad (1.2.26)$$

(для удобства мы опустили вторую постоянную интегрирования, которая в данном случае просто играет роль сдвига по фазе). Интеграл в (1.2.26) может быть преобразован в интеграл первого рода, подобного (1.2.11). Для этого прежде всего необходимо ввести переменную $\cos \omega = -E'(L/g)$, в результате чего (1.2.26) запишется как

$$t = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \omega}}. \quad (1.2.27)$$

Используя преобразования $\cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$ и $k = \sin(\omega/2)$, после несложных выкладок (1.2.27) принимает желаемый вид

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}}, \quad (1.2.28)$$

где явный вид модуля соответствует: $k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E'L}{g}\right)} = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Обращение в терминах эллиптической функции Якоби немедленно дает

$$\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}, k\right) = \sin \varphi = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.2.29)$$

и мы приходим к требуемому результату, выразив θ как явную функцию времени:

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}, k\right) \right]. \quad (1.2.30)$$

Также как в случае линейной задачи, период движения может быть вычислен как определенный интеграл в (1.2.26). Интервал интегрирования ограничен здесь положением равновесия $\theta = 0$ и классической «точкой возврата» $\theta_0 = \arccos(-E'L/g)$, которая по определению является переменной ω . Легко показать, используя преобразования $\cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \varphi$ и $k = \sin(\omega/2)$, что в терминах φ эта точка возврата в точности соответствует $\pi/2$. Учитывая, что период определяется как время, необходимое для завершения полного цикла движения (т. е. от точки $\theta = 0$ к точке θ_0 , затем к точке $-\theta_0$ и обратно к $\theta = 0$), интеграл (1.2.28), вычисленный в пределах от 0 до $\pi/2$, должен быть умножен на 4:

$$T(k) = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (1.2.31)$$

Выражение для периода, таким образом, представляет собой полный эллиптический интеграл, умноженный на простой фактор. Поскольку $F(\pi/2, 0) = \pi/2$, предельное поведение (1.2.29) дает

$$T(0) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.2.32)$$

что в точности представляет собой период обыкновенного гармонического движения, описываемого уравнением (1.2.24). Заменив модуль в (1.2.31) дополнительным модулем $k' = \sqrt{1 - k^2}$, можно вычислить комплексный период

$$T(k') = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \quad (1.2.33)$$

двойкопериодического движения. На первый взгляд понятие комплексного периода для маятника может показаться лишенным физического смысла. Его, однако, можно рассматривать как период, который маятник имел бы при изменении знака гравитации, т. е. если бы мир был перевернут с ног на голову. Это легко видеть

из определения k : $k = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E'L}{g}\right)}$.

1.3. Динамика в фазовой плоскости

До сих пор мы практически не предпринимали попыток наглядно представить себе решения различных обсуждавшихся выше дифференциальных уравнений — за исключением неясной воображаемой картины периодического колебания во времени «определяющей положение переменной» $x = x(t)$. Наиболее ценное описание решения дает изучение его поведения в *фазовой плоскости*. В ряде случаев, как мы увидим, оно может быть проведено даже без интегрирования уравнений движения. Вернемся к представлению линейной задачи (1.1.1) в виде пары уравнений (1.1.4); две (независимые) переменные x и y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это *фазовое пространство* системы; а поскольку оно (существенно) двумерно, мы также будем использовать термин *фазовая плоскость*. В случае системы n уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

каждую из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно рассматривать как независимую координату соответствующего n -мерного фазового пространства.

Понятие фазового пространства имеет смысл для любой системы дифференциальных уравнений, но, как мы убедимся, в случае систем уравнений, описывающих гамильтонову систему, соответствующее фазовое пространство обладает особенно богатой геометрической структурой. Значение фазовых координат (x и y в простом случае (1.1.4)) в любой момент времени полностью определяют состояние системы в этот момент. Как правило, данному решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется *фазовой траекторией* (иногда линией уровня), а движение вдоль траектории — *фазовым потоком*. Далее, вследствие того, что фундаментальным свойством решений дифференциальных уравнений является их однозначность, различные фазовые траектории не пересекаются. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина (иногда весьма сложная) поведения системы. Таковую картину, образованную набором фазовых траекторий, часто называют *фазовым портретом*.

На первый взгляд вовсе не очевидно, в каких областях фазового пространства будут отображены решения уравнений (1.1.4). Наиболее важную роль в этом случае играет существование (постоянного) интеграла движения. В нашем конкретном случае это механическая энергия $E = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2)$. Понятно, что фазовый поток должен быть ограничен эллипсами, наибольшие и наименьшие оси которых определяются энергией E (а, следовательно, начальными условиями $x(0)$ и $y(0)$). Эти эллипсы пересекают ось x в точках $x = \pm\sqrt{2E}/\omega$ (которые, естественно, представляют собой классические «точки возврата», используемые в качестве пределов интегрирования в (1.1.12)), и ось y в точках $y = \pm\sqrt{2E}$ (см. рис. 1.2).

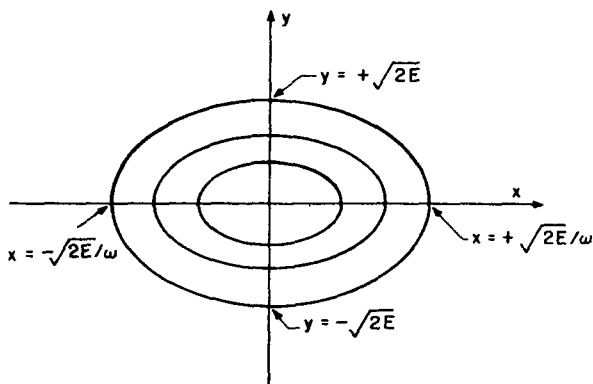


Рис. 1.2. Фазовые траектории обыкновенного гармонического осциллятора (1.1.4)

Таким образом, существование (постоянного) первого интеграла налагает определенную геометрическую связь на фазовый поток, т. е. ограничивает движение в двумерной фазовой плоскости замкнутыми одномерными областями (фазовыми траекториями). Очевидно, начало координат фазовой плоскости, $x = y = 0$, соответствует точке равновесия движения, и фазовый портрет в целом представляет собой набор концентрических эллипсов с центром в этой точке, размер которых увеличивается как гладкая функция энергии.

Напротив, фазовый портрет затухающего линейного осциллятора с трением (1.1.19) существенно отличен. В этом случае нет постоянного первого интеграла, ограничивающего движение. Все решения представляют собой спирали, закручивающиеся вокруг точки равновесия в начале координат (со скоростью, зависящей от коэффициента затухания) (см. рис. 1.3).

В случае нелинейных уравнений (таких как (1.1.13)) с постоянным первым интегралом и ограниченным движением, фазовый портрет снова представляет собой набор концентрических кривых

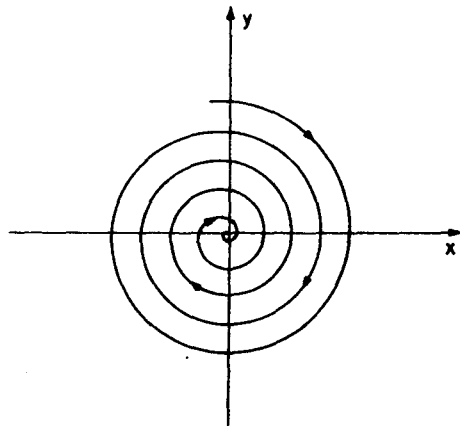


Рис. 1.3. Фазовая траектория затухающего гармонического осциллятора (1.1.19)

(четвертого порядка в данном случае) с центром в начале координат. Если имеются нелинейности более общего характера, как, например, в (1.2.4), фазовый портрет может усложниться, что зависит от знаков различных коэффициентов. Мы обсудим это вскоре.

1.3.a. Фазовый портрет маятника

Вначале рассмотрим фазовый портрет маятника. Чтобы согласовать обозначения, вместо θ и $\dot{\theta}$ в (1.2.23) будем писать x и y соответственно. Поскольку речь идет о системе первого порядка, уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = y, \quad (1.3.1a)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{L} \sin x, \quad (1.3.1b)$$

и им соответствует первый интеграл

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{L} \cos x = E'. \quad (1.3.2)$$

Ряд чисто физических соображений подсказывает, каким образом может быть нарисован фазовый портрет. При малых значениях энергии колебания маятника около точки равновесия $x = y = 0$ будут почти линейны. Понятно, что в этом режиме фазовый портрет будет представлять собой набор кривых с центром в этой точке. С ростом энергии финитные колебания маятника будут возрастать по амплитуде до тех пор, пока он (нить предполагается «жесткой») не «перевалит» через верхнюю точку и не начнет свободно вращаться, увеличивая скорость вращения с дальнейшим ростом энергии. Эта критическая точка достигается тогда, когда маятник обладает достаточной энергией, чтобы преодолеть весь путь, отвечающий изменению угла от состояния покоя $x = 0$ до $x = \pm\pi$; эта энергия равна $E' = g/L$. Точка $x = \pm\pi$, в которой $y = 0$ (т. е. маятник «стоит на голове»), является точкой равновесия, но, естественно, неустойчивого. Далее, вследствие периодичности возвращающей силы нарисованная картинка должна повторяться с периодом 2π вправо и влево от точки $x = 0$. Таким образом, каждая из точек $x = \pm 2n\pi$ является *точкой устойчивого равновесия*, в то время как $x = \pm(2n+1)\pi$ — *точки неустойчивого равновесия*. Заметим, что в точках неустойчивого равновесия происходит переход от колебательного движения к вращательному, что проявляется в размыкании траекторий (соответствующих неограниченному вращательному движению). В целом фазовый портрет приобретает вид, представленный на рис. 1.4. Пара фазовых траекторий, разделяющих колебательное и вращательное движения и пересекающихся в точках неустойчивого равновесия, называется *сепаратрисой*.

Легко получить аналитическое описание движения вдоль сепаратрисы. Энергия в этом случае равна $E' = g/L$, так что модуль принимает значение $k = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{E'L}{g})} = 1$; и, как следствие, бесконечность периода, вычисленного согласно (1.2.31):

$$T(1) = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \infty. \quad (1.3.3)$$

Теперь, если воспользоваться удобным тождеством $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th}(u)$, (см. приложение 1.1), то искомое решение (1.2.30) принимает вид (где мы используем

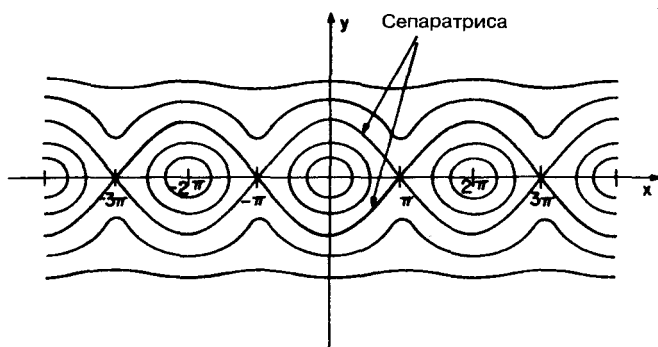


Рис. 1.4. Фазовые траектории маятника (1.3.1). Точкам устойчивого равновесия отвечают координаты $x = \pm 2n\pi$, а точкам неустойчивого равновесия — координаты $x = \pm(2n+1)\pi$

обозначение $x \equiv \theta$)

$$x(t) = 2 \arcsin \left[\operatorname{th} \left(t \sqrt{\frac{g}{E}} \right) \right]. \quad (1.3.4)$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow \pm\pi} \operatorname{th}(x) = \pm 1$, достижение точек неустойчивого равновесия $x = \pm\pi$, требует, очевидно, бесконечно большого времени (т. е. осуществляется экспоненциально медленно). Этот результат, конечно, полностью согласуется с бесконечностью периода (1.3.3).

1.3.6. Фазовые портреты консервативных систем

Существование постоянного первого интеграла у рассмотренных до сих пор систем позволяло нам глобально определять фазовые траектории. Это означает, что явная функция $E = E(x, y)$, представляющая собой механическую энергию, определяла фазовые траектории для произвольных начальных условий. При этом явный вид решения уравнений движения совсем не требовался. Такие системы, для которых энергия представляет собой интеграл движения, называются *консервативными* системами. В тех случаях, когда энергия может быть представлена (в традиционном виде) как сумма кинетической и потенциальной энергий, структура фазовых траекторий (часто называемых для консервативных систем *линиями уровня*) особенно проста. Для рассматриваемого типа систем мы можем записать

$$E = E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x), \quad (1.3.5)$$

где «потенциальная функция» $V(x)$ представляет собой (обычно) некоторую нелинейную функцию от x , например, $V(x) = -(g/L) \cos x$ для маятника или $V(x) = ax^2 + bx^4$ для «кубического осциллятора»⁷⁾. Если считать, что соответствующее уравнение движения

$$\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0 \quad (1.3.6)$$

⁷⁾ В оригинале автор использует термин «quartic oscillator», но более привычно называть колебательную систему по силе; так, к обычному гармоническому осциллятору с квадратичным потенциалом принято обращаться как к *линейному*. — Прим. ред.

описывает движение частицы в потенциальной яме $V(x)$ (хотя уравнение не обязательно должно иметь механическую природу), то физическая интуиция может подсказать способ построения линий уровня. Например, в случае простой линейной системы (1.1.1) потенциальная функция $V(x)$ представляет собой параболу, движение внутри которой всегда ограничено и представляет собой перемещения взад-вперед между классическими точками возврата, определяемыми условием $E = V(x)$ (т. е. $x = \pm \sqrt{2E}/\omega$). Таким образом, вырисовывается вполне очевидное «соответствие» между линиями уровня на рис. 1.2 и классическим движением в потенциале (см. рис. 1.5).

В случае маятника $V(x) = -(g/L) \cos x$ представляет собой периодически расположенных максимумов имеет место ограниченное колебательное движение, а выше этих максимумов движение неограничено (в данном случае вращательное). Максимумы, очевидно, представляют собой точки неустойчивого равновесия (при малейшем возмущении частица скатывается в одну из впадин), тогда как минимумам отвечают точки устойчивого равновесия. И вновь, график функции потенциальной энергии $V(x)$ может быть легко сопоставлен с набором линий уровня (см. рис. 1.6).

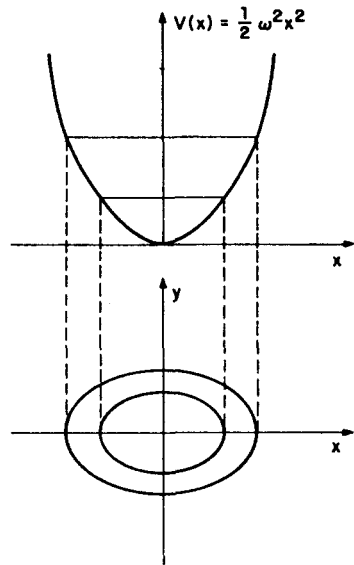


Рис. 1.5. Сопоставление фазовых траекторий для классического движения в потенциале $V(x)$ в случае простого гармонического осциллятора

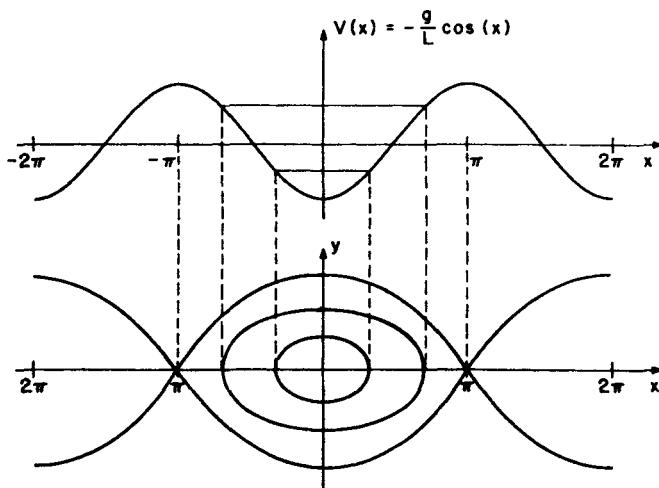


Рис. 1.6. Сопоставление фазовых траекторий для классического движения в случае маятника

Рассмотрим теперь линии уровня, связанные с системой

$$\dot{x} - x + x^3 = 0. \quad (1.3.7)$$

Энергия равна $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, где функция потенциальной энергии имеет вид $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ (здесь снова $y = \dot{x}$). Эта функция (изображенная на рис. 1.7) имеет минимумы при $x = \pm 1$ (их глубина $E = -\frac{1}{4}$) и максимум при $x = 0$; при больших значениях x (как положительных, так и отрицательных) она круто возрастает как парабола четвертой степени. В интервале значений энергии $-\frac{1}{4} < E < 0$ частица будет находиться вблизи одном из двух минимумов и совершать колебательные движения. Соответствующий набор линий уровня будет, очевидно, представлять собой замкнутые кривые с центрами в точках устойчивого равновесия. Если энергия превосходит высоту максимума в точке $x = 0$, колебания будут происходить с большей амплитудой между «внешними стенками» потенциальной ямы. Линии уровня вновь будут представлять собой набор замкнутых траекторий (больших по размеру), на этот раз с центром в точке $x = 0$. Эта точка локального максимума потенциала является, очевидно, точкой неустойчивого равновесия и отделяет движение с малой амплитудой (относительно $x = \pm 1$) от движения с большой амплитудой (относительно $x = 0$). Ясно, что при $E = 0$ линия уровня (имеющая форму восьмерки) является сепаратрисой.

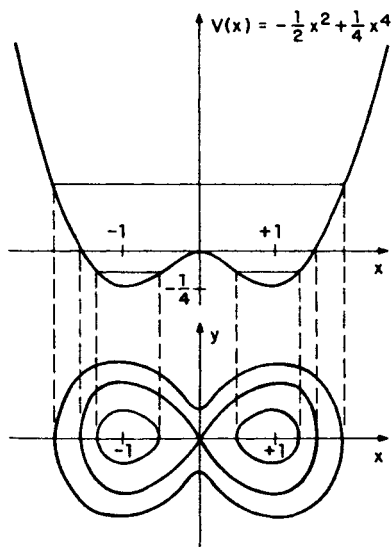


Рис. 1.7. Сопоставление фазовых траекторий для классического движения в случае потенциала четвертой степени

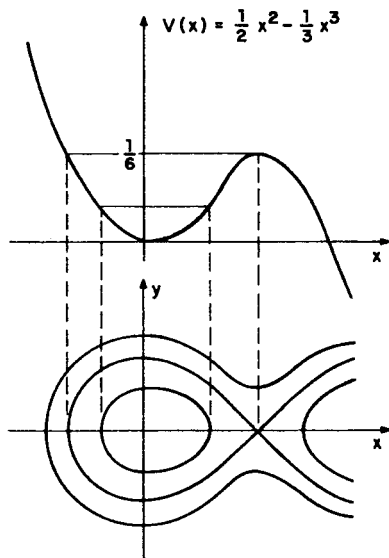


Рис. 1.8. Сопоставление фазовых траекторий для классического движения в случае кубического потенциала

В качестве другого простого примера может служить система

$$\ddot{x} + x - x^2 = 0. \quad (1.3.8)$$

Соответствующая функция потенциальной энергии $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ имеет единственный минимум при $x = 0$ и единственный максимум при $x = 1$ (высотой $E = \frac{1}{6}$). Набор линий уровня, который также легко может быть получен, изображен на рис. 1.8.

1.4. Линейный анализ устойчивости

Глобальный фазовый портрет особенно легко может быть построен для консервативных (одномерных) систем. Важную роль при этом играют точки равновесия, характеризующиеся определенным *локальным* поведением: вокруг устойчивых точек формируются совокупности замкнутых кривых; кривые в окрестности неустойчивых точек имеют гиперболический характер. В случае неконсервативных систем, если явное решение уравнения движения неизвестно, глобальный фазовый портрет построить сложно. Однако всегда можно построить приближенный локальный фазовый портрет, определив точки равновесия (которые в дальнейшем мы будем называть *неподвижными точками*) и нарисовав в их окрестности фазовые траектории. Неподвижные точки можно рассматривать как «организующие центры» динамики системы в фазовом пространстве. Таким образом, определив эти точки и исследовав характер их устойчивости, можно построить глобальную картину поведения системы.

1.4.a. Матрица устойчивости

Рассмотрим системы второго порядка общего вида:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (1.4.1a)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (1.4.1b)$$

где f и g представляют собой произвольные (обычно нелинейные) гладкие функции x и y . Неподвижными точками являются такие значения x и y , обозначаемые x_0 и y_0 , для которых фазовый поток стационарен (т. е. $x = y = 0$):

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad (1.4.2a)$$

$$g(x_0, y_0) = 0. \quad (1.4.2b)$$

Этим условиям может отвечать любое количество точек (x_0, y_0) в зависимости от точного вида функций f и g . После того, как эти точки найдены, их устойчивость можно определить, изучив поведение при малых смещениях $(\delta x, \delta y)$ в окрестности (x_0, y_0) . Разложим f и g в ряд по δx и δy :

$$\delta \dot{x} = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + f_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + \dots, \quad (1.4.3a)$$

$$\delta \dot{y} = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + g_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + \dots. \quad (1.4.3b)$$

Если ограничиться членами первого порядка, то (1.4.3) можно представить в виде линейной системы (1.4.4), которую мы будем называть «линеаризованными» уравнениями (это приближение первого порядка не следует смешивать с методом точной линеаризации, упомянутым на с. 7):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (1.4.4)$$

где матрицу 2×2 (обозначаемую через $\mathbf{M}$) часто называют матрицей устойчивости. Система линейных уравнений первого порядка (1.4.4) (которую не сложно обобщить на случай системы n -го порядка вида $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$) легко разрешима в терминах собственных значений $\mathbf{M}$, определяющих устойчивость соответствующих неподвижных точек. Обозначим вектор-столбец $(\delta x, \delta y)$ через $\delta \mathbf{X}$, а два

собственных вектора, соответствующих двум собственным значениям λ_1 и λ_2 через $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$; тогда общее решение (1.4.4) представляет собой линейную комбинацию

$$\delta \mathbf{X} = c_1 \mathbf{D}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{D}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.4.5)$$

где c_1 и c_2 — произвольные коэффициенты, а собственные значения являются корнями уравнения

$$\det |\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0, \quad (1.4.6)$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Из наших предыдущих рассуждений понятно, что в случае чисто мнимых λ_1 и λ_2 смещение будет просто обращаться вокруг соответствующей неподвижной точки, и локально фазовые траектории будут представлять собой замкнутые эллипсы, что несомненно указывает на устойчивую неподвижную точку. Если, напротив, λ_i ($i = 1, 2$) имеют действительную часть, то смещение в зависимости от знака будет затухать или возрастать экспоненциально, указывая соответственно на определенный тип устойчивости или неустойчивости. Существует целый ряд комбинаций, каждой из которых отвечает неподвижная точка определенного типа; их классификация приводится ниже. Отметим, кстати, что хотя тип устойчивости определяется собственными значениями λ_1 и λ_2 , не следует также пренебрегать собственными векторами $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — их вид указывает направление локальных фазовых потоков.

1.4.6. Классификация неподвижных точек

Случай 1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ — как правило называется *устойчивым узлом*. Локальный поток затухает в обоих направлениях к неподвижной точке, определяемых собственными векторами $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ (рис. 1.9(a)).

Случай 2. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ — *неустойчивый узел*. Локальный поток экспоненциально растет в обоих направлениях от неподвижной точки (рис. 1.9(б)).

Случай 3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ — *гиперболическая точка* (или «седловая» точка). Экспоненциальный рост в одном направлении и экспоненциальное затухание в другом (рис. 1.9(в)). Именно к этому типу относятся точки неустойчивого равновесия маятника и нелинейных осцилляторов (1.3.7) и (1.3.8). Часто входящее и выходящее направления называют *устойчивым* и *неустойчивым* многообразием (сепаратрисы) соответственно.

Случай 4. $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$) — *устойчивый фокус*. Поскольку действительная часть отрицательна (λ_1 и λ_2 , являясь корнями квадратного уравнения, образуют комплексно-сопряженную пару), поток закручивается в спираль по направлению к неподвижной точке (рис. 1.10(a)).

Случай 5. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ — *неустойчивый фокус*. В этом случае действительная часть положительна, и спираль раскручивается в направлении от неподвижной точки (рис. 1.10(б)).

Случай 6. $\lambda_1 = +i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$ — *эллиптическая точка* (или «центр») соответствует вращению локального потока вокруг неподвижной точки. Этот тип устойчивых точек равновесия обсуждался выше в некоторых примерах (рис. 1.10(в)).

В случаях фокусов 4 и 5 и эллиптической точки 6 возникает вопрос, направлен ли поток (входящий или выходящий) по часовой стрелке или против. Ответ можно найти с помощью линеаризованных уравнений (1.4.4), положив $\delta y = 0$, $\delta x > 0$: если $\delta \dot{y} < 0$, то движение «нисходящее» (т.е. локально движение происходит по часовой стрелке), тогда как в случае $\delta \dot{y} > 0$ движение «восходящее» и, следовательно, происходит против часовой стрелки.

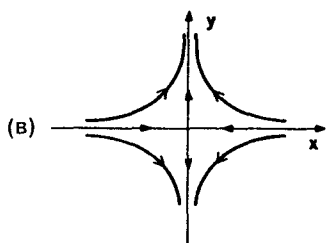
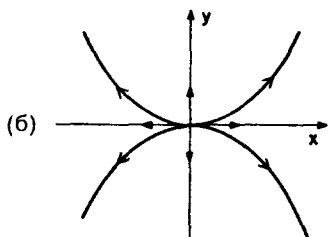
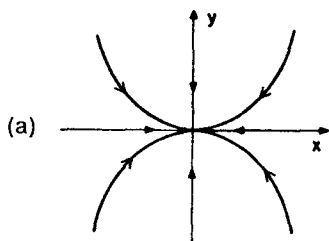


Рис. 1.9. Локальные фазовые потоки для (а) устойчивого узла, (б) неустойчивого узла и (в) гиперболической точки

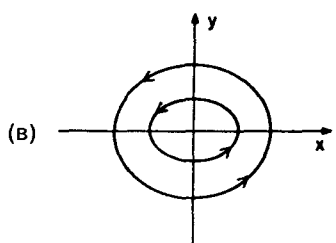
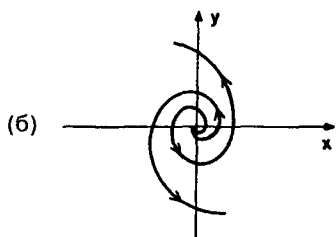
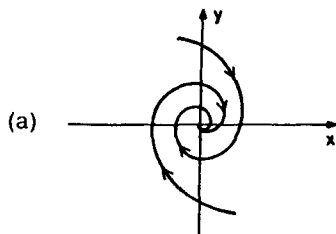


Рис. 1.10. Локальные фазовые потоки для (а) устойчивого фокуса, (б) неустойчивого фокуса и (в) эллиптической точки

До сих пор рассматривались случаи невырожденных корней λ_1 и λ_2 . Если корни вырождены, общее решение (1.4.4) имеет вид

$$\delta X = (c_1 D_1 + c_2 (D_2 + D_1 t)) e^{\lambda t}. \quad (1.4.7)$$

В этом случае тип неподвижных точек будет, очевидно, зависеть от знака и типа собственных векторов D_1 и D_2 .

Случай 7. Если $D_2 = (0, 0)$ (т. е. нулевой вектор, при этом D_1 произволен), то линии потока будут представлять собой независимые, пересекающиеся прямые, образующие

- (а) устойчивую звезду при $\lambda < 0$ (рис. 1.11 (а)),
- (б) неустойчивую звезду при $\lambda > 0$ (рис. 1.11 (б)).

Случай 8. Если D_2 не нулевой вектор, то линии потока будут искривлены, образуя

- (а) устойчивый несобственный узел при $\lambda < 0$ (рис. 1.11 (в)),
- (б) неустойчивый несобственный узел при $\lambda > 0$ (рис. 1.11 (г)).

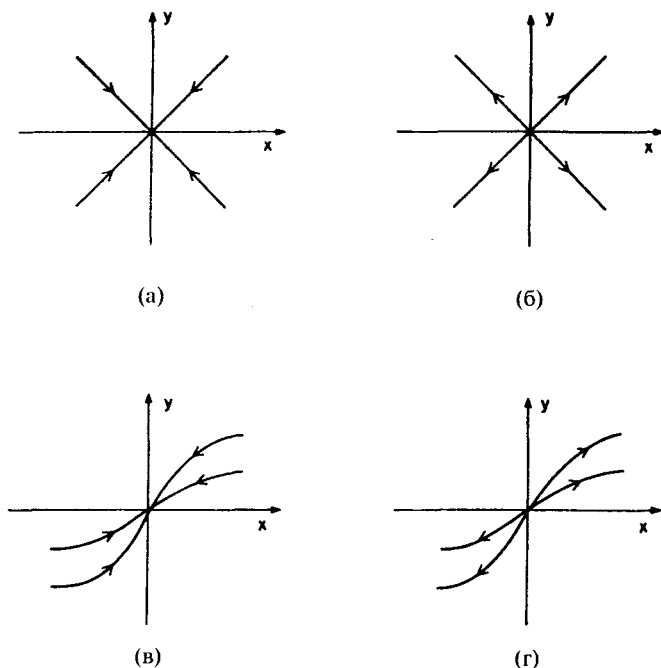


Рис. 1.11. Локальные фазовые потоки для (а) устойчивой звезды, (б) неустойчивой звезды, (в) устойчивого несобственного узла и (г) неустойчивого несобственного узла.

1.4.в. Примеры анализа неподвижных точек

Рассмотрим теперь ряд примеров, иллюстрирующих различные типы анализа неподвижных точек. Прежде всего обратимся к нашему давнему знакомому — затухающему линейному осциллятору (1.1.19); у него имеется единственная неподвижная точка $x_0 = y_0 = 0$. Очевидно, нет никакой необходимости линеаризовать эти уравнения, имеющие в матричной форме вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1.4.8)$$

Нетрудно найти оба собственных значения матрицы $\mathbf{M}$:

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}.$$

В зависимости от относительных значений параметров λ и ω возможны следующие варианты точек.

- При $\lambda^2 > 4\omega^2$ имеем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и, следовательно, точка $(0, 0)$ — устойчивый узел.
- При $\lambda^2 < 4\omega^2$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\lambda/2 + i\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}/2$, и, следовательно, точка $(0, 0)$ — устойчивая спираль.

Полагая в (1.4.8) $\delta y = 0$ и $\delta x > 0$, убеждаемся, что $\delta \dot{y} < 0$. Отсюда следует, что движение по спирали происходит по часовой стрелке (см. рис. 1.3).

- При $\lambda^2 = 4\omega^2$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda/2$; следовательно в этом вырожденном случае точка $(0, 0)$ представляет собой несобственный устойчивый узел.

Другой пример, к которому целесообразно возвратиться, это маятник (1.3.1). Неподвижных точек бесконечно много $(x_n, y_n) = (\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x \frac{g}{L} \cos x_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}. \quad (1.4.9)$$

Собственные значения равны $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{(g/L) \cos x_n}$. При $x_n = 2n\pi$, они приобретают значения $\pm i\sqrt{g/L}$, соответствующие эллиптическим неподвижным точкам, а при $x_n = (2n+1)\pi$ собственные значения $\pm\sqrt{g/L}$ соответствуют гиперболическим неподвижным точкам.

Рассмотрим теперь случай затухающего маятника:

$$\dot{x} = y, \quad (1.4.10a)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{L} \sin x - \lambda y. \quad (1.4.10b)$$

Неподвижные точки по-прежнему занимают те же положения $(x_n, y_n) = (\pm n\pi, 0)$, но линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_n & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (1.4.11)$$

и им соответствуют собственные значения

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{L} \cos x_n}, \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{L} \cos x_n}.$$

В неподвижных точках $(x_n, y_n) = (\pm(2n+1)\pi, 0)$ по-прежнему выполняется соотношение $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, соответствующее гиперболическому поведению. В точках же $(x_n, y_n) = (\pm 2n\pi, 0)$ возникает несколько возможных вариантов.

- $\lambda^2 < \frac{4g}{L}$; λ_1, λ_2 — пара комплексно сопряженных собственных значений (с отрицательной действительной частью); соответствующие устойчивому фокусу с (проверьте это) вращением по часовой стрелке (см. рис. 1.12).
- $\lambda > 4g/L$, что приводит к $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, т. е. это устойчивый узел.
- $\lambda^2 = 4g/L$; здесь мы имеем вырожденный случай $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda/2$, соответствующий устойчивому несобственному узлу.

Поскольку в этом случае энергия уже не сохраняется, линии уровня нельзя нарисовать точно, не имея решения в явном виде. Однако идентификация неподвижных точек и локального поведения потоков, включая их направления, позволяют по крайней мере приближенно набросать вполне приемлемый глобальный фазовый портрет.

Особый интерес представляет класс уравнений типа «хищник—жертва», введенный Вольтерра для изучения популяционной динамики. Простым примером таких уравнений может служить следующая система:

$$\dot{x} = x - xy, \quad (1.4.12a)$$

$$\dot{y} = -y + xy, \quad (1.4.12b)$$

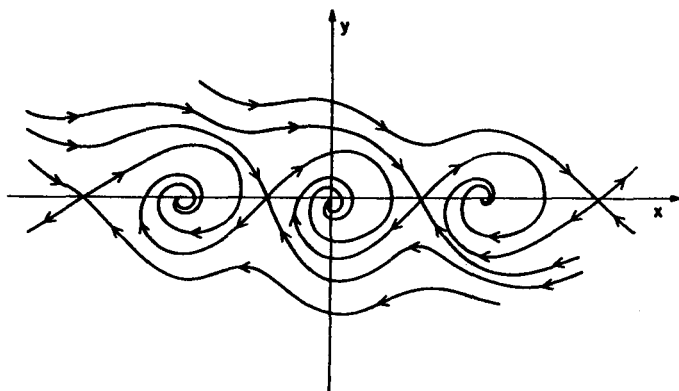


Рис. 1.12. Фазовая плоскость затухающего маятника (1.4.10) при $\lambda^2 < 4g/L$

где x может обозначать, например, популяцию кроликов (точнее количество кроликов в популяции), а y — популяцию лис. Возможен следующий, до некоторой степени циничный, сценарий событий. Если $y = 0$ и $x > 0$, популяция кроликов может расти неограниченно, благодаря отсутствию поедающих их лис; однако в обратном случае $x = 0$, $y > 0$ популяция лис обречена на вымирание из-за отсутствия корма. При сосуществовании обоих видов, имеется возможность баланса этих двух конкурирующих тенденций: лисы сокращают популяцию кроликов и увеличивают свою собственную, находясь при этом под угрозой голодной смерти, если кроликов будет съедено слишком много. Уравнения (1.4.12) представляют собой сильно упрощенную модель этих процессов, которая без труда может быть уточнена с учетом перенаселенности, болезней, умопомешательства и даже появления кроликов-убийц.

Система имеет две неподвижные точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ и $(x_2, y_2) = (1, 1)$ и линеаризованное уравнение

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y_i & -x_i \\ y_i & -1 + x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (1.4.13)$$

где $i = 1, 2$. Для неподвижной точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ легко находятся собственные значения $\lambda = \pm 1$ (седловая точка), и определение соответствующих собственных векторов D_1 и D_2 приводит к следующему общему решению:

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{+t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad (1.4.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы. Это решение показывает, что входящий поток направлен вниз вдоль оси y , а выходящий — вдоль оси x (в положительном направлении). В случае второй неподвижной точки $(x_2, y_2) = (1, 1)$ собственные значения $\lambda = \pm i$ соответствуют эллиптической точке (центру). Полагая $\delta y = 0$ и $\delta x > 0$ в уравнениях движения (1.4.13), находим, что $\delta \dot{y} > 0$ и, следовательно, движение относительно неподвижной эллиптической точки направлено против часовой стрелки. Отметим, что этот поток согласуется по направлению с потоком в окрестности седловой точки, и в результате может быть построен приближенный (но, конечно, не полный) глобальный фазовый портрет (рис. 1.13).

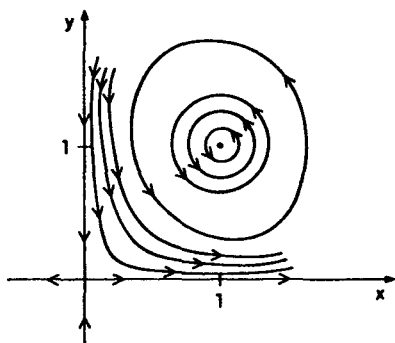


Рис. 1.13. Фазовая плоскость, соответствующая системе уравнений (1.4.12)

Несколько более сложный пример представляет собой система

$$\dot{x} = x(4 - x - y), \quad (1.4.15a)$$

$$\dot{y} = y(x - 2) \quad (1.4.15b)$$

с тремя неподвижными точками $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$ и $(x_3, y_3) = (4, 0)$ и с линеаризованными уравнениями

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2x_i - y_i & -x_i \\ y_i & x_i - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (1.4.16)$$

где $i = 1, 2, 3$. Поведение фазового потока вблизи каждой из трех неподвижных точек может быть охарактеризовано следующим образом.

1. Точка $(x_1, y_1) = (0, 0)$ характеризуется собственными значениями $\lambda_{1,2} = -2, 4$ (гиперболическая точка), и общее решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}. \quad (1.4.17)$$

Следовательно, входящий поток направлен вниз вдоль оси y , а выходящий — вдоль оси x .

2. Точка $(x_2, y_2) = (2, 2)$ характеризуется собственными значениями $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ (устойчивый фокус). При $\delta y = 0$ и $\delta x > 0$ имеем $\delta \dot{y} > 0$, так что спиральные кривые закручены против часовой стрелки.
3. Точка $(x_3, y_3) = (4, 0)$ обладает собственными значениями $\lambda_{1,2} = -4, 2$ (гиперболическая точка), а общее решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} e^{2t}. \quad (1.4.18)$$

Следовательно, входящий поток направлен вдоль оси x , а выходящий имеет наклон $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$.

Учитывая направления фазовых потоков, связанных с каждой из неподвижных точек, можно изобразить приемлемое приближение глобального фазового портрета (рис. 1.14).

Важно всегда помнить, что анализ устойчивости неподвижных точек основан на линеаризованных уравнениях движения. Вполне возможно, что предсказания,

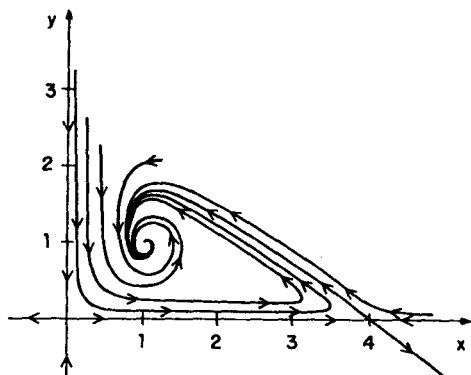


Рис. 1.14. Фазовая плоскость, соответствующая системе уравнений (1.4.15)

полученные таким образом, не будут соответствовать картине, порождаемой исходными нелинейными уравнениями. Особенно легко разрушаются при нелинейных возмущениях эллиптические точки, найденные в рамках линейного анализа устойчивости. Прекрасный пример этого привели Бендер и Орсзаг [2]. Для системы

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \quad (1.4.19a)$$

$$\dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \quad (1.4.19b)$$

линейная теория устойчивости предсказывает существование эллиптической неподвижной точки при $x = y = 0$ с вращением против часовой стрелки (покажите это!). На самом деле точное решение нелинейных уравнений показывает, что система обладает неустойчивым фокусом с потоком, исходящим из начала координат. Действительно, умножая (1.4.19a) на x , а (1.4.19b) на y и складывая их, получаем уравнение $x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^2$, которое, переходя к полярной координате $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [r^2(t)] = r^4(t). \quad (1.4.20)$$

Оно имеет следующее точное решение:

$$r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt{1 - 2r^2(0)t}}. \quad (1.4.21)$$

Таким образом, не только подтверждается возрастание радиуса со временем, но к тому же решение неограниченно возрастает при критическом значении времени $t_{\text{крит}} = (2r^2(0))^{-1}$.

1.4.г. Предельные циклы

Предельный цикл представляет собой другой тип поведения, который не может быть выявлен с помощью линейного анализа. Общеизвестным примером системы, проявляющей такое поведение, является осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.4.22)$$

Линейный анализ устойчивости, проведенный в приближении первого порядка,

$$\dot{x} = y, \quad (1.4.23a)$$

$$\dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - \omega^2 x, \quad (1.4.23b)$$

указывает на существование неподвижной точки при $x = y = 0$, которая в случае $\lambda^2 > 4\omega^2$ должна представлять собой неустойчивый узел, а в случае $\lambda^2 < 4\omega^2$ — неустойчивый фокус. Рассмотрим второй из этих случаев. Поскольку с ростом x и y нелинейный член в (1.4.23б) начинает постепенно доминировать (так как $\lim_{x,y \rightarrow \infty} \dot{y} = -\lambda x^2 y$), можно предположить затухание обратно по направлению к на-

чалу координат. Таким образом, вдали от начала координат траектории движутся от периферии к центру. Непрерывность требует существования (по крайней мере) одного решения, расположенного посередине. Этим решением является предельный цикл, который представляет собой замкнутую траекторию, содержащую внутри себя начало координат. Решения, начинающиеся как внутри, так и вне этой траектории, притягиваются ею, но ни при каких условиях не могут ее пересечь. Точное решение уравнения движения (1.4.22) неизвестно. Так что хотя на существование предельного цикла указывают простые физические рассуждения (нелинейный член можно рассматривать как зависящую от координат силу трения, изменяющую знак при $x = 1$), точная форма этого предельного цикла может быть определена только численно.

Аналитически существование предельного цикла может быть установлено, например, в случае системы

$$\dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2), \quad (1.4.24a)$$

$$\dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2), \quad (1.4.24b)$$

для которой линейный анализ устойчивости предсказывает существование неустойчивого фокуса с вращением по часовой стрелке вокруг начала координат. Уравнения (1.4.24) могут быть решены таким же способом, как и (1.4.19), т. е. в полярных координатах. Введя обозначение $R(t) = r^2 = x^2 + y^2$, приходим к уравнению движения для R :

$$\dot{R} + 2R^2 - 2R = 0. \quad (1.4.25)$$

Это уравнение, относящееся к типу Риккати, подстановкой $\frac{1}{2}\dot{f}/f$ полностью линеаризуется: $\ddot{f} - 2\dot{f} = 0$. Решение этого уравнения

$$R(t) = x^2(t) + y^2(t) = \frac{c_1 e^{2t}}{c_1 e^{2t} + c_2} \quad (1.4.26)$$

(где c_1 и c_2 — произвольные постоянные) указывает на стремление решений (1.4.24) к предельному циклу радиуса 1 при $t \rightarrow \infty$. Линейный анализ устойчивости систем порядка выше второго будет рассмотрен в следующих разделах. Здесь могут возникать весьма непростые ситуации, поскольку (локальные) потоки вдоль n независимых направлений уже не ограничены плоскостью, как в двумерном случае, и могут переплетаться чрезвычайно сложным образом.

1.5. Интегралы, зависящие от времени

Интегралы, зависящие от времени, представляют собой редкие и, следовательно, весьма интересные объекты. Простым примером служит специальный случай затухающего линейного осциллятора (1.1.6), который мы снова запишем в виде системы первого порядка (приняв без потери общности $\omega = 1$):

$$\dot{x} = y, \quad (1.5.1a)$$

$$\dot{y} = -x - \lambda y. \quad (1.5.1b)$$

Умножив сперва уравнение (1.5.1a) на $2x$ и уравнение (1.5.2b) на $2y$, получим

$$2x\dot{x} = 2xy, \quad (1.5.2a)$$

$$2y\dot{y} = -2\lambda y^2 - 2xy. \quad (1.5.2b)$$

Затем уравнение (1.5.1a) умножим на λy , а (1.5.1b) — на λx :

$$\lambda x\dot{y} = \lambda y^2, \quad (1.5.3a)$$

$$\lambda x\dot{y} = -\lambda^2 xy - \lambda x^2. \quad (1.5.3b)$$

Сложив вместе уравнения обеих систем (1.5.2) и (1.5.3), получаем выражение

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + \lambda x\dot{y} + \lambda x\dot{y} = -\lambda y^2 - \lambda^2 xy - \lambda x^2,$$

которое приводится к виду

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + \lambda xy) = -\lambda(y^2 + x^2 + \lambda xy)$$

и может быть проинтегрировано точно:

$$x^2 + y^2 + \lambda xy = c_1 e^{-\lambda t}, \quad (1.5.4)$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Уравнение (1.5.4) позволяет выразить y как функцию x и t ; но только при специальном выборе $\lambda = 2$, когда левая часть представляет собой полный квадрат, это выражение принимает простой вид:

$$y = \sqrt{c_1} e^{-t} - x. \quad (1.5.5)$$

Подстановка в (1.5.1a) приводит к точно решаемому уравнению первого порядка

$$\dot{x} + x = \sqrt{c_1} e^{-t} \quad (1.5.6)$$

с затухающим решением

$$x(t) = (c_2 + t\sqrt{c_1})e^{-t}, \quad (1.5.7)$$

где c_2 — вторая постоянная интегрирования. Этот результат, естественно, эквивалентен решению (1.1.16) в случае вырожденных собственных значений (что имеет место при $\omega = 1$, $\lambda = 2$). Существование не зависящего от времени первого интеграла у консервативных систем налагает определенные геометрические ограничения на фазовый поток. В рассматриваемом случае соотношение (1.5.5) можно рассматривать как ограничение в виде прямой линии $x + y = \text{const}$, экспоненциально стягивающейся к началу координат по времени.

В качестве другого примера может служить система уравнений

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x + y^2, \quad (1.5.8a)$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2}y - xy. \quad (1.5.8б)$$

Умножая (1.5.8a) на x , (1.5.8б) на y и складывая, приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (1.5.9)$$

интегрирование которого дает

$$x^2 + y^2 = ce^{-t}. \quad (1.5.10)$$

Подстановка $y^2 = ce^{-t} - x^2$ в (1.5.8a) приводит к нелинейному уравнению первого порядка

$$\dot{x} + \frac{1}{2}x + x^2 = ce^{-t}. \quad (1.5.11)$$

Оно имеет вид уравнения Риккати и полностью линеаризуется с помощью подстановки $x = \dot{y}/y$, приводя к линейному уравнению второго порядка

$$\ddot{y} + \frac{1}{2}\dot{y} - ce^{-t}y = 0, \quad (1.5.12)$$

которое в принципе может быть решено стандартным способом разложения в ряд. В этом случае можно считать, что фазовый поток ограничен экспоненциально стягивающейся окружностью, определяемой соотношением (1.5.10).

1.6. Неавтономные системы

Все рассмотренные до сих пор системы были автономны, т. е. время играло лишь роль независимой переменной и не входило явно в уравнения движения. Но нередко встречаются и ситуации, когда система подвергается воздействию некоторой внешней зависящей от времени силы $F(t)$. Сюда, в частности, могут относиться толчки, испытываемые пучком частиц или отдельным атомом в поле излучения. Особый интерес представляют случаи, когда $F(t)$ является периодической функцией, например, $F(t) \propto \cos(\Omega t)$. Рассмотрим в качестве примера затухающий осциллятор, совершающий вынужденные колебания:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon F(t), \quad (1.6.1)$$

здесь ε можно рассматривать как «параметр связи» — в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ система вновь становится автономной. Важно понять, что двумерное в этом пределе фазовое пространство становится при $\varepsilon \neq 0$ *трехмерным* за счет дополнительной размерности — «времени». Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим специальный случай периодической вынуждающей силы:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \cos(\Omega t). \quad (1.6.2)$$

Если в качестве третьей независимой переменной выбрать $z = \Omega t$, (1.6.2) можно представить в виде

$$\dot{x} = y, \quad (1.6.3a)$$

$$\dot{y} = -\lambda y - \omega^2 x + \varepsilon \cos(z), \quad (1.6.3б)$$

$$\dot{z} = \Omega. \quad (1.6.3в)$$

При $\varepsilon = 0$ представление решений (1.6.36) (т. е. $x(t)$ и $y(t)$) как непрерывных функций времени на фазовой плоскости (x, y) имеет смысл. Но распространение этого подхода на случай $\varepsilon \neq 0$ может привести к заблуждению, обусловленному пересечением фазовых траекторий, что находится в кажущемся противоречии с единственностью решений обыкновенных дифференциальных уравнений. На самом деле, эти пересечения являются лишь следствием проектирования трехмерного фазового пространства (x, y, z) на двумерную плоскость (x, y) .

Дополнительное измерение может привести к принципиально новым типам поведения, и эволюция решений в случае нелинейных систем с вынуждающей силой может в некоторых случаях выглядеть хаотической⁸⁾ — оставаясь при этом полностью детерминированной. Возможности аналитического подхода в этом случае сильно ограничены, и детальная картина может быть получена только с помощью компьютера. Эти вопросы мы будем подробнее обсуждать в следующих главах. А здесь ограничимся рассмотрением систем, для которых могут быть получены какие-либо аналитические результаты. Сюда относятся в основном линейные системы с вынуждающей силой; и хотя (детерминированный) хаос в этих системах не проявляется, полученные результаты послужат в качестве полезной основы для изучения нелинейных систем.

Уравнения вида (1.6.1) могут быть решены с использованием стандартных методов для неоднородных линейных уравнений. Обозначим в однородном для (1.6.1) пределе (т. е. при $\varepsilon = 0$) два независимых решения через $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а их (не обращающийся в ноль) вронскиан через

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t).$$

Решение уравнения (1.6.1) представляется в виде суммы общего однородного решения и частного решения: $x(t) = x_h + x_p$, где $x_h = c_1x_1 + c_2x_2$ и $x_p = ux_1 + vx_2$; функции $u(t)$ и $v(t)$ определяются соотношениями

$$u = -\varepsilon \int \frac{x_2(t')F(t')}{W(t')} dt', \quad v = \varepsilon \int \frac{x_1(t')F(t')}{W(t')} dt'.$$

1.6.a. Осциллятор с вынуждающей силой

Рассмотрим вначале незатухающий вариант системы (1.6.2):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \cos(\Omega t). \quad (1.6.4)$$

Частное решение определяется легко: $x_p(t) = [\varepsilon/(\omega^2 - \Omega^2)] \cos(\Omega t)$ (использование комплексной формы однородного решения $x = e^{\pm i\omega t}$ облегчает вычисления), и, следовательно, общее решение имеет вид

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) + \frac{\varepsilon}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t), \quad (1.6.5)$$

где амплитуда a и фаза δ задаются уравнениями (1.1.3). Решение, таким образом, представляет собой суперпозицию колебаний с собственной частотой ω и вынуждающей частотой Ω . Понятно, что оно нарушается при совпадении частот, что

⁸⁾ Здесь впервые в основном тексте возникает слово *хаос*. Под хаотическим мы понимаем такое решение детерминистического уравнения, для которого характерна высокая чувствительность к начальным условиям (т. е. небольшие изменения в начальных условиях приводят к значительным изменениям результата), и эволюция которого в фазовом пространстве представляется весьма беспорядочной.

является примером *резонанса*. Проследить поведение решения в пределе $\Omega \rightarrow \omega$ можно, записав (1.6.5) в виде

$$x(t) = a' \sin(\omega t + \delta') + \frac{\varepsilon}{\omega^2 - \Omega^2} (\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)), \quad (1.6.6)$$

что всегда можно сделать, определив соответствующим образом амплитуду (a') и фазу (δ'). Предел $\Omega \rightarrow \omega$ находим по правилу Лопиталя:

$$x(t) = a' \sin(\omega t + \delta') + \frac{\varepsilon}{2\omega} t \sin(\omega t). \quad (1.6.7)$$

Второй, секулярный, член уравнения обеспечивает неограниченный линейный рост амплитуды при резонансе и физически описывает неограниченное поглощение системой энергии внешнего поля.

Такое поведение принципиально отличается от поведения нелинейных осцилляторов с вынуждающей силой, широко известным примером которых является осциллятор Дюффинга:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 = \varepsilon \cos(\Omega t). \quad (1.6.8)$$

Соответствующая однородная задача легко решается в терминах эллиптических функций Якоби, но в данном случае период решения приобретает зависимость от энергии. Резонанс по-прежнему можно вызвать, если «раскачивать» систему с вынуждающей частотой Ω , совпадающей в точности с текущей собственной частотой. Но по мере поглощения энергии и возрастания амплитуды колебаний собственная частота также изменяется, выводя систему из состояния резонанса и препятствуя таким образом секулярному росту. Мы имеем здесь случай, когда нелинейность стабилизирует резонанс посредством механизма, который может быть назван «нелинейной обратной связью». Однако при очень больших значениях вынуждающей силы (т. е. при больших ε) возможна обратная связь между внешним полем с одной стороны и собственным движением и его гармониками с другой. В этом режиме решение может приобрести хаотические черты, и его колебания во времени будут выглядеть весьма беспорядочными. Более подробно мы обсудим это в главе 4.

1.6.6. Затухающий осциллятор с вынуждающей внешней силой

Вернемся теперь к линейным затухающим колебаниям с вынуждающей внешней силой (1.6.2). В предположении, что однородная задача имеет осциллирующие (но, конечно, затухающие) решения, общее решение неоднородной задачи может быть представлено в виде

$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \delta) + \frac{\varepsilon \cos(\Omega t + \delta')}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \lambda^2 \Omega^2}}, \quad (1.6.9)$$

где собственная частота $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda}$. Амплитуда a и фаза δ однородного члена определяются начальными условиями и «внешней» фазой $\delta' = \arctg \frac{-\lambda\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$. Очевидно, что с ростом t однородная часть решения затухает, что в пределе приводит к

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{\varepsilon \cos(\Omega t + \delta')}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \lambda^2 \Omega^2}}, \quad (1.6.10)$$

и хотя амплитуда движения увеличивается при резонансе $\omega = \Omega$, она остается ограниченной. Асимптотическое решение (1.6.10) описывает стационарные колебания с постоянной энергией в результате баланса между поступлением энергии в систему за счет внешнего поля и ее рассеивания за счет трения. Это стационарное состояние соответствует простому предельному циклу.

В случае *нелинейной* затухающей системы с вынуждающей внешней силой, например, осциллятора Дюффинга:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x + \beta x^3 = \varepsilon \cos(\Omega t), \quad (1.6.11)$$

поведение может оказаться гораздо более сложным. При малых вынуждающих силах по-прежнему имеет место поведение типа простого предельного цикла. Однако с ростом ε наблюдается бифуркация этого цикла в «двойной» предельный цикл с удвоением первоначального периода. При дальнейшем росте ε бифуркации продолжают (от удвоенного цикла к учетверенному и так далее) до тех пор, пока движение не становится весьма хаотичным. Этот чрезвычайно сложный апериодичный предельный цикл, заканчивающий ряд бифуркаций, называется *странным аттрактором*. Такие аттракторы представляют собой механизм, посредством которого диссипативные системы (которые, как это можно себе представить, всегда затухают к некоторому предельному монотонному поведению) имеют возможность проявлять хаотическое поведение. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться в главе 5.

1.7. Дальнейшие замечания об интегрировании дифференциальных уравнений

Понятие «интегрирования» дифференциального уравнения является, несомненно, весьма тонким. Для большинства рассмотренных до сих пор систем второго порядка существование постоянного первого интеграла (в консервативных случаях это механическая энергия) позволяло понизить на единицу порядок уравнения, сводя тем самым задачу к отысканию решения в «квадратурах». Выражения типа «точное решение» или «аналитическое решение» дифференциального уравнения использовались здесь (равно как и в других работах) весьма произвольно. Вопрос о том, что подразумевается под этими удобными выражениями, безусловно не является неуместным. В конце концов, можно ли было до появления эллиптических функций не считать неразрешимыми простые нелинейные дифференциальные уравнения кубического осциллятора или маятника? Правомерен вопрос, что происходит «за пределами» эллиптических функций, скажем, с уравнениями типа (1.2.4), когда показатель степени при x больше 3. В этом случае, по крайней мере, еще существует интеграл движения (энергия), позволяющий перейти к квадратурам — такие интегралы называются *гиперэллиптическими интегралами*. Обращение, однако, становится в этом случае гораздо более сложным, и в игру вступают многие результаты из алгебраической геометрии.

В случае неконсервативных систем второго порядка вопрос об «интегрировании» становится более запутанным. В некоторых случаях, обсуждавшихся в разделе 1.5, возможно было отыскать зависящий от времени интеграл, который позволял понизить порядок. Но это, как легко понять, были весьма специальные случаи. Затруднения иного рода связаны с системами уравнений типа

$$\ddot{y} = 6y^2 + t, \quad (1.7.1)$$

$$\ddot{y} = 2y^3 + ty + \alpha, \quad (1.7.2)$$

известными как уравнения Пенлеве первого и второго типов соответственно. Для них неизвестны первые интегралы, и они не могут быть «проинтегрированы в квадратурах». И хотя очевидно, что уравнения, подобные этим, имеют «решения», нетривиальным и спорным остается вопрос, в какой степени эти решения могут быть представлены «аналитически» — в противоположность численному результату.

Фактором, существенным при обсуждении этого вопроса, является аналитическая структура решения, т. е. поведение решения в комплексной плоскости. К счастью, целый ряд важных свойств, таких как возможные сингулярности решения, может быть определен непосредственно по виду уравнений движения, без обращения к точному решению (которое мы, естественно, можем и «не знать»). Может быть и так, что аналитическая структура особенно «проста» и соответствующее уравнение оказывается в некотором смысле «интегрируемым». Эта возможность будет обсуждаться в главе 8.

Может быть вопрос интегрируемости автономных систем второго порядка в определенном смысле довольно академичен. В этих случаях движение всегда ограничено двумерной фазовой плоскостью и никогда не проявляет сколь-нибудь сложного или хаотического поведения. Когда фазовое пространство приобретает третье измерение (или более), что может иметь место в случае неавтономных систем второго порядка или в случае автономных систем третьего порядка, вопрос об интегрируемости становится гораздо более содержательным вследствие возможности хаотического поведения. Здесь важную роль приобретает существование «интегралов движения», поскольку они, как мы видели, налагают геометрические ограничения на фазовый поток. Рассмотрим следующую автономную систему третьего порядка:

$$\dot{x} = y, \quad (1.7.3a)$$

$$\dot{y} = -xz + x, \quad (1.7.3b)$$

$$\dot{z} = xy. \quad (1.7.3b)$$

Прежде всего заметим, из (1.7.3a) и (1.7.3b) следует, что $x\dot{x} = \dot{z}$. Это позволяет найти (постоянный) интеграл движения

$$\frac{1}{2}x^2 - z = I_1, \quad (1.7.4)$$

и мы видим, таким образом, что траектории в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z) ограничены поверхностью, определяемой уравнением (1.7.4). С помощью этого интеграла систему третьего порядка (1.7.3) можно свести к системе второго порядка

$$\ddot{x} = x(1 - I_1) - \frac{1}{2}x^3. \quad (1.7.5)$$

Эта система второго порядка в свою очередь может быть сведена к системе первого порядка с помощью второго интеграла

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 - (1 - I_1)x^2 + \frac{1}{2}x^4) = I_2, \quad (1.7.6)$$

который также можно рассматривать как (другое) геометрическое ограничение на фазовый поток. Уравнение (1.7.6) можно проинтегрировать в терминах эллиптических функций Якоби. Таким образом, отыскание двух интегралов I_1 и I_2 позволило

свести решение исходной системы третьего порядка к единственной «квадратуре» — в этом смысле можно считать, что система «проинтегрирована полностью».

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{x} = y + \beta, \quad (1.7.7a)$$

$$\dot{y} = -xz + x, \quad (1.7.7b)$$

$$\dot{z} = xy + \alpha x, \quad (1.7.7в)$$

где α и β — постоянные. В этом случае оказывается, что при $\alpha \neq \beta$ интегралы типа I_1 (а, следовательно, I_2) не могут быть найдены явным образом — и система, таким образом, не представляется «интегрируемой» (*integratable*)⁹⁾. Таким образом, без численного анализа не ясно, в какой именно области трехмерного фазового пространства может «блуждать» решение.

Простые (и тщательно подобранные!) примеры (1.7.3) и (1.7.7) порождают много фундаментальных вопросов. Первый из них — каким образом находить интегралы движения (если они существуют?). По мере того, как порядок уравнений возрастает, а их функциональный вид усложняется, эта задача становится очень сложной. Действительно, не существует сколь-нибудь систематической процедуры для ее решения — приходится полагаться на опыт, на удачу и, в безнадежных ситуациях, на провидение! Может оказаться, как это вытекает из одной блестящей работы русского математика Софьи Ковалевской, написанной сто лет назад, что существование интегралов может быть связано с аналитической структурой дифференциальных уравнений. Другой фундаментальный вопрос состоит в том, какое именно число интегралов необходимо, чтобы поэтапно осуществить полное «интегрирование». Именно здесь важно отличать различные классы динамических систем. Для гамильтоновых систем (к которым (1.7.3) и (1.7.7) не относятся) имеется ряд весьма сильных результатов. Как будет показано в следующей главе, если система имеет столько же интегралов (N), сколько степеней свободы (что составляет половину размерности фазового пространства), то она может быть «проинтегрирована в квадратурах». Коротко говоря, это является следствием очень специальных геометрических свойств гамильтониана — N интегралов достаточно для ограничения потока в определенном направлении, допускающем последующую параметризацию в специальной системе координат, что приводит к тривиальному интегрированию. В случае негамильтоновых систем ситуация не столь благоприятна. Для того, чтобы осуществить полное интегрирование системы n -го порядка $\dot{x}_i = f(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, необходимо иметь $n - 1$ интеграл.

⁹⁾ Термин «интегрируемый» представляет собой такое же искажение русского языка, как используемый в оригинале термин «*integratable*» представляет собой искажение английского языка; цель его использования ясна из сказанного ниже в подстрочном примечании. — *Прим. перев.*

Термин «*integratable*» («интегрируемый») представляет собой искаженное английское слово, которое может, однако, сослужить полезную службу. Для гамильтоновых систем (глава 2) термин «*integrable*» (интегрируемый) имеет весьма специальный геометрический смысл, позволяющий отличать их от негамильтоновых систем (таких как (1.7.3)), которые, тем не менее, могут быть «проинтегрированы».

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.1. Эллиптические функции

Для того, чтобы привести уравнение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \equiv eG^2(x) \quad (1.П.1)$$

к стандартному виду (Лежандра):

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2) \equiv H^2(y), \quad (1.П.2)$$

будем следовать Дэвису [3]. Исходя из (1.П.1), мы можем написать

$$\frac{1}{e^{1/2}G(x)} \frac{dx}{dt} = 1. \quad (1.П.3)$$

Переходя к новой переменной и вводя следующие комбинации параметров:

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(\beta - \delta)(x - \alpha)}{(\alpha - \delta)(x - \beta)}, \\ k^2 &= \frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}, \\ M^2 &= \frac{(\beta - \delta)(\alpha - \gamma)}{4}, \end{aligned} \quad (1.П.4)$$

получаем

$$\frac{M}{G(x)} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{H(y)} \frac{dy}{dt} \quad (1.П.5)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{e^{1/2}G(x)} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{H(y)} \frac{dy}{d(e^{1/2}Mt)} = 1. \quad (1.П.6)$$

Таким образом,

$$y = \operatorname{sn}(e^{1/2}Mt, k), \quad (1.П.7)$$

а исходная переменная x может быть выражена посредством первого из соотношений (1.П.4).

Эллиптические интегралы первого рода представляют собой интегралы

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2)}}, \quad k^2 < 1, \quad (1.П.8)$$

или, что эквивалентно,

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta'}}, \quad (1.П.9)$$

где $x = \sin \theta$. Эллиптические интегралы второго рода это

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x'^2}{1 - x'^2}} dx', \quad k^2 < 1, \quad (1.П.10)$$

или в эквивалентном виде

$$E(\theta, k) = \int_0^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta'} d\theta', \quad (1.П.11)$$

где вновь $x = \sin \theta$. Эллиптические интегралы третьего рода записываются в виде

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dx'}{(1 + nx'^2)\sqrt{(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2)}} \quad (1.П.12)$$

или в эквивалентном виде

$$\Pi(\theta, n, k) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + n \sin^2 \theta')\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta'}} \quad (1.П.13)$$

в том же интервале изменения переменных, что и раньше.

Существует огромное количество соотношений между эллиптическими функциями, в основе которых лежит основной эллиптический интеграл:

$$u = \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta'}}. \quad (1.П.14)$$

Определим следующие функции:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \theta, \quad (1.П.15a)$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \theta, \quad (1.П.15б)$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad (1.П.15в)$$

$$\operatorname{am}(u, k) = \theta, \quad (1.П.15г)$$

$$\operatorname{tn}(u, k) = \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} = \operatorname{tg} \theta. \quad (1.П.15д)$$

Ниже приведены некоторые численные значения и соотношения:

$$\operatorname{sn}(0) = 1, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{dn}(0) = 1, \quad \operatorname{am}(0) = 0, \quad (1.П.16)$$

$$\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1, \quad (1.П.17)$$

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn}(u), \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn}(u), \quad (1.П.18)$$

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin(u), \quad \operatorname{cn}(u, 0) = \cos(u), \quad (1.П.19)$$

$$\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad (1.П.20)$$

$$\operatorname{cn}(u, 1) = \operatorname{dn}(u, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}(u)} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}. \quad (1.П.21)$$

Список литературы

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
2. Bender C. M., Orszag S. A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York, 1978.
3. Davis H. T. Introduction to Nonlinear Dissertential and Integral Equations. Dover, New York, 1962.
4. Ince E. L. Ordinary Differential Equations. Dover, New York, 1956.

Глава 2

Динамика гамильтоновых систем

2.1. Формализм Лагранжа

В этом разделе мы обсудим некоторые основные положения формулировки классической механики, предложенной Лагранжем. Это обеспечит необходимую основу для изучения формализма Гамильтона, что в свою очередь создаст естественную систему представлений, в рамках которой могут быть рассмотрены идеи интегрируемости и неинтегрируемости для широкого класса механических систем. Многие из дифференциальных уравнений, рассматривавшихся в главе 1, описывают движение частицы в некотором силовом поле (представляемом в виде градиента функции потенциальной энергии) и, таким образом, представляют собой примеры *уравнений движения Ньютона*¹⁾. После пионерских работ Ньютона были найдены более общие и элегантные формулировки «законов» механики. Привлекая такие основополагающие понятия, как однородность пространства и времени, и используя почти магический вариационный принцип («принцип Гамильтона»), можно (что очень соблазнительно) получить обобщенные уравнения движения; в результате «законы» представляются результатом чисто дедуктивного вывода из «абсолютных» принципов. Вместе с тем, не следует забывать, что все эти результаты в определенной мере основаны на экспериментальных результатах и человеческом опыте — они прекрасно выдержали проверку временем. (Например, не было никаких оснований сомневаться в том, что законы Ньютона могут описывать микроскопические системы, до тех пор, пока появившиеся спектроскопические данные не указали на необходимость создания квантовой механики).

2.1.a. Функция Лагранжа и принцип Гамильтона

Опыт показывает, что если механическую систему представлять в виде набора взаимодействующих друг с другом частиц, для которых определена зависимость силы взаимодействия от расстояния, то «состояние системы» полностью задается множеством положений и скоростей всех частиц. Система координат не обязательно должна быть декартовой, как в работах Ньютона, описание может быть сделано более эффективным за счет использования некоторого набора «обобщенных координат» q_i ($i = 1, \dots, n$) и «обобщенных скоростей» $\dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, n$). (Использование обобщенных координат освобождает от необходимости явного представления голономных связей системы).

Если система перемещается из положения, соответствующего некоторому моменту времени t_1 и задаваемого набором координат $\mathbf{q}^{(1)} = q_1(t_1), \dots, q_n(t_1)$, в положение $\mathbf{q}^{(2)} = q_1(t_2), \dots, q_n(t_2)$, соответствующее некоторому другому моменту време-

¹⁾ Предполагается, что читатель знаком с основами механики Ньютона и с такими понятиями, как связи и обобщенные координаты (см., например, главу 1 книги Голдстейна [3]).

ни t_2 , то истинное движение можно определить с помощью принципа наименьшего действия Гамильтона. Этот принцип требует, чтобы интеграл от функции, называемой лагранжианом, между начальным и конечным моментами времени принимал наименьшее возможное значение. Мы пока будем рассматривать лагранжиан как «черный ящик», утверждая только, что он может некоторым образом зависеть лишь от тех переменных, которые определяют состояние системы (т. е. от обобщенных координат, скоростей и времени), а именно

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (2.1.1)$$

Знаменитый «принцип наименьшего действия» или «принцип Гамильтона» требует, чтобы *интеграл действия*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1.2)$$

был минимален. Временно опустим индексы при q_i и $\dot{q}_i$ и предположим, что имеется единственная степень свободы. Положения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, отвечающие начальному и конечному моментам времени t_1 и t_2 , предполагаются фиксированными. (Если конечным точкам тоже позволить изменяться со временем, то это повлечет за собой другие важные последствия.) Может существовать много различных путей $q(t)$, соединяющих $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, и цель состоит в отыскании того из них, который обеспечивает *экстремум* (что как правило означает минимум, хотя в некоторых случаях это может быть и максимум) действия (2.1.2). Эта цель достигается путем анализа «первой вариации», при котором вдоль пути вводятся небольшие отклонения, обращающиеся на обоих концах в ноль (т. е. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$). Замечательная особенность этой процедуры состоит в том, что мы рассматриваем результат вариации пути, который сам пока не известен. Первая вариация действия W определяется, таким образом, соотношением

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (2.1.3)$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд и сохраняя члены первого порядка, получаем вариацию

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \quad (2.1.4)$$

Замена $\delta \dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$ и интегрирование второго члена по частям дает

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt. \quad (2.1.5)$$

Благодаря условию, наложенному на конечные точки, первый член в правой части обращается в ноль. Требованием экстремума является условие $\delta W = 0$; оно выполняется лишь в том случае, если подынтегральное выражение обращается в ноль, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (2.1.6)$$

В случае n степеней свободы $q_1, \dots, q_n$ каждая переменная должна быть проварьирована независимо ($q_i(t) + \delta q_i(t)$). Окончательным результатом является набор уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.1.7)$$

которые и представляют собой знаменитые *уравнения Лагранжа*. Если для данной механической системы известен (правильный!) вид лагранжиана, то система уравнений второго порядка (2.1.7) представляет собой уравнения движения системы и при заданных начальных условиях $q_i(0), \dot{q}_i(0)$ ($i = 1, \dots, n$) полностью определяет эволюцию системы²⁾.

При определении корректного вида лагранжиана интересно понять, сколь далеко можно зайти в своем выборе, если исходить только из самых общих принципов. В прекрасном учебнике по механике [4] Ландау и Лифшиц убедительно показали, что по крайней мере в случае свободной частицы из однородности времени и изотропности пространства³⁾ следует, что лагранжиан должен быть пропорционален только квадрату (обобщенных) скоростей. Если в качестве константы пропорциональности взять половину массы частицы, то лагранжиан системы невзаимодействующих частиц будет представлять собой в точности их полную кинетическую энергию в прямолинейной системе координат:

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2.$$

Помимо этого, для частиц, взаимодействующих по некоторому закону, определяющему изменение силы с расстоянием и содержащемуся в «функции потенциальной энергии» $V(q_1, \dots, q_n)$, приходится привлекать «экспериментальные» факты; в этом случае, цитируя Ландау и Лифшица [4], «опыт показал, что» «правильный» лагранжиан имеет вид

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q_1, \dots, q_n). \quad (2.1.8)$$

Функция потенциальной энергии такова, что сила, действующая на каждую из частиц, определяется соотношением

$$F_i = - \frac{\partial}{\partial q_i} V(q_1, \dots, q_n). \quad (2.1.9)$$

(Это определяет потенциальную энергию, поскольку обеспечивает равенство нулю работы, выполняемой системой при движении по замкнутому контуру в конфигурационном (т. е. координатном) пространстве.) В случае потенциала, не зависящего от скоростей, уравнения Лагранжа (2.1.7) приобретают вид

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (2.1.10)$$

и в декартовой системе координат в точности совпадают с уравнениями Ньютона.

²⁾ Этот детерминистический принцип оказался столь универсальным, что привел Лапласа к утверждению: «Мы должны, таким образом, рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину ее последующего состояния».

³⁾ Эти два свойства обеспечивают возможность рассматривать движение в терминах «инерциальной системы отсчета», т. е. независимо от «абсолютного» положения в пространстве и во времени.

2.1.6. Свойства Лагранжиана

Выбрав лагранжиан системы (взаимодействующих) частиц, можно вывести для этой системы ряд интересных свойств. Рассмотрим прежде всего полную производную лагранжиана по времени:

$$\frac{d}{dt}L(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.1.11)$$

В случае замкнутых систем (т. е. систем, не взаимодействующих ни с какой внешней силой) L в силу однородности времени не зависит от него явным образом и, следовательно, «энергия»

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (2.1.12)$$

является постоянной движения, т. е. рассматриваемая система консервативна (см. главу 1). Далее, с учетом определения L (2.1.8) легко находим, что

$$E = T + V. \quad (2.1.13)$$

Исходя из L , можно определить обобщенные силы:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.1.14)$$

и, что более важно для дальнейшего изложения, *обобщенные импульсы*:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.1.15)$$

для которых равенство $p_i = m\dot{q}_i$ справедливо лишь в случае декартовой системы координат. Используя эти два определения, уравнения Лагранжа можно представить в виде

$$\dot{p}_i = F_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.16)$$

Понятно, что если какая-либо обобщенная координата, например, q_k не входит в лагранжиан, то соответствующая обобщенная сила $F_k = 0$ и, следовательно (из (2.1.16)), соответствующий обобщенный импульс $p_k = \text{const}$. Отсутствующие координаты иногда называют *циклическими* — ясно, что циклические координаты облегчают интегрирование уравнений движения. С учетом данного выше определения p_i , энергия системы (2.1.12) может быть представлена в виде

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.1.17)$$

Если система замкнута и пространство однородно, то суммарный эффект действия сил на все частицы должен быть равен нулю, т. е. $\sum_{i=1}^n F_i = 0$ (в третьем законе

Ньютона это утверждение для двух тел сформулировано так: «действие и противодействие равны по величине и противоположны по направлению»). В этом случае

мы находим из (2.1.16), что $\sum_{i=1}^n p_i = \text{const}$, т. е. суммарное смещение системы частиц постоянно. Мы видим, таким образом, что исходя из таких фундаментальных принципов, как однородность пространства и времени (для замкнутых систем), можно вывести основные законы сохранения, такие как закон сохранения энергии и закон сохранения суммарного импульса. Приведенные примеры представляют собой частные случаи глубокого и общего результата, известного как *теорема Неттер*, которая утверждает, что для каждой группы преобразований, оставляющих лагранжиан неизменным, существует связанная с ней сохраняющаяся величина; например, инвариантность по отношению к трансляции во времени и в пространстве приводит к сохранению энергии и (линейного) импульса соответственно. Другой простой пример — система, инвариантная по отношению к поворотам. Ее момент количества движения (угловой момент) сохраняется.

2.1.в. Свойства обобщенных импульсов

Обобщенные координаты и скорости рассматриваются в формализме Лагранжа как независимые переменные. В предыдущем разделе мы ввели другой набор переменных — обобщенные импульсы p_i (2.1.15). Простая связь между обобщенными импульсами и скоростями в декартовой системе координат создает обманчивое впечатление, что p_i представляют собой не более чем полностью независимый (по отношению к q_i и $\dot{q}_i$) набор переменных. Существующие между ними глубокие различия наиболее полно проявляются при рассмотрении с более геометрической точки зрения⁴⁾. Этот подход оказался столь содержательным и элегантным, что Арнольд [1] охарактеризовал механику Гамильтона (т. е. представление механики в терминах p_i и q_i) как «геометрию фазового пространства».

С более привычной точки зрения важным свойством p_i , отличающим их от q_i , является возможность представить эти величины как градиент скалярного поля — это является наиболее простой иллюстрацией их коварности. Чтобы убедиться в этом, возвратимся к интегралу действия (2.1.2). Для данного экстремального пути, т. е. пути, удовлетворяющего уравнению (2.1.7), он представляет собой определенный интеграл, т. е. величину действия вдоль пути, соединяющего $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Можно снова применить вариационный принцип к (2.1.2) — но на этот раз с целью выявить изменение действия для соседних экстремальных путей с общей начальной, но различными конечными точками. Таким образом, теперь W варьируется по $q = q(t) + \delta q$, где $q(t)$ представляет собой истинный экстремальный путь, у которого точка $q^{(1)} = q(t_1)$ фиксирована, а конечная точка $q^{(2)} = q(t_2) + \delta q(t_2)$ изменяется. Вариация дает тот же результат, что и в случае (2.1.5)

⁴⁾ Скорости представляют собой пример касательных векторов, преобразующихся как *контравариантные величины*. Объединенный набор переменных $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, n$) образует $2n$ -мерное многообразие, известное как *касательное расслоение* (TM), и лагранжиан, таким образом, приобретает смысл отображения пространства касательного расслоения на скалярное поле, а именно $L : TM \rightarrow R$ (т. е. набору $q_i, \dot{q}_i$ сопоставляется действительное число). Импульсы обладают совершенно другими геометрическими свойствами. Они преобразуются как *ковариантные величины*, и образуемое набором переменных q_i, p_i ($i = 1, \dots, n$) *фазовое пространство* представляет собой $2n$ -мерное симплектическое многообразие, геометрические свойства которого существенно отличаются от свойств касательного расслоения лагранжевой механики. Более полную информацию читатель может найти в замечательной книге В. И. Арнольда «Математические методы классической механики» [1]. Начальные представления об обсуждаемых понятиях даны в приложении 2.2.

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt, \quad (2.1.18)$$

но поскольку путь предполагается экстремальным, интеграл обращается в ноль и сохраняется лишь вклад конечных точек. Начальная точка фиксирована, так что $\delta q(t_1) = 0$; обозначая $\delta q(t_2)$ просто через δq и учитывая, что $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, находим $\delta W = p \delta q$ или

$$\delta W = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \quad (2.1.19)$$

для системы с n степенями свободы. Из полученного соотношения следует, что p_i представляют собой *градиент действия*

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (2.1.20)$$

вдоль данного экстремального пути в данный момент времени. Напротив, $\dot{q}_i$ в общем случае не могут быть представлены в качестве градиента скалярного поля.

2.2. Формализм Гамильтона

В гамильтоновой механике механическая система описывается в терминах обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i . И хотя формализм Гамильтона не отличается от формализма Лагранжа по физическому содержанию, он гораздо лучше приспособлен для изложения квантовой механики, статистической механики и теории возмущений. В частности, использование гамильтонова фазового пространства создает идеальную основу для обсуждения понятий интегрируемости и неинтегрируемости и для описания хаотических явлений, которые могут иметь место в неинтегрируемых системах.

2.2.a. Переход к формализму Гамильтона

Перейти от формализма Лагранжа, основанного на переменных q_i и $\dot{q}_i$, к формализму Гамильтона можно посредством стандартного преобразования Лежандра (см. приложение 2.1). С его помощью лагранжиан $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ преобразуется по $\dot{\mathbf{q}}$ к новой функции, у которой $\dot{\mathbf{q}}$ выражается в терминах $\mathbf{p}$:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.2.1)$$

Здесь $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ представляют собой n -мерные векторы $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, а новая функция H называется *гамильтонианом* системы. Основное соотношение, посредством которого p_i выражаются через q_i и $\dot{q}_i$,

$$p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.2.2)$$

может быть, при условии

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0, \quad (2.2.3)$$

обращено, что позволяет выразить $\dot{q}_i$ через p_i , рассматривая (на данном этапе) q_i и t как параметры. В качестве простого примера обсуждаемого преобразования рассмотрим лагранжиан

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q_1, \dots, q_n). \quad (2.2.4)$$

Для него находим

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i, \quad (2.2.5)$$

и поскольку условие (2.2.3) выполняется, обратное соотношение (тривиальное в данном случае) имеет вид

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}, \quad (2.2.6)$$

а гамильтониан, таким образом, записывается в виде

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, \dots, q_n) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 m_i} p_i^2 + V(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Лагранжиан (2.2.4) описывает важный класс механических систем, но взаимосвязь p_i и q_i столь проста, что некоторые тонкости не проявляются. Стандартным примером менее тривиального преобразования служит случай движения частицы под действием силы тяжести, ограниченного гладким проводом заданной формы⁵⁾. Рассмотрим бусинку с массой m , плавно скользящую по проводу, форма которого описывается функцией $z = f(x)$ в вертикальной (z, x) -плоскости. Для начала представим себе неограниченное движение в этой плоскости. В формализме Лагранжа для его описания требуются две координаты и две скорости (т. е. x , z и $\dot{x}$, $\dot{z}$); кинетическая энергия, таким образом, имеет вид $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$. Включим далее в рассмотрение взаимосвязь между x и z , т. е. $z = f(x)$, откуда находим $\dot{z} = \dot{x} \left(\frac{df}{dx} \right) \equiv \dot{x} f'(x)$. Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + (f'(x))^2). \quad (2.2.8)$$

Потенциальная энергия определяется силой тяжести (т. е. $V = mgz = mgf(x)$), и, следовательно, лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + (f'(x))^2) - mgf(x). \quad (2.2.9)$$

В соответствии с (2.1.5) обобщенный импульс вычисляется как

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} (1 + (f'(x))^2) \quad (2.2.10)$$

и отсюда

$$\dot{x} = \frac{p}{m(1 + (f'(x))^2)}. \quad (2.2.11)$$

⁵⁾ Это пример голономной связи.

Таким образом, согласно (2.2.1) гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}
 H(p, x) &= p \frac{p}{m(1 + (f'(x))^2)} - \\
 &\quad - \left\{ \frac{m}{2} \frac{p^2}{m^2(1 + (f'(x))^2)^2} (1 + (f'(x))^2) - mgf(x) \right\} = \\
 &= \frac{p^2}{2m(1 + (f'(x))^2)} + mgf(x). \quad (2.2.12)
 \end{aligned}$$

2.2.6. Уравнения Гамильтона

Уравнения движения Лагранжа определялись по заданному лагранжиану системы с помощью принципа Гамильтона. Естественно, что теперь мы хотим получить уравнения движения в рамках гамильтонова формализма. Это можно делать, основываясь на вариационном принципе (что обсуждается в разделе 2.3.в), но более прямым является следующий путь. Дифференциал функции H , задаваемой соотношением (2.2.1), имеет вид

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.2.13)$$

Первый и третий члены в правой части взаимно уничтожаются по определению $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, и с учетом соотношения $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ (2.1.6) находим:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.2.14)$$

Таким образом, мы получаем «канонические» уравнения движения или *уравнения Гамильтона*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.2.15)$$

и, кроме того, соотношение⁶⁾ (для систем явно зависящих от времени)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.2.16)$$

Система уравнений (2.2.15) включает в себя $2n$ уравнений первого порядка в отличие от системы n уравнений второго порядка, полученной в формализме Лагранжа. В главе 1 было показано, что уравнение второго порядка, например, вида $\ddot{x} = f(x)$, можно записать в виде пары уравнений первого порядка, введя новую переменную $y = \dot{x}$, но необходимо подчеркнуть что они не обязательно будут иметь гамильтонову

⁶⁾ Помимо этого нетрудно показать, что $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Сопоставление с каноническими уравнениями (2.2.15) приводит к заключению, что $-H$ и t формально могут рассматриваться как пара канонических переменных. Такой подход особенно продуктивен в случае зависящих от времени гамильтонианов, для которых часто рассматривается $(2n+2)$ -мерное «расширенное» фазовое пространство переменных $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n; -H, t$. (См. ниже обсуждение инварианта Пуанкаре—Картана.)

форму. Рассмотрим задачу о соскальзывающей бусинки. Уравнения Гамильтона записываются в виде

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m(1 + (f'(x))^2)}, \quad (2.2.17a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p^2 f'(x) f''(x)}{m(1 + (f'(x))^2)^2} - mg f'(x). \quad (2.2.17b)$$

Соответствующее уравнение Лагранжа имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x)(\dot{x}^2 f''(x) + g)}{1 + (f'(x))^2}. \quad (2.2.18)$$

Введя переменную $y = \dot{x}$, получаем пару уравнений

$$\dot{x} = y, \quad (2.2.19a)$$

$$\dot{y} = -\frac{f'(y^2 f'' + g)}{1 + (f')^2}, \quad (2.2.19b)$$

которые, как легко видеть, существенно отличаются от уравнений (2.2.17).

Уравнения Гамильтона (2.2.15) обладают рядом важных свойств; пока мы ограничимся их обсуждением для случая не зависящих от времени гамильтонианов. Прежде всего, набор из $2n$ переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, которые часто называются «каноническими» или «канонически сопряженными» переменными (« p_i — импульс, сопряженный с q_i ») образует $2n$ -мерное *фазовое пространство* (см. обсуждение фазового пространства в главе 1). Решение уравнений Гамильтона

$$q_i(t) = q_i(q_0, p_0, t), \quad p_i(t) = p_i(q_0, p_0, t), \quad (2.2.20)$$

где $q_0 = (q_1(0), \dots, q_n(0))$, $p_0 = (p_1(0), \dots, p_n(0))$ — начальные условия, определяет механическое состояние системы в момент времени t . Со временем фазовая траектория, которая задается $q(t)$ и $p(t)$, пробегает некоторые области фазового пространства. Вопрос о том, какие именно это области, представляет собой фундаментальную проблему, которую мы скоро обсудим.

Легко видеть, что уравнения (2.2.15) удовлетворяют условию «несжимаемости»:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (2.2.21)$$

Представим себе каплю «жидкости» фазового пространства — уравнение (2.2.21) утверждает, что объем этой капли остается постоянным. Таким образом, элемент объема фазового пространства в гамильтоновом потоке сохраняется — это и есть знаменитая *теорема Лиувилля*, описывающая одно из наиболее фундаментальных свойств гамильтоновых систем⁷⁾. Для задачи о соскальзывающей бусинки, например, из уравнений (2.2.17) легко видеть, что дивергенция фазового потока действительно равна нулю. Заметим, с другой стороны, что пара уравнений (2.2.19), полученных из лагранжиана, не сохраняет объем (в данном случае точнее сказать площадь) «фазового пространства» в плоскости (x, y) .

⁷⁾ Более глубокая геометрическая интерпретация теоремы Лиувилля приведена в приложении 2.2.

Уравнения Гамильтона столь симметричны относительно p и q , что представляется вполне естественным рассматривать переменные p_i и q_i как полностью равноправные. Во многих случаях удобно ввести единый «набор» из $2n$ координат z_i , где $z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Это позволяет записать уравнение Гамильтона для данного гамильтониана $H = H(p, q) = H(z)$, в кратком виде

$$\dot{z} = J \cdot \nabla H(z), \quad (2.2.22)$$

где $\nabla = (\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_{2n}})$ и матрица J размерности $2n \times 2n$ называется *симплектической матрицей*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.23)$$

здесь 1 — единичная матрица.

2.2.в. Скобки Пуассона*

Один из наиболее важных вопросов состоит в том, можем ли мы проинтегрировать уравнение Гамильтона. Если система имеет только одну степень свободы (т. е. описывается одной парой канонических переменных (p, q)), то соответствующая пара уравнений первого порядка может быть проинтегрирована методом, описанным в главе 1. Основной процедурой, независимо от числа степеней свободы, является отыскание интегралов движения. Гамильтонов подход позволяет очень изящно представить временную зависимость динамических переменных. Рассмотрим некоторую функцию $f = f(p, q, t)$; для нее

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

где $[H, f]$ — *скобки Пуассона* для функций f и H . Существует тесная связь между скобками Пуассона в классической механике и коммутатором в квантовой механике. Действительно, скобки Пуассона можно записать для любой пары динамических переменных, например,

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (2.2.25)$$

Если динамическая переменная не зависит от времени явным образом (т. е. $f = f(p, q)$) и ее скобки Пуассона с H обращаются в ноль, то, как следует из (2.2.24), f является постоянной движения. Очевидно, что энергия не зависящих от времени систем ($H = E$) представляет собой постоянную движения, так как скобки Пуассона для функции H с самой собой равны нулю.

Из определения скобок Пуассона (2.2.25) можно вывести целый ряд их свойств. Для трех заданных функций справедливы соотношения

$$[f, g] = -[g, f], \quad (2.2.26a)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h], \quad (2.2.26б)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h], \quad (2.2.26в)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \quad (2.2.26г)$$

последнее из которых, обладающее характерной циклической структурой, известно как *тождество Якоби*. Набор свойств (2.2.26) свидетельствует о том, что скобки Пуассона соответствуют структуре, которая называется *алгеброй Ли*. Ничто не препятствует выбору различных функций f, g, h в качестве канонических переменных, что приводит к соотношениям вида

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij}, \quad (2.2.27)$$

которые напоминают соответствующие соотношения, полученные в квантовой механике (например, третьему соотношению отвечает $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}$). Если f и g — постоянные движения, то из теоремы Пуассона следует, что их скобки также являются постоянной движения, т. е. $[f, g] = \text{const}$. Это очевидным образом следует из тождества Якоби (2.2.26г) $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$. Так как первые две скобки обращаются в ноль (в силу того, что f и g являются постоянными движениями), мы автоматически получаем требуемый результат $[H, [f, g]] = 0$, подтверждающий, что $[f, g]$ также является постоянной движения. На практике, однако, теорема Пуассона не всегда достаточно конструктивна (с точки зрения построения новых интегралов движения), поскольку скобки $[f, g]$ могут оказаться просто постоянной (например, равняться нулю) или некой функцией исходных интегралов движения f и g .

В главе 1 отмечалось, что в общем случае для полного «интегрирования» системы из n уравнений первого порядка требуется $n - 1$ интеграл (сюда входят как нетривиальные «интегралы движения», так и тривиальные «постоянные интегрирования»). Означает ли это, что для решения системы $2n$ уравнений, описывающих гамильтонову систему, потребуется $2n - 1$ интеграл? К счастью оказывается, что благодаря особой симплектической структуре уравнений Гамильтона, о которой уже упоминалось выше, необходимо лишь n интегралов движения. Для понимания сути этого замечательного факта целесообразно сперва рассмотреть так называемые *канонические преобразования*. Они представляют собой такие преобразования переменных, которые не затрагивают гамильтонову структуру системы.

2.3. Канонические преобразования

При лагранжевом описании системы (т. е. в терминах обобщенных координат и скоростей $q_i, \dot{q}_i$) в некоторых случаях удобно перейти к некоторому новому набору обобщенных координат:

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n), \quad (2.3.1)$$

что позволяет упростить интегрирование уравнений движения (примером может служить переход от декартовых координат к полярным). В формализме Гамильтона имеется два набора независимых переменных, p_i и q_i ($i = 1, \dots, n$), которые, как мы уже говорили, во многом равноправны. Таким образом, возникает необходимость рассмотреть возможность перехода от одного набора фазовых переменных (p_i, q_i) к некоторому другому набору (P_i, Q_i) , т. е.

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \\ Q_i &= Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Подчеркнем, что каждая из новых координат P_i и Q_i может в общем случае зависеть от всех p_i и q_i . Преобразования, которые позволяют выразить новые P_i

только через старые p_i , а новые Q_i — только через старые q_i (как в уравнении (2.3.1)), называются *точечными преобразованиями*. Преобразования вида (2.3.2), не нарушающие симплектическую структуру системы, называются *каноническими преобразованиями*. Нестрого говоря (более точная, геометрическая интерпретация будет дана позднее), это означает, что каноническая форма уравнений Гамильтона остается неизменной, т. е.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial}{\partial P_i} H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial}{\partial Q_i} H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad (2.3.3)$$

где $H' = H'(\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ — преобразованный гамильтониан. (Переход от $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ к $H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ не всегда представляет собой простую подстановку переменных — см. ниже.)

2.3.а. Сохранение фазового объема

Фундаментальным свойством канонических преобразований является сохранение фазового объема⁸⁾. Пусть произведение $\prod_{i=1}^n dp_i dq_i$ представляет собой элемент объема в «старом» фазовом пространстве, а произведение $\prod_{i=1}^n dP_i dQ_i$ в «новом»; при этом требование равенства объемов выражается соотношением

$$\int \prod_{i=1}^n dp_i dq_i = \int \prod_{i=1}^n dP_i dQ_i, \quad (2.3.4)$$

где интегрирование осуществляется по заданному $2n$ -мерному объему в фазовом пространстве. Интегралы связаны между собой посредством якобиана

$$\int \prod_{i=1}^n dP_i dQ_i = \int \frac{\partial(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} \prod_{i=1}^n dp_i dq_i. \quad (2.3.5)$$

Отсюда следует, что якобиан преобразований, сохраняющих объем, должен быть равен единице:

$$\frac{\partial(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = \frac{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)} = 1. \quad (2.3.6)$$

⁸⁾ В действительности фазовый объем входит в иерархию величин, сохраняющихся под действием канонических преобразований и называемых инвариантами Пуанкаре. Первый из них

$$\iint \sum_{i=1}^n dp_i dq_i = \iint \sum_{i=1}^n dP_i dQ_i$$

представляет собой сумму площадей проекций (области фазового пространства) на множество (p_i, q_i) плоскостей. На геометрическом языке это выражается в терминах, «дифференциальной 2-формы»

$$\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i,$$

где $\wedge$ означает так называемое внешнее произведение. Такой подход позволяет дать строгое геометрическое определение канонических преобразований. Все остальные инварианты, включая (2.3.4), могут быть получены таким же образом (см. приложение 2.2).

Рассмотрим очень простой пример

$$Q = -p, \quad P = q. \quad (2.3.7)$$

В этом случае

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad (2.3.8)$$

откуда следует, что преобразование (2.3.7) сохраняет объем (является каноническим). Это преобразование иллюстрирует степень равноправности p и q : их можно поменять местами, но при этом нужно изменить знак. Подчеркнем, что без перемены знака (т. е., если $Q = p$ и $P = q$) якобиан будет равен -1 . В действительности, необходимость изменения знака не должна вызывать удивления, поскольку она необходима для сохранения формы уравнений Гамильтона (2.3.3), когда P и Q меняются местами.

Примером неканонического преобразования может служить переход от полярных координат к декартовым:

$$q = P \cos Q, \quad p = P \sin Q. \quad (2.3.9)$$

Так как

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \begin{vmatrix} -P \sin Q & P \cos Q \\ \cos Q & \sin Q \end{vmatrix} = -P, \quad (2.3.10)$$

то фазовый объем не сохраняется.

Теорема Лиувилля утверждает, что фазовый объем в гамильтоновом потоке сохраняется; мы получили ее в разделе 2.2.6 как практически очевидное условие несжимаемости, которое следует из формы уравнений Гамильтона. На языке канонических преобразований мы можем сформулировать теорему Лиувилля следующим образом. Рассмотрим в фазовом пространстве некоторую траекторию, вдоль которой начальные значения q_0, p_0 , отвечающие моменту времени t_0 , изменяются за (короткий) промежуток времени δt до значений p_1, q_1 , т. е.

$$q_1 = q(t_0 + \delta t) = q_0 + \delta t \frac{dq}{dt} \Big|_{t=t_0} + O(\delta t^2) = q_0 + \delta t \frac{\partial}{\partial p_0} H(q_0, p_0, t_0) + O(\delta t^2),$$

$$p_1 = p(t_0 + \delta t) = p_0 + \delta t \frac{dp}{dt} \Big|_{t=t_0} + O(\delta t^2) = p_0 - \delta t \frac{\partial}{\partial q_0} H(q_0, p_0, t_0) + O(\delta t^2).$$

Если переход от q_0, p_0 к q_1, p_1 действительно представляет собой каноническое преобразование одного набора переменных в другой, то якобиан $\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(q_0, p_0)}$ должен быть равен единице. Вычисляем

$$\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(q_0, p_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_0} & \frac{\partial p_1}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_0} & \frac{\partial p_1}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} & -\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^2} \\ \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0^2} & 1 - \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} \end{vmatrix} = 1 + O(\delta t^2) = 1 \text{ в пределе } \delta t \rightarrow 0.$$

Заметим, что в ноль обращается член $O(\delta t^2)$, а не $O(\delta t)$. Из того, что рассматриваемое изменение пропорционально $O(\delta t^2)$, следует, что общее изменение площади за любой конечный промежуток времени (кратный δt) ведет себя как $O(\delta t)$, т. е. обращается в ноль в пределе $\delta t \rightarrow 0$. Таким образом, «инфинитезимальное преобразование», порождаемое самим гамильтонианом, является каноническим. Фазовый объем в переменных q_0, p_0 сохраняется при переходе (в гамильтоновом потоке) к «новым» переменным q_1, p_1 — что по сути и утверждается теоремой Лиувилля.

2.3.6. Оптимальное преобразование

Практическое использование канонических преобразований (помимо того, что они сами по себе обладают довольно изящной структурой) состоит в отыскании тех из них, которые позволяют максимально упростить интегрирование уравнений Гамильтона. Оптимальным является случай, когда все Q_i циклические; при этом преобразованный гамильтониан зависит только от новых импульсов P_i :

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \rightarrow H'(P_1, \dots, P_n). \quad (2.3.11)$$

Уравнение Гамильтона при этом приобретают особенно простой вид, так как

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0, \quad \text{то есть} \quad P_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3.12a)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_1, \dots, P_n), \quad (2.3.12b)$$

где f_i — некоторая не зависящая от времени функция от P_i . Уравнение для Q_i может быть, таким образом, проинтегрировано непосредственно:

$$Q_i = f_i t + \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3.12b)$$

где $\delta_i = Q_i(0)$ представляет собой набор произвольных постоянных, определяемых начальными условиями. Ясно, что новые «импульсы» P_i являются интегралами движения. Поэтому, если мы можем их отыскать, то мы, тем самым, можем и полностью проинтегрировать уравнения движения. Величины P_i и δ_i в совокупности составляют набор из $2n$ интегралов: n величин P_i представляют собой нетривиальные постоянные движения (или первые интегралы), позволяющие «осуществить» интегрирование, а n величин δ_i — это тривиальные постоянные интегрирования, позволяющие, завершить, интегрирование. (При необходимости полученное решение можно, по крайней мере, в принципе, снова выразить в терминах исходных, старых, p_i и q_i .) Разумеется, для этого мы должны уметь: (1) отыскивать эти замечательные новые переменные и (2) корректно преобразовывать гамильтониан к новому представлению.

2.3.в. Производящие функции

Канонические преобразования генерируются с помощью так называемых *производящих функций*⁹⁾. Один из способов их введения предполагает использование вариационного принципа. Но хотя этот способ довольно элегантен, по-видимому проще, по крайней мере для задач, не зависящих от времени, ввести это понятие более простым способом, привлекая лишь принцип сохранения фазового объема. (Здесь мы следуем подходу Персиваля и Ричардса [6]). Для начала будем считать, что имеется единственная степень свободы и наборы канонических переменных (p, q) и (P, Q) . В этом случае с учетом сохранения фазового объема

⁹⁾ Важно подчеркнуть, что производящие функции представляют собой не просто формализм — как это может показаться при первом чтении. Они чрезвычайно полезны, так как позволяют находить одновременно как, новые, канонические переменные P и Q , так и их взаимосвязь со старыми переменными p и q . В итоге мы получаем «два результата за одну цену». Если же попытаться обойтись без производящих функций, начав с задания некоторых соотношений $Q = Q(q, p)$, то скорее всего придется затратить много усилий для отыскания канонических переменных $P = P(q, p)$.

$$\iint_R dp dq = \iint_R dP dQ, \quad (2.3.13)$$

где интегрирование проводится по некоторой замкнутой области R . Согласно теореме Стокса от двойного интеграла можно перейти к интегралу по замкнутому контуру $\mathcal{C}$, заключающему внутри себя R :

$$\oint_{\mathcal{C}} p dq = \oint_{\mathcal{C}} P dQ. \quad (2.3.14)$$

Теперь предположим, что P и Q представляют собой некоторые функции от p и q (т. е. $P = P(q, p)$, $Q = Q(q, p)$), но ничто не мешает выразить эти зависимости в виде смешанных зависимостей между переменными (т. е. $P = P(Q, q)$, $p = p(Q, q)$), где теперь в качестве независимых переменных выступают Q и q . Это позволяет представить (2.3.14) в виде

$$\oint_{\mathcal{C}} [p(Q, q) dq - P(Q, q) dQ] = 0. \quad (2.3.15)$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом некоторой функции — обозначим ее через $F_1(Q, q)$. Можно, таким образом, написать

$$\oint_{\mathcal{C}} [p dq - P dQ] = \oint_{\mathcal{C}} dF_1(Q, q) = \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial q} dq \right) \quad (2.3.16)$$

и, приравнявая коэффициенты при dq и dQ , находим, что

$$p = \frac{\partial}{\partial q} F_1(Q, q), \quad (2.3.17a)$$

$$P = -\frac{\partial}{\partial Q} F_1(Q, q). \quad (2.3.17b)$$

Уравнение (2.3.17a) задает взаимосвязь между p и (q, Q) , которую необходимо обратить (что возможно при условии $\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^2} \neq 0$), чтобы получить зависимость $Q = Q(q, p)$. Подстановка ее в (2.3.17b) дает вторую из требуемых зависимостей $P = P(q, p)$.

В разобранном примере в качестве независимых переменных была выбрана пара (q, Q) ; очевидно, что возможен выбор и других комбинаций (например, (P, q) , (Q, p) , (P, p)), которые перемешивают между собой оба набора. Рассмотрим первую из них, т. е. комбинацию (P, q) . Чтобы получить требуемый результат, запишем тождество

$$\oint d(pQ) = \oint p dQ + \oint Q dp, \quad (2.3.18)$$

подставляя которое в (2.3.15) и вводя новый дифференциал $dF_2(P, q)$, получаем по аналогии с (2.3.16)

$$\oint_{\mathcal{C}} [p dq + Q dp] = \oint_{\mathcal{C}} dF_2(P, q) = \oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{\partial F_2}{\partial P} dP + \frac{\partial F_2}{\partial q} dq \right], \quad (2.3.19)$$

откуда следует пара соотношений

$$p = \frac{\partial}{\partial q} F_2(P, q), \quad (2.3.20a)$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial P} F_2(P, q). \quad (2.3.20b)$$

Одним из самых простых примеров производящей функции F_2 может служить функция $F_2(P, q) = Pq$, которая, как следует непосредственно из (2.3.20), приводит просто к тождественным преобразованиям:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q. \quad (2.3.21)$$

Из изложенного становится ясно, что существует еще две производящие функции $F_3(Q, p)$ и $F_4(P, p)$. Для наших целей наибольшее значение имеет функция F_2 . Обсуждение общих свойств и взаимосвязей между F_i ($i = 1, \dots, 4$) можно найти в любом стандартном учебнике по механике.

Если канонические преобразования не зависят от времени, то переход от «старого» гамильтониана $H(p, q)$ к «новому» гамильтониану $H'(P, Q)$ представляет собой непосредственную замену переменных:

$$H' = H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (2.3.22)$$

Используя правило дифференцирования сложных функций и свойство якобиана $\frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = 1$, нетрудно убедиться, что

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.3.23)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.3.24)$$

Подробный вывод первого из этих соотношений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial P} &= \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial P} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) = \frac{\partial H}{\partial P}, \end{aligned}$$

где во второй строке использовано правило дифференцирования сложной функции, а в третьей — свойство якобиана. Уравнение (2.3.24) получается аналогичным образом.

В случае преобразований, зависящих от времени (когда, например, $F_2 = F_2(P, q, t)$), гамильтониан преобразуется не столь непосредственно. И хотя требуемое преобразование может быть получено с помощью соображений, использованных выше, более изящным является способ, основанный на вариационном принципе. Идея заключается в том, чтобы (формально) рассмотреть принцип Гамильтона в фазовом пространстве, т. е. записать интеграл действия в терминах гамильтониана и потребовать, чтобы (ср. (2.1.2))

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H(p, q, t)) dt = 0. \quad (2.3.25)$$

(При этом на самом деле возникает несколько нюансов. Например, единственным требованием при вариации (2.1.2) является обращение в ноль вклада конечных точек в конфигурационном пространстве (т. е. $\delta q(t_1)$ и $\delta q(t_2)$.) В случае (2.3.25) также необходимо решить, как поступать с вариациями p в конечных точках: оказывается, что соотношение (2.3.25) может быть использовано для вывода уравнений Гамильтона без уточнения этих условий. Более подробно этот довольно тонкий момент разобран у Голдстейна [3].) Для наших целей мы воспользуемся соотношением $\dot{q} dt = dq$ и представим (2.3.25) в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p dq - H(p, q, t)) dt = 0. \quad (2.3.26)$$

Этот же принцип должен соблюдаться для любой другой пары канонических переменных (P, Q) , что позволяет записать¹⁰⁾

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P dQ - H'(P, Q, t)) dt = 0. \quad (2.3.27)$$

Эти два интеграла могут отличаться, самое большее, на полный дифференциал некоторой функции от канонических переменных и t (что обеспечивает обращение в ноль вклада конечных точек в пространствах (p, q) и (P, Q) соответственно). Обозначив эту полную производную через dF , можем записать

$$p dq - H dt = P dQ - H' dt + dF. \quad (2.3.28)$$

Отсюда легко видеть, что

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.3.29)$$

Если мы определим F как производящую функцию, то получим искомое правило для преобразования зависящих от времени гамильтонианов. Завершая наше изложение, рассмотрим в качестве F функцию от q и Q , т. е. первый тип производящей функции $F = F_1(Q, q, t)$. В этом случае из (2.3.28) очевидным образом следуют, помимо (2.3.29), соотношения

$$p = \frac{\partial}{\partial q} F_1(Q, q, t) \quad (2.3.30a)$$

и

$$P = -\frac{\partial}{\partial Q} F_1(Q, q, t). \quad (2.3.30b)$$

Если, с другой стороны, F относится ко второму типу (т. е. является функцией P , q и t), то переписывая (2.3.28) в виде

$$d(F + PQ) = p dq + Q dP + (H' - H) dt \quad (2.3.31)$$

¹⁰⁾ Величина $p dq - H dt$ известна как *инвариант Пуанкаре—Картана*. С геометрической точки зрения он представляет собой пример «дифференциальной 1-формы». Такая 1-форма инвариантна по отношению к каноническим преобразованиям.

(и полагая $F + PQ \equiv F_2(P, q, t)$, где Q представлена как функция P, q, t), находим

$$p = \frac{\partial}{\partial q} F_2(P, q, t) \quad (2.3.32a)$$

и

$$Q = \frac{\partial}{\partial P} F_2(P, q, t), \quad (2.3.32b)$$

а также соотношение (2.3.29). Аналогичные соображения приложимы для всех четырех типов производящих функций, и мы приходим, таким образом, к общему результату:

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3.33)$$

В следующем разделе будет показано, каким образом построенный канонический формализм может быть использован для интегрирования важного класса гамильтоновых систем в явном виде.

2.4. Уравнение Гамильтона—Якоби и переменные действие—угол

Наша цель состоит в отыскании канонического преобразования для набора постоянных сопряженных импульсов (как в уравнении (2.3.11)). Для этого необходимо *найти* подходящую производящую функцию. Она должна принадлежать к функциям типа F_2 , т. е. зависеть от «старых» координат $q_1, \dots, q_n$ и «новых» импульсов, которые мы обозначим здесь через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Производящую функцию записываем в виде $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Исходя из (2.3.25), получаем соотношения

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (2.4.1a)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (2.4.1b)$$

где β_i — новые координаты, сопряженные с α_i . В соответствии с (2.3.22) соотношение между «новым» гамильтонианом $H'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и «старым» $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ имеет, таким образом, вид

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.4.2)$$

Правую часть (2.4.2) следует рассматривать как *постоянную* величину, т. е. как значение гамильтониана. Уравнение (2.4.2) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно S , содержащее n независимых переменных ($q_i, i = 1, \dots, n$). Оно известно как *не зависящее от времени уравнение Гамильтона—Якоби*¹¹⁾. «Полное решение» уравнений такого типа

¹¹⁾ В случае зависящих от времени гамильтонианов зависящее от времени уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t\right) = 0,$$

где производящая функция зависит от времени. У консервативных систем временная зависимость может быть выделена (т. е. $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - Et$), и мы возвращаемся к не зависящему от времени уравнению (2.4.2), для которого $E = H'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

содержит n независимых постоянных интегрирования; они могут выступать в качестве набора α_i , $i = 1, \dots, n$. Решение уравнения Гамильтона—Якоби эквивалентно решению канонических уравнений движения. В общем случае за исключением класса механических систем, известных как *сепарабельные* (они будут обсуждаться ниже) это достаточно сложная задача (как и должно быть в соответствии с принципом «сохранения сложности», подтверждаемым каждодневным опытом физиков!). Все же мы можем, по крайней мере, усмотреть вид решения S из соотношений (2.4.1). При заданном наборе α_i имеем:

$$dS = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^n p_i dq_i. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, S представляет собой линейный интеграл

$$S = \int_{q_0}^q \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad (2.4.4)$$

где $q_0 = q_1(0), \dots, q_n(0)$ — начальная точка на классической траектории, отвечающей данному набору α_i , а $q = q_1(t), \dots, q_n(t)$ — движущаяся (зависящая от времени) точка на этой траектории. Следовательно, для отыскания решения S в явном виде мы должны знать истинный классический путь от q_0 , к q , т. е. знать решение задачи.

2.4.а. Уравнение Гамильтона—Якоби в случае одной степени свободы

В случае системы с одной степенью свободы уравнение Гамильтона—Якоби решается достаточно просто. Старый гамильтониан представляет собой функцию от единственной пары канонических переменных ($H = H(p, q)$), а «новый» зависит от одного (постоянного) канонического импульса ($H' = H'(\alpha)$). В случае не зависящих от времени задач используемый прием состоит в том, что постоянная интегрирования α полагается равной самому гамильтониану: $H' = \alpha$ (разумеется, α представляет собой энергию системы). Уравнение Гамильтона—Якоби приобретает в этом случае вид

$$H\left(\frac{\partial}{\partial q} S(q, \alpha), q\right) = \alpha \quad (2.4.5)$$

с соотношениями для производящей функции

$$p = \frac{\partial}{\partial q} S(q, \alpha), \quad (2.4.6a)$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} S(q, \alpha). \quad (2.4.6b)$$

Поскольку преобразование каноническое, уравнения движения для преобразованного гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{\partial H'}{\partial \beta} = 0, \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial H'}{\partial \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Они легко интегрируются. В результате получаем $\alpha = \text{const} = H'$ (по определению) и

$$\beta = t - t_0. \quad (2.4.7)$$

Отметим, что для нашей системы с одной степенью свободы мы получили два интеграла: нетривиальную постоянную движения α и тривиальную постоянную интегрирования t_0 . Объединение (2.4.7) с (2.4.6б) и (2.4.4) дает

$$t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{\partial}{\partial \alpha} p(q, \alpha) dq. \quad (2.4.8)$$

В случае простого движения частицы в потенциальном поле гамильтониан имеет вид (см. (2.2.7))

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (2.4.9)$$

В этом случае, с учетом $H(p, q) = H'(\alpha) = \alpha$, получаем

$$p(q, \alpha) = \pm \sqrt{2m(\alpha - V(q))}, \quad (2.4.10)$$

и, таким образом, (2.4.8) сводится к квадратуре:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{\alpha - V(q)}}. \quad (2.4.11)$$

Поскольку в случае консервативных систем постоянная интегрирования α представляет собой не что иное как механическую энергию E , мы приходим в конце концов к квадратуре (1.1.9) главы 1. В результате может создаться впечатление, что мы затратили массу усилий на разработку изощренного формализма, приводящего к результату, который был нам известен уже на с. 7! Однако, как мы увидим ниже, проделанные выкладки создают основу для отыскания особенно полезного типа канонических переменных — *переменных действие—угол*, которые играют важную роль при описании свойств систем с большим числом степеней свободы.

2.4.6. Переменные действие—угол в случае одной степени свободы

Из результатов, полученных в главе 1 для связанных гамильтоновых систем, следует, что траектории на фазовой плоскости представляют собой *замкнутые* инвариантные кривые. Движение, таким образом, периодически; возврат в одну и ту же точку (p, q) пространства происходит после завершения полного цикла с характерным периодом $2\pi/\omega$, где ω — частота движения. Идея введения переменных действие—угол состоит в отыскании такой пары сопряженных переменных, что сопряженная «координата» будет возрастать на 2π при каждом завершении полного периода движения. Обозначив эти переменные через I и θ , где I — постоянный сопряженный импульс, запишем пару соотношений для производящей функции:

$$p = \frac{\partial}{\partial q} S(q, I), \quad (2.4.12a)$$

$$\theta = \frac{\partial}{\partial I} S(q, I) \quad (2.4.12б)$$

и уравнение Гамильтона—Якоби (ср. (2.4.5))

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = \alpha = H'(I). \quad (2.4.13)$$

Для пути с заданным значением α (и, следовательно, с заданным значением I , так как $\alpha = H'(I)$) из (2.4.12б) получаем

$$\frac{d\theta}{dq} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right). \quad (2.4.14)$$

Мы требуем, чтобы результатом каждого цикла вдоль инвариантной кривой (обозначаемой $\mathcal{C}$) при фиксированном значении α было изменение θ на 2π :

$$2\pi = \oint_{\mathcal{C}} d\theta = \frac{\partial}{\partial I} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint_{\mathcal{C}} p dq. \quad (2.4.15)$$

Это требование выполняется при условии

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} p dq, \quad (2.4.16)$$

которое и выступает в качестве определения переменной действия. Постоянная интегрирования α и постоянный сопряженный импульс I не доставляют особых хлопот. Уравнение Гамильтона—Якоби (2.4.13) в этом случае еще может быть решено относительно S как функции q и α :

$$S = \int_{q_0}^q p(q, \alpha) dq, \quad (2.4.17)$$

и в результате переменная действия определяется из (2.4.16) как интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} p(q, \alpha) dq \quad (2.4.18)$$

вдоль инвариантной кривой с фиксированным значением $\alpha = H'(I) = E$. (При интегрировании вдоль замкнутого контура $\mathcal{C}$ в интеграл включаются обе ветви p в (2.4.10): тем самым учитывается многозначность p .) Канонические уравнения для преобразованного гамильтониана имеют вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \theta} H'(I) = 0, \quad (2.4.19a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial I} H'(I) = \omega(I). \quad (2.4.19b)$$

Они интегрируются непосредственным образом. В результате получаем

$$I = \text{const}, \quad (2.4.20a)$$

$$\theta = \omega(I)t + \delta, \quad (2.4.20b)$$

где $\omega(I)$ — характеристическая частота движения (ср. (1.1.12)), а $\delta = \theta(0)$. Выразив посредством (2.4.18) переменную действия I , тем самым, ее точную взаимосвязь с α ,

можно записать S в (2.4.17) как функцию q и I . При этом с помощью производящего соотношения (2.4.12) можно p и q явным образом выразить через I и θ : $p = p(I, \theta)$, $q = q(I, \theta)$.

Наглядным примером может служить обыкновенный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.4.21)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 = \alpha, \quad (2.4.22)$$

где α — постоянная интегрирования, которую мы полагаем равной полной механической энергии $E = H$. Переменная действия определяется соотношением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \sqrt{2 \left(E - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right)} dq, \quad (2.4.23)$$

где замкнутый контур $\mathcal{C}$ представляет собой окружность, на которой расположены точки возврата $\pm \sqrt{2E}/\omega$. Интеграл (2.4.23) легко вычисляется; в результате получаем

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (2.4.24)$$

Это, в свою очередь, задает соотношение между постоянной интегрирования $\alpha = E$ и новым постоянным «импульсом» I : $\alpha = E = H'(I) = I\omega$. Производящая функция при этом может быть записана в виде

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q \sqrt{2 \left(I\omega - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right)} dq. \quad (2.4.25)$$

Исходя из соотношения (2.4.12б) для производящей функции, легко можно выразить зависимость $q = q(I, \theta)$ в явном виде:

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin(\theta + \delta), \quad (2.4.26)$$

где δ — некоторый сдвиг фазы ($\delta = \arcsin(q_0\omega/\sqrt{2E})$). Уравнения Гамильтона в данном случае легко интегрируются ($\theta = \omega t + \delta$), и в качестве решения (2.4.26) мы без труда получаем результат, совпадающий с (1.1.11).

Менее тривиальным примером является система (1.1.13), гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\beta q^4. \quad (2.4.27)$$

Для действия получается соотношение

$$I = \frac{2^{1/2}}{3\pi^{3/2}\beta^{1/4}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) E^{3/4}, \quad (2.4.28)$$

и, соответственно, «новый» гамильтониан выражается как функция действия следующим образом:

$$H(I) = I^{4/3} \left(\frac{3^4 \pi^6 \beta}{2^2 \Gamma^8(\frac{1}{4})} \right)^{1/3}. \quad (2.4.29)$$

В данном случае задача оказывается нелинейной, так как из уравнений Гамильтона следует, что частота зависит от действия: $\omega(I) = \text{const} \times I^{1/3}$.

2.5. Интегрируемые гамильтонианы

В случае систем с одной степенью свободы решение, по-видимому, может быть найдено всегда — либо с помощью методов, обсуждавшихся в главе 1, либо с использованием уравнения Гамильтона—Якоби, как это было описано в предыдущем разделе. Перейдем теперь к обсуждению проблем, возникающих в случае систем с большим числом степеней свободы.

2.5.a. Сепарабельные системы

Если имеется n степеней свободы, уравнение Гамильтона—Якоби (2.4.2) в общем случае решено быть не может. Исключение составляют *сепарабельные системы*, для которых производящая функция может быть представлена в виде суммы n слагаемых, каждое из которых зависит только от одной координаты,

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (2.5.1)$$

Относительно простой класс, для которого такое представление безусловно справедливо, образуют системы, гамильтонианы которых сами являются суммами n независимых слагаемых вида

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{k=1}^n H_k(p_k, q_k) \quad (2.5.2)$$

(например, система n несвязанных осцилляторов). В этом случае уравнение Гамильтона—Якоби приобретает простой вид:

$$H_k \left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k \right) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.5.3)$$

где α_k связаны соотношением $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = H'$, а α — значение преобразованного гамильтониана H' . В большинстве случаев гамильтониан не может быть записан в таком удобном виде как (2.5.2), но при этом не исключено, что разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби может быть осуществлено в некоторой другой (ортогональной) системе координат. Некоторые примеры таких сепарабельных систем координат приведены в книге Ландау и Лифшица [4].

Предположим, что представление (2.5.1) все-таки возможно и что соотношение

$$p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (2.5.4)$$

указывает на то, что каждая переменная p_k зависит от единственной переменной q_k . Если, к тому же, движение периодически по каждой из q_k (например, колебания (или вращение) по каждой из степеней свободы), то можно ввести набор переменных действия

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} p_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_k, \quad (2.5.5)$$

где $\mathcal{C}_k$ — замкнутый путь, отвечающий полному циклу колебания. После того, как получены величины I_k (и их взаимосвязь с α_k), их можно подставить в выражение для S , и воспользоваться вторым соотношением для производящей функции

$$\theta_k = \frac{\partial S}{\partial I_k} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial I_k} S_m(q_m, I_1, \dots, I_n), \quad (2.5.6)$$

где θ_k — угловые переменные, сопряженные I_k . Преобразованному гамильтониану $H'(I_1, \dots, I_k)$ соответствуют канонические уравнения

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial}{\partial \theta_k} H'(I_1, \dots, I_n) = 0, \quad (2.5.7a)$$

$$\dot{\theta}_k = \frac{\partial}{\partial I_k} H'(I_1, \dots, I_n) = \omega_k(I_1, \dots, I_n), \quad (2.5.7b)$$

где ω_k — частота, отвечающая каждой степени свободы. Эти уравнения легко интегрируются; в результате получаем:

$$I_k = \text{const}, \quad (2.5.8a)$$

$$\theta_k = \omega_k(I_1, \dots, I_n)t + \delta_k, \quad (2.5.8b)$$

где δ_k — некоторые произвольные постоянные («сдвиги фазы»). Отметим, что набор величин $I_1, \dots, I_n, \delta_1, \dots, \delta_n$ выступает в роли $2n$ постоянных интегрирования, которые неизбежно возникают при интегрировании системы $2n$ уравнений первого порядка. Но при этом I_k образуют довольно специальный набор постоянных — после того, как они найдены, симплектическая структура гамильтониана позволяет легко получить другой набор.

2.5.6. Свойства интегрируемых систем

В общем случае сепарабельность конкретного гамильтониана и возможность определения переменных действия в виде (2.5.5) далеко не очевидны. Из всего сказанного выше должно быть понятно, что ключом к интегрированию гамильтоновой системы с n степенями свободы является отыскание n независимых интегралов (постоянных) движения. Если их удастся представить в виде n постоянных сопряженных импульсов, то уравнения Гамильтона легко интегрируются (даже если обратный переход к исходным p и q нетривиален). Если, к тому же, удастся найти n независимых периодических путей $\mathcal{C}_k$, набор переменных действия может быть задан в явном виде. Как мы убедимся ниже, сепарабельность в виде (2.5.1) для этого в действительности не требуется.

Если $F_i(p, q)$ является интегралом движения, то его значение вдоль любой траектории в фазовом пространстве постоянно:

$$F_i(p(t), q(t)) = f_i. \quad (2.5.9)$$

Используя скобки Пуассона (раздел 2.2) можно записать

$$[H, F_i] = 0. \quad (2.5.10)$$

Говорят, что гамильтонова система *полностью интегрируема*, если существует n интегралов движения, в качестве одного из которых, скажем F_1 , выступает гамильтониан H , образующих *инволютивную систему*. Последний термин подразумевает, что все F_i коммутируют друг с другом:

$$[F_i, F_j] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.5.11)$$

Значение этого свойства скоро станет понятным.

Существование n интегралов F_i означает, что траектории в $2n$ -мерном фазовом пространстве будут ограничены некоторым n -мерным многообразием M (в главе 1 было показано, что в случае системы с одной степенью свободы существование одного интеграла ограничивает движение инвариантной (одномерной) кривой). Теперь мы можем показать, что многообразие M обладает топологией n -мерного тора. Воспользовавшись симплектической матрицей, задаваемой соотношением (2.2.23), определим поля «скоростей» в виде

$$\xi_i = J \cdot \nabla F_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5.12)$$

где $\nabla = (\partial q_1, \dots, \partial q_n, \partial p_1, \dots, \partial p_n)$. Если $F_i = H$, то (2.5.12) определяет истинный гамильтонов поток, который, в силу существования набора интегралов $F_1, \dots, F_n$, должен полностью лежать на M . Таким образом, векторное поле ξ_i касательно к M . Действительно, все поля «скоростей» ξ_i касательны к M и, в силу свойства инволюции (2.5.11), линейно независимы. Хрестоматийная теорема топологии (теорема Пуанкаре—Хопфа, именуемая иногда теоремой «о невозможности причесать ежа») утверждает, что n -мерное многообразие (M), для которого можно построить n независимых касательных векторных полей, имеет топологию n -мерного тора. Это положение можно представить наглядно, сопоставив результат причесывания волос на двумерном торе и двумерной сфере — в последнем случае один из волос всегда будет торчать в точке полюса; см. рис. 2.1).

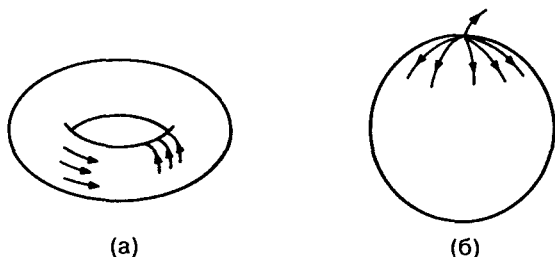


Рис. 2.1. (а) Гладко «причесанные» векторные поля на двумерном торе. (б) Сингулярная точка векторного поля на двумерной сфере

Существование в фазовом пространстве таких торов в свою очередь обеспечивает возможность инвариантного (т. е. не зависящего от способа представления) определения переменных действия. Обладающий естественной периодичностью n -мерный тор можно рассматривать как прямое произведение n независимых контуров с периодом 2π . Другими словами, на торе можно определить n топологически независимых замкнутых путей $\mathcal{C}_k$, ни один из которых не может быть плавно трансформирован в другой или стянут в точку (см. рис. 2.2).

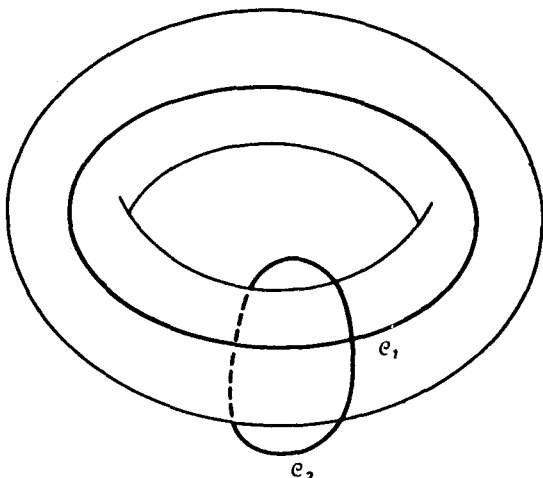


Рис. 2.2. Две топологически независимые кривые e_1 и e_2 на двумерном торе

Переменные действия определяются следующим образом:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{e_k} \sum_{m=1}^n p_m dq_m, \quad (2.5.13)$$

и с помощью производящей функции $S = S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n)$ можно получить сопряженные угловые переменные:

$$\theta_k = \frac{\partial}{\partial I_k} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n). \quad (2.5.14)$$

Уравнения Гамильтона имеют в переменных действие—угол вид

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial}{\partial \theta_k} H'(I_1, \dots, I_n) = 0, \quad (2.5.15a)$$

$$\dot{\theta}_k = \frac{\partial}{\partial I_k} H'(I_1, \dots, I_n) = \omega_k(I_1, \dots, I_n). \quad (2.5.15b)$$

Необходимо подчеркнуть, что если система полностью интегрируема, то переход к переменным действие—угол носит глобальный характер. Это означает, что фазовое пространство полностью заполняется торами (хотя при этом могут также существовать некоторые многомерные сепаратрисы — см. ниже), и данная траектория неизменно лежит на том или ином торе. Заданный набор начальных условий $(q_1(0), \dots, q_n(0), p_1(0), \dots, p_n(0))$ определяет конкретные значения интегралов: $f_i = F_i(p(0), q(0))$. В свою очередь, этот набор F_i определяет, на каком из торов лежит траектория (т. е. истинные значения переменных действия I_i , $i = 1, \dots, n$), а значения переменных θ_i определяют положение траектории на этом торе в данный момент времени.

Для полностью интегрируемых консервативных систем с n степенями свободы,

$$E = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \quad (2.5.16)$$

можно указать следующие важные размерности:

- (1) фазовое пространство: $2n$ -мерно;
- (2) энергетическая поверхность: $(2n - 1)$ -мерна;
- (3) торы: n -мерны.

Легко составить табличку, иллюстрирующую соотношение размерностей:

Степени свободы	1	2	3	4
Размерность фазового пространства	2	4	6	8
Размерность энергетической поверхности	1	3	5	7
Размерность торов	1	2	3	4

Анализируя эти числа, можно отметить ряд важных моментов. Во-первых, и энергетическая поверхность, и торы систем с одной степенью свободы имеют одинаковую размерность, равную единице. Формально это означает *эргодичность*¹²⁾ таких систем. Во-вторых, при $n = 2$ двумерные торы погружены на трехмерную энергетическую поверхность. Это означает, что они разделяют энергетическую поверхность на внутреннюю и внешнюю части. Таким образом, если между торами существует какой-либо «зазор» (что может иметь место для неинтегрируемых систем), находящаяся в нем траектория покинуть его не может. Но в то же время, в-третьих, при $n \geq 3$ траектории, находящиеся в «зазорах» между торами больших размерностей, могут перемещаться в другие области энергетической поверхности. Таким образом возникает явление, известное как *диффузия Арнольда*. (Обсуждение этого вопроса см. в книге Лихтенберга и Либермана [5]).

2.5.в. Примеры интегрируемых систем

Существует ряд простых примеров многомерных интегрируемых систем. Первый из них — двумерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (2.5.17)$$

В качестве двух интегралов движения выступают гамильтонианы (энергии), связанные с каждой из мод:

$$F_1 = E_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2), \quad F_2 = E_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (2.5.18)$$

Эта система удовлетворяет условию (2.5.2), и, следовательно, уравнение Гамильтона—Якоби сепарабельно. Движение состоит из независимых либраций в плоскостях (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , и переменные действия легко определяются в виде

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} p_1(q_1, E_1, E_2) dq_1, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_2} p_2(q_2, E_1, E_2) dq_2, \quad (2.5.19)$$

¹²⁾ В статистической механике термин *эргодический* означает, что любая траектория системы «равномерно» заполняет энергетическую поверхность. *Равномерность* подразумевает требование, чтобы «среднее по времени» для данной величины, скажем $f(p, q)$, совпадало с ее «фазовым средним», т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(p(t), q(t)) dt = \int dp \int dq f(p, q) \delta(E - H(p, q)),$$

где $\delta(E - H(p, q))$ представляет собой «микроканонический ансамбль», т. е. меру на энергетической поверхности $E = H$.

где контуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ представляют собой круговые пути между точками возврата либраций $\pm\sqrt{2E}/\omega_1$ и $\pm\sqrt{2E}/\omega_2$ соответственно. В переменных действия гамильтониан (2.5.17) имеет простой вид

$$H(I_1, I_2) = I_1\omega_1 + I_2\omega_2. \quad (2.5.20)$$

В случае консервативных систем с двумя степенями свободы, подобных рассматриваемой, целесообразно представлять линии постоянной энергии $E = H(I_1, I_2)$ на плоскости I_1, I_2 (см. рис. 2.3). Каждая точка на какой-либо из таких линий соответствует определенным значениям I_1, I_2 , и, следовательно, определенному тору в фазовом пространстве.

Другой простой пример двумерной системы — свободная частица с массой m в ящике:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (2.5.21)$$

Поскольку x и y — циклические координаты, постоянными движения являются импульсы (точнее говоря, их модули, так как при столкновении со стенками происходит перемена знака $p_x \rightarrow -p_x$). Переменные действия выражаются соотношениями

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_x} p_x dx = \frac{a}{\pi} |p_x|, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_y} p_y dy = \frac{b}{\pi} |p_y|, \quad (2.5.22)$$

и, следовательно, преобразованный гамильтониан записывается в виде

$$H(I_1, I_2) = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} \right). \quad (2.5.23)$$

Отметим, что эта система нелинейна, так как из уравнений Гамильтона следует зависимость частот от переменных действия:

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{\pi^2}{ma^2} I_1, \quad \omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \frac{\pi^2}{mb^2} I_2. \quad (2.5.24)$$

«Поверхности действия» постоянной энергии показаны на рис. 2.4. Заметим, что вдоль данной поверхности направление нормали $\nabla_I H(I_1, I_2)$ (где $\nabla_I = (\partial I_1, \partial I_2)$) плавно изменяется — это соответствует изменению частот при переходе от тора к тору¹³⁾. (Очевидно, что $\nabla_I H(I) = (\omega_1(I), \omega_2(I))$.)

Последний простой пример — движение на плоскости в потенциале центральной силы, описываемое гамильтонианом

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r), \quad (2.5.25)$$

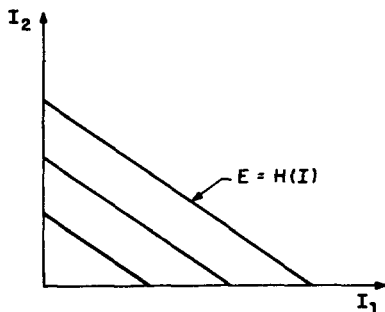


Рис. 2.3. Поверхности постоянной энергии на плоскости (I_1, I_2) для двумерного простого гармонического осциллятора

¹³⁾ Такие системы называются *невыврожденными* и удовлетворяют условию

$$\det \left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0.$$

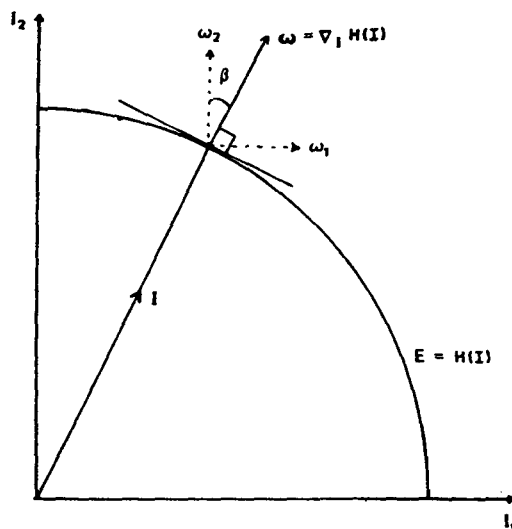


Рис. 2.4. Поверхность постоянной энергии для частицы в ящике. Вектор $\mathbf{I}$ выделяет конкретный тор на поверхности, а нормаль ω в этой точке определяет соответствующий вектор частоты. (Здесь $\beta = \arctg(\omega_1/\omega_2)$.)

где r и φ — полярные координаты. Обратим внимание, что угловая координата циклическая, и, следовательно, угловой импульс p_φ сохраняет свое значение. Таким образом, в качестве двух интегралов движения выступают

$$F_1 = p_\varphi, \quad F_2 = H(p_r, p_\varphi, r) = E. \quad (2.5.26)$$

При вращательном движении замкнутый путь, необходимый для определения соответствующего интеграла действия, отвечает изменению φ от 0 до 2π . Два интеграла действия, таким образом, имеют вид:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi, \quad (2.5.27a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(E - \frac{I_1^2}{2mr^2} - V(r) \right)} dr, \end{aligned} \quad (2.5.27b)$$

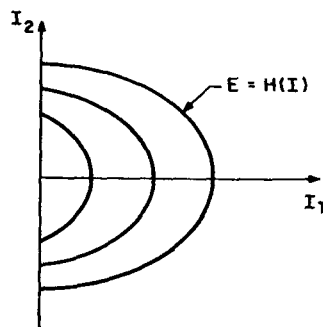


Рис. 2.5. Поверхности постоянной энергии для типичного гамильтониана с центральной силой

где r_1 и r_2 — точки возврата колебания. Окончательный вид I_2 зависит от $V(r)$. В случае типичного потенциала с отталкиванием на малых расстояниях и притяжением на больших можно ожидать, что «поверхности действия» будут иметь вид, схематически изображенный на рис. 2.5.

2.5.г. Движение на торах

Периодичность (гамильтонова) потока на торах позволяет представить данную динамическую величину $f(p, q)$ в виде многократного разложения в ряд Фурье по угловым переменным $\theta_1, \dots, \theta_n$. Так, например, q_i можно выразить как

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} a_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(i)} \exp \{i(k_1\theta_1 + k_2\theta_2 + \dots + k_n\theta_n)\} = \\ &= \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} a_{k_1, \dots, k_n}^{(i)} \exp \{i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)t + i(k_1\delta_1, \dots, k_n\delta_n)\}, \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

где коэффициенты Фурье $a_{k_1, \dots, k_n}^{(i)}$, зависящие от переменных действия, определяются соотношением

$$a_k^{(i)}(I) = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n q_i(I, \theta) \exp \{i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)\}, \quad (2.5.29)$$

$q_i(I, \theta)$ означают здесь $q_i(t)$, выраженные в переменных действие—угол. Переменные, которые могут быть представлены в виде таких кратных рядов, обычно называют *многопериодическими*. Особенности их поведения определяются значениями частот ω_i . Если отношение частот не рационально, движение на данном торе (т. е. на торе с данным набором ω_i) не воспроизводится в точности. Такие траектории обычно называют *квазипериодическими*. При этом каждая траектория со временем равномерно покрывает тор, т. е. поток на торе является эргодическим¹⁴⁾. Это легко видно в двумерном случае. Двумерный тор топологически эквивалентен единичному квадрату с отождествленными сторонами (см. рис. 2.6). При иррациональном отношении ω_1/ω_2 установить эргодичность движения довольно просто. По-видимому, строго это впервые доказал Якоби в 1835 году, но нестрогое исследование этого вопроса можно найти еще у ученого четырнадцатого столетия Николаса Орезма (ок. 1325—ок. 1382). Если, с другой стороны, отношение всех частот рационально, движение в конце концов повторит себя; такие траектории называют *замкнутыми*. В случае двух измерений должно выполняться единственное соотношение вида

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}. \quad (2.5.30)$$

Если поток на торе характеризуется таким отношением частот, траектория замкнется после m циклов по θ_1 и n циклов по θ_2 . В n -мерном случае для замыкания траектории требуется выполнение $n-1$ условия вида

$$\sum_{i=1}^n k_i^{(a)} \omega_i = 0, \quad a = 1, \dots, n-1, \quad (2.5.31)$$

¹⁴⁾ В случае тора, как и в общем случае, эргодичность означает, что среднее по времени совпадает с фазовым средним. «На языке» переменных действие—угол для данного тора это выражается в виде соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(p(t), q(t)) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} f(p(I, \theta), q(I, \theta)) d\theta.$$

Более подробно эргодичность и связанные с ней вопросы обсуждаются в главе 4.

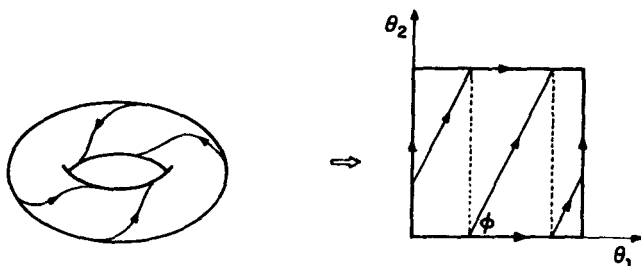


Рис. 2.6. Эквивалентность 2-тора и (единичного) квадрата с отождествленными сторонами

здесь $k_i^{(a)}$ — набор целых чисел. Полностью интегрируемая система называется *невырожденной*, если выполняется условие

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i(\mathbf{I})}{\partial I_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H(\mathbf{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (2.5.32)$$

Это предполагает, что частоты изменяются от тора к тору (т. е. система нелинейна). При этом некоторые торы на данной энергетической поверхности будут покрыты замкнутыми траекториями, тогда как другие — квазипериодическими траекториями. Хотя рациональных чисел существует бесконечно много, в множестве действительных чисел они образуют подмножество меры ноль; это означает, что иррациональных чисел бесконечно больше, чем рациональных. Таким образом, в невырожденной системе множество торов, покрытых квазипериодическими траекториями, будет более мощным, чем множество торов, покрытых замкнутыми траекториями, хотя последнее и плотно. Тем не менее мы увидим, что замкнутые траектории играют важную роль в определении свойств интегрируемых систем при возмущении.

2.5.д. Фундаментальные вопросы

Рассмотренный материал подводит нас к некоторым фундаментальным вопросам. До сих пор мы обсуждали только полностью интегрируемые системы, т. е. такие системы, для которых число первых интегралов совпадает с числом степеней свободы. Что изменится, если система не обладает набором из n первых интегралов? Этот вопрос можно сформулировать и по-другому: что произойдет с интегрируемой системой при нетривиальном возмущении? Разрушатся ли торы или сохранятся, хотя бы в каком-нибудь «искаженном» виде? Решение этой фундаментальной проблемы составляло основную задачу механики в девятнадцатом и двадцатом столетиях; оно было найдено лишь в начале 1960-х годов. Подробнее мы рассмотрим это в последующих главах.

Другая фундаментальная проблема: каким образом можно установить интегрируемость или нет произвольная гамильтонова система? Один из способов ее решения — попытаться определить в явном виде n интегралов движения (если они существуют). За исключением особых случаев (например, сепарабельных систем) это как правило неразрешимая задача — чтобы справиться с ней необходимо быть гением или везучим человеком, еще лучше сочетать и то и другое. Эта проблема установления интегрируемости систем до сих пор является предметом научных исследований. Некоторые современные ее аспекты будут рассмотрены в главе 8.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.1. Преобразования Лежандра

Кривую (или поверхность) можно представить не только набором точек, но и набором касательных плоскостей, как показано на рис. 2.7 (а). Преобразование Лежандра устанавливает соответствие между этими двумя представлениями. Мы здесь воспользуемся геометрическим построением, предложенным Арнольдом [1].

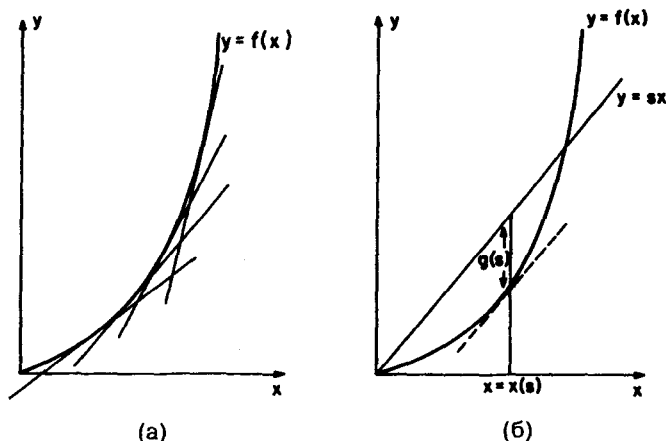


Рис. 2.7. (а) Кривая $y = f(x)$ и связанный с ней набор касательных плоскостей. (б) Построение преобразованной функции Лежандра $g(s)$

Рассмотрим кривую $y = f(x)$, представляющую собой выпуклую функцию, так что

$$\frac{d^2 f}{dx^2} > 0. \quad (2.П.1)$$

Результатом преобразования Лежандра функции f является новая функция g новой переменной s , построенная как показано на рис. 2.7 (б). Мы видим, что $g(s)$ представляет собой наибольшее расстояние по вертикали между прямой $y = sx$ и $f(x)$, т. е.

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x(s)). \quad (2.П.2)$$

Поскольку точка $x(s)$ определяется условием максимума,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0, \quad (2.П.3)$$

новая переменная s представляет собой не что иное как наклон функции $f(x)$:

$$s = f'(x), \quad (2.П.4)$$

и с учетом того, что f выпукла, точка $x = x(s)$ единственна (при условии, что она существует).

В качестве простой иллюстрации рассмотрим кривую $y = H(p)$, задаваемую функцией Гамильтона $H(p)$. Следуя изложенному алгоритму (в данном случае в плоскости (y, p)), находим, что новая функция (обозначим ее через $L(s)$) имеет вид

$$L(s) = sp - H(p). \quad (2.П.5)$$

В рассматриваемом случае новая переменная $s = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$, так что преобразование Лежандра может быть представлено как

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(p), \quad (2.П.6)$$

где p выражается как функция $\dot{q}$ посредством соотношения $\dot{q} = \frac{\partial H(p)}{\partial p}$. Этот пример иллюстрирует общий классический результат:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (2.П.7)$$

и

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H, \quad (2.П.8)$$

где $\dot{q}_i$ в (2.П.7) выражаются как функции p_i посредством соотношения

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}), \quad (2.П.9)$$

а p_i в (2.П.8) выражаются как функции $\dot{q}_i$ посредством соотношения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H(p, q). \quad (2.П.10)$$

Для того, чтобы оба преобразования были однозначны, L и H должны быть выпуклыми функциями $\dot{q}_i$ и p_i соответственно (ср. (2.2.3)).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.2.

Геометрические представления в классической механике

Прежде всего установим различие между *ковариантными* и *контравариантными* векторами. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, каждая из компонент которого a_j является функцией координат $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, т. е. $a_j = a_j(\mathbf{x})$. Рассмотрим далее переход к новому набору координат $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Вектор $\mathbf{a}$ называется контравариантным, если он преобразуется по правилу

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} a_j, \quad (2.П.11)$$

где $\bar{a}_i$ представляют собой a_j , выраженные в терминах новых переменных y_i . Контравариантность вектора обычно подчеркивают, используя верхние индексы: $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$. Мы, однако, везде будем использовать только нижние индексы. Полезный пример контравариантного вектора — бесконечно малое расстояние между двумя соседними точками $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$. Эти бесконечно малые величины преобразуются (по правилу дифференцирования сложной функции) как

$$dy_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.П.12)$$

В качестве другого примера рассмотрим следующий оператор (важная роль которого скоро станет понятна):

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.П.13)$$

где $\xi_i = \xi_i(x_1, \dots, x_n)$. Переход к координатам y_i в (2.П.13) приводит к соотношению

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \equiv \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (2.П.14)$$

где

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (2.П.15)$$

т. е. величины ξ_i преобразуются как компоненты контравариантного вектора.

Напротив, вектор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ называется ковариантным, если при замене координат $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ он преобразуется по правилу

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} b_j. \quad (2.П.16)$$

Примером ковариантного вектора является градиент скалярного поля. Так, если $b_i = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ и $\bar{b}_i = \frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_i}$, то легко видеть, что

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} b_j. \quad (2.П.17)$$

Показав, что обобщенные импульсы могут быть представлены как градиент действия (уравнение 2.1.20), мы убеждаемся, что они являются ковариантными векторами. (Обычно при записи компонент ковариантных векторов используются нижние индексы в противоположность верхним индексам в случае контравариантных векторов.)

Оператор, введенный в (2.П.13), представляет собой пример *касательного вектора*. Результатом его действия на некоторую скалярную функцию $h = h(x_1, \dots, x_n)$ в заданной точке $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ является производная по направлению от h в этой точке:

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}. \quad (2.П.18)$$

Рассмотрим теперь некоторую кривую $\varphi = \varphi(s)$, параметризованную с помощью переменной s , которая проходит через точку $\mathbf{X}$ при $s = 0$. Если $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ имеет координатное представление $\varphi_i(s) = x_i$, то производная по направлению от любой величины вдоль $\varphi(s)$ в точке $\mathbf{X}$ определяется касательным вектором

$$\xi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}, \quad (2.П.19)$$

где

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (2.П.20)$$

Очевидно, что если φ представляет собой траекторию системы $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, где s мы рассматриваем в качестве времени, то ξ_j являются не чем иным, как компонентами скорости $\dot{q}_i(t)$. Отсюда следует контравариантность векторов скорости.

Через данную точку X может проходить много различных траекторий, и им соответствует целый набор возможных касательных векторов. Такой набор векторов в точке X образует векторное пространство, называемое *касательным пространством* в точке X . Оно обозначается через TM_X , где M — *многообразие*, т. е. n -мерное «пространство», занимаемое системой. *Касательное расслоение* представляет собой совокупность всех возможных касательных пространств во всех возможных точках — в M . Оно обозначается через TM .

В формализме Лагранжа состояние механической системы задается с помощью координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$. При этом в любой точке Q в любой момент времени t мы имеем касательный вектор

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_{q=Q}, \quad (2.П.21)$$

и, таким образом, состояние системы может быть определено посредством точки в касательном расслоении. Лагранжиан при этом может рассматриваться как отображение TM на скалярном поле, т. е. $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (где $\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел).

В гамильтоновом формализме описание строится в терминах координат q_i и сопряженных импульсов p_i ; последние преобразуются как ковариантные векторы. Соответствующее $2n$ -мерное фазовое пространство является симплектическим многообразием и обладает рядом особых свойств. Наиболее важное свойство гамильтоновых систем — сохранение фазового объема под действием (гамильтоново) потока. Для его геометрической интерпретации требуется язык *дифференциальных форм*¹⁵⁾.

Дифференциальная 1-форма, обозначаемая здесь символом ω^1 , представляет собой (в случае двух изменений) величину вида

$$\omega^1 = b_1 dx_1 + b_2 dx_2, \quad (2.П.22)$$

где $b_1 = b_1(x_1, x_2)$ и $b_2 = b_2(x_1, x_2)$ — компоненты ковариантного вектора. Рассмотрим, что произойдет с ω^1 при замене переменных ($x \rightarrow y$). Используя (2.П.12) для преобразования контравариантных величин dx_i , получаем

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^2 b_i dx_i = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^2 \bar{b}_j dy_j, \quad (2.П.23)$$

где

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}. \quad (2.П.24)$$

Это обычное правило ковариантных преобразований. Таким образом, из (2.П.23) следует, что 1-форма ω^1 инвариантна по отношению к замене переменных.

¹⁵⁾ Согласно Арнольду [1], «гамильтонова механика не может быть понята без использования дифференциальных форм».

В гамильтоновой механике часто возникает величина

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad (2.П.25)$$

которая, как легко видеть, является примером 1-формы. В случае «расширенного» фазового пространства, включающего в качестве независимой переменной время, а в качестве сопряженной переменной величину $-H$, также можно построить 1-форму:

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt. \quad (2.П.26)$$

Она известна как 1-форма Пуанкаре—Картана. Как показано в разделе 2.3.в такая форма инвариантна по отношению к каноническому преобразованию, т. е.

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H' dt + dF, \quad (2.П.27)$$

где $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$, $H' = H'(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$, а dF — полный дифференциал, который является производящей функцией, осуществляющей каноническое преобразование между переменными p_i, q_i и P_i, Q_i . Одно из фундаментальных свойств 1-формы (2.П.26) состоит в том, что интеграл по замкнутому контуру $\mathcal{C}$, окружающему пучок траекторий,

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega^1 = \oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt, \quad (2.П.28)$$

принимает одно и то же значение для любого контура, охватывающему данный пучок траекторий:

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega^1 = \oint_{\mathcal{C}'} \omega^1. \quad (2.П.29)$$

В частности, выбор $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ может определить конкретный набор начальных условий $p_i(0), q_i(0)$ при $t = 0$, и затем можно проследить за «эволюцией» $\mathcal{C}$ под действием гамильтонова потока. К моменту времени $t = T$ кривая $\mathcal{C}$ трансформируется в (по-прежнему замкнутую) кривую $\mathcal{C}_T$. В расширенном фазовом пространстве $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$ обеим кривым $\mathcal{C}$ (при $t = 0$) и $\mathcal{C}_T$ (при $t = T$) будут отвечать замкнутые кривые, лежащие в различных «плоскостях» $t = \text{const}$. Мы можем записать (2.П.29) в виде

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \oint_{\mathcal{C}_T} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt, \quad (2.П.30)$$

но поскольку интегрирование проводится в слоях расширенного фазового пространства, отвечающих постоянным значениям времени, $dt = 0$ и, следовательно, (2.П.30) сводится к

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint_{\mathcal{C}_T} \sum_{i=1}^n p_i dq_i. \quad (2.П.31)$$

1-форму $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$ иногда называют относительным интегральным инвариантом Пуанкаре.

Особую роль в гамильтоновой механике играют дифференциальные 2-формы. Такие 2-формы могут быть представлены как «произведение» 1-форм, но в данном случае это будет *внешнее* произведение. От обычного оно отличается тем, что удовлетворяет правилам «антисимметрии»:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (2.П.32)$$

и

$$dx_i \wedge dx_i = 0, \quad (2.П.33)$$

где символ $\wedge$ означает внешнее произведение. Внешнее произведение функций представляет собой дифференциалы, удовлетворяющие условиям

$$b_i \wedge dx_j = dx_j \wedge b_i = b_i dx_j, \quad (2.П.34)$$

и, следовательно,

$$dx_i \wedge (b_i dx_j) = b_i dx_i \wedge dx_j. \quad (2.П.35)$$

Рассмотрим далее внешнее произведение 1-форм $\theta_1 = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$ и $\theta_2 = c_1 dx_1 + c_2 dx_2$. Следуя указанным правилам, получаем

$$\begin{aligned} \theta_1 \wedge \theta_2 &= (b_1 dx_1 + b_2 dx_2) \wedge (c_1 dx_1 + c_2 dx_2) = \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1) dx_1 \wedge dx_2 = -\theta_2 \wedge \theta_1. \end{aligned} \quad (2.П.36)$$

Произведение $\theta_1 \wedge \theta_2$ представляет собой пример дифференциальной 2-формы; мы обозначим его через ω^2 .

Замена переменных $x_1 = x_1(y_1, y_2)$, $x_2 = x_2(y_1, y_2)$ дает соотношения

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_1}{dy_2} dy_2 \quad (2.П.37)$$

и

$$dx_2 = \frac{dx_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dx_2}{dy_2} dy_2 \quad (2.П.38)$$

и, соответственно, 2-форма записывается в виде

$$dx_1 \wedge dx_2 = \left(\frac{dx_1}{dy_1} \frac{dx_2}{dy_2} - \frac{dx_1}{dy_2} \frac{dx_2}{dy_1} \right) dy_1 \wedge dy_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} dy_1 \wedge dy_2, \quad (2.П.39)$$

где $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$ является, очевидно, якобианом преобразования. Если речь идет о каноническом преобразовании одного набора сопряженных переменных (p, q) в другой набор (P, Q) , то

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ, \quad (2.П.40)$$

в следствие равенства единице якобиана. Такое сохранение 2-формы при каноническом преобразовании является фундаментальным свойством гамильтоновых систем. Это свойство допускает обобщение на любое число степеней свободы:

$$\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i. \quad (2.П.41)$$

По аналогии с тем, как 2-форма представляется в виде внешнего произведения 1-форм, можно записать внешнее произведение 2-форм. Так, внешнее произведение $\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ с собой дает (в соответствии с приведенными выше правилами) 4-форму:

$$\omega^4 = \omega^2 \wedge \omega^2 = \sum_{i \leq j} dp_i \wedge dp_j \wedge dq_i \wedge dq_j. \quad (2.П.42)$$

Этот процесс конструирования внешних произведений может быть продолжен (например, $\omega^8 = \omega^4 \wedge \omega^4 = \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^2$) вплоть до тех пор, пока не будет записано внешнее произведение $\omega^{2n} = \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2$, содержащее единственный член:

$$\omega^{2n} = \prod_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (2.П.43)$$

Оно представляет собой не что иное как элемент объема n -мерного фазового пространства. Все дифференциальные формы, начиная с ω^2 и заканчивая ω^{2n} , инвариантны по отношению к каноническому преобразованию, причем инвариантность ω^{2n} утверждается теоремой Лиувилля.

2-формы получаются также из 1-форм посредством *внешнего дифференцирования*.

Внешняя производная $d\omega^1$ 1-формы $\omega^1 = \sum_{i=1}^n b_i dx_i$ задается соотношением

$$d\omega^1 = d\left(\sum_{i=1}^n b_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^n db_i \wedge dx_i, \quad (2.П.44)$$

в котором нетрудно узнать 2-форму. В качестве конкретного примера рассмотрим двумерную 1-форму $\omega^1 = b_1(x_1, x_2)dx_1 + b_2(x_1, x_2)dx_2$. Для нее

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= db_1 \wedge dx_1 + db_2 \wedge dx_2 = \\ &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial b_1}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge dx_2 = \\ &= \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned} \quad (2.П.45)$$

Полученный результат ассоциируется с теоремой Грина о преобразовании интеграла по замкнутому контуру $\mathcal{C}$ в двойной интеграл по области D (заключенной внутри $\mathcal{C}$). На плоскости (x, y) соотношение принимает вид (теорема Стокса)

$$\oint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}\right) dx dy. \quad (2.П.46)$$

На языке дифференциальных форм оно элегантно записывается как

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega^1 = \iint_D \omega^2, \quad (2.П.47)$$

где ω^1 — 1-форма $f dx + g dy$, а $\omega^2 = d\omega^1$ представляет собой 2-форму $df \wedge dx + dg \wedge dy$.

В случае гамильтониана с одной степенью свободы мы можем записать (2.П.47) в виде

$$\oint_{\mathcal{C}} p \, dq = \iint_A dp \wedge dq, \quad (2.П.48)$$

где $\mathcal{C}$ — замкнутый контур на плоскости $t = \text{const}$ в расширенном фазовом пространстве (p, q, t) . Интерпретация полученного результата (2.П.48) не представляет труда — он означает просто, что интеграл по замкнутому контуру $\mathcal{C}$ в плоскости (p, q) равен двойному интегралу по области A , заключенной внутри $\mathcal{C}$. Соотношение (2.П.47) может быть записано для систем с любым числом степеней свободы. Используя внешнее дифференцирование, получаем

$$d\left(\sum_{i=1}^n p_i \, dq_i\right) = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i, \quad (2.П.49)$$

но интерпретация интегрирования в этом случае не столь очевидна. Мы приходим к соотношению

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i \, dq_i = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} dp_i \wedge dq_i, \quad (2.П.50)$$

в котором A_i представляют собой набор областей, полученных при проектировании замкнутого контура $\mathcal{C}$ (расположенного в сечении $t = \text{const}$ расширенного фазового пространства) на каждую из плоскостей (p_i, q_i) . Принимая во внимание (2.П.31), мы видим, что эта сумма площадей проекций сохраняется под действием гамильтонова потока, т. е. что

$$\sum_{i=1}^n \iint_{A_i} dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^n \iint A_{i,T} dp_i \wedge dq_i, \quad (2.П.51)$$

где $A_{i,T}$ — проекции, соответствующие контуру $\mathcal{C}_T$. Эти соображения можно распространить и на высшие формы $\omega^4, \omega^8, \dots, \omega^{2n}$. Действительно, все n форм сохраняются под действием фазового потока (или другого канонического преобразования). Эти «сохраняющиеся» величины называют инвариантами Пуанкаре. Все соответствующие «законы сохранения» вытекают из соотношения (2.П.51), и, таким образом, это свойство 2-формы лежит в основе фундаментального определения канонических преобразований. Как уже отмечалось, содержание теоремы Лиувилля с этой точки зрения составляет утверждение о сохранении формы ω^{2n} :

$$\int_V \dots \int \prod_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \int_{V_T} \dots \int \prod_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i, \quad (2.П.52)$$

т. е. о сохранении фазового объема под действием гамильтонова потока или в результате канонического преобразования, а именно

$$\int_{V_{pq}} \dots \int \prod_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \int_{V_{PQ}} \dots \int \prod_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i. \quad (2.П.53)$$

(В (2.П.52) V_T — результат «эволюции» исходного объема V , а в (2.П.53) V_{PQ} — объем в пространстве (P, Q) , соответствующий объему V_{pq} в пространстве (p, q) .)

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. *Born M.* The Classical Mechanics of the Atom. Ungar, New York, 1960. [Имеется перевод: *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков—Киев, 1934.]
3. *Goldstein H.* Classical Mechanics. 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980. [Имеется перевод: *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.]
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1988.
5. *Lichtenberg A. J., M. A. Lieberman.* Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York, 1983. [Имеется перевод: *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.]
6. *Percival I. C. and D. Richards.* Introduction to Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

Глава 3

Классическая теория возмущений

3.1. Элементарная теория возмущений

Полностью интегрируемые гамильтоновы системы представляют собой исключение¹⁾. Тем не менее, несмотря на свою исключительность, интегрируемые системы играют важную роль в нашем понимании неинтегрируемых систем. Это происходит потому, что часто удобно представить гамильтонову систему в виде суммы интегрируемого члена H_0 и некоторого (малого) *возмущения* H_1 ,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (3.1.1)$$

в предположении, что параметр возмущения $\varepsilon \ll 1$. Идея состоит в том, чтобы приближенное решение для $H(p, q)$ искать в виде суммы «точного» решения для H_0 и малых поправок, связанных с $H_1(p, q)$. Это составляет предмет теории возмущений, и наиболее известным примером ее приложения является описание движения планет в солнечной системе. Если задачу о движении Земли вокруг Солнца рассматривать как задачу двух тел, она решается точно, т. е. интегрируема. (Земля вращается вокруг Солнца по кеплеровским орбитам.) Однако другие планеты, особенно Юпитер, оказывают небольшое влияние, которое можно рассматривать как малое возмущение к задаче двух тел. Было показано, что такая задача трех тел, даже будучи сведенной к своему простейшему виду, неразрешима в том смысле, что попытки многих ученых, в том числе некоторых выдающихся математиков, найти *сходящиеся* ряды в разложении по теории возмущений для приближенных орбит не увенчались успехом. Эта известная своей сложностью задача будет обсуждаться по ходу изложения позднее, а сейчас мы приведем несколько более простых примеров теории возмущений, которые позволяют наметить предстоящие глубокие проблемы.

Основная идея теории возмущений состоит в том, чтобы разложить решение $x(t)$ в ряд по степеням ε :

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots, \quad (3.1.2)$$

где $x_0(t)$ — точное решение интегрируемой части задачи, а поправки $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... вычисляются рекуррентно. Разложение, очевидно, таково, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ сохраняется только «интегрируемая» часть задачи. Можно надеяться, что при достаточно малых ε несколько первых членов ряда (3.1.2) обеспечат достаточно хорошее приближение «истинного» решения — хотя даже в этом случае нет никаких гарантий, что эта ситуация будет сохраняться в течение длительного времени. Другими словами, в каждом случае разложения вида (3.1.2) мы сталкиваемся с основной

¹⁾ Это подтверждается некоторыми важными результатами. Сейгел, например, показал, что в определенных классах гамильтоновых систем интегрируемые системы образуют плотное множество [13], а Маркусом и Мейером было доказано, что гамильтоновы динамические системы общего вида не являются ни интегрируемыми, ни эргодическими [8].

проблемой его сходимости. Несколько простых, но поучительных примеров разложения в ряды можно найти среди задач по отысканию приближенных корней алгебраических уравнений.

3.1.а. Регулярные ряды возмущений

Рассмотрим простое квадратное уравнение

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0, \quad (3.1.3)$$

где предполагается, что ε мало. В нулевом приближении, эквивалентном «интегрируемой» части динамической задачи $x^2 + x = 0$, имеется два корня $x = 0, -1$. Попытаемся представить корни «возмущенной» задачи (3.1.3) в виде степенного ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad (3.1.4)$$

где a_0 — один из двух корней нулевого приближения, относительно которого производится разложение. Подставляя разложение (3.1.4) в (3.1.3) и последовательно приравнявая нулю каждую из степеней ε , находим вплоть до $O(\varepsilon^2)$:

$$O(\varepsilon^0): \quad a_0^2 + a_0 = 0, \quad (3.1.5a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2a_0 a_1 + a_1 - 6 = 0, \quad (3.1.5b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_2 = 0. \quad (3.1.5в)$$

Уравнение (3.1.5a) дает, как и следовало ожидать, корни нулевого приближения. Для каждого из значений a_0 мы можем последовательно решить уравнения (3.1.5b), (3.1.5в) и другие, отвечающие более высоким степеням ε . Таким способом мы легко находим вид разложения для обоих корней (3.1.3):

$$x_1 = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$x_2 = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 - O(\varepsilon^3).$$

Если, например, положить $\varepsilon = 0.01$, то корни будут равны соответственно (с точностью до ε^2) $x_1 = 0,0564$ и $-1,0564$, что согласуется с точностью до третьего десятичного знака с аналитическим решением. Разложения вида (3.1.4) представляют собой примеры *регулярных рядов возмущений*; они имеют конечный радиус сходимости и в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ дают решения нулевого приближения.

3.1.б. Сингулярные ряды возмущений*

Теперь рассмотрим многочлен

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (3.1.6)$$

Это, очевидно, нерегулярная задача, поскольку в пределе нулевого приближения $\varepsilon \rightarrow 0$ система имеет лишь один корень, тогда как возмущенная задача имеет два. Ситуации, подобные этой, когда предел $\varepsilon = 0$ принципиально отличается даже от поведения соседних (по малому ε) систем, называются *сингулярными задачами теории возмущений*. В этом случае разложение может и не иметь вида степенного ряда,

либо радиус сходимости степенного ряда будет равен нулю. Хотя мы и не будем рассматривать такие случаи для наших задач из области механики, поучительно закончить обсуждение этого примера²⁾. Невозмущенная часть (3.1.6) (т.е. $x - 1 = 0$) имеет, очевидно, корень (нулевое приближение) $x = 1$. Сингулярная часть задачи связана со вторым корнем, стремящимся в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ к бесконечности, что в рассматриваемом случае легко проверить, исходя из точного решения. При этом корень $x = 1$ ведет себя в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ «регулярным» образом, и для него мы можем построить регулярное разложение в ряд (т.е. $x_1 = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$). Подстановка в (3.1.6) позволяет легко найти коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ ряда, и мы получаем:

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.7)$$

Стремление второго корня к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$ предполагает, что он ведет себя как некая обратная степень ε (т.е. $x = O(1/\varepsilon^n)$). Это указывает на целесообразность замены переменных $x = y/\varepsilon^n$ в (3.1.6). Уравновешивая члены εx^2 и x в (3.1.6) (это метод «детального баланса», описанный, например, в [3]), мы видим, что единственным приемлемым соотношением является

$$x = \varepsilon^{-1}y. \quad (3.1.8)$$

Это приводит к уравнению

$$y^2 + y - \varepsilon = 0. \quad (3.1.9)$$

Теперь мы имеем дело с регулярной задачей; корни (нулевые приближения) равны соответственно $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. В этом случае легко могут быть найдены разложения в регулярные ряды вида $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^n$:

$$y_1 = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

$$y_2 = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Обратный переход к исходной переменной x с помощью соотношения (3.1.8) дает два корня:

$$x = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3.1.10a)$$

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.10b)$$

Уравнение (3.1.10a) представляет собой не что иное, как регулярный корень (3.1.7), тогда как (3.1.10b) — сингулярный корень. В случае этой достаточно простой задачи можно проверить, что (3.1.10a) и (3.1.10b) действительно являются корректным представлением точного решения $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$; для этого нужно воспользоваться стандартным биномиальным разложением квадратного корня.

3.1.в. Регулярные ряды возмущений для дифференциальных уравнений

Простой пример регулярного разложения для решения дифференциального уравнения дает система первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = x + \varepsilon x^2 \quad (3.1.11)$$

²⁾ Проблемы сингулярной теории возмущений вновь появятся в главе 6 в контексте квазиклассической механики.

с начальным условием $x(0) = A$ в предположении, что $0 < \varepsilon \ll 1$. (Мы здесь следуем изложению Персиваля и Ричардса [9].) Используя разложение (3.1.2) и приравнявая степени ε , находим:

$$O(\varepsilon^0): \quad \dot{x}_0 = x_0, \quad (3.1.12a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_0^2, \quad (3.1.12b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1x_0. \quad (3.1.12в)$$

Интегрируемая часть задачи (нулевое приближение (3.1.12a)) решается легко:

$$x_0(t) = Ae^t. \quad (3.1.13)$$

Подстановка этого решения в (3.1.12b) дает

$$\dot{x}_1 = x_1 + A^2e^{2t} \quad (3.1.14)$$

с начальным условием $x_1(0) = 0$. (Полагая $x_n(0) = 0$ для всех $n \geq 1$, мы гарантируем, что решение (3.1.11) будет удовлетворять условию $x(0) = A$ при всех ε .) Решение линейного неоднородного уравнения (3.1.14) находится без труда:

$$x_1(t) = A^2e^t(e^t - 1) \quad (3.1.15)$$

и, в свою очередь, может быть подставлено в (3.1.12в), что приводит к результату

$$x_2(t) = A^3e^t(e^t - 1)^2. \quad (3.1.16)$$

Таким образом, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ решение (3.1.11) имеет вид

$$x(t) = Ae^t[1 + \varepsilon A(e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2(e^t - 1)^2] + O(\varepsilon^3). \quad (3.1.17)$$

Уравнение (3.1.11) можно также решить точно с помощью линеаризации посредством подстановки $x = 1/y$ (либо подстановки $x = \dot{y}/y$). Обе подстановки приводят к результату

$$x(t) = \frac{Ae^t}{1 - \varepsilon A(e^t - 1)}. \quad (3.1.18)$$

Разложение знаменателя дает $x(t) = Ae^t \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon A(e^t - 1)]^n$, что, очевидно, согласуется

с (3.1.17) с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Радиус сходимости этого разложения определяется соотношением $\varepsilon A(e^t - 1) < 1$. Таким образом, существует критическое значение времени t_c , за пределами которого разложение ряд утрачивает смысл. Это время легко определить из условия $A(e^{t_c} - 1) = 1$:

$$t_c = \ln \left(\frac{1 + \varepsilon A}{\varepsilon A} \right). \quad (3.1.19)$$

Для полноты рассмотрим кратко обобщение (3.1.11):

$$\frac{dx}{dt} = x + \varepsilon x^\alpha, \quad (3.1.20)$$

где α — произвольный показатель степени. Это уравнение (часто называемое *уравнением Бернулли*) может быть линеаризовано с помощью подстановки $y = x^{1-\alpha}$, что приводит к результату

$$x(t) = e^t \left(x(0)^{1-\alpha} + \varepsilon (1 - e^{(1-\alpha)t}) \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.1.21)$$

Он также может быть представлен в виде степенного ряда, критическое время для которого определяется соотношением

$$t_c = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{x(0)^{1-\alpha} + \varepsilon}{\varepsilon} \right), \quad (3.1.22)$$

откуда мы заключаем, что ряд будет сходиться при всех (положительных) $t < t_c$ при условии $\alpha > 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению разложения в ряд решения «настоящей» задачи механики, а именно к стандартному примеру возмущенного гармонического осциллятора вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = 0. \quad (3.1.23)$$

При $\varepsilon = \omega_0^2/6$ это выражение соответствует разложению дифференциального уравнения маятника по угловому смещению x , ограниченное членом третьего порядка. Хотя уравнение (3.1.23) легко может быть проинтегрировано в терминах эллиптических функций, нас будет интересовать справедливость разложения по малым ε относительно решения для обыкновенного гармонического осциллятора. Следуя изложению Лихтенберга и Либермана [7], подставим (3.1.2) в (3.1.23), что дает

$$O(\varepsilon^0): \quad \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (3.1.24a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3, \quad (3.1.24b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 \quad (3.1.24в)$$

и т. д. Уравнение нулевого приближения (3.1.24a) имеет решение $x_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ с начальным условием $\dot{x}_0(t) = 0$, $x_0(t) = A$. Подстановка x_0 в (3.1.24b) дает

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{4} A^3 (\cos(3\omega_0 t) + 3 \cos(\omega_0 t)), \quad (3.1.25)$$

где мы воспользовались тригонометрическим тождеством $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3 \cos(x))$. Уравнение (3.1.25) представляет собой линейное неоднородное уравнение, которое может быть решено с помощью стандартных методов, описанных в главе 1. Общее решение имеет вид

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) - \frac{A^3}{32\omega_0^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{3A^3}{8\omega_0} (\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \quad (3.1.26)$$

и содержит секулярный член $t \sin(\omega_0 t)$, обусловленный тем, что второй «возмущающий» член в правой части (3.1.25) резонирует с собственной частотой колебаний. Понятно, что метод разложения по малым ε себя не оправдал — даже если ограничиться членами первого порядка, — поскольку мы знаем, что нелинейность системы стабилизирует резонанс. Выход из этого положения был найден Пуанкаре [10] и другими авторами и состоит в том, что по степеням ε необходимо разлагать не только амплитуду, но и частоту ω . (Имея в виду предстоящее изучение «канонической теории возмущений» для гамильтоновых систем, заметим, что по степеням ε должны разлагаться оба набора канонических переменных (т. е. p и q) — так что этот подход не должен вызывать большого удивления). Действительно, предположим, что $x = x(\omega t)$ — периодическая функция переменной ωt с периодом 2π (указание на угловую переменную) и разложим в ряд обе величины x и ω :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d(\omega t)^2} = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d(\omega t)^2}$$

применительно к уравнению (3.1.23) и, приравнявая, как и раньше, степени ε , получаем

$$O(\varepsilon^0): \quad \omega_0^2(x_0'' + x_0^2) = 0, \quad (3.1.27a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \omega_0^2 x_1'' + 2\omega_0 \omega_1 x_0'' + \omega_0^2 x_1 = x_0^3, \quad (3.1.27б)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \omega_0^2 x_2'' + 2\omega_0 \omega_1 x_1 x_1'' + (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) x_0'' + \omega_0^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 \quad (3.1.27в)$$

и т. д., где штрих означает дифференцирование по новой переменной ωt . Уравнение (3.1.27а) также имеет стандартное линейное решение $x_0(t) = A \cos(\omega t)$, подстановка которого в (3.1.27б) дает

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_1 = 2A\omega_0 \omega_1 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4} A^3 \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{4} A^3 \cos(\omega_0 t). \quad (3.1.28)$$

С учетом требования, что $x = x(\omega t)$ должна представлять собой периодическую функцию, члены, определяющие секулярное поведение (т. е. пропорциональные $\cos(\omega_0 t)$) в (3.1.28) необходимо устранить. Этого можно достичь, положив

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} A^2 \omega_0, \quad (3.1.29)$$

что приводит к периодическому решению (3.1.24б) с хорошим поведением,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) - \frac{A^3}{32\omega_0^2} \cos(3\omega_0 t). \quad (3.1.30)$$

Эту процедуру можно продолжить для более высоких степеней ε при условии правильного выбора поправок для частоты, устраняющих секулярные члены при каждой из степеней разложения. Отметим, что в обсуждаемом методе не только требуется разложение по степеням ε как x , так и ω , но также предполагается, что x представляет собой периодическую функцию переменной ωt . Этой идее может быть придана гораздо более общая (и элегантная) формулировка, известная как *каноническая теория возмущений*.

3.2. Каноническая теория возмущений

В канонической теории возмущений используются особые свойства переменных действие—угол. В наибольшей степени возможности этой теории проявляются в случае автономных систем с одной степенью свободы. По мере перехода к системам с двумя и более степенями свободы постепенно проявляются значительные трудности, связанные с решением многочастичной задачи. Именно эти трудности, как мы увидим, являются в некотором смысле «затравкой» хаотического поведения. До недавнего времени они считались практически непреодолимыми. Для начала мы ограничимся системами с одной степенью свободы. Подробное их обсуждение облегчит нам изучение многочастичной задачи в разделе 3.3.

Прежде всего систему нужно представить как функцию переменных действие—угол (I, θ) для системы нулевого порядка:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta). \quad (3.2.1)$$

Эти переменные действие—угол нулевого порядка все еще представляют собой истинные канонические переменные; и при выражении возмущающего члена H_1 в терминах этих переменных канонические уравнения движения для (3.2.1) имеют простой вид:

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \theta} H(I, \theta), \quad (3.2.2a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial I} H(I, \theta). \quad (3.2.2b)$$

Хотя в (3.2.1) мы представили возмущение как поправку порядка ε ($\varepsilon \ll 1$), может быть и так, что возмущающие силы сами представимы в виде ряда по степеням ε ,

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta) + \varepsilon^2 H_2(I, \theta) + O(\varepsilon^3) \quad (3.2.3)$$

и т. д. Основная идея канонической теории возмущений состоит в отыскании для возмущенной системы $H(I, \theta)$ такого нового набора переменных действие—угол (J, φ) , для которого возможно каноническое преобразование к новому гамильтониану, зависящему только от J . т. е. $H(I, \theta) \rightarrow K(J)$ ³⁾. Если удастся этого достичь, то (3.2.3) становится полностью интегрируемой системой, уравнения движения которой интегрируются тривиально.

3.2.a. Ряды возмущений для уравнения Гамильтона—Якоби

Уравнения Гамильтона для системы нулевого порядка:

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \theta} H_0(I) = 0, \quad (3.2.4a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial I} H_0(I) = \omega_0(I), \quad (3.2.4b)$$

в случае возмущенной системы приобретают вид:

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \theta} H(I, \theta) = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial \theta} + O(\varepsilon^3), \quad (3.2.5a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial I} H(I, \theta) = \omega_0(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial I} + O(\varepsilon^3). \quad (3.2.5b)$$

Цель состоит в отыскании производящей функции $S = S(\theta, J)$, где θ — старая угловая переменная (координата), а J — новая переменная действия (импульс) (ср. производящую функцию типа F_2 в разделе 2.3), которая осуществляла бы требуемые преобразования посредством стандартных соотношений

$$I = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, J), \quad \varphi = \frac{\partial}{\partial J} S(\theta, J). \quad (3.2.6)$$

³⁾ Так как H называется гамильтонианом, мой коллега профессор Г. Голдстейн предложил называть K камильтонианом.

S также может быть разложена в ряд по степеням ε :

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots, \quad (3.2.7)$$

где $S_0 = J\theta$ — тождественная производящая функция (см. уравнение (2.3.21)). Используя соотношения (3.2.6), получаем не зависящее от времени уравнение Гамильтона—Якоби,

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right) + \varepsilon^2 H_2\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right) + \dots = K(J). \quad (3.2.8)$$

Более того, «новый» гамильтониан можно разложить в ряд по степеням ε :

$$K(J) = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J) + \dots$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы разложение S в ряд (3.2.7) использовать для разложения каждого из членов в правой части (3.2.8) в ряд Тэйлора. Так, например, содержащий H_0 член разлагается следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) &= H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \dots\right) = \\ &= H_0(J) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

При разложении до членов $O(\varepsilon^2)$ уравнение Гамильтона—Якоби (3.2.8) приобретает вид

$$\begin{aligned} H_0(J) + \varepsilon \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + H_1 \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_1}{\partial J} + H_2 \right\} = \\ = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J). \end{aligned}$$

Приравнивание степеней ε приводит к системе уравнений

$$O(\varepsilon^0): \quad H_0(J) = K_0(J), \quad (3.2.9a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + H_1(J, \theta) = K_1(J), \quad (3.2.9b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_1}{\partial J} + H_2(J, \theta) = K_2(J). \quad (3.2.9b)$$

3.2.6. Решения с точностью до первого порядка по ε

Из (3.2.9a) следует, что $K_0(J) = H_0(J)$, т. е. $K_0(J)$ можно получить заменой I на J в гамильтониане нулевого приближения H_0 . На следующем шаге $O(\varepsilon)$ (уравнение (3.2.9b)) мы должны (снова) произвести замену I на J в членах, содержащих H_0 и H_1 (не изменяя их функционального вида), что позволяет записать

$$K_1(J) = \omega_0(J) \frac{\partial}{\partial \theta} S_1(\theta, J) + H_1(J, \theta). \quad (3.2.10)$$

Теперь, воспользовавшись периодичностью движения по (старой) угловой переменной θ , можно произвести усреднение (3.2.10) по этой переменной. Поскольку

предполагается, что S_1 , а также последующие S_i , $i = 2, 3, \dots$ периодичны по θ , и мы также требуем, чтобы средние значения их производных обращались в ноль, поправка к энергии первого порядка имеет вид

$$K_1(J) = \bar{H}_1(J, \theta), \quad (3.2.11)$$

где

$$\bar{H}_1(J, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta. \quad (3.2.12)$$

В некоторых случаях может оказаться, что само значение $\bar{H}_1$ равно нулю. Получив $K_1(J)$, мы можем разрешить (3.2.10) относительно S_1 :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_1(\theta, J) = \frac{1}{\omega_0(J)} [K_1(J) - H_1(J, \theta)]. \quad (3.2.13)$$

Поскольку $K_1(J)$ представляет собой «усредненную» часть $H_1(J, \theta)$ (см. уравнение (3.2.11)), правую часть (3.2.13) целесообразно обозначить через $\tilde{H}_1 = H_1(J, \theta) - K_1(J)$, подразумевая, что $\tilde{H}_1$ представляет собой «периодическую» часть H_1 . С учетом этого запишем (3.2.13) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_1(\theta, J) = \frac{1}{\omega_0(J)} \tilde{H}_1(J, \theta). \quad (3.2.14)$$

Обе части (3.2.14) периодичны по θ , и мы представим их в виде рядов Фурье по угловой переменной θ :

$$\tilde{H}_1(J, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(J) e^{ik\theta}, \quad (3.2.15a)$$

$$S_1(J, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(J) e^{ik\theta}. \quad (3.2.15b)$$

Член с $k = 0$ не входит в сумму (3.2.15a), так как $\tilde{H}_1$ по определению строго периодически (т. е. постоянный член отсутствует). Хотя S_1 может включать произвольную функцию от J (соответствующую члену с $k = 0$ в (3.2.15b)), удобно положить его равным нулю и в дальнейшем при суммировании исключать нулевой член.

Приравнявая коэффициенты в (3.2.14), находим, что

$$B_k(J) = \frac{i}{k\omega_0(J)} A_k(J), \quad (3.2.16)$$

где $A_k(J)$ предполагаются известными. Таким образом, производящая функция первого порядка приобретает вид

$$S_1(J, \theta) = \sum_k \frac{i A_k(J)}{k\omega_0(J)} e^{ik\theta}. \quad (3.2.17)$$

Теперь соотношения (3.2.6) для производящей функции можно использовать для отыскания «новых» переменных действие—угол с точностью до первого порядка по ϵ ⁴⁾:

⁴⁾ Чтобы вычислить J в (3.2.186) с точностью до первого порядка по ϵ , необходимо просто заменить аргумент J в $S_1(J, \theta)$ на I .

$$\varphi = \theta + \varepsilon \frac{\partial}{\partial J} S_1(J, \theta), \quad (3.2.18a)$$

$$J = I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} S_1(J, \theta), \quad (3.2.18б)$$

и скорректированная частота задается соотношением

$$\omega(J) = \omega_0(J) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial J} K_1(J). \quad (3.2.18в)$$

Таким образом, возмущенное движение состоит из суммы невозмущенного движения и осцилляторных поправок $O(\varepsilon)$. Секулярные члены не возникают. (Потенциальным источником трудностей является случай, когда частота нулевого порядка $\omega_0(I)$ равна нулю или близка к нулю — это может иметь место при движении вблизи сепаратрисы.)

3.2.в. Решения с точностью до более высоких степеней по ε

До сих пор мы ограничивались расчетами с точностью до первого порядка по ε . В случае второго порядка по ε (3.2.9в) мы находим (вновь заменяя I на J в членах, содержащих H_0 , H_1 , а также H_2):

$$\frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = K_2(J) - H_2(J, \theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} H_0(J) - \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial J} H_1(J, \theta) \quad (3.2.19)$$

и, усредняя по θ , получаем поправку второго порядка для энергии

$$K_2(J) = \overline{H_2(J, \theta)} - \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} H_0(J)} - \overline{\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial J} H_1(J, \theta)}. \quad (3.2.20)$$

S_2 можно найти из

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_2(\theta, J) = -\frac{1}{\omega_0(J)} \left[\tilde{H}_2(J, \theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} H_0(J) - \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial J} H_1(J, \theta) \right], \quad (3.2.21)$$

где $\tilde{H}(J, \theta)$ представляет собой периодическую часть H_2 (которая определяется точно так же, как $\tilde{H}_1(J, \theta)$). Описанная процедура может быть проделана для любого порядка по ε (см., например, [7] или [5]). Так, для случая ε^n получаем уравнение вида

$$\frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial S_n}{\partial \theta} = K_n(J) - V_n(\theta, J), \quad (3.2.22)$$

где в V_n включены члены, рассмотренные при более низких порядках по ε . Используя процедуру усреднения, получаем

$$K_n(J) = \overline{V_n(\theta, J)} \quad (3.2.23)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_n(J, \theta) = -\frac{1}{\omega_0(J)} \tilde{V}_n(\theta, J), \quad (3.2.24)$$

где $\tilde{V}_n$ является периодической частью V_n . Уравнение (3.2.24) решается путем разложения обеих частей в ряд Фурье с последующим приравниванием коэффициентов.

3.2.г. Возмущенный осциллятор

Вернемся к уравнению (3.1.23) и решим его с помощью канонической теории возмущений в качестве простой иллюстрации обсуждаемого метода. Это уравнение может быть представлено в виде

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (3.2.25)$$

где

$$H_0(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) \quad (3.2.26a)$$

и

$$H_1(p, q) = q^3. \quad (3.2.26b)$$

Решение (3.2.25) в переменных действие—угол уже было найдено в главе 2; оно имеет вид

$$H_0(I) = I\omega_0 \quad (3.2.27a)$$

и

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}} \sin \theta, \quad (3.2.27b)$$

где $\theta = \omega_0 t + \delta$. С помощью соотношения (3.2.27b) H_1 можно выразить в терминах переменных действие—угол нулевого порядка:

$$H_1(I, \theta) = \left(\frac{2I}{\omega_0}\right)^{3/2} \sin^3 \theta. \quad (3.2.28)$$

Следуя описанной процедуре, находим в случае $O(\varepsilon)$

$$\omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta} S_1(\theta, J) = K_1(J) - H_1(J, \theta). \quad (3.2.29)$$

При усреднении по θ оказывается, что $\bar{H}_1(J, \theta) = 0$, т. е. равна нулю поправка первого порядка для энергии. Уравнение (3.2.29) легко разрешается относительно S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{2I}{\omega_0}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \cos \theta \right]. \quad (3.2.30)$$

На следующем шаге $O(\varepsilon^2)$ получаем

$$\omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta} S_2(\theta, J) = K_2(J) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial J} H_1(J, \theta), \quad (3.2.31)$$

где отсутствует член, содержащий $\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2$ (ср. уравнение (3.2.9в)), поскольку для этой линейной задачи нулевого порядка $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = 0$. Используя (3.2.30) и (3.2.29) и усредняя по θ , легко находим поправку второго порядка для энергии:

$$K_2(J) = -\frac{15\pi J^2}{4\omega_0^4}. \quad (3.2.32)$$

Таким образом, в случае второго порядка по ε «новый» гамильтониан приобретает вид

$$K(J) = \omega_0 J - \varepsilon^2 \frac{15\pi J^2}{4\omega_0^4}, \quad (3.2.33)$$

и, следовательно, новая частота выражается соотношением

$$\omega(J) = \frac{\partial}{\partial J} K(J) = \omega_0 - \varepsilon^2 \frac{15\pi J}{2\omega_0^4}, \quad (3.2.34)$$

в котором проявляются (в данном случае слабая) амплитудная зависимость, типичная для нелинейных систем.

3.3. Большое число степеней свободы и проблема малых знаменателей

Каноническая теория возмущений для систем с двумя и более степенями свободы формулируется точно так же, как и для систем с одной степенью свободы — но при этом возникают значительные трудности, проявляющиеся уже в первом порядке по ε . Рассмотрим систему

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}), \quad (3.3.1)$$

где $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n)$ и $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ — n -мерные векторы действий и углов соответственно. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\mathbf{I}} = -\nabla_{\boldsymbol{\theta}} H_0(\mathbf{I}) = 0 \quad (3.3.2a)$$

и

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{I}) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{I}), \quad (3.3.2b)$$

где $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} = (\partial\theta_1, \dots, \partial\theta_n)$, $\nabla_{\mathbf{I}} = (\partial I_1, \dots, \partial I_n)$, а $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{I}) = (\omega_{0,1}(\mathbf{I}), \dots, \omega_{0,n}(\mathbf{I}))$ представляет собой n -мерный вектор частот. Нашей целью вновь является отыскание в рамках теории возмущений нового набора канонических переменных $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi})$, который допускает преобразование возмущенной системы к интегрируемому виду (т.е. $H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = K(\mathbf{J})$) с помощью производящей функции $S = S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J})$, удовлетворяющей соотношениям

$$\mathbf{I} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}), \quad \boldsymbol{\varphi} = \nabla_{\mathbf{J}} S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}). \quad (3.3.3)$$

S разлагается по степеням ε в ряд вида

$$S = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots, \quad (3.3.4)$$

где основной член соответствует обычному тождественному преобразованию. Уравнение Гамильтона—Якоби

$$H_0(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} S) + \varepsilon H_1(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} S, \boldsymbol{\theta}) = K_0(\mathbf{J}) + \varepsilon K_1(\mathbf{J}) + O(\varepsilon^2) \quad (3.3.5)$$

преобразуется точно таким же образом, как и ранее, что дает

$$O(\varepsilon^0): \quad H_0(\mathbf{J}) = K_0(\mathbf{J}), \quad (3.3.6a)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \nabla_{\boldsymbol{\theta}} S_1 \cdot \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{J}) + H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = K_1(\mathbf{J}) \quad (3.3.6b)$$

и т.д., где мы снова заменяем $\mathbf{I}$ на $\mathbf{J}$ в левой части (3.3.6b). Из (3.3.6b) с учетом (3.3.2b) получаем

$$\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{J}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\theta}} S_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = K_1(\mathbf{J}) - H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}). \quad (3.3.7)$$

Поправку первого порядка для энергии снова находим, полагая периодичность S_1 по $\boldsymbol{\theta}$ и проводя усреднение по всем угловым переменным:

$$K_1(\mathbf{I}) = \bar{H}_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}), \quad (3.3.8)$$

где

$$\bar{H}_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}). \quad (3.3.9)$$

Существенные трудности возникают при попытке разрешить (3.3.7) относительно S_1 . Разлагая S_1 и «периодическую» часть H_1 в n -мерные ряды Фурье,

$$S_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = \sum_{\mathbf{m}} S_{1\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.3.10)$$

$$H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = \sum_{\mathbf{m}} H_{1\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.3.11)$$

где $\mathbf{m} = m_1, \dots, m_n$ и штрих означает отсутствие в сумме члена $\mathbf{m} = (0, \dots, 0)$, легко находим, что

$$S_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = i \sum_{\mathbf{m}} \frac{H_{1\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}}{m\omega_0(\mathbf{J})}. \quad (3.3.12)$$

3.3.a. Малые знаменатели

На основании результатов, полученных для систем с одной степенью свободы, может показаться, что таким же образом можно продолжать действовать и в случае более высоких порядков по ε . Однако понятно, что если фундаментальные частоты $\omega_0(\mathbf{J})$ соизмеримы (т. е. $m\omega_0(\mathbf{J}) = 0$), то сумма в (3.3.12) будет расходиться. При этом, даже если ω_0 несоизмерима, всегда можно отыскать такое (большое) $\mathbf{m}$, что произведение $\omega_0 \cdot \mathbf{m}$ окажется сколь угодно мало. Это известная в классической механике проблема *малых знаменателей*, претерпевшая за последние сто лет столь незначительное развитие.

В некоторых случаях сходимость ряда может быть достигнута за счет соответствующего уменьшения числителя. Однако Брунс уже довольно давно показал, что (грубо говоря) значения $\omega_0(\mathbf{J})$, для которых ряд (абсолютно) сходится, и значения, для которых он не сходится, лежат сколь угодно близко друг к другу. Отсюда вытекает, вследствие зависимости ω_0 от $\mathbf{J}$, что получаемая описанным выше способом S не является непрерывной функцией $\mathbf{J}$. А поскольку предположение непрерывности лежит в основе всей процедуры теории возмущений (см. уравнения (3.3.2) и (3.3.3)), то соответствующий ряд — даже если окажется, что он сходится при некотором значении $\omega_0(\mathbf{J})$, не обязательно представляет действительное движение. Дальнейшие исследования Пуанкаре убедительно показали, что ряд Фурье (такой как (3.3.10) и (3.3.11)) не может служить сходящимся представлением для возмущенной системы. Поэтому такие важные задачи, как устойчивость орбит планет солнечной системы на протяжении длительного промежутка времени, удовлетворительно решены быть не могут. Оценка устойчивости на протяжении ограниченного промежутка времени, основанная на некоторых усечениях ряда — максимум того, что может быть здесь достигнуто.

3.3.6. Фундаментальная проблема

Для решения проблемы малых знаменателей некоторые из наиболее выдающихся математиков своего времени приложили немалые усилия, но успехом они не увенчались. Пуанкаре назвал эту проблему «фундаментальной проблемой» классической механики; представлялось, что на пути дальнейшего прогресса имеются непреодолимые препятствия. Состояние вопроса удачно подытожил Макс Борн, интересовавшийся классической теорией возмущений в связи с решением задач «старой квантовой теории» [5]: «Было бы поистине замечательно, если бы Природа оградила себя от дальнейшего развития знаний посредством аналитических трудностей в задачах многих тел».

Одна из точек зрения состояла в том, что добавка даже малейшего неинтегрируемого возмущения сделает систему эргодической; т. е. система будет полностью заполнять энергетическую поверхность так, что среднее по времени будет равно среднему по фазовому пространству. Таковы были взгляды накануне знаменитого расчета Ферми—Улама—Паста — одного из первых динамических расчетов, проведенных с использованием компьютера в начале 1950-х годов. Эти авторы рассмотрели цепочку гармонических осцилляторов, связанных кубической нелинейностью, и проанализировали, каким образом энергия одной из мод будет распределяться между остальными. Они предполагали обнаружить статистическое распределение по энергии. К своему большому удивлению они обнаружили периодическую циркуляцию энергии, откуда следовало, что система интегрируема в «значительно большей степени», чем предполагалось. (В действительности интегрируемость этой системы оказалась за пределами самых необузданных фантазий — в непрерывном пределе рассматриваемая модель сводится к известному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных, называемому *уравнением Кортевега—де Фриза*⁵⁾.)

«Фундаментальная проблема» была решена в самом начале 1960-х годов с появлением знаменитой теперь теоремы Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ-теоремы). Эта теорема излагается в следующем разделе. А в заключение этого раздела отметим, что теория возмущений и ее различные варианты, включая, например, разработанные недавно методы преобразований Ли, остаются до сих пор весьма ценным средством. Хороший обзор и иллюстрация многих из этих методов даны в книге [7].

3.4. Теорема Колмогорова—Арнольда—Мозера

Этот принципиальный прорыв связан с появлением теоремы, сформулированной в 1954 году Колмогоровым и затем последовательно доказанной в начале 1960-х Арнольдом и Мозером [14,15,16]. Следуя принятым Арнольдом обозначениям, предположим, что некоторая (интегрируемая) гамильтонова функция H_0 возмущена с помощью функции H_1 следующим образом:

$$H = H_0(I) + H_1(I, \theta), \quad (3.4.1)$$

где H_1 должна быть периодической в исходных угловых переменных (т. е. $H_1(I, \theta + 2\pi) = H_1(I, \theta)$) и в определенном смысле «достаточно мала» (т. е. $H_1 \ll 1$). (Можно,

⁵⁾ Эта тема обсуждается в главе 7.

например, считать, что H_1 умножается на некоторый малый параметр ϵ .) Уравнения Гамильтона в этом случае имеют вид

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(I) + \frac{\partial H_1}{\partial I_i}, \quad (3.4.2)$$

где ω_i — невозмущенные частоты, т. е. $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$.

Для большинства начальных условий Колмогоров наметил доказательство утверждения, что движение (3.4.1) остается преимущественно квазипериодическим, т. е. ограничено торами, и что мера (по Лебегу) дополнения к квазипериодическому движению (т. е. хаотического движения) мала при условии, что H_1 мало. КАМ-теорема формулируется в предположении аналитичности гамильтониана в комплексной области (Ω) фазового пространства и невырожденности невозмущенного движения, т. е.

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (3.4.3)$$

Следующий шаг заключается в том, чтобы в невозмущенной системе отыскать по соответствующему набору частот $\omega = \omega(I)$ определенный тор (обозначим его через T_0). А именно выберем вектор несоизмеримых частот $\omega = \omega^*$ (т. е. $\omega \cdot k \neq 0$ для всех целых k_i) и зададим инвариантный тор $T_0(\omega^*)$ невозмущенной системы уравнений $I = I^*$, где $\omega(I^*) = \omega^*$. Таким образом, система характеризуется частотами ω^* на $T_0(\omega^*)$ и $\dot{\theta} = \omega^*$ есть линейный поток на торе T_0 .

Теперь может быть сформулирован один из вариантов знаменитой КАМ-теоремы.

Теорема ([2], теорема 21.7). *Если H_1 достаточно мал, то практически для всех ω^* существует такой инвариантный тор $T(\omega^*)$ возмущенной системы, что $T(\omega^*)$ «близок» к $T_0(\omega^*)$.*

Более того, торы $T(\omega^*)$ образуют множества положительной меры, дополнение к которым имеет меру, стремящуюся к нулю при $|H_1| \rightarrow 0$.

Доказательство этой теоремы — в высшей степени нетривиальное несмотря на простоту ее формулировки — принадлежит Арнольду (1963). Версия, доказанная Мозером (1962), связана с классом эквивалентности отображений (см. раздел 3.5 и главу 4). Мы не будем приводить здесь полного доказательства, а вместо этого попытаемся обсудить некоторые ключевые идеи, выходящие за его рамки. Трудно переоценить значение КАМ-теоремы, которая дала выход из тупика проблемы малых знаменателей в классической теории возмущений и явилась исходным пунктом в понимании природы возникновения хаоса в гамильтоновых системах.

Отметим, что по своей философии КАМ-теорема отличается от традиционной теории возмущений. Вместо того, чтобы пытаться построить глобальные решения уравнения Гамильтона—Якоби путем анализа невозмущенного движения, авторы КАМ-теоремы пошли по пути доказательства существования отдельных, отвечающих определенным условиям, торов в (слабо) возмущенной системе. При этом им удалось доказать, что условием существования данного тора $T(\omega^*)$ является существенная иррациональность частоты ω^* . Такой подход напоминает отыскание конкретного корня (алгебраического) уравнения. Двумя основными составляющими доказательства являются:

- (1) «Суперсходящаяся» процедура отыскания корней, представляющая собой аналог старого метода Ньютона—Рафсона в функциональном пространстве. Эта

процедура обладает прекрасными свойствами сходимости, которые могут «перекрывать» расходимость, присущую традиционной теории возмущений.

- (2) Теоретико-числовой анализ, определяющий степень иррациональности частот ω^* , требуемую для существования «корня» (т. е. тора $T(\omega^*)$).

3.4.a. Суперсходящаяся теория возмущений

Суперсходимость метода Ньютона—Рафсона наглядно иллюстрируется на примере отыскания нуля некоторой функции ($f(x) = 0$) при некотором начальном условии $x = x_0$. Разложение $f(x)$ в окрестности $x = x_0$ дает

$$f(x_0 + (x - x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x - x_0)^n}{n!} = 0, \quad f_n = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{x=x_0}.$$

Записав несколько первых членов, получаем

$$f_0 + (x - x_0)f_1 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f_2 + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 f_3 + \dots = 0,$$

или

$$(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 \left(\frac{f_3}{f_1} \right) + \dots = -\frac{f_0}{f_1}.$$

Положим $-f_0/f_1 = \varepsilon$ и запишем ряд таким образом, чтобы разложить $(x - x_0)$ по степеням ε :

$$(x - x_0) = \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\frac{-f_2}{2f_1} \right) + \varepsilon^3 \left(2 \left(\frac{f_2}{2f_1} \right)^2 - \frac{f_3}{6f_1} \right) + \dots$$

Таким образом может быть построен «ряд теории возмущений» для отыскания «корня» x . Отметим, что записанный ряд имеет вид $\sum c_n \varepsilon^n$, где все коэффициенты c_n являются функциями «невозмущенного» решения: $c_n = c_n(f_i; i = 1, \dots, n)$, где $f_i = \left(\frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right)_{x=x_0}$. Эта конструкция безусловно является регулярным разложением теории возмущений типа введенного в разделе 3.1.a.

Рассмотрим теперь метод Ньютона. Начав с точки x_0 , следующее приближение x_1 мы находим из

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) \simeq f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0$$

в виде

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \equiv \varepsilon_1.$$

Далее, используя в качестве исходного приближения x_1 ,

$$f(x) = f(x_1 + (x - x_1)) \simeq f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) = 0,$$

получаем

$$x_2 - x_1 = \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} \equiv \varepsilon_2.$$

Последовательное повторение этой процедуры приводит к соотношению

$$x_n - x_{n-1} = \frac{-f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \equiv \varepsilon_n. \quad (3.4.4)$$

Сходимость мы можем определить, оценив ε_{n+1} в терминах ε . В данном случае

$$f(x_n) \simeq f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \dots = f(x_{n-1}) + \varepsilon_n f'(x_{n-1}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x_{n-1}) \dots$$

и

$$f'(x_n) = f'(x_{n-1}) + \varepsilon_n f''(x_{n-1}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(x_{n-1}) + \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &\simeq \frac{f(x_{n-1}) + \varepsilon_n f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''(x_{n-1}) + \dots}{f'(x_{n-1}) + \varepsilon_n f''(x_{n-1})} = \\ &= \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + \dots = -\varepsilon_n + \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \simeq -\frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Таким образом, $\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n^2)$. Значит, итерации сходятся квадратично, т. е.

$$x - x_0 = \sum_n c_n \varepsilon_n = \sum_n c_n \varepsilon^{2^n} = c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + c_3 \varepsilon^4 + c_4 \varepsilon^8 + \dots, \quad (3.4.5)$$

где $c_n = c_n(x_{n-1})$.

Такая замечательная сходимость, принципиально отличающаяся от регулярного приближения теории возмущений, обусловлена тем, что f на каждом шаге оценивается исходя из предыдущего решения, а не из исходного невозмущенного решения x_0 . Именно эта особенность лежит в основе свойств сходимости КАМ-теоремы.

3.4.6. Теоретико-числовые свойства частот

КАМ-теорема может быть сформулирована также следующим образом: «При достаточно малых возмущениях практически все торы сохраняются». Важная и тонкая задача состоит в уточнении выражений «достаточно малый» и «практически все». Второе из них определяется теоретико-числовыми свойствами ω^* , анализ которых представляет собой один из двух аспектов теоремы. Теорема исключает из рассмотрения торы, характеризующиеся рациональным отношением частот, для которых выполняются $n - 1$ условий вида

$$\omega \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (3.4.6)$$

Такие торы в некотором смысле (который мы обсудим позднее) «разрушаются». Уже здесь может сложиться впечатление, что такая логика противоречит отмеченному ранее при обсуждении малых знаменателей факту, что любое иррациональное число можно сколь угодно точно приблизить рациональным. Это давало бы основание высказать предположение, что в действительности все торы будут разрушены. Именно здесь возникает вопрос о смысле выражения «практически все» и о его взаимосвязи с теоретико-числовой задачей о том, в какой степени иррациональное число может быть приближено рациональным.

В случае системы с двумя степенями свободы условие замкнутости траекторий имеет вид

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sigma = \frac{r}{s}, \quad r, s \text{ — целые.} \quad (3.4.7)$$

Для квазипериодического движения отношение частот σ иррационально⁶⁾ и не может быть представлено точно в виде отношения r/s , а лишь приближено сколь угодно точно рациональным числом.

Простым примером рационального приближения для иррационального числа служит приближение числа $\pi = 3.141592654 \dots$, а именно

$$\sigma \simeq \frac{r}{s} = \frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3142}{1000}, \dots,$$

что представляет собой очень грубое приближение π . Для такого приближения получаем

$$\left| \sigma - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s}. \quad (3.4.8)$$

Наилучшее рациональное приближение достигается при использовании *цепных дробей*:

$$\sigma = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (3.4.9)$$

Числа a_i могут быть получены следующим образом: a_0 — это целая часть σ , a_1 — целая часть от обратной величины $\sigma - a_0$, a_2 — целая часть от обратной величины от остатка от a_1 и т. д. Например,

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

Приближения цепной дроби образуют последовательность

$$\sigma_n = \frac{r_n}{s_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad (3.4.10)$$

Так, последовательными приближениями числа π являются:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{22}{7} = 3.1429 \dots, \\ \sigma_2 &= \frac{333}{106} = 3.14151 \dots, \\ \sigma_3 &= \frac{255}{113} = 3.1415929 \dots \end{aligned}$$

⁶⁾ Открытие учеником Пифагора иррациональных чисел были запрещены его последователями, так что в результате попытки внести новую информацию в *Дэйли Папирус* ученик был приговорен к смерти.

Последнее из них было известно Тцу-Чанг Чи в Китае еще в пятом веке (и позднее было найдено в шестнадцатом веке европейцем А. ван Роменом). Последовательности σ_n сходятся всегда, и последовательные приближения при этом либо больше, либо меньше, чем σ . Более того, можно показать, что

$$\left| \sigma - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{s_n s_{n-1}}, \quad (3.4.11)$$

т. е. последовательные приближения сходятся по крайней мере как $1/s^2$, тогда как десятичные приближения — лишь как $1/s$.

Существует замечательная развитая теория цепных дробей. Некоторые числа (такие как трансцендентные числа типа π и e) имеют очень быстро сходящиеся приближения. Наиболее медленно сходятся квадратичные иррациональности; Лагранж показал, что для этого класса чисел цепные дроби периодичны, например,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

Знаменитое золотое сечение также является иррациональным числом,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Сказанное далеко не исчерпывает того, что известно о цепных дробях (упомянем, например, представление e^3). Они могут также быть использованы для представления функций — Эйлер использовал цепные дроби для отыскания решений уравнения Риккати. (См., например, [6], с. 178.)

Согласно КАМ-теореме сохраняющиеся торы удовлетворяют условию иррациональности

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{2.5}} \quad \text{для всех } r, s. \quad (3.4.12)$$

О $K(\varepsilon)$ известно только, что $K(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. «Разрушающиеся» торы образуют дополнительное множество и удовлетворяют условию

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| < \frac{K(\varepsilon)}{s^{2.5}}. \quad (3.4.13)$$

Это более сильное ограничение, чем строгое условие соизмеримости $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0$. Вместе с тем оно все еще достаточно для обеспечения конечности меры сохраняющихся торов. Это становится понятным, если рассмотреть единичный интервал и исключить из него зоны шириной $K/s^{2.5}$, как показано на рис. 3.1. Общая протяженность исключенных интервалов составляет

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{K}{s^{2.5}} s = K \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1.5}} \simeq K \quad (3.4.14)$$

и стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

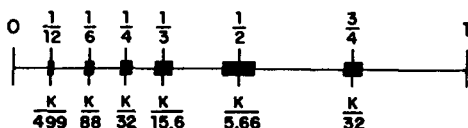


Рис. 3.1. Исключение зон ширины $K/s^{2.5}$ в рациональных точках единичного интервала

Это лишь грубая оценка (сверху). В действительности любая ширина K/s^μ при $\mu > 2$ обеспечивает конечность меры сохраняющихся торов⁷⁾.

3.4.в. Другие аспекты КАМ-теоремы

КАМ-теорема требует также, чтобы возмущение было «достаточно мало». Однако до сих пор не существует точной общей оценки этой степени малости. Первоначальные оценки составляли порядка 10^{-48} (произвольных единиц!). С этой точки зрения существенно, что теорема доказывает существование торов при (пусть даже очень малом) возмущении. Численные эксперименты указывают на сохранение торов при возмущениях, значительно превосходящих указываемые теорией. Отметим также, что не столь уж необходима и аналитичность гамильтониана (т. е. требование $H_0 = H_0(I)$). Мозеровский вариант КАМ-теоремы требует существования только первых 333 производных! Последующие работы показали, что на самом деле это число меньше.

КАМ-теорема ничего не говорит о судьбе «рациональных» торов, т. е. торов, которые при возмущении в определенном смысле «разрушаются». Именно эти разрушающиеся торы порождают «зародыши» хаотического поведения, наблюдаемого в неинтегрируемых системах. Каким образом это происходит, мы обсудим в главе 4.

3.5. Резюме по КАМ-теореме и ее вариантам*

КАМ-теорема может быть обобщена для большого числа систем при соответствующих условиях вырожденности и периодичности⁸⁾.

3.5.а. Автономные системы

Для гамильтониана

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$$

условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0 \quad (3.5.1)$$

гарантирует сохранение большинства инвариантных торов при малых возмущениях, $\varepsilon \ll 1$.

⁷⁾ Прекрасная иллюстрация этой идеи приведена на с. 6 книги [11].

⁸⁾ последующее изложение основано на приложении 8 книги [1].

В дополнение к этому условие «*изоэнергетической невырожденности*», а именно

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} & \frac{\partial H_0}{\partial I_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I_j} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.5.2)$$

гарантирует существование на каждой поверхности энергетического уровня множества инвариантных торов, мера дополнения которого мала. При $n = 2$ условие изоэнергетической невырожденности обеспечивает также устойчивость переменных действия. Это означает, что при достаточно малых ϵ они остаются достаточно близки к исходным значениям на протяжении всего времени.

Идея использования условия изоэнергетической невырожденности состоит в том, чтобы убедиться, что величина отношения частот на торе изменяется плавно при переходе от тора к тору. Рассмотрим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) &= \frac{1}{\omega_2^2} \left(\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I_1} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) &= \frac{1}{\omega_2^2} \left(\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I_2} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I_2} \right). \end{aligned}$$

Их можно объединить и представить в эквивалентной форме

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1 \partial I_2} & \frac{\partial H_0}{\partial I_1} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2 \partial I_1} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I_1} & \frac{\partial H_0}{\partial I_2} & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial I_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial I_2} & \omega_1 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial I_1} & \frac{\partial \omega_2}{\partial I_2} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

В случае системы с двумя степенями свободы мы можем разместить двумерную плоскость таким образом по отношению к трехмерному набору энергетических уровней, чтобы получить поперечное сечение двумерного семейства торов, как показано на рис. 3.2. На этом рисунке условие изоэнергетической невырожденности обеспечивает плавное изменение отношения частот $\sigma = \omega_1/\omega_2$ при переходе от окружности к окружности. При возмущении частоты сохраняющихся торов зависят как правило от величины ϵ ; но если при этом удовлетворяется условие (3.5.2), то при изменении ϵ отношения частот будут сохраняться.

В случае иррационального отношения ω_1/ω_2 данная исходная точка никогда не возвратится, в точности, в тоже самое положение. Если, с другой стороны, σ рационально — а при выполнении нашего условия изоэнергетической невырожденности такие значения будут распределены среди иррациональных — начальная точка вернется в свое исходное положение. Именно эти «рациональные кривые» «разрушаются» при возмущении, и их судьба будет подробно описана в следующей главе.

3.5.6. Отображения⁹⁾

От нашей картины вращения по окружности, представляющей пересечение семейства торов плоскостью (рис. 3.2), нетрудно перейти к обобщающему понятию

⁹⁾ Отображения более подробно обсуждаются в главе 4.

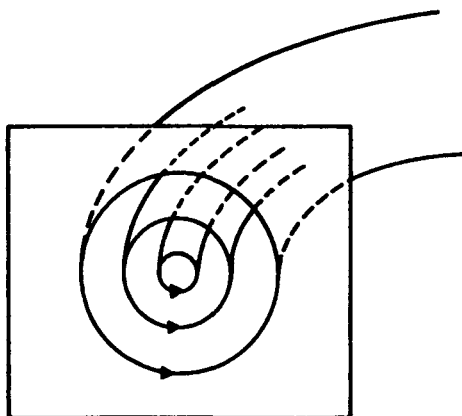


Рис. 3.2. Поперечное сечение семейства вложенных двумерных торов

«отображение», т. е. к преобразованию, состоящему в дискретном перемещении по $2n$ -мерному кольцеобразному многообразию, которое имеет вид

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta + \nabla_{I'} S_0(I'), \\ I' &= I,\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

где S_0 — некоторая «производящая функция». В случае $n = 1$ это отображение представляет движение по окружности радиуса I с «частотой» $\frac{\partial S_0}{\partial I}$. При возмущении $S_1(I, \theta)$, определяемом соотношениями

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta + \nabla_{I'} S(I', \theta), \\ I' &= I + \nabla_{\theta'} S(I', \theta),\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

где $S = S_0 + \varepsilon S_1$, $\varepsilon \ll 1$, условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 S_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0\tag{3.5.5}$$

обеспечивает сохранение большинства многообразий.

В случае $n = 1$ (т. е. отображения окружности в окружность) условие невырожденности означает, что угол вращения изменяется (плавно) от окружности к окружности.

Вариант КАМ-теоремы Мозера основывался на таких отображениях. В отличие от варианта Арнольда, в варианте Мозера не требуется аналитичность производящей функции; достаточно, чтобы она принадлежала классу C^{333} ! Позднее было показано, что теорема требует существования гораздо меньшего числа производных.

3.5.в. Периодические системы

В случае периодически возмущенных систем, для которых

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta, t),\tag{3.5.6}$$

где $H_1(I, \theta, t + \tau) = H_1(I, \theta, t)$, т. е. τ выступает в качестве периода, фазовое пространство можно рассматривать как $(2n + 1)$ -мерное: $(I, \theta, t) = \mathbb{R}^n \times T^{n+1}$

(см. рис. 4.6). При этом инвариантные торы имеют размерность $n + 1$, и условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0 \quad (3.5.7)$$

обеспечивает сохранение большинства из них при малом возмущении $\varepsilon \ll 1$. При $n = 1$ выполнение этого условия также гарантирует «устойчивость» переменных действия, которые при достаточно малых ε остаются на протяжении всего времени t близки к своим исходным значениям.

3.5.г. Точки устойчивого равновесия

В окрестности неподвижной эллиптической точки может быть доказан следующий вариант КАМ-теоремы. Если линейаризованные частоты не имеют резонансов низкого порядка вида

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n = 0, \quad (3.5.8)$$

где k_i — такие целые числа, что

$$0 < \sum_{i=1}^n |k_i| < 4, \quad (3.5.9)$$

то функция Гамильтона может быть сведена к так называемой *нормальной форме Биркгофа* (см. [1], приложение 7), а именно

$$H = H_0(\tau) + \text{члены высших порядков}, \quad (3.5.10)$$

где $\tau_k = 1, \dots, n$ соответствуют переменным $\tau_k = p_k^2 + q_k^2$ таким образом, что в точке равновесия $\tau_k = 0$, и где

$$H_0(\tau) = \sum_{k=1}^n \omega_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \omega_{kl} \tau_k \tau_l. \quad (3.5.11)$$

Выражение «члены высших порядков» в (3.5.10) означает члены, степень которых превосходит 4, т. е. члены, содержащие степени τ^N при $N > 4$.

Условие невырожденности

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0 \quad (3.5.12)$$

обеспечивает существование множества торов в достаточно малой окрестности точки равновесия. В дополнение к этому условие изоэнергетической невырожденности

$$\det \begin{vmatrix} \omega_{kl} & \omega_k \\ \omega_l & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.5.13)$$

обеспечивает существование такого множества — достаточно близко к точке равновесия — на каждой из энергетических поверхностей.

Список литературы

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, New York, 1968. [Имеется перевод: *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. (Серия регулярная и хаотическая динамика). 1999.]
3. *Bender C. M., Orszag S. A.* Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York, 1978.
4. *Berry M. V.* Regular and irregular motion // AIP Conference Proceedings. № 46: Topics in Nonlinear Dynamics. AIP, New York, 1978.
5. *Born M.* The Classical Mechanics of the Atom. Ungar, New York, 1960. [Имеется перевод: *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков—Киев, 1934.]
6. *Ince E. L.* Ordinary Differential Equations. Dover, New York, 1956.
7. *Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.* Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York, 1983. [Имеется перевод: *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.]
8. *Marcus L., Meyer K. R.* Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic. *Mem. Am. Math. Soc.* **144** (1974).
9. *Percival I. C., Richards D.* Introduction to Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
10. *Poincaré H.* Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste. Gauthier-Villars, Paris, 1892. [Имеется перевод: *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1: Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.]
11. *Kac M., Ulam S.* Mathematics and Logic. Preager, New York, 1968. [Имеется перевод: *Кац М., Улам С.* Математика и логика. М.: Мир, 1971.]
12. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
13. *Siegel C. L., Moser J.* Lectures in Celestial Mechanics. Springer-Verlag, New York, 1971.

Оригинальные публикации КАМ-теоремы:

14. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. 1963. Т. 18. С. 85.
15. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. С. 572.
16. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings on an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys.* **K1 1** (1962).

Хаос в гамильтоновых системах и сохраняющие площадь отображения

4.1. Поверхность сечения

В предыдущих главах мы достаточно много говорили об эволюции траекторий в (многомерном) фазовом пространстве. Но при этом, если не считать обсуждавшихся в первой главе рисунков, изображающих фазовую плоскость систем с одной степенью свободы, практически ничего не было сказано о том, как такое движение можно изобразить наглядно. Понятно, что основные сложности связаны с размерностью. Для двумерной (гамильтоновой) системы фазовое пространство четырехмерно и, в консервативном случае, энергетическая поверхность трехмерна. Проследить движение даже в случае такой трехмерной поверхности сложно — особенно когда имеешь дело с двумерным листом бумаги, на котором оно должно быть изображено. С решением этой проблемы связан один из наиболее ценных методов, известный как метод *поверхности сечения*, который был развит Пуанкаре [9] и Биркгофом [3]. Он особенно удобен для консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, хотя приложим и в случае большего числа измерений. С точки зрения развития предмета нелинейной динамики этот метод представляет собой не что иное, как один из первых — и до сих пор не утративший своего значения — численный расчет поверхности сечения для неинтегрируемых гамильтонианов, которые начали появляться в литературе почти одновременно с КАМ-теоремой. Такой компьютерный анализ сыграл важную роль как в расширении теоретических представлений в этой области, так и в ускорении их развития.

4.1.a. Поверхности сечения для гамильтонианов с двумя степенями свободы

Рассмотрим гамильтониан консервативной системы с двумя степенями свободы вида

$$E = H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (4.1.1)$$

Изучение движения траекторий этой системы может быть сведено к двумерной задаче следующим образом. Берем на данной энергетической поверхности «срез» фазового пространства, соответствующий некоторой заданной точке, скажем $y = 0$. Далее, следуем вдоль определенной траектории (полученной путем численного интегрирования гамильтоновых уравнений с использованием компьютера), отмечая соответствующие значения p_x и x всякий раз, когда она проходит через точку $y = 0$. Если потенциал $V(x, y)$ задает ограниченное движение, траектория вновь и вновь будет проходить через выбранный «срез» фазового пространства. Таким образом, как показано на рис. 4.1, может быть построено «отображение», состоящее из последовательных значений (p_x, x) . Оно представляет собой поверхность сечения;

точка на поверхности сечения определяет состояние системы с точностью до знака. Это следует из того, что при данном E и $y = 0$ имеем

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2m} p_x^2 - V(x, 0) \right)}. \quad (4.1.2)$$

Обычно поверхность сечения строится таким образом, что p_y имеет определенный знак, например $p_y > 0$.

Если начальные условия для данной траектории (т. е. набор значений p_x , x , E , $y = 0$) обозначить на поверхности сечения точкой X_0 , последовательные пересечения $X_1, X_2, \dots, X_n$ образуют некоторое «отображение» движения в фазовой плоскости. Это важное понятие, детально мы обсудим его несколько позднее. Здесь, однако, отметим, что промежутки времени между последовательными пересечениями поверхности сечения (точки $X_0, X_1, \dots$) не обязательно должны быть равными. Если начальные условия выбраны так, что соответствующая траектория лежит на торе, то последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \dots$ ляжет на некоторую гладкую кривую, определяемую пересечением этого тора с поверхностью сечения (см. рис. 4.2). Если отношение частот ω_1/ω_2 у выбранного тора иррационально, единственная траектория, как мы знаем, эргодически покрывает его. На поверхности сечения это проявляется в том, что последовательность точек X_i (постепенно) образует гладкую кривую. С другой стороны, при рациональном отношении частот траектория замкнута и число точек пересечения X_i будет конечным ($i = 0, \dots, n$), причем $X_0 = X_n$; n в этом случае определяется рациональностью отношения ω_1/ω_2 .

В предыдущей главе говорилось, что согласно КАМ-теореме большинство торов в случае слабо возмущенного неинтегрируемого гамильтониана сохраняется. Об остальных торах мы говорили, что они в некотором смысле «разрушаются». Соответствующие траектории могут теперь свободно блуждать в более широких областях фазового пространства, что проявляется на поверхности сечения в виде «распыления» точек, которое выглядит случайным и через которое нельзя провести гладкую кривую. Конечно, трудно объективно оценить на глаз степень «случайного распыления», но картина, возникающая при достаточно длительном движении траектории, как правило, явно отличается от гладкой кривой. Можно даже надеяться обнаружить в конце концов на поверхности сечения полностью заполненные (малые) области. Помимо этого, существуют важные численные тесты (численный расчет

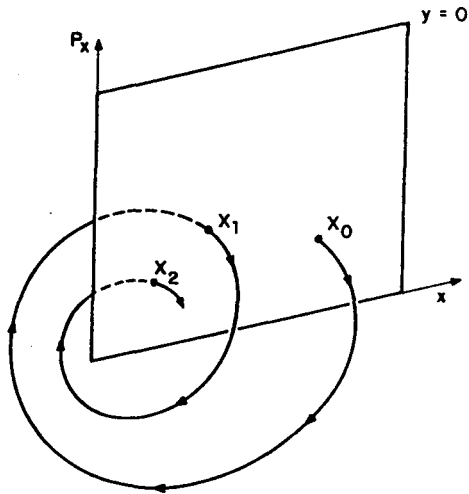


Рис. 4.1. Построение поверхности сечения

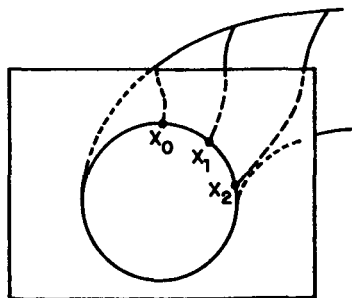


Рис. 4.2. Последовательные пересечения траектории на торе с поверхностью сечения

спектра мощности и показателей Ляпунова), описываемые ниже в разделе 4.5, которые позволяют объективно различать «регулярные» траектории, лежащие на гладких кривых поверхности сечения, и «нерегулярные» (или хаотические) траектории, которые приводят к возникновению случайной картины. Во всяком случае поверхность сечения является необычайно ценным инструментом, позволяющим непосредственно получать картину фазового пространства с чрезвычайно сложной структурой в случае неинтегрируемых систем, когда расчеты проводятся для большого числа начальных условий на одной и той же энергетической поверхности.

4.1.6. Гамильтониан Хенона—Хейлеса

Одна из наиболее известных и устоявшихся работ по изучению поверхности сечения была выполнена более 20 лет назад Хеноном и Хейлесом [13]. Она представляет собой образец ясности научного изложения, в котором нет ничего лишнего. Рассмотренный в работе гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (4.1.3)$$

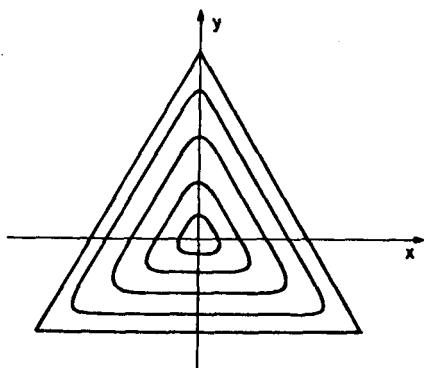


Рис. 4.3. Уровни потенциальной энергии для системы Хенона—Хейлеса. Снаружи внешнего треугольного контура ($E = \frac{1}{6}$) движение становится неограниченным

и был выбран в качестве простой модели для описания движения звезды в цилиндрически симметричном и гравитационно гладком галактическом потенциале. Этот гамильтониан также может служить простой моделью для пары нелинейно взаимодействующих молекулярных связей. Функция потенциальной энергии $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{2}y^3$, схематически представленная на рис. 4.3, поддерживает связанное движение вплоть до значения энергии $E = \frac{1}{6}$. При малых смещениях движение практически линейно; однако с ростом энергии изображающая точка все нагляднее «демонстрирует» нелинейность потенциала и вытекающие отсюда интересные следствия. На рис. 4.4 представлены знаменитые теперь поверхности сечения, рассчитанные

(для различных начальных условий при каждом из значений энергии) для $E = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{6}$. При $E = \frac{1}{12}$ движение преимущественно интегрируемо, и (фактически) все рассмотренные начальные условия соответствуют траекториям, лежащим на гладкие кривые. Самопересекающаяся кривая, на которой пересечения (точки А, В и С на рис. 4.4 (а) представляются (лишь визуально!) гладкими, — это определенный тип сепаратрисы, который более детально мы обсудим потом. При $E = \frac{1}{8}$ поверхность сечения заметно меняется. Некоторые гладкие кривые остаются неизменными, тогда как другие «разрушаются» различным образом. У семейства кривых, расположенных в правой части рисунка, появляется «цепочка» из пяти «островов». Она порождается единственной траекторией, которая последовательно перепрыгивает от острова к острову, постепенно вырисовывая контуры пяти маленьких кривых. С другой стороны, существовавшая при $E = \frac{1}{12}$ самопересекающаяся структура исчезает, и на ее месте мы видим

случайным образом разбросанные точки (порождаемые одной и той же траекторией), через которые невозможно провести гладкую кривую. При $E = \frac{1}{6}$ исчезают практически все гладкие кривые, за исключением нескольких мелких островков. Множество точек, которые заполняют большую часть доступной энергетической поверхности, порождаются единственной траекторией. Эта замечательная последовательность рисунков дает ясное представление о том, каким образом движение, описываемое неинтегрируемым гамильтонианом (за исключением энергии никакого другого первого интеграла нет), может измениться от преимущественно регулярного до преимущественно хаотического.

4.1.в. Цепочка Тода

Прежде, чем обсудить более детально природу такого перехода, мы опишем довольно поучительные результаты изучения другой поверхности сечения. Речь идет о проведенном Фордом с соавторами исследовании трехчастичной цепочки Тода, представляющей собой три экспоненциально взаимодействующие частицы, расположенные на кольце. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + e^{-\nu_1(q_1 - q_3)} + e^{-\nu_2(q_2 - q_1)} + e^{-(q_3 - q_2)} - 3 \quad (4.1.4)$$

и с учетом того, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ ¹⁾ (проверьте это), может быть сведен к эквивалентному двумерному варианту

$$H = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{1}{24} \left\{ e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y} \right\} - \frac{1}{8}. \quad (4.1.5)$$

При малых смещениях движение в этом случае также практически линейно; в действительности, если при разложении экспоненты в ряд ограничиться третьим порядком, член потенциальной энергии будет таким же, как и в системе Хенона—Хейлеса²⁾. Однако, в отличие от предыдущего случая, движение ограничено при всех

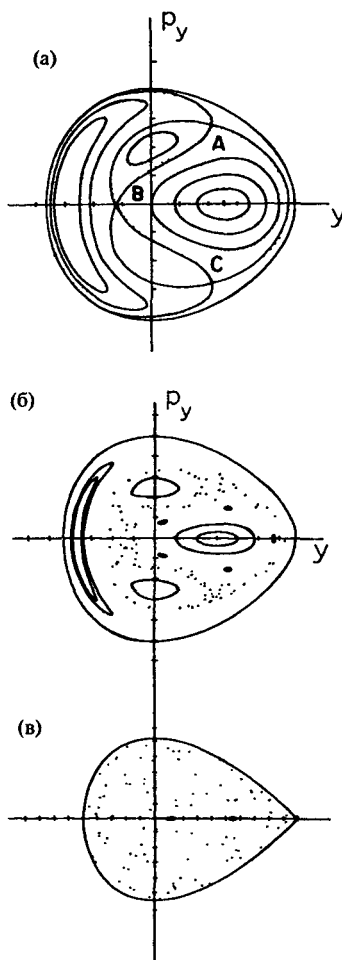


Рис. 4.4. Поверхности сечения для системы Хенона—Хейлеса при (а) $E = \frac{1}{12}$, (б) $E = \frac{1}{8}$ и (в) $E = \frac{1}{6}$. (Воспроизведено, с разрешения, из [4])

¹⁾ Из инвариантности гамильтониана при вращении системы как целого (или непосредственно из уравнений Гамильтона) следует $P \equiv p_1 + p_2 + p_3 = \text{const}$. Без потери общности можно положить $P = 0$, что соответствует выбору такой вращающейся системы отсчета, в которой полный момент равен нулю. — Прим. ред.

²⁾ Систематическое изучение последовательных усечений для цепочки Тода было проведено Контуполосом и Полимилисом [11].

значениях энергии. В случае *равных* масс $m_x = m_y$ было показано, что поверхность сечения содержит исключительно гладкие кривые при $E = 1$, $E = 256$ и (вплоть до) $E = 56000$ — предел возможностей их компьютера! Не было обнаружено абсолютно никаких признаков хаоса, и эти результаты являются сильным доводом в пользу того, что система (4.1.5) действительно интегрируема. Побуждаемый этими численными расчетами, Хенон [14] нашел другой первый интеграл,

$$F = 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y)e^{2y-2\sqrt{3}x} + (p_x - \sqrt{3}p_y)e^{2y+2\sqrt{3}x} - 2p_x e^{-4y}, \quad (4.1.6)$$

который в пределе малых смещений стремится к

$$F \rightarrow 12(yp_x - xp_y), \quad (4.1.7)$$

что есть не что иное как момент количества движений системы. Напротив, Казати и Форд [10], в случае *неравных* масс (т. е. $\frac{m_x}{m_y} \neq 1$) обнаружили хаотическое поведение на поверхности сечения. Помимо того, что эти результаты являются иллюстрацией замечательного взаимодействия численного эксперимента и теории, они вновь поднимают принципиальный вопрос о том, каким образом интегрируемость системы (4.1.5) может быть предсказана без описанных вычислительных усилий. Подробное обсуждение этой проблемы отложим до главы 8.

4.1.г. Поверхность сечения как симплектическое отображение

Фундаментальным свойством поверхности сечения в случае гамильтоновых систем является ее соответствие *сохраняющему площадь* или, точнее, *симплектическому* отображению. Для того чтобы понять, что под этим подразумевается, поучительно вначале напомнить некоторые уже рассмотренные нами ранее вопросы. Прежде всего, это теорема Лиувилля (главы 2.2 и 2.3), согласно которой фазовый объем гамильтонова потока остается неизменным. В случае систем с одной степенью свободы этому соответствует сохранение площади на фазовой плоскости (p, q) . Так, для некоторой области A , ограниченной замкнутой кривой, мы можем записать

$$\oint_{\mathcal{C}} p \, dq = \iint_A dp \, dq$$

$$\oint_{\mathcal{C}} p \, dq = \oint_{\mathcal{C}_t} p \, dq, \quad (4.1.8)$$

где $\mathcal{C}_t$ — форма кривой после ее трансформации в гамильтоновом потоке за время t . Обсуждаемые представления можно распространить на случай большого числа степеней свободы. Так, в случае потока траекторий в $2n$ -мерном фазовом пространстве, охватываемого некоторым замкнутым контуром, вновь можно записать

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{p} \, d\mathbf{q} = \oint_{\mathcal{C}_t} \mathbf{p} \, d\mathbf{q}, \quad (4.1.9)$$

где $\mathbf{p} = p_1, \dots, p_n$, $\mathbf{q} = q_1, \dots, q_n$. Конечно, в (4.1.9) интегралы уже не выражают просто площадь, как в случае $n = 1$. Они соответствуют сумме площадей проекций области на множество (p_i, q_i) -плоскостей (рис. 4.5). Именно в этом смысле мы называем отображение *симплектическим* (а не сохраняющим площадь); и, по сути, это

является одним из выражений того, что гамильтонов поток представляет собой каноническое преобразование. Для консервативных систем с *двумя* степенями свободы (типа обсуждавшихся выше) можно показать (см. приложение 4.1), что замкнутая область на поверхности сечения (т. е. $\oint_C p_x(x, y=0, E) dx$) будет под воздействием потока сохраняться.

Метод поверхности сечения можно также применять в случае зависящих от времени гамильтоновых систем. Особенно легко это реализовать в случае периодически возмущаемых систем с одной степенью свободы. Для соответствующего гамильтониана, который характеризуется тем, что

$$H(p, q, t + T) = H(p, q, t), \quad (4.1.10)$$

где T — период зависящей от времени части, фазовое пространство представляет собой трехмерное пространство переменных p , q и t . Поверхность сечения, сохраняющая площадь, получается просто как последовательность стробоскопических «мгновенных снимков» плоскости (p, q) в моменты времени nT , $n = 0, 1, 2, \dots$. Множество точек $X_i = (p(t + iT), q(t + iT))$ образует требуемую поверхность сечения (рис. 4.6). Очевидно, что в этом случае — в противоположность обсуждавшимся выше автономным системам — промежутки времени между последовательными пересечениями являются равными.

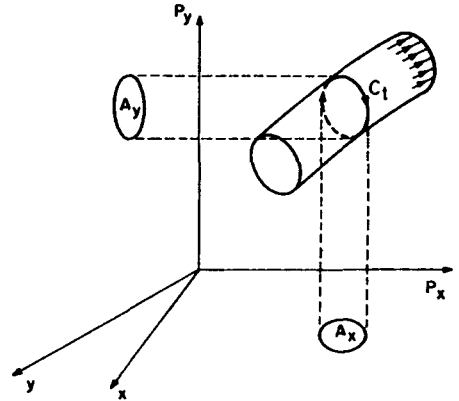


Рис. 4.5. Симплектическое сохранение площади. Площадь, ограниченная трансформирующимся контуром, является суммой проекций A_x и A_y . В гамильтоновом потоке эта сумма сохраняется

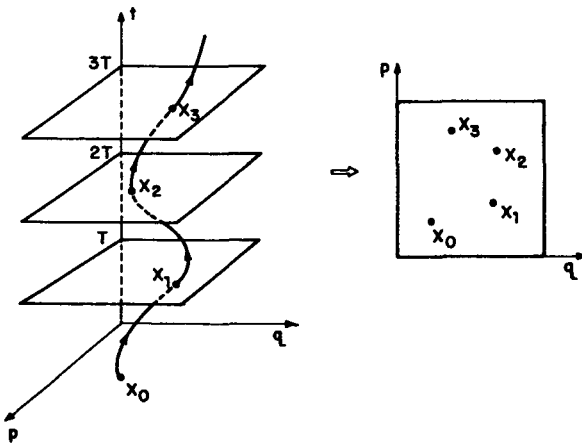


Рис. 4.6. Трехмерное фазовое пространство периодически возмущаемой системы. Поверхность сечения конструируется из стробоскопических срезов при $t = nT$

Читатель не мог не обратить внимания, что при обсуждении метода поверхности сечения термин *отображение* встречается довольно часто. Но до сих пор этот термин использовался в достаточно неопределенном смысле как некое порождаемое

гамильтоновым потоком преобразование, которое перемещает фазовую точку X_i в новое положение X_{i+1} на фазовой плоскости, т. е. для некоторого отображения T :

$$X_{i+1} = TX_i. \quad (4.1.11)$$

Кроме того, это преобразование является в некотором смысле «сохраняющим площадь» или симплектическим. В действительности понятие сохраняющего площадь отображения является чрезвычайно ценным средством для изучения гамильтоновых систем. Как будет показано ниже, такие отображения — даже если они очень простые — могут проявлять все общие свойства неинтегрируемых гамильтоновых систем, и в конце концов мы будем рассматривать эти два класса систем как в определенной мере эквивалентные. Благодаря относительной простоте отображений, многие теоремы в общем случае легче доказать для них, чем для гамильтонианов; в равной степени легче проводить численный анализ. Поэтому, стремясь научиться детально анализировать все явления, наблюдаемые, к примеру, в случае поверхности сечения системы Хенона—Хейлеса — такие, как разрушение торов, возникновение цепочек островов и хаотических траекторий — мы прежде всего исследуем свойства сохраняющих площадь отображений.

4.2. Сохраняющие площадь отображения

4.2.a. Отображения поворота

Важный класс сохраняющих площадь отображений представляют собой *отображения поворота*. Удобный способ ввести их — и показать их взаимосвязь с гамильтоновыми системами — вновь вернуться к нашему обсуждению поверхностей сечения. Вспомним, что для системы с двумя степенями свободы поверхность сечения в случае траектории, лежащей на торе, представляет собой последовательность точек $X_0, X_1, \dots$, лежащих на гладкой кривой, которая образуется при пересечении тора поверхностью сечения. Кроме того, если отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, последовательность X_i заполняет кривую эргодически, тогда как при рациональном ω_1/ω_2 последовательность итераций конечна, что соответствует замкнутой траектории. Теперь, имея в виду интегрируемую систему, рассмотрим семейство вложенных торов, для которых в случае изоэнергетической невырожденной системы (см. (3.5.2)) отношение частот плавно меняется, скажем возрастает, от тора к тору. Рассматривая только один из этих торов, характеризующийся переменными действия I_1, I_2 (на энергетической поверхности $E = H(I_1, I_2)$), линейный поток на нем запишется в виде

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_1(0), \quad (4.2.1a)$$

$$\theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_2(0), \quad (4.2.1b)$$

где $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2) = \frac{\partial H}{\partial I_1}$ и $\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2) = \frac{\partial H}{\partial I_2}$. Время t_2 , необходимое для полного поворота θ_2 на 2π , равняется просто $t_2 = 2\pi/\omega_2$. Изменение θ_1 за это время составит

$$\theta_1(t + t_2) = \theta_1(t) + \omega_1 t_2 = \theta_1(t) + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} = \theta_1(t) + 2\pi\alpha_1(I_1), \quad (4.2.2)$$

где величина $\alpha = \omega_1/\omega_2$, именуемая *числом вращения*, представлена как функция I_1 , так как на данной энергетической поверхности $E = H(I_1, I_2)$, I_2 всегда можно выразить через I_1 : $I_2 = I_2(E, I_1)$. Если теперь мы будем рассматривать плоскость

(I_1, θ_1) как поверхность сечения (см. рис. 4.7), то последовательные пересечения траектории (на данном торе) с этой плоскостью будут представлены точками $X_i = (\theta_1(t + it_2), I_1)$. Перейдя к обозначениям $\theta_i = \theta_1(t + it_2)$ и $r = I_1$, мы можем последовательность точек $X_i = X_i(r, \theta)$, связанную с потоком на данном торе (с данным «радиусом» I_1), представить в виде отображения

$$T: \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(r_i), \quad (4.2.3a)$$

$$r_{i+1} = r_i, \quad (4.2.3b)$$

где в качестве α выбирается плавно меняющаяся функция от r . Такое отображение называется *отображением поворота*. В представленном виде оно является довольно простым в том смысле, что единственная его функция состоит в перемещении точек, которое правда может быть как равномерным, так и дискретным, по данной окружности — равномерность имеет место в случае иррациональности α , дискретность — в случае рациональных α .

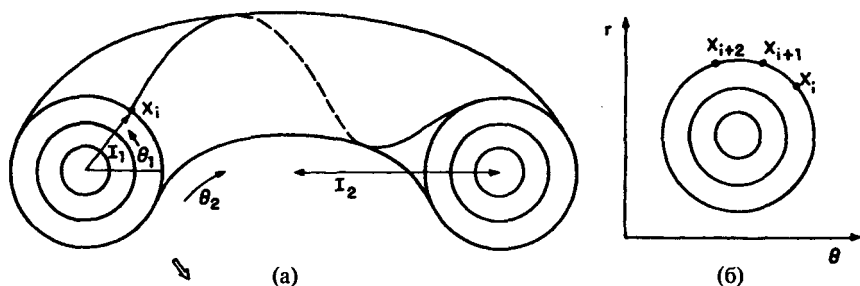


Рис. 4.7. (а) Точка X_i на торе, определяется переменными действие — угол I_1, θ_1 . (б) Последовательность точек X_i, X_{i+1}, X_{i+2} , соответствующих отображению поворота на плоскости ($r = I_1, \theta = \theta_1$)

Понятно, что о (4.2.3) можно говорить как об интегрируемом отображении. Ясно также, что данная *окружность* $\mathcal{C}$, состоящая из точек, будет отображаться в себя. Поэтому мы говорим, что отображение поворота переводит окружности в окружности, и символически записываем это в виде

$$T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}. \quad (4.2.4)$$

Однако, поскольку число вращения $\alpha(r)$ возрастает с r , радиальная линия точек будет закручиваться под воздействием T (рис. 4.8). Отсюда термин *отображение поворота*. Отображение (4.2.3) является, очевидно, сохраняющим площадь, так как

$$\frac{\partial(\theta_{i+1}, r_{i+1})}{\partial(\theta_i, r_i)} = 1. \quad (4.2.5)$$

Отметим также, что в таком представлении не важно, записана ли величина α в уравнении (4.2.3a) как функция r_i или r_{i+1} . Вскоре мы вернемся к этому вопросу.

В случае неинтегрируемых систем КАМ-теорема утверждает, что торы с рациональным отношением частот не «выживают». В терминах отображения поворота можно попытаться внести некоторое «неинтегрируемое» возмущение:

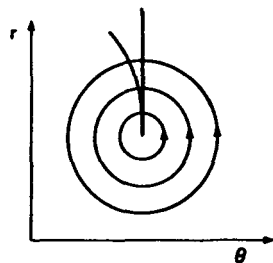


Рис. 4.8. Радиальная линия точек, закручивающаяся под действием отображения поворота

$$T_\varepsilon : \quad \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) + \varepsilon f(r_i, \theta_i), \quad (4.2.6a)$$

$$r_{i+1} = r_i + \varepsilon g(r_i, \theta_i), \quad (4.2.6b)$$

где f и g должны быть выбраны таким образом, чтобы свойство сохранять площадь (4.2.5) по-прежнему выполнялось. Естественно возникает вопрос о сохранении окружностей при возмущении. Существенный вклад Мозера [8] в КАМ-теорему как раз и состоял в доказательстве того, что в случае достаточно малых возмущений и достаточно иррациональных значений числа вращения окружности сохраняются (см. раздел 3.5).

4.2.6. Отображения на плоскости

Можно также записать отображения в декартовых координатах

$$T : \quad x_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad (4.2.7a)$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i). \quad (4.2.7b)$$

Они будут сохранять площадь при условии, что

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1. \quad (4.2.8)$$

Если f и g являются полиномами, отображение называется *целое креноново преобразование*. Свойства этого отображения зависят от вида f и g . Если они могут быть записаны как линейные функции, например

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha, \quad (4.2.9a)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \quad (4.2.9b)$$

то отображение представляет собой просто вращение на угол α . Другой пример простого линейного преобразования

$$x_{i+1} = x_i + y_i, \quad (4.2.10a)$$

$$y_{i+1} = y_i \quad (4.2.10b)$$

соответствует линейному сдвигу параллельно оси X .

Вариант нелинейного возмущения (4.2.9)

$$T : \quad x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha, \quad (4.2.11a)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha \quad (4.2.11b)$$

составил предмет прекрасной работы Хенона [15]. (Еще одна работа, которую обязательно следует прочесть!) Ее основной результат заключается в том, что обсуждаемое отображение может быть представлено как «композиция» двух более простых отображений, соответствующих нелинейному сдвигу и простому повороту (рис. 4.9). Таким образом, можно записать

$$T = T_1 T_2, \quad (4.2.12)$$

где

$$T_1 : \quad x_{i+1/2} = x_i, \quad (4.2.13a)$$

$$y_{i+1/2} = y_i - x_i^2, \quad (4.2.13b)$$

$$T_2: \begin{aligned} x_{i+1} &= x_{i+1/2} \cos \alpha - y_{i+1/2} \sin \alpha, \\ y_{i+1} &= x_{i+1/2} \sin \alpha + y_{i+1/2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.2.14a)$$

$$(4.2.14b)$$

Важно подчеркнуть, что отображение (4.2.11) *обратимо*. Обратное преобразование T^{-1} имеет вид

$$T_2: \begin{aligned} x_i &= x_{i+1} \cos \alpha - y_{i+1} \sin \alpha, \\ y_i &= -x_{i+1} \sin \alpha + y_{i+1} \cos \alpha + (x_{i+1} \cos \alpha + y_{i+1} \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

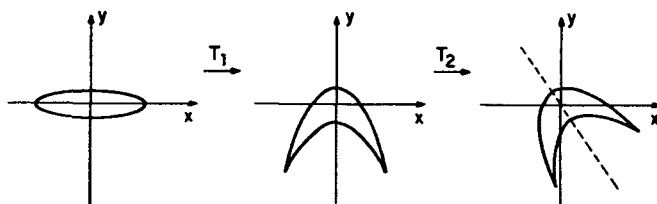


Рис. 4.9. Изменение области под воздействием нелинейного сдвига T_1 и последующего поворота T_2 , соответствующих преобразованию Хенона

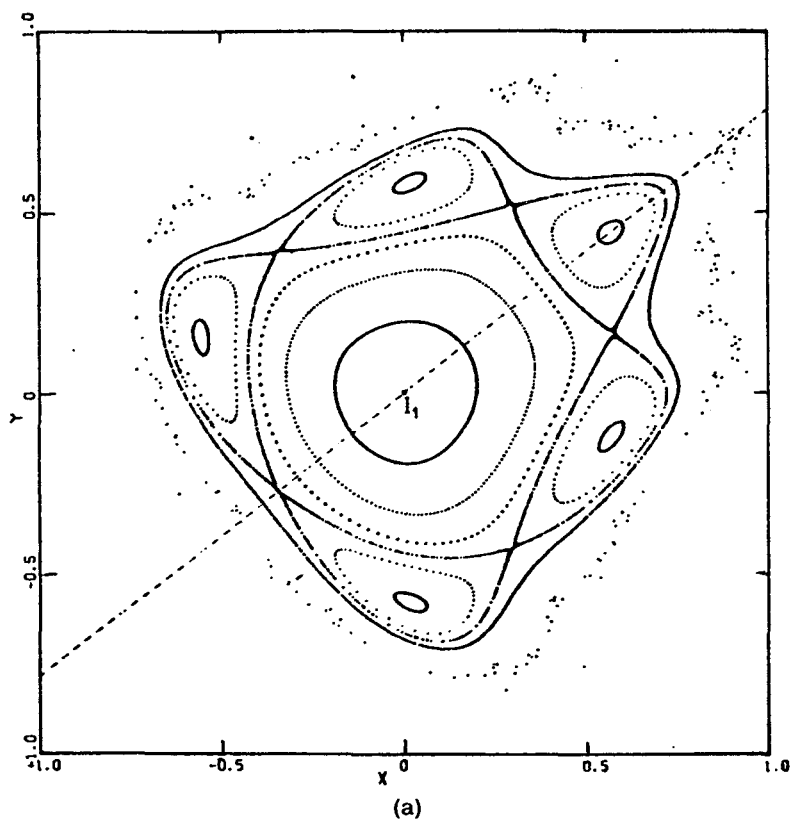


Рис. 4.10. (a) Типичная фазовая плоскость отображения Хенона при $\alpha = 0.2114$

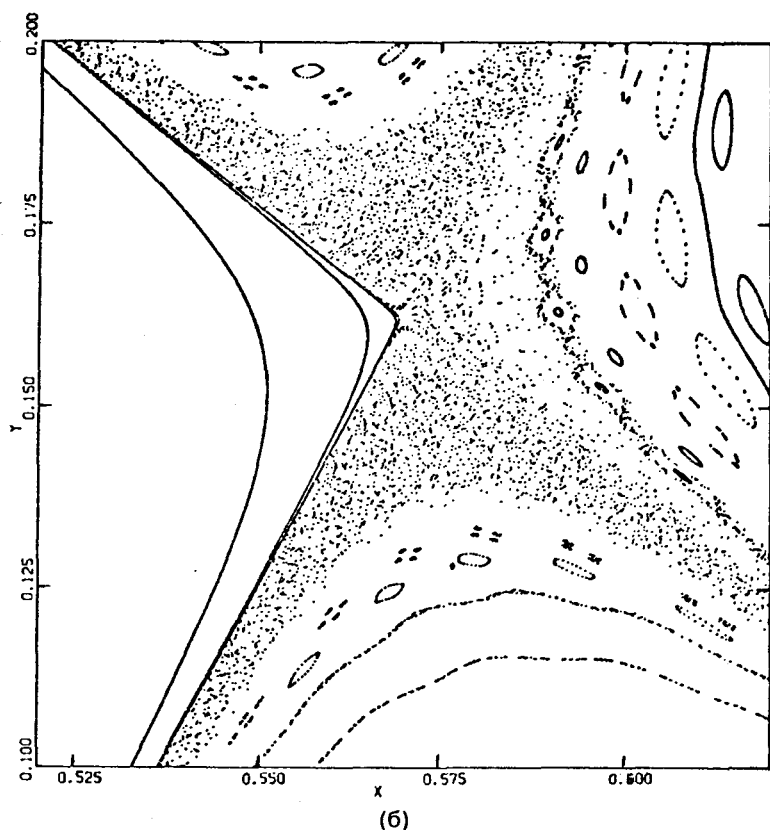


Рис. 4.10. (б) Размывание области в окрестности самой правой гиперболической точки. (Воспроизведено, с разрешения, из [15])

Таким образом, некоторая «конечная» точка траектории может быть единственным способом «обращена по времени» в исходную точку (x_0, y_0) .

Изучать отображения Хенона (4.2.11) численно довольно легко. При заданном угле поворота α можно рассчитать — даже с помощью карманного калькулятора — последовательные приближения для множества различных начальных условий (x_0, y_0) . Некоторые типичные результаты, полученные Хеноном [15], представлены на рис. 4.10. Они прекрасно иллюстрируют все характерные детали поверхности сечения системы типа Хенона—Хейлеса с семействами гладких кривых, цепочками островов и хаотическими траекториями. Особый интерес представляет структура на рис. 4.10 (а), аналогичная сепаратрисе. В этом масштабе пересечения выглядят почти гладкими; однако с увеличением масштаба проявляется (как видно на знаменитом теперь рис. 4.10 (б)) невероятно богатая и тонкая структура из цепочек островов, рассыпанных в «океане» хаоса. В последующих разделах мы объясним (попытаемся объяснить) происхождение этой великолепно сложной картины.

4.2.в. Взаимосвязь между сохраняющими площадь отображениями и гамильтонианами

Хотя отображение Хенона обнаруживает все общие черты неинтегрируемого гамильтониана, способ получения его из такого гамильтониана не очевиден. Поэтому следует задаться вопросом, можно ли явным образом строить сохраняющие площадь отображения, исходя из гамильтоновых систем. Рассмотрим простой гамильтониан с одной степенью свободы вида

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad (4.2.15)$$

для которого гамильтоновы уравнения записываются просто как

$$\dot{q} = p, \quad (4.2.16a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}. \quad (4.2.16b)$$

Можно попытаться записать производные по времени от левых частей (4.2.16) в виде приращений первого порядка, т. е. $\dot{q} = (q_{i+1} - q_i)/\Delta t$, где $q_{i+1} = q(t + \Delta t)$ и $q_i = q(t)$. Дискретный вариант (4.2.16) примет в этом случае вид

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (4.2.17a)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_i}. \quad (4.2.17b)$$

Однако это преобразование не сохраняет площадь, так как

$$\frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} = \begin{vmatrix} 1 & -\Delta t \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \\ \Delta t & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2},$$

и мы полагаем, что Δt конечно (см. обсуждение инфинитезимальных канонических преобразований в главе 2). Но если производную в (4.2.17b) вычислять не при $q = q_i$, а при $q = q_{i+1}$, т. е.

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (4.2.18a)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=q_{i+1}}, \quad (4.2.18b)$$

то отображение, как легко видеть, превратится в сохраняющее площадь.

Теперь интересно определить, гамильтониан какого типа может дать в точности такие уравнения движения. Вместо (4.2.15) рассмотрим зависящий от времени гамильтониан вида

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} p^2, & 0 < t < \gamma T, \\ \frac{1}{1-\gamma} V(q), & \gamma T < t < T, \end{cases} \quad (4.2.19a)$$

$$(4.2.19b)$$

где $0 < \gamma < 1$. Физически он соответствует ситуации, в которой частица (единичной массы) свободно перемещается в течение времени γT , а затем испытывает воздействие внешней силы с потенциалом $V(q)$ в течение времени $(1 - \gamma)T$; затем процесс периодически повторяется. Гамильтонианы такого типа используются для описания распространения лучей в волноводах; внешние воздействия связаны с периодически

расположенными линзами. Интегрирование гамильтоновых уравнений для (4.2.19) на произвольном промежутке от $t = iT$ до $t = (i+1)T$ дает в точности уравнения (4.2.18) (с заменой δT на T). Мы можем также изменить последовательность операций в (4.2.19) таким образом, что

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} V(q), & 0 < t < \gamma T, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)} p^2, & \gamma T < t < T. \end{cases} \quad (4.2.20a)$$

$$(4.2.20b)$$

Интегрирование гамильтоновых уравнений в этом случае дает отображение

$$q_{i+1} = q_i + T p_{i+1}, \quad (4.2.21a)$$

$$p_{i+1} = p_i - T \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=q_i}, \quad (4.2.21b)$$

которое также сохраняет площадь.

Между гамильтонианами (4.2.19) и (4.2.20) не существует, конечно, никаких различий, хотя уравнения, описывающие отображение для второго из них, обладают определенной тонкой внутренней симметрией, что и обсуждается ниже.

4.2.г. Дискретные лагранжианы*

Для таких отображений как (4.2.21) можно ввести дискретный лагранжиан

$$L(q_{i+1}, q_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{T} \right)^2 - V(q_i) \quad (4.2.23)$$

и соответствующую дискретную функцию действия

$$W(q_{i+1}, q_i) = T L(q_{i+1}, q_i) = \frac{1}{2} \frac{(q_{i+1} - q_i)^2}{T} - T V(q_i), \quad (4.2.23)$$

из которых легко получить симметричную пару производящих соотношений:

$$p_i = - \frac{\partial W}{\partial q_i}(q_{i+1}, q_i), \quad p_{i+1} = \frac{\partial W}{\partial q_{i+1}}(q_{i+1}, q_i). \quad (4.2.24)$$

Таким образом можно развить для сохраняющих площадь отображений довольно элегантный вариационный формализм, в значительной мере аналогичный стандартным подходам в классической механике. Формализм дискретных лагранжианов будет использован при обсуждении «квантовых отображений» в разделах 6.6 и 6.7.

4.2.д. Стандартное отображение

Наиболее изученным является отображение, которое получается при введении функции потенциальной энергии

$$V(q) = - \frac{k}{(2\pi)^2} \cos(2\pi q) \quad (4.2.25)$$

в уравнения (4.2.21). Посредством этого получаем уравнения движения:

$$q_{i+1} = q_i + p_{i+1}, \quad (4.2.26a)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_i), \quad (4.2.26b)$$

где положили $T = 1$. При изучении этого отображения в качестве p и q обычно выбираются периодически изменяющиеся переменные с периодом единица; при этом отображение ограничивается единичным тором, и мы можем переписать (4.2.26) в виде

$$q_{i+1} = q_i + p_{i+1}, \quad \text{mod } q = 1 \quad (4.2.27a)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_i), \quad \text{mod } p = 1 \quad (4.2.27b)$$

Это отображение Тейлора—Чирикова или «стандартное» отображение; второе название связано с его широким распространением в различных теоретических и практических задачах. Типичная фазовая плоскость при $k = 0.97$ показана на рис. 4.11. Вновь мы видим замечательно богатую структуру с изящным взаимопроникновением регулярного и хаотического движения. Читатель может также отметить, что некоторые из инвариантных кривых (торов), простирающихся поперек фазовой плоскости, кажутся пронизанными небольшими отверстиями. Это не численная ошибка, а напротив, проявление того факта, что инвариантные кривые представляют собой не настоящие торы, а так называемые *канторы*. Термин был введен для того, чтобы подчеркнуть предполагаемую взаимосвязь со структурой типа канторова множества. Эти интереснейшие понятия выходят за рамки настоящих лекций, хотя к обсуждению понятия канторова множества применительно к динамическим системам мы еще вернемся в следующей главе.

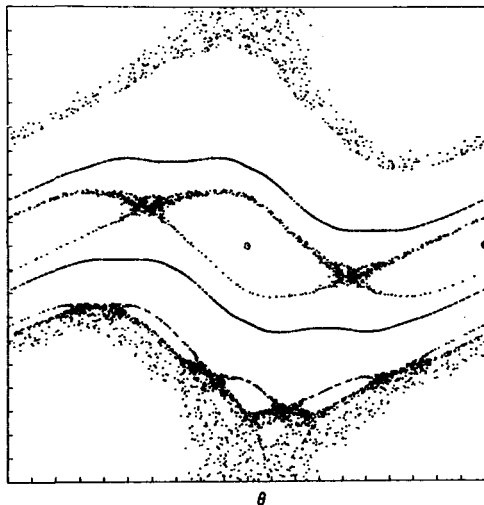


Рис. 4.11. Типичная фазовая плоскость стандартного отображения при $k = 0.97$. (Воспроизводится, с разрешения, из [24])

4.3. Неподвижные точки и теорема Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке

Неподвижной точкой (X^*) отображения T является такая точка, для которой

$$TX^* = X^*. \quad (4.3.1)$$

Понятно, что в случае периодической траектории, отображающей последовательность n итераций ($X_0, X_1, \dots, X_n$) таким образом, что $X_{n+i} = X_i$, каждая из точек X_i неподвижна по отношению к T^n , где T^n означает n последовательных отображений T :

$$T^n X_i = X_i. \quad (4.3.2)$$

Обсуждая в главе 1 динамику в фазовой плоскости, мы видели, что неподвижные точки являются удобными «организующими» центрами. Действительно, анализ неподвижных точек в случае отображений мало отличается от наших предыдущих

результатов; существенное отличие состоит в том, что свойство T сохранять площадь налагает существенные ограничения на возможные типы неподвижных точек.

4.3.a. Касательное отображение

Рассмотрим некоторое отображение T , действие которого мы символически запишем как

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Оно может представлять собой преобразование вида (4.2.7). Предположим для простоты, что T имеет неподвижную точку в начале координат на фазовой плоскости: $(x, y) = (0, 0)$. Линеаризуя T в окрестности этой точки стандартным способом, мы получаем (линейное) отображение, часто называемое *касательным отображением*:

$$\begin{bmatrix} \delta x_{i+1} \\ \delta y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

(так, например, в случае (4.2.7) $T_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=y=0}$ и т. д.). Тип неподвижной точки определяется собственными значениями (4.3.4):

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3.5)$$

Эти собственные значения находятся как решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(T_{11} + T_{22}) + \lambda(T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}) = 0,$$

которое мы запишем в виде

$$\lambda^2 - \lambda(\text{Tr}(T)) + \lambda(\det(T)) = 0.$$

Поскольку преобразование T сохраняет площадь (т. е. $\det(T) = 1$), корни вычисляются просто как

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr}(T)) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\text{Tr}(T))^2 - 4}. \quad (4.3.6)$$

Существует три возможности в зависимости от значений $\text{Tr}(T)$:

1. $|\text{Tr}(T)| < 2$; λ_1, λ_2 представляют собой комплексно сопряженную пару, лежащую на единичной окружности:

$$\lambda_1 = e^{+i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha}; \quad (4.3.7)$$

2. $|\text{Tr}(T)| > 2$; собственные значения являются действительными числами, удовлетворяющими соотношению

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}; \quad (4.3.8)$$

3. $|\text{Tr}(T)| = 2$; собственные значения равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1. \quad (4.3.9)$$

Используя стандартные методы линейной алгебры, мы всегда можем перейти к представлению, которое диагонализует (4.3.4):

$$\begin{bmatrix} \xi_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix},$$

где для данной матрицы преобразования A

$$A \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad ATA^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Теперь мы легко можем интерпретировать все три различные возможности для собственных значений.

4.3.6. Классификация неподвижных точек

Первый случай ($\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$) представляет собой просто вращение,

$$\begin{bmatrix} \xi_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix}, \quad (4.3.10)$$

в окрестности неподвижной точки $(0, 0)$. Он, очевидно, соответствует устойчивой или эллиптической неподвижной точке. Мы можем, таким образом, предполагать наличие инвариантных кривых в непосредственной окрестности точки $(0, 0)$ (см. рис. 1.10 (в)). (См. также обсуждение КАМ-теоремы в случае точек равновесия в разделе 3.5.)

Во втором случае ($\lambda_2 = 1/\lambda_1$) линеаризованное преобразование имеет вид

$$\begin{bmatrix} \xi_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix}, \quad (4.3.11)$$

что дает гиперболическое движение в окрестности $(0, 0)$. Детальное поведение (4.3.11) определяется знаком λ .

Случай (а) $\lambda > 0$ — регулярная *гиперболическая* неподвижная точка, последовательные итерации (4.3.11) в которой остаются на одной из ветвей гиперболы (см. рис. 4.12 (а)).

Случай (б) $\lambda < 0$ — *гиперболическая-с-отражением* неподвижная точка, при последовательных итерациях (4.3.11) происходят скачки между противоположными ветвями гиперболы (рис. 4.12 (б)). Это очевидным образом вытекает из того, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \xi_1 \\ \delta \eta_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -|\lambda| \delta \xi_0 \\ -\frac{1}{|\lambda|} \delta \eta_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta \xi_2 \\ \delta \eta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |\lambda|^2 \delta \xi_0 \\ \frac{1}{|\lambda|^2} \delta \eta_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -|\lambda|^3 \delta \xi_0 \\ -\frac{1}{|\lambda|^3} \delta \eta_0 \end{bmatrix} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

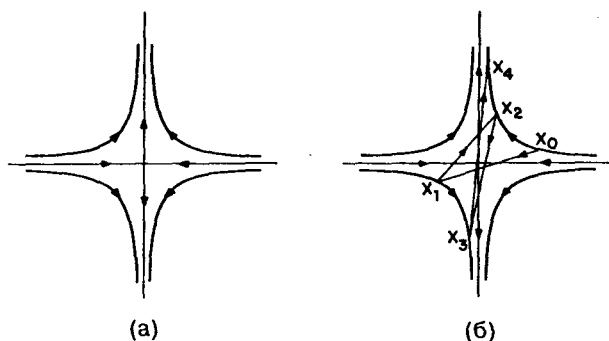


Рис. 4.12. (а) Гиперболическая неподвижная точка. (б) Гиперболическая-с-отражением неподвижная точка

Третий случай — особый случай, соответствующий $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ — лучше всего интерпретируется, если заметить, что в исходных переменных $(\delta x_i, \delta y_i)$ (линеаризованное) преобразование (4.3.4) всегда может быть записано в виде (при выборе $\lambda_1 = +1$)

$$\begin{bmatrix} \delta x_{i+1} \\ \delta y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix}, \quad (4.3.12)$$

где c — произвольная постоянная, характеризующая перенос параллельно оси x . Такая неподвижная точка известна как *параболическая* (рис. 4.13). Отметим, что если положить $\delta y_0 = 0$, то каждая точка оси x является неподвижной для (4.3.12). Такая ситуация возникает для инвариантных торов или кривых, покрытых замкнутыми траекториями, когда каждая точка кривой (в фазовой плоскости или на поверхности сечения) является неподвижной точкой потока.

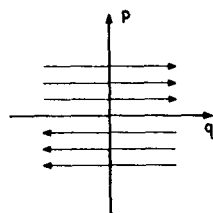


Рис. 4.13. Параболическая неподвижная точка

4.3.в. Теорема Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке

Теперь мы готовы приступить к достаточно детальному обсуждению фундаментального вопроса о судьбе торов с рациональными отношениями частот (или кривых с рациональным числом вращения) при (малом) возмущении. К этой проблеме целесообразно подойти с точки зрения отображений поворота, которое мы представили в виде (раздел 4.2), выявляющем взаимосвязь с гамильтонианами, имеющими две степени свободы. Вновь привлекая представление о (трансверсальном) пересечении семейства торов, мы можем представить невозмущенное отображение поворота в виде

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial}{\partial I} S_0(I'), \quad (4.3.13a)$$

$$I' = I, \quad (4.3.13b)$$

где в случае двумерных торов $\frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2}$. (Отмеченные штрихом переменные соответствуют $(i+1)$ итерации отображения, не отмеченные i -той итерации.) КАМ-теорема

утверждает, что при достаточно малом возмущении $\varepsilon S_1(I, \varphi)$, т. е. в случае отображения

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial}{\partial I'} S_0(I') + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I'} S_1(I', \varphi), \quad (4.3.14a)$$

$$I' = I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varphi} S_1(I, \varphi) \quad (4.3.14b)$$

«большинство» инвариантных кривых сохраняется, если удовлетворено условие невырожденности

$$\det \left| \frac{\partial^2 S_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (4.3.15)$$

Здесь подразумевается, что «большинство» не содержит кривых с рациональным числом вращения $\alpha = \omega_1/\omega_2 = r/s$.

Мы можем использовать эти отображения для детального изучения судьбы рациональных кривых под действием возмущения. Рассмотрим две кривые $\mathcal{C}^+$ и $\mathcal{C}^-$, лежащие по обе стороны кривой $\mathcal{C}$ с рациональным числом вращения $\alpha = r/s$, как схематически показано на рис. 4.14 (а). Предположим также, что $\alpha = \alpha(I)$ монотонно возрастает с ростом I . Если отображение мы обозначим через T :

$$\begin{bmatrix} \varphi' \\ I' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varphi \\ I \end{bmatrix}, \quad (4.3.16)$$

то каждая точка кривой $\mathcal{C}$ будет неподвижной точкой для T^s , поскольку

$$T^s \begin{bmatrix} \varphi \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi + s \left(\frac{\partial S_0}{\partial I} \right) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi + s 2\pi \left(\frac{r}{s} \right) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi + 2\pi r \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.3.17)$$

Таким образом, относительно $\mathcal{C}$ отображение T^s поворачивает $\mathcal{C}_+$ против, а $\mathcal{C}_-$ по часовой стрелке.

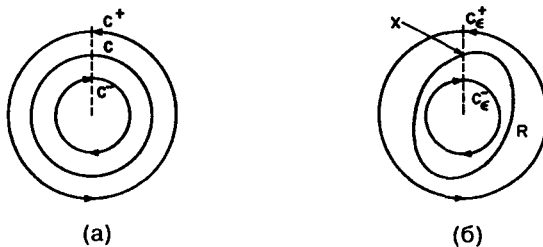


Рис. 4.14. (а) Инвариантные кривые невозмущенного отображения поворота T с числами вращения $\alpha < r/s$ для $\mathcal{C}^-$, $\alpha = r/s$ для $\mathcal{C}$ и $\alpha > r/s$ для $\mathcal{C}^+$. (б) Результат применения к этим кривым возмущенного отображения T_ε . В силу того, что относительный поворот $\mathcal{C}^+$ и $\mathcal{C}^-$ сохраняется, между ними имеются точки (X) , угловая координата которых не меняются. Кривая R между $\mathcal{C}^+$ и $\mathcal{C}^-$ представляет собой кривую, образованную такими точками

Рассмотрим теперь слабо возмущенное отображение T_ε . Согласно КАМ-теореме $\mathcal{C}^+$ и $\mathcal{C}^-$ сохраняются, хотя и в слегка искаженном виде (скажем, $\mathcal{C}_\varepsilon^+$ и $\mathcal{C}_\varepsilon^-$). Эти кривые являются инвариантными кривыми T_ε :

$$T_\varepsilon(\mathcal{C}_\varepsilon^+) = \mathcal{C}_\varepsilon^+ \quad \text{и} \quad T_\varepsilon(\mathcal{C}_\varepsilon^-) = \mathcal{C}_\varepsilon^-. \quad (4.3.18)$$

Более того, мы предположим, что ϵ достаточно мало для того, чтобы относительные повороты ϵ^+ и ϵ^- сохранялись под действием T_ϵ^s . Если это так, то между ϵ^+ и ϵ^- должна быть единственная точка, угловые координаты φ которой сохраняются под действием T_ϵ^s . Действительно, на каждом из радиусов (проведенных из центра) должна лежать одна такая точка, и мы можем нарисовать кривую R , образованную этими точками (рис. 4.14 (б)). R не является инвариантной кривой T_ϵ , хотя и должна содержать неподвижные точки T_ϵ . (Для неподвижной точки должны сохраняться и «угол», и «радиус» — тогда как мы имеем кривую, на которой сохраняются только углы). Это можно продемонстрировать, подвергнув R действию отображения T_ϵ^s :

$$R' = T_\epsilon^s R. \quad (4.3.19)$$

Новая кривая R' будет пересекать R в *четном* числе точек (это следует из простых геометрических соображений), которые и представляют собой неподвижные точки T_ϵ^s (см. рис. 4.15 (а)). (Мы исключили из рассмотрения все точки касания R и R' , которые не характеризуют общую ситуацию). Это и есть знаменитая *теорема о неподвижной точке Пуанкаре—Биркгофа*. Она утверждает, что в результате возмущения рациональной кривой с числом вращения r/s (для которой в невозмущенной системе каждая точка представляет собой неподвижную точку T^s) сохраняется лишь четное число $2ks$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) неподвижных точек. (Как вскоре мы увидим, при этом устойчивые и неустойчивые точки чередуются). Кратность числа таких точек $2s$, обосновать несложно. Для этого рассмотрим одну из (четного числа) неподвижных точек P , найденных как пересечение R и R' . По определению это неподвижная точка отображения T_ϵ^s . T_ϵ порождает траекторию $P, T_\epsilon P, T_\epsilon^2 P, \dots, T_\epsilon^{s-1} P$. Но каждая точка этой замкнутой траектории является также неподвижной точкой T_ϵ^s . Следовательно, имеется s неподвижных точек, связанных с каждой точкой пересечения R и R' — а всего $2ks$ неподвижных точек.

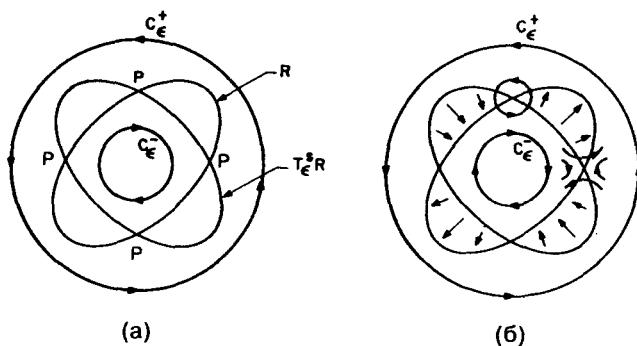
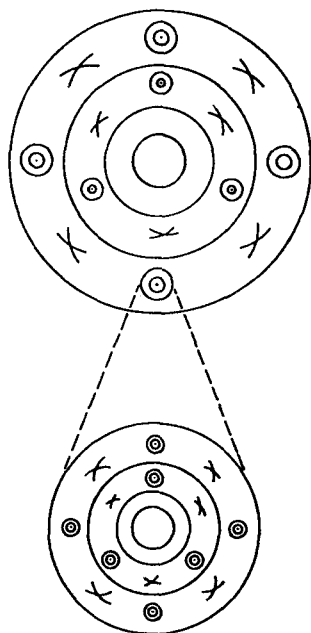


Рис. 4.15. (а) Преобразование кривой R в новую кривую $R' = T_\epsilon^s R$. Буквой P отмечены точки пересечения этих двух кривых. (б) В соответствии с «линиями потока» гиперболические и эллиптические неподвижные точки чередуются

Возвращаясь к рис. 4.15, можно убедиться, следуя «линиям потока», в том, что имеет место чередование эллиптических и гиперболических неподвижных точек. Таким образом, в результате возмущения рациональной кривой с $\alpha = r/s$ сохраняется $2ks$ неподвижных точек отображения T_ϵ^s ; они образуют чередующуюся последовательность из ks эллиптических и ks гиперболических точек. В окрестности



каждой эллиптической неподвижной точки мы в свою очередь обнаруживаем семейство инвариантных кривых. Это семейство само подчиняется КАМ-теореме (см. раздел 3.5.г) и, таким образом, его рациональные члены будут разрушаться в соответствии с теоремой о неподвижной точке Пуанкаре—Биркгофа. Такая же структура должна затем воспроизвестись в окрестности соответствующей подпоследовательности эллиптических неподвижных точек и т. д. Таким образом, в окрестности каждой эллиптической неподвижной точки одновременно имеют место и теорема о неподвижной точке Пуанкаре—Биркгофа, и КАМ-теорема, в результате чего возникает замечательная структура, воспроизводящая саму себя при любом изменении масштаба, что схематически изображено на рис. 4.16.

Рис. 4.16. Последовательное применение КАМ-теоремы и теоремы о неподвижной точке Пуанкаре—Биркгофа приводит к самовоспроизводящейся структуре неподвижных точек (× означает гиперболические неподвижные точки)

4.4. Гомоклинные и гетероклинные точки

Чтобы завершить картину, представленную на рис. 4.16, необходимо рассмотреть, что происходит в окрестности гиперболических неподвижных точек. Результаты, как мы увидим, весьма необычны. Мы будем здесь следовать изложению Берри [2].

Гиперболическая неподвижная точка характеризуется четырьмя инвариантными кривыми или многообразиями: два входящих или *устойчивых* многообразия (H^+) и два выходящих или *неустойчивых* многообразия (H^-), как показано на рис. 4.17.

Точки на H^+ экспоненциально медленно сходятся к неподвижной точке H ,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T^s X \rightarrow H \quad (X \in H^+), \quad (4.4.1)$$

тогда как точки на H^- экспоненциально медленно разбегаются от H ,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T^{-s} x \rightarrow H \quad (X \in H^-). \quad (4.4.2)$$

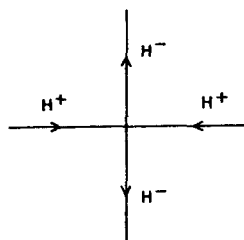


Рис. 4.17. Устойчивые многообразия H^+ и неустойчивые многообразия H^- гиперболической неподвижной точки

4.4.а. Пересечения H^+ и H^-

Проанализируем, каким образом H^+ и H^- могут «взаимодействовать» друг с другом. Как мы видели выше, в случае интегрируемых систем многообразия H^+ и H^- , исходящие из гиперболической неподвижной точки, образуют сепаратрисы

(см., например, случай маятника). На рис. 4.18 (а) изображен случай, когда входящее многообразие плавно соединяется с входящим, и в результате образуется гладкая петля. Такую кривую иногда называют *гомоклинной траекторией*. На рис. 4.18 (б) представлен другой вариант, при котором H^+ и H^- для семейства из трех гиперболических неподвижных точек (т. е. неподвижных точек отображения T^3) соединяются друг с другом так, как показано на рисунке. Полученная картина не отличается принципиально (разве что при поверхностном рассмотрении!) от структуры поверхности сечения $E = \frac{1}{12}$ системы Хенона—Хейлеса (рис. 4.4 (а)).

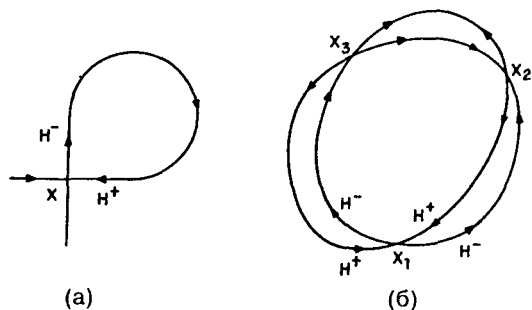


Рис. 4.18. (а) Плавное присоединение H^+ к H^- , относящихся к одной и той же неподвижной гиперболической точке X , приводящее к образованию гомоклинной траектории. (б) Семейство из трех плавно связанных гиперболических точек X_1, X_2, X_3

Такое гладкое соединение многообразий является исключением и может иметь место лишь в случае интегрируемых систем. Общая ситуация гораздо сложнее. Многообразия H^+ и H^- не имеют самопересечений, но при этом могут пересекать друг друга так, как показано на рис. 4.19. Если точка(и) пересечения H^+ и H^- образована многообразиями, связанными с одной и той же неподвижной точкой или с неподвижными точками одного семейства (примером могут служить три неподвижные точки T^3 , представленные на внутренней части рис. 4.16), она называется *гомоклинной точкой*. Если пересекающиеся многообразия связаны с неподвижными точками различных семейств (например, неподвижные точки T^3 и T^4 на внутренней и внешней частях рис. 4.16), точка(и) их пересечения называется *гетероклинной точкой*.

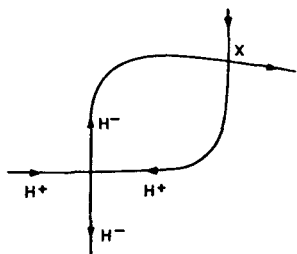


Рис. 4.19. Пересечение устойчивого многообразия H^+ и неустойчивого многообразия H^- , относящихся к одной и той же гиперболической неподвижной точке, с образованием гомоклинной точки X . Необходимо подчеркнуть, что изображенные здесь кривые не соответствуют какой-либо одной траектории, а проведены через последовательные пересечения траектории с плоскостью

Однако подобные пересечения совсем не просты! Рассмотрим гомоклинную точку X и соседние с нею точки X' и X'' (рис. 4.20 (а)). Эти две точки отображаются, как показано на рисунке, в точки TX' и TX'' соответственно. Проблема заключается в следующем. Поскольку X расположена «спереди» как X' , так и X'' , ее образ TX должен в силу непрерывности отображения располагаться «спереди» TX' и TX'' . Понятно, что это невозможно. Противоречие можно разрешить, если образовать

петлю, как показано на рис. 4.20 (б). Но при этом возникает новая точка пересечения (гомоклинная точка) TX . Из аналогичных рассуждений следует, что TX должна отобразиться в новую гомоклинную точку T^2X за счет образования второй петли, как показано на рис. 4.20 (в). При этом расстояние между T^2X и TX будет меньше, чем между TX и X , так как T^2X располагается ближе к гиперболической точке, чем TX . С учетом сохранения площадей, площади двух петель между X , TX и T^2X должны быть равны. А для этого вторая петля должна быть тоньше и более вытянута, чем первая.

В результате дальнейших построений образуется бесконечное число пересечений; вся область оказывается плотно покрытой гомоклинными точками, а располагающиеся между ними петли становятся все более длинными и тонкими. В целом картина чрезвычайно сложна (рис. 4.21). Эту сложность подчеркивал Пуанкаре в своем основополагающем трактате «Новые методы небесной механики» [9]:

«Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересечь самое себя, но она должна навеваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся».

Теперь мы можем дополнить деталями, по крайней мере приближенно, рис. 4.16. В результате получаем картину, изображенную на рис. 4.22. Замечательно, что эта структура повторяет себя при изменении масштаба и, более того, является характерной для неинтегрируемых систем в общем случае. Такое же впечатление могла произвести при первом знакомстве (изображенная на рис. 4.10 (б)) детальная динамика в окрестности гиперболической неподвижной точки отображения Хенона; вероятно теперь подобные картины уже не будут вызывать большое удивление.

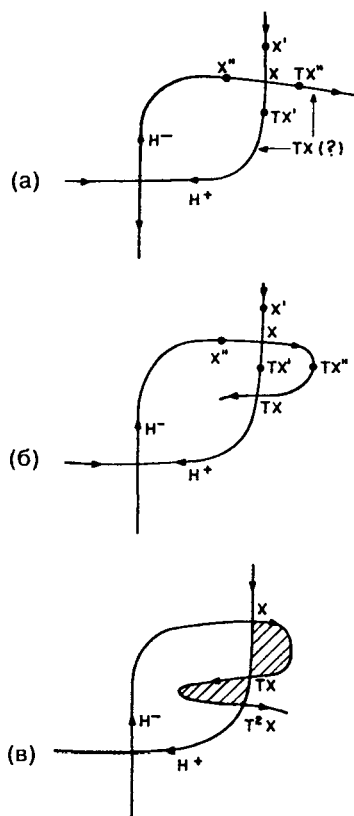


Рис. 4.20. (а) Отображение соседних точек X' и X'' в TX' и TX'' и неоднозначность образа TX гомоклинной точки X . (б) Единственность образа TX достигается за счет образования петли на многообразии. (в) Образ T^2X точки TX порождает более длинную и тонкую петлю, ограничивающую такую же площадь

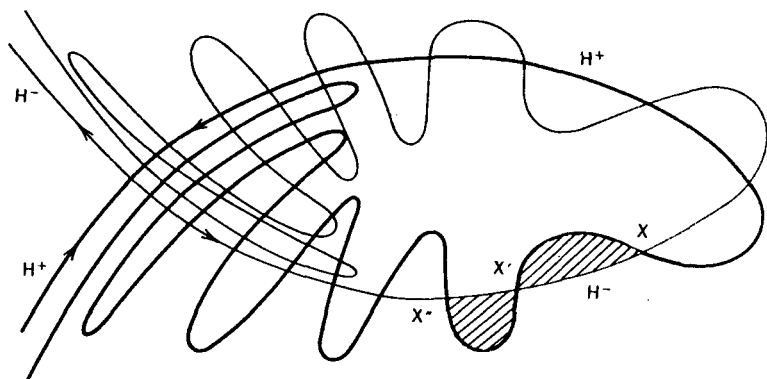


Рис. 4.21. Сеть пересечений H^+ и H^- , приводящих к плотному заполнению области гомоклиническими точками и к образованию сети все более длинных и тонких петель одинаковой площади (заштрихованные области)

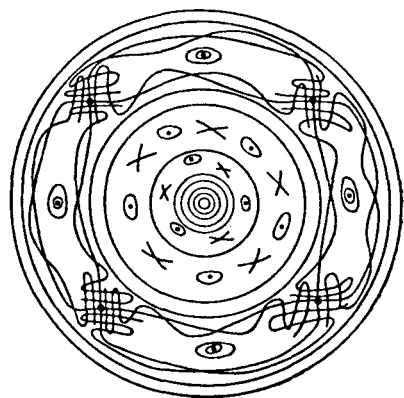


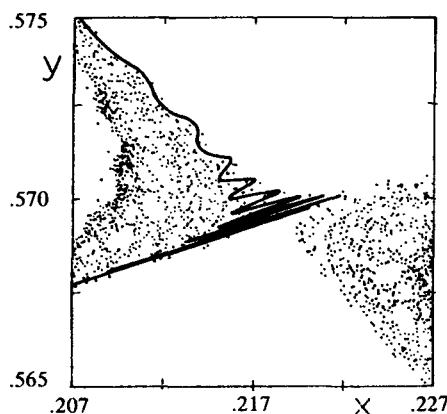
Рис. 4.22. Типичная самовоспроизводящаяся структура из эллиптических и гиперболических неподвижных точек и связанных с ними гомоклинических сетей. (Воспроизведено, с разрешения, из [4])

4.4.6. Усы и завитки

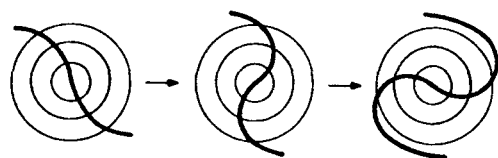
При «потраекторном» изучении, таком как было проведено для отображения Хенона, мы наблюдали «моря» хаоса, но при этом не видели кривых, соответствующих множественным пересечениям многообразий H^+ и H^- . Чтобы получить представление о том, как в действительности выглядит такая структура, мы должны подвергнуть действию отображения целый линейный элемент (каждой точке которого соответствуют разные начальные условия). На рис. 4.23 представлены результаты таких расчетов для линейного элемента в окрестности гиперболической неподвижной точки отображения Хенона. Такие осцилляции линейного элемента с их характерной структурой мы называем *гомоклиническими осцилляциями*. В любой (сильно) хаотической области (не обязательно в окрестности единственной гиперболической неподвижной точки) линейный элемент будет изменяться именно таким образом — экспоненциально быстро растягиваться и раскачиваться взад-вперед. Эта характерная черта эволюции линейного элемента на плоскости, была названа *усом*. Поведение линейного элемента в окрестности эллиптической неподвижной точки существенно отличается. Основываясь на нашем обсуждении отображений

поворота, несложно показать, что линейный элемент будет образовывать сильно завивающуюся структуру. Такие структуры мы будем называть *завитками*. Описываемые особенности представляют собой «наглядное» проявление хаоса в случае сохраняющих площадь отображений. В разделе 4.8 мы увидим, что забавные явления, наблюдаемые в плавающих на поверхности кофе сливках или в тонких бензиновых пленках, стекающих вдоль улиц в дождливый день, могут быть описаны именно в этих терминах.

В заключение сделаем еще одно небольшое замечание относительно гетероклинных точек. Поскольку они соответствуют пересечениям H^+ и H^- , отвечающих различным семействам неподвижных точек (например, T^3 и T^4 на рис. 4.16), весьма вероятно, что некоторая промежуточная инвариантная кривая (т. е. некоторый тор с (очень) иррациональным числом вращения) также должна разрушаться. Понятно, что это требует более сильного возмущения. Таким образом, появление гетероклинных точек можно рассматривать как предвестник возникновения достаточно распространенного хаоса. Критерий возникновения такого глобального хаоса представляет интерес, поскольку предполагается, что при этом, например, усиливаются процессы переноса. Развита целый ряд методов предсказания этого перехода, включая метод перекрытия резонансов Чирикова и метод вычетов Грина. Они будут обсуждаться в последующих разделах.



(a)



(б)

Рис. 4.23. (а) Итерации линейного элемента в окрестности гиперболической неподвижной точки, в результате которых образуется «ус». (Воспроизведено, с разрешения, из [2].) (б) Итерации линейного элемента в окрестности эллиптической неподвижной точки, в результате которых возникает «завиток»

4.5. Критерии локального хаоса

4.5.а. Показатели Ляпунова

Важная особенность хаотического движения — чрезвычайная чувствительность к малым изменениям в начальных условиях. Близко расположенные траектории экспоненциально разбегаются во времени в отличие от регулярных траекторий, которые разбегаются лишь *линейно*. (Отметим, что такое разбегание не может, безусловно, продолжаться бесконечно в ограниченном фазовом пространстве.) Точная количественная оценка скорости разбегания может быть дана в терминах *показателей Ляпунова*, которые служат мерой средней скорости экспоненциального разбегания соседних траекторий. Показатели Ляпунова чрезвычайно полезны при описании

динамических систем, и возможность их использования ни коим образом не ограничивается гамильтоновыми системами, рассматриваемыми в этой главе. Поэтому, чтобы не утрачивать общность рассуждений, мы будем рассматривать некоторую (автономную) систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5.1)$$

При изучении устойчивости данной неподвижной точки мы подвергали линеаризации уравнения движения в окрестности этой точки. Теперь мы будем линеаризовать уравнения движения в окрестности произвольной базовой траектории $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ с целью получить касательное отображение:

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \delta x_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{x=\bar{x}(t)}. \quad (4.5.2)$$

Норма

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t)} \quad (4.5.3)$$

задает меру разбегания двух соседних траекторий, т. е. базовой траектории x и соседней с ней траектории, имеющей начальные условия $x(0) + \delta x(0)$. Средняя скорость экспоненциального разбегания определяется следующим образом:

$$\sigma = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{t} \right) \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right), \quad (4.5.4)$$

где $d(0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(0)}$. Помимо этого, можно показать (пояснения будут даны ниже), что существует набор из n таких величин σ_i , $i = 1, \dots, n$. Эти величины называются *характеристическими показателями Ляпунова* и могут быть упорядочены:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n. \quad (4.5.5)$$

В случае регулярного движения показатели равны нулю, поскольку $d(t)$ возрастает со временем лишь линейно (либо алгебраически).

Чтобы лучше понять обсуждаемые идеи, целесообразно прежде всего рассмотреть показатели Ляпунова для отображений. Простейший возможный случай — *одномерное* отображение вида

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad (4.5.6)$$

где $f(x)$ — некоторая простая нелинейная функция x , например, $f(x) = 4\lambda x(1-x)$. Замечательные динамические свойства такого отображения будут более подробно описаны в главе 5. Касательное отображение имеет простой вид

$$\delta x_{i+1} = f'(x_i) \delta x_i = \prod_{j=0}^i f'(x_j) \delta x_0, \quad (4.5.7)$$

где $f'(x_j)$ — производная от $f(x)$, вычисляемая в каждой точке x_j вдоль данной траектории. Соответствующий показатель Ляпунова легко находится по аналогии с (4.5.3):

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[\prod_{j=1}^N f'(x_j) \delta x_0 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \ln |f'(x_j)|. \quad (4.5.8)$$

Показатель σ не зависит от начальной точки x_0 (кроме множества меры ноль начальных условий). Читателю, вероятно, не составит труда проверить для случая $f(x) = x^2$, что $\sigma = \ln 2$.

В случае многомерных отображений

$$x_{i+1} = F(x_i),$$

где x и F — n -мерные векторы, имеется набор из n характеристических показателей, соответствующих n собственным значениям соответствующего касательного отображения. Вводя в рассмотрение собственные значения $\lambda_i(N)$, $i = 1, \dots, n$ матрицы

$$(TM)_N = (M(x_N)M(x_{N-1}) \dots M(x_1))^{1/N}, \quad (4.5.9)$$

где $M(x_i)$ — линеаризация F в точке x_i , показатели можно определить в виде

$$\sigma_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |\lambda_i(N)|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5.10)$$

Должно быть понятно, что в случае сохраняющих площадь отображений и гамильтоновых потоков сумма показателей должна равняться нулю, что гарантирует сохранение фазового объема.

Теперь вернемся к случаю потоков, описываемых уравнениями (4.5.1), и запишем (4.5.2) в векторном виде:

$$\frac{d}{dt} \delta z = M \delta z, \quad (4.5.11)$$

где $\delta z = (\delta x_1, \dots, \delta x_n)$ и M — линеаризованная матрица с элементами $(M)_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{x=x(t)}$. Должен существовать такой набор базисных векторов $\hat{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$),

что $\delta z = \sum_{i=1}^n a_i \hat{e}_i$. Скорости растяжения (или сжатия) в каждом из направлений $\hat{e}_i$

задают набор показателей σ_i ($i = 1, \dots, n$), которые могут быть упорядочены так же, как в (4.5.5). Понятно, что с течением времени малый элемент объема будет в наибольшей степени растянут в том направлении $\hat{e}_i$, которому соответствует наибольший показатель. В конкретном случае (4.5.4) будет давать именно это значение показателя (σ_1 , согласно (4.5.5)). В случае гамильтоновых систем с n степенями свободы вектор δz становится $2n$ -мерным $\delta z = (\delta q_1, \dots, \delta q_n, \delta p_1, \dots, \delta p_n)$, и, соответственно, показателей будет $2n$ штук. Но при этом они обладают определенной симметрией, а именно

$$\sigma_i = -\sigma_{2n-i+1}. \quad (4.5.12)$$

То есть любое растяжение в одном «направлении» компенсируется сжатием в другом, что и обеспечивает выполнение теоремы Лиувилля. Если же показатели вычисляются на заданной энергетической поверхности, то пространство имеет размерность $(2n - 1)$. При этом из (4.5.12) следует, что два (или более, в зависимости от динамики) показателя σ_i должны равняться нулю.

Расчет показателей в случае n -мерных потоков (в отличие от отображений) нетривиален. Рассмотрим, например, вычисления в соответствии с определением (4.5.4). Если норма $d(t)$ возрастает экспоненциально, возникает опасность переполнения компьютера и связанных с этим ошибок. Чтобы избежать этого, можно использовать схему, предложенную Бенеттин с соавт. [19]. Исходная норма $d(0)$ в этом методе нормируется на единицу, и производится расчет разбегания за некоторый период времени τ , после чего норма вновь перенормируется на единицу.

Таким образом (см. рис. 4.24) вычисляется последовательность величин

$$d_j = \|\delta \mathbf{x}^{(j-1)}(\tau)\|. \quad (4.5.13)$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму и

$$\delta \mathbf{x}^{(j)}(0) = \frac{\delta \mathbf{x}^{(j-1)}(\tau)}{d_j}, \quad (4.5.14)$$

где $\delta \mathbf{x}^{(j)}(\tau)$ рассчитывается из (4.5.2) с начальными значениями $\delta \mathbf{x}^{(j)}(0)$ вдоль базовой траектории $\bar{\mathbf{x}}$ от $\bar{\mathbf{x}}(j\tau)$ до $\bar{\mathbf{x}}((j+1)\tau)$. По аналогии с (4.5.4) можно определить

$$\sigma_N = \frac{1}{N\tau} \sum_{j=1}^N \ln d_j. \quad (4.5.15)$$

Более того, для не слишком больших τ можно показать, что предел $N \rightarrow \infty$ существует и не зависит от τ . Действительно, может быть показано, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \sigma_1, \quad (4.5.16)$$

где σ_1 — наибольший показатель из набора (4.5.5). Расчет полного спектра показателей Ляпунова $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ требует более изощренных методов; обсуждение этого важного вопроса лучше оставить специалистам (см. [20]).

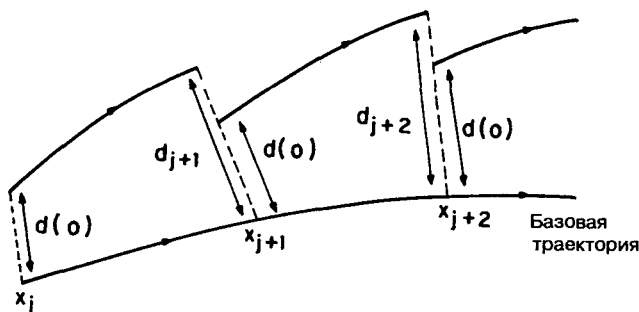


Рис. 4.24. Расчет наибольшего показателя Ляпунова. В конце каждого периода расстояние от базовой траектории вновь приводится к $d(0)$

Существует величина, так называемая *энтропия Колмогорова* (*КС-энтропия*³⁾), которая связана с показателями Ляпунова, но гораздо труднее вычисляется на практике. Формально она определяется по аналогии с энтропией в статистической механике (т.е. учитывает разбиения фазового пространства и т.д.) и служит мерой количества информации, потерянной или приобретенной системой в ходе эволюции. Замечательный результат Песина [21] дает возможность рассчитывать энтропию Колмогорова, исходя из показателей Ляпунова посредством соотношения

$$h_k = \int_P \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i d\mu,$$

³⁾ По именам Колмогорова [31], Крылова [32] и Синая [33, 34]. — Прим. ред.

которое представляет собой сумму всех положительных показателей Ляпунова, усредненную по некоторой (связной) области фазового пространства P с мерой $d\mu$. Очень ясное введение в круг этих идей, включающее расчет h_k для системы Хенона—Хейлеса, было дано Бенеттин с соавторами [19].

4.5.6. Спектры мощности

Другой полезной характеристикой траекторий служит их преобразование Фурье или спектр мощности. Действительно, во многих экспериментах (например, в гидродинамике) данные часто регистрируются в виде преобразования Фурье, а не в виде обычного временного (или пространственного) сигнала.

Рассмотрим вначале случай регулярного движения. Поскольку траектории ограничены торами, они могут быть представлены в стандартном виде

$$q(t) = \sum_m q_m e^{im \cdot (\omega t + \delta)}, \quad (4.5.17)$$

где q_m — вектор коэффициентов Фурье, связанных с переменными $q = (q_1, \dots, q_n)$, а $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — частоты соответствующего тора. Понятно, что преобразование Фурье для (4.5.17) будет представлять собой набор δ -функций от фундаментальных частот ω и различных обертонов. *Спектр мощности*, строго говоря, определяется как преобразование Фурье корреляционной функции от определенной переменной, скажем q_i :

$$C(t) = \langle q_i(0)q_i(t) \rangle, \quad (4.5.18)$$

где $\langle \rangle$ означает некоторое усреднение по ансамблю. Спектр мощности, таким образом, представляется в виде

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.5.19)$$

Полученный результат является частным случаем теоремы Винера—Хинчина.

В качестве ансамбля в случае регулярного движения естественно выбрать соответствующий тор. Поскольку он покрыт однопараметрическим (начальная фаза δ) семейством траекторий, среднее по ансамблю совпадает с (фазовым) средним по всем δ . В этом случае легко показать, что

$$C(t) = \sum_m |q_m^{(i)}|^2 e^{im \cdot \omega t} \quad (4.5.20)$$

и, следовательно,

$$I(\omega) = \sum_m |q_m^{(i)}|^2 \delta(m \cdot \omega - \omega), \quad (4.5.21)$$

где $q_m^{(i)}$ — коэффициенты Фурье, связанные с переменной q_i . Более того, в случае торов с несопоставимыми частотами, поток на торе эргодичен. Поэтому фазовое среднее совпадает со средним по времени, и $I(\omega)$ можно рассчитать, используя единственную траекторию:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T q_i(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (4.5.22)$$

(определенная таким образом величина $I(\omega)$) представляет собой по сути спектральную линейную функцию, часто используемую в спектроскопии).

На практике временные ряды ограничены конечными интервалами времени, и спектр в на самом деле представляет собой свертку действительного движения и функции вида $h(t) = 1, -T \leq t \leq T$. Рассмотрим, например, простой случай периодического движения,

$$q(t) = Ae^{-i\Omega t}. \quad (4.5.23)$$

Используя (4.5.22), легко показать, что

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|A|^2}{\pi} \frac{\sin^2(\omega - \Omega)T}{(\omega - \Omega)^2 T}. \quad (4.5.24)$$

В случае конечных T имеется максимум при $\omega = \Omega$ и ряд симметричных затухающих боковых полос. В пределе $T \rightarrow \infty$ (4.5.24) обращается, как и следовало ожидать, в δ -функцию при $\omega = \Omega$.

В хаотическом режиме сохраняется возможность рассчитывать $I(\omega)$, используя единственную траекторию, следуя (4.5.22). (Строго говоря, эта величина уже не будет линейной спектральной функцией, поскольку не ясно, что служит ансамблем в (4.5.18).) Спектр нерегулярной траектории оказывается намного сложнее, чем спектр регулярной. Как правило, наблюдается несколько основных пиков, окруженных «густой травой» (рис. 4.25). Основываясь лишь на численных расчетах, трудно сказать, является

ли эта «травянистая» область спектра действительно непрерывной, когда речь идет о нерегулярных траекториях общих гамильтоновых систем. Тем не менее, различие спектров регулярного и нерегулярного движения, как правило, весьма существенно и дает полезное представление о динамических системах. Действительно, существует ряд важных строгих результатов, из которых следует, что система, если она «эргодична», будет иметь дискретный спектр. А для того, чтобы иметь непрерывный спектр, она должна быть «смешанной». (Мы обсудим это вкратце в разделе 4.7.)

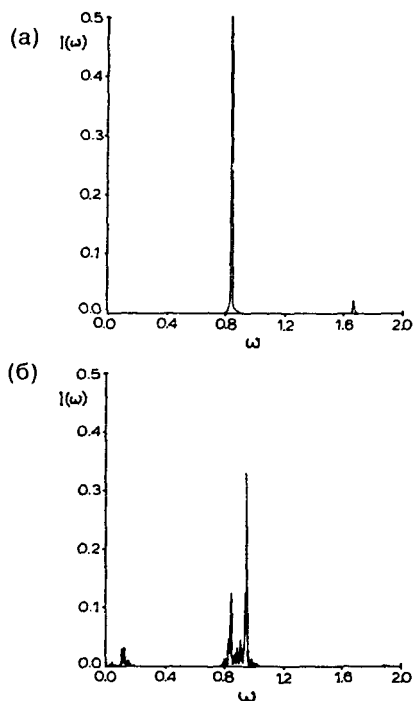


Рис. 4.25. Эргодический спектр (величины $(x(t) + y(t))$) для отдельных траекторий системы Хенона—Хейлеса при $E = 1/8$: (а) регулярная траектория; (б) нерегулярная траектория

4.6. Критерии возникновения глобального хаоса

До сих пор при обсуждении хаоса мы интересовались его локальными особенностями, сосредоточив внимание на хаотическом поведении отдельных траекторий, а также на способах их идентификации и количественного описания поведения. Не меньший интерес, очевидно, могут представлять способы, позволяющие оценить, когда — в зависимости от энергии или какого-либо другого нелинейного

параметра связи — целая группа траекторий становится хаотической. Такую ситуацию мы будем называть «глобальный»⁴⁾ хаосом — хотя необходимо сразу же оговориться, что во всех описываемых методах понятие «глобальный» в известной степени субъективно и ему едва ли может быть сопоставлена точная количественная мера. Вместе с тем, оценка момента возникновения глобального хаоса представляет наибольший интерес. Так, при описании мономолекулярных реакций разложения эта оценка может использоваться для обоснования большей справедливости статистических теорий по сравнению с динамическими. В других ситуациях оценка этого момента может указать, когда необходимо переходить к описанию в терминах процессов переноса. В этом разделе мы кратко опишем два таких метода. Первый из них — метод *перекрывтия резонансов* Чирикова [22] — позволяет давать грубую аналитическую оценку момента возникновения глобального хаоса. Вторым методом разработан Гринем [24] и позволяет предсказывать разрушение отдельных торов. Более подробный обзор этих и других методов можно найти в других источниках [6, 26].

4.6.a. Метод перекрывтия резонансов

Для того, чтобы понять метод Чирикова, необходимо прежде пояснить, что подразумевается под резонансом. Рассмотрим некоторый интегрируемый гамильтониан H_0 с n степенями свободы, возмущенный некоторым гамильтонианом H_1 :

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}), \quad (4.6.1)$$

где $\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}$ — n -компонентные вектора переменных действие—угол. Как обычно, представим H_1 в виде ряда Фурье по угловой переменной:

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon \sum_{\mathbf{m}} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.6.2)$$

где $H_{\mathbf{m}}(\mathbf{I})$ — коэффициенты Фурье и $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$. Уравнения для невозмущенных переменных имеют, разумеется, вид

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= I_j(0), \\ \dot{\theta}_j &= \omega_j(\mathbf{I})t + \theta_j(0), \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

где $\omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}$ а $I_j(0)$ и $\theta_j(0)$ — начальные значения. Рассмотрим теперь ситуацию, когда H_0 возмущен только одним членом суммы Фурье:

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.6.4)$$

В этом случае возмущенные переменные удовлетворяют уравнениям движения

$$\dot{I}_j = -i\varepsilon m_j H_{\mathbf{m}}(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.6.5a)$$

$$\dot{\theta}_j = \omega_j(\mathbf{I}) + \varepsilon H'_{j\mathbf{m}}(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.6.5b)$$

где $'$ означает дифференцирование по I_j . Если ограничиться первым порядком по ε , уравнения (4.6.5) могут быть проинтегрированы просто путем соответствующей подстановки невозмущенного решения (4.6.3); в этом случае (4.6.5a) дает

$$I_j \simeq I_j(0) - \frac{\varepsilon m_j H_{\mathbf{m}}(I(0)) e^{i(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta})t + i\delta}}{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}}, \quad (4.6.6)$$

⁴⁾ Автор использует термин *widespread chaos*. — Прим. ред.

где δ — фазовый фактор. Понятно, что такое приближение нарушается при $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{I}) \leq \epsilon$. Это и есть *резонанс*, и читатель может видеть, что по сути он совпадает с эффектом, порождаемым малыми знаменателями, обсуждавшимися в главе 3. На самом деле мы уже сталкивались с примером резонанса уже в главе 1 в случае вынужденного линейного осциллятора (1.6.4), знаменатель решения которого пропорционален $\omega^2 - \Omega^2$ (1.6.5), где ω — собственная частота, а Ω — внешняя вынуждающая частота. В случае единственного возмущающего члена (уравнение (4.6.4)) такой резонанс не вызывает особых затруднений и может быть устранен с помощью подходящего канонического преобразования как описано ниже. Действительно, система (4.6.4) остается полностью интегрируемой, поскольку можно построить новый интеграл движения вида

$$F = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{I}, \quad (4.6.7)$$

где $\hat{\mathbf{m}}$ — вектор, ортогональный к $\mathbf{m}$ (т. е. $\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{m}} = 0$). Это легко проверить, вычислив скобки Пуассона для F и H :

$$[F, H] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial I_j} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \frac{\partial F}{\partial I_j} \right) = -i\epsilon \sum_{j=1}^n \hat{m}_j m_j H_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (4.6.8)$$

Таким образом, изолированные резонансы хотя и могут вызывать значительное искажение торов, расположенных в их окрестности, не приносят в систему никакого хаоса. Но одновременное присутствие двух или более резонансов делает систему неинтегрируемой. Более того, если резонансы расположены достаточно близко друг к другу, это приводит, как будет сейчас показано, к возникновению глобального хаоса.

Метод резонансов прекрасно проиллюстрировали Уолкер и Форд [27]. Выбрав интегрируемый гамильтониан

$$H_0(I_1, I_2) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2 \quad (4.6.9)$$

и добавив к нему 2 : 2 резонанс и 3 : 2 резонанс:

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + \beta I_1^{3/2} I_2 \cos(2\theta_1 - 3\theta_2), \quad (4.6.10)$$

они изучили влияние этих резонансов на систему. Влияние каждого из резонансов в отдельности, а также их совместное влияние представлены на рис. 4.26. При низких значениях энергии две резонансные зоны четко разделены. С ростом энергии системы эти две зоны перекрываются и возникают «макроскопические зоны неустойчивости». Под этим термином Уолкер и Форд понимают просто ясно наблюдаемое на поверхности сечения рассеяние точек. Размер такой зоны возрастает с ростом энергии. Структура усложняется еще больше с появлением «вторичных» резонансных зон по мере сближения двух основных зон. Авторы сумели посредством численных расчетов предсказать значение энергии, при котором происходит первое перекрывание резонансов, т. е. (успешно) предсказать возникновение глобального хаотического движения. Это позволяет предположить, что перекрывание резонансов играет ключевую роль в возникновении такого движения. С началом перекрывания основных зон в процесс вовлекается также множество резонансов более высокого порядка, и это в определенной мере дает уверенность в том, что в достаточно больших областях фазового пространства торы (в подавляющем большинстве) разрушаются и что возникающий хаос действительно «глобальный», так как траектории получают возможность блуждать между областями, которые раньше были разделены нерезонансными торами.

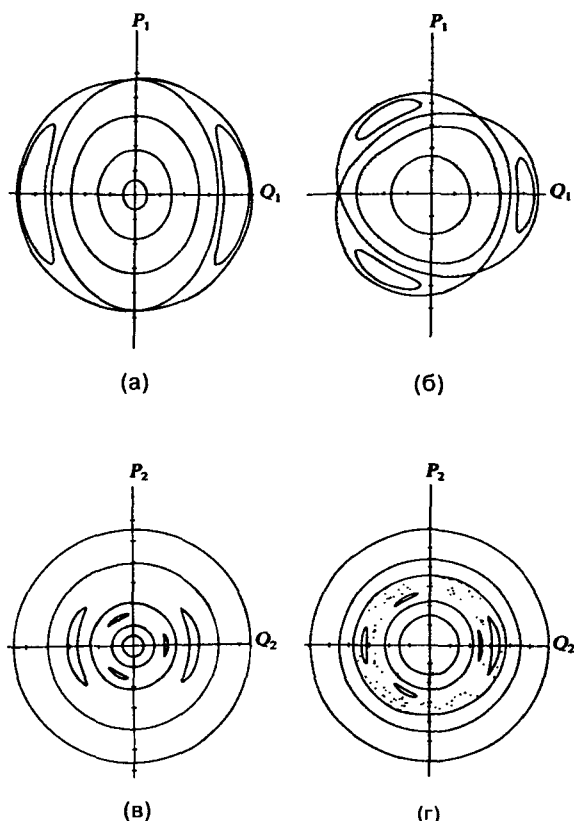


Рис. 4.26. Поверхность сечения резонансного гамильтониана (4.6.10): (а) в присутствии только 2 : 2 резонанса ($\beta = 0$); (б) в присутствии только 2 : 3 резонанса ($\alpha = 0$); (в) оба резонанса присутствуют ($\alpha = \beta = 0.02$), но при $E = 0.18$ значительно разделены; (г) две резонансные зоны перекрываются при $E = 0.2905$; случайно разбросанные точки образуют траекторию, начинающейся в области перекрывания резонансов. (Воспроизведено, с разрешения, из [27])

Метод, позволяющий приближенно предсказывать начало перекрывания резонансов, был предложен Чириковым [22]. Наилучшие результаты этот метод дает в случае вынужденных одномерных осцилляторов. Модель вынужденного одномерного осциллятора оказывается чрезвычайно полезной при разработке ускорителей, а также при изучении молекулярных связей и атомов в различных полях. Мы рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор (например, $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \frac{1}{2}q^4)$), возмущенный внешней периодической силой (например, $V = q \cos(\phi)$), где $\phi = \Omega t + \phi_0$ — фаза этой силы. Так как невозмущенная система одномерна, ее всегда можно разрешить в переменных действие — угол (I, θ); и мы можем любое (в пределах разумного) внешнее поле представить в виде ряда Фурье по этим переменным:

$$H = H_0(I) + \varepsilon \sum_{m,n} V_{mn}(I) \exp \{i(m\theta + n\phi)\}. \quad (4.6.11)$$

Мы знаем, что в случае линейной системы совпадение внешней частоты Ω с частотой осциллятора ω приводит к тому, что движение носит «взрывной» характер.

В нелинейном случае в окрестности $\Omega = \omega$ также имеется резонанс. Однако, как было показано в главе 1, с ростом амплитуды осциллятора изменяется и зависящая от энергии частота, в результате система выходит из резонанса. В рассматриваемом случае частота осциллятора определяется обычным уравнением $\omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$, и резонанс существует при таких значениях $I = I_r$, для которых

$$\frac{\omega(I_r)}{\Omega} = \frac{k}{l}. \quad (4.6.12)$$

В этом случае соответствующая фаза (и ее гармоники) $l\theta - k\phi$ изменяется медленно по сравнению с другими членами ряда (4.6.11). В силу нелинейности H_0 должны существовать и другие резонансы при других значениях I_r , и, вообще говоря, множество резонансов всюду плотно. Но для простоты мы начнем с рассмотрения изолированного резонанса (4.6.12) и проанализируем поведение гамильтониана в его окрестности. Попытаемся свести (4.6.11) к более простому виду, из которого можно было бы оценить «ширину резонанса».

Вспоминая изучение канонических преобразований в главе 2, введем производящую функцию

$$F = F(J, \theta, \phi) = (l\theta - k\phi)J + \theta I_r, \quad (4.6.13)$$

где J — новый импульс, а член θI_r обеспечивает, как мы увидим ниже, подходящий сдвиг начала отсчета новой переменной действия J . Производящая функция приводит к соотношениям

$$I = \frac{\partial F}{\partial \theta} = lJ + I_r \quad (4.6.14)$$

и

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial J} = l\theta - k\phi, \quad (4.6.15)$$

где ψ — новая «резонансная» фаза, сопряженная с новым импульсом J . Нам понадобится также производная от F по времени,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -k\Omega J. \quad (4.6.16)$$

Каноническое преобразование гамильтониана к новым переменным дает

$$H = H_0(J) + \varepsilon \sum_{m,n} V_{mn}(J) \exp \left[i \frac{1}{l} \{ m\psi + (km + nl)\phi \} \right] - k\Omega J. \quad (4.6.17)$$

Преобразованный гамильтониан имеет практически такой же вид, как исходный (4.6.11). Но в результате этого преобразования наблюдатель как бы помещается во вращающуюся систему, в которой скорость изменения новой фазы определяет медленное отклонение от резонанса. Хотя неравенство $\dot{\psi} \ll \dot{\phi}$ не обязательно справедливо, мы предположим, что оно выполняется в окрестности резонанса и, следовательно, одному полному циклу по ψ соответствует много циклов по ϕ . В среднем вклад этих быстро осциллирующих членов равен нулю, и это подводит нас к следующему шагу, состоящему в усреднении гамильтониана по быстрым фазовым переменным:

$$\bar{H}(J, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(J, \psi, \phi) d\phi. \quad (4.6.18)$$

В результате «усредненный» гамильтониан $\bar{H}$ приобретает вид

$$\bar{H} = H_0(J) + \varepsilon \sum_p V_{pl, -pk} \cos(p\psi) - k\Omega J, \quad (4.6.19)$$

где мы перешли к действительным числам (полагая $V_{-l, k} = V_{l, -k}$ и $V_{00} = 0$, а также включив множитель 2 в коэффициенты Фурье $V_{pl, -pk}$). До сих пор мы рассматривали все гармоники, но с этого момента предположим, что

$$V_{pl, -pk} \ll V_{l, -k} \quad \text{при} \quad p = 2, 3, \dots \quad (4.6.20)$$

При этом (4.6.19) сводится к

$$\bar{H} = H_0(J) + \varepsilon V_{l, -k} \cos \psi - k\Omega J. \quad (4.6.21)$$

Последний шаг заключается в следующем. Считать, что в области резонанса (4.6.12) $\psi \ll \varphi$, разлагаем (4.6.21) в окрестности $I = I_r$ в ряд, ограничиваясь членами второго порядка (при этом предполагается, что коэффициент $V_{l, -k}(J)$ медленно меняющаяся функция I). Таким образом получаем

$$\bar{H} = H_0(I_r) + lJ \left(\frac{\partial H_0}{\partial I} \right)_{I=I_r} + l^2 \frac{J^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right)_{I=I_r} + \varepsilon V_{l, -k}(I_r) \cos \psi - k\Omega J. \quad (4.6.22)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial H_0}{\partial I} \right)_{I=I_r} = \omega(I_r)$, условие резонанса (4.6.12) приводит к значительному упрощению за счет уничтожения линейных по J членов. Опуская постоянный член $H_0(I_r)$, остается «резонансный» гамильтониан

$$H_r = \frac{J^2}{2M} + \varepsilon V_{l, -k} \cos \psi, \quad (4.6.23)$$

где «масса» M определяется соотношением

$$M^{-1} = l^2 \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right)_{I=I_r}. \quad (4.6.24)$$

«Резонансный» гамильтониан (4.6.23) по форме в точности совпадает с гамильтонианом маятника, сепаратриса которого (см. рис. 4.27) определяется уравнением

$$J_{sx} = \pm \sqrt{4M\varepsilon V_{l, -k}} \cos \left(\frac{\psi}{2} \right). \quad (4.6.25)$$

В старых переменных (I, θ) оно имеет простой вид

$$I_{sx} = I_r \pm (\Delta I_r) \cos \left(\frac{l\theta - k\phi}{2} \right), \quad (4.6.26)$$

где

$$(\Delta I_r) = 2l\sqrt{\varepsilon M V_{l, -k}}. \quad (4.6.27)$$

Величина (ΔI_r) представляет собой резонансную «полуширину», которая также может быть выражена через частоту:

$$(\Delta \omega_r) = \frac{\partial \omega}{\partial I} (\Delta I_r) = \frac{1}{l^2 M} 2l\sqrt{\varepsilon M V_{l, -k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon V_{l, -k}}{M}}. \quad (4.6.28)$$

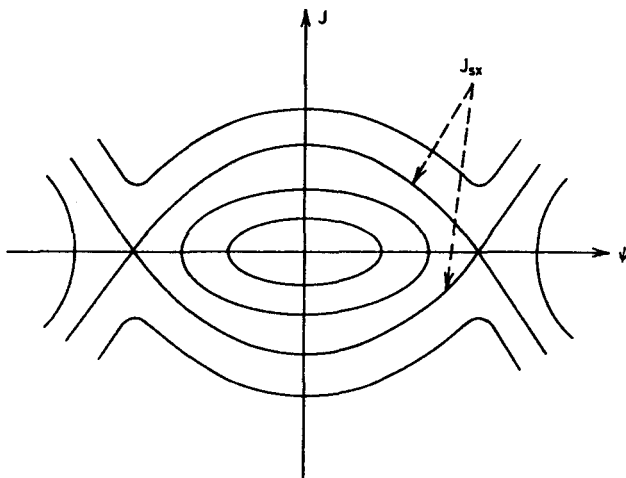


Рис. 4.27. Фазовая плоскость гамильтониана маятника (4.6.23); показана сепаратриса

Заметим, что поскольку $M^{-1} = I^2 \frac{\partial \omega}{\partial I}$, зависимость резонансной полуширины от величины резонанса содержится лишь в коэффициентах Фурье $V_{l,-k}$. Из (4.6.27) и (4.6.28) видно, что резонансное возмущение имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$.

Важно подчеркнуть, что вывод резонансного гамильтониана (4.6.23) связан с несколькими допущениями. Нерезонансные члены в H опущены на основании того, что они быстро осциллируют, и, следовательно, при усреднении по полному циклу движения дают ноль. Предположение $V_{l,-k} \ll V_{pl,-pk}$ позволило пренебречь резонансными гармониками; кроме того, были опущены члены высших порядков в разложении по I_r . Чириков [22] предложил объединить эти предположения в «условие умеренной нелинейности»,

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \frac{1}{\varepsilon}, \quad (4.6.29)$$

где $\alpha = \frac{I}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial I}$. Дальнейшее обсуждение этого условия можно найти в [22].

Резонансный гамильтониан (4.6.23) все еще остается интегрируемым, поскольку состоит из единственного изолированного резонанса. «Критерий перекрытия резонансов» Чирикова получается в результате оценивания ширины другого (основного) резонанса и, затем, отыскания такого значения константы связи ε , при которой оба резонанса соприкоснутся друг с другом; т. е. мы ищем такое ε , что

$$(\Delta\omega_r)_1 + (\Delta\omega_r)_2 = \Delta\Omega, \quad (4.6.30)$$

где $(\Delta\omega_r)_1$ и $(\Delta\omega_r)_2$ — ширины двух резонансов, а $\Delta\Omega$ — расстояние между ними. Ширина каждой из резонансных зон вычисляется независимо от всех остальных. Понятно, что это является основным приближением, и остается надеяться, что «условие умеренной нелинейности» (4.6.29) обеспечивает приемлемость ошибки.

Чириков [22] проверил свой метод для ряда простых систем. Особый интерес представляет система с модельным гамильтонианом

$$H(I, \theta, t) = \frac{I^2}{2} + K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt). \quad (4.6.31)$$

С физической точки зрения она представляет собой ротор (единичной массы), на который действует бесконечная последовательность резонансов или, если представить (4.6.31) в эквивалентном виде

$$H(I, \theta, t) = \frac{I^2}{2} + 2\pi K \cos \theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi m - t), \quad (4.6.32)$$

маятник, подверженный серии «толчков» в моменты времени $t = 2\pi m$. Читатель может убедиться, что интегрирование уравнений Гамильтона дает в случае одного периода в точности «стандартное отображение» (4.2.26), где $p \equiv I$, $q \equiv \theta$ и $k = K/(2\pi)^2$. Каждый член в последовательности резонансов непосредственно дает резонансный гамильтониан (ср. (4.6.23)):

$$\bar{H}^{(n)} = \frac{I^2}{2} + K \cos \psi_n, \quad (4.6.33)$$

где ψ_n — медленно меняющаяся фаза ($\theta - nt$). Резонансную полуширину можно получить, исходя непосредственно из (4.6.28):

$$(\Delta\omega_r)_n = 2\sqrt{K}. \quad (4.6.34)$$

Резонансы возникают при каждом целочисленном значении $\omega = I = I_r = n$ (схематически это показано на рис. 4.28). Расстояние между резонансами равно единице ($\Delta\Omega = I_r^{(n+1)} - I_r^{(n)} = (n+1) - n = 1$), и они начинают соприкасаться при

$$(\Delta\omega_r) = \frac{\Delta\Omega}{2} = \frac{1}{2}. \quad (4.6.35)$$

Это позволяет предсказать критическое значение параметра возмущения K , при котором происходит перекрывание резонансов; с учетом

$$(\Delta\omega_r) = 2\sqrt{K} = \frac{1}{2} \quad (4.6.36)$$

получаем

$$K_{\text{крит}} = \frac{1}{16}. \quad (4.6.37)$$

Численный анализ этой системы показывает, что глобальный хаос возникает при $K \simeq \frac{1}{40}$; критерий перекрывания, таким образом, дает ошибку примерно в 2,5 раза. Дальнейшее уточнение, как, например, учет высших гармоник резонансных фаз, позволяет улучшить оценку: $K \simeq \frac{1}{30}$.

Метод Чирикова стимулировал значительную активность исследователей, в результате чего появились его уточненные версии (учитывающие, например, влияние «вторичных» резонансов), которые позволили гораздо точнее предсказывать возникновение глобального хаоса. Метод также применим к автономным системам с большим числом степеней свободы («наибольшую строгость» теория имеет в случае систем с одной степенью свободы в поле внешней силы). Основные идеи при этом сохраняются, но анализ становится более сложным. Дальнейшую информацию по этому вопросу заинтересованный читатель может найти в других источниках.

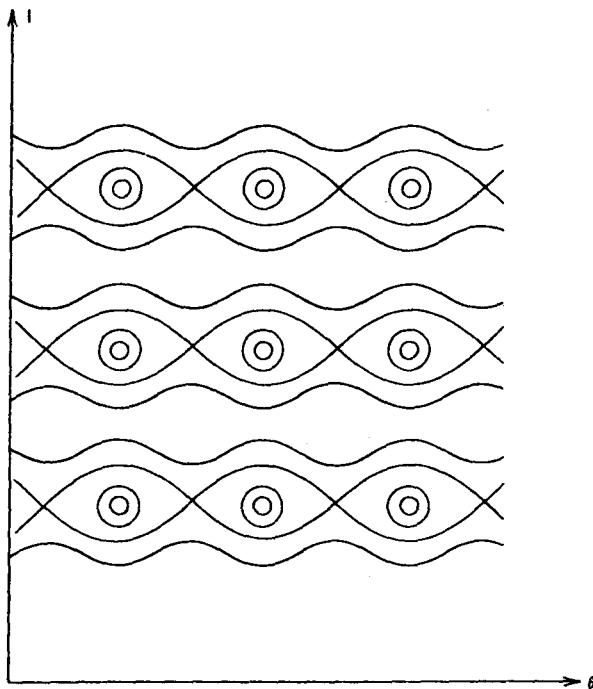


Рис. 4.28. Резонансы в фазовой плоскости гамильтониана (4.6.32) маятника, подверженного толчкам

4.6.6. Метод Грина

Перейдем к обсуждению (хотя и очень краткому) важного метода, развитого Гринем [24], который позволяет предсказывать возникновение хаотического движения, основываясь на анализе устойчивости замкнутых траекторий. В основе метода лежит гипотеза о том, что «размывание» инвариантной кривой (тора) может быть связано с внезапной потерей устойчивости соседними замкнутыми траекториями. Чтобы представить себе это более подробно, рассмотрим слабо возмущенную интегрируемую систему. В соответствии с КАМ-теоремой сохраняются инвариантные кривые с «достаточно» иррациональным числом вращения. Соседние рациональные (и близкие к рациональным) кривые разрушаются таким образом, как мы ранее описывали (теорема Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке): в одинаковом числе эллиптических (устойчивых) и гиперболических (неустойчивых) неподвижных точек. Метод Грина основан на наблюдении, что, когда возмущение становится достаточно сильным (или энергия достаточно велика), устойчивые неподвижные точки также превращаются в неустойчивые («гиперболические-с-отражением») неподвижные точки. Такой переход и сигнализирует о «размывании» инвариантной кривой, расположенной «близко» к множеству неподвижных точек, потерявших устойчивость. Вернемся к обсуждению КАМ-теоремы в главе 3; вполне удовлетворительный способ оценить близость замкнутой траектории к данной инвариантной кривой состоит в том, чтобы выразить число вращения этой кривой в виде цепной дроби

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (4.6.38)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots$ — положительные целые числа. При этом последовательные усечения такой дроби, представляющей иррациональное число вращения, дают числа вращения замкнутых траекторий, все более «близких» к выбранной инвариантной кривой. Анализируя устойчивость такой последовательности замкнутых траекторий по мере их «приближения» к инвариантной кривой, Грин [24] сумел предсказать разрушение этой кривой.

Обсуждаемый метод включает два существенных этапа: (1) отыскание замкнутых траекторий и (2) определение их устойчивости. Подробное обсуждение первого вопроса выходит за рамки этой главы. Достаточно сказать, что имеется целый ряд хорошо разработанных и эффективных методов отыскания замкнутых траекторий с любой требуемой топологией (числами вращения). Упомянем, в частности, подход, описанный Грином [24], и метод, разработанный Хеллеманом и Бунтисом [25]. Анализ устойчивости мы рассмотрим на примере, подробно изученном Грином, а именно, на примере «стандартного отображения» (на единичном торе):

$$I_{n+1} = I_n + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n, \quad \text{mod } I = 1, \quad (4.6.39a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod } \theta = 1. \quad (4.6.39б)$$

Параметр k можно рассматривать как параметр возмущения; при $k = 0$ отображение становится тривиальным:

$$I_{n+1} = I_n, \quad (4.6.40a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}. \quad (4.6.40б)$$

При этом оно, очевидно, «интегрируемо», поскольку все траектории лежат на прямой. Они же являются инвариантными кривыми невозмущенного отображения. Возвращаясь к рис. 4.11, на котором представлено стандартное отображение, рассчитанное при $k = 0.97$, мы видим несколько сильно нерегулярных траекторий, заполняющих значительные области фазовой плоскости, а также типичную структуру из чередующихся гиперболических и эллиптических неподвижных точек. Заметим, что существуют также инвариантные кривые, разделяющие фазовое пространство и тем самым не позволяющие траектории блуждать по всему фазовому пространству. До тех пор, пока эти кривые не разрушатся, «хаос», очевидно, не будет действительно глобальным.

Для определения устойчивости данной замкнутой траектории необходимо построить касательное отображение. Это соответствует линейаризации отображения каждой итерации. Определив переменные «касательного пространства» $(\delta I, \delta\theta)$, получаем касательное отображение

$$\begin{bmatrix} \delta I_{n+1} \\ \delta\theta_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \delta I_n \\ \delta\theta_n \end{bmatrix}, \quad (4.6.41a)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -k \cos 2\pi\theta_n \\ 1 & 1 - k \cos 2\pi\theta_n \end{bmatrix}. \quad (4.6.41б)$$

Касательное отображение относится к сохраняющим площадь, так как

$$\det |M| = 1. \quad (4.6.42)$$

Для траектории, замыкающейся после Q итераций этого отображения, собственные значения $\lambda_{\pm}$ матрицы 2×2

$$M^{(Q)} = \prod_{n=1}^Q \begin{bmatrix} 1 & -k \cos 2\pi\theta_n \\ 1 & 1 - k \cos 2\pi\theta_n \end{bmatrix} \quad (4.6.43)$$

задают индексы устойчивости, или множители Флоке. Обозначая элементы матрицы $M^{(Q)}$ через $M_{ij}^{(Q)}$, получаем в явном виде

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (M_{11}^{(Q)} + M_{22}^{(Q)}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_{11}^{(Q)} + M_{22}^{(Q)})^2 - 4}, \quad (4.6.44)$$

где мы использовали условие (4.6.42):

$$M_{11}^{(Q)} M_{22}^{(Q)} - M_{12}^{(Q)} M_{21}^{(Q)} = 1. \quad (4.6.45)$$

Ранее было показано, что в случае комплексных собственных значений траектории устойчивы, тогда как в случае действительных — неустойчивы. Грин [24] ввел величину, называемую *вычетом*, которая определяется следующим образом:

$$R = \frac{1}{4} (2 - \text{Tr} (M^{(Q)})), \quad (4.6.46)$$

где Tr обозначает след матрицы.

Из (4.6.44) следует, что при $0 < R < 1$ собственные значения мнимые и, следовательно, траектория устойчива, т. е. неподвижные точки являются эллиптическими. При $R < 0$ или $R > 1$ собственные значения действительны, и, следовательно, траектория неустойчива. При этом случаю $R < 0$ соответствуют гиперболические неподвижные точки, а случаю $R > 1$ — «гиперболические-с-отражением». (Для параболических неподвижных точек $R = 0$.) Можно показать, что для траектории «длины» Q вычет пропорционален k^Q как для больших, так и для малых k . (Напомним, что для рассматриваемой системы k — это параметр возмущения.) Такая экспоненциальная зависимость от Q устраняется путем введения величины, называемой *средним вычетом*,

$$f = \left(\frac{R}{\beta} \right)^{1/Q}, \quad (4.6.47)$$

где β — некоторая произвольная постоянная, задаваемая из соображений практического удобства. Теперь мы можем охарактеризовать устойчивость последовательности замкнутых траекторий, сходящихся к выбранной инвариантной кривой. Каждая последующая замкнутая траектория (определяемая последующим усечением цепной дроби, которая служит представлением числа вращений выбранной кривой) характеризуется большим значением Q , что соответствует возрастанию топологической сложности этой траектории. Замечательно, что при этом последовательность средних вычетов сходится, как оказалось, к некоторой конечной величине. Скорость сходимости определяется, по-видимому, значением β ; для рассматриваемой задачи было найдено оптимальное значение $\beta = 1/4$. Более подробное обсуждение этого вопроса читатель может найти в оригинальной работе Грина [24]. Показано (эмпирически), что, если последовательность средних вычетов сходится к величине, превосходящей

единицу (в предположении $\beta = 1$), то инвариантная кривая, связанная с данной последовательностью замкнутых траекторий, разрушается.

Этот критерий позволяет найти для любой инвариантной кривой значение параметра возмущения k , при котором она разрушается. В случае рассматриваемой системы метод дал очень точные результаты. В дополнение к этому Грин [24] предложил нестандартное обобщение своего метода для предсказания возникновения глобального хаоса. Оно основывается на предположении, что чем лучше иррациональная кривая может быть приближена последовательностью рациональных, тем меньшее возмущение (k) требуется для ее разрушения. Естественно предположить, что в последнюю очередь будет разрушена кривая, число вращения которой хуже всего приближается посредством последовательности рациональных чисел. Представление в виде цепной дроби для числа вращения такой инвариантной кривой имеет вид

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (4.6.48)$$

$$= \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

и представляет собой знаменитое «золотое сечение». Таким образом, когда k становится достаточно большим для того, чтобы разрушить эту инвариантную кривую, можно с достаточной уверенностью считать, что все остальные кривые за это время также разрушились. После этого ничто не препятствует нерегулярной траектории блуждать по всей фазовой плоскости — возникает глобальный хаос. Было найдено, что критическое значение k , при котором разрушается кривая, соответствующая золотому сечению, близко к единице. Это хорошо согласуется с наблюдаемым возникновением глобального хаоса.

4.7. Статистические понятия сильно хаотических систем

Мы уже несколько раз упоминали понятие эргодичности и в этом разделе обсудим его более подробно наряду с другими относящимися сюда понятиями, полезными для понимания свойств сильно хаотических систем. Прекрасное введение в круг этих идей было дано Лебовицем и Пенроузом [28], а также Заславским и Чириковым [29].

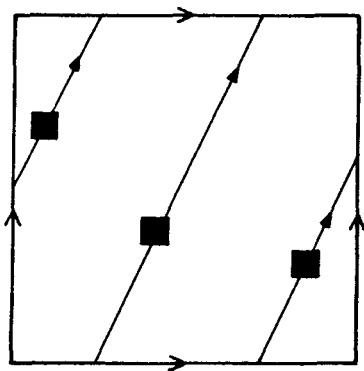
4.7.а. Эргодичность

Простой иллюстрацией эргодичности может служить рассмотренный в разделе 2.5 случай потока на торе с иррациональными частотами. Рассмотрим двумерный тор, поток для которого записывается в виде

$$\phi_1 = 2\pi\omega_1 t + \phi_1(0), \quad \text{mod } \phi_1 = 1, \quad (4.7.1a)$$

$$\phi_2 = 2\pi\omega_2 t + \phi_2(0), \quad \text{mod } \phi_2 = 1, \quad (4.7.1б)$$

где мы ввели переменные $\phi_i = \theta_i/(2\pi)$, имеющие период 1. Такой двумерный тор топологически эквивалентен единичному квадрату с отождествленными сторонами,



и легко показать (как это было сделано выше), что поток эргодичен — и, следовательно, среднее по времени совпадает с фазовым средним — если отношение ω_1/ω_2 иррационально. Заметим, что перемещение по тору малого по площади элемента представляет собой (безусловно) лишь его перенос, не сопровождающийся какими-либо искажениями (см. рис. 4.29). Этот пример показывает, что эргодичность не подразумевает хаотического поведения.

Рис. 4.29. Эргодичность на торе: перемещение по тору малого по площади элемента представляет собой параллельный перенос

4.7.6. Перемешивание

Хаотическое поведение связывается с экспоненциальным разбеганием соседних траекторий и, таким образом, с положительными показателями Ляпунова. В этом случае малый по площади элемент будет подвергаться значительным искажениям — что приводит к понятию *перемешивания*. Простой системой, для которой наблюдается перемешивание, является знаменитое отображение Арнольда (линейный автоморфизм единичного тора), которое представляет собой не что иное как линейное сохраняющее площадь преобразование T ,

$$T: \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mod } x = 1, \\ \text{mod } y = 1. \end{array} \quad (4.7.2)$$

Как видно из рис. 4.30, для значительного искажения элемента поверхности достаточно всего лишь двух итераций отображения. (4.7.2) отличается от (4.7.1) наличием компонента сдвига, что приводит в сочетании с периодичностью тора к растяжению и перемешиванию. В противоположность параллельному переносу по тору в случае (4.7.1) малый по площади элемент быстро превращается в длинную тонкую нить. Ясно, что перемешивание предполагает эргодичность, но эргодичность не предполагает перемешивания.

Собственные значения T легко могут быть вычислены и равны

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad (4.7.3)$$

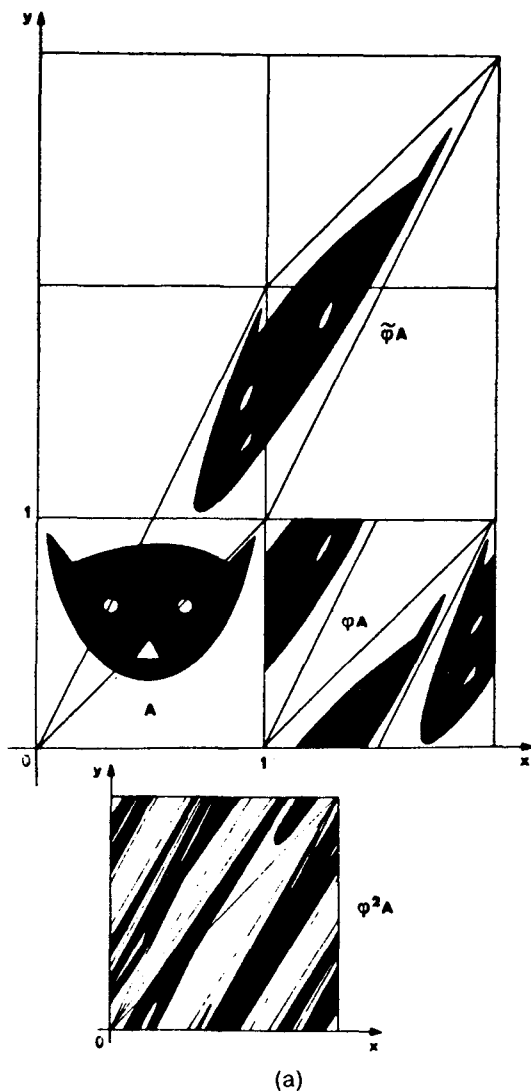
причем $\lambda_+ \lambda_- = 1$, так как преобразование сохраняет площадь. Два действительных собственных значения λ_+ и λ_- означают экспоненциальное растяжение и сжатие соответственно. Растяжение происходит в направлении собственного вектора

$$\xi_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.7.4a)$$

а сжатие — в направлении

$$\xi_- = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.7.4b)$$

В случае этого простого линейного отображения легко убедиться, что (положительный) показатель Ляпунова равен $\sigma = \ln [(3 + \sqrt{5})/2]$.



(a)

Рис. 4.30. (а) Две итерации отображения Арнольда. (Воспроизведено, с разрешения, из [1])

Отображение T^n имеет много неподвижных точек, определяемых уравнением

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \quad (4.7.5)$$

где k и l — целые числа, необходимые для того, чтобы итерации T^n не выходили ($\text{mod } 1$) за пределы единичного квадрата. Очевидно, что T имеет единственную неподвижную точку $(x, y) = (0, 0)$. Неподвижными точками T^2 являются $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ и $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ — все гиперболические, с собственными значениями $(\lambda_{\pm})^2 = (7 \pm 3\sqrt{5})$. Несложно также определить гомоклинные и гетероклинные точки

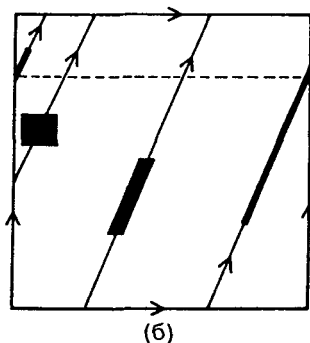


Рис. 4.30. (б) Перемешивание на торе: перемещающийся по тору малый по площади элемент претерпевает трансляцию и растяжение

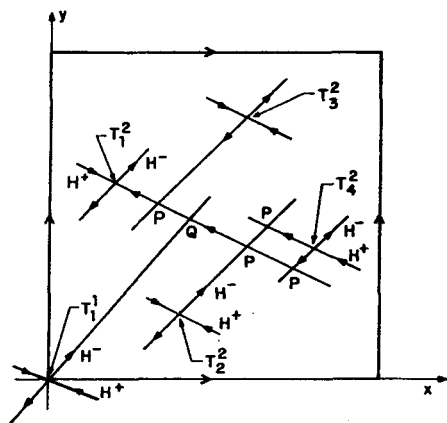


Рис. 4.31. Схематическое изображение гомоклинных (P) и гетероклинных (Q) точек отображения Арнольда. T_i^2 ($i = 1, \dots, 4$) — четыре неподвижных точки отображения T^2 ; T_1^1 — неподвижная точка отображения T . Гомоклинные точки P образованы пересечениями многообразий H^+ и H^- , относящихся к T_1^2 ; гетероклинные точки Q образованы пересечениями многообразия H^- , относящегося к T_1^1 , и многообразия H^+ , относящегося к T_1^2 .

4.7.в. Преобразование пекаря и системы Бернулли

Другим примером простого преобразования, обладающего необычными свойствами, является так называемое *преобразование пекаря*, которое может быть представлено в виде следующего отображения на единичном квадрате:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x_n \\ \frac{1}{2}y_n \end{bmatrix}, & 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \\ &= \begin{bmatrix} 2x_n - 1 \\ \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, & \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Оно соответствует повторяющимся удвоениям по x и делением пополам по y . Это отображение полностью обратимо, и при обращении происходит удвоение по y и деление пополам по x . Преобразование сохраняет площадь и, как видно из рис. 4.32, в некоторой степени напоминает раскатывание теста пекарем. Понятно, что и в этом случае небольшое число итераций отображения приводит к быстрому перемешиванию.

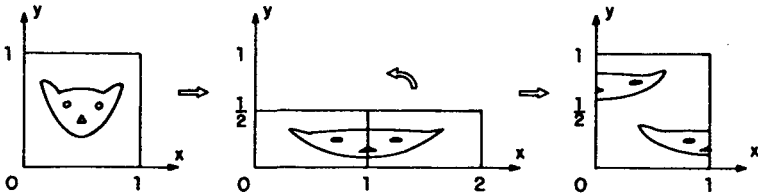


Рис. 4.32. Преобразование пекаря

Выраженно неупорядоченный характер этого простого преобразования проявляется, если представить итерации (x_n, y_n) в двоичной системе, т. е. в виде последовательностей из нулей и единиц. Простые примеры двоичных чисел: $1/16 = 0.0001000\dots$, $1/8 = 0.001000\dots$, $1/4 = 0.01000\dots$, и т. д. Более сложные числа, в частности иррациональные, представляются в виде бесконечных неповторяющихся последовательностей из нулей и единиц. Но в любом случае двоичное представление обладает важным свойством: удвоению числа соответствует перемещение двоичной точки на одну позицию вправо, а делению пополам — на одну позицию влево. Это свойство идеально подходит для описания преобразования пекаря. Начальное условие $X_0 = (x_0, y_0)$ представляется последовательностями

$$x_0 = 0. a_1 a_2 a_3 \dots a_i \dots, \quad (4.7.7a)$$

$$y_0 = 0. b_1 b_2 b_3 \dots b_i \dots, \quad (4.7.7b)$$

где a_i и b_i — либо нули, либо единицы. Положение этой точки в единичном квадрате удобно представить одной последовательностью, состыковав обращенную последовательность для y_0 с последовательностью для x_0 (отбрасывая нули, стоящие в разряде единиц):

$$X_0 = \dots b_i \dots b_3 b_2 b_1. a_1 a_2 a_3 \dots a_i \dots. \quad (4.7.8)$$

Учитывая, что (прямой) итерации отображения соответствует удвоение по x и уменьшение вдвое по y , X_1 можно получить простым переносом десятичной точки в (4.7.8) на одну позицию вправо:

$$X_1 = \dots b_i \dots b_3 b_2 b_1 a_1. a_2 a_3 \dots a_i \dots. \quad (4.7.9)$$

То же самое можно проделать для последовательных X_i . Этот процесс известен как *сдвиг Бернулли*. Рассмотрим теперь более «крупнозернистое» описание движения, при котором траектории (или некоторой ее функции) ставится в соответствие 0 при $0 \leq x_n < 1/2$ и 1 при $1/2 \leq x_n \leq 1$. Это означает, что в (полном) двоичном представлении x_n берется только первая цифра. В результате история движения в «крупнозернистом» представлении (т. е. последовательность итераций $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i \dots$) описывается последовательностью $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots$, и т. д. Если же отображение пробегает от $n = -\infty$ до $n = +\infty$, история представляется двойной бесконечной последовательностью

$$\dots b_i \dots b_3 b_2 b_1 a_1 a_2 a_3 \dots a_i \dots \quad (4.7.10)$$

(Вспомним, что в обратном направлении $(-\infty \leq n \leq 0)$ преобразования по x и по y меняются друг с другом.) Несколько удивительным является то, что в случае типичных иррациональных начальных условий (x_0, y_0) соответствующее двоичное представление (4.7.7) является бесконечной неповторяющейся последовательностью нулей и единиц, и, следовательно, двойная бесконечная последовательность (4.7.10)

будет столь же случайной, как и последовательность, получаемая при (честном) бросании монеты (орел — 1, решка — 0). Таким образом, полностью детерминистическая динамическая система (4.7.6) задает движение, которое оказывается полностью случайным! Такая система известна как *система Бернулли* и представляет собой предельный случай неупорядоченности. Одним из наиболее важных результатов теории динамических систем является тот факт, что в окрестности любой гомоклиной точки отображения движение может быть локально представлено с помощью отображения со свойствами системы Бернулли. Мы уже видели, что в неинтегрируемых гамильтоновых системах множество гомоклиных точек плотно в окрестности гиперболических неподвижных точек. Так что сформулированный выше результат подтверждает представление о том, что хаотические, но при этом детерминистические, траектории, наблюдаемые в этих системах, действительно случайны по своей природе. Несколько интересных примеров этого приводит Берри [2].

4.7.г. Иерархия неупорядоченности

Из приведенных выше примеров видно, что различные типы динамических систем характеризуются большей или меньшей степенью неупорядоченности. Приблизительная классификация этих типов может быть представлена в виде следующей иерархии.

- (1) *Эргодические системы.* Это наиболее «слабый» тип поведения, при котором фазовое среднее совпадает со средним по времени:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x, t) dt = \langle f(x, t) \rangle, \quad (4.7.11)$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю на рассматриваемом многообразии. В качестве простых примеров могут служить иррациональный поток на торе или, в случае одномерных систем, поток на энергетической поверхности (см. раздел 2.5). Напомним, что n -мерный гамильтониан общего вида ($n > 1$) не эргодичен на всей энергетической поверхности, так как она как правило разделена (сохраняющимися) торами.

- (2) *Смешанные системы.* Это, как было показано, гораздо более «сильный» свойство, чем эргодичность. В противоположность (4.7.11) перемешивание предполагает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = \langle f(x, t) \rangle, \quad (4.7.12)$$

т. е. для достижения «равновесия» не требуется никакого усреднения по времени. Можно показать, что спектр смешанных систем непрерывен, тогда как спектр эргодических систем дискретен. (Существует еще промежуточное состояние, называемое *слабым перемешиванием*, достаточное для непрерывности спектра.)

- (3) *K-системы.* Это системы с положительной энтропией Колмогорова. В этом случае экспоненциальное разбегание связанных окрестностей траекторий должно характеризоваться положительной средней скоростью.
- (4) *C-системы (системы Аносова).* Это глобально неустойчивые системы, в которых показатель Ляпунова каждой траектории положителен. Примером C-системы служит отображение Арнольда.

(5) *Системы Бернулли*. Движение в этих системах столь же случайно, как и результат бросания монеты (пример — преобразование пекаря).

Каждому последующему типу систем в этой иерархии присущи свойства предыдущих. Так, например, отображение Арнольда, относящееся к C -системам, обладает также свойствами K -системы (в этом случае энтропия Колмогорова равна $\ln[(3 + \sqrt{5}/2)]$), характеризуется перемешиванием, что, в свою очередь, предполагает эргодичность.

4.8. Гамильтонов хаос в гидродинамических системах

До сих пор наше обсуждение хаоса ограничивалось примерами компьютерных расчетов простых модельных систем. При этом мы лишь вскользь коснулись вопроса о том, в каком физическом контексте эти модели могут возникать (нелинейные колебания, ускорители, волноводы, молекулы в полях излучения и т. д.). Вместе с тем понятно, что для читателя гораздо больший интерес могли бы представить «реальные» физические ситуации, в которых можно было бы действительно *наблюдать* хаос — и быть может даже поверхность сечения — невооруженным глазом. Оказывается, что определенные классы задач динамики текучих сред представляют такую возможность. К их описанию мы и переходим.

4.8.a. Основные положения гидродинамики

Первый шаг состоит в том, чтобы понять различие в интерпретациях гидродинамики Эйлера и Лагранжа. В описании Эйлера поле скоростей жидкости или газа $u = (u, v, w)$ задается относительно фиксированной системы координат:

$$u = u(x, y, z, t), \quad (4.8.1a)$$

$$v = v(x, y, z, t), \quad (4.8.1b)$$

$$w = w(x, y, z, t), \quad (4.8.1c)$$

где (u, v, w) находятся (в принципе) путем решения уравнений гидродинамики (см. раздел 5.1) с определенными граничными условиями. Если поле скоростей зависит от времени явным образом, оно называется *нестационарным* в противоположность не зависящему от времени *стационарному* полю. С другой стороны, подход Лагранжа предполагает описание траекторий отдельной «частицы» жидкости. Для заданного поля скоростей движение частицы определяется путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u(x, y, z, t), \quad (4.8.2a)$$

$$\dot{y} = v(x, y, z, t), \quad (4.8.2b)$$

$$\dot{z} = w(x, y, z, t) \quad (4.8.2c)$$

с начальными условиями $(x(0), y(0), z(0))$.

В случае несжимаемой двумерной жидкости имеем

$$u_x + v_y = 0, \quad (4.8.3)$$

откуда следует, что должен существовать такой точный дифференциал $d\psi$, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4.8.4a)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.8.4b)$$

Функция $\psi = \psi(x, y, z)$ называется *функцией тока*. В рамках подхода Лагранжа уравнения движения (4.8.2) могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t), \quad (4.8.5a)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t). \quad (4.8.5b)$$

Эти уравнения имеют структуру уравнений Гамильтона: ψ играет роль гамильтониана, а x и y — канонических переменных. Подчеркнем, что такая структура определяется условием несжимаемости (4.8.3) и не зависит от наличия у среды вязкости. Таким образом, в двумерном случае траектория частицы может быть представлена динамикой фазовой плоскости (уравнения (4.8.5)).

Точное описание динамики будет, конечно, зависеть от вида ψ . В случае стационарных потоков ψ не зависит от времени и уравнения (4.8.5) сводятся к автономной системе

$$\dot{x} = \psi_y(x, y), \quad (4.8.6a)$$

$$\dot{y} = -\psi_x(x, y). \quad (4.8.6b)$$

Такая система, как мы видели в главе 1, полностью интегрируема, и ее траектории в фазовой плоскости (x, y) лежат на гладких кривых (называемых в гидродинамике *линиями тока*). Вместе с тем мы знаем, что в случае нестационарных потоков (когда ψ зависит от времени) имеется возможность хаотического поведения. Для того, чтобы действительно проследить за траекториями частиц жидкости, их необходимо пометить каким-либо «пассивным» образом, т. е. так, чтобы не повлиять на поле скоростей и сохранить справедливость (4.8.5). Как правило этого можно добиться с помощью краски, но на практике при этом происходит, конечно, размывание («пассивное скалярное размывание») окрашенных частиц (окрашиваются преимущественно полоски и капельки, а не индивидуальные частицы). Следовательно, в фазовом пространстве прослеживается эволюция целого семейства траекторий. Деформация такого семейства (линейного элемента или кривой) обсуждалась в разделе 4.4: линейный элемент на плоскости может трансформироваться в одну из двух основных структур, «усы» или «завитки», в соответствии с типом неподвижных точек — гиперболических и эллиптических соответственно. Возникновение усов является проявлением хаоса частиц в жидкости — явление, часто называемое *хаотической адвекцией* или *лагранжевой турбулентностью*; второй термин подчеркивает, что хаос рассматривается в терминах лагранжевой интерпретации гидродинамики. (Представления об *эйлеровой турбулентности* будут кратко обсуждаться в главе 5.) В заключение отметим, что если в двумерном случае для возникновения хаоса требуется нестационарность потока, то в случае трех измерений хаос может возникать в стационарных потоках (уравнения (4.8.2) с не зависящей от времени правой частью).

4.8.6. Модельная система

Мы хотели бы отыскать реально существующую гидродинамическую систему, которая была бы двумерна, нестационарна, и для которой в явном виде известна функция тока — что позволило бы проводить численное моделирование и сопоставление с лабораторными экспериментами. Несмотря на кажущуюся сложность этой задачи, такая система может быть сконструирована; недавно она стала предметом подробного изучения [30]. Такая система во многом близка к конструкции, называемой *цилиндрическим подшипником*. Она состоит из двух помещенных друг в друга цилиндров, пространство между которыми заполнено вязкой жидкостью (обычно густым смазочным маслом). Оба цилиндра могут независимо вращаться относительно своих осей, которые как правило не совпадают (т. е. цилиндры эксцентричны). Если глубина жидкости достаточно велика по сравнению с радиусом (внешнего) цилиндра, систему можно приближенно считать двумерной. При достаточно большой вязкости жидкости и достаточно малых скоростях вращения цилиндров (обеспечивающих очень малые значения так называемого *числа Рейнольдса*) уравнения движения жидкости могут быть решены в приближении Стокса, т. е.

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad (4.8.7)$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ — двумерное поле скоростей, ν — кинематическая вязкость, p — давление. Граничные условия таковы, что компонента поля скоростей, тангенциальная к поверхностям внутреннего и внешнего цилиндров, должна равняться соответствующей компоненте скорости вращения того или другого цилиндра. Если цилиндры (один или оба) вращаются с *постоянной* (угловой) скоростью, (4.8.7) представляет собой стационарную задачу. Более того, избавляясь от градиента с помощью операции ротора ($\nabla \times (\nabla p) = 0$) и учитывая, что $\nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \psi$, (4.8.7) может быть сведено к бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (4.8.8)$$

Известно, что в случае определенной геометрии обсуждаемой системы это уравнение допускает точное решение в биполярных координатах. Типичные результаты приведены на рис. 4.33 для случаев, когда вращается только внутренний или только внешний цилиндр. На плоскости (x, y) изображены кривые постоянных значений ψ — линии тока в терминах гидродинамики, инвариантные торы в терминах динамики. В случае этих стационарных решений частицы жидкости движутся вдоль соответствующих линий тока, и их поведение строго регулярно.

Теперь нам нужно внести в систему некоторую (контролируемую) нестационарность. Этого можно достичь, модулируя вращение цилиндров. Простейший способ заключается в том, чтобы вращать цилиндры попеременно. Решение (4.8.8) в этом случае представляет собой кусочную линейную комбинацию решений, соответствующих вращениям каждого из цилиндров в отдельности. Пока вращается один из цилиндров, частицы жидкости движутся вдоль своих линий тока, а когда происходит переключение вращения цилиндров, они перепрыгивают (в стоковом потоке практически мгновенно) на другие линии тока. Именно этот механизм может привести к возникновению хаоса по мере эволюции частиц в трехмерном фазовом пространстве (x, y, t) . За движением удобно следить, построив с помощью *стробоскопических* «моментальных снимков» фазовой плоскости (x, y) поверхность сечения; временной интервал определяется суммой времен вращения обоих цилиндров (см. рис. 4.6). Такая типичная поверхность сечения, получаемая при численном решении уравнений (4.8.5), показана на рис. 4.34; наблюдается сочетание регулярного и нерегулярного движений.

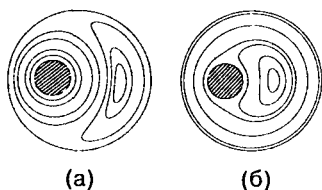


Рис. 4.33. Типичные линии тока в случае вращения (а) только внутреннего цилиндра, (б) только внешнего цилиндра. Кривые являются точными решениями уравнения (4.8.8) с соответствующими граничными условиями. Штриховкой показан внутренний цилиндр

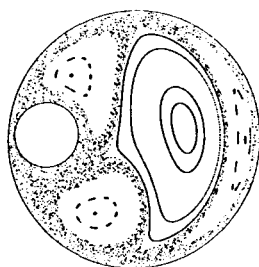


Рис. 4.34. Типичная поверхность сечения, рассчитанная по уравнению (4.8.5). (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

4.8.в. Экспериментальные результаты

Появление усов и завитков указывает на области нерегулярного и регулярного движений соответственно. Например, в обсуждаемом случае эволюционирующий линейный элемент (т. е. полоска окрашенной жидкости) будет образовывать завитки в окрестности основной цепочки из трех островков и усы в промежуточных хаотических областях. На рис. 4.35 показана эволюция начальной кривой, заключающей в себе эти области. Последовательность рисунков иллюстрирует образование трех больших завитков, на которые налагаются малые гомоклинные колебания (усы). Компьютерные расчеты непосредственно сопоставлены с лабораторными экспериментами, в которых соответствующая кривая образовывалась окрашенной жидкостью (в данном эксперименте — глицерин) на поверхности и видоизменялась в результате такого же вращения цилиндров (попеременное вращение), на котором основывались численные расчеты. (Прибор показан на рис. 4.36.)

При изменении параметров вращения цилиндра (скорости вращения и эксцентриситета) наблюдается изменение степени хаотичности в фазовой плоскости. Случай сильного хаоса, когда в фазовой плоскости сохраняется лишь небольшое число крошечных областей, содержащих острова, показан на рис. 4.37. При этом можно ожидать появления гигантских усов. Это иллюстрируется последовательностью рисунков (рис. 4.38 (а)–(ж)). Компьютерное моделирование в этом случае усложняется, так как экспоненциальное разбегание соседних точек быстро приводит к нарушению численного расчета. (Чтобы преодолеть эту трудность, приходится задавать огромное число точек исходной кривой.) В эксперименте, напротив, такого рода проблемы не возникают, и для получения интересного результата, представленного на рис. 4.39, было проведено на несколько циклов больше, чем можно смоделировать численно. Оказалось также, что лабораторный эксперимент может быть использован для построения поверхностей сечения. (Технические детали читатель может найти в оригинальной статье [30].) На рис. 4.40 показана «лабораторная» поверхность сечения, полученная для значений параметров, которые соответствуют численному моделированию на рис. 4.34. Совпадение вполне удовлетворительное; экспериментально получаются хорошо различимые эллиптические и гиперболические области. Это один из немногочисленных примеров, когда поверхность сечения хаотического гамильтонова потока можно непосредственно наблюдать в эксперименте.

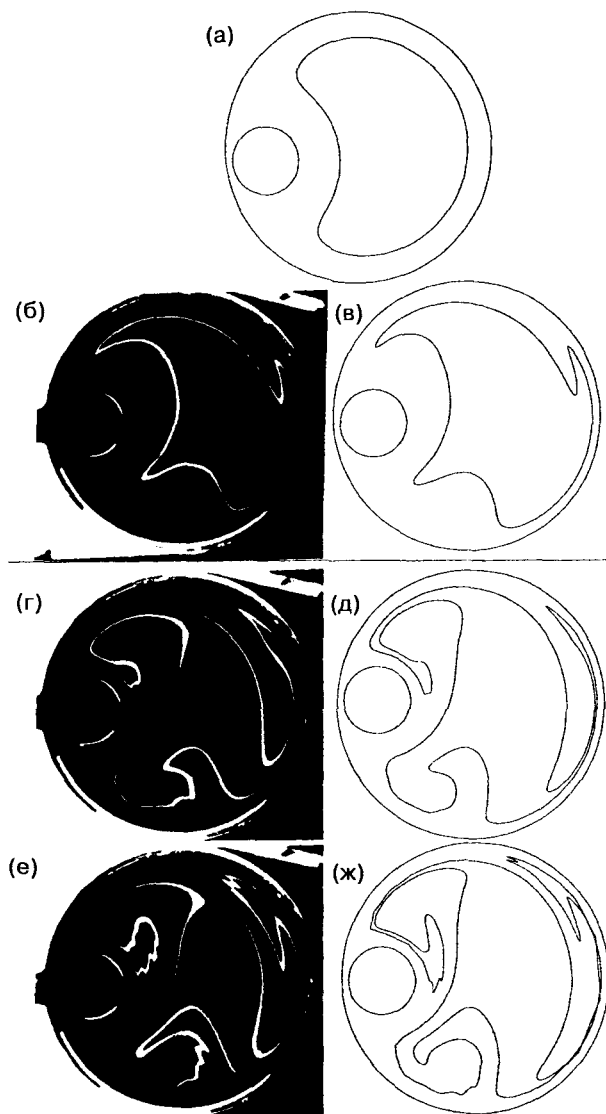


Рис. 4.35. (а) Исходный контур, образующийся при вращении внешнего цилиндра. Сопоставление эксперимента с численными расчетами после: 7 циклов (б) и (в); 15 циклов (г) и (д); 21 цикла (е) и (ж). (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

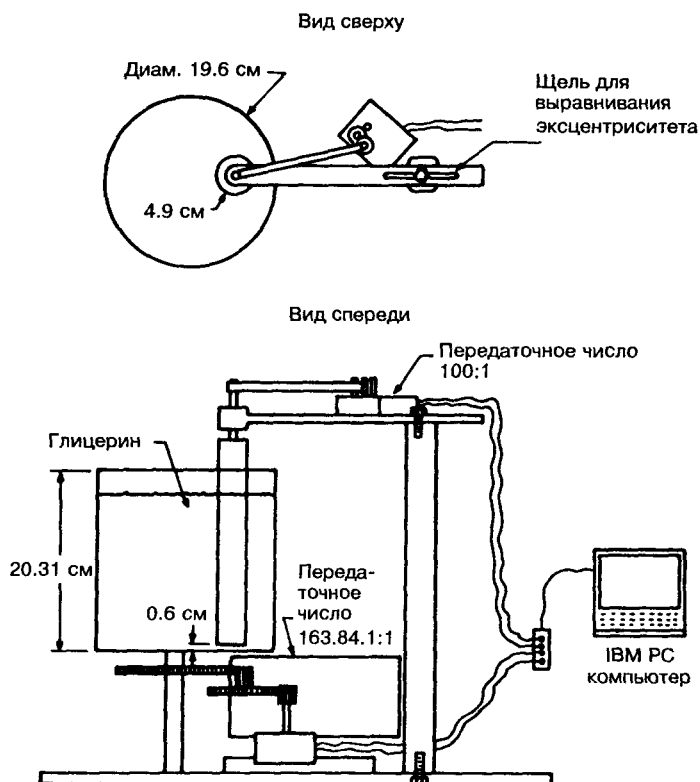


Рис. 4.36. Схематическое изображение экспериментальной установки. Окрашенные контуры помещаются на поверхность глицерина и видоизменяются в результате заданного вращения цилиндров. (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

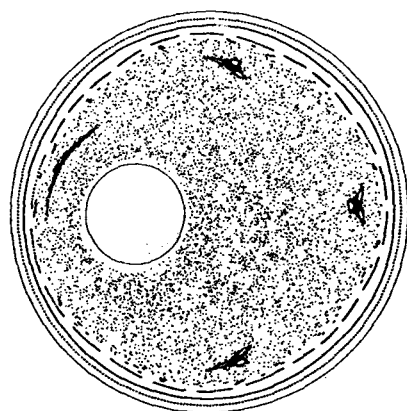


Рис. 4.37. Сильный хаос на поверхности сечения, рассчитанной по уравнению (4.8.5). (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

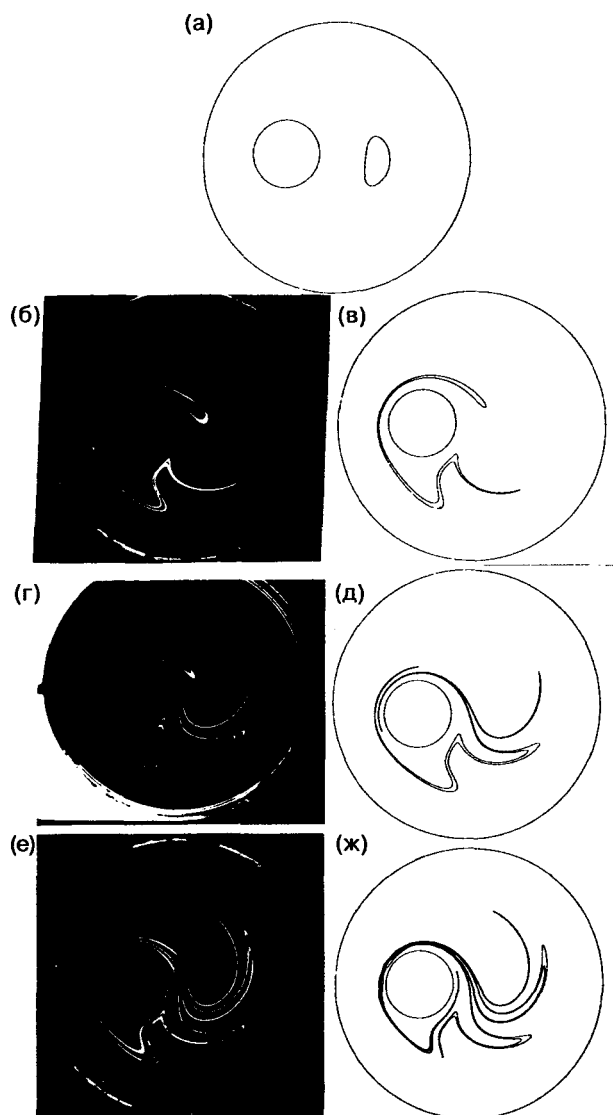


Рис. 4.38. Исходный контур (а), образующийся при вращении внешнего цилиндра. Сопоставление эксперимента с численными расчетами после: 4 циклов (б) и (в); 5 циклов (г) и (д); 6 циклов (е) и (ж). (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

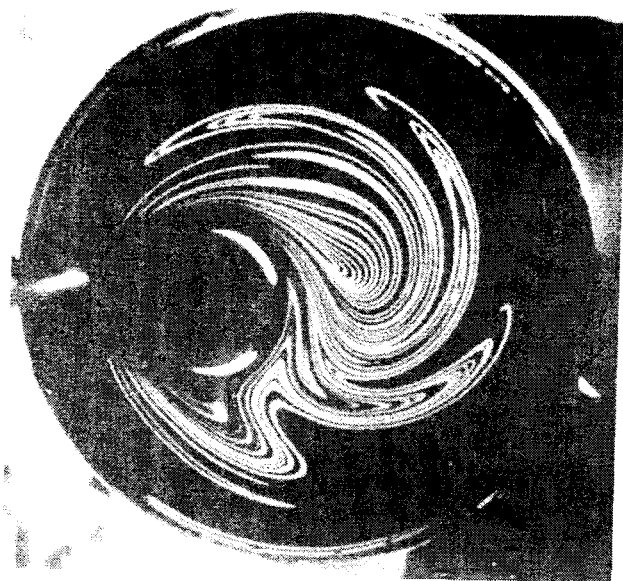


Рис. 4.39. Тот же эксперимент, что и на рис. 4.38, после 12 циклов. (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

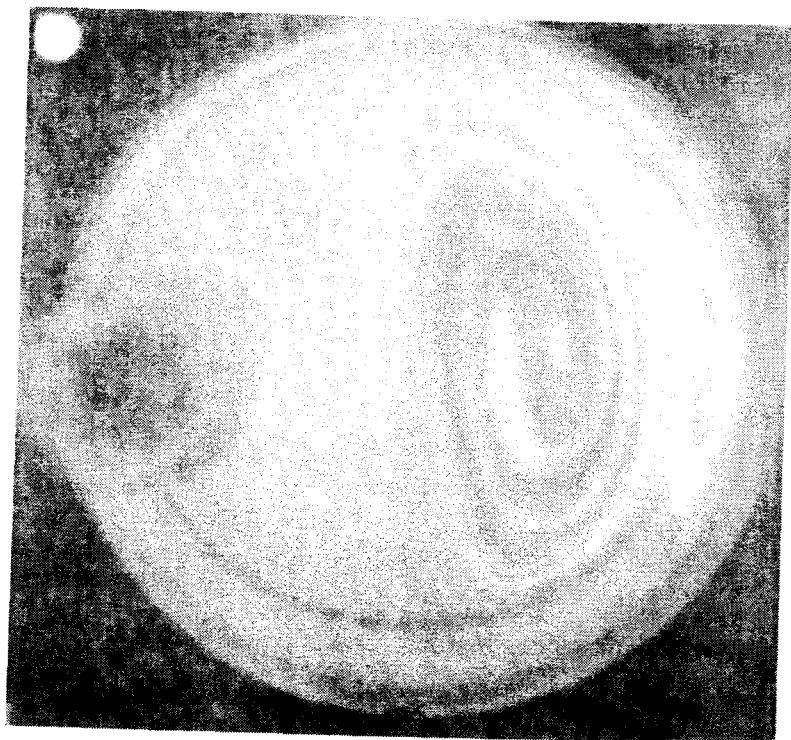


Рис. 4.40. Поверхность сечения, полученная экспериментально для сопоставления с результатами численных расчетов, приведенных на рис. 4.34. (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.1.

Поверхность сечения как симплектическое отображение

Характерное свойство поверхностей сечения консервативных систем с двумя степенями свободы, состоящее в сохранении площади, наиболее элегантно представляется на геометрическом языке, введенном в приложении 2.2.

Из инвариантности 1-формы Пуанкаре—Картана $\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt$ следует (см. уравнение (2.П.29))

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \oint_{\mathcal{C}'} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt, \quad (4.П.1)$$

где $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — две произвольные замкнутые кривые, охватывающие один и тот же пучок траекторий в фазовом пространстве. Если обе кривые соответствуют сечениям постоянного времени, $t = 0$ для кривой $\mathcal{C}$ и $t = T$ для кривой $\mathcal{C}'$ (которую теперь мы обозначим через $\mathcal{C}_T$), вклад члена $H dt$ равен нулю, и мы приходим к результату (4.1.9) (или к уравнению (2.П.31)), а именно

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint_{\mathcal{C}_T} \sum_{i=1}^n p_i dq_i. \quad (4.П.2)$$

Ограничимся теперь двумя степенями свободы и рассмотрим 1-форму $p_x dx + p_y dy$; «начальную» кривую $\mathcal{C}$ определим как множество начальных условий в плоскости (p, x) при $y = 0$ и фиксированной энергии E . Таким образом, $\mathcal{C}$ представляет собой кривую, состоящую из точек поверхности сечения. Под действием гамильтонова потока эти точки будут перемещаться, образуя «пучок» траекторий в рассмотренном фазовом пространстве (p_x, p_y, x, y, t) . В случае ограниченного движения этот пучок в конечном итоге снова пересечет поверхность сечения при $y = 0$. Но при этом нет никаких оснований полагать, что для всех точек пучка это произойдет в одно и то же время. Поэтому, хотя повторные пересечения пучка с поверхностью сечения образуют некоторую замкнутую кривую, скажем $\mathcal{C}'$, это не будет кривая «постоянного времени» типа $\mathcal{C}_T$, фигурировавшей в (4.П.2). Следовательно, мы должны рассмотреть инвариант Пуанкаре—Картана (4.П.1), а именно

$$\oint_{\mathcal{C}} p_x dx + p_y dy - H dt = \oint_{\mathcal{C}'} p_x dx + p_y dy - H dt. \quad (4.П.3)$$

При этом отметим, что для семейства траекторий на данной энергетической поверхности $E = H = \text{const}$

$$\oint_{\mathcal{C}} H dt = \oint_{\mathcal{C}'} H dt = 0. \quad (4.П.4)$$

Помимо этого, поскольку кривые $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ определены в плоскостях, для которых значение y фиксировано ($y = 0$),

$$\oint_{\mathcal{C}} p_y dy = \oint_{\mathcal{C}'} p_y dy = 0. \quad (4.П.5)$$

Таким образом, остается соотношение

$$\oint_{\mathcal{C}} p_x dx = \oint_{\mathcal{C}'} p_x dx, \quad (4.П.6)$$

смысл которого как раз и состоит в том, что площадь на поверхности сечения сохраняется под действием гамильтонова потока. Это дает нам в случае системы с двумя степенями свободы основание говорить о поверхности сечения как о сохраняющем площадь отображении.

Если имеется более чем 2 степени свободы, то общая идея остается той же самой, но «поверхность сечения» в этом случае представляет собой $(2n - 2)$ -мерную поверхность, погруженную в $(2n - 1)$ -мерную энергетическую поверхность (консервативного гамильтониана с n степенями свободы). Если «поверхность» задается при $q_1 = \text{const}$, то (4.П.3) обобщается в виде

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=2}^n p_i dq_i + p_1 dq_1 - H dt = \oint_{\mathcal{C}'} \sum_{i=2}^n p_i dq_i + p_1 dq_1 - H dt. \quad (4.П.7)$$

По аналогии с (4.П.4) и (4.П.5) вклад членов $\oint p_1 dq_1$ и $\oint H dt$ при интегрировании как по $\mathcal{C}$, так и по $\mathcal{C}'$ равен нулю. В результате получаем

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=2}^n p_i dq_i = \oint_{\mathcal{C}'} \sum_{i=2}^n p_i dq_i. \quad (4.П.8)$$

В этом случае интегралы соответствуют уже не просто площади, а площадям проекций на различные (p_i, q_i) -плоскости (см. (2.П.50)):

$$\oint_{\mathcal{C}} \sum_{i=2}^n p_i dq_i = \sum_{i=2}^n \iint_{A_i} dp_i dq_i = \oint_{\mathcal{C}'} \sum_{i=2}^n p_i dq_i = \sum_{i=2}^n \iint_{A'_i} dp_i dq_i, \quad (4.П.9)$$

где A_i — различные проекции $\mathcal{C}$, A'_i — различные проекции $\mathcal{C}'$. Мы убеждаемся, таким образом, что поверхность сечения является симплектическим отображением.

Список литературы

Учебники и обзорные статьи

1. Arnold V. I. and Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, New York, 1968. [Имеется перевод: Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. (Серия регулярная и хаотическая динамика). 1999.]
2. Berry M. V. Regular and irregular motion. AIP Conference Proceedings. № 46. Topics in Nonlinear Dynamics. AIP, New York, 1978.
3. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. American Mathematical Society, Providence, RI, 1927. [Имеется перевод: Биркгоф Дж. Динамические системы. М.—Л.: ГТТИ, 1941.]
4. Ford J. The statistical mechanics of analytical dynamics // Fundamental Problems in Statistical Mechanics / Ed. E. D. G. Cohen. Vol. 3. North-Holland, Amsterdam, 1975.
5. Helleman R. H. G. Self generated chaotic behaviour in nonlinear mechanics // Fundamental Problems in Statistical Mechanics / Ed. E. D. G. Cohen. Vol. 5. North-Holland, Amsterdam, 1980.

6. *Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.* Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York, 1983. [Имеется перевод: *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.]
7. *MacKay R. S., Meiss J. D.* Hamiltonian Dynamical Systems, Adam Hilger. Bristol, 1987.
Эта книга содержит удачное изложение и обширную библиографию большого числа фундаментальных исследований в области гамильтоновой динамики.
8. *Moser J.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems // *Annals of Mathematical Studies*. Vol. 77. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.
9. *Poincaré H.* Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste. Gauthier-Villars. Paris, 1892. [Имеется перевод: *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1: Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.]

Раздел 4.1

10. *Casati G., Ford J.* Stochastic transition in the unequal-mass Toda lattice. *Phys. Rev.*, **A12**, 1702 (1975).
11. *Contopoulos G., Polymilis C.* Approximations of the 3-particle Toda lattice. *Physica*, **24D**, 328 (1987).
12. *Ford J., Stoddard S. D., Turner J. S.* On the integrability of the Toda lattice. *Prog. Theor. Phys.*, **50**, 1574 (1973).
13. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astron. J.*, **69**, 73 (1964).
14. *Henon M.* Integrals of the Toda lattice. *Phys. Rev.*, **B9**, 1921 (1974).
См. опубликованную там же статью *M. Henon, H. Flaschka*.

Раздел 4.2

15. *Henon M.* Numerical study of quadratic area preserving mappings. *Quart. Appl. Math.*, **27**, 291 (1969).
16. *MacKay M. S., Meiss J. D., Percival I. C.* Transport in Hamiltonian systems. *Physica*, **13D**, 55 (1984).
Обсуждаются канторы и их применение.
17. *MacKay R. S.* Introduction to the dynamics of area preserving maps // *Proceedings of the Spring College on Plasma Physics, Trieste, 1985*. World Scientific, Singapore, 1985.
Дана интересная геометрическая интерпретация сохраняющих площадь отображений.
18. *Percival I. C.* Variational principles for invariant tori and cantori // *AIP Conference Proceedings*. № 57: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction. AIP, New York, 1980.
Вводятся дискретные лагранжианы.

Раздел 4.5

19. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev.*, **A14**, 2338 (1976).
20. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, **15**, 9 (1980).
21. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // *Усп. мат. наук*. 1977. Т. 32 (4). С. 55.

Раздел 4.6

22. *Chirikov B.* A universal instability of many dimensional oscillator systems. *Phys. Reports*, **52**, 263 (1979).
23. *Escande D. F.* Stochasticity in classical Hamiltonian systems: universal aspects. *Phys. Reports*, **121**, 165 (1985).
Изложено дальнейшее развитие метода Чирикова.

24. *Greene J. M.* A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.*, **20**, 1183 (1979).
25. *Helleman R. H. G., Bountis T.* Periodic solutions of arbitrary period, variational methods // *Lecture Notes in Physics*. Vol. 93: Stochastic Behavior in Classical and Quantal Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, New York, 1979.
26. *Tabor M.* The onset of chaos in dynamical systems. *Adv. Chem. Phys.*, **46**, 73 (1981).
27. *Walker G. H., Ford J.* Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems. *Phys. Rev.*, **188**, 416 (1969).

Раздел 4.7

28. *Lebowitz J., Penrose O.* Modern ergodic theory. *Phys. Today*, **26**, 23 (1973).
29. *Заславский Г. М., Чуриков Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Усп. физ. наук. 1971. Т. 105, вып.1. С. 3.

Раздел 4.8

30. *Chaiken J. R. Chevray, Tabor M., Tan Q. M.* Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes' flow. *Proc. R. Soc. London A*, **408**, 165 (1986).

Литература, добавленная при переводе

31. *Колмогоров А. Н.* ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754.
32. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
33. *Синай Я. Г.* В кн.: *Proceed. of the Intern. Congress of Mathematicians*, 15-22 August, 1962. Uppsala: Almquist and Wiksells, 1963. P. 540. Sweden.
34. *Синай Я. Г.* Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 1. С. 15.

Глава 5

Динамика диссипативных систем

5.1. Диссипативные системы и турбулентность

В этой главе мы перейдем от изучения гамильтоновых систем и сохраняющих площадь отображений к исследованию динамики диссипативных систем. Эти системы уже обсуждались в главе 1 при рассмотрении различных затухающих колебаний, характеризуемых наличием предельного цикла или неподвижной точки. При этом в разделе 1.6 вскользь отмечалось, что диссипация не всегда приводит к затуханию интересующей нас динамики и при определенных условиях может быть причиной хаотического поведения.

Современные исследования диссипативных динамических систем обусловлены главным образом стремлением объяснить различные явления, наблюдаемые в гидродинамических экспериментах. Некоторые примеры мы рассмотрим в следующем разделе. Помимо этого есть надежда, что изучение свойств этих диссипативных систем поможет пролить свет на чрезвычайно сложную проблему гидродинамической *турбулентности*, хотя на сегодняшний день успехи в этом направлении весьма ограничены¹⁾. Прежде чем перейти к обсуждению успехов (и неудач) этого подхода, дадим краткий обзор необходимых понятий гидродинамики²⁾.

5.1.a. Уравнение Навье—Стокса

Уравнения Навье—Стокса представляют собой фундаментальные уравнения движения несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (5.1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.1.1b)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \mathcal{D}, \quad (5.1.1b)$$

где $\mathcal{D}$ — граница области, содержащей жидкость, $\mathbf{u}$ — поле скоростей жидкости ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$), p — давление, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{f}$ — внешние силы (если они имеются), ν — кинематическая вязкость. Возможность диссипации энергии обеспечивается наличием в уравнении члена $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Уравнение (5.1.1a) представляет собой трехмерное дифференциальное уравнение в частных производных для поля

¹⁾ На съезде Британской Ассоциации в Лондоне в 1932 году выдающийся специалист в области гидродинамики сэра Г. Лэмб высказался, как утверждают, следующим образом: «Я уже стар и надеюсь, отправившись на небеса, пролить свет на два вопроса. Первый из них — квантовая электродинамика, а второй — турбулентность в жидкостях. И относительно первого вопроса я настроен довольно оптимистично». (Я благодарен профессору Мартину за его помощь при отыскании этой цитаты.)

²⁾ За более подробной информацией читателю следует обратиться к стандартным учебникам, например, к прекрасной книге «Гидродинамика» Ландау и Лифшица [8].

скоростей и относительно неподвижной системы координат. (Вспомним, что это соответствует подходу Эйлера к описанию жидкостей). Уравнение (5.1.16) является условием несжимаемости, а уравнение (5.1.1в) — граничное условие. Печальная правда состоит в том, что даже на сегодняшний день о формальных свойствах уравнения Навье—Стокса в трех измерениях (не говоря уже об отыскании точных решений) известно очень мало; до сих пор, например, не существует доказательства существования решений при всех значениях времени. (Для двумерных уравнений такие результаты имеются.)

При этом то, что связано с экспериментальным наблюдением гидродинамических течений (т. е. физической реальности, описываемой уравнениями Навье—Стокса), изучено достаточно хорошо. Пионерские работы в этой области были проведены Рейнольдсом в 1880-х годах. Одним из важнейших его результатов было введение безразмерного параметра, называемого теперь *числом Рейнольдса*,

$$R = \frac{UL}{\nu},$$

где U и L — типичные масштабы скорости и длины в изучаемой системе соответственно. Если в уравнение Навье—Стокса перейти к безразмерным величинам, отнеся скорости к U , а координаты к L (масштаб времени при этом L/U), то получим (опустив силовой член в (5.1.1а))

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (5.1.2)$$

где введено также «безразмерное» давление: $p \rightarrow p/(\rho U^2)$. Рейнольдс показал, что с ростом R характер течения может измениться от гладкого регулярного (*ламинарное течение*) к неупорядоченному хаотическому (*турбулентное течение*).

5.1.6. Понятие турбулентности

В гидродинамике термин *турбулентность* принят для обозначения состояния *пространственно-временного хаоса*. Это означает, что хаос в жидкости проявляется на всех масштабах как в пространстве, так и во времени. Удовлетворительное математическое описание такого состояния оказалось одной из самых сложных проблем, стоящих перед прикладной математикой. В последние годы появилась надежда, что анализ хаотического поведения простых динамических систем (обыкновенных дифференциальных уравнений и отображений) может помочь в решении этой проблемы. Но необходимо подчеркнуть, что в таких простых системах *наблюдается только временной хаос*. Поэтому их изучение позволит скорее пролить свет не на закономерности уже развернутой турбулентности, а на ее *возникновение*, когда поле скоростей начинает беспорядочно флуктуировать во времени, оставаясь при этом хорошо организованным пространственно. То, что мы будем рассматривать в этой главе, важно сопоставить с идеями, изложенными в разделе 4.8. Напомним, что в ней обсуждалась лагранжева турбулентность, при которой хаос в фазовом пространстве проявляется отдельными траекториями частиц жидкости. Там мы показали, что очень простые поля скоростей — даже при пренебрежимо малых числах Рейнольдса — могут проявлять хаотическое поведение. Мы также показали, что это хаотическое поведение помогает понять определенные сложные пространственные картины, наблюдаемые в жидкости. Напротив, эйлерова турбулентность подразумевает возникновение пространственно-временного хаоса в соответствующем поле

скоростей, что имеет место при больших числах Рейнольдса. В настоящее время взаимосвязь между лагранжевой и эйлеровой турбулентностью (если она вообще существует) практически не изучена.

В этой главе мы будем рассматривать возникновение турбулентности (в формализме Эйлера), используя модели простых диссипативных динамических систем. Результатом изучения таких моделей, несмотря на то, что они могут иметь весьма условное отношение к реальной гидродинамике, являются некоторые достаточно глубокие новые идеи, и хотя некоторые из моделей имеют весьма абстрактный характер, их выбор определяется стремлением интерпретировать реальные эксперименты. Поэтому мы начнем с описания экспериментальных работ, в которых наблюдается возникновение турбулентности.

5.1.в. Гамильтонова дигрессия*

При нулевой вязкости уравнение Навье—Стокса преобразуется в уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (5.1.3)$$

Граничное условие определяется требованием, чтобы жидкость не могла проникать через границу $\mathcal{D}$:

$$\partial_n \mathbf{u} = 0 \text{ на } \mathcal{D},$$

где ∂_n соответствует нормальной производной к границе (предполагаемой здесь стационарной). Заметим, что это условие отличается от условия (5.1.1в) для уравнения Навье—Стокса, в котором скорость (а не ее нормальная производная) равна нулю на $\mathcal{D}$.

В случае двух измерений уравнения Эйлера, записанные для компонент скорости ($\mathbf{u} = (u, v)$), имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.1.4a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (5.1.4b)$$

Уравнение неразрывности (условие несжимаемости) записывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u_x + v_y = 0. \quad (5.1.5)$$

Из этого условия следует, как уже отмечалось в разделе 4.8, существование такого полного дифференциала, что

$$u dy + v dx = d\psi. \quad (5.1.6)$$

Это позволяет записать

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.1.7)$$

Функция ψ называется *функцией тока*³⁾.

³⁾ Существование функции тока в случае двух измерений является следствием условия несжимаемости (5.1.5) и не зависит от того, равна вязкость нулю или нет.

Важной величиной в гидродинамике является *завихренность*:

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (5.1.8)$$

Применение к уравнению Эйлера операции ротора уничтожает содержащий давление член и приводит к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \xi) = 0. \quad (5.1.9)$$

Однако в случае двух измерений завихренность становится просто скалярным полем,

$$\xi = v_x - u_y = -\nabla^2 \psi. \quad (5.1.10)$$

Уравнение Эйлера в этом случае приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0, \quad (5.1.11)$$

где

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \psi_x(\nabla^2 \psi)_y - \psi_y(\nabla^2 \psi)_x.$$

Общепринятым в гидродинамике является представление завихренности ξ в виде суммы «точечных вихрей»:

$$\xi = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad (5.1.12)$$

где Γ_j — «напряженность» или циркуляция точечного вихря, расположенного в $\mathbf{x}_j$. Легко показать, что

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|. \quad (5.1.13)$$

Уравнения движения i -го точечного вихря в поле остальных $(n-1)$ точечных вихрей имеют вид

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}^2}, \quad (5.1.14a)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = v_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^2}, \quad (5.1.14b)$$

где $r_{ij}^2 = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2$. Если ввести функцию

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{ij} \Gamma_i \Gamma_j \log |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \quad (5.1.15)$$

то уравнения движения могут быть записаны в гамильтоновой форме:

$$\Gamma_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (5.1.16)$$

Интегрируема ли такая система? Для интегрируемости требуется $N-1$ интеграл движения. В случае трех вихрей можно отыскать интегралы, связанные с инвариантностью вращений и трансляций (теорема Нетер), и таким образом свести систему

к заведомо интегрируемому виду. В случае четырех точечных вихрей можно прийти к гамильтониану с двумя степенями свободы. Его численный анализ (поверхности сечения, показателей Ляпунова и т. д.) показывает, что система неинтегрируема и характеризуется сочетанием регулярного и нерегулярного движений (см., например, обзор [13]). Весьма интересно, что отсюда вовсе не следует, что система остается неинтегрируемой в пределе $N \rightarrow \infty$, для которого формальные свойства уравнений (5.1.16) мало изучены.

5.2. Экспериментальные наблюдения возникновения турбулентности

5.2.а. Течение Куэтта

Мы начнем с рассмотрения течения Куэтта. Оно представляет собой течение жидкости, заключенной между концентрическими цилиндрами, один из которых (или оба) вращается с некоторой известной угловой скоростью Ω (см. рис. 5.1). Число Рейнольдса записывается в виде

$$R = \frac{r_i \Omega (r_o - r_i)}{\nu}. \quad (5.2.1)$$

Когда оно, возрастая, достигает критического значения R_c , первоначально полностью азимутальное течение изменяется: на него накладываются горизонтальные тороидальные вихри, как показано на рис. 5.2. Такой переход был впервые подробно изучен и успешно предсказан Тейлором в 1923 году.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса происходят последующие переходы, соответствующие наложению поперечных волн на горизонтальные вихри. В последние несколько лет было проведено довольно подробное экспериментальное изучение этих процессов. Мы, в частности, сошлемся на работу [16], в которой использован так называемый *лазерный измеритель скорости Допплера*, позволяющий определять скорость жидкости в данной точке пространства без возмущения течения. В работе изучалась радиальная составляющая скорости при ряде значений числа Рейнольдса. Результаты удобно представить в виде спектра мощности скорости жидкости.

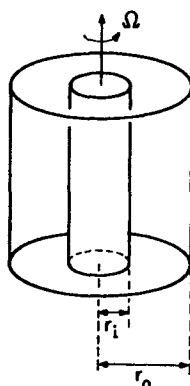


Рис. 5.1. Система концентрических цилиндров, использованная в эксперименте Тейлора—Куэтта

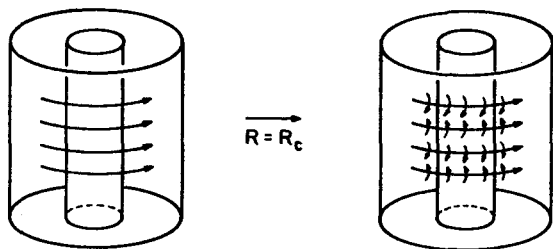


Рис. 5.2. Переход при критическом значении числа Рейнольдса R_c от азимутального течения к тороидальным вихрям (вихрям Тейлора)

Эти результаты указывают на существование ряда различных режимов (описываемые спектры мощности показаны на рис. 5.3 (а)–(в)):

- (1) *Периодическое течение* (рис. 5.3 (а)). В спектре мощности имеется единственная интенсивная линия при частоте ω_1 .
- (2) *Квазипериодическое течение* (рис. 5.3 (б)). Появляется вторая линия при частоте ω_3 (возникает, когда отношение R/R_c превосходит 10). Остальные линии спектра представляют собой различные комбинации и обертоны этих двух фундаментальных частот.
- (3) *Хаотическое течение* (рис. 5.3 (в)). Значительную долю спектра составляют широкие полосы (существенно превосходящие уровень экспериментального шума), которые отражают хаотическую составляющую движения. При значении R/R_c , которому соответствует рисунок, наряду с ними сохраняются острые пики, но с ростом R/R_c они исчезают, и спектр становится непрерывным.

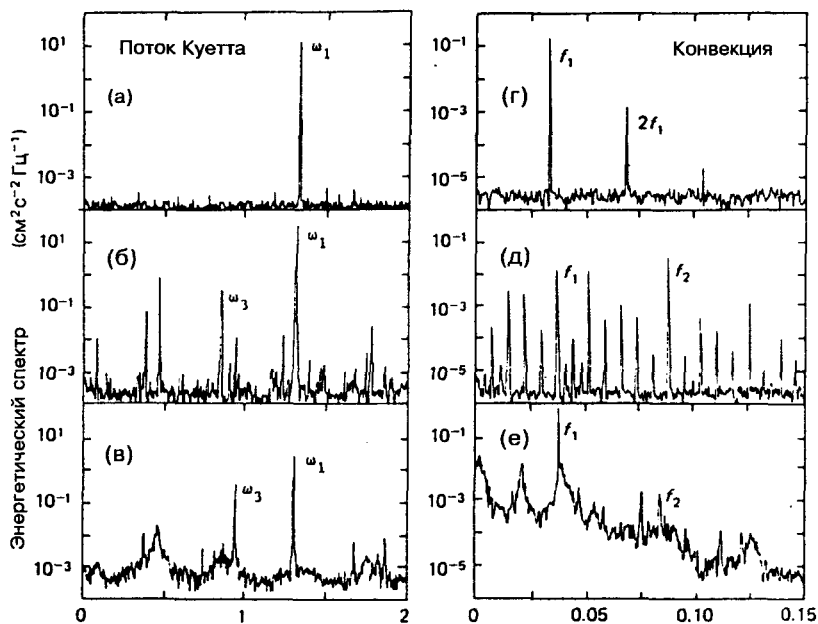


Рис. 5.3. (а)–(в) Спектр мощности скорости течения Тейлора–Куэтта при (а) $R/R_c = 9.6$, (б) $R/R_c = 11.0$, (в) $R/R_c = 18.9$. (г)–(е) Спектр мощности скорости для конвекции Рэлея–Бенара при относительном значении числа Рэлея: (г) 35.6, (д) 41.9, (е) 43.0. Течение периодически в случаях (а) и (г), квазипериодично в случаях (б) и (д) и становится широкополосным (хаос) в случаях (в) и (е). (Воспроизведено, с разрешения, из [15])

Мы видим, таким образом, что спектр течения претерпевает несколько четко выраженных переходов, начиная с усложнения периодического течения и заканчивая полностью непрерывным спектром.

5.2.6. Конвекция Рэлея–Бенара

В этом эксперименте жидкость заключена между горизонтальными теплопроводящими пластинами, подогреваемыми снизу. Отклонение от равновесия характеризуется так называемым числом Рэлея R_a , которое пропорционально разности

температур пластин. Рэлей показал в 1916 году, что при критическом значении R_a состояние чистой теплопроводности станет неустойчивым относительно возмущений, образуя «конвективные ячейки», как показано на рис. 5.4. Такая неустойчивость называется обычно *неустойчивостью Рэля—Бенара* (аналогичные конвекционные ячейки изучались Бенаром в 1900 году). Теоретическое объяснение этого явления мы будем подробно обсуждать ниже.

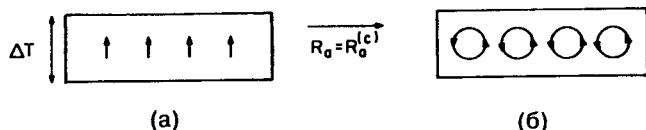


Рис. 5.4. Переход от состояния теплопроводности к конвективным ячейкам при критическом значении числа Рэля $R_a^{(c)}$

Экспериментально это явление исследовалось с использованием того же метода, что и в случае изучения течения Куэтта. На рис. 5.3 (г)–(е) приведены результаты для воды, помещенной при 70°C в прямоугольный сосуд. Эти результаты также представлены в виде энергетических спектров. В целом последовательность событий представляется аналогичной, происходящей в течении Куэтта. Когда число Рэля достигает критического значения, вначале в спектре наблюдается единственный пик и его гармоники. При больших значениях R_a появляется второй пик. Все остальные линии спектра могут быть при этом представлены как обертоны и комбинации основных линий. Наконец, по мере дальнейшего роста R_a , выраженные пики постепенно исчезают, и спектр становится практически непрерывным.

Оказалось, что существенное значение имеет геометрия сосуда. В работе [14], например, аналогичные результаты были получены при изучении конвекции жидкого гелия в цилиндрических ячейках лишь при малых отношениях высоты к радиусу, а при увеличении этого отношения спектр становился зашумленным сразу же после возникновения конвекции, и периодический режим не регистрировался вовсе.

Как в случае течения Куэтта, так и в случае конвекции Рэля—Бенара первоначальная неустойчивость с успехом была предсказана (Тейлором и Рэлеем соответственно) на основании линейной теории устойчивости. Существуют, однако, и другие течения, для которых линейный анализ устойчивости неэффективен и возникновение турбулентности в которых проходит через другие стадии. Примерами могут служить поток за цилиндром и нисходящий поток в трубке (течение Пуазейля). В последнем случае линейный анализ устойчивости предсказывает бесконечно большое критическое значение числа Рейнольдса, тогда как в действительности оно лежит между 2 000 и 100 000. Турбулентность может возникать вследствие нерегулярностей на входе трубки, на ее стенках или по другим причинам.

Эти примеры могут служить иллюстрацией того, насколько сложным может быть процесс зарождения турбулентности — каждый случай может немного отличаться от других. Вместе с тем, в случае течения Куэтта и конвекции Рэля—Бенара могут быть отмечены и общие черты: первоначально периодический режим усложняется и затем происходит довольно резкий переход к практически непрерывному спектру, соответствующему хаотическому поведению. С учетом сказанного перейдем к обсуждению некоторых теоретических представлений, разработанных для объяснения возникновения турбулентности.

5.3. Теоретические представления о возникновении турбулентности

В этом разделе мы обсудим ряд теорий, а также связанных с ними понятий, которые были разработаны для объяснения возникновения турбулентности, наблюдаемого, например, в описанных экспериментах. Такое обсуждение создает основу для изучения модельных систем, на которых эти теории могут быть опробованы.

5.3.а. Теория Ландау—Хопфа

Эта теория была предложена в начале 1940-х годов. Идея состоит в том, что решение (уравнения Навье—Стокса) квазипериодично, но с ростом числа Рейнольдса в нем «появляется» все больше и больше компонент частоты:

$$u(t) = f(\omega_1 t) \rightarrow f(\omega_1 t, \omega_2 t) \rightarrow f(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) \rightarrow \dots, \quad (5.3.1)$$

или в более общем виде

$$u(x, t) = \sum_m A_m(x) e^{im(\omega t + \delta)}, \quad (5.3.2)$$

где $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ и $m = m_1, m_2, \dots, m_k$; $k \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$.

По мере того, как $R \rightarrow \infty$, скорость возникновения новых частот увеличивается. Соотношение частот предполагается иррациональным, так что с ростом их числа спектр (быстро) усложняется до такой степени, что становится практически неотличимым от непрерывного спектра истинно хаотического движения.

Мы можем сразу отметить, что такая картина бесконечной квазипериодической «турбулентности» не согласуется с экспериментальными наблюдениями, например, для течения Куэтта и конвекции Рэлея—Бенара. Однако, прежде чем отбросить эту модель, рассмотрим некоторые вытекающие из нее следствия.

Прежде всего, какой смысл можно придать «возникающим» в решении новым частотам? Решение $u(x, t)$ можно представить себе как траекторию в некотором (бесконечномерном) фазовом пространстве. Но, в отличие от фазового пространства гамильтоновых систем, наличие диссипации вызывает сжатие фазового объема. Это означает, что траектория в конце концов окажется в некотором предельном многообразии (имеющем меру ноль во всем фазовом пространстве). Например, в случае линейного осциллятора, колебания которого затухают за счет простого трения, фазовая траектория будет закручиваться по спирали к *предельной точке*. Если механизм затухания колебаний осциллятора более сложен — например, осциллятор Ван-дер-Поля — траектория будет закручиваться в *предельный цикл*. Аналогичным образом фазовая траектория, отвечающая определенному состоянию течения жидкости, также будет заканчиваться в некотором предельном многообразии.

Понятно, что в случае единственной частоты ($u(t) = f(\omega_1 t)$) решение будет иметь вид простой *периодической траектории* (предельный цикл). При появлении второй независимой частоты ($u(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t)$) решение располагается на двумерном *торе* (n -мерный тор T^n можно определить как произведение n независимых периодических циклов). С появлением каждой новой частоты траектория решения переходит на новый тор, размерность которого совпадает с числом независимых частот (см. рис. 5.5). Возникает вопрос: каким образом траектория переходит с одного предельного многообразия на другое, т.е. почему исходное многообразие становится неустойчивым и возникает другое устойчивое многообразие более высокой размерности?

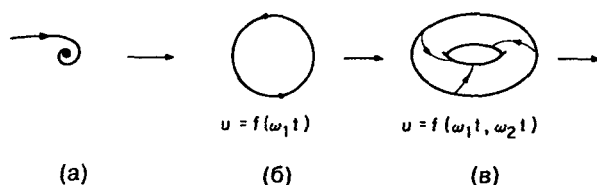


Рис. 5.5. Переход от (а) предельной точки к (б) предельному циклу (одна частота) и к (в) предельному двумерному тору (две частоты)

5.3.6. Теория бифуркации Хопфа

Основные идеи, на которых базируется объяснение такого перехода, возникли в известной теории бифуркации Хопфа. Мы рассмотрим ее вкратце; более полное изложение можно найти в [19]. Предположим, что наши уравнения движения управляются «потокком» вида

$$\frac{dx}{dt} = F_\mu(x), \quad x = x_1, \dots, x_k, \quad (5.3.3)$$

где μ — некоторый параметр системы (например, число Рейнольдса). Теорема Хопфа касается устойчивости решений этого уравнения как функции параметра μ . Критическими точками уравнения (5.3.3) являются такие точки $x = x^*$, в которых

$$\frac{dx^*}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad F_\mu(x^*) = 0. \quad (5.3.4)$$

Их устойчивость определяется путем анализа собственных значений $\lambda = \lambda(\mu)$ соответствующего касательного отображения $F_\mu(x)$, рассчитанного в критических точках. При условии, что все λ располагаются в левой полуплоскости, т. е. все имеют строго отрицательную действительную часть, критическая точка представляет собой простую предельную точку (рис. 5.6 (а)). Бифуркация Хопфа происходит при условии, что комплексно сопряженная пара собственных значений перемещается с ненулевой скоростью из левой полуплоскости в правую, т. е. приобретает положительную действительную часть. Если при критическом значении $\mu = \mu_c$ (значение μ , при котором λ перемещается в правую полуплоскость) выполняются определенные достаточно сложные условия, включающие первую, вторую и третью производные от $F_\mu(x^*)$, то можно показать, что предельная точка в результате бифуркации переходит в *устойчивую* периодическую траекторию (предельный цикл), к которой начинают притягиваться все соседние траектории (рис. 5.6 (б)).

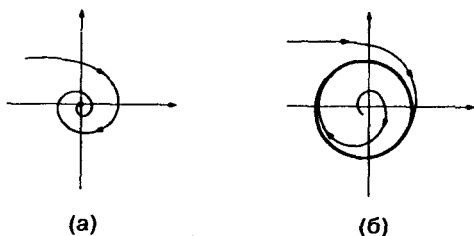


Рис. 5.6. (а) Траектории, закручивающиеся по спирали к предельной точке. (б) Траектории, закручивающиеся по спирали к устойчивому предельному циклу

Такой переход известен как *нормальная бифуркация Хопфа* (иногда называемая *сверхкритической бифуркацией*). Переход от устойчивой предельной точки к устойчивому предельному циклу можно наглядно представить себе (рис. 5.7) с помощью движения частицы в потенциале, у которого с ростом μ возникает второй минимум.

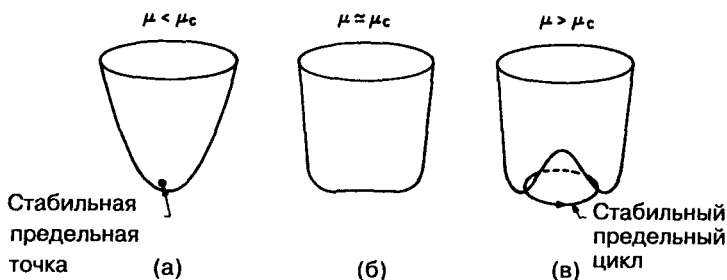


Рис. 5.7. Схематическое представление нормальной бифуркации Хопфа. Устойчивая предельная точка при $\mu < \mu_c$ (а) в результате перехода через $\mu = \mu_c$ (б) превращается в устойчивый предельный цикл при $\mu > \mu_c$

Возможна и другая ситуация, при которой при значении μ_c не возникает никаких притягивающих (устойчивых) решений. В этом случае нетрудно убедиться, что при $\mu < \mu_c$ существует *неустойчивая* периодическая траектория, которая по мере того, как μ проходит μ_c , постепенно стягивается к неустойчивой предельной точке, как показано на рис. 5.8. Такая ситуация известна как *обратная* (или *субкритическая*) бифуркация Хопфа.

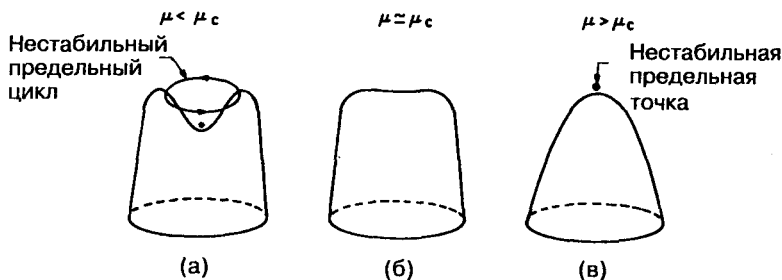


Рис. 5.8. Схематическое представление обратной бифуркации Хопфа. Неустойчивый предельный цикл при $\mu < \mu_c$ (а) в результате перехода через $\mu = \mu_c$ (б) стягивается к неустойчивой предельной точке при $\mu > \mu_c$ (в)

Должно быть понятно, что картина возникновения турбулентности Ландау—Хопфа основана на последовательности нормальных бифуркаций Хопфа. Можно, предполагая нормальные бифуркации, задать вопрос, каким именно образом осуществляются переходы более высоких порядков (скажем, от периодической траектории к двумерному тору).

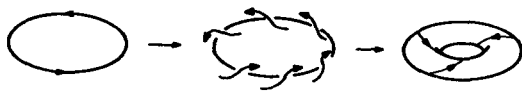


Рис. 5.9. Схематическое изображение превращения предельного цикла в двумерный тор

Наглядно это можно представить себе с помощью рис. 5.9.

Продemonстрировать такое поведение точно не столь просто. На рис. 5.10 движение изображено на *отображении Пуанкаре* (которое аналогично поверхности сечения Пуанкаре, использовавшейся при изучении гамильтоновых систем). Если бы удалось показать, что на этом отображении имеются устойчивые инвариантные окружности, то это доказывало бы наличие тора. Заметим, что при изучении преобразования на отображении Пуанкаре исходный поток (дифференциальное уравнение) рассматривается как диффеоморфизм (гладкое обратимое отображение). С формальной точки зрения при этом требуется бифуркационная теорема Хопфа для диффеоморфизмов. Такая теорема действительно имеется.

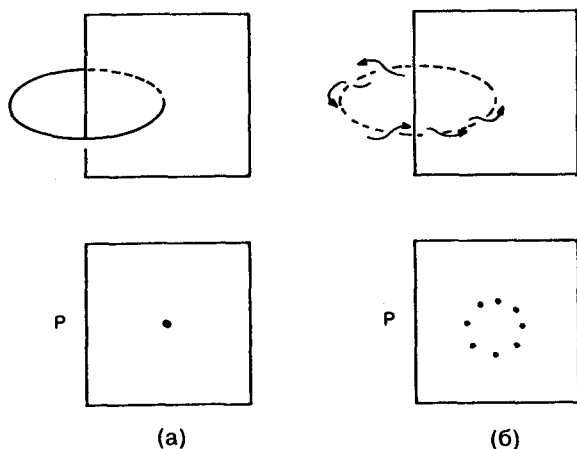


Рис. 5.10. (а) Отображение Пуанкаре P предельного цикла представляет собой единственную точку. (б) Когда цикл преобразуется в двумерный тор, на отображении Пуанкаре возникает состоящая из точек окружность

И все-таки, как мы видели в самом начале обсуждения теории Ландау—Хопфа, она не согласуется с экспериментальными наблюдениями. Требуется, очевидно, более совершенная теория. Такой теорией является теория Рюэля—Тэкенса.

5.3.в. Теория Рюэля—Тэкенса

В своей основе эта теория, предложенная в 1971 году, напоминает теорию Ландау—Хопфа в том отношении, что она также основана на представлении о нормальных бифуркациях, в результате которых образуются торы все более высокой размерности. Но при этом Рюэль и Тэкенс предположили, что по достижении времени T_4 ⁴⁾ движение может ограничиваться многообразиями, которые уже не являются гладкими торами, а имеют сложную топологию. Такие многообразия получили наименование *странных аттракторов*. В более поздней работе совместно с Ньюхаузом [20] было показано, что странные аттракторы могут существовать по достижении времени T_3 . Эти странные аттракторы представляют собой многообразия, не имеющие простой целой размерности, т. е. нечто промежуточное между, скажем, поверхностью и объемом. Понятие нецелой размерности подробно изучалось Мандольбротом [18] в контексте *фракталов*, которые будут рассматриваться в разделе 5.3.д.

⁴⁾ Здесь нижние индексы в T_4 , T_3 указывают на количество необходимых для появления странного аттрактора нормальных бифуркаций. — Прим. ред.

Основное положение теории Рюэля—Тэкенса—Ньюхауза состоит в том, что если аттрактор удовлетворяет определенным условиям, т. е. относится к аттракторам «аксиомы А» (на практике оказывается, что этот класс весьма ограничен), то движение на нем *хаотично*. Это означает, что движение очень чувствительно к начальным условиям; временные корреляции указывают на экспоненциальное затухание (доказанное лишь в некоторых случаях); усредненное поведение описывается мерой dm с ненулевой энтропией.

Эти свойства странных аттракторов определяют принципиальные различия между теорией Ландау—Хопфа и теорией Рюэля—Тэкенса. В первой из них движение всегда предполагается *квазипериодичным* по своей природе. Во второй существование странных аттракторов обеспечивает механизм, благодаря которому движение полностью детерминистической диссипативной динамической системы может проявлять существенно *хаотическое* поведение. Таким образом оказывается, что хаос в диссипативной системе возможен и без внешнего шума.

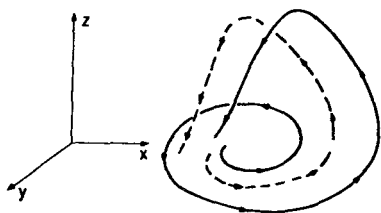


Рис. 5.11. Два соседних начальных условия (сплошная и пунктирная линии) экспоненциально разбегающиеся по спирали в плоскости $x-y$ (растяжение) и вновь притягивающиеся обратно (складывание) в направлении z

мерения парадокс может быть разрешен следующим образом. Представим себе траектории, которые разбегаются в плоскости путем раскручивания по спирали от некоторой неустойчивой спиральной точки, затем покидают плоскость, а после «складывания» вновь возвращаются (притягиваются) в центр спирали. Такие траектории показаны на рис. 5.11. Понятно, что при этом реализуются два основных процесса: (1) *растяжение*, обеспечивающее чувствительность к начальным условиям, и (2) *складывание*, благодаря которому возможно притяжение. С учетом того, что траектории в фазовом пространстве не могут пересекаться, последовательные повторения таких растяжений и складываний должны приводить к топологически чрезвычайно сложному объекту.

Чтобы получить некоторое представление о степени этой сложности, рассмотрим простое модельное преобразование, известное как *отображение подковы Смэйла* [22]. Оно состоит из следующей последовательности растяжений и складываний. Сначала выбирается исходный прямоугольник (рис. 5.12), который растягивается в (скажем) направлении x и в несколько большей степени сжимается в направлении y . В результате исходный прямоугольник преобразуется в более длинный и узкий прямоугольник, площадь которого немного меньше, чем у исходного (т. е. площадь уменьшается, что отражает поведение диссипативных систем). Следующий шаг состоит в том, чтобы изогнуть полученный прямоугольник и придать ему форму

На первый взгляд может показаться, что возможность существования хаоса в диссипативной системе не согласуется с интуитивными представлениями, поскольку, как мы видели при обсуждении гамильтоновых систем, чувствительность к начальным условиям означает разбегание смежных траекторий (и, соответственно, положительность показателей Ляпунова), тогда как диссипация предполагает притяжение траекторий. Безусловно, в случае потоков (дифференциальных уравнений) на плоскости (т. е. в случае двумерного фазового пространства) совмещение этих двух представлений выглядит (и так оно и есть) топологически невозможным. Но с появлением у фазового пространства третьего (или более) из-

подковы⁵⁾. Затем описанная последовательность действий повторяется. Подкова вытягивается в более длинную и узкую и затем изгибается, что приводит к структуре, напоминающей двойную шпильку. Понятно, что если такие преобразования продолжать и дальше, то получится чрезвычайно сложная структура. Поперечное сечение этой структуры (см. рис. 5.13) представляет собой последовательность сегментов, число которых удваивается при каждой итерации (т. е. два сегмента после первой итерации, четыре сегмента после второй и т. д.). Такая последовательность сегментов образует так называемое *канторово множество*, о котором мы будем говорить в разделе 5.3.д как о простом примере фрактала.

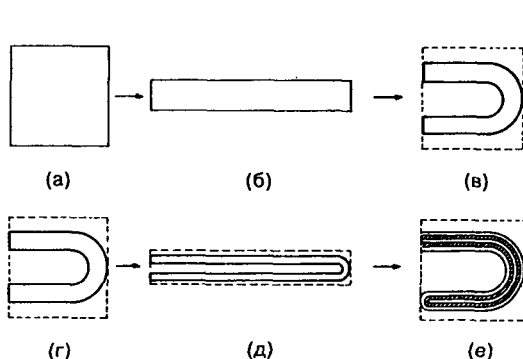


Рис. 5.12. Отображение подковы Смэйла. Исходный квадрат (а) растягивается таким образом, что его длина удваивается, а площадь несколько уменьшается (б), а затем изгибается в виде подковы (в). На (г), (д) и (е) этот процесс повторяется, что дает дважды изогнутую подкову (е)

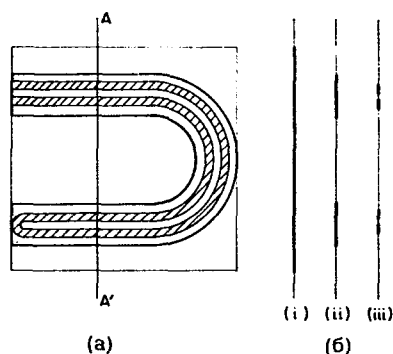


Рис. 5.13. (а) Типичное сечение А—А' подковы Смэйла. (б) Последовательность сечений (1), (2) и (3) иллюстрирует формирование структуры типа канторова множества

5.3.г. Другие сценарии

Теория Рюэля—Тэкенса—Ньюхауза является существенным развитием предыдущих теорий, но вся картина в целом ею не исчерпывается. К настоящему времени стало понятно, что в действительности существует много различных «механизмов развития турбулентности». «Сценарий» Рюэля—Тэкенса—Ньюхауза — лишь один из них. Особый интерес представляет развитие турбулентности путем последовательных *бифуркаций удвоения периода*, подробно рассматриваемого в разделе 5.5. Другой важный механизм развития — *перемежаемость*. Хороший обзор этих сценариев дал Экман [5]; более подробное изложение можно найти в прекрасной книге Берже с соавт. [1].

5.3.д. Фракталы

На рис. 5.14 приведен хорошо известный пример простого фрактала — *снежинка Коха*. Продолжение построения такой снежинки приводит к кривой, имеющей

⁵⁾ Эта последовательность действий аналогична описанному в разделе 4.7 преобразованию пекаря — с тем, однако, важным отличием, что преобразование пекаря сохраняет площадь.

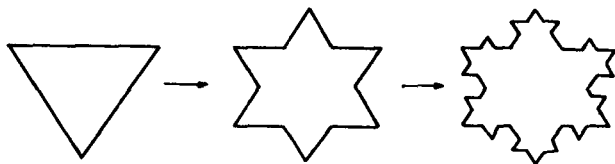


Рис. 5.14. Первые стадии построения снежинки Коха

бесконечную длину, но ограничивающей конечную площадь. В отличие от простой кривой, имеющей (топологическую) размерность единица, эта кривая характеризуется так называемой размерностью Хаусдорфа—Безиковича (D_H), значения которой заключены между единицей (линия) и двумя (поверхность). Можно показать, что в рассматриваемом случае

$$D_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618 \dots \quad (5.3.5)$$

Фундаментальным свойством таких фракталов, которое проявляется уже в этом простом примере, является их *воспроизводимость* в любом масштабе. У фрактала может существовать наибольший масштаб, но, в принципе, не должно быть такого малого масштаба, в котором не воспроизводилась бы основная структура. (На практике, конечно, могут возникать также и ограничения снизу.) Часто говорят, что такие структуры аналогичны структуре канторова множества. Само канторово множество строится следующим образом: единичный интервал делится на три равных части, средняя удаляется и процесс повторяется для каждого из оставшихся сегментов (рис. 5.15), и так далее. В этом случае размерность Хаусдорфа—Безиковича равна

$$D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots \quad (5.3.6)$$

В случае таких простых геометрических объектов, как снежинка и канторово множество, D_H легко рассчитывается исходя из следующего соображения. Рассмотрим канторово множество. Зададим общую меру точек, лежащих на сегменте длины l в виде некоторой функции $\mu = \mu(l)$. Если предположить, что в процессе построения канторова множества, при котором на каждом шаге остается два сегмента, каждый из которых имеет длину, равную $1/3$ исходной, общая мера точек сохраняется, то

$$\mu(3l) = 2\mu(l). \quad (5.3.7)$$

Если далее предположить, что $\mu(l)$ преобразуется как

$$\mu(l) \sim l^\delta, \quad (5.3.8)$$

то из (5.3.7) легко вытекает, что показатель степени δ равен $\log 2 / \log 3$. Этот показатель степени и является «фрактальной размерностью» D_H . Во многих случаях фрактальную размерность самовоспроизводящегося объекта приходится рассчитывать численно. Ко времени написания книги эта задача стала одной из наиболее

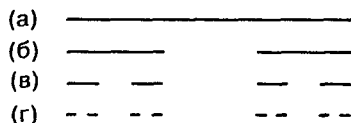


Рис. 5.15. Построение канторова множества: (а) единичный интервал; (б) удаление среднего сегмента $1/3$; (в) удаление средних сегментов $1/9$; (г) удаление средних сегментов $1/27$ и т.д

актуальных в обсуждаемой области исследований. Одним из наиболее конструктивных алгоритмов расчета размерности является в настоящее время алгоритм Грассбергера и Прокацио [17]. Большинство таких алгоритмов позволяет как правило рассчитывать не D_H непосредственно, а некоторую связанную с ней величину. В случае метода Грассбергера—Прокацио, основанного на свойствах определенной корреляционной функции, вычисляется нижняя граница D_H .

В теории глобальной турбулентности полагается, что вихревые слои свертываются в бесконечно сложные фрактальные структуры.

5.4. Математические модели странных аттракторов

Перейдем к рассмотрению некоторых простых математических моделей, позволяющих описывать ряд свойств странного аттрактора.

5.4.а. Модель Лоренца

Эта известная система, исследованная Лоренцем в 1963 году, знаменита в том числе и тем, что была построена задолго до появления понятия странного аттрактора. Она создавалась с целью построить упрощенную модель атмосферной конвекции для решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды. В последующие годы эта система подробно изучалась многими авторами. Большинство полученных результатов собрано в [30].

Рассмотрим слой жидкости постоянной глубины H , на которую наложен температурный градиент ΔT . Если все движения параллельны плоскости $(x - z)$ и однородны в направлении y , то управляющие уравнения движения могут быть представлены в двумерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 \psi) + \nu \nabla^2(\nabla^2 \psi) + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \nabla^2 \theta + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где ψ — функция тока двумерного движения, т. е. компоненты скорости ($\mathbf{u} = (u, w)$) задаются соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.4.2)$$

а θ — поле температур, характеризующее отклонение от состояния равновесия. Коэффициенты:

- g — гравитационная постоянная,
- α — коэффициент термического расширения,
- ν — кинематическая вязкость,
- k — теплопроводность.

Рэлей нашел, что решения вида

$$\psi = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right), \quad \theta = \theta_0 \cos\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (5.4.3)$$

должны возрастать в том случае, если число Рэлея, т. е. величина

$$R_a = \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu k} \quad (5.4.4)$$

будет превышать критическую величину

$$R_a^{(c)} = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}. \quad (5.4.5)$$

Минимальное значение $R_a^{(c)}$ достигается при $a^2 = 1/2$:

$$R_a^{(c)} = \frac{27\pi}{4} = 657.511. \quad (5.4.6)$$

Для численного решения задачи требуется проинтегрировать пару двумерных дифференциальных уравнений в частных производных (5.4.1). Это всегда неприятная задача. Альтернативой непосредственному численному интегрированию является разложение функций ψ и θ по базисному набору. При этом, задавшись периодическими граничными условиями в обоих направлениях, имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x a}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right), \\ \theta(x, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x a}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right). \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Подстановка этих разложений в дифференциальные уравнения в частных производных дает *бесконечное* число *обыкновенных* дифференциальных уравнений. Для осуществления интегрирования требуется *конечное* усечение этого бесконечного набора.

Лоренц (1963) рассмотрел предельное возможное усечение, включив в рассмотрение лишь коэффициенты ψ_{11} (обозначаемый через X), $\theta_{11}(Y)$ и $\theta_{02}(Z)$. В этом случае с помощью масштабных преобразований можно свести систему к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - Z), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

где $\sigma = \nu/k$ — число Прандтля, $r = R_a/R_a^{(c)}$ — (нормированное) число Рэлея, $b = 4/(1+a^2)$ — геометрический фактор и переменная времени преобразуется как $\tau = \pi^2(1+a^2)kt/H^2$. В системе уравнений (5.4.8), обычно называемых *уравнениями Лоренца*, переменным X , Y и Z может быть дана простая физическая интерпретация:

X — интенсивность конвекции;

Y — разность температур между восходящим и нисходящим потоками;

Z — отклонение вертикального температурного профиля от линейного.

Изучим некоторые свойства уравнений (5.4.8).

(а) *Дивергенция*

$$D = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(b + \sigma + 1) \quad (5.4.9)$$

отрицательна, так как b и σ положительны. Обозначив элемент объема фазового пространства через $\Gamma(t)$, представляем сжатие в виде

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-(b+\sigma+1)t}. \quad (5.4.10)$$

Таким образом, все траектории ограничиваются в конце концов некоторым предельным многообразием.

(б) *Критические точки.* Условию

$$\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$$

удовлетворяют точки:

- (1) $X = Y = Z = 0$, отвечающая состоянию чистой теплопроводности без конвекции;
- (2) $X = Y = +\sqrt{b(r-1)}$, $Z = (r-1)$ и $X = Y = -\sqrt{b(r-1)}$, $Z = (r-1)$, соответствующие состоянию *стационарной* конвекции. Отметим, что такие состояния существуют только при $r > 1$.

(в) *Свойства устойчивости.* Линеаризованное преобразование имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (\sigma - Z) & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} \quad (5.4.11)$$

и позволяет сделать следующие выводы об устойчивости критических точек.

- (1) $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$: при $r < 1$ точка устойчивости, т. е. все собственные значения имеют отрицательную действительную часть; при $r > 1$ действительная часть одного из собственных значений становится положительной. Критическая точка неустойчива, и, следовательно, бесконечно малое возмущение может вызвать конвекцию. Отметим, что устойчивость критической точки зависит только от значения числа Рэлея.
- (2) $(X, Y, Z) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$: при $r > 1$ собственные значения состоят из одного действительного отрицательного корня и пары комплексно сопряженных корней. Можно показать, что эта пара критических точек теряет устойчивость при

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)}. \quad (5.4.12)$$

При положительных r это условие выполняется только в том случае, если

$$\sigma > (b + 1).$$

Отметим, что устойчивость этих критических точек зависит уже не только от значения числа Рэлея.

В своей работе [27] Лоренц выбрал следующие значения параметров:

$$b = \frac{8}{3} \quad \text{и} \quad \sigma = 10.$$

При таком выборе стационарное (конвективное) состояние теряет устойчивость при

$$r = \frac{470}{19} \simeq 24.74 \dots$$

и скорость сжатия $D = -13.67$ очень велика.

Сформулируем, что происходит с решениями уравнений Лоренца по мере возрастания r .

- (1) $0 < r < 1$. Начало координат является глобальным притягивающим стационарным решением, и все траектории (соответствующие всем различным начальным условиям) постепенно закручиваются по спирали к началу координат.
- (2) $1 < r < 24.74$. Начало координат теряет устойчивость и в результате бифуркации превращается в пару локальных притягивающих стационарных решений $C = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $C' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Фактически все траектории стягиваются либо к C , либо к C' . Исключение составляет множество траекторий (меры ноль), остающихся в окрестности начала координат. При $r \approx 13.926$ начало координат преобразуется в гомоклиническую точку. Дальнейший рост r приводит к неразличимости «областей притяжения» C и C' , в результате чего траектории могут переходить из одной в другую прежде, чем окончательно зафиксироваться.
- (3) $r \approx 24.74$. Как уже говорилось, это критическое значение, при котором стационарные состояния C и C' теряют устойчивость. Однако анализ по Хопфу показал, что при больших значениях r существует обратная бифуркация; поэтому предельные точки C и C' не превращаются в предельные циклы.
- (4) $r > 24.74$. Траектории, полученные в этом режиме, ведут себя нетривиально. В оригинальной работе [27] Лоренц рассматривал траекторию с начальными условиями $(X, Y, Z) = (0, 1, 0)$ (малое отклонение от равновесия) при значении $r = 28$. При этом значении r имеются неустойчивые стационарные состояния $C = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ и $C' = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$. Расчеты Лоренца показали, что после того как некоторые временные колебания затухают, движение становится крайне неупорядоченным. Это является результатом того, что решение, раскручиваясь по спирали в окрестности одной из неподвижных точек (C или C') в течение произвольного периода времени, перепрыгивает затем в окрестность второй неподвижной точки и также некоторое время раскручивается по спирали, а затем перепрыгивает назад и т.д. Такое сочетание движения по спирали (вдоль неустойчивого многообразия) и возврата (вдоль устойчивого многообразия) порождает обсуждавшийся выше механизм растяжений и складываний и приводит к чрезвычайно сложному многообразию, а именно, к странному аттрактору определенного вида. Типичная траектория этого аттрактора показана на рис. 5.16. (Кажущаяся регулярность показанной на рисунке структуры обманчива — аттрактор чрезвычайно сложен.) Спектр мощности траектории существенно непрерывен, что указывает на выраженную хаотичность движения.

Фазовое пространство системы Лоренца трехмерно, и естественно задать вопрос, существует ли способ компактного представления движения аналогичный, возможно, методу поверхности сечения, используемому в случае гамильтоновых систем. После того, как переходные процессы затухают и система «оседает» странный аттрактор, поведение всех индивидуальных переменных X , Y и Z как функций времени становится хаотическим. Нужно отдать должное проницательности Лоренца, который изучил последовательные значения максимумов функции $Z(t)$. Z достигает максимального значения при движении по спирали в окрестности одной из неподвижных точек C или C' (обозначим его через Z_n), а затем перепрыгивает к другой неподвижной точке и там достигает следующего максимального значения (Z_{n+1}) и т.д. Зависимость Z_{n+1} от Z_n имеет вид, показанный на рис. 5.17. Замечательно, что это одномерное «отображение» содержит существенные черты динамики аттрактора Лоренца. Свойства таких одномерных отображений мы будем подробно изучать в разделе 5.5.

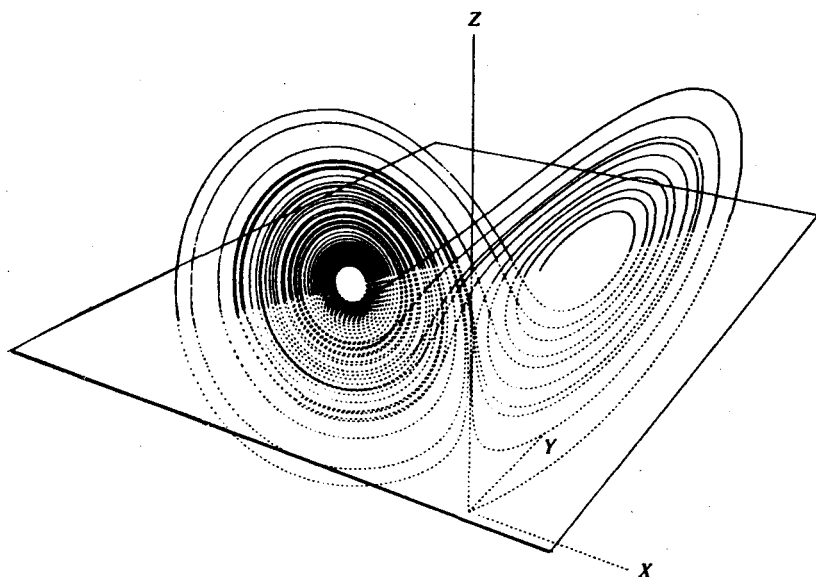


Рис. 5.16. Решение уравнения Лоренца, полученное численно при $r = 28$. Горизонтальная плоскость соответствует значению $Z = 27$. (Воспроизведено, с разрешения, из: *Lanford O. Turbulence Seminar // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 615. New York: Springer-Verlag, 1977*)

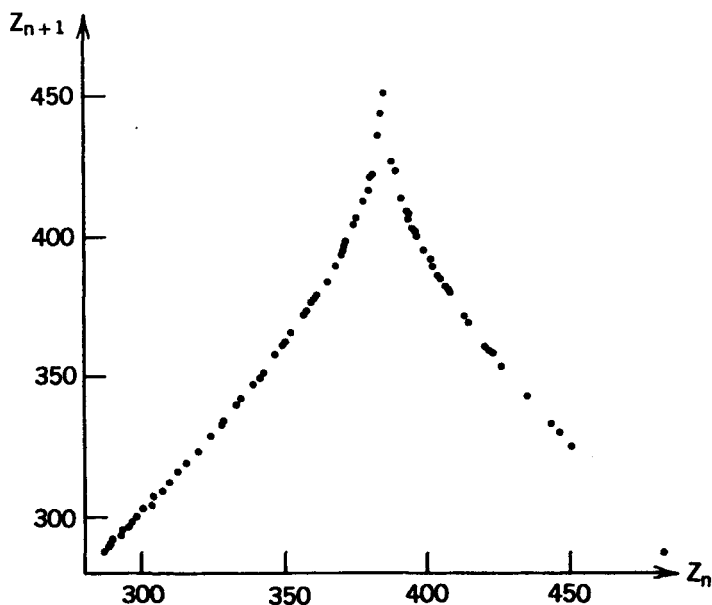


Рис. 5.17. Зависимость максимальных значений Z_{n+1} от предыдущих максимальных значений Z_n в случае уравнений Лоренца при $r = 28$. (Воспроизведено, с разрешения Американского метеорологического общества, из: *Lorenz E. N., Atmos. S. Sci., 20, 130-141 (1963)*)

Природа аттрактора Лоренца изучена очень подробно. Это действительно странный аттрактор, хотя он и не относится к аксиоме А. Отметим, что хотя движение явно становится хаотическим по достижении $\tau \approx 24.74$, последовательность событий, приводящих к этому хаосу, не включает в себя никаких периодических режимов, т. е. это не соответствует полному сценарию Рюэля—Тэкенса возникновения турбулентности.

Интересно также, что происходит при очень больших значениях τ . Исследования различных авторов свидетельствуют о существовании чередующихся режимов турбулентности и периодического поведения. При значениях τ , превышающих 28, странный аттрактор превращается в периодический предельный цикл (примерно при $\tau = 145 \div 148$). По мере дальнейшего возрастания τ этот предельный цикл некоторое время сохраняется, но затем превращается снова в странный аттрактор. При еще больших значениях τ вновь происходит превращение в другой предельный цикл (при $\tau = 210 \div 234$). При переходе от предельного цикла к хаотическому режиму наблюдается эффект, называемый *перемежаемостью*, т. е. «всплески» турбулентности на фоне периодического движения. Эти всплески могут быть различных типов; их подробное обсуждение можно найти в [1]. Заметим в заключение, что насколько такое поведение при больших τ (т. е. чередование хаотического и периодического режимов) представляет академический интерес, настолько оно делает модель Лоренца нереалистичной, когда речь идет о «реальной» турбулентности.

5.4.6. Варианты модели Лоренца

Одним из основных недостатков модели Лоренца является крайне жесткие условия усечения. Поэтому важно проанализировать, что произойдет по мере добавления других мод. Случай 14 мод в модели Лоренца был изучен Карри [24]. Мы обсудим вкратце основные результаты. Оказалось, что в этом случае существует ряд хорошо различимых режимов. (Следует отметить, что в этой работе определение параметра τ несколько отличалось от принятого в работе Лоренца; поэтому не следует сопоставлять абсолютные значения.)

- (1) $1 < \tau < 43.48$. Движение сходится к устойчивой неподвижной точке системы (имеется две такие точки).
- (2) $\tau \approx 43.70$. Появляется устойчивый предельный цикл, что указывает на нормальную бифуркацию Хопфа. В окрестности $\tau \approx 44.07$ период этого предельного цикла удваивается.
- (3) $44.6 < \tau < 45.10$. Имеются весомые подтверждения существования устойчивого двумерно тора.
- (4) $\tau > 45.10$. Возникает странный аттрактор, очень сильно напоминающий (в подходящей проекции) аттрактор Лоренца.

Хотя сам факт, что в рассматриваемой системе также был найден странный аттрактор, вселяет определенные надежды, нелишне высказать некоторые предостережения. Более систематическое изучение моделей, подобных модели Лоренца, при возрастании числа мод подтверждает, конечно, необычайное богатство динамики. Но при этом самым чувствительным параметром в этом семействе систем оказывается само число мод! Другими словами, по-видимому не существует такого единственного поведения, к которому сходились бы все системы. Это служит сильным аргументом в пользу того, что усечения дифференциальных уравнений в частных

производных, при которых сохраняется небольшое число мод, не могут давать надежной картины «истинного» поведения (каково бы оно ни было), когда физически значимо много пространственных масштабов. Действительно, одно из наиболее активных направлений современных исследований различных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено доказательству существования аттракторов конечной размерности; оно известно как теория «инертных многообразий» (см., например, [25]).

Тем не менее простые модели, такие как модель Лоренца, интересны сами по себе вследствие богатства их динамики. В качестве другого интересного примера может служить модель Реслера:

$$\dot{X} = -(Y + Z), \quad \dot{Y} = X + 0.2Y, \quad \dot{Z} = 0.2 + XZ - cZ. \quad (5.4.13)$$

С ростом параметра c движение претерпевает ряд четко фиксируемых бифуркаций удвоения периода, приводящих в конце концов к появлению странного аттрактора (см. рис. 5.18). Другой моделью, демонстрирующей сходное поведение, является осциллятор Дюффинга (1.6.11), рассматривавшийся в главе 1.

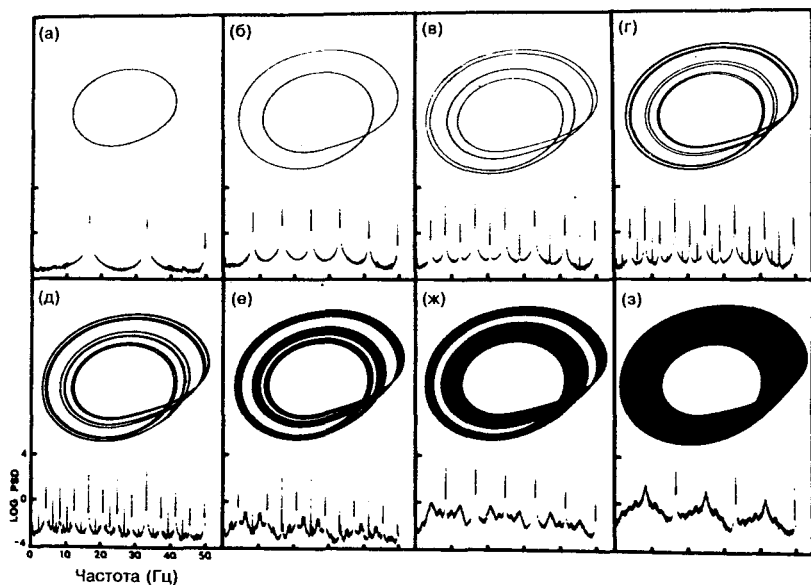


Рис. 5.18. Траектории уравнений Реслера (5.4.13), спроецированные на плоскость (x, y) , и соответствующие спектры мощности. Рассчитаны численно при (а) $c = 2.6$, (б) $c = 3.5$, (в) $c = 4.1$, (г) $c = 4.18$, (д) $c = 4.21$, (е) $c = 4.23$, (ж) $c = 4.30$, (з) $c = 4.60$. (Воспроизведено, с разрешения, из [23])

5.4.в. Отображение Хенона

Проведенный анализ моделей порождает естественное стремление отыскать простые алгебраические отображения, которые обладали бы свойствами странных аттракторов. Такое отображение, сконструированное Хеноном, имеет довольно простой вид:

$$T: \quad x_{i+1} = y_i - ax_i^2 + 1, \quad (5.4.14a)$$

$$y_{i+1} = bx_i. \quad (5.4.14b)$$

Это — сжимающее отображение, поскольку

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = -b. \quad (5.4.15)$$

T может быть представлено в виде произведения трех более простых отображений

$$T = T' T'' T''', \quad (5.4.16)$$

где

$$T': \quad x' = x, \quad y' = y + 1 - ax^2, \quad (5.4.17a)$$

$$T'': \quad x'' = bx', \quad y'' = y', \quad (5.4.17b)$$

$$T''': \quad x''' = y'', \quad y''' = x''. \quad (5.4.17c)$$

Эти отображения соответствуют изгибу, сжатию и повороту соответственно (см. рис. 5.19). Именно такое сочетание преобразований обеспечивает возможность растяжений и складываний, которые требуются для возникновения хаотического поведения. Следует также отметить, что рассматриваемое отображение, как и его сохраняющий площадь близнец (4.2.11), обратимо. Обратное отображение имеет вид

$$T^{-1}: \quad x_i = \frac{1}{b} y_{i+1}, \quad (5.4.18a)$$

$$y_i = x_{i+1} - 1 + \frac{a}{b^2} y_{i+1}^2. \quad (5.4.18b)$$

Таким образом, некоторая конечная точка, в принципе, может быть однозначно «возвращена во времени» обратно в исходное положение (x_0, y_0) .

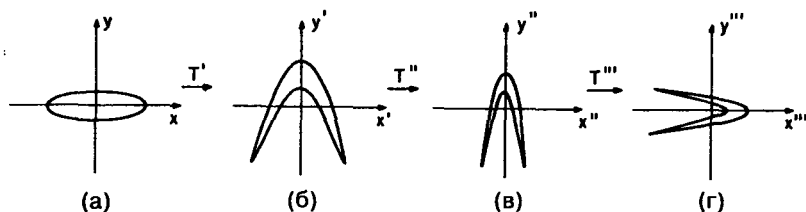


Рис. 5.19. Последовательность преобразований, составляющих отображение Хенона. Элемент площади (а) изгибается (б), сжимается (в) и поворачивается (г)

Как показывают численные расчеты, в пределах достаточно большой области фазовой плоскости (x, y) все траектории «оседают» на многообразии довольно сложного вида — «аттракторе Хенона». Вне пределов этой области траектории уходят на бесконечность. С помощью удачно подобранной последовательности рисунков, выполненных компьютером (рис. 5.20), Хенон [26] ясно показал, что этот аттрактор имеет структуру типа канторова множества. Спектр мощности отображения Хенона оказался весьма зашумленным. (Хотя аттрактор Хенона безусловно является странным, он все же не попадает в очень ограниченную категорию аттракторов аксиомы А.)

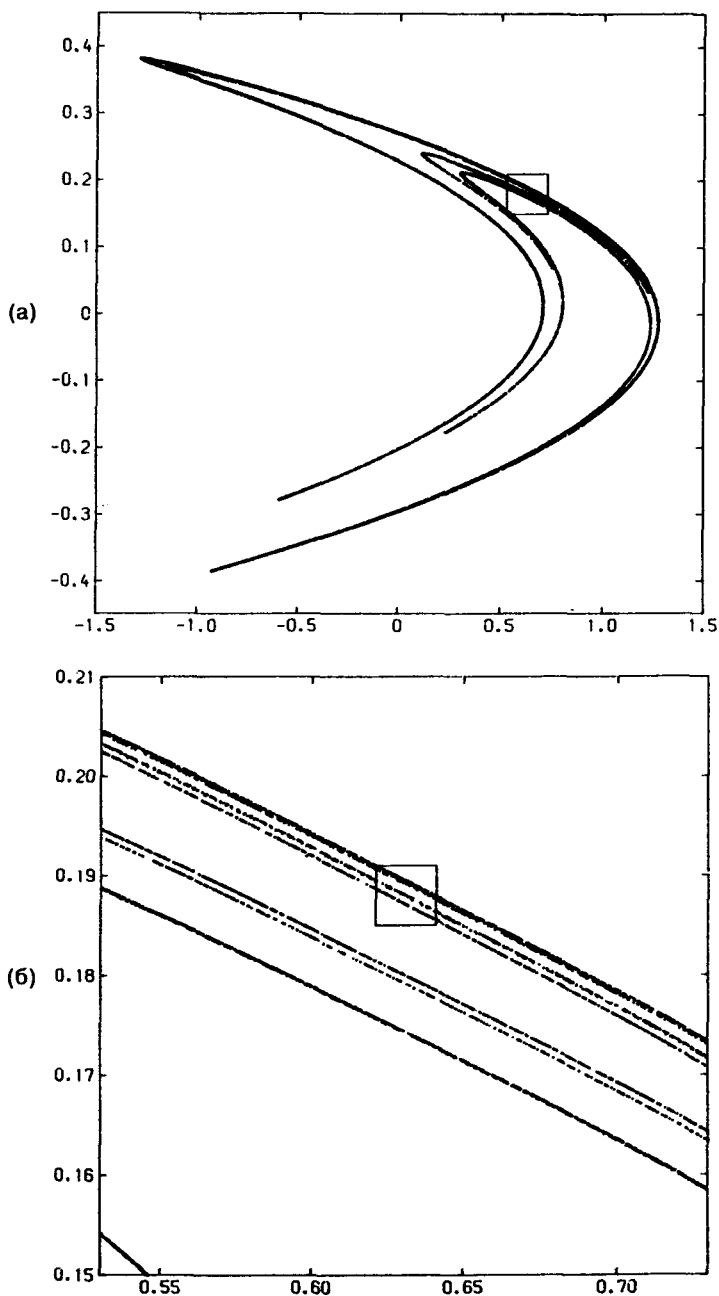


Рис. 5.20. (а) Аттрактор Хенона, рассчитанный по уравнениям (5.4.14) при $a = 1.4$, $b = 0.3$. (б) Увеличение ограниченной области (а) демонстрирует, что аттрактор имеет структуру типа канторова множества. Дальнейшее увеличение ограниченной области (б) подтверждает это. (Воспроизведено, с разрешения Springer-Verlag, из [26])

Упомянем в заключение элегантный вариант отображения Хенона, называемый *отображением Лози*:

$$T: \begin{aligned} x_{i+1} &= y_i + 1 - a|x_i|, \\ y_{i+1} &= bx_i. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Странный аттрактор, порождаемый этим отображением, состоит из отрезков прямых линий. Можно доказать, что он относится к типу аксиомы А.

5.5. Бифуркации удвоения периода

Как ранее уже упоминалось, важным «механизмом возникновения турбулентности» является бифуркация удвоения периода. Замечательно, что таким сложным поведением обладают простейшие из всех возможных нелинейных отображений, а именно одномерные отображения вида

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5.5.1)$$

При этом $f(x)$ должна удовлетворять определенным условиям. Среди таких отображений одним из наиболее известных является так называемое *логистическое отображение*

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n), \quad 0 < x < 1, \quad (5.5.2)$$

где λ — подгоночный параметр. Первоначально оно использовалось главным образом в биологии в качестве простой модели динамики популяций (откуда и происходит название). Читателю рекомендуется обратиться к прекрасной и основополагающей статье [37], в которой описывается феноменология системы при изменении параметра λ . При малых λ все итерации сходятся (при условии, что $x_0 \neq 0$) к единственной предельной точке. Такое поведение сохраняется вплоть до значения $\lambda = 0.75$. При больших λ единственная неподвижная точка превращается в результате бифуркации в пару неподвижных точек, т. е. в предельный цикл с периодом 2. Следующая бифуркация при дальнейшем возрастании λ приводит к превращению предельного цикла с периодом 2 в предельный цикл с периодом 4, который в свою очередь превращается в предельный цикл с периодом 8 и т. д. Значения λ , при которых происходят бифуркации ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$), становятся все ближе друг к другу и сходятся (геометрически) к критическому значению λ_∞ (примерно 0.892). В этой точке траектория становится аperiодической. При больших значениях λ начинают появляться как хаотические траектории, так и предельные циклы с нечетными периодами. При $\lambda = 1$ движение на единичном интервале $(0, 1)$ формально эргодично. При дальнейшем возрастании λ все траектории уходят на бесконечность.

Один из наиболее значительных результатов принадлежит Фейгенбауму [33], который обнаружил геометрическую сходимость последовательности удвоения периода:

$$\lambda_\infty - \lambda_n \propto \delta^{-n}. \quad (5.5.3)$$

Определив величину

$$\delta_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}, \quad (5.5.4)$$

он численно нашел, что δ_n сходится (при $n \rightarrow \infty$) к значению $\delta = 4.6692016$. Существенно то, что и все другие нелинейные модели (5.5.1), отличающиеся видом $f(x)$ (в пределах определенного класса), характеризуются тем же самым значением δ . В результате эта величина удостоилась названия «универсальное число». И хотя

эта «универсальность» ограничена относительно небольшим классом отображений и потоков (сюда относятся отображения Хенона, модель Лоренца и некоторые усе-чения уравнений Навье—Стокса, содержащие малое число мод), она легла в основу интересной теории и наблюдалась в ряде экспериментов.

5.5.а. Механизм удвоения периода

Для отображения вида

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.5.5)$$

последовательность итераций, начинающихся в x_0 , записывается следующим обра-зом:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)), \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n) = f(f(\dots f(x_0))) = f^n(x_0), \end{aligned}$$

где $f^n(x_0)$ означает n -ю итерацию функции $f(x)$ (а не n -ю степень $f(x)$). Если $f(x)$ линейна по x , эти итерации тривиальны, но в случае нелинейной $f(x)$, например

$$f(x) = 4\lambda x(1 - x), \quad (5.5.6)$$

последовательные итерации приводят к полиномам возрастающей степени (для (5.5.6) $f^n(x)$ представляет собой полином степени 2^n). Несмотря на такую слож-ность, последовательность итераций x_i можно проследить с помощью простого графического приема, совместив на одном графике функцию $y = f(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 5.21), и перемещаясь последовательно в вертикальном и горизонтальном направлении между этими линиями. Это дает, как показано на рисунке, последова-тельность итераций $x_0, x_1, x_2, \dots$.

Точка пересечения кривой и прямой (в которой $y = f(x) = x$) должна соответ-ствовать неподвижной точке последовательности итераций. Эта неподвижная точка легко находится как решение уравнения

$$x^* = 4\lambda x^*(1 - x^*), \quad (5.5.7)$$

которое имеет два корня

$$x^* = 0 \quad \text{и} \quad x^* = 1 - \frac{1}{4}\lambda.$$

Для того, чтобы итерации $f(x)$ не выходили за пределы интервала $(0, 1)$, потребуем выполнения условий $0 < \lambda < 1$ и $0 < x < 1$. Таким образом, при $\lambda < 1/4$ в этом интервале находится единственная неподвижная точка $x^* = 0$, а при $1/4 < \lambda < 1$ достижимы обе неподвижные точки. Эти точки будут притягивающими или оттал-кивающими (устойчивыми или неустойчивыми) в зависимости от наклона $f(x)$. Рассмотрим неподвижную точку x^* (в которой $x^* = f(x^*)$) и набор значений $x_* = x^* + \varepsilon_n$. Разложение в ряд с точностью до первого порядка дает

$$x_{n+1} = f(x^* + \varepsilon_n) \simeq f(x^*) + \varepsilon_n f'(x^*) \equiv x^* + \varepsilon_n f'(x^*).$$

Заметив, что $x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1}$, получаем

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = f'(x^*). \quad (5.5.8)$$

Отсюда видно, что соответствующие итерации ε_n будут сходиться только при условии $|f'(x^*)| < 1$. Таким образом,

если $|f'(x^*)| < 1$, точка x^* устойчива,

если $|f'(x^*)| = 1$, точка x^* предельно устойчива,

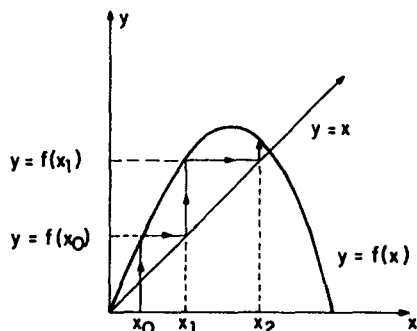
если $|f'(x^*)| > 1$, точка x^* неустойчива.

Это основное условие устойчивости можно также проиллюстрировать графически (рис. 5.21). В случае отображения (5.5.2) устойчивость двух неподвижных точек $x^* = 0$ и $x^* = 1 - \lambda/4$ легко определяется следующим образом. Устанавливаем, что: $x^* = 0$ устойчива при $0 < \lambda < 1/4$ и неустойчива при $\lambda > 1/4$; $x^* = 1 - \lambda/4$ неустойчива при $0 < \lambda < 1/4$ и устойчива при $1/4 < \lambda < 3/4$. Таким образом, по крайней мере при $0 < \lambda < 3/4$ поведение (5.5.2) в целом известно. Для $\lambda < 1/4$ все итерации (в интервале $(0, 1)$) сходятся к $x = 0$, а для $1/4 < \lambda < 3/4$ все итерации сходятся к $x = 1 - \lambda/4$.

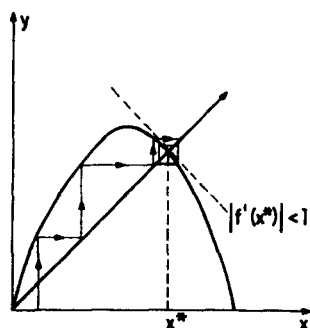
На первый взгляд может показаться, что при $\lambda > 3/4$ притягивающих неподвижных точек нет. В действительности же устойчивая неподвижная точка при $x = 1 - \lambda/4$, теряя устойчивость при $\lambda = 3/4$ (в этой точке $f'(x^*) = -1$), превращается в результате бифуркации в устойчивый 2-цикл. Тонкость здесь заключается в том, что эти две неподвижные точки (образующие 2-цикл) являются устойчивыми неподвижными точками композиции функций

$$f^2 = f(f(x)). \quad (5.5.9)$$

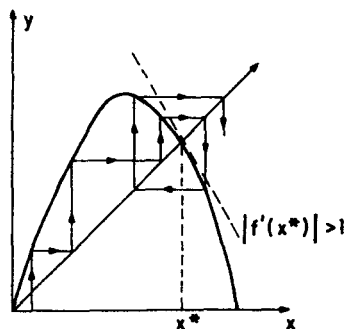
Появление этих точек можно понять, проанализировав графики зависимостей f и f^2 , представленные на рис. 5.22. Обе функции симметричны относительно $x = 1/2$, но функция f имеет один максимум, тогда как функция f^2 — два (она представляет собой полином четвертой степени). Если x^* является неподвижной точкой f , то она будет также неподвижной точкой f^2 . При $\lambda < 3/4$, например, x^* — единственная (устойчивая) неподвижная точка функций f и f^2 . Ее устойчивость можно проверить следующим образом. Зададимся выражением



(а)



(б)



(в)

Рис. 5.21. (а) Графический способ представления последовательных итераций x_i логистического отображения. (б) Итерации закручиваются по спирали к устойчивой неподвижной точке x^* . (в) Итерации раскручиваются по спирали от неустойчивой неподвижной точки x^* .

Рис. 5.21. (а) Графический способ представления последовательных итераций x_i логистического отображения. (б) Итерации закручиваются по спирали к устойчивой неподвижной точке x^* . (в) Итерации раскручиваются по спирали от неустойчивой неподвижной точки x^* .

$x_2 = f^2(x_0) = f(x_1)$, где $x_1 = f(x_0)$, и воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции для вычисления

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^2(x) \Big|_{x=x_0} &= \frac{d}{dx} f(x_1) \Big|_{x=x_0} = \\ &= \frac{d}{dx_1} f(x_1) \frac{dx_1}{dx} \Big|_{x=x_0} = \\ &= \frac{d}{dx_1} f(x_1) \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0}. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Полученный результат легко обобщается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^n(x_0) \Big|_{x=x_0} &= \\ &= f'(x_0) f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Понятно, что для неподвижной точки $x^* = x_0$ имеет место равенство $x_2 = x_1 = x^*$ и, следовательно,

$$f^{2'}(x^*) = f'(x^*) f'(x^*) = (f'(x^*))^2. \quad (5.5.12)$$

Таким образом, если $|f'(x)| < 1$, то и $|f^{2'}(x)| < 1$; а если $|f'(x)| > 1$, то и $|f^{2'}(x)| > 1$. Другими словами, если x^* является устойчивой предельной точкой f , то она также является устойчивой предельной точкой f^2 ; а если x^* — неустойчивая предельная точка f , то она будет также неустойчивой предельной точкой f^2 .

При $\lambda > 3/4$ точки x_1^* и x_2^* являются (устойчивыми) неподвижными точками f^2 . Но поскольку они не являются при этом неподвижными точками f , они отображаются под действием f друг в друга:

$$x_1^* = f(x_2^*) \quad \text{и} \quad x_2^* = f(x_1^*).$$

Таким образом, пара точек x_1^* и x_2^* образует 2-цикл, и итерация произвольной исходной точки постепенно приведет к последовательности $x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^*, \dots$. Важно отметить, что наклон f^2 в точках x_1^* и x_2^* одинаков:

$$f^{2'}(x_2^*) = f'(x_1^*) f'(x_2^*) \quad \text{и} \quad f^{2'}(x_1^*) = f'(x_2^*) f'(x_1^*),$$

так как x_1^* и x_2^* отображаются друг в друга. Две неподвижные точки x_1^* и x_2^* , таким образом, одновременно устойчивы при $\lambda > 3/4$, а затем при некотором большем значении λ становятся одновременно неустойчивыми (когда $f^{2'}(x^*) = -1$). При этом значении λ (обозначим его λ_2 , считая $\lambda_1 = 3/4$) каждая из этих двух точек

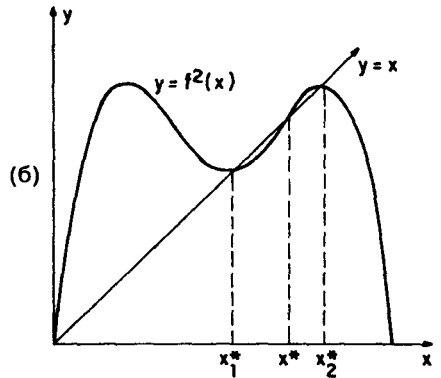
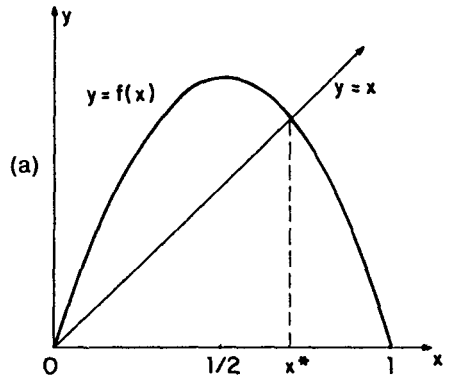


Рис. 5.22. (а) При $\lambda > 3/4$, x^* является неустойчивой неподвижной точкой $f(x)$. (б) Сложная функция $f^2(x) = f(f(x))$. Здесь x_1^* и x_2^* — устойчивые неподвижные точки $f^2(x)$. Наклон функции $f^2(x)$ в обеих точках одинаков

превращается в результате бифуркации в две новые неподвижные точки; в результате образуется 4-цикл, соответствующий неподвижным точкам функции

$$f^4 = f^2(f^2(x)), \quad (5.5.13)$$

как показано на рис. 5.23. Как было сказано в начале этого раздела, эта последовательность удвоений периода продолжается и дальше; при этом соответствующие значения λ сходятся геометрически.

Описанная последовательность (или каскад) удвоений периода универсальна для отображений вида (5.5.5) при условии, что $f(x)$ имеет единственный, локально квадратичный, максимум⁶⁾. Эта универсальность имеет глубокие основания и привела к созданию теории функциональной ренормализации групп, тесно связанной с теорией ренормализации, используемой в статистической механике. Прекрасное изложение этих вопросов можно найти в [31, 34].

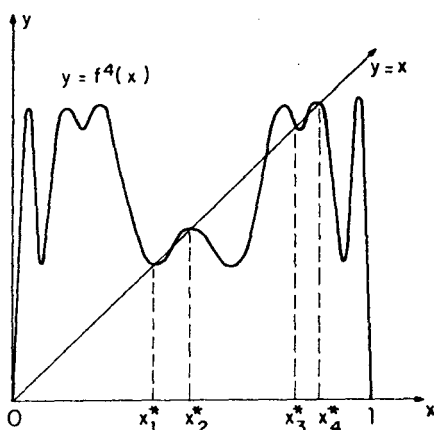


Рис. 5.23. Четыре устойчивые неподвижные точки x_i^* ($i = 1, \dots, 4$) сложной функции $f^4(x) = f^2(f^2(x))$. Наклон $f^4(x)$ в каждой из этих точек одинаков

5.5.6. Бифуркационная диаграмма

Динамику отображения (5.5.2) легко детально проследить с помощью компьютера. Основной численный эксперимент (идеальный для персонального компьютера) состоит в изучении итераций $f(x)$ для последовательных значений λ . Показанная на рис. 5.24 диаграмма получается следующим образом: при каждом значении λ итерации отображения проводятся до тех пор, пока не исчезнут все «переходные состояния» и траектория не займет свое «асимптотическое положение» (т. е. 2-цикл, 4-цикл, 2^n -цикл, $\dots$, 6- или 3-цикл или апериодический аттрактор и т. д.). Отметим следующие основные закономерности.

- (1) Последовательные бифуркации 2^n ($n = 1, 2, \dots$)-циклов в λ -пространстве сжимаются все больше и больше.
- (2) Хаотические полосы появляются при $\lambda > \lambda_\infty$.
- (3) Нечетные циклы (например, 3-циклы) возникают в хаотическом режиме⁷⁾.
- (4) Полностью «однородное» хаотическое поведение достигается при $\lambda = 1$. (Позднее мы увидим, что движение в этом случае истинно эргодическое на интервале $(0, 1)$.)

За предельной точкой удвоений периода λ_∞ структура необычайно богата. Упомянем некоторые неустоявшиеся еще термины, которые появились в последнее

⁶⁾ Точная формулировка этого условия звучит следующим образом: так называемая производная Шварца от $f(x)$, т. е. величина $\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$ должна быть отрицательна на ограниченном интервале.

⁷⁾ С нечетными периодами имеет, по-видимому, принципиальную связь возникновение хаоса у отображений, что приводит к предположению Ли—Йорка «период три означает хаос» [35].

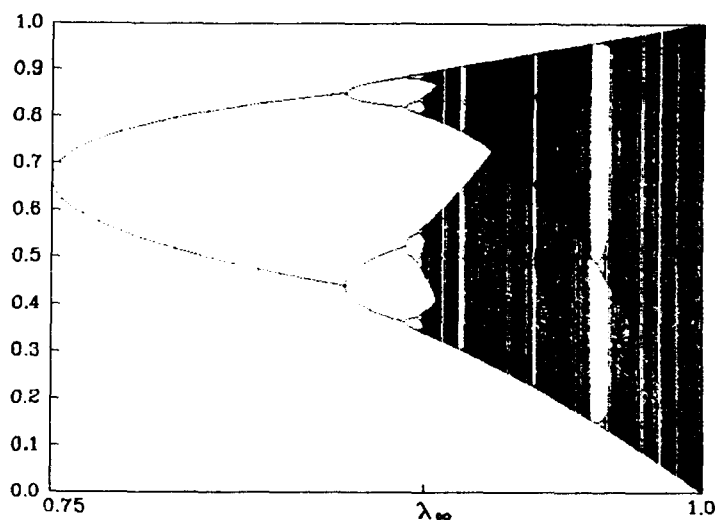


Рис. 5.24. Бифуркационная диаграмма, рассчитанная для логистического отображения начиная с первой бифуркации удвоения периода при $\lambda = 3/4$ до эргодического предела при $\lambda = 1$. λ_∞ означает предельную точку удвоений периода

время для ее описания (введены Йорком и соавт. [32]). Внезапное сужение хаотической полосы называется *субдукцией* (*subduction*), а соответствующее ее уширение — *внутренним кризисом*; окончательное уширение при $\lambda = 1$ называется *кризисом*.

Возвращаясь к бифуркациям удвоения периода, приведем таблицу последовательных значений λ_n :

n	Тип цикла	λ_n (значения λ , при котором цикл появляется)
1	2-цикл	0.75
2	4-цикл	0.86237
3	8-цикл	0.88602
4	16-цикл	0.89218
5	32-цикл	0.8924728
$\vdots$		
∞	аперiodический аттрактор	0.892486418

Естественно возникает вопрос, существуют ли какие-либо «реальные» эксперименты (в противоположность численному моделированию), в которых могла бы наблюдаться такая последовательность. Очевидно, что экспериментально разрешить бифуркации высокого порядка очень трудно. Но по крайней мере четыре периода удвоения наблюдались в красивых экспериментах [36], в которых конвекция Рэлея—Бенара изучалась для ртути в магнитном поле. Найденный универсальный масштаб с точностью до 5% согласуется с числом Фейгенбаума.

5.5.в. Поведение за пределами λ_∞

Хотя аттрактор при λ_∞ аperiодичен (имеет бесконечный период) и выглядит хаотическим, он в действительности не проявляет достаточно чувствительной зависимости от начальных условий, и поэтому его не следует рассматривать как разновидность странных аттракторов. Это можно подтвердить, вычислив соответствующие показатели Ляпунова. В случае одномерных отображений (см. раздел 4.5) эти показатели вычисляются как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x_0)|, \quad (5.5.14)$$

где x_0 — начальное условие, а Df^n означает величину $\frac{df^n}{dx}$, определенную в (5.5.11). Показатель Ляпунова для траектории при λ_∞ равен нулю. С ростом λ наблюдается возрастание значений показателей для всех траекторий, за исключением расположенных в окрестности точек возникновения циклов с нечетными периодами (в этих точках показатели обращаются в ноль).

Максимальное значение показателя Ляпунова найдено при $\lambda = 1$. Можно показать, что в этой точке отображение имеет инвариантную эргодическую меру. При этом значении λ отображение (5.5.2) посредством замены переменной $x = \frac{1}{2}(y+1)$ легко преобразуется к виду

$$y_{n+1} = 1 - 2y_n^2. \quad (5.5.15)$$

Преобразованное отображение заключено в интервале $-1 \leq y \leq 1$. Еще одна замена переменной $y = \sin \theta$ дает

$$\theta_{n+1} = \arcsin(\cos 2\theta_n). \quad (5.5.16)$$

Это преобразование линейно по θ (т.е. $\theta_{n+1} = 2\theta_n + \pi/2$), и для всех начальных условий, за исключением множества меры нуль, итерации будут равномерно распределены в интервале $0 \leq \theta \leq \pi$, т.е. вероятностная мера $P(\theta)$ постоянна. В соответствующем интервале для y ($-1 \leq y \leq 1$) мера $P(y)$ должна быть, следовательно, связана с $P(\theta)$ соотношением

$$P(y) dy = \frac{1}{\pi} d\theta,$$

где множитель $1/\pi$ представляет собой нормировку

$$\int_0^\pi P(\theta) d\theta = \pi.$$

Таким образом

$$P(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}. \quad (5.5.17)$$

Это распределение легко проверить посредством численных итераций (5.5.15) при очень больших n , располагая итерации в малых областях ширины Δy . Нетрудно также показать, что показатель Ляпунова для (5.5.2) равен $\ln 2$.

Тот факт, что показатели Ляпунова траекторий за пределами λ_∞ могут быть положительными, означает чувствительность к изменению начальных условий. Как такое может быть для одномерных отображений? С учетом сказанного до сих пор может казаться, что соответствующий механизм последовательных растяжений

и складываний, обеспечивающий возникновение хаотического поведения, требует трехмерности фазового пространства в случае потоков (дифференциальных уравнений) и двумерности в случае диффеоморфизмов, т. е. гладких обратимых отображений (которые можно рассматривать как отображения Пуанкаре некоторых потоков более высокой размерности). Суть вопроса заключается в том, что в отличие от рассмотренных ранее двумерных отображений (например, квадратичного отображения Хенона (4.2.11) или отображения аттрактора (5.4.14)), одномерное отображение (5.5.2) *необратимо*. Поэтому, как легко видеть из рис. 5.25, у итерации x_{n+1} имеются два возможных прообраза. Именно эта многозначность обеспечивает желаемый механизм растяжения и складывания. Рассмотрим линейный интервал $0 \leq x \leq 1$. Как показано на рис. 5.25, его часть $0 \leq x \leq 1/2$ растягивается, удваивая свою длину (удвоение имеет место при $\lambda = 1$, при $\lambda < 1$ увеличение длины меньше), и покрывает интервал $0 \leq x \leq 1$. Вторая часть исходного интервала $1/2 \leq x \leq 1$ также удваивается, но при этом накладывается обратно на интервал $1 \geq x \geq 0$. Это проясняет, каким образом зависимость Z_{n+1} от Z_n , построенная Лоренцом (рис. 5.17) для своего аттрактора, отражает основные черты динамики. Отображение явно нелинейно и, следовательно, допускает хаотическое движение.

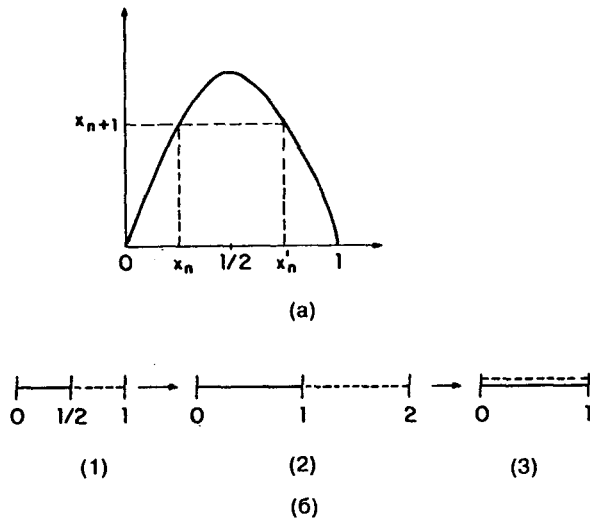


Рис. 5.25. (а) Логистическое отображение необратимо, так как каждая итерация x_{n+1} имеет два возможных прообраза x_n и x'_n . (б) Отображение растягивает единичный интервал (1), удваивая его длину (2) и затем заворачивает удвоенную часть обратно на единичный интервал (3)

Другая важная особенность движения за пределами λ_∞ — появление 3-циклов (и других циклов с нечетными периодами). Возникновение таких 3-циклов можно понять, проанализировав свойства $f^3(x)$. При малых λ в качестве неподвижных точек $f^3(x)$ могут выступать только неподвижные точки $f(x)$ (разумеется, в случае $f^3(x)$ неустойчивые). По мере роста λ достигается такое особое значение $\lambda_*(> \lambda_\infty)$, при котором прямая $y = x$ касается f^3 , как показано на рис. 5.26. При этом возникает 3-цикл. Это и есть точка *касательной бифуркации*. Отметим, что касание происходит тогда, когда наклон f^3 (в точках касания) равен $+1$. (В случае удвоения

периода бифуркация происходила при $f^{2n'}(x) = -1$.) При $\lambda > \lambda_*$ каждая из неподвижных точек 3-цикла превращается в результате бифуркации в пару неподвижных точек, из которых одна устойчива, а другая — неустойчива. Такие бифуркации называются также бифуркациями *седло-узел*. Их следует отличать от бифуркаций удвоения периода, называемыми также бифуркациями *камертона*, при которых неустойчивая неподвижная точка превращается в пару устойчивых.

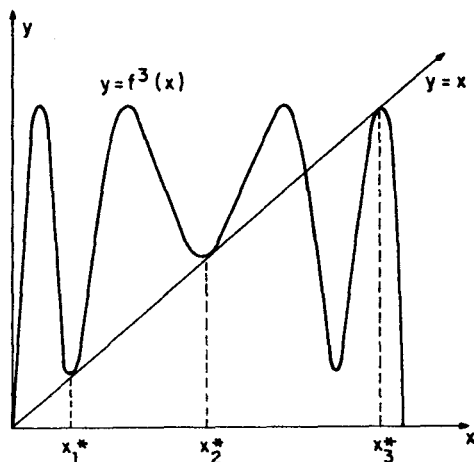


Рис. 5.26. Возникновение траектории 3-цикла: линия $y = x$ касается $f^3(x)$ в неподвижных точках x_i^* ($i = 1, 2, 3$). Наклон $f^3(x)$ одинаков во всех точках x_i^*

5.5.г. Другие классы универсальности

Мы подчеркивали, что «универсальные» числа универсальны лишь для определенных классов отображений. Числа, найденные Фейгенбаумом, соответствуют отображениям с единственным квадратичным максимумом. Для семейства отображений

$$f(x) = 1 - a|x|^n \quad (5.5.18)$$

также имеет место удвоение периода, но при этом для каждого n имеется свое универсальное число δ :

n :	2	4	6	8
δ :	5.1224	9.3160	13.3721	17.3987

Последовательности бифуркаций удвоения периода найдены также для сохраняющих площадь отображений на плоскости

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

В этом случае универсальный показатель оказался равным $\delta = 0.7210978\dots$. Все эти различные универсальные показатели (а также другие, не обсуждавшиеся здесь, масштабные свойства) могут быть рассчитаны с помощью теории функциональных ренормализационных групп.

Список литературы

Учебники и обзорные статьи

1. *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* Order Within Chaos. Hermann, Paris, 1984. [Имеется перевод: Берже П. и др. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.]
2. *Chorin A. J., Marsden J. E.* A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag, New York, 1979.
3. *Cvitanović P.* Universality in Chaos. Adam Hilger, Bristol, 1984.
Эта книга содержит удачное изложение и обширную библиографию большого числа фундаментальных исследований по диссипативным динамическим системам.
4. *Dold A., Eckmann B. (Eds.)* Turbulence Seminar. Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics. Vol. 615. Springer-Verlag, New York, 1977.
5. *Eckmann J. P.* Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, **53**, 643 (1981).
6. *Eckmann J. P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617 (1985).
7. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York, 1983.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
9. *Lanford O. E.* Strange attractors and turbulence // Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence / Eds. H. L. Swinney, J. P. Gollub. Springer-Verlag Topics in Applied Physics. Vol. 45. Springer-Verlag, New York, 1981.
10. *Newell A. C.* Chaos and turbulence: is there a connection // Conference on Mathematics Applied to Fluid Dynamics and Stability (spacial proceeding dedicated in memory of Richard C. DiPrima). SIAM Philadelphia, 1985.
11. *Schuster H. G.* Deterministic Chaos. Physik-Verlag, Weinheim, 1984. [Имеется перевод: Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.]
12. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Wiley, Chichester, 1986.

Раздел 5.1

13. *Aref H.* Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 345 (1983).

Раздел 5.2

14. *Ahlers G., Behringer R. P.* Evolution of turbulence from the Rayleigh-Bénard instability. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 712 (1978).
15. *Swinney H. L.* *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, **64**, 164 (1978).
16. *Swinney H. L., Gollub J. P.* The transition to turbulence. *Phys. Today*, August, 41 (1978).

Раздел 5.3

17. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, **9D**, 189 (1983).
18. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1983.
19. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. Springer-Verlag, New York, 1976.
20. *Newhouse S. E., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Commun. Math. Phys.*, **64**, 35 (1978).
21. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, **20**, 167; **23**, 343 (1971).
22. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points // Differential and Combinatorial Topology / Ed. S. S. Cairns. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Раздел 5.4

23. Crutchfield J., Farmer D., Packard N., Shaw R., Jones G., Donnelley R. J. Power spectral analysis of a dynamical system. *Phys. Lett.*, **76A**, 1 (1980).
24. Curry J. A generalized Lorenz system. *Commun. Math. Phys.*, **60**, 193 (1978).
25. Doering C. R., Gibbon J. D., Holm D. D., Nicolaenko B. Low dimensional behaviour in the complex Ginzburg-Landau equation. *Nonlinearity*, **1**, 279 (1988).
26. Henon M. A two dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, **50**, 69 (1976).
27. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130 (1963).
28. Lozi R. Un attracteur étrange? du type de Henon. *J. Phys.*, **39**, 9 (1978).
29. Rössler O. E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett.*, **57A**, 397 (1976).
30. Sparrow C. The Lorenz Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.

Раздел 5.5

31. Collet P., Eckman J. P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems // Progress in Physics. Vol. 1. Birkhäuser, Boston, 1980.
32. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica*, **7D**, 181 (1983).
33. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica*, **7D**, 16 (1978).
34. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**, 25 (1978).
35. Li T. Y., Yorke J. A. Period three implies chaos. *Am. Math. Monthly*, **82**, 985 (1975).
36. Libchaber A., Fauve S., Larouche C. Two parameter study of routes to chaos. *Physica*, **7D**, 69 (1983).
37. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, **261**, 459 (1976).
38. Mackay R. S. Renormalization in area-preserving maps. Ph. D. Thesis 1982, Princeton University (University Microfilms Inc., Ann Arbor, MI).

Превосходное введение в теорию ренормализации отображений, сохраняющих площадь.

Глава 6

Хаос и интегрируемость в квазиклассической механике

6.1. Взаимосвязь квантовой и классической механики

Изучение закономерностей перехода от квантовой механики к классической всегда представляло существенный интерес, хотя принципы, лежащие в основе квантовой механики, такие, как принцип неопределенностей Гейзенберга, не имеют аналогов в классической механике. Как будет, в частности, показано ниже, при решении квантовых уравнений движения, т. е. уравнений Шрёдингера, для частиц с большим импульсом и, следовательно, малой длиной волны де Бройля, движение соответствующего волнового пакета лишь немного отличается от движения, которое может быть найдено при решении соответствующих классических уравнений движения. (Упомянем также, что этот предельный переход аналогичен переходу от волновой оптики к геометрической в пределе малых длин волн.)

6.1.а. Квазиклассический предел для задач, зависящих от времени

Рассмотрим частицу с массой m , движущуюся в пространстве под действием некоторого (гладкого) потенциала $V = V(\mathbf{q})$, где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Классический гамильтониан, очевидно, имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + V(\mathbf{q}), \quad (6.1.1)$$

а соответствующее зависящее от времени уравнение Шрёдингера —

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{q}, t) = \widehat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{q}, t), \quad (6.1.2)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка (деленная на 2π), $\Psi(\mathbf{q}, t)$ — волновая функция, $\widehat{\mathcal{H}}$ — оператор Гамильтона, полученный обычным образом путем замены $p_i \rightarrow i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)$ в (6.1.1):

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{q}); \quad (6.1.3)$$

здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}$ — оператор Лапласа. Подстановка

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \exp \left\{ \frac{iS(\mathbf{q}, t)}{\hbar} \right\} \quad (6.1.4)$$

(подчеркнем, что на данном этапе она представляет собой анзац, а не приближение) в (6.1.2) дает

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \nabla S \cdot \nabla S + V(\mathbf{q}) - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S. \quad (6.1.5)$$

Если последний член здесь в определенном смысле пренебрежимо мал, уравнение (6.1.5) сводится к выражению

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla S_0)^2 + V(\mathbf{q}), \quad (6.1.6)$$

которое в точности представляет собой классическое уравнение Гамильтона—Якоби, зависящее от времени, и S_0 (в данном случае являющееся приближением к S в (6.1.4)) определяется как интеграл действия (ср. (2.1.2))

$$S_0(\mathbf{q}, t) = \int_{t_0}^t L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t') dt'. \quad (6.1.7)$$

Пренебрежение последним членом в (6.1.5) можно рассматривать — формально — как предел $\hbar \rightarrow 0$. Разумеется, $\hbar$ является фундаментальной постоянной, и, говоря о пределе, мы на самом деле подразумеваем ситуацию, когда величина, имеющая одинаковую размерность с $\hbar$, а именно действие, становится большой по сравнению с $\hbar$. Переход от (6.1.2) к (6.1.6) через (6.1.4) может на первый взгляд показаться достаточно прозрачным. На самом деле рассматриваемый предел является весьма тонким; мы обсудим это в данной главе. Действительно, сказанное должно быть понятно уже из (6.1.4), поскольку предел $\hbar \rightarrow 0$ приводит к существенно более быстрым осцилляциям волновой функции, т. е. является сильно *сингулярным* (см. краткое обсуждение сингулярной теории возмущений в главе 3). Совершенно ошибочно полагать, что квантовомеханические величины можно каким-либо образом представить как классические величины плюс поправки, разложенные в ряд по степеням $\hbar$.

6.1.6. Квазиклассический предел для задач, не зависящих от времени

В случае стационарных квантовомеханических состояний временная и пространственная зависимости волновой функции разделены, что позволяет записать

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \psi(\mathbf{q}) \exp \left\{ \frac{iEt}{\hbar} \right\}, \quad (6.1.8)$$

где E — энергия стационарного состояния. Теперь точная подстановка (6.1.4) может быть представлена как

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \exp \left\{ \frac{(iS(\mathbf{q}) - iEt)}{\hbar} \right\}, \quad (6.1.9)$$

и (6.1.5) приобретает вид

$$\frac{1}{2m} (\nabla S \cdot \nabla S) + V(\mathbf{q}) - E - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S = 0. \quad (6.1.10)$$

В этом случае предел $\hbar \rightarrow 0$ дает не зависящее от времени уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{1}{2m} (\nabla S_0)^2 + V(\mathbf{q}) = E, \quad (6.1.11)$$

где

$$S_0(\mathbf{q}) = \int_{q_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}; \quad (6.1.12)$$

здесь q_0 является некоторой начальной точкой на данной траектории. Формальный предел $\hbar \rightarrow 0$ эквивалентен требованию

$$(\nabla S_0)^2 \gg \hbar |\nabla^2 S_0|, \quad (6.1.13)$$

и если переобозначить $\mathbf{p} = \nabla S$ (см. (2.3.20a)), то неравенство может быть представлено в виде

$$|\mathbf{p}|^2 = \hbar |\nabla \cdot \mathbf{p}|. \quad (6.1.14)$$

В случае одномерных задач это условие имеет простую интерпретацию в терминах длины волны де Бройля $\lambda(q) = 2\pi\hbar/p(q)$, а именно

$$\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dq} \right| \ll 1, \quad (6.1.15)$$

откуда следует, что приближение справедливо лишь в том случае, когда длина волны де Бройля медленно изменяется на расстоянии, сравнимом с ней по порядку величины. Это — хорошо известный результат (см., например, прекрасный учебник квантовой механики [3]), который позволяет также показать, что обсуждаемое условие нарушается в окрестности точек возврата при движении классической частицы. При тех режимах, при которых условие (6.1.15) справедливо, мы имеем схему, позволяющую получать приближенные решения уравнения Шрёдингера с использованием классических величин. В квантовой механике эта схема известна как *квазиклассическое* приближение, которое часто называют также ВКБ (Венцеля—Крамерса—Бриллюэна) приближением.

6.2. Метод ВКБ и условия квантования Бора–Зоммерфельда

Применение формализма, к рассмотрению которого мы приступаем, не ограничивается рамками квантовомеханических задач; он также широко используется при решении (линейных) дифференциальных уравнений, сингулярно зависящих от малого параметра. Рассмотрим, например, простую краевую задачу

$$\epsilon y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.2.1)$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Нетрудно показать, что точное решение имеет вид

$$y(x) = \frac{\sin(x/\sqrt{\epsilon})}{\sin(1/\sqrt{\epsilon})} \quad (6.2.2)$$

(при условии $\epsilon \neq (n\pi)^{-2}$); в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ это решение теряет смысл. Понятно, что этот сингулярный предел значительно затрудняет решение уравнений и более общего вида

$$\epsilon y'' + V(x)y = 0,$$

где $V(x)$ — некая нетривиальная функция от x . Наиболее конструктивная процедура (предшествовавшая ВКБ) была разработана Рэлеем, Джеффри и др., которые показали,

что решение может быть представлено в виде экспоненты от ряда по степеням ϵ , а именно

$$y(x) = \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(x) \right\}. \quad (6.2.3)$$

(Блестящее обсуждение этого метода дано в [5].)

6.2.a. Разложение ВКБ

В настоящем разделе мы сосредоточим внимание на квантовомеханических вопросах, в рамках которых в качестве малого параметра выступает величина $\hbar$. Рассмотрим вначале одномерное не зависящее от времени уравнение Шрёдингера

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (E - V(x)) \psi = 0 \quad (6.2.4)$$

и произведем подстановку

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{iS(x)}{\hbar} \right\}, \quad (6.2.5)$$

где $S(x)$ представляет собой ряд

$$S(x) = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (6.2.6)$$

Подставляя (6.2.5) в (6.2.4) и приравнявая последовательно степени $\hbar$, получаем иерархию уравнений:

$$O(\hbar^0): \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + 2m(E - V(x)) = 0, \quad (6.2.7.a)$$

$$O(\hbar^1): \frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} = 0, \quad (6.2.7.b)$$

$$O(\hbar^2): \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0. \quad (6.2.7.c)$$

⋮

Вспоминая, что $p = \frac{\partial S_0}{\partial x}$, для двух первых уравнений легко находим решения

$$S_0(x) = \pm \int_{x_0}^x p(x') dx' = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx' \quad (6.2.8)$$

и

$$S_1(x) = -\ln \sqrt{p(x)} + \ln c, \quad (6.2.9)$$

где c — постоянная интегрирования, а x_0 — некоторая начальная точка на траектории. Для $S_2, S_3, \dots$ также можно легко получить соответствующие выражения, но их громоздкость быстро возрастает. Исходя из (6.2.8) и (6.2.9), находим вид приближенной волновой функции, соответствующей первому порядку по $\hbar$:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p}} \exp \left(+ \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx' \right) + \frac{B}{\sqrt{p}} \exp \left(- \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx' \right), \quad (6.2.10)$$

где два корня (6.2.8) задают два линейно независимых решения уравнения (6.2.4), которые в виде линейной комбинации с произвольными константами A и B образуют общее решение (6.2.10). В областях, где $E > V(x)$, $p(x)$ положительны; такие области известны как *классически разрешенные*. Области, в которых $E < V(x)$, называются *классически запрещенными*; $p(x)$ в них имеют мнимые значения. Такие области в классической механике не имеют смысла, а в квантовой механике соответствуют областям, через которые может осуществляться «туннелирование». Очевидно, что решение (6.2.10) разрушается в окрестности классических точек возврата $E = V(x)$, в которых $p(x) = 0$. Плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ становится здесь очень большой. Это согласуется с классической интуицией, согласно которой частицу вероятнее всего можно обнаружить в тех областях, в которых она проводит больше времени, а именно вблизи точек возврата (где движение наиболее медленное). Расходимость решений (6.2.10) в точках возврата не является непреодолимой проблемой; для отыскания решений, гладко переходящих из разрешенной области в запрещенную без расходимостей была разработана замечательная математическая техника, известная как *равномерные приближения*. Важный аналог таких классических расходимостей существует в геометрической оптике. Это *каустики*, которые соответствуют объединению лучей, приводящему к появлению очень интенсивных точек или областей, как это наблюдается, например, при фокусировании (света). Понятие каустик будет играть существенную роль при дальнейшем обсуждении свойств квазиклассических волновых функций.

6.2.6. Квантование Бора–Зоммерфельда

Две экспоненты в (6.2.10) всегда можно объединить и получить действительное решение (в классически разрешенной области) вида

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p}} \sin \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x p(x') dx' + \alpha \right\}, \quad (6.2.11)$$

где α — определенный фазовый множитель. Можно показать, что решение (6.2.11) гладко сшивается с (экспоненциально затухающим) решением слева от классической точки возврата x_0 при условии, что α равняется $\pi/4$. Таким образом, (6.2.11) переписываем в виде

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p}} \sin \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (6.2.12)$$

где мы переобозначили точку поворота x_0 через a .

Рассмотрим далее ситуацию, когда движение ограничено двумя классическими точками возврата a и b , $a \leq x \leq b$. Волновая функция (6.2.12) может быть также представлена в виде

$$\psi(x) = -\frac{A}{\sqrt{p}} \sin \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_x^b p(x') dx' + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\hbar} \int_a^b p(x') dx' - \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (6.2.13)$$

что можно интерпретировать как вычисление волновой функции на пути от x к (правой) точке возврата b и затем от b к a . Значение фазы в (6.2.13) иллюстрирует

хорошо известный в геометрической оптике результат — потерю фазы (на $\pi/2$) при прохождении через каустику (в данном случае движение «вокруг» точки поворота b). Волновая функция (6.2.12) была записана по отношению к (левой) точке возврата a ; то же самое можно проделать и по отношению к b :

$$\psi(x) = \frac{B}{\sqrt{p}} \sin \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_x^b p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (6.2.14)$$

Для того, чтобы волновая функция была однозначной, выражения (6.2.12) и (6.2.14) должны быть равными; из (6.2.13) легко видеть, что это достигается при условии, что

$$\int_a^b p(x') dx' - \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2.15)$$

и что $A = B(-1)^n$. Условие (6.2.15) можно также записать в виде

$$\oint p(x') dx' = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (6.2.16)$$

где $\oint$ означает интегрирование по замкнутому контуру между a и b . В левой части (6.2.16) читатель, конечно, узнает определение классической переменной действия для одномерного ограниченного движения. Условие (6.2.16), известное как *правило квантования Бора—Зоммерфельда*, было получено в рамках «старой квантовой теории», в которой классические переменные действия полагались равными целочисленными кратными $\hbar$. Слагаемое $1/2$ было введено на этом этапе как эмпирическая поправка для согласования с экспериментальными результатами (измеренными спектроскопически уровнями энергии). В ходе дальнейшего развития квантовой механики эта поправка — *энергия нулевых колебаний* — появилась естественным образом как следствие принципа неопределенности. Здесь мы показали, как эта же поправка возникает в результате потери фазы на каустике в рамках квазиклассических представлений.

В случае одномерных систем соотношение (6.2.16) явным образом определяет квантовые собственные значения E_n :

$$\oint p(x') dx' = \oint \sqrt{2m(E_n - V(x'))} dx' = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (6.2.17)$$

при условии, что интеграл может быть обращен. Для простого гармонического осциллятора (т. е. $V(x) = 1/2 \omega^2 x^2$) из (6.2.17) легко получаем $E_n = (n + 1/2) \omega \hbar$. Это один из тех редких случаев, когда квазиклассические условия квантования в точности совпадают с квантовомеханическим результатом. Такие случаи известны как *тождества соответствия*.

6.3. Квазиклассическое квантование в случае большого числа степеней свободы

В рамках старой квантовой теории большой интерес представляли попытки обобщить правило Бора—Зоммерфельда для систем с большим числом степеней

свободы (N). Первоначально предполагалось, что это возможно только для сепарабельных систем (см. раздел 2.5). В этом случае каждая из переменных действия, отвечающая одной из степеней свободы, полагалась кратной $\hbar$, т. е.

$$I_k = \oint_{\mathcal{C}_k} p_k dq_k = n_k \hbar, \quad (6.3.1)$$

где $\mathcal{C}_k$ — замкнутый контур, движение вдоль которого связано с k -й степенью свободы, n_k — соответствующее квантовое число. В предположении, что переход к переменным действие—угол известен в явном виде, уровни энергии определяются условием

$$E_{n_1, n_2, \dots, n_N} = H(I_1 = n_1 \hbar, I_2 = n_2 \hbar, \dots, I_N = n_N \hbar). \quad (6.3.2)$$

Отметим, что количество квантовых чисел совпадает с числом степеней свободы, и что в «старой» квантовой теории не было поправок, учитывающих энергию нулевых колебаний.

6.3.а. Условие квантования Эйнштейна

Довольно быстро стало понятно (см. [8]), что эта процедура неоднозначна: для системы, сепарабельной в различных системах координат (например, трехмерный изотропный гармонический осциллятор сепарабелен как в декартовых, так и в полярных координатах), могут быть получены неэквивалентные результаты. Эта проблема нашла свое решение в замечательной работе Эйнштейна [9], в которой было показано, что соотношение (6.3.2) может быть использовано для отыскания собственных значений лишь в том случае, если переменные действия определены в соответствии с уравнением (2.5.13)

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} \sum_{l=1}^N p_l dq_l, \quad (6.3.3)$$

т. е. в терминах инвариантных торов. В связи с этим Эйнштейн отмечал, что $\mathcal{C}_k$ могут быть определены не во всех случаях, и что если движение в определенном смысле эргодично, то может возникнуть необходимость в «новом» типе условий квантования. Вскоре «новая» квантовая теория (т. е. волновая механика) сняла этот вопрос с повестки дня, и его актуальность — в свете наших изменившихся представлений о классической механике — была признана лишь недавно.

Условия квантования в старой квантовой теории (когда каждая переменная действия полагалась кратной $\hbar$) содержали «энергию нулевых колебаний» лишь как эмпирическую поправку. При рассмотрении одномерных волновых функций ВКБ мы видели, что этот член возникает естественным образом как потеря фазы на каустиках. Для многомерных задач обобщение возможно при условии, что соответствующая волновая функция будет корректно определена.

6.3.б. ЭБК-квантование

Мы снова ищем волновую функцию в виде $\psi = A \exp \{iS/\hbar\}$, и для начала рассмотрим полностью интегрируемую, не зависящую от времени гамильтонову систему с N степенями свободы (которая была описана в главе 2), характеризующуюся

функцией действия S

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p(q', I) dq', \quad (6.3.4)$$

где q_0 — некоторая (произвольная) начальная точка. Исходя из (6.3.4), мы воспроизводим стандартные соотношения между сопряженными переменными

$$\theta = \nabla_I S(q, I) \quad \text{и} \quad p = \nabla_q S(q, I). \quad (6.3.5)$$

На классическом торе с действием I классические траектории распределены равномерно по θ . Поэтому соответствующая плотность точек в конфигурационном пространстве q представляет собой проекцию плотности на торе на пространство q , т. е.

$$\frac{d\theta}{dq} = \det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial I_k} \right|, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Учитывая, что плотность вероятности волновой функции равна $|\psi|^2$, находим выражение для амплитуды A

$$A = \sqrt{\det \left| \frac{\partial^2 S(q, I)}{\partial q_j \partial I_k} \right|}. \quad (6.3.6)$$

Впервые этот результат был получен Ван-Флеком в 1928 году [10]. Легко видеть, что если система имеет одну степень свободы, то $A \propto 1/\sqrt{p}$; это согласуется с результатами метода ВКБ. Наконец, наиболее существенным здесь представляется понимание того факта, что S является многозначной функцией q . Это вытекает из многозначности p : например, в случае одномерного ограниченного движения (см. рис. 6.1(a)) p представляет собой двузначную функцию от q

$$p(q, I) = \pm \sqrt{2m(H(I) - V(q))}. \quad (6.3.7)$$

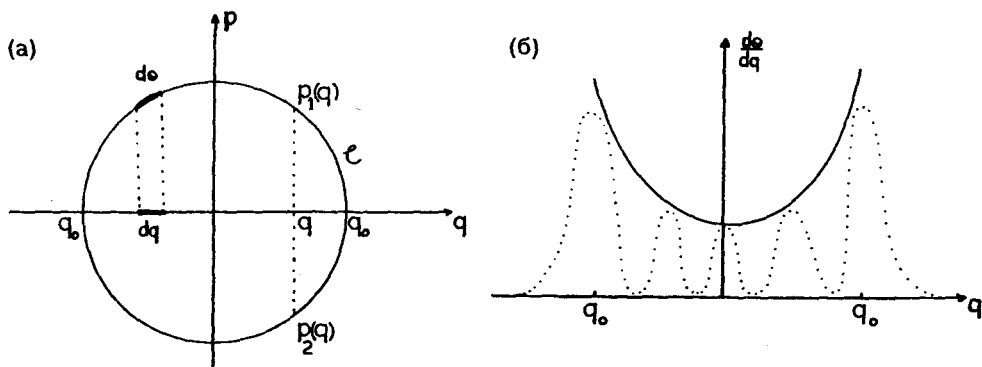


Рис. 6.1. (а) В фазовой плоскости одномерного ограниченного движения изображена типичная кривая постоянной энергии e . Импульс p является двузначной функцией q ; обе ветви $p_1(q)$ и $p_2(q)$ совпадают в классических точках возврата q_0 . Точки возврата определяются как точки на e , в которых касательные параллельны оси p . (б) Проекция e (задаваемая $\frac{dp}{dq}$) на ось q , образует гладкую огибающую $|\psi(q)|^2$; проекция сингулярна в классических точках возврата

Поэтому волновая функция вида $\psi = A \exp \{iS/\hbar\}$ должна быть просуммирована по всем возможным ветвям S

$$\psi(\mathbf{q}) = \sum_r \sqrt{\det \left| \frac{\partial^2 S_r}{\partial q_j \partial I_k} \right|} \exp \left\{ \frac{iS_r(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\hbar} \right\}, \quad (6.3.8)$$

где сумма по r означает суммирование по ветвям (волновая функция ВКБ (6.2.10) как раз и представляет собой сумму по двум ветвям, относящуюся к одномерному ограниченному движению).

Для того, чтобы волновая функция (6.3.8) была однозначной, полное изменение фазы по завершении одного классического «оборота» должно быть кратно 2π . На N -мерном торе существует N топологически различных замкнутых контуров $\mathcal{C}_k$ ($k = 1, \dots, N$), движение вдоль которых приводит в ту же самую точку. Более того, движение по $\mathcal{C}_k$ может быть связано с прохождением каустик, каждое из которых приводит к потере фазы $\pi/2$. Поэтому условие однозначности выглядит следующим образом

$$\frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}_k} \mathbf{p}(\mathbf{q}', \mathbf{I}) d\mathbf{q}' - \alpha_k \frac{\pi}{2} = 2n_k \pi, \quad (6.3.9)$$

где α_k — число пересеченных каустик. Величины α_k обычно называют *индексами Маслова*. Таким образом, общее условие квантования в многомерном случае имеет вид

$$I_k = \oint_{\mathcal{C}_k} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 2\pi\hbar \left[n_k + \frac{\alpha_k}{4} \right]. \quad (6.3.10)$$

Его обычно называют правилом квантования Эйнштейна—Бриллюэна—Келлера (ЭБК).

6.3.в. Квазиклассические волновые пакеты*

Интересно, что волновые функции вида (6.3.8) могут описывать не только стационарные состояния. Волновая функция может быть сопоставлена любой гладкой N -мерной поверхности (назовем ее Σ), погруженной в $2N$ -мерное фазовое пространство (см. рис. 6.2). Такую поверхность в пространстве $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ можно представить как некоторую функцию $\mathbf{p}(\mathbf{q})$. Единственным ограничением является необходимость представления этой зависимости в виде градиента

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} S, \quad (6.3.11)$$

где S — некоторая функция, которая скоро будет определена. Построенное таким образом для произвольной гладкой функции S многообразие Σ называется *многообразием Лагранжа*. Из (6.3.11) вытекает, что Σ обладает следующим свойством:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}. \quad (6.3.12)$$

По аналогии с тем, как угловые переменные используются для определения положения на торах, введем набор переменных $Q_1, \dots, Q_N$ для описания положения точек на многообразии Лагранжа. Это позволяет ввести набор канонических «импульсов» P_i ($i = 1, \dots, N$), сопряженных с Q_i , и определить функцию S

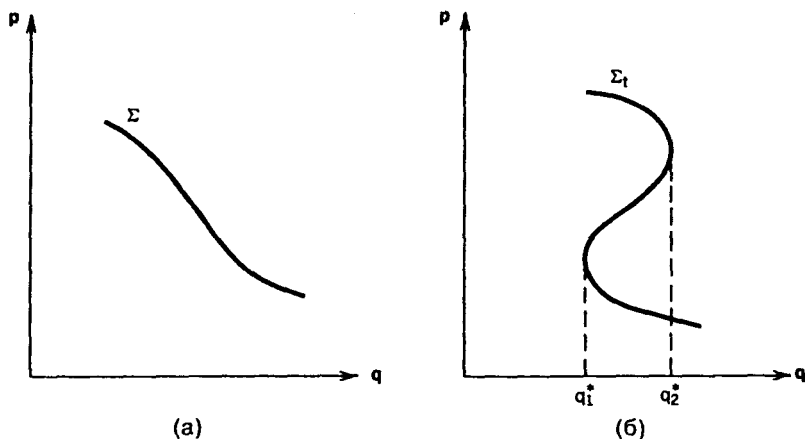


Рис. 6.2. (а) Многообразие Лагранжа Σ в пространстве (p, q) . Точки на Σ помечаются с помощью новых канонических переменных Q . (б) Эволюционирующее многообразие Лагранжа Σ_t , демонстрирующее возникновение двух каустик q_1^* и q_2^*

в (6.3.11) как производящую функцию канонических преобразований переменных (p, q) и (P, Q) друг в друга, т. е.

$$p = \nabla_q S(q, P) \quad \text{и} \quad Q = \nabla_P S(q, P). \quad (6.3.13)$$

Учитывая соображения, приведенные выше при определении плотности частиц в пространстве q (в данном случае речь идет о проекции $|\frac{dQ}{dq}|$), волновая функция, связанная с многообразием Лагранжа Σ , имеет вид

$$\psi(q) = \sqrt{\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_j} \right|} \exp \left\{ \frac{iS(q, P)}{\hbar} \right\}, \quad (6.3.14)$$

где на данном этапе p предполагается однозначной функцией Q . Отметим, что приведенный вид волновой функции определяется исключительно нашей способностью идентифицировать многообразие Лагранжа, которое не ограничивается только интегрируемыми системами¹⁾.

Обычно Σ не является стационарным многообразием и эволюционирует во времени. Эволюция Σ (обозначается как Σ_t) под действием гамильтонова потока как правило весьма сложна. В двумерном фазовом пространстве эволюция Σ_t проявляется в виде усов и завитков; с ростом размерности морфология может только усложняться. Помимо этого, p обычно представляет собой еще более многозначную функцию q (см. рис. 6.2), и возникает большее число каустик. Постепенно распространение каустик приводит к тому, что выражение (6.3.14) для волновой функции становится неприменимым. Этот очень важный вопрос будет обсуждаться в разделе 6.6.

¹⁾ Инвариантные торы интегрируемых систем являются многообразиями Лагранжа — но при важном условии, что они *стационарны*.

6.4. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными значениями

КАМ-теорема утверждает, что в случае неинтегрируемых гамильтоновых систем с ростом (неинтегрируемого) возмущения все большее и большее число торов разрушается. Движение в сильно неинтегрируемых системах преимущественно хаотическое, и сохраняется лишь небольшое число торов. Для большинства связанных состояний правила ЭБК при таких значениях энергии больше неприменимы; мы уже говорили, что это отмечалось довольно давно Эйнштейном. Однако в полной мере значение обсуждаемых трудностей оценил значительно позже Персиваль [4], который предложил подразделять энергетический спектр²⁾ связанного состояния в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ на две части.

1. *Регулярный спектр*, соответствующий режиму интегрируемого (регулярного) движения, при котором все состояния могут быть проквантованы в соответствии с правилами ЭБК.
2. *Нерегулярный спектр*, соответствующий режиму преимущественно хаотического (нерегулярного) движения, при котором правила ЭБК уже неприменимы.

Эти два различных класса спектров могут обладать совершенно разными свойствами, отражая различия классического движения, «лежащего в их основе». Понятие нерегулярного спектра представляет особый интерес, поскольку оно в некотором смысле подразумевает, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ «лежащий в основе» классический хаос будет проявляться в квантовомеханических свойствах системы. Такая возможность даже послужила для некоторых исследователей основанием ввести понятие «квантовый хаос», которое не всегда ассоциируется с пределом $\hbar \rightarrow 0$. Вместе с тем, все обсуждаемое здесь неразрывно связано с квазиклассическим пределом, и любое представление о «квантовом хаосе» предполагает взаимосвязь с классическим хаосом.

Наше обсуждение существенных различий в свойствах регулярных и нерегулярных спектров условно распадается на две части. Первая часть, составляющая содержание настоящего раздела, посвящена в основном свойствам, связанным с собственными значениями; содержание второй части, излагаемой в следующем разделе, составляют главным образом свойства, связанные с собственными векторами (волновыми функциями).

6.4.а. Регулярные и нерегулярные связанные состояния

Принципиальное отличие регулярных и нерегулярных (квазиклассических) состояний заключается в том, что регулярное состояние может быть описано с помощью полного набора «хороших» квантовых чисел $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, где N — число степеней свободы. Состоянию с квантовыми числами $\mathbf{n}$ можно, таким образом, поставить в соответствие семейство траекторий на N -мерном торе с постоянным действием, задаваемым правилами ЭБК (6.3.10). Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между регулярным состоянием и классическим тором. В случае состояния с нерегулярным спектром, напротив, не только не существует способа разумно задать «хорошие» квантовые числа, но и представления о взаимном соответствии такого состояния и данной области фазового пространства

²⁾ Под термином «спектр» здесь подразумевается просто совокупность энергетических уровней.

ограничиваются лишь тем, что состояние должно «занимать» объем порядка $(2\pi\hbar)^N$. Некоторые авторы тем не менее считают, что в хаотических режимах все же можно, используя определенные методы классической теории возмущений, построить «приближенные» торы (в конце концов, разумеется, соответствующие ряды должны в этих режимах расходиться) и использовать для квантования правила ЭБК (см. [16]). В подвергнутых анализу модельных системах полученные таким образом уровни энергии достаточно хорошо согласовывались с точными квантовомеханическими расчетами. Обсуждаемые результаты затрагивают очень важный вопрос, связанный с тем, что рассмотренные системы не содержали достаточно большого числа связанных состояний — ситуация, когда $\hbar$ относительно «велико». Понятно, что случай, когда области фазового пространства, занятые хаотическим движением, существенно меньше, чем $O((2\pi\hbar)^2)$, т. е. «размера» квантового состояния, не представляет сколь-нибудь существенного интереса с точки зрения квантовой механики. Из сказанного следует, что $\hbar$ играет в некотором смысле «сглаживающую» роль, способствуя сохранению торов, которые, вообще говоря, должны разрушаться. Вместе с тем очевидно, что как только $\hbar$ становится достаточно мало, такой подход более не применим, и возникает фундаментальная проблема поиска квазиклассических условий квантования для хаотических систем. До настоящего времени не было предложено ни одного «прямого» подхода, но существует «косвенный» метод, основанный на использовании классических периодических траекторий. Этот важный метод будет изложен в контексте «квантовых отображений» в разделе 6.7.

Основываясь на отсутствии «хороших» квантовых чисел в случае нерегулярных состояний, Персиваль [4] пришел к выводу, что регулярные и нерегулярные спектры должны различаться по их вероятностям переходов. Переходы между состояниями регулярного спектра должны характеризоваться строгими правилами отбора; это предполагает, что спектр (в смысле спектроскопически наблюдаемых величин) состоит из небольшого числа интенсивных линий, соответствующих сильно связанным состояниям. С другой стороны предполагается, что состояния нерегулярного (энергетического) спектра будут в одинаковой мере связаны со всеми теми состояниями с близкой энергией, которые соответствуют одним и тем же «хаотическим» областям фазового пространства; таким образом ожидается, что спектр будет состоять из большого числа слабых линий. Пока не известны экспериментальные данные, однозначно подтверждающие существование нерегулярных спектров.

6.4.6. Спектр мощности и принцип соответствия

Соответствие между классическим спектром мощности (описанным в главе 4) и квантовым спектром (спектром переходов) легко может быть понято в регулярном режиме. Рассмотрим два состояния ЭБК $E_n = H(I = n\hbar)$ и $E_m = H(I = m\hbar)$, где для удобства мы опустили члены Маслова. Если E_m достаточно близко к E_n , мы можем разложить E_m около E_n в ряд Тейлора и получить, ограничиваясь членами первого порядка, соотношение

$$E_m = H(n\hbar) + \hbar(m - n) \cdot [\nabla_I H(I)]_{I=n\hbar} + \dots \quad (6.4.1)$$

Квантовая частота перехода ω_{mn} задается, таким образом, выражением

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \simeq (m - n) \cdot \omega(n\hbar), \quad (6.4.2)$$

где мы использовали (2.5.156). Значит спектр мощности классической траектории, лежащей на торе с действием $I = n\hbar$, будет состоять из линий, (приблизительно)

соответствующих квантовому переходу $n \rightarrow m$. В пределе $\hbar \rightarrow 0$, или $|n| \gg |n - m|$, классические и квантовые частоты совпадают. Более того, квадраты модулей классических коэффициентов Фурье соответствуют вероятностям квантовых переходов. На практике (т. е. когда $\hbar$ конечно) наилучшее совпадение классических и квантовых спектров получают, сопоставляя квантовый спектр перехода $n \rightarrow m$ с классическим спектром траектории, которая лежит не на торе, характеризуемом «действием исходного состояния» $I = \pi \hbar$, а на торе со «средним действием» $I = \hbar(m + n)/2$.

В противоположность регулярному режиму спектры мощности нерегулярных траекторий чрезвычайно сложны по своей природе и содержат бесконечное число линий. На данном этапе вовсе не ясно, каким образом такие спектры могут быть сопоставлены с квантовым спектром. Вполне может оказаться, что содержательное сопоставление возможно лишь в том случае, если оба спектра усреднить по некоторой области траекторий и состояний соответственно. Таким образом, требуется гораздо более глубокое изучение «принципа соответствия» для нерегулярных режимов.

6.4.в. Чувствительность к возмущению

Персиваль [4] предсказал также, что регулярные и нерегулярные состояния должны различаться по их поведению при возмущении. Нерегулярные состояния должны быть очень чувствительны к внешним или медленно меняющимся возмущениям — отражая в определенном смысле чувствительность классических хаотических траекторий к начальным условиям, — тогда как регулярные состояния должны быть относительно устойчивы. Впервые это предположение было проверено Помфери [21], который изучил собственные состояния гамильтониана типа Хенона—Хейлеса

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + \lambda \left(x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \quad (6.4.3)$$

при значении $\lambda = 0.088$. Вычислялись «вторые разности»

$$\Delta^2 E_i = E_i(\lambda + \Delta\lambda) + 2E_i(\lambda) - E_i(\lambda - \Delta\lambda), \quad (6.4.4)$$

которые служили мерой чувствительности i -го собственного значения к малым изменениям ($\Delta\lambda$) при возмущении. При значениях энергии, отвечающих преимущественно хаотическому режиму, некоторые величины вторых разностей оказались очень большими. Это свидетельствует в пользу точки зрения Персиваля и в свою очередь подтверждается другими исследованиями. Отметим, в частности, работу [20], в которой тот же самый гамильтониан (6.4.3) рассматривался при другом значении $\lambda = 0.1118$. Вследствие симметрии потенциала собственные значения могут обладать либо симметрией A (невырожденной), либо симметрией E (дважды вырожденной). Кроме того, каждому состоянию может быть сопоставлено главное квантовое число и приближенное квантовое число «углового момента». Было найдено, что все состояния с большим угловым моментом характеризуются малыми значениями $\Delta^2 E_i$, тогда как состояния с небольшим угловым моментом имеют, соответственно, большие значения $\Delta^2 E_i$. (Это явление было также отмечено в работе [17] по изучению собственных состояний «стадиона», излагаемой ниже.) Такое поведение согласуется с соответствующей классической динамикой. Все состояния с большим угловым моментом могут быть соотнесены с торами (т. е. с устойчивым движением) и, следовательно, проквантованы по правилам ЭБК, даже в преимущественно хаотическом режиме. Напротив, состояния с небольшим угловым моментом, при условии, что

они могут быть вычислены в рамках квазиклассического приближения, оказываются связанными с теми торами, которые при повышении энергии разрушаются в первую очередь. Проведенное исследование выявило также другое интересное свойство: уровни могут как «пересекаться», так и «избегать пересечения». Оказалось, что при больших значениях энергии, ряд состояний (допустимых с точки зрения симметрии), представленных как функция λ , пересекаются. Если это не учитывается в расчетах, то могут быть получены завышенные значения $\Delta^2 E_i$.

6.4.г. Распределение расстояний между уровнями

Берри [1] отметил, что для более полного выявления различий между регулярными и нерегулярными спектрами важно изучить энергетические спектры в различных масштабах $\hbar$. При наибольших разрешениях идентифицируются отдельные собственные значения. Для регулярных состояний это может быть сделано с помощью правил ЭБК, но для нерегулярных состояний такой возможности, как говорилось выше, не существует. На больших масштабах, напротив, спектр может быть охарактеризован лишь в терминах средней *плотности состояний* $\bar{\rho}(E)$, задаваемой формулой Томаса—Ферми

$$\bar{\rho}(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \iint \delta(E - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \, d\mathbf{p} \, d\mathbf{q}, \quad (6.4.5)$$

которое представляет собой меру Лиувилля классического фазового пространства при значении энергии E , отнесенному к статистическому объему $(2\pi\hbar)^N$, «занимаемому» квантовым состоянием. Понятно, что в этом самом грубом масштабе не существует способов различать проявления регулярного и нерегулярного классического движений. При промежуточных степенях разрешения различные группы и распределения уровней энергии дают больше информации об описываемом движении.

Одной из характеристик спектров мощности, наиболее активно изучаемой на этих промежуточных масштабах, является статистика распределений расстояний между уровнями. Эти распределения представляют собой свойства спектра в масштабах порядка среднего расстояния между уровнями, т. е., как видно из (6.4.5), порядка $\hbar^N$ или $(\bar{\rho})^{-1}$. Обзор этих вопросов был дан в 1987 году Бэрри в [13]. Наиболее важной величиной является *распределение расстояний между близко расположенными соседними уровнями*, характеризующее функцию вероятности $P(s) \, ds$, которая задает вероятность того, что расстояние между двумя соседними (по энергии) уровнями заключено в интервале между s и $s + ds$. Эта величина широко использовалась при изучении статистических свойств энергетических уровней ядра, характеризующих очень высокой плотностью состояний. Полагая, что моделью энергетических уровней ядра могут служить собственные значения случайных матриц, элементы которых определяются из гауссова ансамбля, Вигнер [23] высказал замечательное предположение, что

$$P(s) = \frac{\pi s}{2} \exp \left\{ -\frac{\pi s^2}{4} \right\}. \quad (6.4.6)$$

В дальнейшем было показано, что этот результат почти идеально согласуется с точным решением модели (вывод которого — сложнейшая задача математической физики; см. [19]). Экспериментальные данные по энергетическим уровням ядра вполне подтвердили предположение Вигнера. Важно отметить, что $P(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$,

что подразумевает некоторое «отталкивание» или «избегание пересечения» уровней. Кроме того (ядерные) энергетические уровни могут принадлежать различным классам симметрии, тогда как с помощью распределения Вигнера (6.4.6) каждый такой класс можно описать только в отдельности. Поэтому при смешении распределений, принадлежащих различным классам, возникает распределение Пуассона

$$P(s) = e^{-s}, \quad (6.4.7)$$

которое соответствует совершенно случайной, несогласованной организации уровней.

Для того, чтобы изучать связанные с расстоянием между уровнями статистические свойства собственных значений *единственного* гамильтониана, можно создать «ансамбль», перейдя к пределу $\hbar \rightarrow 0$ таким образом, что плотность состояний при данном значении энергии E стремится к бесконечности. Таким образом, в малой энергетической зоне можно получить значимые статистические выборки расстояний между уровнями.

Для полностью интегрируемых систем (т. е. таких систем, все состояния которых могут быть проквантованы по правилам ЭБК) было доказано [14], что $P(s)$ является распределением Пуассона (6.4.7) при условии невырожденности гамильтониана

$$\det \left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (6.4.8)$$

Поэтому наиболее вероятное расстояние между уровнями равно нулю, что подразумевает сильное группирование уровней. Это не должно удивлять. Регулярные состояния имеют полный набор «хороших» квантовых чисел и могут, следовательно, образовывать сильно коррелированные последовательности по квантовому числу: $(n_1 + 1, n_2, \dots, n_N)$, $(n_1 + 2, n_2, \dots, n_N)$, $(n_1 + 3, n_2, \dots, n_N)$, Именно такие последовательности могут приводить к строгим правилам отбора Персиваля. Вместе с тем, с точки зрения расстояний по энергии все эти последовательности должны перемешиваться, и следует ожидать, что корреляция будет невелика. В случаях вырожденных гамильтонианов, таких, как системы гармонических осцилляторов, получены различные распределения, которые зависят от тонких теоретико-числовых свойств фундаментальных частот.

Для неинтегрируемых систем высказывалось множество предположений относительно вида $P(s)$, основанных на том, что «неупорядоченность» нерегулярного спектра скорее всего может, в определенном смысле, найти свое выражение в распределении, близком к вигнеровскому. Было проведено множество численных исследований, и все они указывали на переход от распределения Пуассона в интегрируемых режимах к некоторому распределению вигнеровского типа, стремящемуся к нулю при $s \rightarrow 0$ в хаотических режимах. Многие исследователи приводили аргументы в пользу утверждения, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} P(s) \sim s^\gamma, \quad (6.4.9)$$

где γ — некоторый показатель степени. Бэрри [11] привел доводы в пользу того, что $\gamma = m - 1$, где m — число параметров системы, которые надо варьировать, чтобы достичь вырождения энергетических уровней. Идея о взаимосвязи между квазиклассическим нерегулярным спектром и спектром собственных значений, определяемых различными ансамблями матриц, весьма привлекательна, но требуется дать строгое ее обоснование. Не ясно также, возможно ли экспериментально определять распределения расстояний между уровнями с точностью, достаточной для однозначного решения вопроса о регулярности или нерегулярности спектра.

6.4.А. Спектральная жесткость*

Спектральная жесткость представляет собой еще одну статистическую характеристику расстояний между уровнями, позволяющую проводить различия между интегрируемыми и хаотическими системами. Спектр мощности может быть описан в терминах «спектральной ступенчатой» функции

$$\mathcal{N}(E) = \sum_n \Theta(E - E_n), \quad (6.4.10)$$

где Θ — единичная ступенчатая функция, а E_n — последовательность упорядоченных (по энергии) собственных значений. С ростом E в каждом собственном значении E_n происходит «скачок вверх» функции $\mathcal{N}(E)$ на единицу. Производная функции $\mathcal{N}(E)$ представляет собой плотность состояний:

$$\rho(E) = \frac{d\mathcal{N}}{dE}(E) = \sum_n \delta(E - E_n), \quad (6.4.11)$$

усреднение которой по фазовому пространству приводит к соотношению Томаса—Ферми (6.4.5). Усредняя $\mathcal{N}(E)$

$$\overline{\mathcal{N}}(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \iint \Theta(E - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \, d\mathbf{p} \, d\mathbf{q}, \quad (6.4.12)$$

получаем полный объем фазового пространства (отнесенный к $(2\pi\hbar)^N$) вплоть до энергии E ; $\overline{\mathcal{N}}(E)$ задает полное число состояний, лежащих по энергии ниже E .

Спектральная жесткость $\Delta(L)$ определяется как локальное среднее, отвечающее L средним расстояниям между энергетическими уровнями, среднеквадратичного отклонения ступенчатой функции $\mathcal{N}(E)$ от прямой наилучшего приближения (напомним, что среднее расстояние между уровнями, как следует из (6.4.5), — это $(\bar{\rho})^{-1}$):

$$\Delta(L) = \left\langle \min_{A,B} \frac{\bar{\rho}(E)}{L} \int_{-L/(2\bar{\rho}(E))}^{L/(2\bar{\rho}(E))} d\varepsilon [\mathcal{N}(E + \varepsilon) - A - B\varepsilon]^2 \right\rangle. \quad (6.4.13)$$

Проведенный Бэрри [12] квазиклассический анализ соотношения (6.4.13) показал, что $\Delta(L)$ можно представить как сумму вкладов замкнутых (т. е. периодических) классических траекторий системы, причем наибольший вклад вносят наиболее протяженные траектории. (Более подробно роль периодических траекторий при описании спектра мощности в квазиклассическом пределе обсуждается в разделе 6.7). Результаты Бэрри показывают, что в определенном интервале изменения L , (1) $\Delta(L) = L/15$ в случае классически интегрируемых систем; (2) $\Delta(L) = \ln(L/\pi^2) + E$ в случае обратимых по времени классических хаотических систем; (3) $\Delta(L) = \ln(L/(2\pi^2)) + D$ в случае необратимых по времени классических хаотических систем. D и E здесь являются определенными постоянными. При очень больших значениях L поведение $\Delta(L)$ утрачивает универсальность. Более подробно ознакомиться с этими важными результатами читатель может по оригинальной работе [12].

6.5. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными векторами

В этом разделе мы рассмотрим различные свойства волновых функций регулярных и нерегулярных состояний.

6.5.a. Волновые функции регулярных связанных состояний

В случае регулярных квазиклассических состояний волновая функция определяется выражением (6.3.8). Таким образом, $\psi_n(\mathbf{q})$ для состояния с квантовым номером n записывается (без учета определенных фазовых множителей) в виде

$$\psi_n(\mathbf{q}) = \sum_r \sqrt{\det \left| \frac{\partial^2 S_r(\mathbf{q}, \mathbf{I}_n)}{\partial q_j \partial I_k} \right|} \exp \left\{ \frac{i S_r(\mathbf{q}, \mathbf{I}_n)}{\hbar} \right\}, \quad (6.5.1)$$

где $\mathbf{I}_n$ определяет в фазовом пространстве тор с действием $\mathbf{I} = \hbar(n + \alpha/4)$. Определяемая из (6.5.1) плотность вероятности $|\psi_n|^2$ будет содержать колебательные перекрестные члены, соответствующие взаимному влиянию различных ветвей S . Эти члены можно исключить посредством локального усреднения по некоторой ширине Δ , которая при $\hbar \rightarrow 0$ стремится к нулю медленнее, чем $\hbar$. Для заданной функции $f(q)$ это ведет к «грубозернистости» вида

$$\bar{f}(q) = \frac{1}{\Delta} \int_{q-\Delta/2}^{q+\Delta/2} f(q') dq', \quad (6.5.2)$$

где

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \Delta = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\hbar} = 0.$$

Соответственно, грубозернистая плотность вероятности записывается как

$$|\bar{\psi}_n(\mathbf{q})|^2 = \sum_r \det \left| \frac{\partial^2 S_r}{\partial q_j \partial I_k} \right|. \quad (6.5.3)$$

Геометрически это соответствует проекции тора, связанного с n -ым состоянием, на координатную плоскость (см. раздел 6.3). В качестве простого примера рассмотрим одномерное ограниченное движение, для которого

$$|\bar{\psi}(q)|^2 = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial I} \right| = \left| \frac{d\theta}{dq} \right|. \quad (6.5.4)$$

Такая грубозернистая плотность вероятности $|\bar{\psi}(q)|^2$, схематически представленная на рис. 6.1 (б), имеет в классических точках возврата сингулярности, которые соответствуют, как было показано в предыдущем разделе, каустикам. Вместе с этим, такой вид $|\bar{\psi}|^2$ задает в пределе $\hbar \rightarrow 0$ огибающую осцилляций истинной квантовой плотности вероятности (в классически разрешенной области).

Все сказанное до сих пор относится только к волновым функциям регулярных состояний. Определить в рамках квазиклассического приближения вид волновой функции для нерегулярных состояний гораздо труднее. Трудность состоит в том,

что в случае нерегулярных траекторий p как многозначная функция q имеет уже не конечное, а бесконечное число ветвей. (То же самое может быть сформулировано в виде утверждения, что в хаотическом режиме не существует ни одного глобального решения уравнения Гамильтона—Якоби.)

6.5.6. Функция Вигнера

Было высказано предположение, что с точки зрения возможности сопоставления регулярных и нерегулярных состояний в квазиклассическом приближении подходящей альтернативой для изучения самих волновых функций может оказаться использование функции Вигнера. Она представляет собой квантовый аналог классической плотности фазового пространства и имеет вид

$$W(p, q) = \frac{1}{(\pi\hbar)^N} \int dx \exp \left\{ \frac{-2ipx}{\hbar} \right\} \psi(q+x) \psi^*(q-x). \quad (6.5.5)$$

Поведение функции $W(p, q)$ на конкретной фазовой плоскости (p_i, q_i) служит квантовым аналогом поверхности сечения Пуанкаре. Из множества интересных свойств, которыми обладает функция Вигнера, наиболее важными для нашего изложения является тот факт, что ее проекция на координатную плоскость представляет собой квантовую плотность вероятности, т. е.

$$\int W(p, q) dp = |\psi(q)|^2. \quad (6.5.6)$$

В случае регулярных состояний квазиклассическое выражение для волновой функции $\psi_m(q)$ может быть использовано для определения соответствующего чистого состояния функции Вигнера $W_m(p, q)$. При этом можно показать [24], что в классическом пределе $\hbar = 0$ выражение для $W_m(p, q)$ сводится к

$$\overline{W}_m(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^N} \delta(I(p, q) - I_m), \quad (6.5.7)$$

т. е. остается лишь δ -функция на классическом торе, связанном с m -м состоянием. Как говорилось выше, проекция этого тора на координатную плоскость дает предельное выражение для плотности вероятности. Результат такого проецирования зависит от «ориентации» тора в фазовом пространстве. Это может привести к целому набору различных структур каустик. Существуют также отличия в результатах, полученных для сепарабельных и несепарабельных интегрируемых систем.

При конечных $\hbar$ (т. е. в квазиклассическом пределе) поведение функции Вигнера обнаруживает регулярную структуру «дифракционных полос». В этом случае результатом проецирования $W_m(p, q)$ на координатную плоскость является корректное осцилляторное поведение $|\psi_m(q)|^2$. Сопоставление классического и квазиклассического предельных выражений для $W_m(p, q)$ показывает, что в случае регулярных состояний роль $\hbar$ сводится к наложению регулярной структуры (квантовые колебания) на гладкий классический «фон». На рис. 6.3 показана поверхность сечения Вигнера для регулярного состояния системы типа Хенона—Хейлеса, полученная в [27].

Может оказаться, что в случае нерегулярных состояний недостаточно точное знание вида квазиклассической волновой функции окажется препятствием также и при изучении функции Вигнера. Некоторых успехов можно все же добиться, став на несколько отличную точку зрения. В случае регулярных состояний классический

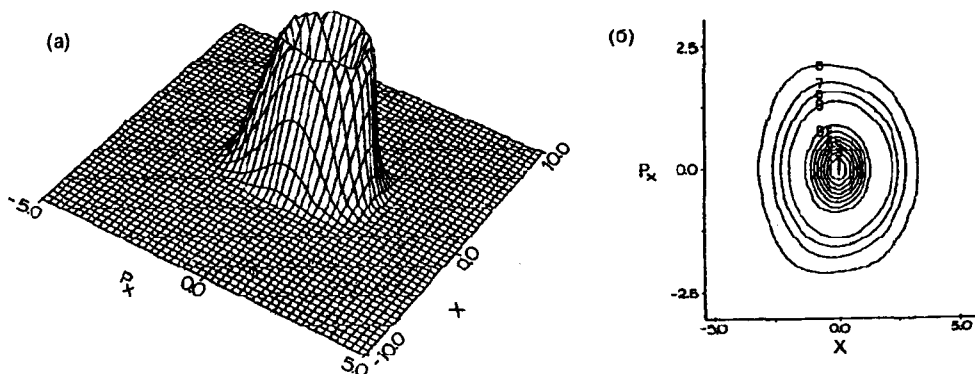


Рис. 6.3. (p_x, x) — плотность распределения Вигнера для 10-го собственного состояния гамильтониана $H = 1/2 (p_x^2 + p_y^2 + 0.49x^2 + 1.69y^2) - 0.10(xy^2 - x^3)$. (а) Изображение в перспективе. (б) Контуры, демонстрирующие гладкую concentricкую структуру фазовой плотности. (Воспроизведено, с разрешения, из [27])

предел функции Вигнера представляет в фазовом пространстве многообразие (тор), с которым данное состояние связано. В экстремальном хаотическом режиме нерегулярное состояние связано, по-видимому, со значительной частью соответствующей энергетической поверхности. С учетом этого кажется разумным предположение о том, что в классическом пределе функция Вигнера представляет собой (нормированное) микроканоническое распределение (см. раздел 6.5.е), т. е. что

$$W(p, q) = \frac{\delta(E - H(p, q))}{\int dp \int dq \delta(E - H(p, q))}. \quad (6.5.8)$$

При конечных значениях $\hbar$ можно ожидать — хотя точное выражение для W и не известно, — что фазовая плотность будет распределена на поверхности сечения W случайным образом. Это аналогично тому, что наблюдается в случае нерегулярных траекторий на поверхности сечения Пуанкаре.

Опираясь с приведенным выше выражением для W , можно проанализировать предельное выражение для соответствующей функции $|\psi(q)|^2$, используя (6.5.6). Это было проделано Бэрри [25], который показал, что для систем с двумя или более степенями свободы $|\psi(q)|^2$ обращается в ноль на классических границах. Такая «антикаустика» структура существенно отличается от структуры каустик, найденной для регулярных состояний.

6.5.в. Пространственные корреляции волновых функций

С помощью функции Вигнера можно получать информацию не только о квадратах модулей волновых функций, но и о них самих. Пространственная автокорреляционная функция для состояния $\psi(q)$ может быть определена в виде

$$C(x, q) = \frac{\overline{\psi(q+x)\psi^*(q-x)}}{|\psi(q)|^2}, \quad (6.5.9)$$

где черта означает, как и раньше, локальное усреднение. Между $C(x, q)$ и $W(p, q)$ существует простое соотношение

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \frac{\int d\mathbf{p} \overline{W}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \exp \{2i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar\}}{|\psi(\mathbf{q})|^2}, \quad (6.5.10)$$

где $\overline{W}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — грубозернистая функция Вигнера, т. е. ее классическое предельное выражение. Поведение $C(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ было изучено как для регулярных, так и для нерегулярных состояний. Оказалось, что в случае регулярных состояний $C(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ анизотропна, тогда как в случае нерегулярных состояний — изотропна и при определенных выражениях для потенциала принимает вид функции Бесселя. В целом следует ожидать, что для регулярных состояний будут характерны сильные анизотропные интерферирующие осцилляции, проявляющиеся лишь на некоторых масштабах. В случае нерегулярных состояний осцилляции должны быть более умеренными и пространственно однородными, с непрерывным спектром волновых векторов ($\mathbf{p}/\hbar$), т. е. проявляться на всех масштабах. Отсюда можно заключить, что $\psi(\mathbf{q})$ представляет собой случайную гауссову функцию от $\mathbf{q}$.

Роль $\hbar$ существенно различна в хаотическом и регулярном режимах. В хаотической классической динамике структура сохраняется вплоть до произвольно малых масштабов. В этом случае $\hbar$ «сглаживает» эту тонкую структуру, и нерегулярные состояния обладают структурой лишь до масштабов порядка $\hbar$. Подчеркнем еще раз, что речь идет о квазиклассическом понятии «нерегулярного состояния», т. е. ситуации, когда $\hbar \rightarrow 0$. Если $\hbar$ не будет достаточно «мало», нерегулярные состояния не будут наблюдаться, сколь бы сильным ни было неинтегрируемое возмущение. В действительности, взаимосвязь между пределами $\hbar \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow 0$, где ϵ — параметр (неинтегрируемого) возмущения, в высшей степени нетривиальна и может привести к целому ряду различных режимов регулярных и нерегулярных спектров.

6.5.г. Некоторые численные результаты

Рассмотрим с учетом высказанных соображений некоторые результаты численного изучения волновых функций в регулярном и нерегулярном режимах. Нойд и др. [30] точно рассчитали квантовую плотность вероятности для состояний системы типа Хенона—Хейлеса (с отношением фундаментальных частот не 1 : 1, а 2 : 1). Результаты расчета $|\psi(\mathbf{q})|^2$ для регулярного состояния представлены на рис. 6.4. Показана также классическая траектория, лежащая на соответствующем (ЭБК) торе. На рисунке ясно видно, что область локализации плотности вероятности соответствует каустической структуре соответствующего тора. Из регулярности колебаний $|\psi(\mathbf{q})|^2$ следует, что система узловых линий $\psi(\mathbf{q})$ будет регулярна. На рис. 6.5 представлены результаты расчета $|\psi(\mathbf{q})|^2$ для состояния с более высокой энергией, для которого квантование по правилам ЭБК невозможно. Показана также типичная для данного значения энергии нерегулярная траектория. В этом случае функция $|\psi(\mathbf{q})|^2$ так же, как траектория, занимает большую часть классически разрешенного конфигурационного пространства. В целом структура волновой функции существенно менее регулярна, чем в предыдущем случае.

Другое интересное исследование было проведено в работе [29] для волновых функций «стадиона». При этом необходимо отметить, что потенциал такой системы на классических границах бесконечен, и поэтому $\psi(\mathbf{q})$ должна здесь обращаться в ноль (т. е. «антикаустика» предположение проверено быть не может). При параметре формы $\gamma = 0$ «стадион» редуцируется в окружность. Результаты расчетов волновой функции, проделанных Мак-Дональдом и Кауфманом для этого случая, представлены на рис. 6.6. Осцилляции амплитуды регулярны, строго ориентированы и до-

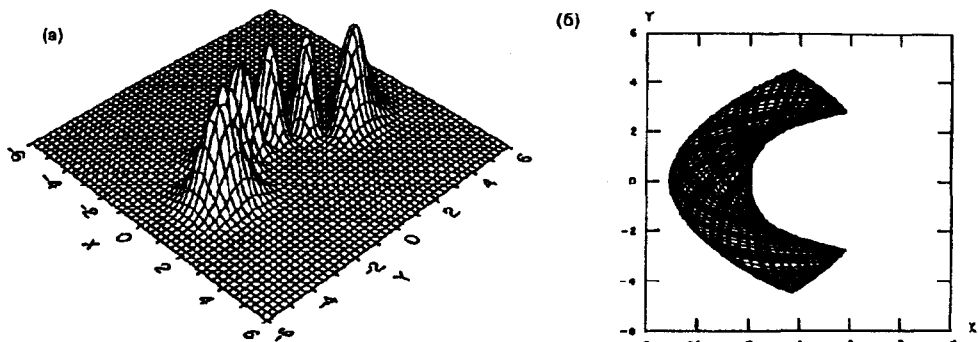


Рис. 6.4. (а) Квантовая плотность вероятности $|\psi(q)|^2$ «регулярного состояния» гамильтониана $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + 1.96x^2 + 0.49y^2) - 0.08(xy^2 - 0.08y^3)$ с собственным значением $E = 4.265$. (б) Траектория, лежащая на соответствующем ЭБК-торе. (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

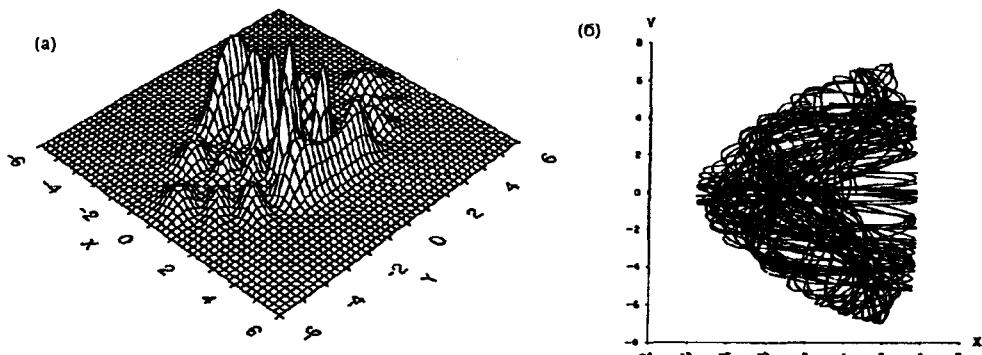


Рис. 6.5. (а) Квантовая плотность вероятности $|\psi(q)|^2$ «нерегулярно состояния» с энергией $E = 8.0$; гамильтониан приведен в подписи к рис. 6.4. (б) Типичная нерегулярная траектория при том же значении энергии. (Воспроизведено, с разрешения, из [30])

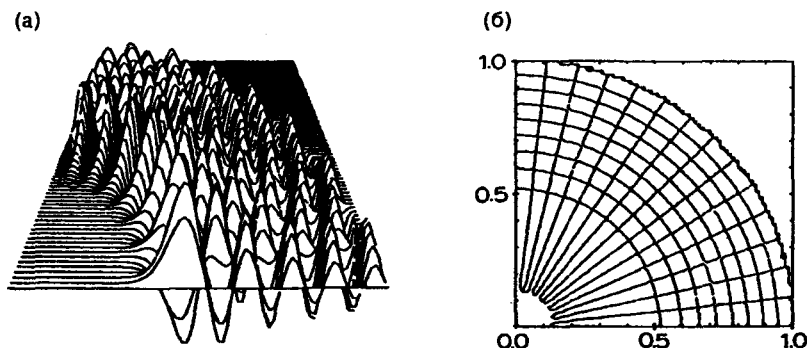


Рис. 6.6. (а) Изображение в перспективе одного из квадрантов амплитуды волновой функции $\psi(q)$ для состояния стадиона с собственным значением $k = 65.38142$ и параметром формы $\gamma = 0$ (т.е. для окружности). (б) Узловая структура этого состояния. Пересечение узловых линий изображено не везде из-за недостатков машинной графики. (Воспроизведено, с разрешения, из [29])

стигают максимума вдоль внутренней окружности, соответствующей каустике в классическом случае. Пересекающиеся узловые линии образуют регулярную структуру. Результаты, представленные на рис. 6.7, получены для состояния с практически таким же значением энергии, но в случае стадиона с $\gamma = 1$ — различия поразительные. Распределение амплитуды однородно по всей классически разрешенной области; узловая структура крайне нерегулярна, узловые линии практически не пересекаются.

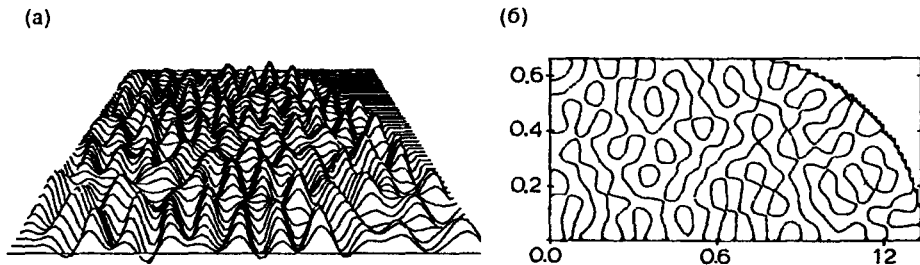


Рис. 6.7. (а) Изображение в перспективе одного из квадрантов амплитуды волновой функции состояния стадиона с собственным значением $k = 65.036$ и $\gamma = 1$. (б) Узловая структура этого состояния — в этом случае узловые линии действительно не пересекаются. (Воспроизведено, с разрешения, из [29])

6.5.д. Узловые структуры

Определенный интерес представляет обсуждение вопроса о взаимосвязи между изменениями узловой структуры и возникновением хаотического движения. Отсутствие пересечений узловых линий подробно рассматривалось в контексте несепарабельных систем, т. е. систем, гамильтониан которых не может быть разделен в ортогональных координатах [32]. В настоящее время понятно, что изменения узловой структуры, обусловленные увеличением «несепарабельности» (не предполагающей, конечно, неинтегрируемость) системы в координатном пространстве, в котором изображена волновая функция, не могут рассматриваться в качестве истинного проявления той или иной формы хаоса. Это подтверждается возможностью построить интегрируемые системы, волновые функции которых будут обладать сколь угодно сложной узловой структурой.

6.5.е. Теоремы локализации*

Изменения волновых функций в обоих примерах, рассмотренных в разделе 6.5.г, несомненно связаны, в той или иной степени, с соответствующими изменениями в лежащей в их основе классической динамике. Вместе с тем в обоих случаях нелегко установить непосредственную однозначную взаимосвязь между изменениями в классическом и квантовом случаях. В регулярном случае это возможно вследствие того, что известно квазиклассическое выражение для волновой функции. Для нерегулярного движения проводить прямое сопоставление гораздо сложнее, что является отражением недостаточного понимания квазиклассической механики в этом случае. Единственный на сегодняшний день (строгий) результат — это теоремы локализации, из которых следует, что локализация последовательностей квантовых состояний

в пределе $\hbar \rightarrow 0$ определяется областями классического фазового пространства, надежным инвариантной мерой [33,26]. Очевидно, что в случае регулярных состояний в качестве инвариантного множества выступает инвариантный тор. Одним из возможных инвариантных множеств для нерегулярных систем является энергетическая поверхность с мерой Лиувилля $\delta(E - H)$. Но наряду с этим, в качестве возможных кандидатов могут выступать и другие инвариантные множества.

6.5.ж. Эксперименты по микроволновой ионизации

Изучение регулярных и нерегулярных спектров интересно само по себе, даже если успехи в экспериментальной проверке различных предсказаний невелики. Вместе с тем проведенные недавно эксперименты дают непосредственное представление о взаимосвязи между квантовой механикой и классическим хаосом. Речь идет о микроволновой ионизации атомов водорода. В данном случае микроволновое излучение может быть использовано для отрыва электрона, находящегося в сильно возбужденных состояниях с квантовыми числами порядка 80, т. е. в режиме, для которого справедливо квазиклассическое приближение. С классической точки зрения облученный атом представляет собой осциллятор, совершающий вынужденные колебания, динамика которого может быть в конце концов сведена к динамике отображения Чирикова. Представляется, что начало интенсивной ионизации должно хорошо коррелировать с возникновением глобального классического хаоса. Полученные результаты прекрасных воспроизводимых экспериментов могут быть сопоставлены с классическими, квазиклассическими и квантовыми расчетами, как теоретическими, так и экспериментальными. Значительная часть этих вопросов была недавно рассмотрена в [28].

6.6. Квантовые отображения: эволюция волновых пакетов

Одна из задач при изучении неинтегрируемых систем в рамках квазиклассической механики состоит в подборе модельных систем, для которых одновременно могут быть произведены детальные классические и квантовые расчеты (аналитические и численные). В консервативной системе классический хаос возможен, если она обладает минимум двумя степенями свободы. И хотя численный расчет таких характеристик, как показатели Ляпунова и поверхности сечения для этих систем не вызывает в настоящее время особых затруднений, изучение целого ряда необходимых свойств, таких как перечисление всех замкнутых траекторий, оказывается практически невозможным³⁾. Аналогично, точные численные квантовомеханические расчеты уровней энергии и собственных функций при малых $\hbar$ (т. е. при больших плотностях состояний) все еще очень дороги и имеют тенденцию к возрастанию неустойчивости при $\hbar \rightarrow 0$. Эти трудности определяют стремление к изучению более простых, но достаточно общих динамических систем. Как говорилось в главе 4, одним из подходящих с этой точки зрения кандидатов являются сохраняющие площадь отображения, которые обладают всеми общими свойствами неинтегрируемых систем. Более того, благодаря одномерности, соответствующие классические (и, как мы увидим ниже, квантовые) свойства рассчитываются (на плоскости) относительно легко. Изучая квазиклассическую механику сохраняющих площадь отображений, мы

³⁾ «Анализ потенциальных систем с двумя степенями свободы лежит за пределами возможностей современной науки» [34].

сможем использовать многие результаты, приведенные в главе 4; при этом для сохранения цельности изложения некоторые необходимые уравнения мы здесь повторим.

6.6.a. Классическое отображение

Прежде всего вернемся к рассмотрению одномерного зависящего от времени гамильтониана вида

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} V(q), & 0 < t < \gamma T, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)\mu} p^2, & \gamma T < t < T, \end{cases} \quad (6.6.1)$$

где μ — масса частицы и $0 < \gamma < 1$. Этот гамильтониан описывает последовательность периодически чередующихся «кинетических» и «потенциальных» движений. Интегрирование соответствующих уравнений Гамильтона в пределах любого периода от $t = nT$ до $t = (n+1)T$ дает сохраняющее площадь отображение фазовой плоскости на себя:

$$p_{n+1} = p_n - TV'(q_n), \quad (6.6.2a)$$

$$q_{n+1} = q_n + \frac{T}{\mu} p_{n+1}, \quad (6.6.2b)$$

где штрих означает дифференцирование по q . Здесь целесообразно использовать дискретный лагранжиан Персиваля (раздел 4.2.г)

$$L(q_{n+1}, q_n) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{T} \right)^2 - V(q_n), \quad (6.6.3)$$

связанную с ним функцию действия

$$W(q_{n+1}, q_n) = TL(q_{n+1}, q_n) = \frac{\mu}{2} \frac{q_{n+1} - q_n}{T} - TV(q_n) \quad (6.6.4)$$

и «производящие» соотношения

$$p_n = -\frac{\partial W}{\partial q_n}(q_{n+1}, q_n), \quad p_{n+1} = \frac{\partial W}{\partial q_{n+1}}(q_{n+1}, q_n). \quad (6.6.5)$$

6.6.b. Квантовое отображение

Зная гамильтониан (6.6.1), соответствующий отображению (6.6.2), мы можем представить это отображение в терминах «квантовой механики». Идея состоит в отыскании соответствующего квантового оператора $\hat{U}$, переводящего состояние⁴⁾ $|n\rangle$ в «момент времени» n в состояние $|n+1\rangle$ в «момент времени» $n+1$:

$$|n+1\rangle = \hat{U}|n\rangle. \quad (6.6.6)$$

В координатном представлении $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$ это может быть записано следующим образом:

$$\psi_{n+1}(q) = \langle q|n+1\rangle = \langle q|\hat{U}|n\rangle = \int \langle q|\hat{U}|q'\rangle \langle q'|n\rangle dq' = \int \langle q|\hat{U}|q'\rangle \psi_n(q') dq', \quad (6.6.7)$$

⁴⁾ Здесь мы употребляем стандартные обозначения «бра»-«кет».

где мы использовали стандартное тождество $\int |q\rangle\langle q| dq = 1$. Подчеркнем еще раз, что нижние индексы n и $n+1$ относятся к «моментам времени», которые соответствуют итерациям отображения (6.6.2), и не являются квантовыми числами. Оператор $\widehat{\mathcal{H}}$, соответствующий (6.6.1), получается по обычным правилам:

$$\widehat{\mathcal{H}}(\hat{p}, \hat{q}, t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} V(\hat{q}), & 0 < t < \gamma T, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)\mu} \hat{p}^2, & \gamma T < t < T, \end{cases} \quad (6.6.8)$$

где $\hat{q}$ и $\hat{p}$ соответственно операторы координат и импульсов (в координатном пространстве $\hat{q} = q$ и $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$). Легко видеть, что эволюционный оператор $\widehat{U} = \exp \{ -i\widehat{\mathcal{H}}t/\hbar \}$, вычисленный для одного периода T , имеет вид

$$\widehat{U} = \exp \left\{ -\frac{V(\hat{q})T}{\hbar} \right\} \exp \left\{ \frac{-\hat{p}^2 T}{2\mu\hbar} \right\} \quad (6.6.9)$$

и, так же, как классическое отображение, не зависит от γ (просто проинтегрируйте зависящее от времени уравнение Шрёдингера (6.1.2) в пределах от $t = 0$ до $t = T$). Отметим, что операторы кинетической и потенциальной энергий действуют в (6.6.8) раздельно, и благодаря этому выражение для $\widehat{U}$ удобно факторизуется в виде (6.6.9). В координатном представлении матричные элементы $\langle q|\widehat{U}|q'\rangle$ вычисляются непосредственно:

$$\langle q|\widehat{U}|q'\rangle = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{i(\mu(q-q')^2/(2T) - V(q)T)}{\hbar} - \frac{i\pi}{4} \right\}. \quad (6.6.10)$$

Заметим, что используя (6.6.4) и полагая $q = q_{n+1}$, $q' = q_n$, (6.6.10) можно также записать в виде

$$\langle q_{n+1}|\widehat{U}|q_n\rangle = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}} \left[\frac{\partial^2 W(q_{n+1}, q_n)}{\partial q_n \partial q_{n+1}} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{iW(q_{n+1}, q_n)}{\hbar} \right\}, \quad (6.6.11)$$

т. е. в виде пропагатора (функции Грина) от «состояния» $|q_n\rangle$ к $|q_{n+1}\rangle$, представленного в виде произведения амплитуды и фазового фактора; последний задается классическим действием вдоль пути от q_n к q_{n+1} . Матричный элемент (6.6.10) входит в выражение (6.6.7) интегрального эволюционного уравнения

$$\psi_{n+1}(q) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{-i\pi}{4} - \frac{iV(q)T}{\hbar} \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} dq' \psi_n(q') \exp \left\{ \frac{i\mu(q-q')^2}{2T\hbar} \right\}. \quad (6.6.12)$$

Не составляет труда проверить, что в пределе $T \rightarrow 0$ классическое отображение (6.6.2) сводится к уравнениям Гамильтона $\dot{q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q}$, описывающим непрерывную эволюцию системы, которая определяется гамильтонианом $\bar{H}$, получающимся из (6.6.1) усреднением по времени:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} p^2 + V(q). \quad (6.6.13)$$

Аналогично «квантовое отображение» сводится в пределе $T \rightarrow 0$ к стандартному зависящему от времени уравнению Шрёдингера (6.1.2), оператор Гамильтона которого

соответствует (6.6.13). Шаг по времени T можно рассматривать в качестве параметра возмущения: в пределе $T \rightarrow 0$ движение сводится к интегрируемому гамильтониану с одной степенью свободы, и фазовая плоскость (p, q) покрывается инвариантными кривыми; при $T > 0$ динамика определяется дискретными отображениями (6.6.2), и с ростом T все большее и большее число инвариантных кривых разрушается, а фазовые плоскости приобретают общую структуру регулярного и хаотического движений.

6.6.в. Эволюция классических и квантовых состояний

Изложенные выше результаты позволяют однозначно сопоставлять классическое и квантовое поведение при изучении эволюции квантовых состояний в режиме хаотического движения. Вначале рассмотрим консервативный гамильтониан (6.6.13) с одной степенью свободы. Квантовые стационарные состояния $\psi^{(m)}$ этой системы могут быть рассчитаны (обычно численно) с высокой степенью точности. Кроме того, в квазиклассическом пределе каждому из этих состояний с помощью правила квантования Бора—Зоммерфельда может быть поставлено в соответствие инвариантное многообразие Лагранжа $\mathcal{C}_0$ в фазовой плоскости (p, q) :

$$I = \oint_{\mathcal{C}_0} p dq = \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar, \quad (6.6.14)$$

где собственное значение $E_m = H(I = (m + \frac{1}{2})\hbar)$ мы сопоставляем стационарному состоянию $\psi^{(m)}$. Теперь рассмотрим «включение» в момент $t = 0$ возмущения T . Классическое движение определяется в этом случае гамильтонианом (6.6.1). Инвариантные кривые $\mathcal{C}_0$ (гамильтониана $\bar{H}$), определенные соотношением (6.6.14), более не являются инвариантными кривыми для (6.6.1) и приобретают сложное строение, зависящее от структуры (6.6.1) в фазовом пространстве; оно представляет собой усы и завитки, обсуждавшиеся ранее в главе 4. Точно так же стационарные состояния $\psi^{(m)}$ (гамильтониана $\bar{H}$) более не являются стационарными состояниями $\mathcal{H}$ (6.6.8), и теперь их эволюция определяется интегральным уравнением (6.6.12).

Сопоставить (в пределе $\hbar \rightarrow 0$) эволюционирующие многообразия Лагранжа с соответствующими им эволюционирующими квантовыми состояниями можно посредством численного расчета (на каждом шаге времени n) величины $|\psi_n^{(m)}(q)|^2$ и проекции $\mathcal{C}_n$ на ось q ; последняя соответствует грубозернистой $|\bar{\psi}(q)|^2$ (см. раздел 6.4). Проиллюстрируем сказанное некоторыми результатами, взятыми из [36]. В этой работе изучалось отображение

$$p_{n+1} = p_n - q_{n+1}^3, \quad (6.6.15a)$$

$$q_{n+1} = q_n + p_n \quad (6.6.15b)$$

с усредненным гамильтонианом $\bar{H} = p^2/2 + q^4/4$, что соответствует простому кубическому осциллятору (ангармоническому осциллятору с потенциалом четвертой степени). Фазовая плоскость отображения (6.6.15) показана на рис. 6.8 (а). Самая большая кривая, которая изображена также на рис. 6.8 (б), представляет собой инвариантную кривую гамильтониана $\bar{H}$; в выбранных единицах она соответствует, согласно (6.6.14) 18-у связанному состоянию соответствующей квантовой системы.

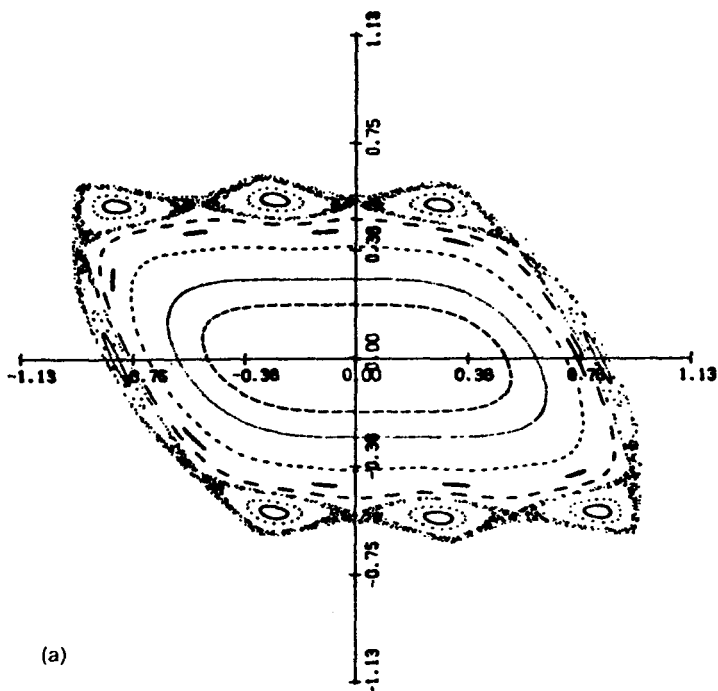


Рис. 6.8. (а) Типичная фазовая плоскость сохраняющего площадь отображения (6.6.15)

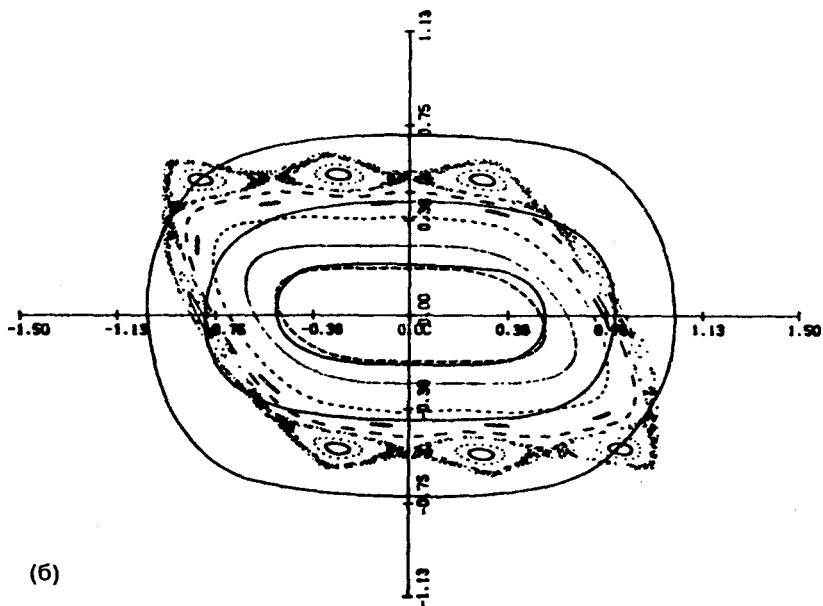


Рис. 6.8. (б) Та же фазовая плоскость, на которую наложены три инвариантные кривые гамильтониана (6.6.13). (Воспроизведено, с разрешения, из [36])

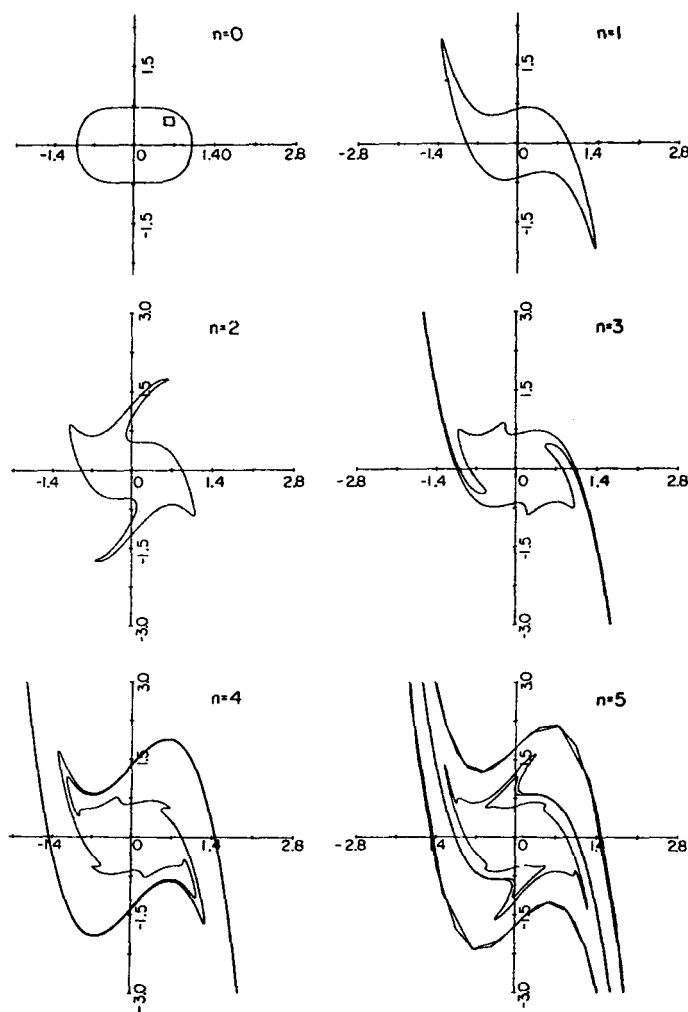


Рис. 6.9. Классические отображения $\mathcal{C}_n$ исходного семейства траекторий $\mathcal{C}_0$, представленного на рис. 6.8 (б) внешней кривой. Маленький квадратик, отмеченный в $\mathcal{C}_0$, имеет «площадь» h . (Воспроизведено, с разрешения, из [36])

На рис. 6.9 показана эволюция этой кривой под действием классического отображения; всего лишь пять итераций приводят к значительной сложности $\mathcal{C}_5$, напоминающей гамильтонов хаос в жидкостях, обсуждавшийся в разделе 4.8. В случае $\mathcal{C}_4$ ясно видны небольшие завитки, связанные с цепочкой островков, показанной на рис. 6.8, а также длинные тонкие усики, обусловленные прохождением через гиперболические области. Общая спиральная форма, наблюдающаяся уже у $\mathcal{C}_1$, соответствует «гигантскому» завитку, связанному с вращением относительно центральной неподвижной точки $q = p = 0$. На рис. 6.10 (а) представлены проекции $\mathcal{C}_n$. Всего лишь две итерации приводят к сильному возрастанию числа каустик, что представляется характерной чертой хаотического режима. Сопоставим теперь эти рисунки с результатами квантового отображения $|\psi(q)|^2$ (рис. 6.11 (а)). При $n = 2$ наблюдается резкий переход от структуры, характеризующейся единообразной величиной осцилляций, к структуре, для которой характерна множественность размеров колебаний. Проек-

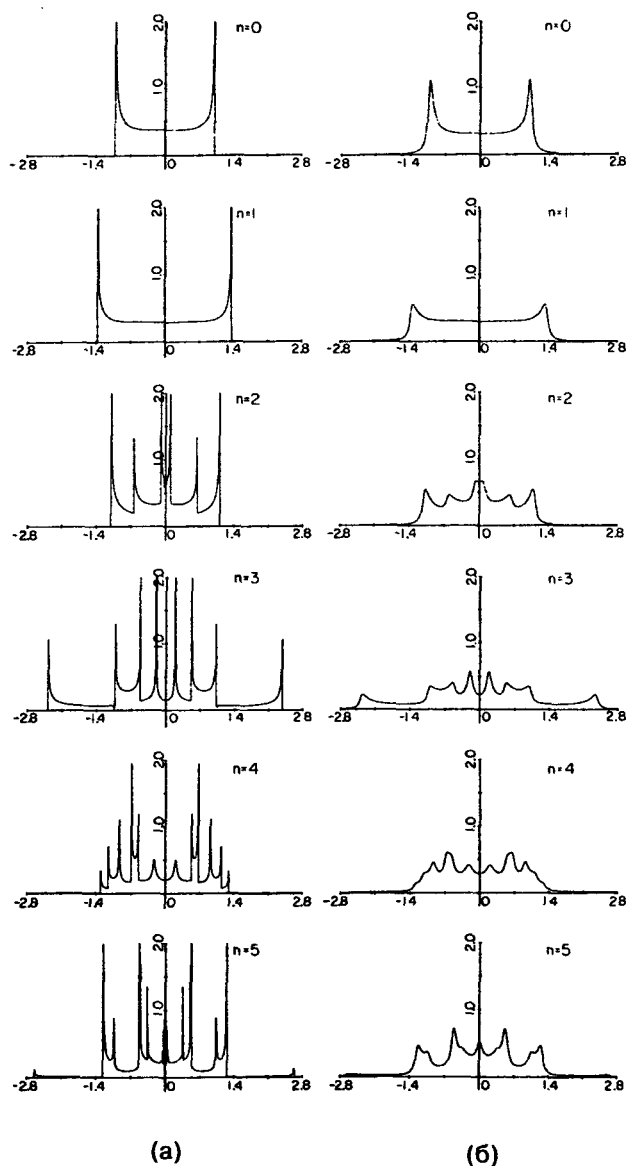


Рис. 6.10. (а) Проекция отображений $\mathcal{C}_n$ на ось q иллюстрирует резкое увеличение числа каустик при $n > 2$. (б) Проекции, сглаженные в масштабе ширины $\Delta q \approx 0.05$. (Воспроизведено, с разрешения, из [36])

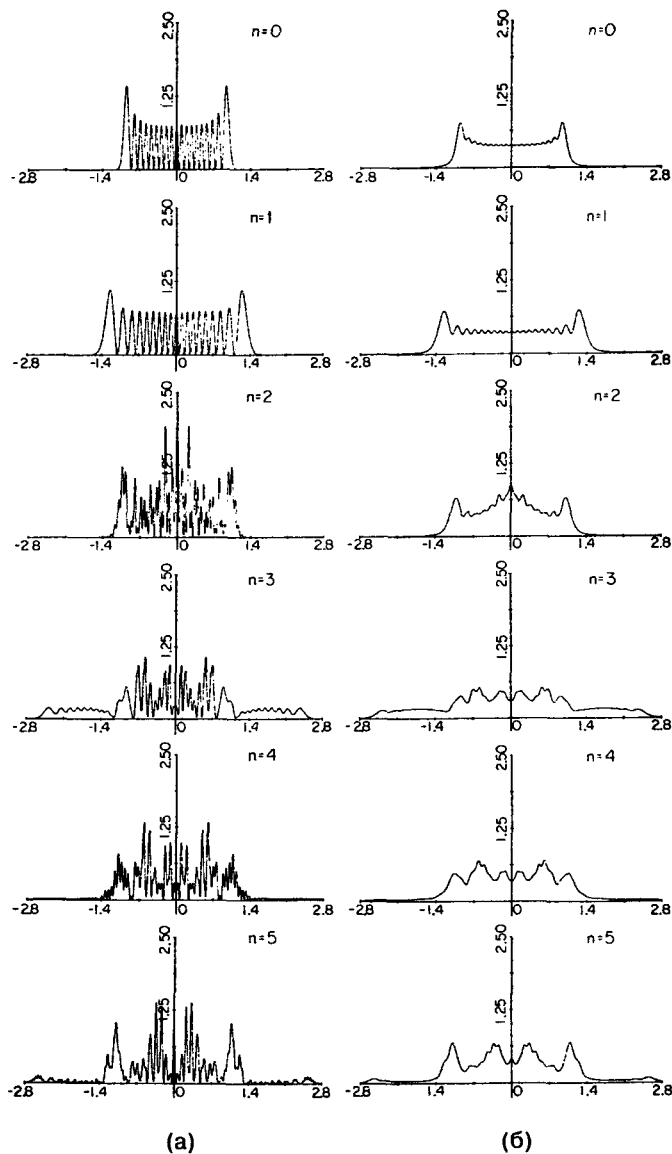


Рис. 6.11. (а) Квантовые отображения, изображающие эволюцию $|\psi(q)|^2$. Начальное состояние ($n = 0$) представляет собой 18-е связанное состояние гамильтониана $\bar{H} = p^2/2 + q^4/4$ (с соответствующей ВКБ-кривой $\mathcal{E}_0$). (б) Квантовые отображения, сглаженные в том же масштабе, что и на рис. 6.10 (б). (Воспроизведено, с разрешения, из [36])

ции соответствующих эволюционирующих кривых дают гладкие огибающие для $|\psi|^2$ лишь в случаях $n = 0$ и $n = 1$. Далее с ростом n размножающаяся структура каустик и $|\psi|^2$, как видно, слабо связаны между собой; и это не удивительно, поскольку каустики теперь группируются в масштабах, меньших, чем характерная длина волны де Бройля. Понятно, что классические особенности (в фазовом пространстве) невозможно разрешить с помощью квантовых волновых функций в масштабе, меньшем, чем $O(\hbar)$. Для сопоставления классических проекций и $|\psi|^2$ при $n \geq 2$ обе зависимости необходимо сгладить в масштабе $O(\hbar)$. Это иллюстрируется последовательностями рисунков на рис. 6.10 (б) и 6.11 (б), между которыми наблюдается достаточно хорошее соответствие.

Обсуждаемые результаты показывают, что $\hbar$ в зависимости от классического режима играет две различные роли. Вначале $\hbar$ действительно накладывает квантовую структуру (колебания ψ) на гладкий классический фон (начальные кривые $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}_1$). Однако с усложнением классической структуры в ходе эволюции (усы и завитки) на масштабах, меньших, чем $O(\hbar)$, $\hbar$ начинает играть сглаживающую роль в смысле невозможности «разрешить» такие тонкие структуры. Более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [36]. Квантовые отображения рассматривались также в [37] и [35].

6.7. Квантовые отображения: квантование с использованием замкнутых траекторий*

Как отмечалось в разделе 6.4, для неинтегрируемых гамильтонианов не существует «прямых» условий квантования типа условий ЭБК. Однако разработан альтернативный квазиклассический метод, основанный на использовании классических замкнутых траекторий системы, начало которому было положено в работе [41]. Его изложение для гамильтоновых систем общего вида представляет собой значительные сложности. С этой точки зрения квантовые отображения служат простой основой для обсуждения основных идей. Вначале мы дадим обзор необходимых квантовомеханических предпосылок.

6.7.a. Предварительные сведения из квантовой механики

Частица с массой m в потенциальном поле $V(\mathbf{q})$ ($\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$) удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_n - V(\mathbf{q}) \right] \psi_n(\mathbf{q}) = 0, \quad (6.7.1)$$

где $\psi_n(\mathbf{q})$ образуют полный набор собственных функций (занумерованных с помощью некоторого вектора квантовых чисел, обозначенного через $\mathbf{n}$) с соответствующими собственными значениями E_n . Квантовомеханическая плотность состояний определяется соотношением

$$\rho(E) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(E - E_n), \quad (6.7.2)$$

т. е. каждому собственному значению соответствует пик δ -функции. Функция Грина (пропагатор) для (6.7.1) удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E - V(\mathbf{q}) \right] G(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (6.7.3)$$

и может быть представлена в «билинейном виде»

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sum_{\mathbf{n}} \frac{\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{q}) \psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{q}')}{E - E_{\mathbf{n}}}. \quad (6.7.4)$$

Вычисляя «след» функции Грина (т. е. полагая $\mathbf{q}'$ равным $\mathbf{q}$ и интегрируя по всем $\mathbf{q}$), находим

$$\int d\mathbf{q} G(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{E - E_{\mathbf{n}}}. \quad (6.7.5)$$

Воспользовавшись формальным соотношением

$$\frac{1}{E - E_{\mathbf{n}} + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{E - E_{\mathbf{n}}} - i\varepsilon \pi \delta(E - E_{\mathbf{n}}) \quad (6.7.6)$$

(где $\mathcal{P}$ — главное значение Коши), запишем

$$G^{(+)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sum_{\mathbf{n}} \frac{\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{q}) \psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{q}')}{E - E_{\mathbf{n}} + i\varepsilon}, \quad (6.7.7)$$

тогда переход к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\mathbf{q} G^+(\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (6.7.8)$$

Ниже мы увидим, что в квазиклассическом пределе $G(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ можно представить в терминах *классических путей*, соединяющих $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$, и что операция вычисления следа «отбирает» только замкнутые траектории системы.

6.7.6. Квазиэнергетический спектр

Мы убедились (см. (6.6.6)), что в случае гамильтонианов типа (6.6.1) с периодической зависимостью от времени,

$$H(p, q, t + T) = H(p, q, T), \quad (6.7.9)$$

соответствующее квантовое состояние в «момент времени» N получается в результате N -кратного действия унитарного оператора $\hat{U}$:

$$|\psi(t + NT)\rangle = \hat{U}^N |\psi(t)\rangle. \quad (6.7.10)$$

Оператор $\hat{U}$ может обладать спектром собственных состояний $|n\rangle$, таким что

$$\hat{U}^N |n\rangle = \exp \left\{ \frac{-iN\alpha_n}{\hbar} \right\} |n\rangle, \quad (6.7.11)$$

где собственные значения α_n , лежащие на единичной окружности, называются *квази-энергиями*. Используя (6.7.11), мы можем, таким образом, записать

$$\operatorname{Tr}(\hat{U}^N) = \sum_{\mathbf{n}} \langle \mathbf{n} | \hat{U}^N | \mathbf{n} \rangle = \sum_{\mathbf{n}} \exp \left\{ \frac{-iN\alpha_n}{\hbar} \right\}. \quad (6.7.12)$$

Удобно ввести приведенные значения

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{T} \quad (6.7.13)$$

и затем определить квазиэнергетическую плотность состояний в виде ряда Фурье

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{iNET}{\hbar}\right\} \text{Tr}(\hat{U}^N) = \frac{1}{2\pi\hbar} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_n \exp\left\{\frac{iNT}{\hbar}(E - \varepsilon_n)\right\}. \quad (6.7.14)$$

При помощи тождества⁵⁾

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i M x\} \quad (6.7.15)$$

функция $\rho(E)$ может быть представлена в виде суммы δ -функций (ср. (6.7.2)):

$$\rho(E) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(M\omega\hbar - (E - \varepsilon_n)), \quad (6.7.16)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — естественный период соответствующего гамильтониана (6.7.9). Заметим, что с каждым квазиэнергетическим уровнем ε_n связан бесконечный набор состояний, т. е. $E = \varepsilon_n + M\omega\hbar$, $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

6.7.в. Пропагатор квантового отображения

Исходным является «одношаговый» пропагатор от $|q_n\rangle$ к $|q_{n+1}\rangle$, задаваемый соотношением (6.6.11). Для формирования « n -шагового» пропагатора (переводящего систему из состояния $|q_0\rangle$ в состояние $|q_n\rangle$) необходимо вычислить $(n-1)$ -мерный интеграл

$$\langle q_n | \hat{U} | q_0 \rangle = \int dq_1 \langle q_0 | \hat{U} | q_1 \rangle \langle q_1 | \hat{U} | q_2 \rangle \int dq_2 \langle q_2 | \hat{U} | q_3 \rangle \dots \int dq_{n-1} \langle q_{n-1} | \hat{U} | q_n \rangle. \quad (6.7.17)$$

В пределе $\hbar \rightarrow 0$ это можно сделать с помощью широко известного *метода стационарной фазы*. Это один из наиболее важных для квазиклассических задач методов, и читателям настоятельно рекомендуется обратиться к приложению 6.1, в котором дано его начальное изложение. Для того, чтобы понять, каким образом обсуждаемый

⁵⁾ Представляет собой частный случай очень полезного математического приема, используемого главным образом в квазиклассических задачах, который известен как *формула суммирования Пуассона*. В общем виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} g(l) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(x) \exp\{2\pi i M x\} dx$$

она позволяет выразить бесконечную сумму функций через бесконечную сумму соответствующих преобразований Фурье. Эту формулу можно получить, применяя к обеим частям (6.7.15) $\int_0^{\infty} g(x) dx$. Заметим, что грубое и довольно широко применяемое приближение, состоящее в замене суммы $\sum_l$ интегралом $\int dl$, соответствует использованию члена $M = 0$ в формуле суммирования Пуассона.

метод используется для вычисления (6.7.17), рассмотрим прежде всего «двухшаговый» пропагатор

$$\langle q_2 | \widehat{U} | q_0 \rangle = \frac{i}{2\pi\hbar} \int dq_1 \left[\frac{\partial^2 W(q_2, q_1)}{\partial q_2 \partial q_1} \frac{\partial^2 W(q_1, q_0)}{\partial q_1 \partial q_0} \right]^{1/2} \times \\ \times \exp \frac{i}{\hbar} [W(q_2, q_1) + W(q_1, q_0)]. \quad (6.7.18)$$

В пределе $\hbar \rightarrow 0$ экспоненциальный член сильно осциллирует везде за исключением точки стационарности фазы, определяемой условием

$$\frac{\partial}{\partial q_1} [W(q_2, q_1) + W(q_1, q_0)] = -p_1(q_2, q_1) + p_1(q_1, q_0) = 0, \quad (6.7.19)$$

в котором использованы «производящие» соотношения (6.6.5). Это условие выполняется в том случае, если точка q_1 принадлежит классическому пути, соединяющему точки q_2 и q_0 . Мы обозначим эту точку как $q_1 = q_1^c$. Следующий шаг в приближении стационарной фазы состоит в вычислении амплитуды (см. приложение 6.1)

$$A_{20} = \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1} W(q_2, q_1) \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_0} W(q_1, q_0)}{-\frac{\partial}{\partial q_1} [p_1(q_2, q_1) - p_1(q_1, q_0)]} \right]_{q_1=q_1^c}. \quad (6.7.20)$$

Дифференцируя соотношение $p_1(q_2, q_1) - p_1(q_1, q_0) = 0$ по q_0 , получаем по правилу дифференцирования сложной функции

$$-\frac{\partial}{\partial q_1} [p_1(q_2, q_1) - p_1(q_1, q_0)] = \frac{\frac{\partial}{\partial q_0} p_1(q_1, q_0)}{\frac{\partial q_1}{\partial q_0}} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial q_0 \partial q_1} W(q_1, q_0)}{\frac{\partial q_1}{\partial q_0}}$$

и отсюда

$$A_{20} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_1} W(q_2, q_1) \cdot \frac{\partial q_1}{\partial q_0} \right]_{q_1=q_1^c} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_0} W(q_2, q_0) \frac{\partial q_1}{\partial q_0} \right]_{q_1=q_1^c}. \quad (6.7.21)$$

Мы использовали здесь классическое правило, основанное на аддитивности действия вдоль классического пути:

$$W(q_2, q_1^c) + W(q_1^c, q_0) = W(q_2, q_0). \quad (6.7.22)$$

Используя полученные результаты, находим квазиклассическое приближение для (6.7.18):

$$\langle q_2 | \widehat{U} | q_0 \rangle = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial^2}{\partial q_2 \partial q_0} W(q_2, q_0) \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{iW(q_2, q_0)}{\hbar} \right\}, \quad (6.7.23)$$

где $W(q_2, q_0)$ — классическое действие вдоль (классического) пути от q_0 к q_2 . Повторные применения метода стационарной фазы к (6.7.17) дают квазиклассическое приближение для n -шагового пропагатора:

$$\langle q_n | \widehat{U} | q_0 \rangle = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial^2}{\partial q_n \partial q_0} W(q_n, q_0) \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{iW(q_n, q_0)}{\hbar} \right\}. \quad (6.7.24)$$

При этом предполагается, что классический путь нигде не проходит через каустики, т. е. что нет дополнительных фазовых множителей.

6.7.г. Вычисление следа пропагатора

Для обсуждения вопросов, связанных с вычислением следа пропагатора, удобно ввести обозначение

$$K(q_n, q_0, \tau) \equiv \langle q_n | \widehat{U} | q_0 \rangle, \quad (6.7.25)$$

где $\tau = nT$ — время эволюции от q_0 к q_n . След, определяемый как

$$\text{Tr}(K) = \int dq K(q, q, \tau), \quad (6.7.26)$$

состоит из вкладов различных путей, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же точке. Различают два типа вкладов:

- (1) пути нулевой длины; $q = q$ при $\tau = 0$;
- (2) пути с длиной « n шагов»; $q = q_n, q = q_0$ при $\tau = nT$.

Нетривиальный вклад в след дает только путь второго типа. Нам необходимо, используя квазиклассическое выражение для K (6.7.24), вычислить

$$\text{Tr}(K) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \int dq \left[\frac{\partial^2}{\partial q_n \partial q_0} W(q_n, q_0) \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{iW(q_n, q_0)}{\hbar} \right\}, \quad (6.7.27)$$

причем понятно, что $q_n = q_0 = q$. Снова используем метод стационарной фазы; точки стационарности фазы определяются теми путями, которые удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial q_n} W(q_n, q_0) + \frac{\partial}{\partial q_0} W(q_n, q_0) \right]_{q_n=q_0=q} &= \\ &= [p_n(q_n, q_0) - p_0(q_n, q_0)]_{q_n=q_0=q} = p_n(q, q) - p_0(q, q) = 0. \end{aligned} \quad (6.7.28)$$

Эти пути соответствуют *замкнутым траекториям* системы, поскольку они начинаются и заканчиваются в одной и той же точке как в q -пространстве, так и (согласно (6.7.28)) в p -пространстве. Расчет возможен при условии, что каждая замкнутая траектория изолирована (к этому вопросу мы вернемся позже). Вычисление амплитуды в высшей степени нетривиально. Она имеет вид

$$\left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial q_n \partial q_0} W(q_n, q_0)}{\frac{\partial^2}{\partial q_n^2} W(q_n, q_0) + 2 \frac{\partial^2}{\partial q_n \partial q_0} W(q_n, q_0) + \frac{\partial^2}{\partial q_0^2} W(q_n, q_0)} \right]_{q_n=q_0=q}$$

и, как может быть показано (подробнее см. [42]), прямо пропорциональна (определенному в разделе 4.6) вычету R траектории. В итоге находим, что вклад каждой замкнутой траектории в $\text{Tr}(K)$ определяется соотношением

$$\text{Tr}(K) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R}} \exp \left\{ \frac{i\overline{W}\tau}{\hbar} \right\}, \quad (6.7.29)$$

где $\overline{W}(\tau)$ означает действие вдоль замкнутой траектории.

Замкнутые траектории распадаются на три категории.

- (1) $0 < R < 1$ — траектории устойчивы, и на фазовой плоскости отображения проявляются в виде эллиптических неподвижных точек. Вычет может быть представлен в виде

$$R = \sin^2 \left(\frac{v}{2} \right), \quad (6.7.30)$$

где v — так называемый *угол устойчивости*.

- (2) $R < 0$ — траектории неустойчивы, что соответствует гиперболическим неподвижным точкам. В этом случае $v = iu$ и

$$R = -\operatorname{sh}^2\left(\frac{u}{2}\right). \quad (6.7.31)$$

- (3) $R > 1$ — траектории также неустойчивы, но этой ситуации отвечают гиперболические неподвижные точки с отражением. В этом случае $v = \pi + iu$ и

$$R = \operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{2}\right). \quad (6.7.32)$$

Возвращаясь к полученному методом стационарной фазы соотношению (6.7.29), необходимо также учесть существование вклада от повторных проходов каждой траектории. Поэтому окончательный результат для заданной устойчивой траектории имеет вид

$$\operatorname{Tr}(K) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(Nv/2)} \exp\left\{\frac{iN\bar{W}}{\hbar}\right\}, \quad (6.7.33)$$

где N соответствует числу проходов траектории; множитель $1/2$ в (6.7.29) исчезает в результате того, что учитываются вклады как «прямых», так и «обратных» проходов. Соответствующий результат для гиперболических неподвижных точек имеет вид

$$\operatorname{Tr}(K) = -i \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(Nu/2)} \exp\left\{\frac{iN\bar{W}}{\hbar}\right\}, \quad (6.7.34)$$

а для гиперболических неподвижных точек с отражением получаем

$$\operatorname{Tr}(K) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(Nu/2)} \exp\left\{\frac{iN\bar{W}}{\hbar}\right\}. \quad (6.7.35)$$

В каждом из соотношений (6.7.33), (6.7.34) и (6.7.35) показатель $\bar{W}$ соответствует действию вдоль одного витка данной траектории.

В случае устойчивых траекторий серьезным недостатком соотношения (6.7.33) является расходимость при всех значениях $Nv/2$, кратных π . Она обусловлена появлением каустики в классическом пропагаторе и не позволяет применить метод стационарной фазы для вычисления (6.7.29). В случае выражения (6.7.34), соответствующего гиперболическим траекториям, также возникает проблема расходимости — но только при значении $u = 0$, что на практике встречается редко. Решение этой проблемы нетривиально, и для устранения расходимостей были предложены различные приближения «первого порядка» для (6.7.33) и (6.7.34). В конечном итоге цель может быть достигнута за счет необходимых изменений приближения стационарной фазы (имеются в виду однородные приближения), позволяющих учесть слияние точек стационарности.

Подытожив изложенные результаты, приходим к квазиклассическому представлению плотности состояний (6.7.14) в терминах вкладов замкнутых траекторий. Окончательно получаем

$$\rho(E) = \rho^0 + \sum_j (\rho_j^I(E) + \rho_j^{II}(E) + \rho_j^{III}(E)), \quad (6.7.36)$$

где ρ^0 — средняя плотность состояний; $\rho^0 = T/2\pi\hbar$ (это вклад путей с нулевой длиной); сумма по j означает суммирование вкладов топологически различных траекторий. Три члена под знаком суммы в (6.7.36) соответствуют вкладам траекторий, относящихся к трем различным типам устойчивости:

$$\rho_j^I(E) = \frac{T}{2\pi\hbar} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(Nv_j/2)} \sin\left[\frac{N}{\hbar}(ET + \overline{W}_j)\right], \quad (6.7.37)$$

$$\rho_j^{II}(E) = \frac{-T}{2\pi\hbar} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(Nu_j/2)} \cos\left[\frac{N}{\hbar}(ET + \overline{W}_j)\right], \quad (6.7.38)$$

$$\rho_j^{III}(E) = \frac{T}{2\pi\hbar} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(Nu_j/2)} \sin\left[\frac{N}{\hbar}(ET + \overline{W}_j)\right]. \quad (6.7.39)$$

6.7.д. Обсуждение метода замкнутых траекторий

С практической точки зрения квантование с помощью метода замкнутых траекторий не является наиболее удобным, поскольку требуемое при этом перечисление всех замкнутых траекторий и соответствующих им свойств представляет собой громоздкую задачу даже для отображений, не говоря уже о гамильтонианах общего вида с двумя и более степенями свободы. В тоже время метод позволяет понять кластеризацию уровней энергии, что является его важной особенностью. Каждая замкнутая траектория вносит в $\rho(E)$ осциллирующий вклад, «длина волны» которого ΔE определяется в энергетическом пространстве соотношением $\Delta E \left(\frac{d\overline{W}}{dE}\right) = 2\pi\hbar$, где $\overline{W}$ — полное действие вдоль траектории. (Эта величина включает возможность повторных прохождений данной траектории.) Поскольку $\frac{d\overline{W}}{dE}$ представляет собой не что иное, как период траектории $T(E)$, мы видим, что $\Delta E = 2\pi\hbar/T(E)$. Таким образом, осциллирующий вклад в $\rho(E)$ каждой замкнутой траектории имеет порядок $O(\hbar)$, что существенно превосходит (в случае более чем одной степени свободы) среднее расстояние между уровнями, имеющее порядок $O(\hbar^N)$.

Это можно понять и с другой точки зрения, рассмотрев «сглаженную плотность состояний». Она определяется как плотность состояний, получаемая при сглаживании $\rho(E)$ (6.7.2) с помощью непрерывной весовой функции — как правило лорентцевского типа:

$$\rho_\gamma(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' \rho(E') \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(E - E')^2 + \gamma^2}, \quad (6.7.40)$$

где γ — ширина сглаживания. Эта ширина соответствует добавлению мнимой части $i\gamma$ к энергии в выражении (6.7.5), поскольку

$$\rho_\gamma(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\gamma} = \frac{\gamma}{\pi} \sum_n \frac{1}{(E - E_n)^2 + \gamma^2}. \quad (6.7.41)$$

Таким образом, каждая из δ -функций в выражении для $\rho(E)$ заменяется лорентцевским пиком в выражении для $\rho_\gamma(E)$. С ростом γ распределения Лорентца перекрываются, и с некоторого момента разрешимыми с помощью $\rho_\gamma(E)$ окажутся

только некоторые кластеры уровней энергии в $\rho(E)$. Легко усматривается связь с представлением $\rho(E)$ в терминах замкнутых траекторий; она определяется тем, что с точностью до членов первого порядка результат добавления мнимой части к энергии в фазовом множителе выражается соотношением

$$\overline{W}(E + i\gamma) \simeq \overline{W}(E) + i\gamma \frac{d\overline{W}}{dE} = \overline{W}(E) + i\gamma T(E). \quad (6.7.42)$$

Таким образом, вклад каждой из замкнутых траекторий в $\rho_\gamma(E)$ уменьшается при данном γ на величину, пропорциональную периоду траектории. Так что данные траектории или повторные прохождения данной траектории вносят лишь экспоненциально малый вклад в $\rho_\gamma(E)$. Отсюда следует, что всего несколько (коротких) периодических траекторий могут дать приближенное представление $\rho(E)$; при этом осцилляции в $\rho_\gamma(E)$ соответствуют различным кластерам уровней энергии.

В противоположность этому функция спектральной жесткости (обсуждавшаяся в разделе 6.4.д), которая характеризует определенные крупномасштабные корреляции в энергетическом спектре, определяется главным образом, как показал квазиклассический анализ, наиболее длинными замкнутыми траекториями системы.

Сформулированный метод замкнутых траекторий относится к неинтегрируемым системам, поскольку он предполагает изолированность всех замкнутых траекторий. В случае интегрируемых систем это условие несправедливо, и траектории образуют лежащие на торе однопараметрические семейства. Спектр при этом также можно представить в терминах замкнутых траекторий, используя подход, развитый в [39,40]. (В некоторых неинтегрируемых системах определенные замкнутые траектории образуют «малые», непрерывные семейства — упомянутый выше подход охватывает и эти случаи.)

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.1. Метод стационарной фазы

Метод стационарной фазы служит для вычисления интегралов с осциллирующим подынтегральным выражением

$$I = \int_{x_1}^{x_2} g(x) \exp \left\{ \frac{if(x)}{\hbar} \right\} dx, \quad (6.П.1)$$

где x_1 и x_2 — пределы интегрирования, а $\hbar$ — малый параметр (в квазиклассических задачах — постоянная Планка). В пределе $\hbar \rightarrow 0$ подынтегральное выражение будет быстро осциллировать, и большинство колебаний будут взаимно гасить друг друга (т. е. будет иметь место гасящая интерференция). Основной вклад в интеграл будут давать точки, в которых фаза *стационарна*, т. е. определяемые условием

$$f'(x_i) = 0, \quad (6.П.2)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Точки x_i называются *точками стационарности фазы*, и мы пока будем предполагать, что они (1) отстоят достаточно далеко друг от друга и (2) отстоят достаточно далеко от конечных точек.

В окрестности каждой изолированной точки стационарности фазы $f(x)$ отображается в квадратичную форму:

$$f(x) = f(x_i) + at^2, \quad (6.П.3)$$

где t — переменная, аналогичная x , и где

$$a = +1, \quad \text{если} \quad f''(x_i) > 0$$

и

$$a = -1, \quad \text{если} \quad f''(x_i) < 0.$$

При условии $x_1 \ll x_i \ll x_2$ пределы интегрирования раздвигаются до $\pm\infty$, и интеграл (6.П.1) приобретает вид

$$I = \exp \left\{ \frac{if(x_i)}{\hbar} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} g(x(t)) \exp \left\{ \frac{iat^2}{\hbar} \right\} \frac{dx}{dt} dt. \quad (6.П.4)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы медленно меняющуюся часть подынтегрального выражения $\frac{dx(t)}{dt} g(x(t))$ разложить в ряд по t в окрестности точки стационарности фазы $t = 0$. (Отметим, что исходя из (6.П.3), точке стационарности фазы x_i в (6.П.1) соответствует значение $t = 0$ в (6.П.4).) В качестве первого приближения мы сохраним только основной член:

$$\frac{dx(t)}{dt} g(x(t)) \simeq g(x_i) \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0}, \quad (6.П.5)$$

так как $g(x(0)) = g(x_i)$. Производную $\frac{dx}{dt}$ можно вычислить, дифференцируя отображение (6.П.3). Вычисление первой производной дает

$$\frac{dx}{dt} \frac{df}{dx} = 2at, \quad (6.П.6)$$

но поскольку $\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} = 0$, приходится повторить дифференцирование, что приводит к соотношению

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{df}{dx} = 2a. \quad (6.П.7)$$

Второе слагаемое в левой части (6.П.7) также равно нулю, и мы получаем

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{|f''(x_i)|}}. \quad (6.П.8)$$

Таким образом, интеграл (6.П.4) приобретает вид

$$I = \sqrt{\frac{2}{|f''(x_i)|}} g(x_i) \exp \left\{ \frac{if(x_i)}{\hbar} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{iat^2}{\hbar} \right\} dt. \quad (6.П.9)$$

Интеграл в этом выражении представляет собой просто интеграл Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{iat^2}{\hbar} \right\} dt = \sqrt{\pi \hbar} \exp \left\{ \frac{ia\pi}{4} \right\}, \quad (6.П.10)$$

и мы окончательно получаем «приближение стационарной фазы»

$$I = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|f''(x_i)|}} g(x_i) \exp \left(\frac{i}{\hbar} f(x_i) + \frac{i \operatorname{sgn}(f''(x_i))\pi}{4} \right), \quad (6.П.11)$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

В случае нескольких изолированных точек стационарности фазы x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), каждая из них вносит в (6.П.1) вклад, определяемый соотношением (6.П.11); окончательный результат представляет собой просто сумму всех таких вкладов.

Наиболее важное усовершенствование приближения стационарной фазы связано с вычислением интеграла (6.П.1) в случае неизолированных точек стационарности. Это составляет предмет *равномерных приближений*. Будем теперь считать, что функция f зависит также от некоторого параметра μ : $f = f(x; \mu)$, и как функция μ (локально) ведет себя так, как показано на рис. 6.12. При $\mu \ll \mu_c$ функция f имеет четко разделенные точки стационарности x_1 и x_2 , каждая из которых дает вклад в (6.П.1), определяемый соотношением (6.П.11). По мере приближения μ к μ_c точки x_1 и x_2 сближаются и при $\mu = \mu_c$ сливаются в одну точку $x_1 = x_2 = x_c$. В этой точке нулю равны и $f'(x_c)$, и $f''(x_c)$, а соотношение (6.П.11) теряет смысл. В области $\mu > \mu_c$ (действительных) точек стационарности фазы не существует. Понятно, что простое отображение (6.П.3) утрачивает справедливость, и требуется более общее отображение, «описывающее» обсуждаемое поведение. Такое отображение имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{3}t^3 - a(\mu)t + b(\mu), \quad (6.П.12)$$

где t соответствует $x - x_c$, $a(\mu)$ соответствует $\mu_c - \mu$, а $b(\mu)$ связано с изолированными точками стационарности фазы x_1 и x_2 . Подробное обсуждение дальнейших выкладок выходит за рамки данной книги. Окончательным результатом является приближение, в котором интеграл Гаусса (6.П.10) заменяется функцией Эйри, в результате чего решение ведет себя равномерно во всем интервале изменения μ , т. е. проходит через точку $\mu = \mu_c$ без расхождений и в пределе $\mu \ll \mu_c$ сводится к результатам метода стационарной фазы для изолированных точек x_1 и x_2 .

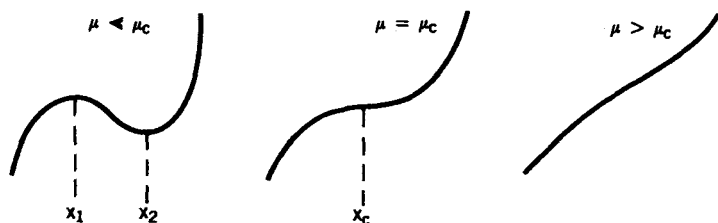


Рис. 6.12. Точки стационарности фазы x_1 и x_2 , разделенные при $\mu \ll \mu_c$, при $\mu = \mu_c$ сливаются в одну точку $x_1 = x_2 = x_c$. При $\mu > \mu_c$ действительных точек стационарности фазы нет

Если сливается большее число точек стационарности фазы, в одном или нескольких измерениях, то требуются и более общие, чем (6.П.12), отображения. Оказалось, что они могут быть систематизированы с помощью теоремы Тома о сингулярностях градиентных отображений — более известной как *теория катастроф*.

Список литературы

Учебники и обзорные статьи

1. *Berry M. V.* Semiclassical mechanics of regular and irregular motion // G. Ioos, R. H. G. Helleman, R. Stora (Eds.). *Chaotic Behavior of Deterministic Systems. Les Houches Lectures. Vol. 18.* North-Holland, Amsterdam, 1983.
2. *Eckhardt B.* Quantum mechanics of classically nonintegrable systems. *Phys. Reports C*, **163**, 205 (1988).
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3: Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
4. *Percival I. C.* Semiclassical theory of bound states. *Adv. Chem. Phys.*, **36**, 1 (1977).

Раздел 6.2

5. *Bender C. M., Orszag S. A.* Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York, 1978.
6. *Norcliffe A., Percival I. C.* Correspondence identities: I. *J. Phys. B*, **1**, 774 (1968); **1**, 784 (1968); **2**, 578 (1969).

Раздел 6.3

7. *Berry M. V., Balazs N. L.* Evolution of semiclassical states in phase space. *J. Phys. A*, **12**, 625 (1979).
8. *Born M.* The Mechanics of the Atom. Ungar, New York, 1960. [Имеется перевод: *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков—Киев, 1934.]
9. *Einstein A.* Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, **19**, 82 (1917). [Имеется перевод: *Эйнштейн А.* К квантовому условию Зоммерфельда и Эйнштейна // Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 407.]
10. *Van Vleck J. H.* The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics. *Proc. Math. Acad. Sci. USA* **14**, 178 (1928).

Раздел 6.4

11. *Berry M. V.* Quantizing a classically ergodic system: Sinai's billiard and the KKR method. *Ann. Phys. NY*, **131**, 163 (1981).
12. *Berry M. V.* Semiclassical theory of spectral rigidity, *Proc. R. Soc. London*, **A400**, 229 (1985).
13. *Berry M. V.* Quantum Chaology (Bakerian Lecture of the Royal Society). *Proc. R. Soc. London*, **A413**, 183 (1987).
14. *Berry M. V., Tabor M.* Level clustering in the regular spectrum. *Proc. R. Soc. London*, **A356**, 375 (1977).
15. *Bohigas O., Giannoni M. J.* Chaotic motion and random-matrix theory // J. S. Dehesa, J. M. G. Gomez, A. Polls (Eds.). *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics. Lecture Notes in Physics. Vol. 209.* Springer-Verlag, New York, 1984.
16. *Jaffé C., Reinhardt W. P.* Time dependent methods in classical mechanics: calculation of invariant tori and semiclassical energy levels via classical Van Vleck transformations. *J. Chem. Phys.*, **71**, 1962 (1979).
17. *McDonald, S. W. and A. N. Kaufman.* Spectrum and eigenfunctions for a Hamiltonian with stochastic trajectories. *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1189 (1979).
Фотографии любезно предоставлены авторами из «Ray and wave optics of integrable and stochastic systems», Lawrence Berkely Lab. Report № 9465.
18. *McDonald S. W., Kaufman A. N.* Wave chaos in the stadium: Statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation. *Phys. Rev. A*, **37**, 3067 (1988).
19. *Mehta M. L.* Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels. Academic, New York, 1967.

20. Noid D. W., Koszykowski M. L., Tabor M., Marcus R. A. Properties of vibrational energy levels in the quasi-periodic and chaotic regimes. *J. Chem. Phys.*, **72**, 6169 (1980).
21. Pomphrey N. Numerical identification of regular and irregular spectra. *J. Phys. B*, **7**, 1909 (1980).
22. Porter C. E. Statistical Theories of Spectra: Fluctuations. Academic, New York, 1965.
23. Wigner E. P. Gatlinberg Conf. on Neutron Physics, Oak Ridge Natl. Lab. Rept no. ORNL-2309, p. 57 (1957).
Этот доклад воспроизведен в [22].

Раздел 6.5

24. Berry M. V. Semi-classical mechanics in phase space: A study of Wigner's function. *Philos. Trans. R. Soc. London*, **287**, 237 (1977).
25. Berry M. V. Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *J. Phys. A*, **10**, 2083 (1977).
26. Helton J. W., Tabor M. On the classical support of quantum mechanical wavefunctions. *Physica*, **14D**, 409 (1985).
27. Hutchinson J. S., Wyatt R. E. Quantum ergodicity and the Wigner distribution. *Chem. Phys. Lett.*, **72**, 378 (1980).
28. Jensen R. V. // G. Casati. (Ed.). Chaotic Behavior in Quantum Systems. NATO ASI Series, Series B: Physics. Vol. 120. Plenum, New York, 1985.
29. McDonald S. W., Kaufman A. N. Spectrum and eigenfunctions for a Hamiltonian with stochastic trajectories. *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1189 (1979).
30. Noid D. W., Koszykowski M. L., Marcus R. A. Semiclassical calculation of bound states in multidimensional systems with Fermi resonance. *J. Chem. Phys.*, **71**, 2864 (1979).
31. Ozorio de Almedia A. M., Hannay J. H. Geometry of two dimensional tori in phase space: projections, sections, and the Wigner function. *Ann. Phys. NY*, **138**, 115 (1982).
32. Pechukas P. Semiclassical approximation of multidimensional bound states. *J. Chem. Phys.*, **57**, 5577 (1972).
33. Шпирельман А. И. Эргодические свойства собственных функций // Усп. мат. наук. 1974. Т. 29. С. 181.

Раздел 6.6

34. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: М.: Эдиториал УРСС, 2000.
35. Berman G. P., Zaslavskii G. M. Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems. *Physica*, **91A**, 450 (1978).
36. Berry M. V., Balazs N. L., Tabor M., Voros A. Quantum maps. *Ann. Phys. NY*, **122**, 26 (1979).
37. Casati G., Chirikov B. V., Israelev F. M., Ford J. // G. Casati, J. Ford. (Eds.) Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Lecture Notes in Physics. Vol. 93. Springer-Verlag, New York, 1981.
38. Korsch H. J., Berry M. V. Evolution of Wigner's phase space density under a nonintegrable quantum map. *Physica*, **3D**, 627 (1981).

Раздел 6.7

39. Balian R., Bloch C. Distribution of eigenfrequencies. *Ann. Phys. NY*, **60**, 401 (1970). См. также: *Ann. Phys. NY*, **64**, 271 (1971); **69**, 76 (1972); **85**, 514 (1974).
40. Berry M. V., Tabor M. Closed orbits and the regular bound spectrum. *Proc. R. Soc. London*, **A439**, 101 (1976).
41. Gutzwiller M. C. Bound states of an atom. *J. Math. Phys.*, **8**, 1979 (1967). См. также: *J. Math. Phys.*, **10**, 100 (1969); **11**, 1791 (1970); **12**, 343 (1971).
42. Tabor M. A semiclassical quantization of area preserving maps. *Physica*, **6D**, 195 (1983).

Глава 7

Нелинейные эволюционные уравнения и солитоны

7.1. История вопроса

Основным лейтмотивом предшествующих глав была способность нелинейных систем, обладающих небольшим числом степеней свободы, проявлять очень сложное поведение. Естественно задаться вопросом, как изменится поведение этих систем в пределе бесконечно большого числа степеней свободы. Степени свободы (или моды) рассматриваются в этом пределе как континуум, который характеризуется не дискретным индексом $i = 1, \dots, N$, а непрерывной переменной x . Таким образом, описание системы посредством конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.), в которых время выступает в качестве единственной независимой переменной, заменяется описанием в терминах дифференциальных уравнений в частных производных (у. ч. п.) с двумя независимыми переменными x и t . При этом если даже небольшое число нелинейных о. д. у. может проявлять сложное поведение, то в случае континуума таких уравнений (т. е. нелинейного у. ч. п.) следует ожидать, казалось бы, лишь еще более сложное поведение. Во многих случаях это действительно так, и нелинейные у. ч. п. проявляют хаос как во времени, так и в пространстве. Но наряду с этим существует также важный класс нелинейных у. ч. п., характеризуемых выражено регулярным поведением, которые в действительности интегрируемы. Свойства таких систем и поведение их решений положили начало разделу математической физики, который считается одним из наиболее значительных достижений послевоенных лет.

7.1.а. Наблюдения Рассела

История солитона началась более 150 лет назад со знаменитых теперь наблюдений, сделанных шотландским инженером Джоном Скоттом Расселом во время поездки верхом вдоль берега канала Юнион в окрестности Эдинбурга. В его докладе было сказано следующее:

«Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась. Но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна в состоянии сильного волнения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от одного до полутора футов. Его высота постепенно

уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 года мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал уединенной волной трансляции...»

Рассел провел много наблюдений за уединенными волнами и пришел к заключению, что их форма действительно устойчива, а скорость распространения в канале неизменной глубины выражается соотношением

$$c = \sqrt{g(h + \eta)}, \quad (7.1.1)$$

где η — амплитуда волны, h — глубина канала в отсутствие волны и g — гравитационная постоянная.

Результаты Рассела противоречили взглядам того времени, согласно которым такая волна не могла быть устойчивой. Королевский астроном сэр Джон Гершель охарактеризовал ее как «просто отсеченную половину обычной волны». В споре принял также участие Эйри, построивший теорию волн на мелкой воде, согласно которой такие волны неустойчивы. Противоречие было разрешено в 1895 г. Кортвегом и де Фризом, которые вывели уравнение, описывающее слабо нелинейные волны на мелкой воде,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{2}{3} h \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right). \quad (7.1.2)$$

В этом уравнении $\sigma = h^3/3 - Th/g\rho$, где T — поверхностное натяжение жидкости плотности ρ . Было найдено, что это уравнение имеет решения в виде уединенной волны устойчивой формы. После этой работы Кортвега и де Фриза проблема была исчерпана, и к уравнению (7.1.2) обратились вновь лишь в начале 1960-х годов в связи с некоторыми задачами физики плазмы.

Отметим здесь, что изменение масштабов и переход к новой функции:

$$t' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} t, \quad x' = \frac{-x}{\sqrt{\sigma}}, \quad u = -\frac{1}{2} \eta - \frac{h}{3}$$

приводит (7.1.2) к виду (штрихи опущены)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (7.1.3)$$

7.1.6. Эксперимент ФУП

Стимулом к изучению уравнения Кортвега—де Фриза (которое в дальнейшем мы будем называть уравнением КдФ) послужила работа Ферми, Улама и Паста (ФУП) 1955 года [6]. В главе 3 уже говорилось, что с физической точки зрения в этой работе рассматривался вопрос о распределении энергии в цепочке нелинейных осцилляторов. Было высказано предположение, что при бесконечном увеличении числа осцилляторов («статистический предел») энергия будет равномерно распределяться между всеми модами, что означает эргодичность на энергетической поверхности. Рассматриваемая модель представляла собой одномерную нелинейную цепочку, образованную равными массами, ближайшие соседи в которой связаны силой вида $F(\Delta) = k(\Delta + \alpha\Delta^2)$. Такая модель приводит к следующей системе связанных нелинейных о. д. у.:

$$m\ddot{y}_i = k(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + k\alpha[(y_{i+1} - y_i)^2 - (y_i - y_{i-1})^2], \quad (7.1.4)$$

где $y_i = y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) и $y_0 = y_n = 0$. В качестве начальных условий как правило выбирались значения $y_i(0) = \sin(i\pi/N)$, $\dot{y}_i(0) = 0$. При $N = 64$ система уравнений (7.1.4) была проинтегрирована численно на Лос-Аламосской вычислительной машине MANIAC. (Это было одним из первых применений ЭВМ для научных расчетов мирного времени¹⁾.) Полученные результаты показали, что энергия в основном периодически циркулирует между первоначально заселенными модами, а ее распределение по другим модам незначительно; в то время это было довольно неожиданно.

7.1.в. Открытие солитона

Теперь перенесемся в Принстон 1965 года и рассмотрим работу Крускала и Забуского. Их интересовал непрерывный предел для цепочки Ферми—Улама—Паста, который они построили следующим образом [9]. Полагая расстояние между звеньями цепочки равным h и вводя переменные $t' = \omega t$, $\omega = \sqrt{k/m}$ и $x' = x/h$ (где $x = ih$), Крускал и Забуский показали, что путем разложения $y_{i \pm 1}$ в ряд Тэйлора до четвертого порядка по h уравнения (7.1.4) можно свести к виду (штрихи опущены)

$$y_{tt} = y_{xx} + \epsilon y_x y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx} + O(\epsilon h^2, h^4), \quad 7.1.5$$

где $\epsilon = 2ah$. Следующий шаг состоял в поиске асимптотического решения вида

$$y \sim \Phi(X, T),$$

где $T = \epsilon t/2$ и $X = x - t$, т.е. в виде бегущей вправо волны. Заметив, что $y_t = -\Phi_X + \frac{1}{2}\epsilon\Phi_T$, получаем

$$\Phi_{TX} + \Phi_X \Phi_{XX} + \delta^2 \Phi_{XXX} = 0, \quad (7.1.6)$$

где $\delta = h^2/12$. Наконец, положив $u = \Phi_X$, приходим к уравнению

$$u_T + uu_X + \delta^2 u_{XXX} = 0, \quad (7.1.7)$$

которое с точностью до тривиального масштабного преобразования совпадает с приведенным уравнением КдФ (7.1.3)!

Забуский и Крускал [9] изучали уравнение КдФ (7.1.7) численно, наложив периодические граничные условия $u(L, T) = u(0, T)$, $u_X(L, T) = u_X(0, T)$ и $u_{XX}(L, T) = u_{XX}(0, T)$. (Подчеркнем, что такие периодические граничные условия были выбраны из соображений удобства численных расчетов и не влияют на фундаментальный результат.) Для начальных условий вида $u(X, 0) = \cos(2\pi X/L)$, $0 \leq X \leq L$, они нашли, что решение распадается на (восемь) уединенных волн с последовательно увеличивающейся амплитудой. Волны с большей амплитудой движутся быстрее, чем волны с меньшей амплитудой и при этом проходят «сквозь» них, оставаясь практически неизменными! Такое поведение напоминает принцип суперпозиции для линейных волн, хотя в данном случае волны сильно нелинейны. Термин *солитон* был введен Забуским и Крускалом [9], чтобы подчеркнуть эту замечательную устойчивость нелинейных решений. Основываясь на этих численных

¹⁾ Доктор Паста вспоминал об этих расчетах в 1977 году на Первой международной конференции по стохастическому поведению в классических и квантовых системах (Комо, Италия). Программа была, конечно, набрана на картах. Выполнение цикла «DO» осуществлялось оператором, который снова и снова вводил колоду карт до тех пор, пока цикл не завершался!

результатах, Крускал с соавт. [12] развили замечательную технику построения решений, что привело к появлению новой области математической физики, которая может быть нестрого названа *математикой солитонов*.

Мы начнем с рассмотрения некоторых наиболее элементарных свойств уравнения КдФ.

7.2. Основные свойства уравнения КдФ

Уравнение КдФ, которое в дальнейшем мы будем рассматривать в виде (7.1.3), объединяет две противоположные тенденции: (1) «формирование» волны, обусловленное нелинейностью (член uu_x) и (2) «распыление» волны, обусловленное дисперсией (член u_{xxx}).

7.2.a. Эффекты нелинейности и дисперсии

В случае гладких начальных условий, таких, например, как были рассмотрены Забуским и Крускалом [9], член u_{xxx} относительно мал по сравнению с нелинейным членом, и можно считать, что начальная эволюция определяется соотношением

$$u_t - 6uu_x = 0. \quad (7.2.1)$$

Это стандартное квазилинейное у.ч.п. первого порядка, для которого возможны решения типа ударной волны. Вкратце это можно проиллюстрировать следующим образом²⁾. Рассмотрим решение уравнения (7.2.1) в виде

$$u(s) = u(x(s), t(s)), \quad (7.2.2)$$

где посредством s параметризуются определенные пути в плоскости (x, t) , называемые *характеристиками*. Из дифференциального уравнения

$$\frac{du}{ds} = \frac{dx}{ds}u_x + \frac{dt}{ds}u_t \quad (7.2.3)$$

находим

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = -6u, \quad \frac{du}{ds} = 0. \quad (7.2.4)$$

Система уравнений (7.2.4) легко может быть проинтегрирована; в результате получаем (опуская постоянные интегрирования):

$$t(s) = s, \quad x(s) = -6su_0(x), \quad (7.2.5a)$$

$$u(s) = u_0(x), \quad (7.2.5b)$$

где $u_0(x) = u(x, 0)$ — начальное условие для (7.2.1). Таким образом, вдоль характеристик, определяемых соотношениями (7.2.5a), решение $u(s)$ постоянно, т.е. сохраняет начальную амплитуду, заданную при $s = 0$. Но при этом характеристики, представляющие собой прямолинейные пути, имеют наклон, который пропорционален $u_0(x)$, и при определенной форме этих начальных условий могут пересекаться. При этом, как видно из рис. 7.1, волна становится все более крутой, что приводит в конце концов к явлению, известному как *образование ударной волны*.

²⁾ Более полное изложение можно найти в любом стандартном учебнике по дифференциальным уравнениям в частных производных, например в [10].

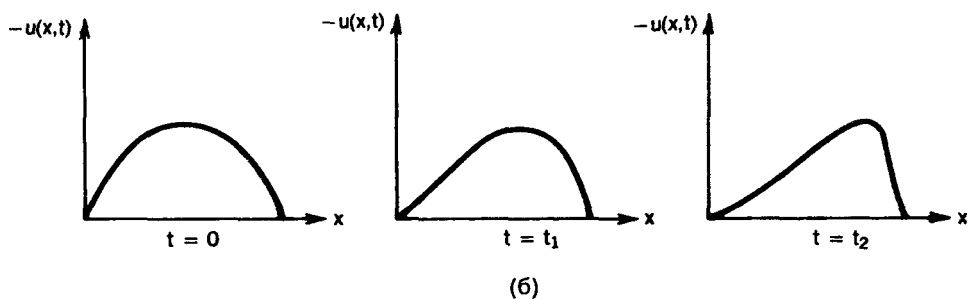
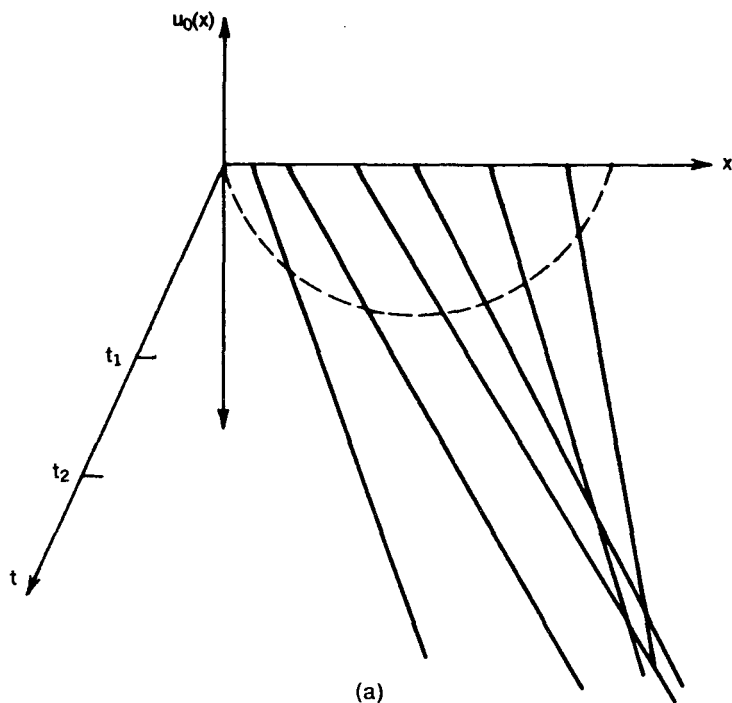


Рис. 7.1. (а) Прямолинейные характеристики, связанные с уравнением (7.2.1), для гладкого начального условия $u_0(x)$ (пунктирная линия). (б) Последовательность рисунков, иллюстрирующая заострение $u(x, t)$ по мере приближения решения к пересечению характеристик

По мере того как волна становится круче, возрастает роль члена u_{xxx} в (7.1.3), и возникает необходимость проанализировать влияние линейной части уравнения

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (7.2.6)$$

на эволюцию волны. Такое уравнение всегда допускает решение в виде

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (7.2.7)$$

и непосредственная подстановка в (7.2.6) дает «дисперсионное соотношение»

$$\omega(k) = -k^3. \quad (7.2.8)$$

Таким образом, чем больше волновое число, тем больше фазовая скорость, задаваемая соотношением $c = \omega(k)/k = -k^2$, и волна (7.2.7) будет распространяться. В определенном смысле дисперсионный эффект компенсирует нелинейный, в результате чего образуются устойчивые уединенные волны.

7.2.6. Решение типа бегущей волны

Простой вид решения типа уединенной волны может быть получен следующим образом. Предположим, что решение имеет вид бегущей вправо волны

$$u(x, t) = f(x - ct) \equiv f(z), \quad (7.2.9)$$

где $z = x - ct$. Непосредственная подстановка в (7.1.3) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (штрих означает дифференцирование по z)

$$f''' - 6ff'' - cf' = 0. \quad (7.2.10)$$

Уравнение, получающееся в результате первого интегрирования по z ,

$$f'' = 3f^2 + cf + d, \quad (7.2.11)$$

где d — постоянная интегрирования, представляет собой о.д.у. для эллиптических функций Вейерштрасса, обсуждавшихся в главе 1. Второе интегрирование дает

$$\frac{1}{2}f' = f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + df + e, \quad (7.2.12)$$

где e — вторая постоянная интегрирования. Уравнение (7.2.12) может быть проинтегрировано в квадратурах; в результате получаем эллиптический интеграл:

$$z - z_0 = \int \frac{df}{\sqrt{2(f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + df + e)}}. \quad (7.2.13)$$

Если (7.1.3) определено в неограниченной области и если задать граничные условия $f, f', f'' \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, то из (7.2.11) и (7.2.12) следует, что обе константы интегрирования d и e равны нулю. В этом случае (7.2.13) сводится к выражению

$$z - z_0 = \int \frac{df}{f\sqrt{2f+c}}, \quad (7.2.14)$$

которое легко интегрируется и обращается:

$$f(z) = -\frac{1}{2}c \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(z - z_0) \right). \quad (7.2.15)$$

С учетом знака решение имеет вид бегущей волны с отрицательной амплитудой (знак мог бы быть положительным, если бы уравнение (7.1.3) имело бы вид $u_t + bu_x + u_{xxx} = 0$), которая пропорциональна скорости распространения волны, т. е. большие волны движутся быстрее. Функция ch^{-2} в (7.2.15) придает волне форму «бугра», подобного наблюдаемому Расселом [8]. В численных экспериментах Забуского и Крускала [9] также отмечалось, что каждый из членов семейства бегущих волн имеет форму типа ch^{-2} . Вместе с тем, причины возникновения такого семейства и его устойчивость не могут быть объяснены на основании простого анализа бегущих волн. Требуется гораздо более глубокая теория.

7.2.в. Автомоделные решения

С помощью так называемого *автомоделного преобразования* (преобразования подобия) для уравнения (7.1.3) может быть также найден другой тип решений. При масштабных преобразованиях переменных $x \rightarrow k^\alpha x$, $t \rightarrow k^\beta t$, $u \rightarrow k^\gamma u$ непосредственная подстановка в уравнение КдФ демонстрирует инвариантность этого уравнения по отношению к масштабному преобразованию при $\beta = 3\alpha$ и $\gamma = -2\alpha$. Параметр α может быть выбран произвольным образом, например, $\alpha = 1$. В этом случае уравнение (7.1.3) инвариантно по отношению к масштабному преобразованию

$$x \rightarrow kx, \quad t \rightarrow k^3 t, \quad u \rightarrow k^{-2} u.$$

Кроме того, комбинации переменных

$$x t^{-1/3}, \quad u t^{2/3}$$

также масштабно инвариантны. Эти результаты подсказывают замену переменной

$$z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad (7.2.16a)$$

$$u(x, t) = -(3t)^{-2/3} f(z), \quad (7.2.16b)$$

где множитель 3 выбран из соображений удобства. С учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{z}{3t} \frac{\partial}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{(3t)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z},$$

уравнение КдФ преобразуется к виду

$$f''' + (6f - z)f' - 2f = 0. \quad (7.2.17)$$

Другой тип автомоделного преобразования можно получить, положив

$$z = x + 3t^2 \quad (7.2.18a)$$

и

$$u(x, t) = t + f(z). \quad (7.2.18b)$$

Это приводит (после одного интегрирования) к уравнению

$$f'' = 3f^2 - t + c, \quad (7.2.19)$$

где c — постоянная интегрирования. Это специальное обыкновенное дифференциальное уравнение, известное как *уравнение Пенлеве первого типа*. Уравнение (7.2.17) связано с другим из этих специальных уравнений, а именно, с *уравнением Пенлеве второго типа*. Значение появления этих специальных обыкновенных дифференциальных уравнений при автомодельных преобразованиях уравнения КдФ будет обсуждаться в главе 8.

7.2.г. Законы сохранения

Если у. ч. п., такие как уравнение КдФ, рассматривать как динамические системы с бесконечным числом степеней свободы, то естественно, учитывая характер предыдущего изложения, задаться вопросом, имеют ли эти уравнения какие-либо интегралы движения. В случае у. ч. п. вместо понятия интеграл движения используется понятие *законов сохранения*. Они представляют собой соотношения вида

$$T_t + X_x = 0, \quad (7.2.20)$$

где T и X — определенные функции решения и у. ч. п. и его производных. T называется плотностью, а $-X$ — потоком. Если T является градиентом X ($T = F_x$) и, как следует из (7.2.20), $X = -F_t$, то закон сохранения тривиален, так как

$$(F_x)_t + (-F_x)_t = 0. \quad (7.2.21)$$

Если для систем, определенных на бесконечном интервале ($-\infty \leq x \leq \infty$), поток X обращается в ноль при $x \rightarrow \infty$, интегрирование обеих частей (7.2.20) по x дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} X_x \, dx = X \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (7.2.22)$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} T \, dx = \text{const}. \quad (7.2.23)$$

Мы можем, таким образом, рассматривать эти величины как аналог для у. ч. п. интегралов движения о. д. у.

В случае уравнения КдФ (7.1.3) само уравнение имеет вид закона сохранения:

$$(u)_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0.$$

Из этого закона сохранения вытекает соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = \text{const}, \quad (7.2.24)$$

выражающее сохранение массы. Умножая уравнение КдФ на u , получаем второй закон сохранения

$$(u^2)_t + \left(-2u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 + uu_{xx} \right)_x = 0.$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = \text{const}, \quad (7.2.25)$$

что соответствует сохранению импульса. Некоторое экспериментирование приводит к третьему закону сохранения

$$\left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right)_t = \left(\frac{9}{2}u^4 - 3u^2u_{xx} + 6uu_x^2 - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_x, \quad (7.2.26)$$

откуда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right) dx = \text{const}. \quad (7.2.27)$$

Позднее мы покажем, каким именно образом интеграл (7.2.27) представляет гамильтониан для уравнения КдФ.

Отыскав три закона сохранения, естественно задаться вопросом, существуют ли еще законы сохранения и не может ли их число быть бесконечным, что соответствовало бы бесконечному числу степеней свободы? Последнее в некотором смысле означало бы полную «интегрируемость». Поначалу Крускал с соавт. [12] нашли (с помощью средств, лишь немногим превосходящих грубые численные прикидки на бумаге) девять законов сохранения. Героические усилия Миуры [11] завершились отысканием десятого закона, что в то время явилось существенным доводом в пользу существования бесконечного числа сохраняющихся величин.

7.2.А. Преобразование Миуры

Важный аспект анализа законов сохранения для уравнения КдФ, проведенного Миурой, состоял в одновременном изучении близкого по виду уравнения, называемого модифицированным уравнением КдФ (мКдФ), которое имеет вид

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0. \quad (7.2.28)$$

Это уравнение может быть выведено по аналогии с уравнением КдФ исходя из решеточной модели Ферми—Улама—Паста, если вместо квадратичной нелинейности взять кубическую. Наряду с набором законов сохранения для уравнения КдФ Миура нашел также соответствующие законы сохранения для уравнения мКдФ. Основным результатом заключался в том, что эти два набора законов сохранения связаны «преобразованием Миуры»

$$u = v_x + v^2, \quad (7.2.29)$$

где u и v означают решения уравнений КдФ и мКдФ соответственно. Если мы, далее, введем обозначения

$$K(v) = v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (7.2.30a)$$

и

$$P(u) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (7.2.30b)$$

то, учитывая (7.2.29), получим

$$P(u) = \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) K(v). \quad (7.2.31)$$

Основываясь на этих результатах, Миура [12] ввел несколько отличное преобразование вида

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2, \quad (7.2.32)$$

где ε — некоторый (малый) параметр. Для этого преобразования

$$P(u) = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right) Q(w), \quad (7.2.33)$$

где

$$Q(w) = w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0 \quad (7.2.34)$$

известно как *уравнение Гарднера*. Отметим, что $Q(w)$ можно также записать в виде закона сохранения:

$$(w)_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0. \quad (7.2.35)$$

Идея состоит в том, чтобы разложить w в степенной ряд по малому параметру ε ,

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j. \quad (7.2.36)$$

Значение w_j легко находится путем рекуррентного решения (7.2.32):

$$w_0 = u, \quad (7.2.37a)$$

$$w_1 = -u_x, \quad (7.2.37b)$$

$$w_2 = u_{xx} - u^2 \quad (7.2.37в)$$

и так далее. Законы сохранения находим, подставляя (7.2.36) в (7.2.35) и приравнявая одинаковые степени ε . Результат непосредственно следует из того факта, что выражение (7.2.36) само записано в виде закона сохранения. Несколько первых законов сохранения имеют вид

$$O(\varepsilon^0): (w_0)_t = (3w_0^2 - w_{0xx})_x, \quad (7.2.38a)$$

$$O(\varepsilon^1): (w_1)_t = (6w_0^2 w_1 - w_{1xx})_x, \quad (7.2.38б)$$

$$O(\varepsilon^2): (w_2)_t = (3w_1^2 + 6w_0 w_2 + 2w_0^2 - w_{2xx})_x. \quad (7.2.38в)$$

Читатели могут убедиться, что законы (7.2.38a) и (7.2.38в) соответствуют законам сохранения (7.2.24) и (7.2.25) соответственно. (При проверке второго соотношения необходимо использовать (7.2.38a) для преобразования левой части (7.2.38в)). Закон для $O(\varepsilon^1)$ представляет собой не что иное как производную закона для $O(\varepsilon^0)$. Это общий результат: законы сохранения, соответствующие нечетным степеням ε , получаются как производные законов, соответствующих предшествующим четным степеням.

7.2.e. Инвариантность Галилея

Преобразование Гарднера задает алгоритм расчета бесконечного множества сохраняющихся плотностей для уравнения КдФ. Как подчеркивалось в главе 2, существование интеграла — а в данном случае сохраняющейся плотности — означает существование некоторой специальной симметрии или инвариантности. Уравнение КдФ, таким образом, должно обладать бесконечным набором таких инвариантов и, следовательно, весьма нестандартными свойствами.

Один из основных инвариантов уравнения КдФ — инвариант Галилея (инвариантность относительно трансляции). Если произвести замену переменных:

$$t' = t, \quad x' = x - ct, \quad u'(x', t') = u(x, t) + \frac{1}{6}c,$$

соответствующую переходу в систему отсчета, движущуюся вправо, уравнение КдФ приобретает вид

$$u'_t - 6u'u'_x + u'_{x'x'} = 0,$$

т. е. оно инвариантно относительно такого преобразования. Напротив, уравнение мКдФ такой инвариантностью, как легко убедиться, не обладает. Вместе с тем, если указанную замену переменных произвести для преобразования Миуры (7.2.29), то получим, положив $c = \frac{3}{2}\epsilon^2$, преобразование Гарднера (7.2.32).

7.3. Обратное преобразование рассеяния: основные принципы

Итак, основные сведения об уравнении КдФ, которые мы получили, сводятся к следующему: (1) оно допускает (численно) солитоны; (2) оно обладает множеством особых решений; (3) оно характеризуется галилеевой инвариантностью и (4) оно обладает бесконечным числом законов сохранения, которые связаны с соответствующими законами сохранения уравнения мКдФ посредством преобразования Миуры

$$v_x + v^2 = u. \quad (7.3.1)$$

Это приблизительно та информация, которой обладали Гарднер, Грин, Крускал и Миура (ГГКМ) в 1967 году [13]. Они заметили, что выражение (7.3.1) представляет собой уравнение Риккати относительно v , которое может быть линейризовано (см. главу 1) с помощью подстановки

$$v = \frac{\psi_x}{\psi}, \quad (7.3.2)$$

что приводит к

$$\psi_{xx} = u(x, t)\psi. \quad (7.3.3)$$

Далее, используя трансляционную инвариантность уравнения КдФ, можно u заменить на $u - \lambda$, где λ — произвольная (на данном этапе) постоянная. В результате такого сдвига уравнение (7.3.3) преобразуется к виду

$$\psi_{xx} - (u(x, t) - \lambda)\psi = 0. \quad (7.3.4)$$

Мы получили не что иное как одномерное не зависящее от времени уравнение Шрёдингера для «потенциала» $u(x, t)$ с собственным значением λ .

7.3.a. Взаимосвязь с квантовой механикой

Значительный шаг вперед Гарднер, Грин, Крускал и Миура сделали, интуитивно предположив, что эволюция $u(x, t)$ во времени, соответствующая уравнению КдФ, может быть изучена путем анализа квантовомеханической задачи (7.3.4). Их идея состояла в следующем. Задав начальное условие $u = u(x, 0)$, решить «прямую задачу рассеяния», т. е. рассматривая $u(x, 0)$ в качестве потенциала

в уравнении Шрёдингера (7.3.4), найти все соответствующие собственные значения и собственные функции. По мере того, как u эволюционирует или деформируется как функция t , эти квантовомеханические характеристики — называемые *данными рассеяния* — также будут изменяться. Здесь принципиально важно подчеркнуть, что переменную t в $u(x, t)$ следует рассматривать как некий *деформационный параметр* в уравнении КдФ и ни в коем случае не путать с переменной времени, фигурирующей в обычном зависящем от времени уравнении Шрёдингера. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предположили, что эволюцию данных рассеяния, первоначально соответствующих $u(x, 0)$, можно получить, не решая непосредственно уравнение КдФ. Если это так, то данные рассеяния, найденные для некоторого значения t , можно затем использовать для «восстановления» «потенциала» $u(x, t)$. Такой шаг подразумевает решение квантовомеханической *обратной задачи рассеяния*, т. е. переход от данных рассеяния к потенциалу, тогда как прямая задача рассеяния состоит в переходе от потенциала к данным рассеяния. Такой косвенный способ решения уравнения КдФ можно схематически представить следующим образом:

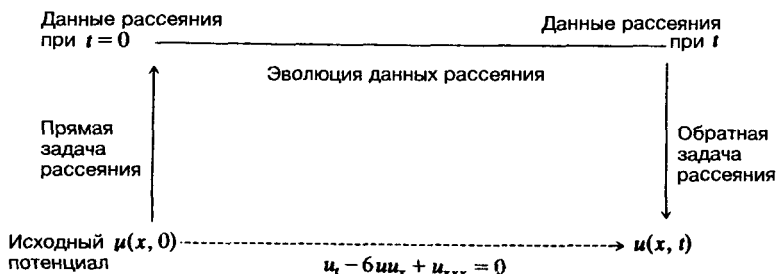


Диаграмма «Эволюция данных рассеяния»

7.3.6. Аналогия с преобразованиями Фурье

Эта схема не столь оригинальна, как может показаться на первый взгляд. В действительности она в значительной мере напоминает использование преобразований Фурье при решении линейных эволюционных уравнений. Рассмотрим на интервале $-\infty \leq x \leq \infty$ такое уравнение вида

$$u_t = \mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u, \quad (7.3.5)$$

где $\mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ — многочлен по $\frac{\partial}{\partial x}$, т. е. линейный оператор. В качестве простого примера может служить $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; в этом случае (7.3.5) представляет собой обычное уравнение диффузии. Определим преобразование Фурье для $u(x, t)$ как

$$\tilde{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ikx} dx. \quad (7.3.6)$$

Определим также «обратное» преобразование Фурье

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k, t) e^{-ikx} dk. \quad (7.3.7)$$

Фурье-преобразование у. ч. п. (7.3.5) приводит к эволюционному уравнению для $\tilde{u}(k, t)$:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \mathcal{L}(ik)\tilde{u}.$$

Это линейное уравнение имеет простое решение

$$\tilde{u}(k, t) = \tilde{u}(k, 0) e^{\mathcal{L}(ik)t}. \quad (7.3.8)$$

Соответствующие исходные данные $\tilde{u}(k, 0)$ определяются по заданным начальным условиям $u(x, 0)$ посредством соотношения

$$\tilde{u}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{ikx} dx. \quad (7.3.9)$$

Эволюция «данных Фурье» $\tilde{u}(k, t)$ определяется тривиальным соотношением (7.3.8); при любом соответствующем значении t они могут быть обращены, что позволяет получить требуемую величину $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k, 0) e^{\mathcal{L}(ik)t} e^{-ikx} dk. \quad (7.3.10)$$

Такой способ решения аналогичен предложенному Гарднером, Гринем, Крускалом и Миурой:

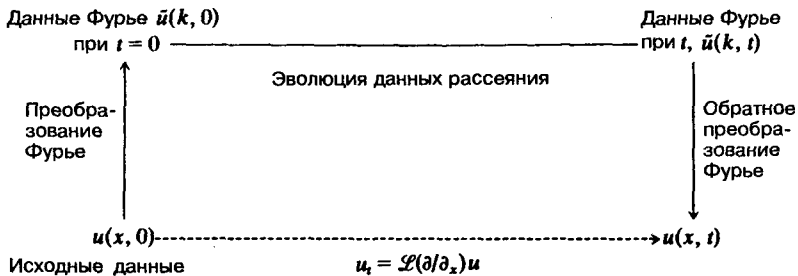


Диаграмма «Эволюция данных Фурье»

Метод ГГКМ, разумеется, более сложен в силу того, что эволюционные уравнения нелинейны. Для того, чтобы в нем разобраться, необходимо сначала более подробно обсудить прямую и обратную квантовомеханические задачи рассеяния.

7.3.в. Прямая задача рассеяния

В зависимости от конкретного вида потенциала $u_0(x) = u(x, 0)$ эта задача может допускать связанные состояния. Уравнение Шрёдингера (7.3.4) в этом случае определяет набор дискретных собственных значений $\lambda_n = -k_n^2$ ($n = 1, \dots, N$), отвечающих связанным состояниям с «отрицательной энергией», а также соответствующие собственные функции $\psi_n(x)$:

$$\psi_{n,xx} = (u_0(x) + k_n^2)\psi_n = 0. \quad (7.3.11)$$

Для квадратично интегрируемых собственных функций связанных состояний должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1. \quad (7.3.12)$$

Нормировочная константа c_n , обеспечивающая выполнение (7.3.12), определяется соотношением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{k_n x} \psi_n(x) = c_n. \quad (7.3.13)$$

Это следует из предположения, что $u_0(x)$ достаточно быстро обращается в ноль при $x \rightarrow \pm\infty$, так что (7.3.11) сводится к $\psi_{n,xx} - k_n^2 \psi_n = 0$. Эквивалентным также является определение c_n посредством соотношения

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx. \quad (7.3.14)$$

Множество соответственных значений λ_n ($n = 1, \dots, N$) называют спектром связанных состояний.

При положительных значениях энергии уравнение Шрёдингера для $u_0(x)$ определяет непрерывный спектр, и мы полагаем $\lambda = k^2$. Хорошо известно, что квантовые волновые функции могут претерпевать отражение над потенциальным барьером. Поэтому асимптотическое выражение для $\psi(x)$ в пределе $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = e^{-ikx} + b(k)e^{+ikx}, \quad (7.3.15)$$

где первое слагаемое в правой части соответствует падающей³⁾ волне, а второе — отраженной волне с коэффициентом отражения $b(k)$. В пределе $x \rightarrow -\infty$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = a(k)e^{-ikx}, \quad (7.3.16)$$

что соответствует прошедшей волне с коэффициентом прохождения $a(k)$.

7.3.г. Обратная задача рассеяния

Термин *данные рассеяния* служит для обозначения множества всех собственных значений связанных состояний λ_n , нормировочных постоянных c_n и непрерывных функций $a(k)$ и $b(k)$, соответствующих данному потенциалу. Важный результат

³⁾ Автор в качестве падающей волны рассматривает волну, движущуюся справа налево. — Прим. ред.

был получен в 1950-х годах Гельфандом, Левитаном и Марченко, которые показали (безотносительно к проблеме солитонов), каким образом данные рассеяния можно использовать для однозначного определения соответствующей потенциальной функции $u_0(x)$ [15, 16]. Полагая, что $u_0(x)$ удовлетворяет условию ограниченности

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty, \quad (7.3.17)$$

определим величину

$$B(\zeta) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-k_n \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik\zeta} dk, \quad (7.3.18)$$

которую можно рассматривать как некоторое Фурье-преобразование данных рассеяния. Следующий шаг состоит в том, чтобы решить линейное интегральное уравнение

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_{-\infty}^{\infty} B(x + z) K(z, y) dz = 0 \quad (7.3.19)$$

относительно функции $K(x, y)$. Если $K(x, y)$ найдена, то можно показать, что потенциал $u_0(x)$, определяющий данные рассеяния, которые входят в (7.3.18), задается соотношением

$$u_0(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (7.3.20)$$

Действительно замечательный результат!

Чтобы воспользоваться изложенным для решения уравнения КдФ мы должны:

(1) определить эволюцию данных рассеяния по мере того, как $u_0(x)$ «деформируется» в $u(x, t)$;

(2) научиться решать уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко (7.3.19).

Как оказалось, (1) можно осуществить относительно легко. Основные проблемы связаны — в соответствии с принципом сохранения трудностей — с (2). К сожалению, уравнение (7.3.19) может быть решено точно лишь в достаточно специальных случаях, но сюда относится случай, который необходим для объяснения возникновения солитонов. Эти результаты обсуждаются в следующем разделе.

7.4. Обратное преобразование рассеяния: уравнение КдФ

Напомним еще раз, что возникающую в уравнении КдФ

$$u_t - bu_x + u_{xxx} = 0 \quad (7.4.1)$$

переменную t следует рассматривать как деформационный параметр, а не как «настоящее» время. С учетом этого в уравнении Шрёдингера может фигурировать зависимость собственного значения λ от t :

$$\psi_{xx} - (u(x, t) - \lambda(t))\psi = 0, \quad (7.4.2)$$

где $\psi = \psi(x, t)$, и это не должно приводить к путанице.

7.4.а. Изоспектральная деформация

Если представить, воспользовавшись выражением (7.4.2), u как функцию ψ ,

$$u = \frac{\psi_{xx}}{\psi} + \lambda, \quad (7.4.3)$$

то приходим к соотношению

$$u_t = \frac{\psi_{xxt}}{\psi} - \frac{\psi_{xx}\psi_t}{\psi^2} + \lambda_t \quad (7.4.4)$$

и к аналогичным соотношениям для u_x и u_{xx} . В двух последних соотношениях целесообразно избавиться от третьих производных ψ по x и от производных более высокого порядка, повторно используя (7.4.2). Действуя таким образом, можно привести уравнение КдФ к виду

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi M_x - \psi_x M)_x = 0, \quad (7.4.5)$$

где

$$M = \psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x + u_x\psi. \quad (7.4.6)$$

В случае собственных функций связанных состояний квадрат ψ интегрируем, и, таким образом, интегрирование обеих частей (7.4.5) в интервале $(-\infty, \infty)$ дает

$$\lambda_t \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (\psi M_x - \psi_x M)_x dx = -(\psi M_x - \psi_x M)|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (7.4.7)$$

С учетом того, что $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$ представляет собой просто ненулевую постоянную, (7.4.7) означает, что

$$\lambda_t = 0. \quad (7.4.8)$$

Этот результат чрезвычайно важен, так как из него следует, что, если потенциал $u(x, t)$ деформируется в соответствии с уравнением КдФ, собственные значения связанных состояний остаются *неизменными*! Это пример того, что называют *изоспектральной деформацией*. В непрерывной части (при $\lambda > 0$) решение уравнения Шрёдингера существуют для любого значения λ . Мы можем, таким образом, просто говорить о том, что каждому положительному значению энергии соответствует определенное значение λ и, следовательно, $\lambda_t = 0$. В любом случае (7.4.5) дает

$$M_{xx}\psi - M\psi_{xx} = 0, \quad (7.4.9)$$

и, используя (7.4.2) для ψ_{xx} , мы можем представить это соотношение в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно M ,

$$M_{xx} - (u - \lambda)M = 0. \quad (7.4.10)$$

Общее решение уравнения (7.4.10) имеет стандартный вид

$$M = A\psi + B\varphi, \quad (7.4.11)$$

где ψ и φ — два линейно независимых решения. Очевидно, что одним из этих решений является сама собственная функция ψ (достаточно просто сопоставить (7.4.2)

и (7.4.10)). Стандартный прием отыскания второго решения состоит в вычислении φ как

$$\varphi = \psi \int^x \frac{dx'}{\psi^2}. \quad (7.4.12)$$

Это легко проверить, убедившись, что вронскиан $\varphi_x \psi - \psi_x \varphi = 1$. В то же время, исходя из асимптотических свойств (7.4.10), нетрудно показать, что $B = 0$ как для связанных состояний, так и для непрерывной области спектра. (В пределе $x \rightarrow \pm\infty$ (7.4.10) принимает вид $M_{xx} + \lambda M = 0$; и с учетом асимптотической формы ψ в (7.4.11) может быть удовлетворено в случае нетривиального φ только если $B = 0$.) В итоге получаем

$$M = \psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x + u_x\psi = A\psi. \quad (7.4.13)$$

В случае связанных состояний мы можем также показать, что и $A = 0$. Умножив обе части (7.4.13) на ψ , приходим к

$$\psi\psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi^2 + u_x\psi^2 = A\psi^2 \quad (7.4.14)$$

и переписываем это выражение в виде

$$\frac{1}{2}(\psi^2)_t + (u\psi^2 - 2\psi_x^2 - 4\lambda\psi^2)_x = A\psi^2. \quad (7.4.15)$$

Поскольку квадрат собственных функций связанных состояний интегрируем, мы можем проинтегрировать это выражение по x :

$$\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx \right)_t + (u\psi^2 - 2\psi_x^2 - 4\lambda\psi^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} = A \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx. \quad (7.4.16)$$

Второе слагаемое в левой части (7.4.16) равно нулю — так же, как и первое слагаемое, в силу постоянства нормировочного интеграла. Таким образом, $A = 0$, и мы получаем

$$\psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x + u_x\psi = 0. \quad (7.4.17)$$

7.4.6. Эволюция данных рассеяния

Уравнение (7.4.17) может быть использовано для вывода «эволюционного» уравнения для нормировочных постоянных $c_n(t)$. В пределе $x \rightarrow \infty$, при надлежащем образом стремящихся к нулю u и u_x , (7.4.17) сводится к

$$\psi_{n,t} + 4k_n^2\psi_n = 0, \quad (7.4.18)$$

где мы положили $\lambda = -k_n^2$ для собственной функции ψ_n . По определению

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_n(x, t) = c_n(t)e^{-k_n x}, \quad (7.4.19)$$

и непосредственная подстановка (7.4.19) в (7.4.18) дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно c_n :

$$\frac{dc_n}{dt} = 4k_n^3 c_n. \quad (7.4.20)$$

Это уравнение имеет простое решение

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t}, \quad (7.4.21)$$

где начальное значение $c_n(0)$ представляет собой нормировочную постоянную n -й собственной функции связанного состояния для потенциала $u_0(x) = u(x, 0)$.

В непрерывной области приходится снова работать с выражением (7.4.13). Полагая $\lambda = k^2$ и переходя к пределу $x \rightarrow \infty$, мы можем свести его к

$$\psi_t - 4k^2 \psi_n = A\psi. \quad (7.4.22)$$

Воспользуемся асимптотическим выражением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t) = e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx}. \quad (7.4.23)$$

Непосредственная подстановка в (7.4.22) и выбор $A = 4ik^3$ приводят к эволюционному уравнению для $b(k, t)$:

$$\frac{db}{dt} = 8ik^3 b. \quad (7.4.24)$$

Это уравнение имеет решение

$$b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3 t}, \quad (7.4.25)$$

где $b(k, 0)$ — коэффициент отражения для $u_0(x)$. Повторяя то же самое и для предела $x \rightarrow -\infty$, легко показать, что

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (7.4.26)$$

и, следовательно,

$$a(k, t) = a(k, 0). \quad (7.4.27)$$

Мы видим, таким образом, что ожидаемое чудо осуществилось — при деформации в соответствии с уравнением КдФ эволюция данных рассеяния $\lambda_n(0)$, $c_n(0)$, $a(k, 0)$, $b(k, 0)$, соответствующих исходному потенциалу $u_0(x)$, определяется простыми линейными уравнениями. Поскольку деформация изоспектральна, $\lambda_n(t) = \lambda_n(0)$. Используя (7.4.21) и (7.4.25), мы можем сконструировать соответствующую величину

$$B(\zeta; t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t)e^{-k_n \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t)e^{ik\zeta} dk, \quad (7.4.28)$$

и, решив (если удастся!) уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко относительно $K(x, y; t)$, найти $u(x, t)$ из соотношения

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t). \quad (7.4.29)$$

В целом эта процедура, называемая *обратным преобразованием рассеяния* (ОПР), представляет собой косвенную линеаризацию уравнения КдФ и в значительной мере аналогична методу преобразования Фурье. ОПР даже часто называют *нелинейным преобразованием Фурье*.

Как уже отмечалось выше, проблема в действительности состоит в решении интегрального уравнения относительно $K(x, y; t)$. На сегодняшний день представляется, что такое уравнение может быть решено в замкнутом виде лишь для тех задач рассеяния, в которых *отсутствует отражение*, т. е. $b(k, t) = b(k, 0) = 0$.

7.4.в. Двухсолитонное решение

Обычно ОПР для уравнения КдФ иллюстрируется на примере потенциалов вида $u_0(x) = -V/\operatorname{ch}^2 x$, где V — постоянная. Мы, в частности, будем рассматривать потенциал

$$u(x, 0) = -\frac{6}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad (7.4.30)$$

Соответствующее уравнение Шрёдингера,

$$\psi_{xx} + \left(\frac{6}{\operatorname{ch}^2 x} + \lambda \right) \psi = 0, \quad (7.4.31)$$

может быть решено точно. (Подробности можно найти в прекрасной книге [3].) Существует две собственные функции связанных состояний:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2(x)} & \text{при } \lambda_1 = -k_1^2 = -4 & \text{ и } c_1^2(0) = 12, \\ \psi_2 &= \frac{\operatorname{th}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} & \text{при } \lambda_2 = -k_2^2 = -1 & \text{ и } c_2^2(0) = 6. \end{aligned}$$

Преимущество потенциалов типа $1/\operatorname{ch}^2 x$ состоит в том, что для них $b(k) = 0$, т. е. отражения нет. Таким образом,

$$B(\zeta; t) = \sum_{n=1}^2 c_n^2(t) e^{-k_n \zeta} = \sum_{n=1}^2 c_n^2(0) e^{8k_n^3 t - k_n \zeta} = 12e^{64t - 2\zeta} + 6e^{8t - \zeta}. \quad (7.4.32)$$

В случае безотражательных потенциалов уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко можно решить, представив ядро в виде

$$K(x, y; t) = \sum_{n=1}^N p_n(x, t) e^{-k_n y}. \quad (7.4.33)$$

Воспользовавшись таким разделением, можно показать, что

$$K(x, y; t) = \frac{-3(2e^{28t+x-2y} + 2e^{36t-x-2y} - e^{36t-2x-2y} + e^{-24t+2x-y})}{3 \operatorname{ch}(x-28t) + \operatorname{ch}(3x-36t)}. \quad (7.4.34)$$

Далее, используя (7.4.29), решение можно (в несколько этапов) привести к виду

$$u(x, t) = -\frac{12(3 + 4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t))}{(3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t))^2}. \quad (7.4.35)$$

Отметим, что $u(x, 0) = -6/\operatorname{ch}^2 x$. Проанализируем свойства этого решения, следуя [3]. Для этого введем переменные $x_1 = x - 4k_1^2 t = x - 16t$ и $x_2 = x - 4k_2^2 t = x - 4t$. Выражая аргументы членов (7.4.35), содержащих ch , через x_1 , получаем

$$u(x, t) = -\frac{12(3 + 4 \operatorname{ch}(2x_1 + 24t) + \operatorname{ch}(4x_1))}{(3 \operatorname{ch}(x_1 - 12t) + \operatorname{ch}(3x_1 + 12t))^2}. \quad (7.4.36)$$

Фиксируя, далее, x_1 , перейдем к пределу $t \rightarrow \infty$ и отбросим экспоненциально затухающие части членов, содержащих ch :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) &\approx \frac{-96e^{2x_1+24t}}{(3e^{-x_1+12t} + e^{3x_1+12t})^2} = \\ &= \frac{-32}{((1/\sqrt{3})e^{2x_1} + \sqrt{3}e^{-2x_1})^2} = \frac{-32}{(e^{2x_1-\ln\sqrt{3}} + e^{-2x_1+\ln\sqrt{3}})^2} = -\frac{8}{\text{ch}^2(2x_1 + \delta)}, \end{aligned} \quad (7.4.37)$$

где $\delta = \ln \sqrt{3}$. Аналогично, выражая (7.4.35) в терминах x_2 , получаем

$$u(x, t) = -\frac{12(3 + 4 \text{ch}(2x_2) + \text{ch}(4x_2 - 48t))}{(3 \text{ch}(x_2 - 24t) + \text{ch}(3x_2 - 24t))^2}$$

и после перехода к пределу $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &\approx \frac{-24e^{4x_2+48t}}{(3e^{-x_2+24t} + e^{-3x_2+24t})^2} = \\ &= \frac{-8}{(\sqrt{3}e^{x_2} + (1/\sqrt{3})e^{-x_2})^2} = -\frac{2}{\text{ch}^2(x_2 + \delta)}. \end{aligned} \quad (7.4.38)$$

Так же можно показать, что в пределе $t \rightarrow \pm\infty$, если фиксировано либо x_1 , либо x_2 , $u(x, t)$ ведет себя следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = -\frac{2}{\text{ch}^2(x_2 \pm \delta)} - \frac{8}{\text{ch}^2(2x_1 \mp \delta)}. \quad (7.4.39)$$

Проведенный анализ позволяет объяснить поведение, наблюдавшееся Забуским и Крускалом [18]. Решение описывает взаимодействие двух уединенных бегущих волн (ср. с обсуждением решений в виде бегущих волн в предыдущем разделе). При $t \rightarrow -\infty$ более глубокая волна расположена слева от более мелкой волны (рис. 7.2). По мере того как $t \rightarrow 0$, более глубокая волна догоняет более мелкую, и при $t = 0$ они сливаются, образуя исходный потенциал $u(x, 0) = -6/\text{ch}^2 x$. Замечательно, что при $t \rightarrow +\infty$ они вновь разделяются; при этом более глубокая волна движется впереди более мелкой. В пределе $t \rightarrow +\infty$ решение снова представляет собой просто сумму двух отдельных уединенных волн. Единственным результатом взаимодействия волн является небольшой сдвиг фазы δ .

7.4.г. Более общие решения

Результат, полученный для такого «двухсолитонного» потенциала, легко обобщается для любого потенциала вида $u(x, 0) = -V/\text{ch}^2 x$. В случае такого потенциала, имеющего N связанных состояний с собственными значениями $\lambda_n = -k_n^2$ ($n = 1, \dots, N$), асимптотическое решение имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = -2 \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n^2}{\text{ch}^2(k_n(x - 4k_n^2 t - \delta_n))}, \quad (7.4.40)$$

где сдвиг фазы δ задается соотношением

$$\delta_n = \frac{1}{2k_n} \ln \left\{ \frac{c_n^2(0)}{2k_n} \prod_{m=1}^{N-1} \left(\frac{k_n - k_m}{k_n + k_m} \right)^2 \right\}. \quad (7.4.41)$$

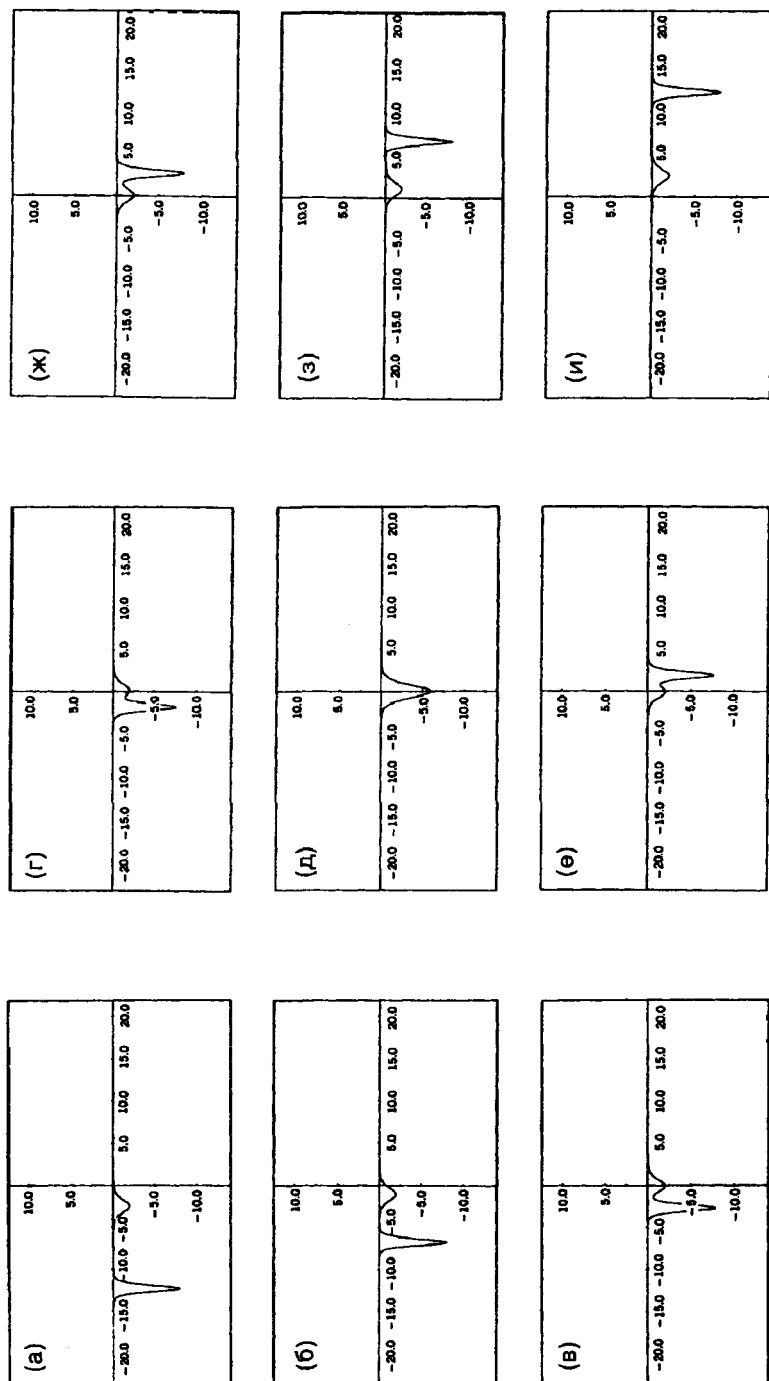


Рис. 7.2. Схематическое изображение эволюции двухсолитонного решения (7.4.35) при (а) $t = -0.75$, (б) $t = -0.4$, (в) $t = -0.15$, (г) $t = -0.1$, (д) $t = 0.0$, (е) $t = 0.1$, (ж) $t = 0.15$, (з) $t = 0.4$ и (и) $t = 0.75$. Показано, как два отдельных солитона глубины 8 и 2 соответственно, сливаются при $t = 0$, образуя исходный потенциал $u(x, 0) = -6/\text{ch}^2 x$, а затем вновь разделяются, причем более глубокая волна опережает более мелкую. «Масса» $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ все время сохраняется. (Расчет Е. Дресслерхауса (частное сообщение))

Такое решение называется *N-солитонным решением*. При $t \rightarrow \infty$ начальное условие превращается в цепочку бегущих уединенных волн, в которой самая глубокая волна располагается впереди, а самая мелкая — позади всех. Единственным результатом взаимодействия таких волн, когда t пробегает значения от $-\infty$ до ∞ , является сдвиг фазы δ_n .

Мы идентифицировали солитоны, рассматривая пределы решений при $t \rightarrow \pm\infty$. Но точное *N-солитонное решение* может быть также записано в общем виде:

$$u(x, t) = -4 \sum_{n=1}^N k_n \psi_n^2(x, t), \quad (7.4.42)$$

где ψ_n — собственные функции связанных состояний с собственными значениями $\lambda_n = -k_n^2$.

В случае потенциалов с отражением наличие непрерывной области квантового спектра делает точное решение уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко невозможным. Но в общих чертах картина сохраняется, и в пределе $t \rightarrow \infty$ начальное условие распадается, образуя процессию уединенных бегущих волн. Вклад непрерывной области проявляется в появлении осциллирующей составляющей решения, которая исчезает при $t \rightarrow \infty$. Иногда это явление называют *излучением*. Закономерности этой составляющей решения изучены мало, хотя имеется ряд асимптотических оценок. Обсуждение некоторых результатов можно найти, например, в [1] или [3]. (Во второй работе приведен также простой пример.)

7.4.д. Пара Лакса*

Читатель должен был заметить, что квантовомеханическая задача сводится (в случае спектра связанных состояний) к паре линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi \quad (7.4.43a)$$

и

$$\psi_t = 2(u + 2\lambda)\psi_x - u_x\psi. \quad (7.4.43b)$$

Для того, чтобы эти уравнения не противоречили друг другу, они должны удовлетворять «условию интегрируемости»

$$\psi_{xxt} = \psi_{txx}. \quad (7.4.44)$$

Дифференцирование (7.4.43a) по t дает, с учетом (7.4.43b),

$$\psi_{xxt} = (u_t - uu_x + \lambda u_x - \lambda_t)\psi + 2(u + 2\lambda)(u - \lambda)\psi_x, \quad (7.4.45)$$

где теперь мы не предполагаем $\lambda_t = 0$. Аналогично, дифференцируя (7.4.43b) по x , получаем

$$\psi_{txx} = (5uu_x + \lambda u_x - u_{xxx})\psi + 2(u + 2\lambda)(u - \lambda)\psi_x. \quad (7.4.46)$$

Мы видим, что условие (7.4.44) будет удовлетворено, если выполняются следующие соотношения:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (7.4.47)$$

и

$$\lambda_t = 0. \quad (7.4.48)$$

Пара уравнений (7.4.43) называется *парой Лакса* в честь Лакса, который показал (сразу после работы Гарднера и др.), что уравнение КдФ и другие тесно связанные с ним эволюционные уравнения эквивалентны условию изоспектральной интегрируемости для пары линейных операторов.

7.5. Другие солитонные системы

На протяжении некоторого времени считалось, что метод ОПР, развитый Гарднером, Гринном, Крускалом и Миурой, применим только к уравнению КдФ. Но в течение нескольких лет было найдено, что большое число других физически важных нелинейных эволюционных уравнений имеет солитонные решения и укладываются в рамки метода ОПР. В случае таких систем квантовая задача, как правило, уже не включает не зависящее от времени уравнение Шрёдингера, и приходится решать другую, хотя и аналогичную задачу на собственные значения. В этом разделе мы приведем лишь небольшое число уравнений и некоторые из их простых решений, а также кратко опишем основную процедуру ОПР. Более полное изложение можно найти в цитируемой литературе.

7.5.a. Модифицированное уравнение КдФ

Выше мы уже упоминали эволюционное уравнение мКдФ

$$v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (7.5.1)$$

Первый шаг состоит в том, что решения этого уравнения ищется в виде бегущей волны,

$$v(x, t) = f(z), \quad (7.5.2)$$

где $z = x - ct$. Непосредственная подстановка в (7.5.1) и два последующих интегрирования дают квадратуру

$$z - z_0 = \int \frac{df}{\sqrt{cf^2 - f^4 + qf + e}}, \quad (7.5.3)$$

где q и e — первые две постоянные интегрирования. Общее решение в этом случае может быть найдено в терминах эллиптических функций Якоби, но если выбрать граничные условия таким образом, чтобы $f, f' \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, квадратура сводится к

$$z - z_0 = \int \frac{df}{f\sqrt{c - f^2}}. \quad (7.5.4)$$

Это выражение легко интегрируется и обращается; в результате получаем решение в виде уединенной волны:

$$f(z) = -\frac{\sqrt{c}}{\operatorname{ch}(\sqrt{c}(z - z_0))}. \quad (7.5.5)$$

Отметим, что решение содержит функцию $1/\operatorname{ch}$ в отличие от $1/\operatorname{ch}^2$ в случае аналогичного решения (7.2.15) для уравнения КдФ.

Другое простое решение можно получить с помощью преобразования подобия. Следуя рассуждениям, приведенным в разделе 7.2, нетрудно показать, что уравнение (7.5.1) инвариантно по отношению к преобразованиям $x \rightarrow kx$, $t \rightarrow k^3t$, $u \rightarrow k^{-1}u$. Это подсказывает замену переменных

$$z = t^{-1/3}x, \quad v(x, t) = t^{-1/3}f(z), \quad (7.5.6)$$

приводящую к уравнению

$$f''' + 6f^2f' - \frac{1}{3}zf' - \frac{1}{3}f = 0, \quad (7.5.7)$$

которое можно однократно проинтегрировать;

$$f'' + 2f^3 - \frac{1}{3}zf + c = 0. \quad (7.5.8)$$

В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение специального вида, известное как уравнение Пенлеве второго типа.

7.5.6. Уравнение sin-Гордона

Очень важным нелинейным у. ч. п. является уравнение sin-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (7.5.9)$$

Это уравнение, возникающее в различных задачах дифференциальной геометрии, а также различные способы его решения, были известны еще в прошлом столетии. Позднее оно нашло применение в релятивистской теории поля. Уравнение (7.5.9) удобно изучать в переменных

$$\xi = \frac{1}{2}(x - t), \quad \eta = \frac{1}{2}(x + t), \quad (7.5.10)$$

в которых оно преобразуется к виду

$$u_{\xi\eta} = \sin u. \quad (7.5.11)$$

Периодичность функции $\sin u$ привносит ряд интересных свойств. Если уравнение (7.5.9) линеаризовать (т. е. разложить в ряд с точностью до членов первого порядка) в окрестности решения $\psi = 0$, то получим выражение

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \quad (7.5.12)$$

для которого, как легко показать, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \sqrt{k^2 + 1}. \quad (7.5.13)$$

Оно действительно для всех действительных k , и, тем самым, $\psi = 0$ является устойчивой точкой равновесия. Это едва ли может вызвать большое удивление, так как, опустив пространственную зависимость в (7.5.9), мы получим уравнение маятника $u_{tt} + \sin u = 0$. С другой стороны, если (7.5.9) разложить относительно решения $u = \pi$,

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0, \quad (7.5.14)$$

то дисперсионное соотношение будет иметь вид

$$\omega = \sqrt{k^2 - 1}. \quad (7.5.15)$$

Оно свидетельствует о том, что решение $u = \pi$ неустойчиво при $0 < k < 1$. Такой результат также согласуется со свойствами пространственно-независимой задачи.

Решая задачу бегущей волны (т. е. полагая $u(x, t) = f(z)$), после первого интегрирования приходим к квадратуре

$$z - z_0 = \sqrt{c^2 - 1} \int \frac{df}{\sqrt{2(q - 2 \sin^2(\frac{1}{2}f))}}, \quad (7.5.16)$$

где q — первая постоянная интегрирования. В частном случае $q = 0$ (7.5.16) легко вычисляется; в результате получаем

$$z - z_0 = \pm \sqrt{1 - c^2} \ln \left(\pm \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} f \right) \right) \quad (7.5.17)$$

и, следовательно,

$$f(z) = \pm 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \frac{\pm (z - z_0)}{\sqrt{1 - c^2}} \right\}. \quad (7.5.18)$$

Это решение может иметь различный вид в зависимости от выбора знаков. Если оба знака положительны, $f(z)$ возрастает слева направо от нуля до значения 2π (рис. 7.3). Такое решение называется *кинком*. Решение, амплитуда которого убывает от 2π до нуля, называют *антикинком*. Хотя на первый взгляд эти решения довольно значительно отличаются от солитонов, производные этих решений имеют

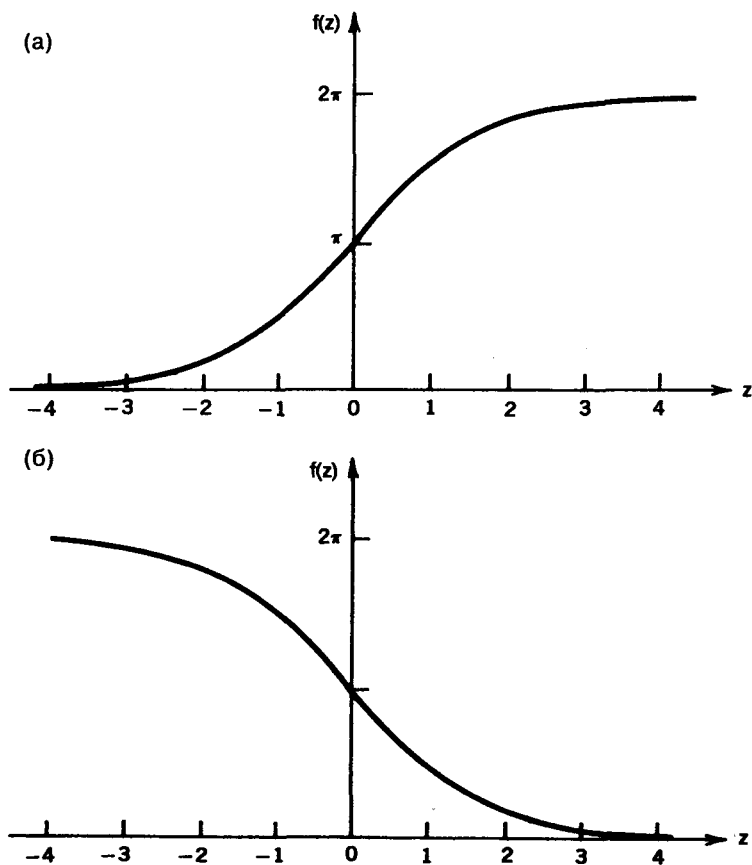


Рис. 7.3. (а) Кинк $f(z) = 4 \operatorname{arctg}(e^z)$. (б) Антикинк $f(z) = 4 \operatorname{arctg}(-e^z)$

характерную форму $1/\operatorname{ch}$:

$$u_x(x, t) = f'(z) = \frac{2}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{ch} \left(\frac{z-z_0}{\sqrt{1-c^2}} \right). \quad (7.5.19)$$

Кинки (и антикинки) ведут себя при столкновении так же, как солитоны: после столкновения они появляются вновь, и единственное изменение состоит в сдвиге фазы. Двухкиновое решение, обладающее таким свойством, было получено с помощью обычного метода разделения переменных Перрингом и Скирмом [20]. (Эта работа предшествовала работе Крускала с соавторами, но в то время значение полученных результатов не было понято в полной мере.) Решение (подробности см. в [3]) имеет вид

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[c \frac{\operatorname{sh} (x/\sqrt{1-c^2})}{\operatorname{ch} (ct/\sqrt{1-c^2})} \right]. \quad (7.5.20)$$

В пределах $t \rightarrow \pm\infty$ получаем

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left\{ \frac{(x+ct-\delta)}{\sqrt{1-c^2}} \right\} - \exp \left\{ \frac{-(x-ct+\delta)}{\sqrt{1-c^2}} \right\} \right] \quad (7.5.21)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[-\exp \left\{ \frac{-(x+ct+\delta)}{\sqrt{1-c^2}} \right\} + \exp \left\{ \frac{(x-ct-\delta)}{\sqrt{1-c^2}} \right\} \right], \quad (7.5.22)$$

где мы ввели сдвиг фазы

$$\delta = \sqrt{1-c^2} \ln \left(\frac{1}{c} \right). \quad (7.5.23)$$

Поведение этого решения схематически показано на рис. 7.4.

Другое частное решение уравнения $\sin$ -Гордона можно получить с помощью автомодельного преобразования. Заметим, что (7.5.11) инвариантно по отношению к преобразованиям $\xi \rightarrow k\xi$ и $\eta \rightarrow \eta/k$. Подстановка $u(\xi, \eta) = f(z)$, где $z = \xi\eta$, дает

$$zf'' + f' = \sin(f). \quad (7.5.24)$$

Последующая замена переменной $g = e^{if}$ приводит к

$$g'' - \frac{(g')^2}{g} + \frac{2g' - g^2 + 1}{2z} = 0, \quad (7.5.25)$$

что представляет собой частный случай уравнения Пенлеве третьего типа.

7.5.в. Нелинейное уравнение Шредингера

Другое важное нелинейное у. ч. п. — нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) — имеет вид

$$iu_t = u_{xx} + 2u|u|^2, \quad (7.5.26)$$

где u — амплитуда практически монохроматической последовательности волн. Заметим, что это комплексное уравнение. Таким образом, $|u|^2$ представляет собой (действительную) амплитуду огибающей последовательности волн, которая также имеет вид $1/\operatorname{ch}^2$.

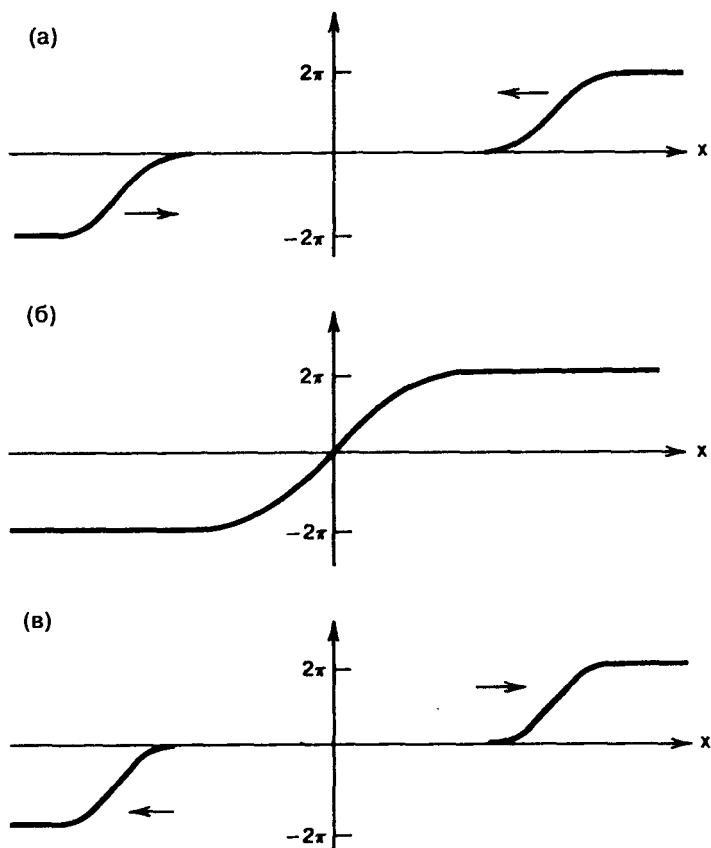


Рис. 7.4. Эволюция решения Перринга—Скирма (7.5.20) при (а) $t < 0$, (б) $t = 0$, (в) $t > 0$

7.5.г. Общая схема ОПР*

Как говорилось в начале этого параграфа, ОПР для приведенных здесь уравнений отличается от ОПР для уравнения КдФ. Соответствующие схемы были разработаны Захаровым и Шабатом [21] и Абловицем с соавт. [19]. В данном случае соответствующая задача на собственные значения представляет собой двухкомпонентную систему уравнений

$$v_{1x} = -i\zeta v_1 + qv_2, \quad (7.5.27a)$$

$$v_{2x} = i\zeta v_2 + rv_1, \quad (7.5.27б)$$

где $q = q(x, t)$ и $r = r(x, t)$ — потенциалы, а ζ — собственное значение. Заметим, что при $r = -1$ (7.5.27) сводится к уравнению Шрёдингера $v_{2xx} + (q + \zeta^2)v = 0$. Соответствующая зависящая от времени часть задачи имеет общий вид

$$v_{1t} = Av_1 + Bv_2 \quad (7.5.28a)$$

$$v_{2t} = Cv_1 - Av_2, \quad (7.5.28б)$$

где A , B и C — различные функции от q , r и спектрального параметра ζ . Определение точного вида A , B и C для конкретных уравнений, приведенных в этом разделе, является, вообще говоря, не единственной трудностью. Мы, однако, опускаем детали и отсылаем читателя к [1].

В случае уравнения $\sin$ -Гордона, положив $q = -r = -u_x/2$, приходим к задаче рассеяния

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -i\zeta & -\frac{1}{2}u_x \\ \frac{1}{2}u_x & i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.4.29)$$

и

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \frac{i}{4\zeta} \cos u & \frac{i}{4\zeta} \sin u \\ \frac{i}{4\zeta} \sin u & -\frac{i}{4\zeta} \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (7.5.30)$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения представляют собой пару Лакса для уравнения $\sin$ -Гордона, поскольку «условие интегрируемости»

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{xt} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_{tx} \quad (7.5.31)$$

будет удовлетворяться только при условии, что (i) $\zeta_t = 0$ (т. е. деформация изоспектральна) и (ii) $u_{xt} = \sin u$.

В случае нелинейного уравнения Шрёдингера задача рассеяния представляет собой пару уравнений

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -i\zeta & u \\ \pm u^* & i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (7.5.32)$$

где $*$ означает комплексное сопряжение, и

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 2i\zeta^2 \pm iuu^* & 2u\zeta + iu_x \\ \mp 2u^*\zeta \pm iu_x^* & -2i\zeta^2 \mp iuu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (7.5.33)$$

Условием интегрируемости для этой системы является

$$iu_t = u_{xx} \pm 2u^2u^*. \quad (7.5.34)$$

Оказывается, что уравнение со знаком минус в правой части не может привести к солитонным решениям; подходит только знак плюс.

Для уравнения мКдФ задача рассеяния представляет собой пару

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -i\zeta & u \\ \mp u & i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (7.5.35)$$

и

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -4i\zeta^3 \pm 2i\zeta u^2 & 4u\zeta^2 + 2i\zeta u_x - u_{xx} \mp 2u^3 \\ \mp 4u\zeta^2 \pm 2iu\zeta u_x \pm u_{xx} + 2u^3 & 4i\zeta^3 \mp 2i\zeta u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (7.5.36)$$

для которой условие интегрируемости записывается в виде

$$u_t \pm 6u^2u_x + u_{xxx} = 0. \quad (7.5.37)$$

В этом случае солитонные решения существуют при любом выборе знака.

Для этой системы было найдено уравнение типа Гельфанда—Левитана—Марченко, однако его решение оказывается очень нетривиальным. К тому же основная задача на собственные значения (7.5.27) может иметь (в отличие от уравнения Шрёдингера (7.4.2)) решения, соответствующие парам комплексно-сопряженных собственных значений. Такие солитонные решения имеют осциллирующий характер и получили название *бризеров* или *бионов*.

7.6. Гамильтонова структура интегрируемых систем

Одним из важнейших свойств солитонных уравнений является то, что они представляют собой интегрируемые гамильтоновы системы. Здесь мы дадим лишь беглый обзор этого факта, который, в свою очередь, поможет установить связь между свойствами систем с конечными степенями свободы, описанными в главах 2 и 3, и их непрерывными аналогами, которые будут обсуждаться в настоящей главе.

7.6.a. Функциональная производная

Для дальнейшего анализа нам понадобится такое важное математическое понятие как *вариация* или *вариационная производная*, получить представление о котором совсем нетрудно, если вспомнить вариационный принцип, описанный в главе 2. Рассмотрим некоторый функционал $F[u]$ вида

$$F[u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x) dx, \quad (7.6.1)$$

где f является некоторой функцией от x , u и u_x (здесь $u = u(x)$, $u_x = \frac{du}{dx}$). Очевидным примером функционала (7.6.1) является функционал действия, в котором роль f играет лагранжиан, а роль $u(x)$ — координата $q(t)$. Обычная производная (скажем, некоторой функции $g(x)$) определяется как результат придания аргументу функции малого приращения, т. е. $g(x + \Delta x)$. Вариационная производная отражает эффект малой вариации функции $u(x)$, т. е. $u(x) + \delta u(x)$, входящей в $f(x, u, u_x)$. Соответственно, мы можем вычислить *первую вариацию* функционала $F[u]$ обычным способом, полагая

$$\delta F[u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u + \delta u, (u + \delta u)_x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x) dx, \quad (7.6.2)$$

где подразумевается, что вариация $\delta u(x)$ обращается в нуль в конечных точках x_1 и x_2 . Разлагая подынтегральное выражение в первом слагаемом с точностью до первого порядка по $\delta u(x)$, получаем

$$\delta F[u] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial u_x} (\delta u)_x \right) dx, \quad (7.6.3)$$

где $(\delta u)_x = \frac{d(\delta u)}{dx}$. Интегрируя второе слагаемое по частям (и предполагая, что $\delta u(x_1) = \delta u(x_2)$), приходим к стандартному результату

$$\delta F[u] = \int_{x_1}^{x_2} \delta u \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) \right) dx. \quad (7.6.4)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, называется *вариационной производной* и обозначается $\frac{\delta F}{\delta u}$. Таким образом,

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right). \quad (7.6.5)$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда f является функцией произвольного числа производных от u ,

$$F[u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{nx}) dx, \quad (7.6.6)$$

где введено обозначение $u_{nx} = \frac{d^n u}{dx^n}$. Нетрудно показать, что в данном случае вариационная производная вычисляется по формуле

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{mx}} \right), \quad (7.6.7)$$

где чередование знаков объясняется многократным интегрированием по частям, необходимым для того, чтобы привести $(\delta u)_{mx}$ к виду δu .

Приведем несколько простых примеров. Для функционала

$$F[u] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \quad (7.6.8)$$

получаем

$$\frac{\delta F}{\delta u} = u,$$

а для функционала

$$F[u] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \quad (7.6.9)$$

имеем

$$\frac{\delta F}{\delta u} = -u_{xx}.$$

В качестве менее тривиального примера функционала рассмотрим сохраняющуюся плотность в уравнении КдФ (7.2.27), т. е.

$$F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) dx, \quad (7.6.10)$$

для которой вариационная производная равняется

$$\frac{\delta F}{\delta u} = 3u^2 - u_{xx}. \quad (7.6.11)$$

Таким образом, уравнение КдФ может быть записано в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right), \quad (7.6.12)$$

где выражение для функционала F дается формулой (7.6.10).

Функциональную производную можно определить и следующим образом. Рассмотрим функционал (7.6.1), в котором u является функцией также и некоторого параметра α (т. е. $u = u(x; \alpha)$), так что

$$F[u(x; \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x; \alpha), u_x(x; \alpha)) dx. \quad (7.6.13)$$

Производная от F по α легко находится в соответствии с правилом дифференцирования сложных функций:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} \right) dx, \quad (7.6.14)$$

здесь $\frac{\partial u_x}{\partial \alpha} = \frac{d(\partial u / \partial \alpha)}{dx}$. Интегрируя снова по частям (и считая вклад от конечных точек нулевым), приходим к следующему выражению:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) \right) dx, \quad (7.6.15)$$

которая также может быть записана в виде

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\delta F}{\delta u} dx. \quad (7.6.16)$$

Последнее выражение, по сути, служит определением $\frac{\delta F}{\delta u}$. (Оно может быть очевидным образом обобщено и для случая (7.6.6).)

7.6.6. Гамильтонова структура уравнения Кортевега—де Фриза

Впервые на гамильтонова природа уравнения (7.6.12) была показана в работе Гарднера [22]. В нашем изложении мы будем следовать его подходу. При выводе решения $u = u(x, t)$ уравнения КдФ Гарднер предположил, что это решение является периодичным на интервале $(0, 2\pi)$. Следовательно, u может быть разложено в ряд Фурье,

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx}, \quad (7.6.17)$$

где $u = u_k(t)$ — набор комплексных коэффициентов. Рассматривая заданный в (7.6.10) функционал $F[u]$ как функцию от множества «параметров» u_k и используя (7.6.16), получаем выражение

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\delta F}{\delta u} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\delta F}{\delta u} e^{ikx} dx, \quad (7.6.18)$$

при выводе которого также было использовано разложение (7.6.17). Равенство (7.6.18) позволяет получить разложение в ряд Фурье величины $\frac{\delta F}{\delta u}$. Имеем

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial u_{-k}} e^{ikx}. \quad (7.6.19)$$

С учетом (7.6.12) уравнение движения для отдельной моды u_k принимает вид

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{ik}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial u_{-k}}. \quad (7.6.20)$$

Если при $k > 0$ определить переменные

$$q_k = \frac{u_k}{k}, \quad p_k = u_{-k}, \quad H = \frac{i}{2\pi} F, \quad (7.6.21)$$

то (7.6.20) можно представить в явно гамильтоновой форме:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (7.6.22)$$

Следовательно, можно определить скобки Пуассона двух функционалов F и G как

$$\begin{aligned} [F, G] &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \frac{\partial F}{\partial u_k} \frac{\partial G}{\partial u_{-k}} - k \frac{\partial F}{\partial u_{-k}} \frac{\partial G}{\partial u_k} \right) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \frac{\partial F}{\partial u_k} \frac{\partial G}{\partial u_{-k}}. \end{aligned} \quad (7.6.23)$$

Опираясь на формулу (7.6.19), легко показать, что (7.6.23) может быть представлено в виде

$$[F, G] = \int_0^{2\pi} \frac{\delta F}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right) dx, \quad (7.6.24)$$

которое можно принять за определение скобок Пуассона $[F, G]$. Несложно показать, что так определенные скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби.

Напомним, в разделе 7.2 было показано, что уравнение КдФ обладает бесконечным числом сохраняющихся плотностей вида

$$F_n[u] = \int T_n dx, \quad (7.6.25)$$

где для периодических систем интегрирование ведется в пределах $(0, 2\pi)$, а для неограниченных систем — в пределах $(-\infty, \infty)$. Ввиду того, что F_n являются сохраняющимися величинами (т. е. константами движения), их скобки Пуассона с гамильтонианом H , определенным формулами (7.6.21) и (7.6.10), должны обращаться

в нуль:

$$\frac{dF_n}{dt} = [F_n, H] = \int \frac{\delta F_n}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta H}{\delta u} \right) dx = 0. \quad (7.6.26)$$

Кроме того, можно показать, что F_n попарно коммутируют между собой,

$$[F_n, F_m] = 0 \quad (7.6.27)$$

для всех m и n . Это свойство является непрерывным аналогом (2.5.11) для интегрируемых гамильтоновых систем с конечным числом степеней свободы. Таким образом, уравнение КдФ может рассматриваться как полностью интегрируемая гамильтонова система с бесконечным числом степеней свободы. Продолжая аналогию с конечномерными системами, можно предположить, что поток системы КдФ должен быть ограничен (в некотором смысле) бесконечномерным тором. Кроме того, в великолепной работе Захарова и Фаддеева [23] было установлено, что каноническое преобразование гамильтониана к переменным действие–угол может быть проведено в терминах ОПР.

7.6.в. Гамильтонова структура нелинейного уравнения Шредингера

Можно показать, что все солитонные уравнения, рассмотренные в этой главе, являются гамильтоновыми системами с соответствующими скобками Пуассона (исходное ограничение на интервал $(0, 2\pi)$ на самом деле может быть снято). В завершении нашего обсуждения рассмотрим случай нелинейного уравнения Шредингера (7.5.26), которое запишем в виде

$$iu_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad (7.6.28a)$$

$$-iv_t = v_{xx} + 2v^2u, \quad (7.6.28b)$$

где $v = u^*$. В этом случае гамильтониан описывается выражением

$$H = -i \int (u^2v^2 - u_xv_x) dx, \quad (7.6.29)$$

а уравнения (7.6.28) принимают каноническую форму

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta v}, \quad v_t = -\frac{\delta H}{\delta u}. \quad (7.6.30)$$

7.7. Динамика неинтегрируемых эволюционных уравнений

Интегрируемые уравнения в частных производных, допускающие солитонные решения, удивительно часто возникают при выводе реалистических физических моделей для различных одномерных волновых процессов. (В качестве вводного обзора читателю рекомендуется работа Гиббона [27]). Не менее важны тесно связанные с ними нелинейные эволюционные уравнения, которые не являются интегрируемыми и не допускают решений методом ОПР. Поведение таких уравнений варьируется от ограниченных во времени сингулярностей («выпешек») до пространственного хаоса. В этой связи кажется очень вероятным, что проникновение в понимание пространственно-временного хаоса (и, возможно, даже динамической турбулентности в жидкости) может быть достигнуто путем изучения некоторых таких модельных

уравнений. Это необъятное поле для деятельности, однако, чтобы довершить картину исследования хаоса и интегрируемости в динамических системах (в нашем изложении эти два понятия оказались в определенном смысле связанными), мы кратко упомянем некоторые «канонические» модели и их поведение.

7.7.а. Самофокусирующиеся сингулярности

Двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iu_t + \Delta u + u|u|^2 = 0, \quad (7.7.1)$$

где Δ обозначает двумерный лапласиан, не может быть решено с помощью метода ОПР. Кроме того, оно допускает решения в виде ограниченных во времени «вспышек» или «самофокусирующихся» сингулярностей. Обычно изучение подобных особенностей решений уравнения (7.7.1) проводят в полярных координатах⁴⁾, в которых уравнение принимает вид

$$iu_t + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + u|u|^2 = 0, \quad (7.7.2)$$

где $u = u(r, t)$. Выявить наличие особенности можно при помощи довольно простых динамических принципов (см., например, работу Беркшайра и Гиббона [24]). Запишем интегралы движения для уравнения (7.7.2), соответствующие сохранению массы и энергии:

$$M = 2\pi \int_0^\infty |u|^2 r \, dr \quad (7.7.3)$$

и

$$E = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 - \frac{1}{4} |u|^4 \right) r \, dr. \quad (7.7.4)$$

Кроме этого, можно определить также момент инерции

$$I = 2\pi \int_0^\infty |u|^2 r^3 \, dr, \quad (7.7.5)$$

который, как можно показать, связан с интегралом энергии соотношением

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 4E. \quad (7.7.6)$$

При подходящем выборе начальных условий $u(r, 0)$ можно добиться, чтобы $E < 0$, что, в свою очередь, влечет $\ddot{I} < 0$. Таким образом, за ограниченный промежуток времени момент инерции сколлапсирует, т. е. обратится в нуль.

Очень сложно определить истинную природу сингулярности. Этой тематике посвящены многочисленные теоретические исследования (многие из которых восходят к Захарову и его соавторам; см., например, статью Захарова и Сынах [32]). В этой работе было высказано предположение, что сингулярность (во времени) является

⁴⁾ В оригинале radially symmetric coordinates; уравнение (7.7.2) предполагает, что решение не зависит от второй полярной координаты φ . — Прим. ред.

алгебраической; другими словами, решение ведет себя как $(t - t_*)^{2/3}$, по мере того как время приближается к критическому значению t_* («момент вспышки»). В последующих работах предлагалось рассматривать особенности гораздо более сложной логарифмической структуры (см., например, статью Мак-Лафлина и др. [29]). Присутствие особенностей в решениях нелинейного уравнения Шрёдингера не ограничивается двумерным случаем. Они могут присутствовать и в общем уравнении

$$iu_t + \Delta_d u + u|u|^{2\sigma} = 0, \quad (7.7.7)$$

где Δ_d — d -мерный лапласиан, а σ указывает на порядок нелинейности. Для каждого d найдется такое значение σ , для которого будет наблюдаться самофокусирующаяся сингулярность в решении. Например, одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера четвертого порядка

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^4 = 0 \quad (7.7.8)$$

допускает сингулярные решения. В цитированной выше работе Захарова и Сынах предполагалось алгебраическое поведение этой сингулярности: $\sim (t - t_*)^{4/7}$; однако опять-таки кажется, что реальная ситуация гораздо сложнее.

7.7.6. Уравнения Захарова

Во многих физических областях возникает интерес смоделировать взаимодействие длинных волн с короткими. Так, например, в теории ленгмюровских волн в физике плазмы взаимодействие между быстро осциллирующим электрическим полем u и медленно меняющейся плотностью ионов v имеет вид

$$iu_t + u_{xx} + uv = 0, \quad (7.7.9a)$$

$$v_{xx} - \frac{1}{C^2} v u = -\beta(|u|^2)_{xx}. \quad (7.7.9b)$$

Эта система известна как *одномерные уравнения Захарова*. Уравнения подобного типа возникают также в моделях возбуждений в идеализированных цепочках ДНК, предложенных Давыдовым [26]. Важная черта уравнений (7.7.9) проявляется в пределе больших C . В этом случае уравнение (7.7.9b) принимает вид $v_{xx} = -\beta(|u|^2)_{xx}$; другими словами, v оказывается прямо пропорциональным u и (7.7.9a) сводится к интегрируемому нелинейному уравнению Шрёдингера, обладающему солитонными решениями. Однако общая система (7.7.9) не является интегрируемой и не может быть решена методом ОПР. Численные расчеты показывают, что система способна на очень сложное поведение. Напротив, если уравнения (7.7.9) сводятся к «одноволновой» форме путем факторизации оператора $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})$ к виду $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t})$, получаем систему

$$iu_t + u_{xx} + uv = 0, \quad (7.7.10a)$$

$$v_x + \frac{1}{C} v_t = -\beta(|u|^2)_x, \quad (7.7.10b)$$

которая является интегрируемой и допускает применение метода ОПР.

Для физически более реалистичных приложений особенно важным оказывается двумерный вариант (7.7.9), а именно

$$iu_t + \Delta u + uv = 0, \quad (7.7.11a)$$

$$\Delta v - \frac{1}{C^2} v u = -\beta \Delta(|u|^2). \quad (7.7.11b)$$

В этом случае в пределе больших C (7.7.11а) сводится к двумерному нелинейному уравнению Шрёдингера, в котором возможно появление самофокусирующейся сингулярности. Путем численного моделирования системы (7.7.11) обнаружена богатая структура ее решений, включающая «вспышку», сопровождающуюся «затуханием». (Неплохой обзор этих явлений в контексте физики плазмы был дан Голдманом [28].)

7.7.в. Когерентность и хаос

Хорошей моделью для изучения пространственно-временного хаоса является одномерное уравнение $\sin$ -Гордона в поле внешней силы (с затуханием):

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \Gamma \cos(\omega t) - \alpha u_t. \quad (7.7.12)$$

Обычно рассматривают решения этого уравнения с периодическими граничными условиями, когда $u(x + L, t) = u(x, t)$. Детальный численный анализ уравнения (7.7.12), проведенный Бишопом и др. [25], показал, что данная система обладает богатым поведением по мере варьирования параметров внешней силы Γ и затухания α . Однако структура пространственной части решений оказывается обычно когерентной, т. е. проявляются черты лишь небольшого числа хорошо выраженных пространственных мод. Особенно впечатляет тот факт, что эта пространственная когерентность сохраняется даже тогда, когда временная эволюция становится хаотичной. Становится ясным, что солитонная структура невозмущенной системы ($\Gamma = \alpha = 0$) может быть довольно стабильной.

Во многих задачах статистической механики и динамики жидкости часто фигурируют два уравнения: уравнение Гинзбурга—Ландау и тесно связанное с ним уравнение Ньюеля—Уайтхеда. Типичный вид этих уравнений в случае одного пространственного измерения следующий:

$$u_t = \alpha u_{xx} + \beta u - \gamma |u|^2 u, \quad (7.7.13)$$

где u — (комплексная) амплитуда некоторой нестабильной моды, а α , β и γ являются подгоночными параметрами, которые могут быть комплексными. Это уравнение может быть обобщено на высшие размерности; оно характеризуется огромным разнообразием в поведении — от когерентности до хаоса — в зависимости от выбранных значений параметров. Выяснение свойств этих уравнений является бурно развивающейся областью исследований.

Список литературы

Учебники и обзорные статьи

1. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981. [Имеется перевод: Абловиц М. Д., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.]
2. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic, London, 1982. [Имеется перевод: Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.]
3. Drasin P. G. Solitons. London Mathematical Society Lecture Notes. Vol. 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
4. Lamb G. L., Jr. Elements of Soliton Theory. Wiley, New York, 1980.
5. Miura R. M. The Korteweg-de Vries equation, a survey of results. *SIAM Rev.* 18, 412 (1976).

Раздел 7.1

6. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies in nonlinear problems, I. Los Alamos report LA 1940 (1955).
7. *Korteweg D. J., G. de Vries.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **39**, 422 (1895).
8. *Russell J. Scott.* Report on waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. John Murray, London, 1844.
9. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev.* **15**, 240 (1965).

Раздел 7.2

10. *Carrier G. F., Pearson Carl E.* Partial Differential Equations. Academic, New York, 1976.
11. *Miura R. M.* Korteweg—de Vries equation and generalizations, I. A remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Math. Phys.* **9**, 1202 (1968).
12. *Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.* Korteweg—de Vries equation and generalizations. II: Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.*, **9**, 1204 (1968).

Раздел 7.3

13. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg—de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1905 (1967).
14. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* The Korteweg—de Vries equation and generalizations. VI: Methods of exact solution. *Commun. Pure Appl. Math.*, **27**, 97 (1974).
15. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. С. 309–360.
16. *Марченко В. А.* О восстановлении потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 695–698.

Раздел 7.4

17. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear evolution equations and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**, 467 (1968). [Имеется перевод: *Лакс П. Д.* Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. 13:5. С. 128–150. М.: Мир, 1969.]
18. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240 (1965).

Раздел 7.5

19. *Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.* The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.*, **53**, 249 (1974).
20. *Perring K. K., Skyrme T. H. R.* A model unified field equation. *Nucl. Phys.*, **31**, 550 (1962).
21. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функци. анализ и прилож. 1974. Т. 8. С. 43–53; 1979. Т. 13, вып. 3. С. 13–22.

Раздел 7.6

22. *Gardner C. S.* The Korteweg—de Vries equation and generalizations. IV: The Korteweg—de Vries equation as a Hamiltonian system. *J. Math. Phys.*, **12**, 1548 (1971).
23. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортвега—де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функци. анализ и прилож. 1971. Т. 5. С. 18–27.

Раздел 7.7

24. *Berkshire F. H., Gibbon J. D.* Collapse in the n -dimensional nonlinear Schrödinger equation — a parallel with Sundman's results in the N -body problem. *Stud. Appl. Math.*, **69**, 229 (1983).

25. Bishop A. R., Fesser K., Lomdahl P. S., Trullinger S. E. Influence of solitons in the initial state on chaos in the driven, damped Sine-Gordon system. *Physica*, **7D**, 259 (1983).
26. Davydov A. S. Solitons in molecular systems. *Phys. Scr.*, **20**, 387 (1979).
27. Gibbon J. D. A survey of the origins and physical importance of soliton equations. *Philos. Trans. R. Soc. London*, bf A315, 335 (1985).
28. Goldman M. V. Strong turbulence of plasma waves. *Rev. Mod. Phys.*, **56**, 709 (1984).
29. McLaughlin D. W., Papanicolaou G. C., Sulem C., Sulem P. L. Focusing singularity of the cubic Schrödinger equation. *Phys. Rev. A*, **34**, 1200 (1986).
30. Newell A. C., Whitehead J. A. Finite amplitude, finite band width convection. *J. Fluid Mech.*, **38**, 279 (1969).
31. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖТФ. 1972. Т. 62, вып. 5. С. 1745–1759.
32. Захаров В. Е., Сынах В. С. О характере особенности при самофокусировке // ЖТФ. 1975. Т. 68, вып. 3. С. 940–947.

Глава 8

Аналитическая структура динамических систем

8.1. В поисках интегрируемых систем

В предыдущих главах мы неизменно возвращались к вопросу о различиях между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами. Неинтегрируемые системы обладают способностью проявлять хаотическое поведение, тогда как интегрируемые системы отличаются наличием полного набора интегралов и устойчивым периодическим поведением. Интегрируемые системы образуют те «строительные блоки», используя которые можно развивать теорию возмущений. В случае гамильтоновых систем конечной размерности это в конечном итоге приводит к КАМ-теореме, устанавливающей сохранение торов фазового пространства при возмущении. Если же система обладает бесконечным числом степеней свободы и при этом интегрируема, то она, как мы убедились, может иметь солитонные решения.

Несмотря на все достижения в области нелинейной динамики, по-прежнему актуален фундаментальный вопрос: каким образом можно а priori определить, интегрируема данная система уравнений или нет. Пусть, например, дана система Хенона—Хейлеса с подгоночными параметрами

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + Ax^2 + By^2) + Dx^2y - \frac{1}{3}Cy^3. \quad (8.1.1)$$

Существуют ли такие комбинации четырех параметров A , B , C и D , при которых она интегрируема? Как оказалось, существует четыре такие комбинации, а именно:

- (а) $\frac{D}{C} = 0$ при любых A, B ;
- (б) $\frac{D}{C} = -1$, $\frac{A}{B} = 1$;
- (в) $\frac{D}{C} = -\frac{1}{6}$ при любых A, B ;
- (г) $\frac{D}{C} = -\frac{1}{16}$, $\frac{A}{B} = \frac{1}{16}$.

Из них случай (а) тривиален; случай (б) не так уж трудно усмотреть с учетом того, что уравнения движения разделяются путем простой замены переменных. Но наряду с этим случаями (в) и (г) — в особенности (г) — далеко не столь очевидны.

Один из подходов к определению вариантов интегрируемости для подобной системы состоит в отыскании интегралов движения. В общем случае это наиболее сложный подход, требующий сочетания гения, удачи и... мольбы. Для некоторых классов систем специального вида, а именно, для двумерных гамильтонианов с простыми алгебраическими интегралами (т. е. интегралы представляют собой многочлены по каноническим переменным p и q), такие интегралы можно найти, используя алгоритм, основанный на методе Бертрана (разработан в 1952 году; рассматривается в [8]). Для установления интегрируемости негамильтоновых систем,

таких как система уравнений Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + Rx - y, \\ \dot{z} &= xy - Bz,\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

требуется отыскать зависящие от времени интегралы — если таковые существуют (см. раздел 1.6). Как мы увидим, в действительности существует лишь небольшое число комбинаций параметров σ , R и B , для которых эти уравнения интегрируемы. И хотя в этом случае также существуют процедуры, позволяющие иногда находить соответствующие интегралы, область их применимости (как и метода Бертрана для гамильтоновых систем) ограничена, а в вычислительном аспекте они весьма громоздки.

В случае дифференциальных уравнений в частных производных ситуация ничуть не лучше. Рассмотрим, например, следующий набор нелинейных уравнений:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{8.1.3a}$$

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \tag{8.1.3б}$$

$$u_t + 6u^3u_x + u_{xxx} = 0. \tag{8.1.3в}$$

Как можно определить, какие из этих уравнений интегрируемы и обладают n -солитонными решениями? Прочитав главу 7, мы, разумеется, узнаем в первых двух уравнениях уравнение КдФ и модифицированное уравнение КдФ соответственно, для которых обратные преобразования рассеяния известны и явные n -солитонные решения построены. А вот что можно сказать по поводу последнего уравнения? Можно вместо поисков (неизвестного пока) обратного преобразования рассеяния попытаться записать законы сохранения. К настоящему моменту известно три таких закона, но при этом нет доказательств, что не существует других. Иной подход состоит в численном изучении системы. Сталкивая уединенные волны друг с другом, необходимо проследить, обладают ли они солитонными свойствами, т. е. сохраняются ли их форма и скорость после столкновения. Для рассматриваемого уравнения численно солитонное поведение не наблюдается. И хотя это веский довод в пользу неинтегрируемости, доказательством он все-таки не является.

Итак, наша цель состоит в отыскании простого аналитического теста, позволяющего определить интегрируемость как о. д. у., так и у. ч. п. — независимо от того, гамильтоновы они или нет. Этот поиск приводит нас в комплексную плоскость, т. е. ответ определяется типом особенностей аналитического продолжения решений в комплексной области их независимых переменных. Этот, быть может, несколько отпугивающий на первый взгляд подход непосредственно ведет к цели и оперирует только свойствами данного дифференциального уравнения (уравнений), не требуя построения решений в явном виде. Лежащая в его основе идея не нова и восходит к классической работе выдающегося русского математика Софьи Ковалевской¹⁾.

8.1.а. Работа Ковалевской

Знаменитая работа Ковалевской, за которую она была удостоена премии Бурдена Парижской Академии наук в 1888 году, была посвящена решению уравнений

¹⁾ Судьба Ковалевской (1850–1891) столь же нетривиальна, как и ее работы. Интересно прочесть ее автобиографию [4]. Ковалевской пришлось преодолеть немалые трудности, чтобы завершить математическое образование в то время, когда подобная карьера считалась совершенно «неуместной» для женщины.

Эйлера—Пуассона, описывающих движение тяжелого волчка относительно неподвижной точки. Они представляют собой систему шести нелинейных связанных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr - \beta z_0 + \gamma y_0, \quad (8.1.4a)$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)pr - \gamma x_0 + \alpha z_0, \quad (8.1.4б)$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq - \alpha y_0 + \beta x_0, \quad (8.1.4в)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \quad (8.1.4г)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \quad (8.1.4д)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p, \quad (8.1.4е)$$

где p, q, r — составляющие угловой скорости, а α, β, γ — направляющие косинусы, которые определяют ориентацию волчка. Наборы переменных A, B, C и x_0, y_0, z_0 представляют собой моменты инерции и координаты центра тяжести соответственно. Они выступают в качестве подгоночных параметров системы: в зависимости от их значений система может быть или не быть интегрируемой.

Во времена Ковалевской было найдено лишь несколько частных решений системы (8.1.4), и вопрос о возможности ее решения в общем виде при любых A, B, C и x_0, y_0, z_0 оставался открытым. Система (8.1.4) имеет три «классических» первых интеграла при любых значениях параметров:

$$I_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma), \quad (8.1.5a)$$

$$I_2 = A p \alpha + B q \beta + C r \gamma, \quad (8.1.5б)$$

$$I_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (8.1.5в)$$

Первые два представляют собой полную энергию и угловой момент соответственно; третий выражает простые геометрические ограничения. Для решения уравнений (8.1.4) необходимо отыскать четвертый интеграл и тем самым свести систему к уравнениям второго порядка, которые затем могли бы быть проинтегрированы в квадратурах.

Такой четвертый интеграл был известен для следующих случаев:

- (1) Случай Эйлера: $x_0 = y_0 = z_0$, т. е. центр тяжести совпадает с неподвижной точкой. Нетрудно проверить, что при этом четвертый интеграл имеет вид

$$I_4 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2. \quad (8.1.6)$$

- (2) Случай Лагранжа: $A = B$, $x_0 = y_0 = z_0$, т. е. симметричный волчок, центр тяжести которого расположен на оси z . В этом случае уравнение (8.1.4в) становится тривиальным, и четвертый интеграл — это просто

$$I_4 = r. \quad (8.1.7)$$

(3) Полностью симметричный случай: $A = B = C$.

Все три случая допускают интегрирование в терминах эллиптических функций Якоби.

Ковалевская предложила совершенно иной подход к решению этой механической задачи, предполагающий использование явно нефизической техники комплексных переменных. Основываясь, по-видимому, на работе Фукса, в которой рассматривались свойства дифференциальных уравнений первого порядка в комплексной плоскости, она решила определить возможные типы особенностей уравнений (8.1.4). Цель состояла в отыскании условий, при которых обыкновенный полюс был бы единственной разновидностью *подвижных особенностей* решений в комплексной плоскости.

Здесь необходимо прерваться и выяснить, что подразумевается под подвижной особенностью. В случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений особенности определяются коэффициентами уравнения и локализуются в фиксированных точках комплексной области. Например, уравнение

$$\frac{d}{dz}f(z) + \frac{1}{z^2}f(z) = 0 \quad (8.1.8)$$

имеет неподвижную особенность в точке $z = 0$. В этом случае решение имеет вид $f(z) = ce^{1/z}$, и мы видим, что особенность в точке $z = 0$ действительно является существенной. (Существенные особые точки подробнее будут обсуждаться в разделе 8.2.а.) Нелинейные дифференциальные уравнения могут, в противоположность линейным, обладать подвижными особенностями, локализация которых определяется начальными условиями. Например, уравнение

$$\frac{d}{dz}f(z) + f^2(z) = 0 \quad (8.1.9)$$

имеет решение

$$f(z) = \frac{1}{z + z_0}, \quad (8.1.10)$$

где $z_0 = 1/f(0)$. Таким образом, $f(z)$ имеет простой полюс при $z = -z_0$, где z_0 определяется начальным значением $f(0)$. Решением уравнения

$$\frac{d}{dz}f(z) + f^3(z) = 0 \quad (8.1.11)$$

является

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2(z + z_0)}}, \quad (8.1.12)$$

где в данном случае $z_0 = 1/\sqrt{f(0)}$, и уравнение имеет подвижную *точку ветвления*.

Ковалевская нашла, что лишь в четырех случаях уравнения Эйлера—Пуассона имеют только подвижные полюсы. К уже известным трем случаям добавился еще один (случай Ковалевской): $A = B = 2C$, $z_0 = 0$. Четвертый интеграл имеет вид

$$I_4 = \left(p^2 - q^2 - \frac{x_0}{C}\alpha\right)^2 + \left(2pq - \frac{x_0}{C}\beta\right)^2. \quad (8.1.13)$$

Уравнения движения Ковалевская проинтегрировала с помощью виртуозной техники, включающей гиперэллиптические функции.

В то время было неясно, за счет чего срабатывает такой подход, т. е. каким образом конкретная структура особенностей в комплексной области может определять

интегрируемость (в реальном времени) механической системы. Результат Ковалевской рассматривался как особое свойство задачи для недеформируемого твердого тела, не имеющее каких-либо других приложений для механических систем. И лишь в последнее время была осознана общность обсуждаемого подхода и достигнуто некоторое понимание того, за счет чего он работает.

8.1.6. Работа Пенлеве

Хотя подход Ковалевской не был, по-видимому, распространен на какие-либо задачи помимо задачи о волчке, предметом значительной активности математиков конца девятнадцатого столетия явилась классификация обыкновенных дифференциальных уравнений по типам особенностей их решений. Наиболее значительное исследование в этой области принадлежит французскому математику Полю Пенлеве²⁾. Следуя более ранним работам Фукса и другим работам по классификации уравнений первого порядка, он проанализировал класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right), \quad (8.1.14)$$

где F — функция, аналитическая по x и рациональная по y и $\frac{dy}{dx}$. В рамках этого класса уравнений Пенлеве выделил 50 типов, единственными подвижными особенностями которых являются обыкновенные полюса. Это аналитическое свойство теперь часто называют *свойством Пенлеве*. Он также показал, что 44 типа из этих 50 могут быть проинтегрированы с использованием «известных» функций (уравнения Риккати, эллиптические функции и т. д.). Оставшиеся шесть типов, называемые *уравнениями Пенлеве*, не имеют алгебраических интегралов и не могут быть проинтегрированы в квадратурах. Сам Пенлеве нашел лишь первые два типа этих уравнений (которые мы обозначим через PI и PII):

$$\text{PI: } \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x, \quad (8.1.15)$$

$$\text{PII: } \frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (8.1.16)$$

где α — произвольный параметр. Остальные четыре типа уравнений Пенлеве были найдены его учениками; последний из них, найденный Гамбиером, содержит остальные пять в качестве предельных случаев.

Хотя уравнения Пенлеве могут быть представлены лишь в виде сходящихся локальных разложений, они асимптотически связаны с некоторыми «известными» в анализе функциями. Например, в случае PI так называемое преобразование Бутру

$$y = z^{1/2}\omega, \quad t = \frac{4}{5}z^{5/4}$$

приводит уравнение Пенлеве к виду

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = 6\omega^2 - \frac{1}{t} \frac{d\omega}{dt} + \frac{4}{25t^2}\omega,$$

²⁾ Пенлеве был одновременно крупным математиком и крупным политиком — министром обороны Франции во время Первой мировой войны. Он увлекался авиацией и в качестве друга братьев Райт был в числе первых авиапассажиров (бесплатно).

представляющему собой в пределе $t \rightarrow \infty$ частный случай эллиптической функции Вейерштрасса.

Казалось, что работа Пенлеве практически не имеет отношения к физическим задачам, и она быстро затерялась в математической литературе. Но в последнее десятилетие работы Ковалевской, Пенлеве (и других) вновь привлекли к себе значительный интерес, так как оказалось, что их идеи играют основную роль в установлении и объяснении интегрируемости динамических систем. Прежде чем перейти к этому вопросу, мы посвятим следующий раздел краткому обзору соответствующих свойств дифференциальных уравнений в комплексной области³⁾.

8.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной области

8.2.а. Локальные представления

В случае самых простых нелинейных дифференциальных уравнений, таких как (8.1.9) и (8.1.11), характер подвижных особенностей можно определить исходя из вида точного решения. В большинстве случаев точные решения получить не удастся, и характер подвижных особенностей устанавливают исходя из «локальных» свойств решений.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$\frac{d^n y}{dz^n} = F\left(\frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dz}, y, z\right), \quad (8.2.1)$$

где F — функция аналитическая по независимой переменной z и рациональная по всем остальным аргументам. Поведение решения (решений) такого уравнения в подвижной особой точке определяется посредством анализа *ведущего члена разложения*. Записываем подстановку

$$y(z) = a(z - z_0)^\alpha, \quad (8.2.2)$$

где a и α необходимо определить, а z_0 — произвольная точка в комплексной z -плоскости (т. е. положение подвижной особенности). Подставляя (8.2.2) в (8.2.1) и приравнявая наиболее сингулярные члены, определяем a и α . Рассмотрим, например, уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 6y^2 + Ay. \quad (8.2.3)$$

В главе 1 было показано, что оно имеет точное решение в терминах эллиптических функций Вейерштрасса. Подстановка (8.2.2) дает

$$a\alpha(\alpha - 1)(z - z_0)^{\alpha-2} = 6a^2(z - z_0)^{2\alpha} + Aa(z - z_0)^\alpha.$$

Наиболее сингулярные члены (т. е. вторая производная и $6y^2$) должны совпадать в особой точке z_0 . Приравнивание показателей степени ($\alpha - 2 = 2\alpha$) дает значение $\alpha = -2$. Аналогично, должны быть равны и коэффициенты при этих сингулярных членах ($a\alpha(\alpha - 1) = 6a^2$), откуда находим $a = 1$. Таким образом, в точке z_0 решение уравнения (8.2.3) ведет себя как $y(z) = (z - z_0)^{-2}$ (полюс второго порядка).

³⁾ Обсуждение этих вопросов дано в [3].

Отметим, что член более низкого порядка в этом уравнении (Ay) не влияет на поведение в точке z_0 . Усиление нелинейности в (8.2.3) приводит к изменению порядка сингулярности. Нетрудно показать, что уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 2y^3 + Ay, \quad (8.2.4)$$

допускающее, как мы знаем, решение в терминах эллиптических функций Якоби, ведет себя в подвижной особой точке как $y(z) = (z - z_0)^{-1}$ (полюс первого порядка). Легко видеть, что дальнейшее усиление нелинейности приведет к подвижной точке ветвления.

Анализ ведущего члена позволяет охарактеризовать поведение решения только в особой точке. Для того, чтобы установить поведение в *окрестности* сингулярности, необходимо прибегнуть к локальному разложению в ряд. Если особенность действительно является неподвижным полюсом, такое разложение будет представлять собой простой *ряд Лорана*. Рассмотрим, например, уравнение (8.2.3). Мы уже установили, что в особой точке оно ведет себя как полюс второго порядка. Исходя из этого, ряд Лорана должен иметь вид

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-2}. \quad (8.2.5)$$

Самосогласованность этого разложения может быть проверена непосредственной подстановкой в уравнение. Это приводит к соотношению

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j-2)(j-3)(z - z_0)^{j-4} = 6 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j a_k (z - z_0)^{j+k-4} + A \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-2},$$

которое можно упростить и свести к *рекуррентным соотношениям* для a_j :

$$a_j(j+1)(j-6) = 6 \sum_{l=1}^{j-1} a_{j-l} a_l + A a_{j-2}, \quad (8.2.6)$$

где мы воспользовались тем, что $a_0 = 1$. Вычисления по этим рекуррентным соотношениям дают:

$$\begin{aligned} j=1: & \quad a_1 = 0, \\ j=2: & \quad a_2 = -\frac{1}{12} A, \\ j=3: & \quad a_3 = 0, \\ j=4: & \quad a_4 = -\frac{1}{24} A^2, \\ j=5: & \quad a_5 = 0. \end{aligned}$$

При $j=6$ получаем соотношение

$$0 \cdot a_6 = 12a_4 a_2 + A a_4, \quad (8.2.7)$$

правая часть которого обращается с учетом значений a_2 и a_4 в ноль. Это означает *произвольность* a_6 . Мы видим, таким образом, что ряд Лорана (8.2.5) имеет два произвольных параметра, a_6 и z_0 ; последний характеризует произвольность положения полюса. Поскольку уравнение (8.2.3) представляет собой о. д. у. второго

порядка, его *общее решение* включает два произвольных параметра. Проведенный анализ показывает, что в (локальном) разложении Лорана это проявляется в виде произвольности a_6 и z_0 . Мы можем, таким образом, заключить, что в окрестности подвижной особой точки z_0 общее решение уравнения (8.2.3) действительно ведет себя как полюс второго порядка. Мы будем часто обращаться к этому результату, говоря, что уравнение (8.2.3) обладает свойством Пенлеве⁴⁾. В качестве упражнения можно показать, что уравнение (8.2.4) также обладает свойством Пенлеве; произвольными параметрами локального разложения

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-1} \quad (8.2.8)$$

являются a_4 и z_0 .

Степени $(z - z_0)$, при которых появляются произвольные коэффициенты, часто называют *резонансами*⁵⁾. Резонансы можно находить с помощью простого метода без полных расчетов по рекуррентным соотношениям. Он основывается на подстановке

$$y(z) = a(z - z_0)^{\alpha} + p(z - z_0)^{r+\alpha}, \quad (8.2.9)$$

где a и α должны быть определены посредством анализа ведущего члена. Исходя из (8.2.9), можно записать линейное относительно p уравнение и определить значения r , при которых p произвольно. Так, например, в случае уравнения (8.2.3) подстановка имеет вид

$$y(z) = (z - z_0)^{-2} + p(z - z_0)^{r-2}. \quad (8.2.10)$$

Оперируя наиболее сингулярными членами, получаем

$$6(z - z_0)^{-4} + p(r - 2)(r - 3)(z - z_0)^{r-4} = 6[(z - z_0)^{-2} + p(z - z_0)^{r-2}]^2.$$

Приравнявая линейные по p члены, приходим к

$$p(r + 1)(r - 6) = 0. \quad (8.2.11)$$

Таким образом, для того, чтобы p было произвольным, необходимо, чтобы либо $r = -1$, либо $r = 6$. Корень $r = 6$ отвечает произвольности коэффициента a_6 , соответствующего степеням $(z - z_0)^4$ в (8.2.5). Второй корень $r = -1$ соответствует не степеням $(z - z_0)^{-3}$ (что не согласуется с уравнением), а определяет произвольность z_0 .

Такой анализ позволяет определить лишь, какие коэффициенты *должны быть* произвольными. Так это или нет, необходимо затем проверить с помощью полного набора рекуррентных соотношений. Резонансам соответствуют как правило некоторые соотношения, называемые *условиями совместности*, которые должны быть выполнены для того, чтобы обеспечить произвольность коэффициента. Для уравнения (8.2.3), например, соответствующее условие совместности имеет вид $12a_4a_2 + Aa_4 = 0$. В данном случае оно удовлетворяется при любом значении A . Для более сложных

⁴⁾ Можно говорить, что *решение* обладает свойством Пенлеве, если оно допускает локальное однозначное разложение. Дифференциальное уравнение может, в принципе, характеризоваться и более чем одним типом сингулярности. Это приводит к различным ветвям решений. Если свойством Пенлеве обладают все ветви, то мы говорим, что и дифференциальное уравнение обладает свойством Пенлеве.

⁵⁾ Резонансы называют также *экспонентами Ковалевской*.

задач часто оказывается, что произвольность может быть получена лишь при некоторых определенных значениях параметров системы. Если, например, уравнение (8.2.4) модифицировать, включив в него член, содержащий первую производную:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + B \frac{dy}{dz} - Ay - 2y^3 = 0, \quad (8.2.12)$$

то коэффициент a_4 ряда (8.2.8) будет произвольным лишь при условии, что $A = -2B^2/9$. Если это условие не выполняется, простой ряд Лорана не может служить локальным представлением общего решения. В этом случае ряд необходимо обобщить таким образом, чтобы коэффициент при $j = 4$ вновь стал произвольным. Новый ряд, называемый *пси-рядом*, указывает на то, что особенность уже не является простым полюсом и характеризуется сложной логарифмической многозначностью. Этот метод будет изложен в разделе 8.2.в.

До сих пор мы все время подразумевали целочисленность ведущих порядков и резонансов. Одна из этих величин или обе — в зависимости от порядка и характера нелинейности уравнения — вполне могут оказаться не целыми (например, иррациональными или комплексными). Понятно, что в этом случае особенности не являются простыми полюсами и рассматриваемая система не обладает свойством Пенлеве. А поскольку, как следует из работы Ковалевской, свойство Пенлеве является критерием интегрируемости, мы видим, что уже на уровне анализа ведущих членов и резонансов это дает простой аналитический «намеки» на неинтегрируемость системы.

В заключение этого подраздела сделаем несколько замечаний относительно существенных особенностей. Это такие особенности, локальные разложения которых имеют бесконечное число отрицательных степеней. В качестве простого примера может служить неподвижная существенная особенность решения $f(z) = ce^{1/z}$ линейного уравнения первого порядка (8.1.8). В этом случае локальное разложение записывается следующим образом:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}. \quad (8.2.13)$$

В случае нелинейных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dy}{dz} = F(y, z) \quad (8.2.14)$$

оказывается, что для широкого класса $F(y, z)$ такие уравнения могут иметь только подвижные полюсы и алгебраические точки ветвления и при этом только неподвижные существенные особенности. Однако в случае нелинейных о. д. у. второго порядка существенная особенность может стать подвижной. Простым примером является о. д. у.

$$\left(\frac{d}{dz} \left(\frac{y'}{y} \right) \right)^2 + 4 \left(\frac{y'}{y} \right)^3 = 0, \quad (8.2.15)$$

где y' означает $\frac{dy}{dz}$; общее решение имеет вид

$$y(z) = c_1 e^{1/(z-c_2)} \quad (8.2.16)$$

и обладает подвижной существенной особенностью при $z = c_2$. Наряду с подвижными существенными особенностями нелинейные о. д. у. второго порядка могут также

обладать подвижными логарифмическими и трансцендентными точками ветвления. Эти два типа особенностей могут быть определены в рамках локального анализа, тогда как нахождение существенных особенностей затруднительно, если решение не известно в явном виде. В настоящее время роль подвижных существенных особенностей в установлении интегрируемости конкретной системы понята недостаточно. Отметим также, что с повышением порядка дифференциальных уравнений могут возникать подвижные особенности еще более сложных типов.

8.2.6. Общие и особые решения

До сих пор мы имели дело с локальными представлениями общих решений, которые представляют собой разложения, содержащие столько произвольных параметров, каков порядок уравнения. Важно понимать, что наряду с этим могут также существовать решения с меньшим числом произвольных параметров; такие решения называются *особыми*. Рассмотрим в качестве простого примера нелинейное о. д. у. первого порядка

$$\frac{df(z)}{dz} = 1 + f^2(z). \quad (8.2.17)$$

Общее решение имеет вид $f(z) = \operatorname{tg}(z - c)$, где c — единственный произвольный параметр. Это решение имеет ряд подвижных полюсов в точках $z = c + (2n + 1)\pi/2$. Наряду с этим уравнение (8.2.17) имеет также особое решение $f(z) = \pm i$, не содержащее произвольных параметров.

Оказалось, что особые решения, если они существуют, играют важную и довольно тонкую роль в определении интегрируемости дифференциального уравнения. Эти особые решения представляют собой не что иное как *огигающие* семейства общих решений. Мы проиллюстрируем общую идею на примере уравнения Клеро⁶⁾. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$f = zf' - (f')^2, \quad (8.2.18)$$

где f' означает $\frac{df}{dz}$. Общее решение⁷⁾ имеет вид

$$f_g(z) = cz - c^2, \quad (8.2.19)$$

где c — единственный произвольный параметр. Дифференцирование уравнения (8.2.18) по z приводит к

$$f''(z - 2f') = 0. \quad (8.2.20)$$

Это уравнение имеет два решения: (а) $f'' = 0$ и (б) $z = 2f'$. Однократное интегрирование решения (а) дает $f' = e$, и после подстановки в (8.2.18) получаем однопараметрическое общее решение (8.2.19). Решение (б) можно представить в виде $f' = z/2$, и подстановка его в (8.2.18) приводит к (непараметрическому) особому решению

$$f_s(z) = \frac{1}{4}z^2. \quad (8.2.21)$$

Построив зависимость $f_s(z)$ и семейство (для различных значений c) зависимостей $f_g(z)$, мы убедимся, что $f_s(z)$ действительно является огибающей (рис. 8.1).

⁶⁾ Уравнение Клеро имеет в общем случае вид $f = zf' + F(f')$, где F — аналитическая функция от f' . Читатель, вероятно, проведет параллель между дальнейшим изложением и описанием преобразований Лежандра в приложении 2.1 к главе 2.

⁷⁾ Здесь нижние индексы g и s в решении дифференциального уравнения $f(z)$ отвечают соответственно общим (от англ. general) и особым (singular) решениям. — Прим. ред.

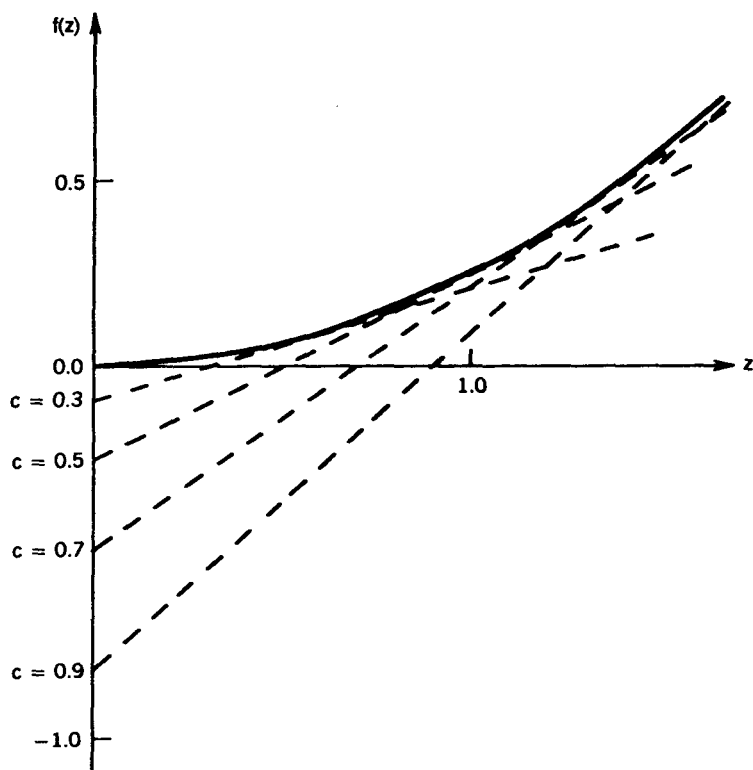


Рис. 8.1. Общие и особое решения уравнения Клеро (8.2.18). Пунктирными линиями показано однопараметрическое семейство общих решений $f_g(z) = cz - c^2$ при различных значениях c ; сплошная линия соответствует особому решению $f_s(z) = z^2/4$ и является огибающей общих решений

8.2.в. Пси-ряд

Вернемся к уравнению (8.2.12). На основании анализа ведущего члена и резонансов мы уже знаем, что в особой точке решение ведет себя как полюс первого порядка, а резонансы возникают при $j = 4$ и $j = -1$. Непосредственная подстановка (8.2.8) в (8.2.12) приводит к рекуррентным соотношениям

$$a_j(j+1)(j-4) = -Ba_{j-1} + Aa_{j-2} + 2 \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=1}^k a_{j-k-l} a_k a_l. \quad (8.2.22)$$

Отсюда, с учетом того, что $a_0 = 1$, находим:

$$\begin{aligned} j = 1: \quad a_1 &= -\frac{1}{6}B, \\ j = 2: \quad a_2 &= -\frac{1}{6}\left(A + \frac{1}{6}B^2\right), \\ j = 3: \quad a_3 &= -\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{9}B^2\right), \end{aligned}$$

$$j = 4: \quad 0 \cdot a_4 = \frac{1}{3}B^2 \left(A + \frac{2}{9}B^2 \right).$$

Последнее из этих соотношений задает условие совместности, обеспечивающее произвольность a_4 . Оно выполняется только если $A = -2B^2/9$.

Если это условие не выполняется, произвольность a_4 можно восстановить, модифицировав подстановку (8.2.8). Такое модифицированное разложение,

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^{j-1} + b(z-z_0)^3 \ln(z-z_0), \quad (8.2.23)$$

приводит к тем же результатам при $j = 1, 2$ и 3 ; однако при $j = 4$ (что соответствует $(z-z_0)^3$) получаем

$$0 \cdot a_4 = \frac{1}{3}B^2 \left(A + \frac{2}{9}B^2 \right) + 5b.$$

Таким образом, если положить $15b = -B^2(A + 2B^2/9)$, то параметр a_4 снова становится произвольным. Понятно, что дополнительный член в (8.2.23) приводит к появлению различных степеней и комбинаций членов, содержащих $\ln(z-z_0)$. Для того, чтобы получить самосогласованное разложение, в котором все эти дополнительные члены скомпенсированы, ряд (8.2.23) необходимо обобщить в виде

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(z-z_0)^{j-1} ((z-z_0)^4 \ln(z-z_0))^k. \quad (8.2.24)$$

Полученный ряд известен как (логарифмический) *пси-ряд*. Он является локальным представлением общего решения уравнения (8.2.12) в окрестности подвижной особенности при $z = z_0$. В этом случае произвольными параметрами служат z_0 и a_{40} . Как следует из (8.2.24), особенность теперь представляет собой не подвижный полюс, а подвижную логарифмическую точку ветвления. Очевидно, что уравнение (8.2.12) обладает свойством Пенлеве только если $A = -2B^2/9$.

Существуют также другие разновидности пси-ряда. Предположим, что имеется о. д. у. второго порядка с ведущим порядком разложения, например, $\alpha = -1$, причем резонанс соответствует некоторой иррациональной степени $(z-z_0)$, скажем, β . В этом случае разложение имеет вид

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(z-z_0)^{j-1} \psi^k, \quad (8.2.25)$$

где $\psi = (z-z_0)^\beta$. Ряды (8.2.24) и (8.2.25) указывают на то, что решения соответствующих уравнений имеют очень сложную многостистую структуру в комплексной плоскости. Но оказывается, что несмотря на это можно провести подробный анализ этих рядов и существенно продвинуться в понимании природы решений (см. раздел 8.3.д).

8.2.г. Эллиптические функции и алгебраические кривые*

В первой главе мы ввели понятие эллиптической функции и записали дифференциальное уравнение для эллиптических функций Вейерштрасса в стандартном

виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \quad (8.2.26)$$

Ему соответствует квадратура

$$t - t_0 = \int^x \frac{dx'}{\sqrt{4(x' - e_1)(x' - e_2)(x' - e_3)}}, \quad (8.2.27)$$

где факторизована кубическая форма. Корни e_1 , e_2 и e_3 связаны с g_2 и g_3 стандартным соотношением (1.2.20). Квадратура (8.2.27) задает t как бесконечнозначную функцию от x . Обратное соотношение $x = \mathcal{P}(t)$ представляет собой не что иное как эллиптическую функцию Вейерштрасса. Как уже говорилось в первой главе, $\mathcal{P}(t)$ представляет собой двоякопериодическую функцию комплексной переменной t , особенности которой образуют регулярную решетчатую структуру. Используя описанный выше метод локального анализа, легко показать, что особенности $\mathcal{P}(t)$ являются полюсами второго порядка.

Дальнейшую информацию можно получить, рассматривая подынтегральное выражение (8.2.27) в комплексной x -плоскости. Оно, очевидно, имеет три точки ветвления при $x = e_i$, $i = 1, 2, 3$. Если две из этих точек объединить друг с другом, а третью — с точкой на бесконечности, то на комплексной плоскости возникнет два разреза. Стандартная процедура «разрезания и склеивания» показывает, что соответствующая риманова поверхность может быть свернута в двумерный тор с одним отверстием. Мы назовем такую поверхность поверхностью *первого рода*. Таким образом мы переходим в область алгебраической геометрии. Здесь данной римановой поверхности может быть сопоставлен неприводимый многочлен, который в свою очередь определяет *алгебраическую кривую*⁸⁾. В случае поверхности первого рода каноническая форма соответствующей кривой имеет вид

$$r^2 = 4s^3 - g_2s - g_3. \quad (8.2.28)$$

Определив $r = \frac{d\mathcal{P}}{dt}$ и $s = \mathcal{P}(t)$, мы убеждаемся, что эта кривая в точности соответствует уравнению (8.2.26). Кривые типа (8.2.28) называются *эллиптическими кривыми*. Они обладают тем важным свойством, что координаты r и s являются мероморфными функциями некоторого параметра t . Это в точности согласуется с выводами, которые могут быть сделаны на основании нашего локального анализа, согласно которому $\mathcal{P}(t)$ имеет только подвижные полюсы.

Как эллиптические функции Вейерштрасса, так и эллиптические функции Якоби являются мероморфными (по t) функциями и могут быть легко сопоставлены с эллиптическими кривыми. Рассмотрим уравнение (1.2.1), правая часть которого представляет собой многочлен пятой степени; мы обозначим его через $f_5(x)$. Локальный анализ показывает, что подвижные особенности в этом случае представляют собой точки ветвления типа квадратного корня. Соответствующая квадратура записывается в этом случае в виде гиперэллиптического интеграла

$$t - t_0 = \int^x \frac{dx'}{\sqrt{f_6(x')}}, \quad (8.2.29)$$

где f_6 — многочлен шестой степени, получающийся из f_5 . Соответствующая риманова поверхность является поверхностью второго рода — тор с двумя дырками.

⁸⁾ Неплохое изложение этого круга идей можно найти в [2].

Связанная с ней алгебраическая кривая (гиперэллиптическая кривая) уже не может быть параметризована в терминах мероморфных функций. Вместе с тем, как показал Якоби, определенные симметричные комбинации гиперэллиптических интегралов имеют мероморфные обратные функции.

Теория гиперэллиптических интегралов и их обращений может быть представлена в весьма абстрактном виде и обобщена на случай большого числа измерений. Интегралы (8.2.27) и (8.2.29) представляют собой частные случаи так называемых *абелевых интегралов*⁹⁾.

Связанные с ними римановы поверхности называют *абелевыми многообразиями*; определенные комбинации переменных, называемые *абелевыми функциями*, являются мероморфными функциями. В настоящее время представляется, что эти понятия играют фундаментальную роль в определении интегрируемости динамических систем и в объяснении того, почему свойство Пенлеве — впервые использованное Ковалевской, — может служить тестом на интегрируемость.

8.3. Интегрируемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

8.3.а. Система Хенона—Хейлеса

Покажем, каким образом интегрируемые случаи гамильтониана Хенона—Хейлеса (8.1.1) могут быть найдены с использованием свойства Пенлеве. Для этого удобно записать уравнение движения в ньютоновой форме:

$$\ddot{x} = -Ax - 2Dxy, \quad (8.3.1a)$$

$$\ddot{y} = -By - Dx^2 + Cy^2, \quad (8.3.1b)$$

где точка означает $\frac{d}{dt}$. Начнем с анализа ведущего члена, положив

$$x = a(t - t_0)^\alpha, \quad y = b(t - t_0)^\beta, \quad (8.3.2)$$

где предполагается, что α и $\beta < 0$. Линейные члены не влияют на баланс в особой точке t_0 , и, следовательно,

$$a\alpha(\alpha - 1)(t - t_0)^{\alpha-2} = -2Dab(t - t_0)^{\alpha+\beta}, \quad (8.3.3a)$$

$$b\beta(\beta - 1)(t - t_0)^{\beta-2} = -Da^2(t - t_0)^{2\alpha} + Cb^2(t - t_0)^{2\beta}. \quad (8.3.3b)$$

Из этих уравнений непосредственно следует возможность существования двух различных типов ведущих членов ($\lambda = D/C$):

$$\text{случай (1): } \alpha = -2, \quad a = \pm \frac{3}{D} \sqrt{2 + 1/\lambda},$$

$$\beta = -2, \quad b = -\frac{3}{D}$$

и, если предположить, что $\beta < \alpha < 0$,

⁹⁾ В честь выдающегося норвежского математика Нильса Абея (1802-1829), который умер в бедности и практически в неизвестности, не дожив до 27 лет.

случай (2): $\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 48\lambda}$, a — произвольно,

$$\beta = -2, \quad b = \frac{6}{c}.$$

Приведенные выражения для α получаются в результате приравнивания коэффициентов в (8.3.3а) (при условии, что β и b предварительно определены из (8.3.3б)). В случае (2) α имеет два корня. Но при этом в силу того, что для данных уравнений движения поведение не может быть более сингулярным, чем $(t - t_0)^{-2}$, оба корня существуют лишь при $\lambda > -1/2$.

Уже на этом этапе анализ ведущего члена дает полезную информацию. Когда речь идет о свойстве Пенлеве (состоящем в том, что подвижные особенности являются полюсами), он позволяет выделить те значения λ , при которых α в случае (2) целые. Как правило α иррационально, а при $\lambda > 1/48$ комплексно. Отметим, что в случае исходной системы Хенона—Хейлеса ($A = B = C = D = 1$) $\alpha = (1 \pm i\sqrt{47})/2$. Оказывается, что такие комплексные особенности порождают замечательную сложную структуру в комплексной t -плоскости.

Обе ветви решения (случай (1) и случай (2)) необходимо проверить на свойство Пенлеве. На этом этапе еще не ясно, какая из ветвей соответствует общему решению, а какая — особому (если таковое должно существовать). Следующий шаг — анализ резонансов. Положим для случая (1)

$$x = \pm \frac{3}{D} \sqrt{2 + 1/\lambda} t^{-2} + p t^{r-2},$$

$$y = -\frac{3}{D} t^{-2} + q t^{r-2},$$

где p и q — произвольные параметры. Записав линейные уравнения для p и q исходя из наиболее сингулярных членов уравнений (8.3.1), находим, что резонансы возникают при

$$r = -1, 6, \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 24(1 + 1/\lambda)}. \quad (8.3.4)$$

Поскольку (8.3.1) — уравнения четвертого порядка, локальное разложение общего решения должно содержать четыре произвольных параметра. Один из них — это положение особой точки t_0 (соответствующее резонансу при $r = -1$), второй соответствует $r = 6$, а остальные два определяются значением λ . Оба они одновременно положительны при условии $\lambda > 0$ или $\lambda < -1/2$. В интервале $-1/2 < \lambda < 0$ существует только три положительных резонанса, и, таким образом, случай (1) должен соответствовать особому решению. Более того, если потребовать, чтобы все резонансы были целочисленными (в надежде получить обладающее свойством Пенлеве решение), то уравнение (8.3.4) налагает дальнейшие ограничения на допустимые значения λ . Эти значения нетрудно найти: (а) $\lambda = -1$, $r = -1, 2, 3, 6$, (б) $\lambda = -1/2$, $r = -1, 0, 5, 6$ и (в) $\lambda = -1/6$, $r = -3, -1, 6, 8$; последнее из них соответствует особому решению.

Для анализа резонансов в случае (2) положим

$$x = a t^{\alpha_{\pm}} + p t^{r+\alpha_{\pm}},$$

$$y = \frac{6}{C} t^{-2} + q t^{r-2},$$

где $\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 48\lambda}$ и a произвольно. Отметим также, что наиболее сингулярные члены имеют вид

$$\ddot{x} = -2Dxy, \quad (8.3.5a)$$

$$\ddot{y} = Cy^2. \quad (8.3.5b)$$

В этом случае резонансы возникают при

$$r = -1, 0, 6, \mp \sqrt{1 - 48\lambda}. \quad (8.3.6)$$

Резонанс при $r = 0$ соответствует произвольности коэффициента a ; знак $\mp$ означает выбор α_+ или α_- соответственно. Теперь четырехпараметрические решения существуют только при $\lambda > -1/2$. Целочисленные резонансы могут возникать (как и в предыдущем случае) лишь при некоторых значениях λ .

В результате анализа ведущего члена и резонансов круг значений λ , при которых решения имеют целочисленные ведущие порядки и резонансы в *обоих* случаях (1) и (2), существенно сузился. Эти значения таковы: $\lambda = -1, -1/2$ и $-1/6$. Соответствующая структура резонансов представлена в таблице.

	Случай (1)		Случай (2)	
λ	Ведущие порядки	Резонансы	Ведущие порядки	Резонансы
-1	$\beta = -2$ $\alpha = -2$	$r = -1, 2, 3, 6$	$\beta = -2$ $\alpha_- = -3$ $\beta = -2$ $\alpha_+ = 4$	$r = -1, 0, 6, 7$ $r = -7, -1, 0, 6$
$-1/2$	$\beta = -2$ $\alpha = -2$	$r = -1, 0, 5, 6$	$\beta = -2$ $\alpha_- = -2$ $\beta = -2$ $\alpha_+ = 3$	$r = -1, 0, 5, 6$ $r = -5, -1, 0, 6$
$-1/6$	$\beta = -2$ $\alpha = -2$	$r = -3, -1, 6, 8$	$\beta = -2$ $\alpha_- = -1$ $\beta = -2$ $\alpha_+ = 2$	$r = -1, 0, 3, 6$ $r = -3, -1, 0, 6$

Читатель, вероятно, отметил определенную специфику в случае $\lambda = -1/2$. Резонанс при $r = 0$ (случай (1)) соответствует обращению в ноль коэффициента при ведущем члене $a = \pm \frac{3}{2} \sqrt{2 + 1/\lambda}$. С учетом того, что исходная подстановка имела вид $x(t) = a(t - t_0)^{-2}$ в главном порядке, возникает противоречие. Оказывается, что ведущий порядок не равен -2 , а включает логарифмические члены¹⁰. В результате остаются лишь две варианта, характеризующихся свойством Пенлеве. При $\lambda = -1$ особенности случая (1) соответствуют общему решению, а особенности случая (2) ($\beta = -2, \alpha_+ = 4$) — особому решению. При $\lambda = -1/6$, напротив, случай (1) соответствует особому решению, а случай (2) ($\beta = -2, \alpha_- = -1$) — общему.

¹⁰ В этом случае несколько более сложным методом можно показать (положив $t_0 = 0$ для удобства записи), что ведущему члену соответствуют

$$x = \left(\frac{15}{2D^2} \right)^{1/2} t^{-2} (\ln t)^{-1/2} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{D} t^{-2} - \left(\frac{5}{4D} \right) t^{-2} (\ln t)^{-1}.$$

Для того, чтобы убедиться в однозначности решений, необходимо проверить непротиворечивость полного набора рекуррентных соотношений в точках резонансов. В случае $\lambda = -1$ для общего решения используем подстановку

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-2}, \quad (8.3.7a)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j-2} \quad (8.3.7b)$$

(полагая для простоты $t_0 = 0$). Рекуррентные соотношения имеют вид (при условии $C = -D$ в уравнении (8.3.16))

$$\begin{bmatrix} (j-2)(j-3) - 6 & \pm 6 \\ \pm 6 & (j-2)(j-3) - 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Aa_{j-2} - 2D \sum_{l=1}^{j-1} a_{j-l}b_l \\ -Bb_{j-2} - D \sum_{l=1}^{j-1} (a_{j-l}a_l + b_{j-l}b_l) \end{bmatrix}. \quad (8.3.8)$$

Выбирая $a_0 = \pm 3/D$ и $b_0 = -3/D$, находим:

$$j = 1: \quad a_1 = b_1 = 0,$$

$$j = 2: \quad \begin{bmatrix} -6 & \pm 6 \\ \pm 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp 3 \frac{A}{D} \\ +3 \frac{B}{D} \end{bmatrix}.$$

Детерминант матрицы в левой части обращается в ноль, что соответствует резонансу при $j = 2$. Нулевой вектор этой матрицы имеет вид $[1, \pm 1]$, и, таким образом, для произвольности a_2 и b_2 необходимо потребовать, чтобы

$$[1, \pm 1] \begin{bmatrix} \mp 3 \frac{A}{D} \\ +3 \frac{B}{D} \end{bmatrix} = 0.$$

Это соотношение представляет собой условие совместности и выполняется только при $A = B$. Если это не так, то для обеспечения произвольности этих коэффициентов ряд должен включать логарифмические члены. Рекуррентные соотношения должны быть проверены вплоть до $j = 6$, чтобы убедиться, что условия совместности удовлетворяются также в случае резонансов $j = 3$ и $j = 6$. Показать, что это действительно так, не составляет труда. Аналогично можно доказать однозначность особого решения (случай (2)). В итоге приходим к заключению, что при $\lambda = -1$ система Хенона—Хейлеса обладает свойством Пенлеве при условии, что $A = B$. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = -Ax - 2Dxy, \quad (8.3.9a)$$

$$\ddot{y} = -Ay - D(x^2 + y^2). \quad (8.3.9b)$$

В новых переменных $u = x + y$, $v = x - y$ они распадаются на пару независимых уравнений

$$\ddot{u} = -Au - 2Du^2, \quad (8.3.10a)$$

$$\ddot{v} = -2v + 2Dv^2, \quad (8.3.10b)$$

каждое из которых может быть легко проинтегрировано в терминах эллиптических функций.

При $\lambda = -1/6$ общее решение отвечает случаю (2), а соответствующие ряды

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-1}, \quad (8.3.11a)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j-2} \quad (8.3.11b)$$

необходимо проверить на совместность в случае резонансов $r = 3$ и 6 , поскольку резонанс $r = 0$ уже гарантирован. Установлено, что в этом случае непротиворечивость рекуррентных соотношений не требует никаких дополнительных условий. Аналогичный результат получается и для особого решения в случае (1). Таким образом, при $\lambda = -1/6$ система Хенона—Хейлеса обладает свойством Пенлеве, и гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + Ax^2 + By^2) + Dx^2y + 2Dy^3 \quad (8.3.12)$$

интегрируем при любых A и B . Проверить это предсказание не так легко, как в предыдущем случае; для этого нужно отыскать второй интеграл, который имеет вид

$$F = x^4 + 4x^2y^2 - 4\dot{x}(\dot{x}y - \dot{y}x) + 4Ax^2y + (4A - B)(\dot{x}^2 + Ax^2). \quad (8.3.13)$$

(Оказывается также, что уравнения движения разделяются в параболических координатах.)

8.3.6. Интегрируемые системы с подвижными точками ветвления

Существование у системы свойства Пенлеве означает, что ее решение (решения) должно располагаться на единственной римановой поверхности с произвольным числом изолированных подвижных полюсов. Это условие может оказаться слишком жестким для установления интегрируемости, и мы ослабим его, допустив *рациональность* подвижных точек ветвления. Эта идея будет проиллюстрирована на примере системы Хенона—Хейлеса в интервале $-1/2 < \lambda < 0$. При этом четырьмя произвольными параметрами обладают только особенности случая (2). Для того, чтобы соответствующие резонансы были рациональными числами, необходимо, как следует из (8.3.6), чтобы

$$\lambda = \frac{1}{48} \left(1 - \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right), \quad 1 < \frac{m}{n} < 5. \quad (8.3.14)$$

Это приводит к следующим ведущим порядкам:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{n} \right), \quad \beta = -2 \quad (8.3.15)$$

и резонансам:

$$r = -1, 0, \frac{m}{n}, 6. \quad (8.3.16)$$

Сюда, конечно, входит и уже известный нам интегрируемый случай $\lambda = -1/6$, соответствующий $m/n = 3$. Для этих специальных значений λ (8.3.14) мы можем

записать подстановку таким образом, что в окрестности подвижной особенности (скажем, при $t_0 = 0$) разложения приобретают вид

$$x(t) = t^{-(m-n)/2n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j/n}, \quad (8.3.17a)$$

$$y(t) = t^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j/n}. \quad (8.3.17b)$$

Для того, чтобы они были верны, условия совместности должны выполняться для резонансов при $j = m$ и $j = 6n$ (для резонанса при $r = 0$ они удовлетворяются автоматически). Оказывается, что оба условия совместности удовлетворяются только при $m/n = 2$, что соответствует $\lambda = -1/16$ при условии $B = 16A$ (это условие возникает для первого резонанса). Таким образом, в этом случае локальные разложения принимают вид

$$x(t) = t^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j, \quad (8.3.18a)$$

$$y(t) = t^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j. \quad (8.3.18b)$$

Кроме того, соответствующее трехпараметрическое решение, отвечающее особенностям случая (1), однозначно и имеет резонансы при $r = -7, -1, 6, 12$. Общее решение (8.3.18a) имеет изолированные точки ветвления типа квадратного корня, и при «локальной» замене переменной $\tau^2 = t$ разложение становится однозначным по τ . Но наряду с этим мы можем в данном конкретном случае осуществить «глобальную» замену переменной $X = x^2$ и сделать таким образом решение однозначным по переменным (X, y) . Полученные результаты позволяют предсказать интегрируемость гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + Ax^2 + 16Ay^2) + x^2y + \frac{16}{3}y^3. \quad (8.3.19)$$

Это было независимо подтверждено Холлом [12], который нашел второй интеграл,

$$G = \frac{1}{4}p_x^4 + \left(\frac{1}{2}x^2 + 4x^2y\right)p_x^2 - \frac{4}{3}x^3p_xp_y + \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^4y - \frac{8}{9}x^6 - \frac{16}{3}x^4y^2. \quad (8.3.20)$$

Утверждение, что системы с рациональными точками ветвления — которые не обязательно должны преобразовываться к «локальным» или «глобальным» однозначным решениям — могут в некоторых случаях быть интегрируемыми, получило название *слабого свойства Пенлеве*. К настоящему времени найдено много примеров интегрируемых систем, обладающих слабым свойством Пенлеве. Вопрос о том, почему свойство Пенлеве и слабое свойство Пенлеве могут указывать на интегрируемость системы, мы обсудим вкратце в разделе 8.3.г.

8.3.в. Система Лоренца

Перейдем к рассмотрению негамильтоновой динамической системы (8.1.2) и покажем, что в этом случае свойство Пенлеве также применимо для установления

интегрируемых случаев. Для анализа ведущего члена разложения положим

$$x(t) = a_0(t - t_0)^\alpha, \quad y(t) = b_0(t - t_0)^\beta, \quad z(t) = c_0(t - t_0)^\gamma,$$

и легко находим, что

$$\begin{aligned} \alpha &= -1, & \beta &= -2, & \gamma &= -2, \\ a_0 &= \mp 2i, & b_0 &= \pm \frac{2i}{\sigma}, & c_0 &= -\frac{2}{\sigma}. \end{aligned}$$

Анализ резонансов показывает, что резонансы имеют место при

$$r = -1, 4, 6.$$

Таким образом, в случае системы Лоренца ведущие порядки и резонансы не зависят от параметров системы. Используя подстановку

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-1}, \quad (8.3.21a)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j-2}, \quad (8.3.21b)$$

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-2}, \quad (8.3.21в)$$

находим рекуррентные соотношения

$$\begin{bmatrix} (j-1) & -\sigma & 0 \\ -\frac{2}{\sigma} & (j-2) & 2i \\ -\frac{2i}{\sigma} & -2i & (j-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma a_{j-1} \\ Ra_{j-2} - b_{j-1} - \sum_{l=1}^{j-1} a_{j-l} c_l \\ -Bc_{j-1} + \sum_{l=1}^{j-1} a_{j-l} b_l \end{bmatrix}. \quad (8.3.22)$$

При $j = 1$

$$a_1 = -\frac{i}{3}(1 + 2B - 3\sigma), \quad b_1 = 2i, \quad c_1 = \frac{2}{3\sigma}(3\sigma + 1 - B). \quad (8.3.23)$$

При $j = 2$ соответственно

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sigma & 0 \\ -\frac{2}{\sigma} & 0 & 2i \\ \frac{2i}{\sigma} & -2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma a_1 \\ Ra_0 - b_1 - a_1 c_1 \\ -Bc_1 + a_1 b_1 \end{bmatrix}.$$

Детерминант матрицы в левой части обращается в ноль, что соответствует появлению резонанса при данном порядке. Умножение на нулевой вектор $[2i/\sigma, 0, -1]$ дает условие совместности

$$B(B-1) - 6\sigma^2 + 2\sigma + B\sigma = 0, \quad (8.3.24)$$

которое удовлетворяется, если

$$B = 2\sigma \quad \text{или} \quad B = 1 - 3\sigma. \quad (8.3.25)$$

В случаях $j = 3$ и $j = 4$ анализ становится более сложным; окончательным результатом является условие совместности при $j = 4$, которое имеет вид

$$a_3c_1 + a_2c_2 + a_1c_3 - Ra_2 + b_3 + ia_3b_1 + ia_2b_2 + ia_1b_3 - iBc_3 = 0. \quad (8.3.26)$$

Подставляя a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) в явном виде, получаем условие совместности в терминах параметров системы B, σ и R . Заметим при этом, что (8.3.26) содержит члены, включающие произвольные параметры a_2, b_2, c_2 . В результате этого условие (8.3.26) распадается на две части — одна группа членов не зависит от произвольного параметра, соответствующего $j = 2$, тогда как все члены второй группы умножаются на такой параметр. Для того, чтобы условие (8.3.26) удовлетворялось, обе группы членов должны обращаться в ноль независимо. (Более подробно это рассмотрено в [16]). Оба условия совместности выполняются одновременно при трех наборах значений параметров (исключая тривиальный случай $\sigma = 0$):

$$(a) \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad R = 0, \quad (8.3.27a)$$

$$(б) \quad \sigma = 1, \quad B = 2, \quad R = \frac{1}{9}, \quad (8.3.27б)$$

$$(в) \quad \sigma = \frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad R \text{ произвольно.} \quad (8.3.27в)$$

В первом из этих случаев уравнения интегрируются непосредственно, что является превосходным примером использования зависящих от времени интегралов. Записав уравнения в виде

$$\dot{x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y, \quad (8.3.28a)$$

$$\dot{y} + y = -xz, \quad (8.3.28б)$$

$$\dot{z} + z = xy, \quad (8.3.28в)$$

заметим, что умножение уравнения (8.3.28a) на $2x$ и последующее вычитание из (8.3.28в) дает

$$\frac{d}{dt}(z - x^2) = -(z - x^2).$$

Таким образом, получаем зависящий от времени интеграл

$$I_1 = z - x^2 = Ae^{-t}. \quad (8.3.29)$$

Далее, умножаем (8.3.28б) на y , а (8.3.28в) на z ; сумма дает второй интеграл

$$I_2 = y^2 + z^2 = Be^{-2t}. \quad (8.3.30)$$

С помощью этих двух интегралов исходная система третьего порядка может быть сведена к единственной квадратуре. В результате замены переменных

$$u = xe^{t/2}, \quad v = ye^t, \quad w = ze^t$$

оба интеграла перестают зависеть от времени:

$$I_1 = w - u^2 = A, \quad (8.3.31a)$$

$$I_2 = v^2 + w^2 = B. \quad (8.3.31б)$$

Исключение w из этих двух соотношений дает

$$v = \sqrt{(B - A^2) - 2A^2u^2 - u^4}. \quad (8.3.32)$$

В новых переменных исходная система уравнений (8.3.28) приобретает вид

$$\dot{u} = \frac{1}{2}ve^{-t/2}, \quad (8.3.33a)$$

$$\dot{v} = -uve^{-t/2}, \quad (8.3.33б)$$

$$\dot{w} = -uve^{-t/2}. \quad (8.3.33в)$$

Подставляя в (8.3.33a) выражение для v в виде (8.3.32), приходим к квадратуре

$$\int_u^u \frac{du'}{\sqrt{(B - A^2) - 2A^2u'^2 - u'^4}} = 2 \int e^{-t'/2} dt', \quad (8.3.34)$$

которая может быть разрешена в терминах эллиптических функций Якоби. Эволюция остальных переменных определяется тривиальным образом из (8.3.32a) и (8.3.32б).

Интегрирование уравнений Лоренца в случае других наборов значений параметров (8.3.27б) и (8.3.27в) несколько сложнее. Сегур [15] показал, каким образом это может быть сделано в терминах второго и третьего типов уравнений Пенлеве соответственно.

Интересно отметить, что если $B = 2\sigma$ и R произвольно, то один зависящий от времени интеграл, а именно

$$I_1 = 2\sigma z - x^2 = Ae^{-2\sigma t}, \quad (8.3.35)$$

может быть найден всегда. За исключением случаев $R = 0$ и $R = 1/9$, система не обладает свойством Пенлеве. Но при этом существование приведенного выше интеграла достаточно, чтобы исключить возможность хаотического поведения, даже если он и не обеспечивает полного интегрирования в квадратурах. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $B = 1$, $R = 0$, σ произвольно. При этом соответствующий интеграл имеет вид

$$I_1 = y^2 + z^2 = e^{-2t}. \quad (8.3.36)$$

8.3.г. Почему «работает» свойство Пенлеве?

Похоже, что свойство Пенлеве (и слабое свойство Пенлеве) является непосредственным тестом на интегрируемость системы. Однако доказательства этого утверждения до сих пор не существует. За последние годы удалось несколько продвинуться в этом направлении, что потребовало привлечения сложных понятий алгебраической геометрии, введенных в разделе 8.2.г. Но наряду с этим может оказаться полезным следующее простое рассуждение. Согласно теореме Лиувилля, если $f(z)$ является целой ограниченной функцией z , то она может принимать лишь одно значение, т. е.

$$f(z) = c. \quad (8.3.37)$$

Другими словами, $f(z)$ должна быть постоянной. Далее, из независимости интегралов движения от времени следует, что они представляют собой целые функции

комплексной переменной t . В случае относительно узкого класса интегрируемых гамильтоновых систем, называемых *алгебраически интегрируемыми*, интегралы являются многочленами от канонических переменных, т. е. имеют вид

$$I = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \prod_{i=1}^N p_i^{n_i} q_i^{m_i}, \quad (8.3.38)$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ — N -мерные вектора $(n_1, \dots, n_N)$, $(m_1, \dots, m_N)$ и N — число степеней свободы. Отдельные p_i и q_i могут иметь подвижные особенности различных типов. Но для постоянства I необходимо, чтобы все сингулярные члены суммы (8.3.38) сокращались в любой особой точке t_0 . Для многочленов указанного вида это возможно лишь в том случае, если локальные разложения для p_i и q_i соответствуют полюсам или рациональным точкам ветвления. Понятно, что если разложения для канонических переменных содержат иррациональные, комплексные или иные многозначные степени $(t - t_0)$, то (в общем случае) невозможно построить многочлен, в котором степени уничтожались бы. (Заметим, что сама гамильтонова функция будет, разумеется, всегда целой (т. е. постоянной) функцией.)

Очевидно, что приведенные рассуждения справедливы лишь для интегралов типа многочлена. Не исключено, что в случае гамильтонианов, интегралы которых представляют собой иррациональные или трансцендентные функции от канонических переменных, свойство Пенлеве не будет служить подходящим свойством на интегрируемость. Аналитическая структура таких систем составляет предмет современных исследований.

8.3.д. Структура сингулярностей неинтегрируемых систем*

Рассмотрим вкратце некоторые чрезвычайно сложные структуры, которые могут возникать в комплексной плоскости в случае неинтегрируемых систем, хотя эта тема и выходит за рамки данной книги. Один из примеров — система Хенона—Хейлеса при $\lambda = 1$ (т. е. в первоначальном виде). Особенности случая (1) этой системы имеют следующие ведущие порядки:

$$\alpha = -2, \quad \beta = -2$$

и резонансы:

$$r = -1, \quad \frac{5}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{47}, \quad 6.$$

Для особенностей случая (2):

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{47}, \quad \beta = -2, \\ r = -1, \quad 0, \mp i\sqrt{47}, \quad 6.$$

Таким образом, в общем (четырепараметрическом) решении могут появляться оба типа особенностей. Отметим, что ведущий порядок в случае (2) совпадает с резонансом случая (1). Это, как оказалось, может иметь место лишь при значениях λ , равных $+1$ и $-1/2$, в чем можно убедиться, решив уравнение $\sqrt{1 - 48\lambda} = \sqrt{1 - 24(1 + 1/\lambda)}$. Численные расчеты [10] показали, что в комплексной t -плоскости особенности группируются в *подобные в себе* спирали. В результате образуются чрезвычайно сложные

распределения сингулярностей фрактального типа. Такие повторяющиеся себя на разных масштабах скопления особенностей образуют в комплексной t -плоскости *естественную* границу, за которую решение не может быть аналитически продолжено. Локальное разложение в окрестности данной комплексной особенности может быть формально представлено как пси-ряд, имеющий (для особенностей случая (1)) вид

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} t^{j-2} \tau^k + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{jk} t^{j-2} \bar{\tau}^k, \quad (8.3.39a)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} t^{j-2} \tau^k + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_{jk} t^{j-2} \bar{\tau}^k, \quad (8.3.39б)$$

где

$$\tau = t^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 24 \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)},$$

$$\bar{\tau} = t^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 24 \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Аналогичные формальные разложения могут быть записаны и для особенностей в случае (2). Необходимо подчеркнуть, что разложения (8.3.39) «формальные» в том смысле, что неясно (из-за повторяющихся скоплений особенностей), имеют ли они конечный радиус сходимости. Тем не менее оказалось, что подробный анализ этих разложений позволяет точно установить геометрию наблюдаемых сингулярных структур.

В случае уравнений Лоренца неинтегрируемые случаи описываются логарифмическими рядами вида

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} t^{j-1} \tau^k, \quad (8.3.40a)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} t^{j-2} \tau^k, \quad (8.3.40б)$$

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} t^{j-2} \tau^k, \quad (8.3.40в)$$

где

$$\tau = t^2 \ln t, \quad (8.3.41)$$

если условия совместности не выполняются уже для первого резонанса, и

$$\tau = t^4 \ln t, \quad (8.3.42)$$

если условия совместности нарушаются в первый раз для второго резонанса. Численный анализ [13] уравнения Лоренца и тесно связанного с ним уравнения Дюффинга показал, что повторяющиеся скопления сингулярностей образуют в этом случае в комплексной t -плоскости n -конечные звезды, причем $n = 2$ в случае (8.3.41) и $n = 4$ в случае (8.3.42). Эти структуры также могут быть предсказаны аналитически. Более того, весьма подробный анализ логарифмических пси-рядов, который вполне может быть осуществлен аналитически, дает очень интересное представление о свойствах соответствующего неинтегрируемого движения.

8.4. Свойство Пенлеве дифференциальных уравнений в частных производных

Обсуждая результаты, которые могут быть получены путем анализа структуры особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений, естественно задаться вопросом, нельзя ли аналогичный подход использовать в случае дифференциальных уравнений в частных производных. Было бы, в частности, чрезвычайно полезно, если бы удалось сформулировать некий аналог свойства Пенлеве для проверки интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных. Очевидная трудность здесь связана с тем, что решения у. ч. п. представляют собой функции по крайней мере двух независимых переменных, и построить аналитические продолжения для таких функций не столь просто, как в случае единственной комплексной переменной. Решение этой проблемы будет изложено в этом разделе кратко — мы ограничимся рассмотрением простого подхода.

Обсуждая в главе 7 солитонные уравнения, мы уделили значительное внимание (и существенно использовали) различным вариантам сведения соответствующих у. ч. п. к о. д. у. Так, например, уравнение КдФ сводится к эллиптическому о. д. у. с помощью преобразования бегущей волны и к уравнению Пенлеве с помощью автомодельного преобразования. В действительности читатель может заметить, что практически все рассмотренные в главе 7 интегрируемые уравнения сводятся к о. д. у., обладающим свойством Пенлеве. Именно такое наблюдение привело Абловица, Рамани и Сегура (АРС) [22] к предположению, что «нелинейное у. ч. п. разрешимо посредством обратного преобразования рассеяния лишь в том случае, если каждое из нелинейных о. д. у., полученных с помощью точного преобразования (редукции), обладает свойством Пенлеве». (Это предположение допускает замену переменных в о. д. у. при проверке на свойство Пенлеве.) Другими словами, проверить интегрируемость у. ч. п. (в смысле существования ОПР) — это значит убедиться в существовании свойства Пенлеве у *всех* возможных редукций к о. д. у. К сожалению все такие возможные редукции не известны, по-видимому, ни в одном случае. И тем не менее гипотеза АРС подразумевает, что некоторый тип мероморфности у. ч. п. связан с их интегрируемостью. Поэтому было бы желательно иметь средство непосредственной проверки этого свойства у. ч. п., не предполагающее сведения к о. д. у.

8.4.a. Обобщенное разложение Лорана

Основное различие между аналитическими функциями одной и нескольких комплексных переменных состоит в том, что во втором случае особенности не могут быть изолированы. Оказывается, что если $f(z_1, \dots, z_n)$ является мероморфной функцией n комплексных переменных z_i ($i = 1, \dots, n$), то особенности f лежат на аналитическом многообразии размерности $2n - 2$. Такие многообразия, которые мы будем называть *сингулярными многообразиями*, определяются условиями вида

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad (8.4.1)$$

где ϕ — аналитическая в окрестности многообразия функция.

Существование таких сингулярных многообразий подсказывает способ обобщения понятия ряда Лорана на случай функций большого числа комплексных переменных. Так, в случае аналитической функции $u = u(z_1, \dots, z_n)$ Вейсс с соавт. [29]

предложили записывать обобщенное разложение Лорана в виде

$$u(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\phi^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j, \quad (8.4.2)$$

где

$$\phi = \phi(z_1, \dots, z_n) \quad (8.4.3)$$

и

$$u_j = u_j(z_1, \dots, z_n) \quad (8.4.4)$$

аналитические функции от $z_1, \dots, z_n$ в окрестности многообразия (8.4.1), а α принимает целочисленные значения. Аналогию с обычным рядом Лорана в случае одной переменной легко усмотреть, положив $\phi(z) = z - z_0$ и рассматривая u_j как (постоянные в этом случае) коэффициенты разложения. Если справедливость разложения (8.4.2) может быть обоснована, то мы можем утверждать, что u «однозначна» в окрестности произвольного подвижного сингулярного многообразия (8.4.1). В этом смысле мы можем использовать разложение (8.4.2), чтобы определить «свойство Пенлеве» для решений у. ч. п.

Важное (и полезное) свойство функции ϕ состоит в том, что ее градиенты не должны обращаться в ноль на самом сингулярном многообразии. Рассмотрим, например, ϕ как функцию двух переменных x и t . Сингулярное многообразие в этом случае определяется соотношением

$$\phi(x, t) = 0. \quad (8.4.5)$$

Теорема существования неявной функции утверждает, что вблизи этой поверхности ϕ может быть представлена как

$$\phi(x, t) = x - \psi(t), \quad (8.4.6)$$

где

$$\phi(\psi(t), t) = 0, \quad (8.4.7)$$

при условии, что

$$\phi_x(x, t) \neq 0 \quad (8.4.8)$$

на (8.4.5). Аналогично, записав разложение $\phi(x, t)$ вблизи (8.4.5) в виде $\phi = t - \theta(x)$, мы должны потребовать $\phi_t(x, t) \neq 0$ для того, чтобы $\phi(x, \theta(x)) = 0$.

Существование у данного (нелинейного) у. ч. п. обобщенного свойства Пенлеве проверяется аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя (8.4.2) в рассматриваемое у. ч. п., определяем возможные значения α и рекуррентные соотношения для u_j . Заметим, что поскольку u_j являются функциями z_i , эти рекуррентные соотношения представляют собой в данном случае связанные у. ч. п., содержащие u_j и ϕ . Так же, как и в случае о. д. у., при некоторых степенях ϕ соответствующие u_j будут произвольны (резонансы). Существование этих резонансов вытекает из теоремы Коши—Ковалевской для у. ч. п., которая утверждает, что локальное разложение общего решения должно иметь столько произвольных функций, каков порядок уравнения. Если резонансу не соответствует произвольная u_j , то это означает, что подстановка (8.4.2) не подходит, и для обеспечения требуемой произвольности необходимо использовать некоторый вариант обобщенного пси-ряда. Начальные стадии обсуждаемого подхода можно упростить, если вначале провести исследование, аналогичное анализу ведущего члена и резонансов. Это позволяет быстро выявить различные типы особенностей, а также определить, какие из них

отвечают общим и какие особым решениям. После этого анализ становится более сложным, чем в случае о. д. у., в силу того, что рекуррентные соотношения для u_j представляют собой системы связанных у. ч. п. Однако эту трудность можно преодолеть, используя теорему существования неявной функции. Так, в случае двумерной задачи $u(x, t)$ мы полагаем $\phi = x - \psi(t)$, и коэффициенты разложения $u_j(x, t)$ сводятся к функциям, зависящим лишь от t (т. е. $u_j = u_j(t)$). Такое преобразование существенно упрощает использование рекуррентных соотношений. Но вместе с тем ниже мы увидим, что использование полных разложений дает гораздо более полную информацию, чем просто тест на однозначность.

8.4.6. Примеры свойства Пенлеве для у. ч. п.

В качестве простой иллюстрации обсуждаемого метода рассмотрим уравнение Бюргерса,

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \quad (8.4.9)$$

Хотя это уравнение и не обладает солитонными решениями, его можно рассматривать как «интегрируемое» в силу того, что оно может быть точно линеаризовано (и тем самым решено) с помощью преобразования Хопфа—Коле¹¹⁾. Анализ ведущего члена проводим, полагая

$$u = u_0 \phi^\alpha \quad (8.4.10)$$

и уравновешивая наиболее сингулярные члены uu_x и u_{xx} . Это приводит к

$$\alpha = -1 \quad \text{и} \quad u_0 = -2\phi_x. \quad (8.4.11)$$

Резонансы также нетрудно найти, положив

$$u = u_0 \phi^{-1} + p \phi^{r-1}, \quad (8.4.12)$$

что дает $r = -1$ и 2 . Первый из этих резонансов соответствует произвольности самой функции ϕ . Далее мы должны выяснить пригодность подстановки

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \phi^{j-1}. \quad (8.4.13)$$

Для этого выводим рекуррентные соотношения для u_j и проверяем, произвольна ли функция u_2 . Так как u_j и ϕ являются функциями x и t , мы можем записать соотношения

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} u_{j,x} \phi^{j-1} + (j-1) \phi^{j-2} (u_j \phi_x), \\ u_{xx} &= \sum_{j=0}^{\infty} u_{j,xx} \phi^{j-1} + (j-1) \phi^{j-2} (2u_{j,x} \phi_x + u_j \phi_{xx}) + (j-1)(j-2) \phi^{j-3} (u_j \phi_x^2), \\ u_t &= \sum_{j=0}^{\infty} u_{j,t} \phi^{j-1} + (j-1) \phi^{j-2} (u_j \phi_t). \end{aligned}$$

¹¹⁾ Подстановка $u = -2\psi_x/\psi$ сводит (8.4.9) к уравнению

$$\psi_t = \psi_{xx},$$

которое представляет собой точно решаемое уравнение теплопроводности. Хотя этот метод решения приписывают Хопфу [26] и Коле [23], он был приведен в качестве упражнения в книге [25], опубликованной еще в начале века.

Рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 (j+1)(j-2)\phi_x^2 u_j = \\
 = u_{j-2}\phi_t - u_{j-2,xx} + (j-2)[u_{j-1}\phi_t - 2u_{j-1,x}\phi_x - u_{j-1}\phi_{xx}] + \\
 + \sum_{k=1}^{j-1} [u_{j-k}u_{k,x} + (k-1)u_j u_{j-k}\phi_x]. \quad (8.4.14)
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$j=0: \quad u_0 = -2\phi_x, \quad (8.4.15a)$$

$$j=1: \quad \phi_t + u_1\phi_x = \phi_{xx}, \quad (8.4.15b)$$

$$j=2: \quad \frac{\partial}{\partial x}(\phi_t + u_1\phi_x - \phi_{xx}) = 0. \quad (8.4.15b)$$

С учетом (8.4.15б) условие совместности (8.4.15в) удовлетворяется тождественно, и тем самым произвольность u_2 доказана. Таким образом, обобщенный ряд Лорана (8.4.13) действительно служит «локальным» представлением общего решения уравнения Бюргера вблизи подвижного сингулярного многообразия $\phi(x, t) = 0$.

Более важным примером является уравнение КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (8.4.16)$$

В этом случае анализ ведущего члена дает $\alpha = -2$ и $u_0 = -2\phi_x^2$; из анализа резонансов получаем $r = -1, 4$ и 6 . Рекуррентные соотношения становятся более сложными, и проверку на свойство Пенлеве целесообразно «упростить», положив $\phi(x, t) = x - \psi(t)$ и $u_j = u_j(t)$. При этом рекуррентные соотношения приобретают гораздо более простой вид

$$(j+1)(j-4)(j-6)u_j = -u_{j-3,t} - (j-4)u_{j-2}\phi_t - 6 \sum_{k=1}^{j-1} u_{j-k}u_k(k-2). \quad (8.4.17)$$

Отсюда находим

$$j=0: \quad u_0 = -2,$$

$$j=1: \quad u_1 = 0,$$

$$j=2: \quad u_2 = -\frac{1}{6}\phi_t,$$

$$j=3: \quad u_3 = 0,$$

$$j=4: \quad 0 \cdot u_4 = 0,$$

$$j=5: \quad u_5 = -\frac{1}{36}\phi_{tt},$$

$$j=6: \quad 0 \cdot u_6 = -2u_4\phi_t - 12u_2u_4 = 0.$$

Таким образом, разложение

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-2} \quad (8.4.18)$$

является представлением общего решения, и мы можем говорить, что уравнение КдФ также обладает свойством Пенлеве.

В случае уравнения КдФ более высокого порядка,

$$u_t = 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx}, \quad (8.4.19)$$

имеют место два различных типа поведения ведущего члена, а именно: $\alpha = -2$, $u_0 = -2\phi_x^2$ и $\alpha = -2$, $u_0 = -6\phi_x^2$. В первом случае имеются резонансы при $r = -1, 2, 5, 6, 8$, и он соответствует общему решению, тогда как второй случай соответствует особому решению с резонансами при $r = -3, -1, 6, 8, 10$. Можно показать, что обе ветви имеют однозначные разложения (вида (8.4.18)), и уравнение снова обладает свойством Пенлеве.

8.4.в. Пара Лакса и преобразования Бэклунда

Рассмотренный выше упрощенный подход является наиболее быстрым способом установления наличия или отсутствия у системы свойства Пенлеве, но с другой стороны полные разложения содержат существенно больший объем дополнительной информации. Если, например, полностью записать рекуррентные соотношения для уравнения КдФ, то получаем

$$j = 0: \quad u_0 = -2\phi_x^2, \quad (8.4.20a)$$

$$j = 1: \quad u_1 = 2\phi_{xx}, \quad (8.4.20б)$$

$$j = 2: \quad \phi_x\phi_t + 4\phi_x\phi_{xxx} - 3\phi_{xx}^2 + 6\phi_x^2u_2 = 0, \quad (8.4.20в)$$

$$j = 3: \quad \phi_{xt} + 6\phi_{xx}u_2 + \phi_{xxx} - 2\phi_x^2u_3 = 0, \quad (8.4.20г)$$

$$j = 4: \quad (\phi_{xt} + \phi_{xxxx} + 6\phi_{xx}u_2 - 2\phi_x^2u_3)_x = 0. \quad (8.4.20д)$$

Последнее из этих соотношений означает, что u_4 произвольна в силу (8.4.20г). Соотношения для $j = 5$ и $j = 6$ гораздо сложнее, но все-таки непротиворечивы. В итоге полный однозначный ряд может быть записан в виде

$$u(x, t) = \frac{-2\phi_x^2}{\phi^2} + \frac{2\phi_{xx}}{\phi} + u_2 + u_3\phi + u_4\phi^2 + \dots = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \phi + \sum_{j=2}^{\infty} u_j\phi^{j-2}. \quad (8.4.21)$$

Анализ рекуррентных соотношений приводит к возможности следующего согласованного *усечения* разложения (8.4.21):

- (1) положить произвольные функции u_4 и u_6 равными нулю;
- (2) потребовать, чтобы $u_3 = 0$;
- (3) потребовать, чтобы u_2 сама по себе удовлетворяла уравнению КдФ.

Нетрудно показать, что если эти три условия выполняются, то

$$u_j = 0, \quad j \geq 3. \quad (8.4.22)$$

При этом, исходя из (8.4.20) и (8.4.21), получаем систему уравнений

$$u(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \phi + u_2, \quad (8.4.23a)$$

$$\phi_x\phi_t + 4\phi_x\phi_{xxx} - 3\phi_{xx}^2 + 6u_2\phi_x^2 = 0, \quad (8.4.23б)$$

$$\phi_{xt} + \phi_{xxxx} + 6u_2\phi_{xx} = 0, \quad (8.4.23в)$$

$$u_{2,t} + 6u_2u_{2,x} + u_{2,xx} = 0. \quad (8.4.23г)$$

Может показаться, что три из них: (8.4.23б)–(8.4.23г) — образуют избыточную систему относительно переменных $\phi(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Но на самом деле они полностью

самосогласованы, причем (8.4.23г) является условием разрешимости для (8.4.23б) и (8.4.23в). Это можно показать с помощью подстановки

$$\phi_x(x, t) = \psi^2(x, t), \quad (8.4.24)$$

которая преобразует (8.4.23б) и (8.4.23в) к виду

$$\psi_{xx} + (\lambda + u_2(x, t))\psi = 0, \quad (8.4.25a)$$

$$\psi_t + 4\psi_{xxx} + 6u_2(x, t)\psi_x + 3u_x(x, t)\psi = 0. \quad (8.4.25б)$$

Мы получили не что иное, как пару Лакса для уравнения КдФ (8.4.23г)! Усеченное разложение (8.4.23а) представляет собой так называемое *преобразование Бэклунда* для уравнения КдФ¹²⁾. Оно дает возможность получать новые решения уравнения КдФ исходя из старых. Так, исходя из односолитонного решения для u_2 , можно найти решение для пары (8.4.25), что дает соответствующие собственные функции рассеяния. Посредством (8.4.24) вычисляем ϕ , и совместно с исходной функцией u_2 в (8.4.23а) это дает новое — двухсолитонное — решение уравнения КдФ.

Приведенный пример показывает, каким образом разложения вблизи сингулярного многообразия могут быть использованы не только в качестве простого «теста Пенлеве» для у. ч. п., но и для конструктивного метода построения соответствующих пары Лакса и преобразования Бэклунда. Исследования последних лет показали, что эта процедура носит весьма общий характер. Метод может быть распространен и на о. д. у., для которых также можно определить понятие «пары Лакса». В этом случае нахождение пары Лакса дает интегралы движения и алгебраическую кривую для уравнения.

Список литературы

Учебники и обзорные статьи

1. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Hille E. Analytic Function Theory. Vols. I and II. Chelsea, New York, 1982.
3. Hille E. Ordinary Differential Equations in the Complex Plane. Wiley, New York, 1976.

Раздел 8.1

4. Ковалевская С. В. Воспоминания детства и автобиографические очерки. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
5. Kovalevskaya S. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 12, 177 (1889); 14, 81 (1889). [Имеется перевод в: Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948.]
6. Oeuvres de Paul Painleve. Vol. I: Centre National de la Recherche Scientifique. Paris, 1973.
7. Tabor M. Modern dynamics and classical analysis. *Nature*, 310, 277 (1984).
8. Whittaker E. T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid bodies. 4th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Раздел 8.3

9. Bountis T., Segur H., Vivaldi F. Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property. *Phys. Rev. A*, 25, 1257 (1982).

¹²⁾ Преобразования Бэклунда подробнее рассматриваются в книгах [24] и [21].

10. *Chang Y. F., Tabor M., Weiss J.* Analytic structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in integrable and nonintegrable regimes. *J. Math. Phys.*, **23**, 531 (1982).
11. *Chang Y. F., Greene J. M., Tabor M., Weiss J.* The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries. *Physica*, **8D**, 183 (1983).
12. *Hall L. S.* A theory of exact and approximate configurational invariants. *Physica*, **8D**, 90 (1983).
13. *Levine G., Fournier J.-D., Tabor M.* Singularity clustering in the Duffing oscillator. *J. Phys. A* **21**, 33 (1988).
14. *Ramani A., Dorizzi B., Grammaticos B.* Painlevé conjecture revisited. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1539 (1982).
15. *Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform, lectures given at the International School of Physics. "Enrico Fermi", Varenna, Italy, 1980.
16. *Tabor M., Weiss J.* Analytic structure of the Lorenz system. *Phys. Rev. A*, **24**, 2157 (1981).
Более подробное обсуждение свойства Пенлеве можно найти в:
17. *Adler M., P. van Moerbeke.* The algebraic integrability of geodesic flow on $SO(4)$. *Invent. Math.*, **67**, 297 (1982).
18. *Ercolani N., Siggia E.* Painlevé property and integrability. *Phys. Lett. A*, **119**, 112 (1986).
19. *Haine L.* The algebraic complete integrability of geodesic flow on $SO(N)$. *Commun. Math. Phys.*, **94**, 271 (1984).
20. *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. *Celest. Mech.*, **31**, 363 (1983); **31**, 381 (1983).

Раздел 8.4

21. *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981. [Имеется перевод: *Абловиц М. Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.]
22. *Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and o.d.e's of P -type. *J. Math. Phys.*, **21**, 715 (1980).
23. *Cole J. D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, **9**, 225 (1951).
24. *Drazin P. G.* Solitons. London Mathematical Society Lecture Notes. Vol. 85. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
25. *Forsyth A. R.* Theory of Differential Equations. Part IV: Partial Differential Equations. Vol. VI. Cambridge University Press, Cambridge, 1906 (переиздана в Dover, New York, 1959).
26. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**, 201 (1950).
27. *Newell A. C., Tabor M., Zeng Y. B.* A unified approach to Painlevé expansions. *Physica*, **29D**, 1 (1987).
28. *Osgood W. E.* Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables. Dover, New York, 1966.
29. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial differential equations. *J. Math. Phys.*, **24**, 522 (1983).

Указатель

- Абелевы** интегралы, многообразия, функции 288
- Абель** Нильс 288
- автомодельные решения:
- уравнения $\sin$ -Гордона 262
 - уравнения КдФ 243
 - уравнения мКдФ 259
- алгебраически интегрируемые системы 297
- алгебраические кривые 287
- анализ ведущего члена разложения вблизи особенности 280
- аналитическая структура и интегрируемость 36
- — эллиптических функций 13
- Аносова** системы 148
- антикинк 261
- Арнольда** диффузия 66
- отображение 144–146
- Бернулли** система 148
- уравнение 83
- бионы 265
- бифуркация:
- камертона 192
 - касательная 191
 - сверхкритическая 170
 - седло-узел 192
 - удвоения периода 173, 184
- Бора**—Зоммерфельда правило квантования 200
- бризеры 265
- Бутру преобразование 279
- Бэклунда преобразование 304
- Бюргерса уравнение 301
- Ван-дер-Поля** осциллятор 28
- вариационная производная 265–267
- Вигнера** распределение 208
- функция 212
- ВКБ** разложение 198
- внешнее дифференцирование 77
- произведение 51, 76
- внутренний кризис 189
- Вольтерра** уравнения 25
- вычет периодической траектории 142, 229
- Галилея** инвариантность уравнения КдФ 246
- Гамильтона** принцип 40–41
- Гамильтона**—**Якоби** уравнение:
- в случае одной степени свободы 58–59
 - зависящее от времени 57
 - и каноническая теория возмущений 86–87
 - не зависящее от времени 57
- гамильтониан**:
- 86
 - переход к формализму 45, 71–72
 - уравнения движения 47–49
 - функция 45–47
- гамильтонова** структура:
- нелинейного уравнения Шрёдингера 269
 - уравнения Кортвега—де Фриза 267
- Гарднера** уравнение 246
- Гельфанда**—**Левитана**—**Марченко** уравнение 251
- гетероклинная точка 124
- гетероклинные точки, их свойства 123–125
- — отображения Арнольда 145
- гидродинамика:
- формализм Лагранжа 149
 - формализм Эйлера 149
- гиперболическая неподвижная точка 22
- — — для сохраняющего площадь отображения 119
- гиперболическая-с-отражением неподвижная точка для сохраняющего площадь отображения 119
- гиперэллиптические интегралы 34, 287
- голономные связи 40, 46
- гомоклинная точка 124
- траектория 124
- гомоклинные осцилляции 126
- точки, их свойства 123–125
 - — отображения Арнольда 145
- Грина** метод и возникновение хаоса 140–143
- функция в квантовой механике 225
- Данные** рассеяния 248
- —, их эволюция 253
- двойкопериодические функции 12, 13
- двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера 270

- двухкинковое решение уравнения $\sin$ -Гордона 262
 двухсолитонное решение уравнения КдФ 255–256
 де Бройля длина волны 197
 деформационный параметр 248, 251
 дискретные лагранжианы 116
 — — и квантовые отображения 218
 дисперсионное соотношение для уравнения КдФ 242
 дифференциальные формы:
 1-форма 56, 74
 2-форма 51, 76
 n -форма 77
 Дюффинга осциллятор 33
- Е**стественная граница 298
- З**ависящий от времени интеграл для модели Лоренца 295–296
 завитки:
 в лагранжевой турбулентности 150, 152
 их свойства 126, 127
 завихренность 164
 задача двух тел 80
 — трех тел 80
 законы сохранения 244–245
 — — и уравнение Гарднера 246
 замкнутые траектории 69
 — — и квазиклассическое квантование 225–232
 — — и спектральная жесткость 210
 затухающий осциллятор 8
 — — с вынуждающей внешней силой 33
 Захарова уравнения 271–272
 золотое сечение:
 и метод Грина 143
 и цепные дроби 98
- И**злучение в нелинейных эволюционных уравнениях 258
 изоспектральная деформация 252
 изотропность пространства 42
 изоэнергетическая невырожденность 100
 инертные многообразия 181
 инерциальная система отсчета 42
 интеграл движения 6
 — действия 41
 —, зависящий от времени 9, 30–31
- интегралы эллиптические 9
 интегрирование в квадратурах 5–8
 — дифференциальных уравнений, дальнейшие замечания 34–36
 интегрируемые гамильтоновы системы:
 и уравнения в частных производных 265–269
 их свойства 63, 66
 примеры 66–68
 иррациональные числа 98
- КАМ**-теорема:
 для автономных систем 99
 для отображений 100
 для периодически возмущаемых систем 101
 для устойчивых точек равновесия 102
 основные понятия 93–95
 камертона бифуркация 192
 каноническая теория возмущений:
 85–91
 высших порядков 89
 для большого числа степеней свободы 91–92
 для возмущенного осциллятора 90
 и малые знаменатели 92
 первого порядка 87–89
 канонические преобразования 50–57
 канторово множество 173, 174
 канторы 117
 Карри аттрактор 180
 касательная бифуркация 191
 касательное отображение 118
 — пространство 74
 — расслоение 44, 74
 касательный вектор 73
 катастроф теория 234
 каустики 199
 — в квантовых отображениях 222
 квазиклассические волновые пакеты 203–204
 квазиклассический предел:
 для задач, зависящих от времени 195–196
 как сингулярный предел 196
 квазипериодические траектории 69
 квазиэнергетический спектр 226
 квантовое отображение:
 квантование с использованием замкнутых орбит 229–232
 пропагатор 227–228
 формулировка 218–220
 эволюция состояний 220–224

- кинк 261
- Клеро уравнение 284
- Ковалевская Софья 276
- Ковалевской экспоненты 282
- ковариантные величины 44, 72
- Колмогорова энтропия 130
- консервативные системы 18
- —, их фазовые портреты 18–20
- контравариантные величины 44, 72
- Кортевега—де Фриза (КдФ) уравнение:
 - 93
 - гамильтонова структура 267–269
 - двухсолитонное решение 255–256
 - обратное преобразование рассеяния 251–254
 - основные свойства 240–247
 - открытие солитона 239–240
 - первоначальный вывод 238
- Коха снежинка 173
- Коши—Ковалевской теорема 300
- коэффициент отражения 250
- прохождения 250
- кремоново преобразование 112
- кризис 189
- Лагранжа** многообразие 203
- лагранжева турбулентность 150
- лагранжиан:
 - дискретный 116
 - общие свойства 43–44
 - переход к гамильтонову формализму 45–47, 72
 - уравнения движения 42
 - функция и принцип Гамильтона 40–42
- лазерный измеритель скорости Допплера 165
- Лакса пара 258
- — и свойство Пенлеве 279, 303
- Ландау—Хопфа теория турбулентности 168
- Лежандра преобразования 45, 71–72
- Ли алгебра 50
- линеаризующие преобразования 7
- линейный анализ устойчивости 21–29
- линии тока 150
- уровня 18
- Лиувилля теорема 48
- — в терминах дифференциальной геометрии 78
- — и канонические преобразования 52
- логистическое отображение:
 - бифуркационная диаграмма 188–189
 - его необратимость 191
 - удвоение периода 185–188
 - феноменология 184
 - эргодическое поведение 190
- Лози отображение 184
- локальные представления решений дифференциальных уравнений 280
- Лорана ряд 281–282
- Лоренца модель:
 - зависящие от времени интегралы 296
 - ее аналитическая структура 293–296
 - зависящие от времени интегралы 295
 - и странный аттрактор 178–180
 - классы интегрируемости 295
 - основные свойства 175–180
- Ляпунова показатели:
 - 127
 - для отображений 128
 - для потоков 129
 - их расчет 130
- Малые** знаменатели, проблема 92
- Маслова индексы 203
- матрица устойчивости 21
- маятник:
 - его период 14
 - сепаратриса 17
 - фазовый портрет 17
 - и метод перекрытия резонансов 137–138
 - решение в терминах эллиптических функций 13–14
- мероморфные функции 13
- метод стационарной фазы 227, 232–234
- микроволновая ионизации атомов водорода 217
- микроканонический ансамбль 66
- Миуры преобразование 245–246
- многопериодические траектории 69
- модифицированное уравнение КдФ (мКдФ):
 - и преобразование Миуры 245
 - обратное преобразование рассеяния 264
 - простейшие свойства 259–260
- Навье—Стокса** — 161
- неавтономные системы 31–34
- — с невырожденными гамильтонианами 67, 70
- нелинейная обратная связь 33
- нелинейное преобразование Фурье 254
- уравнение Шрёдингера 262, 264
- необратимое отображение 191

неподвижные точки:

21

их классификация:

гиперболическая 22

звезда, устойчивая и неустойчивая 23

несобственный узел, устойчивый
и неустойчивый 23

узел, устойчивый и неустойчивый 22

фокус, устойчивый и неустойчивый 22

эллиптическая 22

несостоятельность линейного анализа 27

примеры:

затухающий линейный осциллятор 24

маятник 25

нерегулярный спектр:

определение 205

свойства собственных значений 205–210

свойства собственных функций 211–217

Нетер теорема 44

неустойчивые многообразия 22, 123–125

неустойчивый узел 22

— фокус 22

нормировочная константа 250

Ньюеля—Уайтхеда уравнение 272

Ньютона уравнения движения 40

Ньютона—Рафсона метод и суперсходящаяся
теория возмущений 95

Обобщенные импульсы:

их свойства 44–45

как градиент действия 45

как ковариантные величины 43

— координаты 40

образование ударной волны 240

обратимые отображения 113, 182

обратная задача рассеяния 248, 250–251

обратное преобразование рассеяния (ОПР):
254

для нелинейного уравнения Шрёдингера
264

для уравнения $\sin$ -Гордона 264

для уравнения КдФ 251–258

для уравнения мКдФ 264

основные принципы 247–251

общие и особые решения 284

однородность времени 42

осциллятор:

Ван-дер-Поля 28

Дюффинга 33, 34

гармонический 5–6

затухающий линейный 8–9

неавтономный 31–34

с вынуждающей силой 32

с кубическим потенциалом 20

с потенциалом четвертой степени 19

отображения, сохраняющие площадь:

Хенона 112–114

и гамильтонианы 115–116

и поверхность сечения 108–110

на плоскости 112–114

поворота 110–112

Параболическая неподвижная точка 120

лекаря преобразование 146

Пенлеве Поль 279

— свойство:

279

для обыкновенных дифференциальных
уравнений 282, 288–292

для уравнений в частных производных
299–303

и интегрируемость 296

и пара Лакса 303

и преобразование Бэклунда 303

— уравнения:

первого и второго типов 35, 244

третьего типа 262

первая вариация интеграла действия 41

первый интеграл 6

перекрытие резонансов:

для стандартного отображения 138

метод 133–139

основная идея 134

переमेжаемость 173, 180

переменные действие—угол:

в квазиклассическом квантовании 200,
201

для большого числа степеней свободы
62–63, 66–68

для одной степени свободы 59–62

перемешивание 144

период колебаний 7

плотность состояний:

и квантование с использованием замкну-
тых траекторий 225–232

формула Томаса—Ферми 208

поверхность сечения:

в экспериментах по хаотической адвек-
ции 151–156

для систем, зависящих от времени 109

для системы Хенона—Хейлеса 106

для цепочки Тода 107

- как симплектическое отображение 108–110, 157
 основные свойства 104–106
 подвижные особенности, определение 278
 понижение порядка дифференциального уравнения 6
 предельные циклы 28–29, 168
 принцип соответствия 206
 производящие функции 53–57
 пространственно-временной хаос 162
 пространственные корреляции волновых функций 213
 прямая задача рассеяния 247, 250
 пси-ряд 283, 285–286
 Пуазейля течение 167
 Пуанкаре инварианты 51, 78
 Пуанкаре—Биркгофа теорема о неподвижной точке 120–123
 Пуанкаре—Картана инвариант:
 и поверхность сечения 157
 как дифференциальная 1-форма 56, 75
 Пуассона распределение энергетических уровней 209
 — скобки:
 49
 в гамильтоновой механике 49–50
 для уравнения КдФ 268
 — формула суммирования 227
- Равномерное приближение** 199, 234
 распределение расстояний между уровнями 208–209
 Рассел Джон Скотт 237
 растяжение и складывание 172
 расширенное фазовое пространство 47
 регулярный спектр:
 определение 205
 свойства собственных значений 205–210
 свойства собственных функций 211–217
 резонансы в обыкновенном осцилляторе 33
 — и исследование аналитической структуры 282
 —, иллюстрация 134
 рекуррентные соотношения 281
 Реслера аттрактор 181
 решение типа бегущей волны:
 уравнения $\sin$ —Гордона 260
 уравнения КдФ 242
 уравнения мКдФ 259
 Риккати уравнение 29, 31
 Рэлея число 176
- Рэлея—Бенара конвекция:
 в модели Лоренца 175–176
 экспериментальные наблюдения 166–167
 — неустойчивость 167
 Рюэля—Тэкенса теория 171–173
- Самофокусирующиеся сингулярности** 270–271
 сверхкритическая бифуркация 170
 седло-узел бифуркация 192
 секулярные члены в теории возмущений 84
 сепарабельные системы 58, 62–63
 сепаратриса:
 17
 для осцилляторов с потенциалом третьей и четвертой степени 20
 маятника 17
 устойчивые и неустойчивые многообразия 123
 симплектическое многообразие 44
 сингулярные задачи теории возмущений 81
 — многообразия 299
 след пропагатора 229
 Смэйла отображение подковы 172
 солитон:
 первое наблюдение 237
 построение численного решения 239–240
 сохраняющие площадь отображения:
 и гамильтоновы системы 115
 и поверхность сечения 108
 на плоскости 112
 обратимое 113
 отображения поворота 110
 спектральная жесткость 210
 спектры мощности:
 131
 в гидродинамических экспериментах 166
 для классических траекторий 131–132
 и принцип соответствия 206
 стадион:
 собственные значения 207
 собственные функции 214–216
 стандартное отображение:
 и метод Грина 141–143
 метод перекрытия резонансов 138
 на фазовой плоскости 116
 Стокса теорема 77
 странные аттракторы:
 для модели Карри 180
 для модели Лоренца 178–180

для модели Реслера 181
 для осциллятора Дюффинга 34
 для отображения Хенона 181–184
 основные свойства 171–173
 структура особенностей:
 неинтегрируемых систем 297, 298
 и Ковалевская 276–279
 субдукция 189
 субкритическая бифуркация 170
 суперсходящаяся теория возмущений 95–96
 существенные особенности 278, 283

Теорема о неподвижной точке Пуанкаре—
 Биркгофа 122

— Пуанкаре—Хопфа 64

теоремы локализации 216

теория возмущений:

 для дифференциального уравнения вто-
 рого порядка 84–85

 для дифференциального уравнения пер-
 вого порядка 82–84

 и секулярные члены 84–85

 регулярная 81

 сингулярная 81–82

— чисел и свойства частот 96–99

течение Куэтта 165–166

Тода цепочка 107

тождества соответствия 200

торы:

 движение на них 69–70

 и интегрируемые гамильтоновы системы
 64

 и определение переменных действия 64

 их сохранение при возмущении 70, 94

точечные вихри 164

— преобразования 51

точка неустойчивого равновесия 17

— устойчивого равновесия 17

точки ветвления:

 логарифмические 286

 рациональные 292

— равновесия маятника 17

траектории с периодом 3, 3-циклы 188, 191

турбулентность, понятие 162

основной механизм 185–188

универсальность 184, 188

узловые структуры собственных функций 216
 уравнения Гамильтона 47

усреднение в канонической теории возмуще-
 ний 88

устойчивые многообразия 22, 123–125

устойчивый фокус 22

усы:

 в лагранжевой турбулентности 150, 152

 их свойства 126

Фазовая плоскость 15

— траектория 15

фазовое пространство:

 15

 гамильтоновых систем 48

 его симплектическая структура 44, 49,
 72–78

фазовый объем, его сохранение:

 в терминах дифференциальной геоме-
 трии 51, 78

 и теорема Лиувилля 48

 при канонических преобразованиях 51

— портрет:

 15

 консервативных систем 18–21

 маятника 17–18

— поток 15

Фейгенбаума число 184

Ферми—Улама—Паста эксперимент:

 и статистическое распределение по энер-
 гии 93

 и уравнение КдФ 238

фракталы 171, 173–175

фундаментальная проблема Пуанкаре 93

функции эллиптические 9

функциональная итерация 185

— ренормализация групп 188

функция тока 150, 163

Фурье преобразование и линейные эволюци-
 онные уравнения 248

Удвоение периода:

 бифуркационная диаграмма 188–189

 в сохраняющих площадь отображениях
 192

Хаос, определение 32

хаотическая адвекция 150

характеристики 240

Хаусдорфа—Безиковича размерность 174

Хенона отображение:

сохраняющее площадь 112–114
 странный аттрактор 181–184

Хенона—Хейлеса гамильтониан:

аналитическая структура 288–293
 поверхность сечения 106–107
 собственные функции 214

Хопфа теория бифуркации 169–171**Хопфа—Коле преобразование 301****Целые функции 13**

— — и интегрируемость 296

цепные дроби 97–98

— — и метод Грина 140

циклические координаты 43

цилиндрический подшипник, эксперимент
 по хаотической адвекции 151

Число Рейнольдса 151, 162

чувствительность к возмущению 207

— к начальным условиям 32

Шварца производная 188**ЭБК-квантование 201–203**

Эйлера—Пуассона уравнение 276

Эйнштейн и квазиклассическое квантование
 201

Эйри функция 7

— — и равномерное приближение 234

эллиптическая неподвижная точка 22

эллиптические кривые 287

— неподвижные точки и сохраняющие пло-
 щадь отображения 119

— — — и теорема Пуанкаре—Биркгофа
 117–123

— функции:

Вейерштрасса 10, 12–13

Якоби 10–12

и алгебраическая геометрия 10, 287–288

и решение уравнения маятника 13–15

их общие свойства 37–38

их периодическая структура 13

их аналитическая структура 287

эллиптический интеграл первого рода 11

энергетическая поверхность 66

эргодичность 66

Якоби тождество 50, 268

якобиан преобразований 51

C-системы 148

K-системы 148

N-солитонное решение 258

sin-Гордона уравнение:

в поле внешней силы 272

обратное преобразование рассеяния 264

простейшие свойства 260–262

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Динамика дифференциальных уравнений	5
1.1. Интегрирование линейных уравнений второго порядка	5
1.1.а. Интегрирование в квадратурах	5
1.1.б. Затухающий осциллятор	8
1.2. Интегрирование нелинейных уравнений второго порядка	9
1.2.а. Эллиптические функции Якоби	10
1.2.б. Эллиптические функции Вейерштрасса	12
1.2.в. Периодическая структура эллиптических функций	13
1.2.г. Уравнение маятника	13
1.3. Динамика в фазовой плоскости	15
1.3.а. Фазовый портрет маятника	17
1.3.б. Фазовые портреты консервативных систем	18
1.4. Линейный анализ устойчивости	21
1.4.а. Матрица устойчивости	21
1.4.б. Классификация неподвижных точек	22
1.4.в. Примеры анализа неподвижных точек	24
1.4.г. Предельные циклы	28
1.5. Интегралы, зависящие от времени	30
1.6. Неавтономные системы	31
1.6.а. Осциллятор с вынуждающей силой	32
1.6.б. Затухающий осциллятор с вынуждающей внешней силой	33
1.7. Дальнейшие замечания об интегрировании дифференциальных уравнений	34
Приложение 1.1. Эллиптические функции	37
Список литературы	39
Глава 2. Динамика гамильтоновых систем	40
2.1. Формализм Лагранжа	40
2.1.а. Функция Лагранжа и принцип Гамильтона	40
2.1.б. Свойства Лагранжиана	43
2.1.в. Свойства обобщенных импульсов	44
2.2. Формализм Гамильтона	45
2.2.а. Переход к формализму Гамильтона	45
2.2.б. Уравнения Гамильтона	47
2.2.в. Скобки Пуассона	49
2.3. Канонические преобразования	50
2.3.а. Сохранение фазового объема	51
2.3.б. Оптимальное преобразование	53
2.3.в. Производящие функции	53

2.4. Уравнение Гамильтона—Якоби и переменные действие—угол	57
2.4.а. Уравнение Гамильтона—Якоби в случае одной степени свободы	58
2.4.б. Переменные действие—угол в случае одной степени свободы	59
2.5. Интегрируемые гамильтонианы	62
2.5.а. Сепарабельные системы	62
2.5.б. Свойства интегрируемых систем	63
2.5.в. Примеры интегрируемых систем	66
2.5.г. Движение на торах	69
2.5.д. Фундаментальные вопросы	70
Приложение 2.1. Преобразования Лежандра	71
Приложение 2.2. Геометрические представления в классической механике	72
Список литературы	79
Глава 3. Классическая теория возмущений	80
3.1. Элементарная теория возмущений	80
3.1.а. Регулярные ряды возмущений	81
3.1.б. Сингулярные ряды возмущений	81
3.1.в. Регулярные ряды возмущений для дифференциальных уравнений	82
3.2. Каноническая теория возмущений	85
3.2.а. Ряды возмущений для уравнения Гамильтона—Якоби	86
3.2.б. Решения с точностью до первого порядка по ϵ	87
3.2.в. Решения с точностью до более высоких степеней по ϵ	89
3.2.г. Возмущенный осциллятор	90
3.3. Большое число степеней свободы и проблема малых знаменателей	91
3.3.а. Малые знаменатели	92
3.3.б. Фундаментальная проблема	93
3.4. Теорема Колмогорова—Арнольда—Мозера	93
3.4.а. Суперсходящаяся теория возмущений	95
3.4.б. Теоретико-числовые свойства частот	96
3.4.в. Другие аспекты КАМ-теоремы	99
3.5. Резюме по КАМ-теореме и ее вариантам	99
3.5.а. Автономные системы	99
3.5.б. Отображения	100
3.5.в. Периодические системы	101
3.5.г. Точки устойчивого равновесия	102
Список литературы	103
Глава 4. Хаос в гамильтоновых системах и сохраняющие площадь отображения	104
4.1. Поверхность сечения	104
4.1.а. Поверхности сечения для гамильтонианов с двумя степенями свободы	104
4.1.б. Гамильтониан Хенона—Хейлеса	106
4.1.в. Цепочка Toda	107
4.1.г. Поверхность сечения как симплектическое отображение	108
4.2. Сохраняющие площадь отображения	110

4.2.а.	Отображения поворота	110
4.2.б.	Отображения на плоскости	112
4.2.в.	Взаимосвязь между сохраняющими площадь отображениями и гамильтонианами	115
4.2.г.	Дискретные лагранжианы	116
4.2.д.	Стандартное отображение	116
4.3.	Неподвижные точки и теорема Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке	117
4.3.а.	Касательное отображение	118
4.3.б.	Классификация неподвижных точек	119
4.3.в.	Теорема Пуанкаре—Биркгофа о неподвижной точке	120
4.4.	Гомоклинные и гетероклинные точки	123
4.4.а.	Пересечения H^+ и H^-	123
4.4.б.	Усы и завитки	126
4.5.	Критерии локального хаоса	127
4.5.а.	Показатели Ляпунова	127
4.5.б.	Спектры мощности	131
4.6.	Критерии возникновения глобального хаоса	132
4.6.а.	Метод перекрытия резонансов	133
4.6.б.	Метод Грина	140
4.7.	Статистические понятия сильно хаотических систем	143
4.7.а.	Эргодичность	143
4.7.б.	Перемешивание	144
4.7.в.	Преобразование пекаря и системы Бернулли	146
4.7.г.	Иерархия неупорядоченности	148
4.8.	Гамильтонов хаос в гидродинамических системах	149
4.8.а.	Основные положения гидродинамики	149
4.8.б.	Модельная система	151
4.8.в.	Экспериментальные результаты	152
	Приложение 4.1. Поверхность сечения как симплектическое отображение	157
	Список литературы	158
Глава 5.	Динамика диссипативных систем	161
5.1.	Диссипативные системы и турбулентность	161
5.1.а.	Уравнение Навье—Стокса	161
5.1.б.	Понятие турбулентности	162
5.1.в.	Гамильтонова диссипация	163
5.2.	Экспериментальные наблюдения возникновения турбулентности	165
5.2.а.	Течение Куэтта	165
5.2.б.	Конвекция Рэлея—Бенара	166
5.3.	Теоретические представления о возникновении турбулентности	168
5.3.а.	Теория Ландау—Хопфа	168
5.3.б.	Теория бифуркации Хопфа	169
5.3.в.	Теория Рюэля—Тэкенса	171
5.3.г.	Другие сценарии	173
5.3.д.	Фракталы	173

5.4. Математические модели странных аттракторов	175
5.4.а. Модель Лоренца	175
5.4.б. Варианты модели Лоренца	180
5.4.в. Отображение Хенона	181
5.5. Бифуркации удвоения периода	184
5.5.а. Механизм удвоения периода	185
5.5.б. Бифуркационная диаграмма	188
5.5.в. Поведение за пределами λ_∞	190
5.5.г. Другие классы универсальности	192
Список литературы	193
Глава 6. Хаос и интегрируемость в квазиклассической механике	195
6.1. Взаимосвязь квантовой и классической механики	195
6.1.а. Квазиклассический предел для задач, зависящих от времени	195
6.1.б. Квазиклассический предел для задач, не зависящих от времени	196
6.2. Метод ВКБ и условия квантования Бора—Зоммерфельда	197
6.2.а. Разложение ВКБ	198
6.2.б. Квантование Бора—Зоммерфельда	199
6.3. Квазиклассическое квантование в случае большого числа степеней свободы	200
6.3.а. Условие квантования Эйнштейна	201
6.3.б. ЭБК-квантование	201
6.3.в. Квазиклассические волновые пакеты	203
6.4. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными значениями	205
6.4.а. Регулярные и нерегулярные связанные состояния	205
6.4.б. Спектр мощности и принцип соответствия	206
6.4.в. Чувствительность к возмущению	207
6.4.г. Распределение расстояний между уровнями	208
6.4.д. Спектральная жесткость	210
6.5. Регулярные и нерегулярные спектры: свойства, связанные с собственными векторами	211
6.5.а. Волновые функции регулярных связанных состояний	211
6.5.б. Функция Вигнера	212
6.5.в. Пространственные корреляции волновых функций	213
6.5.г. Некоторые численные результаты	214
6.5.д. Узловые структуры	216
6.5.е. Теоремы локализации	216
6.5.ж. Эксперименты по микроволновой ионизации	217
6.6. Квантовые отображения: эволюция волновых пакетов	217
6.6.а. Классическое отображение	218
6.6.б. Квантовое отображение	218
6.6.в. Эволюция классических и квантовых состояний	220
6.7. Квантовые отображения: квантование с использованием замкнутых траекторий	225
6.7.а. Предварительные сведения из квантовой механики	225
6.7.б. Квазиэнергетический спектр	226

6.7.в. Пропагатор квантового отображения	227
6.7.г. Вычисление следа пропагатора	229
6.7.д. Обсуждение метода замкнутых траекторий	231
Приложение 6.1. Метод стационарной фазы	232
Список литературы	235
Глава 7. Нелинейные эволюционные уравнения и солитоны	237
7.1. История вопроса	237
7.1.а. Наблюдения Рассела	237
7.1.б. Эксперимент ФУП	238
7.1.в. Открытие солитона	239
7.2. Основные свойства уравнения КдФ	240
7.2.а. Эффекты нелинейности и дисперсии	240
7.2.б. Решение типа бегущей волны	242
7.2.в. Автомодельные решения	243
7.2.г. Законы сохранения	244
7.2.д. Преобразование Миуры	245
7.2.е. Инвариантность Галилея	246
7.3. Обратное преобразование рассеяния: основные принципы	247
7.3.а. Взаимосвязь с квантовой механикой	247
7.3.б. Аналогия с преобразованиями Фурье	248
7.3.в. Прямая задача рассеяния	250
7.3.г. Обратная задача рассеяния	250
7.4. Обратное преобразование рассеяния: уравнение КдФ	251
7.4.а. Изоспектральная деформация	252
7.4.б. Эволюция данных рассеяния	253
7.4.в. Двухсолитонное решение	255
7.4.г. Более общие решения	256
7.4.д. Пара Лакса	258
7.5. Другие солитонные системы	259
7.5.а. Модифицированное уравнение КдФ	259
7.5.б. Уравнение $\sin$ -Гордона	260
7.5.в. Нелинейное уравнение Шрёдингера	262
7.5.г. Общая схема ОППР	263
7.6. Гамильтонова структура интегрируемых систем	265
7.6.а. Функциональная производная	265
7.6.б. Гамильтонова структура уравнения Кортвега—де Фриза	267
7.6.в. Гамильтонова структура нелинейного уравнения Шрёдингера	269
7.7. Динамика неинтегрируемых эволюционных уравнений	269
7.7.а. Самофокусирующиеся сингулярности	270
7.7.б. Уравнения Захарова	271
7.7.в. Когерентность и хаос	272
Список литературы	272

Глава 8. Аналитическая структура динамических систем	275
8.1. В поисках интегрируемых систем	275
8.1.а. Работа Ковалевской	276
8.1.б. Работа Пенлеве	279
8.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в комплексной области	280
8.2.а. Локальные представления	280
8.2.б. Общие и особые решения	284
8.2.в. Пси-ряд	285
8.2.г. Эллиптические функции и алгебраические кривые	286
8.3. Интегрируемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений	288
8.3.а. Система Хенона—Хейлеса	288
8.3.б. Интегрируемые системы с подвижными точками ветвления	292
8.3.в. Система Лоренца	293
8.3.г. Почему «работает» свойство Пенлеве?	296
8.3.д. Структура сингулярностей неинтегрируемых систем	297
8.4. Свойство Пенлеве дифференциальных уравнений в частных производных	299
8.4.а. Обобщенное разложение Лорана	299
8.4.б. Примеры свойства Пенлеве для у. ч. п.	301
8.4.в. Пара Лакса и преобразования Бэклунда	303
Список литературы	304
Указатель	306