ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

Под ред. А.П.Леванюка

Содержание

Предисловие 5

Задачи к томам I-IV

Условия задач

1. Современная наука о природе. Законы механики 9
2. Пространство, Время. Движение 49
3. Излучение. Волны. Кванты 79
4. Кинетика. Теплота. Звук 97

Решения и ответы 114

Задачи к томам V-VII

Условия задач

5. Электричество и магнетизм 321
6. Электродинамика 352
7. Физика сплошных сред 382

Решения и ответы 392

Задачи к томам VIII-IX

Условия задач

8. Квантовая механика (I) 513
9. Квантовая механика (II) 538

Решения и ответы 550

Предисловие

В этой книге собрано несколько сот задач, которые предлагались студентам Калифорнийского технологического института (США), слушавшим лекции Р. Фейнмана по физике. Задачи эти самые разные, но тот, кто внимательно читал русское издание «Фейнмановских лекций по физике», может с ними справиться самостоятельно. Разумеется, эти задачи, хотя они и задуманы как дополнение к «Лекциям», могут быть использованы и независимо от них. В настоящем издании к каждому разделу даны *также и решения.*

Польза от любого задачника, в котором кроме условий задач есть и их решения, далеко не бесспорна. То же может быть отнесено и к данной книге. Чтобы научиться физике, безусловно, необходимо (хотя и недостаточно) решать задачи. Но их нужно именно решать, а не смотреть в решения. Эта книга едва ли поможет тем, кто не имеет времени (или не очень любит) подумать. Если студент или самостоятельно изучающий предмет не обладает ко всему прочему достаточной волей и самолюбием, он почти наверняка не устоит перед искушением посмотреть в решение, не попытавшись решить задачу сам. А жаль! Чтобы научиться думать так, как думают физики, нельзя обойтись без того, чтобы поломать голову. Как это ни удивительно, многие студенты не понимают, что цель обучения — не в том, чтобы узнать некий набор фактов и положений, а именно в том, чтобы выработать самостоятельный подход к любой физической проблеме, научиться глубоко понимать, думать и размышлять, а с этой точки зрения данная книга может быть отнесена к категории «опасных» для части ее читателей. Почему же тем не менее такая книга нужна? В предисловии к своим «Лекциям» Фейнман пишет: «...самым превосходным обучением является прямая, личная связь между учеником и хорошим учителем... . Невозможно многому научиться, просто отсиживая лекции или даже просто решая задачи. Но в наше время такое множество студентов должно быть обучено, что для идеалов приходится подыскивать эрзацы».

Цель этой книги — заменить читателю преподавателя, проводящего семинарские занятия. Она рассчитана прежде всего на тех, кто возьмется одолеть «Лекции» самостоятельно. Нельзя, конечно, исключить и таких (безусловно, редких) случаев, когда такой «заменитель» окажется лучшим, чем «натуральный продукт», поэтому и преподаватели, как мы надеемся, смогут почерпнуть здесь информацию, полезную для их работы.

Таким образом, эта книга прежде всего для того читателя, который получает удовольствие от самого процесса обдумывания и решения задачи. В идеальном случае он смотрит в решение, приведенное в книге, только *после* того, как закончит свое собственное. Проведя сравнение, он пишет письмо в редакцию, где в вежливой форме сообщает, что нашел более удачное решение. Иногда, правда, читатель смотрит в решение, не решив задачу до конца, а лишь прикинув в уме, как ее можно решить, но это — исключение.

Среди людей, занимающихся физикой, особенно теоретической физикой, очень много тех, кто ограничивается формальным (вернее, «формульным») подходом к делу. Таких, которые считают необходимым докапываться до «физического смысла» проблемы или результата, значительно меньше. Автор курса Ричард Фейнман — блестящий представитель этой последней (немногочисленной) категории физиков. Особая ценность «Фейнмановских лекций» (и задач к ним) как раз в том и состоит, что они помогают воспитывать «неформальных» физиков. Мы стремились к тому, чтобы этой же цели отвечали и решения задач. Наверное, это нам не вполне удалось. Всякие замечания по поводу решений (особенно направленные к их «деформализации») будут приняты с благодарностью.

Перевод *задач* в основном соответствует тексту первого издания, однако тем читателям, которые им пользуются, следует иметь в виду, что в настоящем издании, в связи с составлением решений, в условия задач редактором был внесен ряд уточнений. Решения задач составлены группой преподавателей Московского инженерно-физического института.

А. Леванюк

Том I

1. Современная наука о природе • Законы механики
2. Пространство • Время • Движение
3. Излучение • Волны • Кванты
4. Кинетика • Теплота • Звук

Этот сборник представляет собой первую попытку создания подходящего набора задач к «Фейнмановским лекциям по физике». В настоящем виде они фигурировали в 1962/63 учебном году. Хотя количество включенных в сборник задач намного превышает то, что может решить даже наиболее способный студент, все же, несомненно, их понадобится еще больше, особенно таких, которые не требовали бы сложных численных или алгебраических выкладок, но освещали бы лучше физику. Почти ежегодно появляются такие задачи и впоследствии они будут нами включаться в это собрание.

Р. Лейтон

1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ • ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

К главе 1. ***Атомы в движении***

При решении приведенных ниже задач используйте идеи и методы, изложенные в первой главе «Лекций», а также ваш собственный опыт и воображение. О получении точных численных результатов особенно не заботьтесь.

1, 1. При обычных условиях воздух имеет плотность около 0,001 *г/см*^{3}, тогда как плотность жидкого воздуха примерно 1 *г/см*^{3}.

а) Оцените число молекул в 1 *см*^{3} газообразного и жидкого воздуха.

б) Оцените массу «молекулы» воздуха.

в) Рассчитайте среднее расстояние, которое молекула воздуха проходит между двумя последовательными соударениями с другими молекулами при нормальном давлении и температуре. Это расстояние называется *длиной свободного пробега.*

г) Оцените давление, до которого необходимо откачать вакуумную систему, чтобы длина свободного пробега в ней равнялась 1 *м.*

1, 2. В один из давних дней палеозойской эры капля послеполуденного ливня упала на мягкую ровную землю и оставила на ней отпечаток. Шло время, на этот отпечаток при раскопках наткнулся страдающий от жары и жажды студент-геолог. Осушая свою фляжку, он от нечего делать прикидывает, сколько молекул из той древней капли было в воде, которую он только что выпил. Оцените и вы число этих молекул, используя только те данные,

которые вам уже известны. О деталях, не приведенных в условии задачи, сделайте сами разумные предположения.

1. 3. Действие происходит где-то в Калифорнии. На подоконнике возле раскрытого окна оставили стакан с водой.

а) Как вы думаете, сколько времени он так простоит, пока вода из него не испарится полностью?

б) Сколько молекул при этом будет испаряться с каждого квадратного сантиметра водной поверхности в секунду?

в) Существует ли связь, и если да, то какая, между ответом на вопрос (а) и среднегодовым количеством осадков, выпадающих на Землю?

1. 4. Если атомы, из которых состоят все тела, находятся в непрерывном движении, то за счет чего предметы сохраняют постоянную форму, иногда не меняясь очень подолгу (например, окаменелости)?

1. 5. Можете ли вы объяснить, почему не существует кристаллов с гранями в форме правильного пятиугольника? (Треугольники, квадраты и шестиугольники в кристаллических формах встречаются постоянно.)

1. 6. Как зависит давление газа P от числа атомов в единице объема n и $\langle v \rangle$ — средней скорости атомов? Будет ли P просто пропорционально n и $\langle v \rangle$ или зависимость отличается от линейной?

1. 7. Если теплота есть не что иное, как движение молекул, то чем отличается горячий, покоящийся бейсбольный мячик от холодного, но быстро движущегося?

1. 8. Объясните, почему и как трение между движущимися частями машины приводит к выделению тепла.

1. 9. Химики обнаружили, что молекулы резины состоят из длинных перекрещивающихся цепочек атомов. Объясните, почему кусок резины нагревается, если его растянуть.

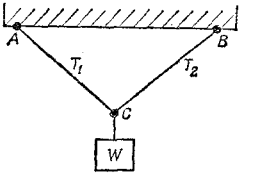
1.10. Что случится с куском резины, на котором подвешен груз, если резину нагреть? (Проделайте сами такой опыт.)

1.11. Вам дано большое число стальных шариков равного диаметра d и сосуд известного объема V. Все габариты сосуда много больше диаметра шариков. Какое максимальное число шариков может поместиться в сосуде?

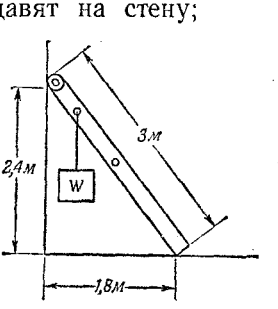
К главе 4. ***Сохранение энергии***

Решите следующие задачи, используя закон сохранения энергии и принцип виртуальной работы.

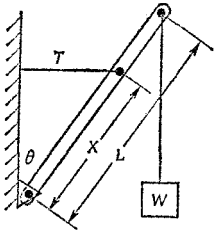
4. 1. Груз весом $W=50$ *кг* подвешен в средней точке проволоки ACB, как показано на рисунке; $AC=CB=5$ *м*; $AB=5\sqrt{2}$ *м*.
Найдите натяжение T проволоки.



4. 2. Лестница длиной 3 *м* приставлена под углом к гладкой вертикальной стене. В верхнем ее конце имеются ролики (см. рисунок). Лестница весит 12 *кг*. На расстоянии 0,75 *м* от ее верхнего конца подвешен груз 24 *кг*. Найдите:
а) силу, с которой ролики давят на стену;
б) горизонтальную и вертикальную составляющие силы, с которой лестница давит на землю.



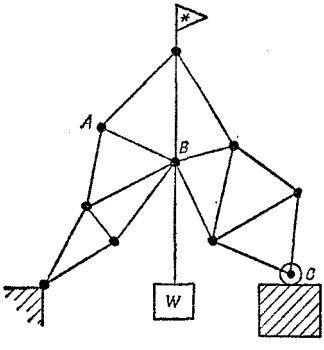
4. 3. Подъемное устройство состоит из однородного стержня длиной L и весом w; устройство своим нижним концом шарнирно соединено со стенкой. С вертикалью стержень образует постоянный угол θ благодаря горизонтально натянутой проволоке, которая соединена со стержнем на расстоянии x от шарнира. Груз W подвешен к верхней точке стержня. Найдите натяжение T горизонтальной проволоки.



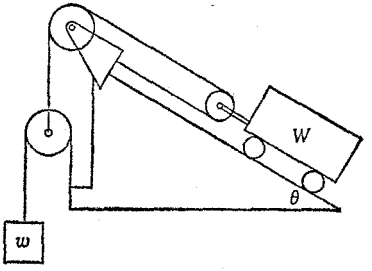
4. 4. Ферма состоит из легких алюминиевых стержней, концы которых шарнирно соединены друг с другом. В точке C ферма опирается на ролик, который может двигаться по гладкой плоскости. При сварке стержень AB нагревается, причем его длина увеличивается на величину x. В результате груз W смещается по вертикали на расстояние y.

а) Как направлено смещение W — вверх или вниз?

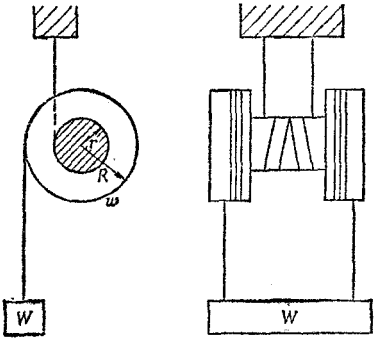
б) Какая сила действует на стержень AB (определить нужно и знак силы, т. е. решить, растянут стержень или сжат)?



4. 5. Тележка удерживается на наклонной плоскости грузом w, подвешенным, как указано на рисунке. Трение во всех частях устройства пренебрежимо мало. Найдите W — вес тележки.

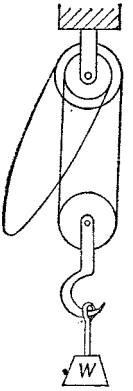


4. 6. Вес катушки равен w, а ее большой и малый радиусы — R и r соответственно. С помощью нитей, навитых по малому радиусу, катушка прикреплена к неподвижному бруску, а снизу к ней на нитях, навитых уже по большому радиусу, подвешен груз W (см. рисунок). Вес груза подобран так, что катушка находится в равновесии. Чему равен вес груза W?



4. 7. В дифференциальном вороте, который схематически изображен на рисунке, используется цепь, погонный метр которой содержит N звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего

диаметра имеет n зубцов, а шкив меньшего диаметра $n-1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза W, отличаются в R раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найдите эти силы.



4. 8. Петля, сделанная из гибкой тяжелой цепи весом W, надета на гладкий прямой круговой конус, высота которого h, а радиус основания r. Цепь покоится в горизонтальной плоскости (ось конуса направлена вертикально). Найдите натяжение цепи.

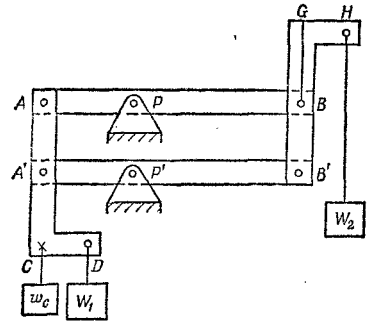
4. 9. Подвижная рама $AA'BB'$ укреплена в вертикальной плоскости на шарнирах P и P' (см. рисунок). Трение во всех подвижных соединениях пренебрежимо мало. Все размеры твердых уголков $AA'CD$ и $BB'GH$ одинаковы; кроме того,

$$AP = A'P' = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} P'B',$$

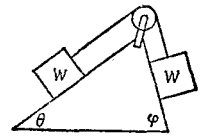
$$CD = GH = \frac{1}{2} AP.$$

Благодаря противовесу w_c рама в отсутствие грузов W_1 и W_2 находится в равновесии. Если в точке D

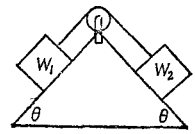
подвесить груз W_1 весом 0,5 *кг*, то какой следует подвесить груз W_2 в точке H, чтобы сохранить равновесие?



4.10. Через блок перекинуты равные грузы, которые опираются без трения на наклонные плоскости (см. рисунок). Если позволить грузам двигаться, какую скорость они приобретут, пройдя расстояние D?

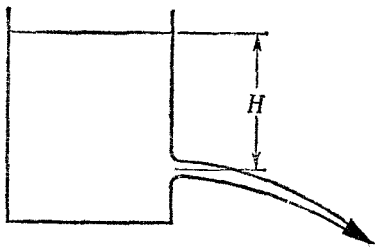


4.11. Два груза W_1 и W_2 разного веса ($W_1 > W_2$) удерживаются в состоянии покоя на гладких наклонных плоскостях. Если позволить им двигаться, то какова будет их скорость после прохождения расстояния D?

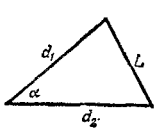


4.12. В бак с площадью поперечного сечения A налита жидкость плотности ρ. Жидкость свободно вытекает

из небольшого отверстия, расположенного на расстоянии H ниже уровня жидкости. Площадь отверстия равна α. Если внутреннее трение (вязкость) в жидкости отсутствует, с какой скоростью она вытекает из отверстия?



4.13. Из решения приведенных выше задач должно быть ясно, что рассмотрение статического равновесия в отсутствие трения можно свести, используя принцип виртуальных перемещений, к проблеме чисто геометрического характера: куда сместится одна точка, если малое смещение другой задано? Во многих случаях на этот вопрос легко ответить, используя следующие свойства треугольников:



I. Если при постоянной длине сторон d_1 и d_2 угол меняется на малую величину $\Delta\alpha$, то длина противолежащей стороны L меняется на

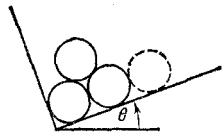
$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin\alpha \Delta\alpha.$$

II. Если длины сторон прямоугольного треугольника a, b и c изменяются соответственно на Δa, Δb и Δc, то эти изменения связаны между собой соотношением

$$a\Delta a + b\Delta b = c\Delta c.$$

(c — гипотенуза). Можете ли вы доказать эти формулы?

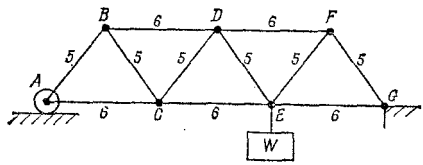
4.14. Грузовик загружен одинаковыми гладкими бревнами. Он заехал в кювет и стоит, накренившись на один борт, причем дно кузова образует с горизонталью угол θ (крена в продольном направлении нет — грузовик стоит «на ровном киле»). Заканчивается разгрузка кузова. Если удалить бревно, показанное на рисунке пунктиром, то последние три бревна при малейшем уменьшении угла θ раскатятся. Найдите угол θ.



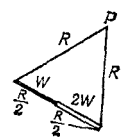
4.15. Длины наклонных и горизонтальных стержней фермы, показанной на рисунке, относятся как 5 : 6. Все соединения шарнирные, свободные, и вес самой фермы пренебрежимо мал.

а) Какие стержни при данном положении груза W можно заменить гибкими связями?

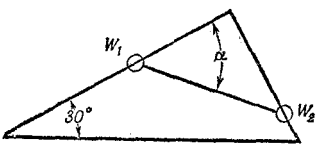
б) Найдите усилие в стержне BD.



4.16. Стержень длины R составлен из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых весит вдвое больше другого. Стержень подвешен за концы на двух нитях длины R, прикрепленных к гвоздю в точке P. Какой угол с горизонталью образует стержень в положении равновесия?



4.17. Из прочной проволоки изготовлена рамка в форме прямоугольного треугольника и помещена в вертикальной плоскости, как показано на рисунке. По проволоке без трения скользят связанные нитью два грузика весом $W_1=100$ *г* и $W_2=300$ *г*. Чему равно натяжение нити и угол α в положении равновесия?



К главе 6. **Вероятность**

6. 1. «Молекула воздуха» при температуре 25° С и давлении 760 *мм рт. ст.*, двигаясь со средней скоростью 450 *м/сек*, успевает между двумя последовательными столкновениями пролететь около $7\cdot10^{-6}$ *см*. Если в воздухе отсутствует *струйное*, макроскопическое движение, то сколько примерно времени понадобится молекуле, чтобы удалиться на 1 *см* от точки, в которой она находится в данный момент?

6. 2. В сумке у мальчика три красных, два зеленых и один белый шарик. Он вынимает, не глядя, три первых попавшихся под руку шарика. Какова вероятность того, что:

а) все три шарика разного цвета?

б) все три шарика одного цвета?

6. 3. Неподвижная сфера радиуса b «обстреливается» потоком маленьких шариков радиуса a. Будем предполагать, что рассеяние абсолютно упругое и что угол падения равен углу отражения (они отсчитываются от линии, соединяющей центры сферы и шарика в момент соприкосновения). Получите выражение для относительной доли шариков, рассеиваемых на разные углы. Результат представьте

в виде формулы для сечения рассеяния. Убедитесь, что результат для полного сечения рассеяния сводится к очевидному выражению $\pi(a+b)^2$.

К главе 7. ***Теория тяготения***

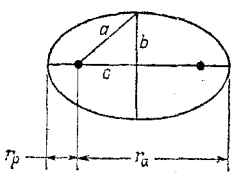
Приведем некоторые свойства эллипса. Его размеры и форма полностью определяются заданием любых двух следующих величин:

a — большая полуось;
b — малая полуось;
c — расстояние от центра до одного из фокусов;
e — эксцентриситет;
r_p — кратчайшее расстояние от фокуса до линии эллипса;
r_a — наибольшее расстояние от фокуса до линии эллипса.

Соотношения между этими величинами имеют вид

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad e = \frac{c}{a} \text{ (по определению)},$$

$$r_p = a - c = a(1-e), \qquad r_a = a + c = a(1+e).$$



• • •

7. 1. Расстояние от Луны до центра Земли изменяется от 363 300 *км* в перигее до 405 500 *км* в апогее, период обращения Луны вокруг Земли составляет 27,322 дня. Искусственный спутник Земли движется по орбите так, что расстояние от земной поверхности в перигее равно 225 *км*, а в апогее 710 *км*. Средний диаметр Земли равен 12 756 *км*. Определите период обращения спутника.

7. 2. Спутник движется по круговой орбите радиуса R вокруг большого небесного тела массы M. Масса спутника m.

а) Используя соотношение $s=at^2/2$ и рассуждения, изложенные в гл. 7 «Лекций», получите выражение для центростремительного ускорения, которое испытывает спутник, движущийся по круговой орбите. Выразите это ускорение через орбитальную скорость и радиус орбиты.

б) Полагая $ma=GMm/R^2$, получите третий закон Кеплера.

7. 3. а) Сравнивая параметры орбитальных движений Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, определите отношение массы Солнца к массе Земли. (Можете при этом использовать соотношения, полученные в предыдущей задаче.)

б) Ио, спутник Юпитера, совершает оборот по орбите радиуса 421 800 *км* за 1,769 дня. Определите отношение массы Юпитера к массе Земли.

7. 4. Используя представление о том, что два взаимно притягивающихся тела непрерывно «падают» друг на друга и в результате обращаются вокруг одной общей неподвижной точки (центра масс системы), покажите, что период обращения при фиксированном расстоянии R между телами зависит только от суммы их масс, но не от отношения масс. Это утверждение справедливо и для эллиптических орбит. Попытайтесь его доказать.

7. 5. Две звезды a и b движутся одна вокруг другой под действием взаимного гравитационного притяжения. Большая полуось орбиты этого относительного движения, измеренная в астрономических единицах (*А. Е.*), равна R, а период обращения составляет T лет. Получите выражение для отношения суммы масс звезд m_a+m_b к массе Солнца.

7. 6. Тригонометрический параллакс Сириуса (т. е. угол, под которым с Сириуса виден радиус земной орбиты) равен 0,378 *угл. сек.* Используя это значение и численные данные, приведенные на фиг. 7.7 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 131), определите возможно точнее суммарную массу системы Сириуса по отношению к массе Солнца:

а) считая, что плоскость орбиты относительного движения Сириуса *A* и Сириуса *B* перпендикулярна направлению на Землю;
б) учитывая, что реальный угол между плоскостью орбиты и направлением на Землю отличается от прямого, является ли значение массы, полученное вами, предельным? Если да, то верхний это предел или нижний?

7. 7. Эксцентриситет земной орбиты равен 0,0167. Найдите отношение максимального значения орбитальной скорости Земли к минимальному значению.

7. 8. В 1986 г. ожидается появление кометы Галлея. Это будет ее седьмое возвращение из путешествия вокруг Солнца, если начинать счет с тех дней 1456 г., когда перепуганные люди возносили в церквях молитвы, прося защитить их от «дьявола, турка и кометы». Во время ее последнего прохождения через перигелий 19 апреля 1910 г. было измерено расстояние между нею и Солнцем, оказавшееся равным 0,60 *А. Е.*
а) На какое расстояние уходит комета от Солнца в самой дальней точке своей траектории?
б) Чему равно отношение максимального значения ее орбитальной скорости к минимальному?

7. 9. Как можно определить массу Луны?

7.10. Радиусы Земли и Луны равны 6378 и 1738 *км* соответственно, а их массы находятся в отношении 81,3 : 1. Рассчитайте ускорение силы тяжести на Луне, если на Земле оно равно 9,8 *м/сек*^{2}.

7.11. Какова должна быть точность экспериментального определения g, чтобы стал заметен «суточный ход» этой величины из-за наличия лунного притяжения? Для простоты будем предполагать, что лаборатория, в которой производятся измерения, имеет такое географическое расположение, что Луна проходит над ней в зените, а «под ней» — в надире. Пренебрегайте влиянием приливов.

К главе 8. Движение

8. 1. Тело движется по прямой линии с постоянным ускорением a. При $t=0$ оно находится в точке $x=x_0$ и имеет скорость $v_x=v_{x0}$. Покажите, что в момент времени t положение и скорость тела определяются соотношениями

$$x(t)=x_0+v_{x0}t+\frac{1}{2}at^2,$$
$$v_x(t)=v_{x0}+at.$$

8. 2. Исключите время из формул, приведенных в предыдущей задаче, и покажите, что в любой момент времени выполняется равенство

$$v_x^2=v_{x0}^2+2a(x-x_0).$$

8. 3. Обобщите результаты двух последних задач на случай трехмерного движения с постоянным ускорением, проекции которого на координатные оси равны a_x, a_y и a_z.

8. 4. Снаряд выпущен из орудия, установленного на уровне земли, с начальной скоростью v под углом θ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите расстояние, которое он пролетит, и максимальную высоту, которой он достигнет в полете.

8. 5. Под каким углом к горизонту следует установить ствол орудия, чтобы снаряд (см. предыдущую задачу) пролетел максимальное расстояние?

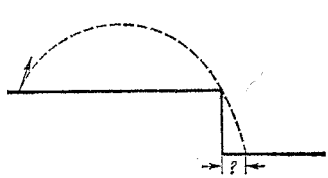
8. 6. Новичок, незнакомый с обычаями регулировщиков движения на наших пригородных дорогах, был наказан штрафом за превышение скорости. Поэтому, увидев на ровном участке дороги плакат «Проверьте спидометр», он решает последовать этому совету. Пройдя линию «0» размеченного участка шоссе, он нажимает на акселератор и в течение всего времени проверки заставляет свою машину двигаться с постоянным ускорением. Он замечает, что мимо столбика с отметкой «0,1 мили» его машина проходит через 16 *сек* после начала испытания,

а еще через 8 *сек* он проезжает мимо отметки «0,2 мили».
а) Каково будет в этот момент показание его спидометра?
б) С каким ускорением двигалась машина?

8. 7. Ракета, запущенная в вертикальном направлении, движется с ускорением $2g$ в течение всех 50 *сек* работы двигателя. Пренебрегая сопротивлением воздуха и изменением величины g с высотой:
а) начертите диаграмму v—t (зависимость скорости от времени) для всего времени полета;
б) определите максимальную высоту, которой достигла ракета;
в) рассчитайте полное время полета от момента запуска до возвращения на Землю.

8. 8. На длинном горизонтальном участке полигона испытываются ракетные и авиационные реактивные двигатели. Однажды тележка с ракетным двигателем, стартуя с места, двигалась с постоянным ускорением, пока не выгорело все горючее, а потом она продолжала двигаться с постоянной скоростью. Горючее, как оказалось, кончилось ровно посередине отмеренного расстояния. Затем из той же начальной точки начала разгоняться тележка с авиационным реактивным двигателем, которая прошла с постоянным ускорением *все* расстояние. Оказалось, что обе тележки прошли известное расстояние за одинаковое время. Чему равно отношение ускорений, развиваемых ракетным и авиационным двигателями?

8. 9. Миномет установлен на расстоянии 8100 *м* от вертикального обрыва высотой 105 *м* (см. схему). Необходимо минометным огнем поразить цели, скрытые за обрывом. Как близко к основанию обрыва могут «подобраться» мины, если их начальная скорость составляет 300 *м/сек*?



8.10. Угол можно измерять длиной дуги окружности, которую отсекает угол, если его вершина находится в центре окружности. Если S — длина дуги, а R — радиус окружности, то угол в радианах равен

$$\theta = \frac{S}{R}.$$

а) Покажите, что если $\theta \ll 1$ *рад*, то $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$.

б) Используя полученный результат и формулы для косинуса и синуса суммы двух углов, найдите производные от $\sin x$ и $\cos x$, применяя основную формулу

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

8.11. Тело движется по кругу радиуса R против часовой стрелки с постоянной скоростью v. Центр окружности помещается в начале прямоугольной системы координат (x, y), и в момент $t=0$ тело находится в точке с координатами $(R, 0)$.

а) Найдите x, y, v_x, v_y, a_x, a_y как функции времени.

б) Покажите, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

и

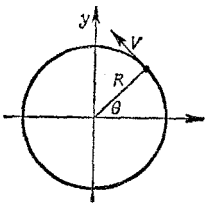
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где

$$\omega = \frac{v}{R},$$

а точка над буквой означает производную по времени, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$



8.12. Небольшой камешек застрял в узоре протектора автомобильной шины радиуса R. Шина катится по горизонтальной дороге без проскальзывания с постоянной скоростью v. Найдите выражения для координат камешка x и y как функций времени (в момент времени $t=0$ камешек касается дороги). Найдите также зависимость от времени компонент скорости и ускорения камешка.

К главе 9. ***Динамические законы Ньютона***

9. 1. Частица с массой m движется в области пространства, где на нее действует сила, пропорциональная скорости частицы и перпендикулярная одновременно двум направлениям — вектору скорости и оси z. В начальный момент скорость частицы равна v_0 и лежит в плоскости $x - y$. Покажите, что частица движется по круговой орбите и найдите радиус этой орбиты. Пусть коэффициент пропорциональности в выражении для силы через скорость равен β, т. е. $F=\beta v$.

9. 2. Найдите радиусы кривизны орбиты, изображенной на фиг. 9.6 в «Лекциях» (вып. 1, стр. 173) в моменты времени $t=0$, $t=0{,}82$ и $t=2{,}086$ *сек*.

9. 3. Мальчик бросает мяч вверх под углом 70° к горизонту и попадает прямо в открытое окно, которое расположено на 9,6 *м* выше его плеча. Мяч влетает в окно горизонтально.

а) С какой скоростью вылетел мяч из руки?

б) Чему равен радиус кривизны траектории мяча, когда он перелетает через подоконник? Можете ли вы определить радиус кривизны траектории в любой момент времени?

9. 4. Джим и Джо, два специалиста по космической физике, выросшие на разных планетах, встречаются на межпланетном симпозиуме Палаты мер и весов, посвященном утверждению универсальной системы физических единиц. Джим с гордостью описывает

заслуги системы MKSA, которой пользуются все цивилизованные люди на Земле. Джо с неменьшей гордостью превозносит прелести системы M′K′S′A′, которой пользуются цивилизованные люди по всей Солнечной системе, кроме Земли. Если постоянные множители, которые связывают единицы массы, длины и времени в этих двух системах, равны μ, λ и τ, так что

$$m' = \mu m, \qquad l' = \lambda l \quad \text{и} \quad t' = \tau t,$$

то какие множители потребуются для перевода единиц измерения скорости, ускорения, силы и энергии из одной системы в другую?

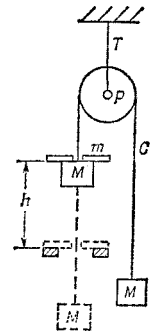
9. 5. Как будут связаны между собой численные значения гравитационной постоянной, измеренные в двух системах единиц, описанных в предыдущей задаче?

9. 6. Чему будет равно численное значение величины $GM_{\odot}$, если расстояние измерять в астрономических единицах, а время в годах?

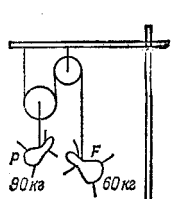
9. 7. Если изготовить модель Солнечной системы в одну k-ю натуральной величины из материалов той же самой средней плотности, которая известна для настоящих планет и Солнца, то как будут зависеть от «масштабного фактора» k периоды обращения «планет» модели по своим орбитам?

9. 8. На схеме изображена машина Атвуда — одно из первых приспособлений для измерения ускорения силы тяжести. Массы блока P и нитей пренебрежимо малы, трение отсутствует. С обеих сторон блока подвешены грузы одинаковой массы M, и система находится в равновесии. Затем на один из грузов кладется маленький разновесок m, и этот груз начинает опускаться. После того как он пройдет расстояние h, разновесок подхватывается специальным упором и грузы продолжают движение с постоянной скоростью v. Найдите ускорение силы

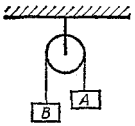
тяжести g, если величины m, M, h и v известны.



9. 9. Двое молодых марсиан, Паоло и Франческа, хотят переправиться через марсианский канал Римини, но ни одна гондола не берет их обоих сразу, а переправляться в разных лодках они отказались. Находчивый гондольер Джузеппе умудряется все-таки заработать на их переезде. Он подвешивает эту парочку на мачте (см. рисунок) с помощью невесомых и абсолютно гладких блоков и веревок (характерная особенность всех марсианских конструкций) и быстро переправляет влюбленных через канал, пока ни один из них не успевает коснуться ни мачты, ни палубы. Много ли при этом Джузеппе выигрывает в нагрузке? Напоминаем: натяжение невесомой нити, перекинутой без трения через невесомый блок, одинаково с обеих сторон блока.



9.10. Космический путешественник собирается отправиться на Луну. У него есть пружинные весы и гиря A массой 1 *кг*. Если подвесить эту гирю на пружине весов на Земле, они покажут 1 *кГ*. Опустившись на некотором участке лунной поверхности, где ускорение силы тяжести точно не известно (известно лишь, что оно примерно в шесть раз меньше, чем на Земле), космонавт подбирает камень B, который вытягивает на весах тот же самый 1 *кГ*. Затем он подвешивает A и B на нити, перекинутой через блок, как показано на рисунке, и обнаруживает, что камень опускается с ускорением 1,2 *м/сек*^{2}. Чему равна масса камня B?



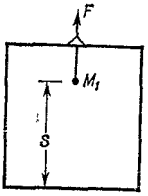
9.11. К потолку лифта, масса которого M_2, подвешен груз массы M_1. Приложенная сила F заставляет лифт двигаться с ускорением вверх [F больше $(M_1+M_2)g$]. Груз M_1 находится на расстоянии S от пола лифта.

а) Найдите ускорение лифта.

б) Чему равно натяжение нити, которой груз привязан к потолку?

в) Нить внезапно оборвалась. Чему равно ускорение лифта и груза M_1 в следующий момент?

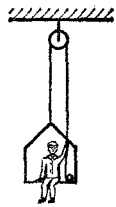
г) Сколько времени пройдет от момента разрыва нити до удара груза M_1 об пол?



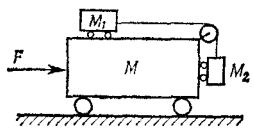
9.12. Маляр работает в подвесном кресле (см. рисунок). Вес его 72 *кГ*. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что его давление на кресло уменьшается до 40 *кГ*. Само кресло весит 12 *кГ*.

а) Чему равно ускорение маляра и кресла?

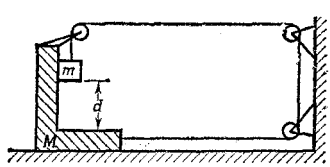
б) Чему равна полная нагрузка на блок?



9.13. Посмотрите на рисунок. Какую постоянную горизонтальную силу нужно приложить к M, чтобы M_1 и M_2 относительно M не двигались?



9.14. В системе, изображенной на рисунке, трение между любыми поверхностями отсутствует. Если грузику с массой $m=150$ *г*, находящемуся над рамой на расстоянии 1,2 *м*, позволить двигаться, то за какое время он пройдет это расстояние? Масса рамы $M=1650$ *г*.



9.15. Груз, подвешенный на пружине, неподвижен. Затем он приводится в движение ударом, направленным

снизу вверх, и в начальный момент его скорость равна единице. Масса и упругость пружины таковы, что уравнение движения имеет вид $\ddot{x}=-x$. Найдите максимальную высоту, которой достигнет груз, путем численного интегрирования уравнения движения.

9.16. Тело с массой m движется прямолинейно. Движение тормозится силой, пропорциональной скорости тела, $F=-kv$. Найдите x как функцию времени численным интегрированием, если в начальный момент $t=0$, $x=0$ и $v=v_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое тело потеряет половину своей скорости, и максимальное расстояние x_m, которое пройдет тело.

Примечание. а) Подберите временной и линейный масштабы так, чтобы уравнение движения имело простые численные коэффициенты.

б) Придумайте схему расчета (аналогичную приведенной в тексте «Лекций»), которая обеспечивала бы хорошую точность при сравнительно большом шаге Δt.

в) Используйте соображения размерности, чтобы выяснить, как $t_{1/2}$ и x_m зависят от v_0, k и m, а уравнение движения решите только для одного удобного значения v_0, скажем для $v_0=1{,}00$ (в модифицированных единицах x и t).

9.17. Заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях согласно уравнениям движения

$$\frac{dv_x}{dt}=-2v_y$$

и

$$\frac{dv_y}{dt}=1+2v_x.$$

При $t=0$ частица находится в точке (0,0) и скорость ее имеет составляющие $v_x=1{,}00$ и $v_y=0$. Определите тип движения с помощью численного интегрирования. Прочтите примечание (б) к предыдущей задаче.

9.18. Мина вылетает из ствола миномета со скоростью 300 *м/сек* под углом 45° к горизонту. Ее движение

тормозится силой, пропорциональной кубу скорости ($F=-kv^3$). Коэффициент пропорциональности k таков, что при скорости 300 *м/сек* сила сопротивления вдвое превышает вес мины. Численным интегрированием найдите приближенные значения максимальной высоты, на которую поднимется мина, и расстояние от точки выстрела, на котором она упадет на землю. Сравните их с величинами, получающимися при отсутствии сопротивления воздуха.

К главе 10. ***Закон сохранения импульса***

10. 1. В горизонтальном воздушном желобе (он описан в гл. 10 «Лекций», вып. 1, стр. 181) могут свободно двигаться два тела. Одно неподвижно, а другое налетает на него, и происходит абсолютно упругое столкновение, после чего тела разлетаются в противоположных направлениях с равными скоростями. Чему равно отношение их масс?

10. 2. Два одинаковых массивных тела движутся навстречу друг другу в горизонтальном воздушном желобе с одинаковыми по величине скоростями v и $-v$. Происходит почти упругое соударение, и они разлетаются в противоположные стороны с несколько меньшими скоростями. При столкновении теряется доля кинетической энергии $f \ll 1$. Если бы до столкновения одно из этих тел покоилось, какова была бы скорость второго тела после столкновения? (Эту маленькую остаточную скорость Δv легко выразить через v — конечную скорость тела, покоившегося до столкновения, и таким путем определить упругость пружинных буферов.)

Примечание. Если $x \ll 1$, то $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$.

10. 3. Спутник Земли весом 10 *кг* со средним поперечным сечением 0,50 $м^2$ движется по круговой орбите на высоте 200 *км*, где средний пробег молекул измеряется многими метрами и плотность воздуха равна $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ $кг/м^3$. Приближенно будем считать соударения молекул со спутником абсолютно

неупругими (молекулы не то чтобы прилипают к спутнику, но отскакивают от него с очень малыми относительными скоростями). Подсчитайте, какая тормозящая сила будет действовать на спутник за счет трения о воздух. Как будет зависеть эта сила от скорости спутника? Будет ли скорость спутника уменьшаться под действием всех приложенных к нему сил? (Учтите зависимость орбитальной скорости спутника от высоты круговой орбиты.)

10. 4. Ракета, первоначальная масса которой M_0 *кг*, выбрасывает продукты сгорания топлива с постоянной скоростью v_0 (по отношению к ракете). В 1 *сек* выбрасывается $dm/dt = -r_0$ *кг/сек* газов.

а) Рассчитайте ускорение ракеты в начальный момент, пренебрегая силой тяжести.

б) Если скорость истечения $v_0 = 2{,}0$ *км/сек*, сколько килограммов газов в секунду необходимо выбрасывать для создания тяги 10^5 *кГ*?

в) Запишите дифференциальное уравнение, которое связывает скорость ракеты с ее остаточной массой, и, если можете, решите это уравнение.

10. 5. Если два тела движутся по одной прямой, то существует такая система координат, в которой импульс одного тела равен по величине и противоположен по направлению импульсу другого тела. Это значит, что суммарный импульс двух тел в такой системе равен нулю. Такая система отсчета называется системой центра масс (сокращенно ц. м.). Если массы тел равны m_1 и m_2, а тела движутся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, то покажите, что скорость системы ц. м. равна

$$v_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

10. 6. Обобщите результат задачи **10.5** на произвольное число тел, движущихся по одной прямой, т. е. найдите скорость системы координат, в которой суммарный импульс всех этих тел равен нулю.

10. 7. Пусть T — полная кинетическая энергия двух тел в задаче **10.5**, а $T_{\text{ц.м.}}$ — их полная кинетическая

энергия в системе ц. м. Покажите, что

$$T = T_{\text{ц.м.}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_{\text{ц.м.}}^2.$$

10. 8. Можете ли вы обобщить результат задачи **10.7** на произвольное число тел?

10. 9. Нейтрон с кинетической энергией E испытывает лобовое столкновение с покоящимся ядром C^{12} и отскакивает от него после абсолютно упругого соударения в направлении, прямо противоположном начальному направлению своего движения. Как изменится кинетическая энергия нейтрона после соударения?

10.10. Скорость ружейной пули можно измерить с помощью баллистического маятника: пуля с известной массой m и неизвестной скоростью v попадает в покоящийся деревянный брусок массы M, подвешенный на нити длиной L, и застревает в нем. Брусок при этом приходит в движение. Амплитуду его колебаний x можно измерить и, используя закон сохранения энергии, определить тем самым скорость бруска сразу после попадания в него пули. Выразите скорость пули через m, M, L и x.

К главе 11. **Векторы**

11. 1. Если три вектора заданы равенствами $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, получите

а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$,
б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$,
в) a_x,
г) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}$,
д) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$,
е) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

11. 2. Велосипедист едет со скоростью 10 миль в час в северном направлении, и ему кажется, что ветер (который дует со скоростью 6 миль в час откуда-то с северо-востока) направлен почти навстречу ему, под углом 15° к линии его движения.

а) Определите истинное направление ветра.
б) Найдите кажущееся направление ветра с точки зрения велосипедиста, который едет в обратном направлении с той же скоростью 10 миль в час.

11. 3. Вы находитесь на судне, которое идет на восток с постоянной скоростью 15 узлов. Корабль, идущий постоянным курсом с известной скоростью 26 узлов, находится в 6 милях южнее. Позднее он проходит у вас за кормой, причем расстояние наибольшего сближения составляет 3 мили.
а) Найдите курс этого корабля.
б) Какое время прошло между двумя моментами, описанными в задаче?

11. 4. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Колесо расположено в вертикальной плоскости, а ось его движется горизонтально с постоянной скоростью v относительно поверхности. Вычислите величину и направление скорости произвольной точки на ободе колеса. Убедитесь, что скорости точек на ободе таковы, как если бы колесо вращалось вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной поверхностью.

11. 5. Моторная лодка, скорость которой относительно воды равна v, движется по прямолинейному участку реки. Скорость течения постоянна и равна u. Сперва лодка поднимается вверх по течению на расстояние d от своей стоянки и возвращается обратно, а затем отправляется в пункт на противоположном берегу реки как раз напротив стоянки и возвращается обратно. Ширина реки также равна d. Для простоты будем предполагать, что лодка все время движется с постоянной скоростью, и на разворотах время не теряется. Если t_V — время поездки вдоль реки, t_A — время поездки поперек, а t_L — время, за которое лодка прошла бы расстояние $2d$ по озеру, то:
а) чему равно отношение t_V/t_A?
б) чему равно отношение t_A/t_L?

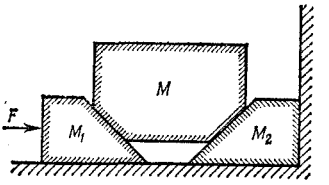
11. 6. Человек, стоящий на берегу реки шириной в 1 милю, хочет переправиться на другой берег, в прямо противоположную точку. Он может сделать это двумя способами: 1) плыть все время под углом к течению, так что результирующая скорость будет все время перпендикулярна берегу; 2) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5 мили в час, а идет со скоростью 4 мили в час. Скорость течения 2 мили в час. Какой способ позволит переправиться скорее?

11. 7. Даны два одинаковых клина с углами наклона 45° и одинаковыми массами $M_1=M_2=8{,}0$ *кг*. Все плоскости абсолютно гладкие, как и у груза с массой $M=384$ *кг*, который требуется приподнять с помощью этих клиньев. Оба клина лежат на гладкой горизонтальной плоскости; один из них упирается в вертикальную стену, а к другому приложена горизонтальная сила $F=592$ *кГ*.

а) Найдите величину и направление ускорения подвижного клина M_1.

б) Найдите величину и направление ускорения груза M.

в) С какой силой давит неподвижный клин M_2 на груз M?



11. 8. Материальная точка с массой m висит на конце нити произвольной заданной длины, а другой конец нити прикреплен к шаровому шарниру, в котором отсутствует трение. Эта материальная точка приводится в движение по круговому горизонтальному пути, который лежит в плоскости, отстоящей от шарнира на H. Найдите период движения.

11. 9. Обобщите результаты задач **10.5** и **10.8** на трехмерное движение, используя векторную символику. Введите обозначение $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$.

11.10. «Частица» с массой $m_1=2$ *кг*, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_1=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ *м/сек*, испытывает абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой $m_2=3$ *кг*, а скорость $\mathbf{v}_2=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ *м/сек*. Найдите скорость получившейся составной частицы.

11.11. Найдите кинетическую энергию частиц, описанных в задаче **11.10**, в системе ц. м. до столкновения.

11.12. Тело с массой 1 *кг*, движущееся точно на север со скоростью 6 *м/сек*, сталкивается с покоящимся телом, масса которого 2 *кг*. После соударения тело с меньшей массой движется под углом 45° к направлению своего первоначального движения (на северо-восток) со скоростью 2,82 *м/сек*.

а) Чему равна скорость тела с массой 2 *кг*?

б) Какая доля кинетической энергии в системе ц. м. «пропала» из-за неупругости соударения?

в) На какой угол отклонилось более легкое тело в системе ц. м.?

11.13. Движущаяся частица испытывает абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей равной массы. Покажите, что после соударения частицы разлетаются под прямым углом.

При анализе двухчастичных столкновений полезно использовать следующий подход:

1) Найдите $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$, т. е. скорость системы ц. м.
2) Вычтите $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$ из $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (скорости первой и второй частиц до столкновения), чтобы получить начальные скорости в системе ц. м., т. е. $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$.
3) Импульсы обеих частиц теперь равны по величине и противоположны по направлению.
4) Происходит столкновение, в результате которого:
   а) поворачивается линия относительно движения частиц 1 и 2;
   б) абсолютные величины векторов $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ увеличиваются, уменьшаются или остаются не-

изменными в зависимости от того, выделяется, поглощается или остается неизменной энергия в процессе столкновения.

5) Прибавьте $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$ к скоростям $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ в системе ц. м. после соударения. Получатся скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ после столкновения в «лабораторной» системе.

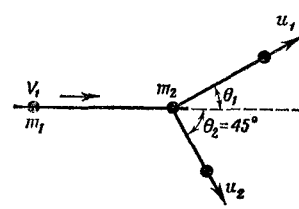
11.14. Два маленьких шарика A и B движутся под действием силы тяжести с ускорением 9,8 *м/сек*^{2}. Масса каждого шарика равна 1 *г* (ускорение считать направленным по оси z).

Заданы следующие начальные условия: при $t=0$

$$\mathbf{r}_a(0)=7\mathbf{i}+4{,}9\mathbf{k}\ м, \qquad \mathbf{v}_a(0)=7\mathbf{i}+3\mathbf{j}\ м/сек,$$
$$\mathbf{r}_b(0)=49\mathbf{i}+4{,}9\mathbf{k}\ м, \qquad \mathbf{v}_b(0)=-7\mathbf{i}+3\mathbf{j}\ м/сек.$$

Найдите $\mathbf{r}_a(t)$ и $\mathbf{r}_b(t)$ для *всех* моментов времени $t>0$.

11.15. Частица массы m_1 налетает со скоростью $\mathbf{v}_1$ на покоящуюся частицу, масса которой $m_2=3m_1$. Происходит абсолютно упругое соударение, после которого частица m_2 движется под углом $\theta_2=45°$ к первоначальному направлению движения частицы m_1 (см. рисунок). Требуется найти θ_1— угол отклонения первой частицы и величины скоростей $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.



11.16. Частица массы M налетает на покоящуюся частицу массы m ($m<M$), и происходит упругое столкновение. Найдите максимально возможное значение угла отклонения налетающей частицы.

11.17. Частица массы m упруго сталкивается с покоящейся, масса которой $M>m$, и отклоняется от первоначального направления на 90°. Под каким углом θ к направлению первоначального движения полетит более тяжелая «частица отдачи»?

11.18. Пусть в столкновении, описанном в предыдущей задаче, теряется доля $1-\alpha^2$ кинетической энергии в системе ц. м. Чему равен в этом случае угол вылета частицы отдачи, покоящейся до столкновения?

11.19. Частица с массой 1 *кг* движется так, что ее положение в любой момент времени определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sin \pi \frac{t}{2}\,\mathbf{k}.$$

а) Определите положение, скорость, ускорение и кинетическую энергию частицы в моменты времени $t=0$ и $t=1$ *сек*.

б) Получите выражение для силы, которая заставляет частицу двигаться.

в) Найдите радиус кривизны траектории частицы в момент времени $t=1$ *сек*.

11.20. В начальный момент частица находится в точке $\mathbf{r}_0$ и имеет скорость $\mathbf{v}_0$. Определите ее дальнейшее движение под действием силы тяжести.

11.21. Используйте векторную алгебру для нахождения расстояния по дуге большого круга между двумя точками земной поверхности, долгота и широта которых равны соответственно (λ_1, φ_1) и (λ_2, φ_2).

Примечание. Используйте прямоугольную систему координат с началом в центре Земли. Одну ось этой системы направьте вдоль земной оси, другую — в направлении, определяемом углами $\lambda=0$, $\varphi=0$, а третью — под углами $\lambda=0$, $\varphi=90°$. (Долгота пусть меняется от 0 до 360° с востока на запад.)

11.22. Чему равны величина и направление ускорения Луны:

а) в новолуние?

б) в первую четверть?

в) в полнолуние?

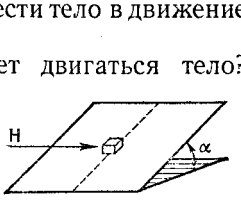
Примечание. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5\cdot 10^8$ *км*, расстояние от Земли до Луны $3{,}85\cdot 10^5$ *км*, масса Солнца составляет $3{,}33\cdot 10^5$ земных масс.

К главе 12. ***Характеристики силы***

12. 1. Кирпич массы m скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол θ. Если коэффициент трения скольжения $\mu < \operatorname{tg}\theta$, то с каким ускорением будет двигаться кирпич:
а) вверх по плоскости?
б) вниз по плоскости?
в) под углом φ к горизонтальной линии на плоскости?
(Представьте себе, что к плоскости приложена гладкая линейка, вдоль которой и движется кирпич. Используйте в наклонной плоскости координаты x и y; x направьте по горизонтали, а y — вверх по наклонной плоскости.)

12. 2. Пусть в предыдущей задаче $m=1{,}00$ *кг*, $\mu=0{,}20$, а $\theta=30°$. Если кирпич движется в начальный момент по наклонной плоскости вверх со скоростью 3,00 *м/сек*, то:
а) как далеко вверх он поднимется?
б) сколько времени ему понадобится, чтобы попасть в высшую точку и вернуться в исходную?
в) сколько энергии он потеряет за это время?

12. 3. Тело весом W покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α.
а) Коэффициент статического трения $\mu=2\operatorname{tg}\alpha$; найдите минимальную *горизонтальную* силу $H_{\text{мин}}$, которая способна будет привести тело в движение (см. рисунок).
б) В каком направлении начнет двигаться тело?

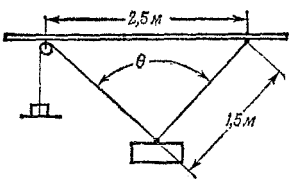


12. 4. Груз весом 1 *кг* подвешен на двух нитях. Первая нить длиной 1,5 *м* привязана к кольцу, которое скользит по горизонтальному стержню (см. рисунок). Коэффициент трения между кольцом и стержнем равен 0,75. Ко второй нити привязан грузик,

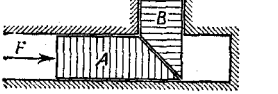
и она перекинута через блок, прикрепленный к стержню на 2,5 *м* левее кольца. Груз, подвешенный ко второму концу нити, увеличивают до тех пор, пока кольцо не начинает скользить. Найдите:

а) величину груза W, при которой кольцо начнет скользить,

б) натяжение нити длиной 1,5 *м* и угол θ.

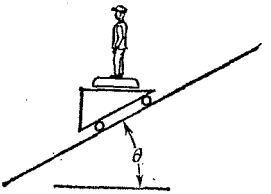


12. 5. На рисунке показан в разрезе простейший вертикальный замок. Нижняя его часть A может двигаться по горизонтальному пазу. Стенки паза абсолютно гладкие, но плоскости соприкосновения брусков A и B, наклоненные под 45° к горизонтали, шероховаты, и коэффициент трения между ними равен μ. Какова минимальная сила F, которую необходимо приложить, чтобы привести части замка в движение, если масса задвижки B равна m?

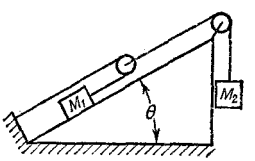


12. 6. Один неосторожный молодой человек проводит следующий опыт. Он ставит плоские медицинские весы на деревянную подставку с роликами, которая может скатываться без трения по наклонной плоскости (см. рисунок). Затем сам становится на весы и катится вниз, наблюдая за показаниями весов. Чему равен угол наклона плоскости, если весы

показывают в этот момент 120 фунтов, а молодой человек весит 160 фунтов?



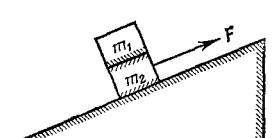
12. 7. В устройстве, показанном на рисунке, груз M_1 скользит без трения по наклонной плоскости; $\theta=30°$, $M_1=400$ *г*, $M_2=200$ *г*. Найдите ускорение груза M_2 и натяжение нитей.



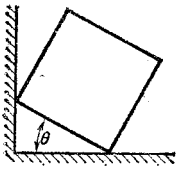
12. 8. Длина наклонной плоскости, изображенной на рисунке, 130 *см*, верхний ее конец расположен на 50 *см* выше нижнего. На этой плоскости лежат один на другом два бруска с массами m_1 (200 *г*) и m_2 (60 *г*). Коэффициент статического трения между брусками равен 0,5, а коэффициент трения скольжения между плоскостью и нижним бруском 0,33. К нижнему бруску приложена сила F, параллельная наклонной плоскости.

а) Чему равно ускорение нижнего бруска в тот момент, когда верхний только-только начинает соскальзывать с него?

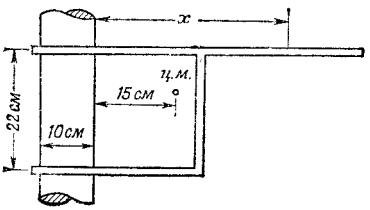
б) Чему равно значение силы F перед началом этого соскальзывания?



12. 9. Куб массы M прислонен к стене в наклонном положении, как показано на рисунке. Между кубом и стеной трение отсутствует, но между кубом и полом оно есть, и величины коэффициента трения μ как раз еле хватает на то, чтобы куб не начал скользить. Если $0<\theta<45°$, найдите это минимальное значение коэффициента трения как функцию θ. Проверьте свой ответ, рассмотрев предельные случаи $\theta \to 0$ и $\theta \to 45°$, и рассчитайте значение θ, при котором $\mu = 1$.

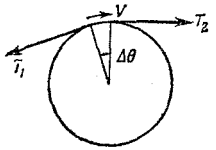


12.10. Кронштейн для подвешивания небольших грузов, который легко устанавливается на любой высоте, очень удобен. Один такой кронштейн изображен на рисунке, там же приведены и основные размеры. Он может передвигаться по вертикальной стойке и удерживается на одном уровне силой трения. Если коэффициент статического трения между кронштейном и стойкой равен 0,30, а вес груза, подвешенного на расстоянии x от стойки, в 50 раз превышает вес самого кронштейна, каково будет минимальное значение x, при котором кронштейн не соскальзывает по столбу?



12.11. а) Веревка, движущаяся с небольшой скоростью v, трется о цилиндрический столб (см. рисунок). Угол $\Delta\theta$ много меньше 1 *рад*. Если натяжение веревки с одной стороны столба равно $T+\Delta T$, а с другой T, то чему равна разность ΔT, возникающая за счет трения?

б) Проинтегрируйте результат для ΔT, полученный в пункте (а), и найдите отношение натяжений на двух концах веревки, которая заворачивается вокруг столба на конечный угол α и натянута так, что начинает проскальзывать.



12.12. Тело находится у основания абсолютно гладкой полосы длиной 1 *м*, наклоненной под углом 20° к горизонтали. Полоса начинает двигаться с горизонтальным ускорением $a=4{,}00$ *м/сек*^{2}. За какое время тело достигнет верхнего края полосы?

12.13. Напишите размерности
а) электрического поля E;
б) магнитной индукции B;
в) отношения E/B;
г) гравитационного поля.

12.14. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной магнитному полю **B**. Покажите, что движение совершается по круговой орбите, и найдите радиус орбиты.

12.15. Найдите время одного оборота частицы из предыдущей задачи. Ответ на этот вопрос необходимо знать при управлении циклотроном. Почему?

12.16. Частица с массой m и зарядом q движется в электромагнитном поле, у которого от нуля отличны только компоненты E_y и B_z.
а) Напишите уравнение движения частицы.

б) Примените преобразование Галилея к координатам частицы: $x'=x-(E_y/B_z)\,t$,

$$y'=y,$$
$$z'=z.$$

в) Какое заключение после этого можно сделать о движении частицы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях?

К главе 14. ***Работа и потенциальная энергия***

14. 1. Сила $\mathbf{F}=1{,}5y\mathbf{i}+3x^2\mathbf{j}-0{,}2(x^2+y^2)\mathbf{k}$ *ньютон* действует на материальную точку с массой 1,00 *кг*. При $t=0$ положение частицы описывается радиусом-вектором $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ *м*, и она движется со скоростью $\mathbf{v}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *м/сек*. Найдите для $t=0$:
а) силу, которая действует на частицу;
б) ускорение частицы;
в) ее кинетическую энергию;
г) скорость изменения кинетической энергии.

14. 2. Найдите приближенно положение, скорость и кинетическую энергию частицы из предыдущей задачи в момент $t=0{,}01$ *сек*.

14. 3. Частица движется от точки (0, —1,0) в точку (0, +1,0) по абсолютно гладкому пути под действием той же, что и в задаче **14.1**, силы **F** (плюс некоторая сила, удерживающая частицу и не дающая ей «сойти с пути»). Найдите работу, совершенную силой **F** для двух вариантов траектории:
а) прямая вдоль оси y;
б) окружность в плоскости $z-y$.
Является ли поле силы **F** консервативным?

14. 4. Материальная точка массы 6,0 *кг* может двигаться вдоль оси x без трения. В каждом из перечисленных ниже случаев она начинает движение при $x=0$ и $t=0$.
1) Точка проходит расстояние в 3 *м* под действием силы $F=(3+4x)$ *ньютон* (x в метрах).
а) Какую скорость она при этом приобретет?
б) Каково ее ускорение в конце пути?

в) Чему равна мощность, затрачиваемая на ее движение в этот момент?

2) Точка движется в течение 3 *сек* под действием силы $F=(3+4t)$ *ньютон* (время в секундах). Ответьте на вопросы (а) — (в) для этого случая.

14. 5. Сферическая оболочка радиуса 0,5 *м* равномерно заряжена до потенциала 10^6 *в*. Найдите ее заряд.

14. 6. Как правило, конденсатор состоит из двух металлических тел, несущих заряды разного знака. Емкость C определяется как отношение заряда на одном из тел к разности потенциалов между ними:

$$C=\frac{Q}{\varphi_2-\varphi_1}\ \phi.$$

Определите емкость двух концентрических сфер с радиусами A и B.

14. 7. Если бы Земля несла нескомпенсированный электрический заряд 1 *кулон*, чему был бы равен ее потенциал?

14. 8. Автомобиль весит 1000 *кГ*. Максимальная мощность, развиваемая его двигателем, равна 120 *квт*. Пусть эта максимальная мощность достигается на скорости 60 *км/час*. Каково ускорение автомобиля на этой скорости?

14. 9. Гибкий кабель длиной L и весом M *кГ* на погонный метр перекинут через блок, масса и радиус которого пренебрежимо малы. Трение в блоке отсутствует. В начальный момент кабель находится в положении равновесия, из которого его выводит слабый рывок за один из концов. Более длинная часть начинает перевешивать, и кабель с ускорением соскальзывает с блока. Найдите скорость кабеля в тот момент, когда через блок проходит его конец.

14.10. Вода (плотность ее 1 *г/см*^{3}) прокачивается через гладкий шланг и вырывается из его наконечника, поперечное сечение которого равно 35 *см*^{2}. Струя направлена под углом 30° к горизонту и взлетает на 4,8 *м* выше выходного отверстия. Подающий

шланг насоса погружен в большой резервуар, уровень воды в котором на 2,4 *м* ниже наконечника. Если полный к. п. д. насоса вместе с электромотором составляет 60%, какую мощность потребляет мотор?

14.11. Мировые рекорды в толкании ядра, метании диска и копья составляли в 1960 г. 19,40, 59,96 и 86,09 *м* соответственно. Массы этих метательных снарядов равны соответственно 7,257, 1,99 и 0,806 *кг*. Округлите эти цифры и сравните работу, затраченную каждым спортсменом в рекордном броске для трех снарядов, предполагая каждый раз, что снаряд вылетает под углом 45° с уровня 1,8 *м* над землей. Сопротивлением воздуха пренебрегите.

14.12. Мощность двигателя машины 85 *л. с.*, а вес машины 1200 *кГ*. При движении с постоянной скоростью 48 *км/час* мощность, развиваемая двигателем, равна всего 20 *л. с.* Найдите величину самого крутого уклона, на который эта машина может подниматься с такой скоростью, считая, что сопротивление трения от наклона дороги не зависит. (Величину уклона характеризуйте либо углом по отношению к горизонтали, либо какой-нибудь функцией этого угла.)

14.13. Масса M некоего сферического тела радиуса R равномерно распределена по его объему. Каков гравитационный потенциал и напряженность гравитационного поля, создаваемого этим телом на разных расстояниях от его центра? Представьте результат графически.

14.14. Чашка пружинных весов весит 0,025 *кГ*, а упругость пружины составляет 15,3 *ньютон/м*. Грузик массы $m=50$ *г* падает на чашку с высоты $h=9{,}0$ *см*. Соударение абсолютно неупругое. На какое максимальное расстояние опустится грузик? Отсчет ведется от точки, из которой он начал падать.

14.15. Пружина с упругой постоянной k растянута под действием постоянной силы F и находится в равновесии. Считая растяжение по-прежнему пропорциональным силе, показать, что при смещениях

относительно нового положения равновесия упругая постоянная та же.

14.16. Небольшая тележка движется без трения по наклонному пути, в нижней точке которого установлена «мертвая петля» радиуса R. С какой высоты H должна начать движение тележка, чтобы пройти петлю, не сорвавшись?

14.17. Материальная точка покоится в верхней точке абсолютно гладкой сферы радиуса R, а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние пройдет она вниз от начальной точки прежде, чем оторвется от сферы?

14.18. Небольшое тело массы m движется под влиянием гравитационного притяжения по эллиптической орбите вокруг массивного тела массы M. Тяжелое тело можно считать неподвижным. Большая полуось орбиты равна a, ее эксцентриситет равен e. Вычислите полную энергию тела E (кинетическую плюс потенциальную). Обратите внимание на то, что результат не зависит от эксцентриситета.

14.19. а) Покажите, что площадь эллипса равна πab.

б) Получите третий закон Кеплера для эллиптических орбит.

в) Покажите, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения. (Для простоты предполагайте, что $m \ll M$.)

14.20. Скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло гравитационное поле Земли, равна примерно 11 *км/сек*. Если межпланетный корабль после сгорания всего топлива (при выходе из атмосферы) двигался со скоростью 12 *км/сек*, какова будет его скорость на расстоянии 10^6 *км* от Земли?

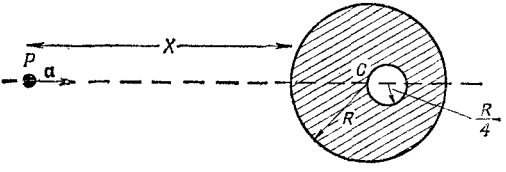
14.21. Двигатели космического корабля прекращают работу где-то в районе Земли. Какую минимальную скорость должен набрать космический корабль, чтобы покинуть пределы Солнечной системы, имея

«на выходе» скорость 16 *км/сек* относительно Солнца? Скорость Земли в ее орбитальном движении равна 30 *км/сек*.

14.22. Космический корабль из предыдущей задачи должен покинуть Солнечную систему в *определенном направлении*. Какова *максимальная* скорость запуска с Земли, которая может для этого потребоваться?

14.23. Требуется вывести космический корабль на околосолнечную орбиту с перигелием 0,01 *А.Е.* и тем же периодом обращения по орбите, который имеет Земля (1 год). С какой скоростью и в каком направлении относительно линии Земля — Солнце нужно запустить этот корабль с Земли? Орбитальная скорость Земли равна 30 *км/сек*.

14.24. Внутри сферического тела радиуса R и плотности ρ имеется сферическая полость радиуса $R/4$. Центр ее находится на расстоянии $R/4$ от точки C — центра большой сферы, на линии PC, соединяющей C с точкой P, которая находится на расстоянии X от поверхности большой сферы (см. рисунок). Найдите ускорение силы тяжести a в точке P.



2

ПРОСТРАНСТВО • ВРЕМЯ • ДВИЖЕНИЕ

К главе 15. ***Специальная теория относительности***

15. 1. Используя формулы преобразований Лоренца, выразите x, y, z и t через x', y', z' и t'.

15. 2. Проанализируйте работу «световых часов», которые ориентированы параллельно направлению своего движения. Схема этого устройства приведена на фиг. 15.3 «Лекций» (вып. 2, стр. 15). Не забудьте учесть лоренцево сокращение.

15. 3. В верхних слоях атмосферы рождается μ-мезон, движущийся со скоростью $v=0{,}99\ c$. До распада он успевает пролететь 5,00 *км*.

а) Каково время жизни μ-мезона, наблюдаемое нами, и чему оно равняется в системе координат, связанной с самим μ-мезоном?

б) Чему равна толщина слоя атмосферы, пройденного μ-мезоном, измеренная в его «собственной» системе координат?

15. 4. Производство электроэнергии Соединенными Штатами в 1962 г. составляло $2{,}15\cdot10^{12}$ *квт-ч*.

а) Какова масса вещества, превращенного при этом в энергию?

б) Представим себе, что вся эта энергия вырабатывалась бы за счет превращения дейтерия в гелий, причем разность масс использовалась бы целиком (в действительности часть ее идет на испускание нейтрино). Сколько тяжелой воды пришлось бы расходовать ежесекундно для обеспечения такого годового производства энергии?

Примечание. $M_{H^2}=2{,}0147$ *а. е. м*,
$M_{He^4}=4{,}0039$ *а. е. м.*

15. 5. Мощность солнечного излучения, поглощаемая в земной атмосфере, составляет примерно 1,4 *квт/м*^{2}. Если вся эта энергия получается на Солнце за счет превращения обычного водорода в гелий, то сколько же тонн водорода в секунду «сгорает» на Солнце? (Потерей на испускание нейтрино пренебрегите.)

15. 6. Частица с массой покоя m_0 движется вдоль оси x так, что ее положение в каждый момент времени задается формулой

$$x = \sqrt{b^2 + c^2t^2} - b.$$

Чему равна сила, под действием которой частица совершает такое движение?

15. 7. а) Выразите ускорение силы тяжести в единицах *свет.год/год*^{2}.

б) Космический корабль движется с таким ускорением, что его экипаж ощущает такую же постоянную силу тяжести, как на Земле. С точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно точки, в которой корабль находился в момент $t=0$, такой разгон продолжается 5,00 лет. На какое расстояние улетит корабль за это время и какова будет его скорость в конце разгона?

К главе 16. ***Релятивистская энергия и релятивистский импульс***

16. 1. Напишите преобразование Лоренца в дифференциальной форме: $dx=\gamma(dx'+\beta cdt')$ и т. д. и вычислите таким образом dx/dt и dy/dt, выразив эти производные через v_x', V и пр.

16. 2. Частица движется вдоль оси x со скоростью v_x и ускорением a_x. Система координат S' движется по отношению к исходной со скоростью v. Чему равны скорость и ускорение частицы в этой системе?

16. 3. Проверьте формулу $m_w=m_v\sqrt{1-(u^2/c^2)}$, полученную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 34).

16. 4. Частица массы покоя m_0, движущаяся со скоростью $4c/5$, испытывает неупругое соударение с покоящейся частицей равной массы.

а) Чему равна скорость образовавшейся составной частицы?

б) Чему равна ее масса покоя?

16. 5. Ускоритель «беватрон» в Беркли проектировался с таким расчетом, чтобы он мог разгонять протоны до энергии, достаточной для образования пар протон — антипротон в реакции $p+p \rightarrow p+p+(p+\bar{p})$. Так называемая пороговая энергия этой реакции соответствует случаю, когда четыре частицы, перечисленные в правой части формулы реакции, движутся вместе как одна частица с массой покоя $M=4m_p$. Если протоны мишени до соударения покоятся, чему равна пороговая кинетическая энергия бомбардирующих протонов?

К главе 17. ***Пространство-время***

17. 1. Масса покоя протона составляет $m_p=938$ *Мэв*. В космических лучах встречаются протоны с энергией порядка 10^{10} *Гэв* (1 *Гэв* $=10^3$ *Мэв*); появление их удается определить с помощью разных косвенных методов. Пусть протон с такой энергией пересекает по диаметру Галактику. Длина этого диаметра равна 10^5 световых лет. Сколько времени потребуется протону на это путешествие «с его точки зрения»?

17. 2. Покажите, что энергия покоя электрона $m_e c^2 = 0{,}511$ *Мэв*.

17. 3. Покоящийся π-мезон ($m_\pi=273\ m_e$) распадается на μ-мезон ($m_\mu=207\ m_e$) и нейтрино ($m_\nu=0$). Выразите в *Мэв* кинетическую энергию и импульс μ-мезона и нейтрино.

17. 4. Изучается движение заряженной частицы в магнитном поле. Если q измеряется в зарядах электрона, p — в *Мэв*, а B — в *гс*, то как связаны между собой величины p, B и R? Обозначьте $q=Zq_e$.

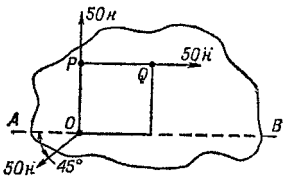
17. 5. Строится циклотрон, ускоряющий протоны до кинетической энергии 150 *Мэв*. Напряженность магнитного поля в нем составляет $1{,}00 \cdot 10^4$ *гс*.
а) Чему должен быть равен радиус магнита?
б) На какой частоте должны работать ускоряющие электроды?
в) На сколько процентов должна меняться эта частота в процессе ускорения данной частицы из-за наличия релятивистских эффектов?

К главе 18. ***Двумерные вращения***

18. 1. Сила $\mathbf{F}=30\mathbf{i}+40\mathbf{j}$ *ньютон* приложена к точке $\mathbf{r}=8\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ *м*.
Найдите:
а) момент силы относительно начала координат;
б) плечо силы;
в) составляющую силы, перпендикулярную к **r**.

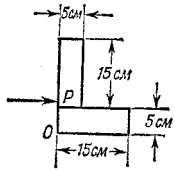
18. 2. На какой широте скорость точки земной поверхности за счет суточного вращения Земли на 200 *м/сек* меньше, чем в Лос-Анджелесе?

18. 3. На плоскую стальную пластинку, плавающую в ртути, действуют три силы, приложенные к трем разным углам квадрата со стороной 0,1 *м* (см. рисунок). Найдите силу, которая *одна* может удержать эту пластинку в положении равновесия. Найдите величину, направление и точку приложения этой силы (точка расположена на линии AB).

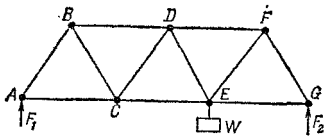


18. 4. На рисунке показан уголок, сделанный из металлического листа постоянной толщины. Он лежит на гладком горизонтальном столе. После удара, направление которого указано на рисунке, уголок

начинает двигаться по поверхности стола *без вращения*. На каком расстоянии от вершины O находится точка, в которой был нанесен удар?



18. 5. На рисунке изображена конструкция фермы моста. Она состоит из твердых невесомых стержней равной длины, соединенных между собой шарнирно. Трение в шарнирах отсутствует. Найдите силы реакции $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и усилие в стержне DF, если в точке E подвешен груз весом W.



18. 6. Вычислите моменты инерции следующих твердых тел, каждое из которых имеет массу m:

а) Тонкий прямолинейный однородный стержень длины L. Момент нужно вычислить относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

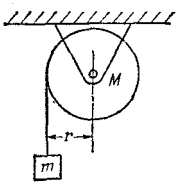
б) Тот же стержень, но ось проходит через его середину.

в) Тонкостенный полый круговой цилиндр радиуса r; относительно оси цилиндра.

г) Сплошной круговой цилиндр радиуса r; относительно оси цилиндра.

18. 7. Груз массы m подвешен на нити, обмотанной вокруг сплошного цилиндра массы M и радиуса r. Цилиндр

может вращаться вокруг своей оси без трения (см. рисунок). Найдите ускорение груза m.



18. 8. Груз массы m движется по горизонтальной гладкой поверхности стола. К грузу привязана нить, проходящая вниз через маленькое отверстие в столе. В начальный момент длина конца нити, находящегося на поверхности стола, равна r_1, а масса m движется по кругу радиуса r_1 со скоростью v_1. Затем за нить тянут снизу, и длина конца, оставшегося на поверхности стола, сокращается до r_2. Найдите:

а) скорость груза v_2 в конечном состоянии;

б) работу, совершенную силой, которая тянула нить под стол;

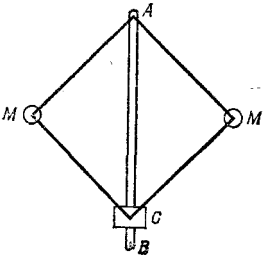
в) величину силы, которую необходимо приложить к нижнему концу нити, чтобы радиус окружности, по которой движется m, оставался постоянным.

Используйте принцип виртуальной работы.

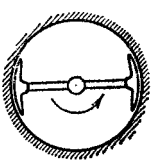
18. 9. Найдите момент количества движения планеты массы m, которая движется по круговой орбите радиуса R. Используя этот результат, покажите, что из-за приливов, тормозящих вращение Земли, расстояние между Луной и Землей с течением времени будет увеличиваться (хотя и очень медленно). Обсудите еще вопрос о сохранении энергии в системе Земля — Луна.

18. 10. Решите задачу **4.9** (стр. 14), используя следующее условие: в положении статического равновесия результирующая сила и результирующий момент, приложенные к телу, должны равняться нулю.

18.11. Центробежный регулятор, показанный на рисунке, должен выключать машину, когда скорость вращения вала превосходит 120 оборотов в минуту. Управляющая обойма C весит 4 *кг* и скользит без трения по вертикальному валу AB. Выключение происходит, когда расстояние AC сокращается до 43 *см*. Длина каждого из звеньев регулятора равна 30 *см*, их можно считать невесомыми, трение в соединительных шарнирах отсутствует. Чему должна равняться масса грузиков M, чтобы регулятор работал в соответствии с техническим заданием?



18.12. На вертикальный вал простого регулятора скорости (см. схему) перпендикулярно ему насажен горизонтальный стержень, по которому могут свободно скользить тяжелые тормозные колодки. Во время вращения вала колодки прижимаются к внутренней поверхности неподвижного тормозного цилиндра (барабана). Масса каждой колодки равна m, толщина их пренебрежимо мала по сравнению с радиусом барабана r, а коэффициент трения скольжения между колодками и барабаном равен μ. Выведите формулу, которая выражала бы мощность, необходимую для вращения вала, через m, r, μ и ω — угловую скорость вращения вала.

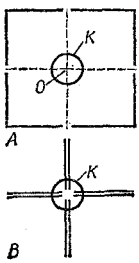


18.13. Однородный брусок длины L лежит на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Сверху на него накладываются такие же бруски так, что их боковые грани образуют одну плоскость, а торец каждого следующего бруска смещается по отношению к предыдущему на величину L/a (a — целое число). Сколько брусков удастся уложить, прежде чем все сооружение опрокинется?



К главе 19. ***Центр масс; момент инерции***

19. 1. Восемь тонких однородных стержней образуют плоский квадрат, поддерживаемый невесомой рамкой (показана пунктиром на рисунке *А*). Длина каждого стержня равна L, а масса M. Квадрат свободно вращается без трения вокруг оси O, перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью ω_0 *рад/сек*. В процессе вращения внутренний механизм K, соединенный с рамкой и имеющий постоянный момент инерции $^{40}/_3\ ML^2$, складывает квадрат в крест, изображенный на рисунке *В*. Какую он при этом затрачивает энергию?



19. 2. Упругий момент, создаваемый закручиваемой нитью, пропорционален углу закручивания $\tau_{\text{нити}} = -k\theta$.

а) Покажите, что потенциальная энергия такой нити, закрученной на угол θ, равна $^1/_2 k\theta^2$.

б) Момент, действующий на катушку гальванометра, имеет вид

$$\tau = nABi,$$

где i — ток, текущий через катушку; n — число витков в катушке; B — магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом гальванометра.

Для измерения заряда конденсатора его разряжают через катушку гальванометра и отмечают максимальный угол отклонения. При этом $|i| = |dq/dt|$, и разряд происходит так быстро, что за то время, пока течет ток, катушка не успевает существенно отклониться от начального положения $\theta = 0$. Пренебрегая трением, покажите, что максимальный угол отклонения пропорционален первоначальному заряду конденсатора.

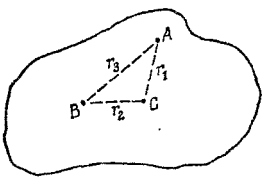
19. 3. Прямолинейная однородная проволока длины L и массы M согнута посередине, и концы ее образуют между собой угол θ. Чему равен ее момент инерции относительно оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости проволоки?



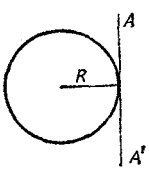
19. 4. Металлическая пластинка неправильной формы, но постоянной толщины имеет массу M и центр тяжести ее расположен в точке C. Момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластинки (и проходящей через точку A), известен и равен I_A. При каких условиях, налагаемых на расстояния r_1, r_2 и r_3, справедливо следующее выражение для момента инерции пластинки относительно оси, также

перпендикулярной плоскости пластинки, но проходящей через точку B:

$$I_B = I_A + Mr_3^2?$$



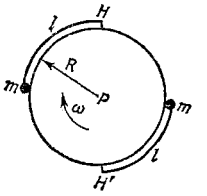
19. 5. Круг радиуса R вращается вокруг своей касательной AA'. При этом образуется тело вращения, называемое тором. Найдите объем этого тора.



19. 6. Материальные точки с массами M_1 и M_2 помещены на противоположных концах невесомого стержня длины L. Стержень приводится во вращение вокруг оси, перпендикулярной ему. Через какую точку стержня должна проходить ось вращения, чтобы энергия, затрачиваемая на достижение заданной угловой скорости ω_0, была минимальна?

19. 7. Для замедления вращательного движения искусственных спутников используется следующее устройство. Однородный круглый диск радиуса R и массы M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости вокруг шарнира P, установленного в центре диска. На краю диска укреплены два маленьких груза, масса каждого из них m. С диском их соединяют две нити длины l, намотанные по его периферии (см. рисунок). Когда диск вращается, грузики одновременно освобождаются без изме-

нения полного момента количества движения системы. После этого грузики отлетают от диска, и в тот момент, когда нити натягиваются вдоль радиальных направлений, они соскакивают с крючков H и H', позволяя грузикам улететь. Найдите длину нитей l, при которой угловая скорость диска в результате этой операции уменьшится в n раз.

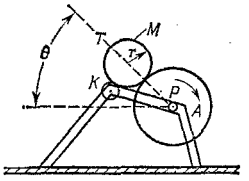


19. 8. Джим находится в системе координат (x', y') и вращается относительно Джо, который неподвижен и находится в системе координат (x, y). Найдите выражение для компонент силы, которая, по мнению Джима, действует на некоторую частицу, и покажите, что она складывается из компонент истинной силы $\mathbf{F}$, которую наблюдает и Джо, и двух псевдосил: радиальной центробежной силы и силы Кориолиса, которая перпендикулярна скорости.

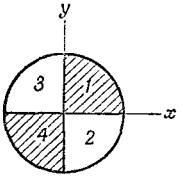
19. 9. Однородный шар радиуса R и массы M в начальный момент пущен по плоскости так, что он скользит по ней без качения. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого равен μ. Какое расстояние пройдет шар, прежде чем его движение превратится в качение без скольжения, и какова будет к этому моменту его скорость?

19.10. На рисунке изображена упрощенная схема устройства для подачи типографской краски в печатном станке. Краска подается из барабана K, который свободно вращается на закрепленной оси. Момент инерции этого барабана пренебрежимо мал; P — ведомый печатный вал с неподвижной осью, а T — передающий валик, свободно катящийся по K и P. Валик T — это сплошной цилиндр радиуса r и массы M; он все время катится по K и P без сколь-

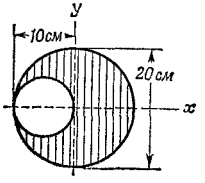
жения, и геометрия устройства такова, что линия, соединяющая оси T и P, образует с горизонталью угол θ. Какое максимальное угловое ускорение A можно сообщить валу P без потери контакта между T и K?



19.11. Сплошной цилиндр состоит из четырех секций — квадрантов, причем плотности материалов, из которых сделаны разные секции, различаются и относятся, как числа, указанные на рисунке. Проведем оси x и y так, как показано на рисунке; как будет выглядеть уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр масс цилиндра?



19.12. В диске постоянной плотности вырезано отверстие, как показано на рисунке. Найдите положение центра масс.



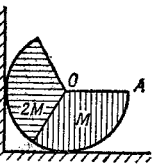
19.13. Найдите положение центра масс однородной проволоки, изогнутой по дуге окружности радиуса R. Длина проволоки L ($R > L/2\pi$). Используйте систему координат с началом в центре окружности и с осью x, проходящей через середину проволоки.

19.14. Используя результат предыдущей задачи или другим способом, найдите центр тяжести сектора с углом раствора α, вырезанного из однородного диска радиуса R.

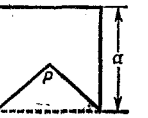
19.15. Цилиндр, радиус которого π *см*, а масса 3 *кг*, разрезан на три равные части. То же самое сделано с другим цилиндром радиусом π *см*, но весом уже 6 *кг*. Эти куски склеены друг с другом, как показано на рисунке, причем линия OA направлена горизонтально. Стенка абсолютно гладкая, а «пол» — абсолютно шероховатый.

а) С какой силой цилиндр давит на стенку?

б) На каком расстоянии от центра на линии OA следует поместить материальную точку массы m, чтобы система оставалась в равновесии и после удаления стенки?



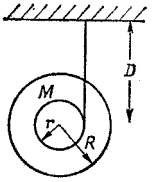
19.16. Из квадратной металлической пластинки с длиной ребра a необходимо вырезать с одной стороны равнобедренный треугольник так, чтобы оставшаяся фигура, будучи подвешена за точку P (вершину треугольника), оставалась в равновесии независимо от положения. Чему равна высота треугольника?



19.17. Катушка состоит из двух одинаковых дисков радиуса R и массы M, насаженных на невесомую ось радиуса r. Нить, намотанная на ось катушки, прикреплена к потолку. Расстояние от катушки до потолка равно D (см. рисунок). Из этого состояния катушка начинает двигаться вниз.

а) Какой угол должна образовать нить с вертикалью в начальный момент, чтобы, опускаясь, катушка не раскачивалась?

б) Каково вертикальное ускорение центра катушки?

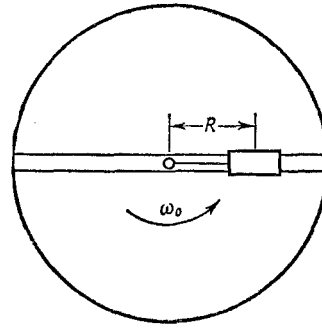


19.18. Поворотный стол с моментом инерции I_0 свободно вращается вокруг вертикальной оси. На столе проложена прямолинейная радиальная дорожка, по которой может без трения двигаться тележка массы m (см. рисунок). Нить, привязанная к тележке, перекинута через маленький блок, а затем уходит под стол через полую ось. Первоначально система вращается с угловой скоростью ω_0, и тележка находится на фиксированном расстоянии R от оси. Затем нить некоторой внешней силой втягивается внутрь оси на такое расстояние, что тележка теперь отделена от оси меньшим промежутком r и остается в этом положении.

а) Чему равна угловая скорость системы в конечном состоянии?

б) Покажите подробно, что разность между значениями энергии системы в конечном и начальном состояниях равна работе, которую совершила сила, вытягивающая нить.

в) Если нить отпустить, с какой радиальной скоростью v_r пройдет тележка через точку R?



К главе 20. ***Вращение в пространстве***

20. 1. Записав векторы в компонентной форме или как-нибудь по-другому, докажите следующие соотношения:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$
$$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\qquad \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0,$$
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},\qquad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.$$

20. 2. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно некоторой фиксированной оси. Покажите, что скорость любой точки P этого тела равна $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный из произвольно выбранной точки, расположенной на оси вращения, к данной.

20. 3. Твердое тело вначале поворачивается на бесконечно малый угол $\Delta\theta_1$ относительно одной оси, а затем на бесконечно малый угол $\Delta\theta_2$ относительно другой оси, пересекающей первую в точке 0. Покажите, что общее смещение любой точки рассматриваемого тела такое же, как если бы оно было сразу повернуто на некоторый бесконечно малый угол относительно промежуточной оси. Как найти ось и угол?

Докажите, что твердое тело, подвергнутое одновременно действию нескольких угловых скоростей относительно различных осей, движется так, как если бы на него действовала только одна угловая скорость, равная векторной сумме всех слагающих скоростей. (Каждую угловую скорость следует рассматривать как вектор длины ω, направленный вдоль оси вращения.)

20. 4. Система N частиц с массами m, координатами $\mathbf{r}_i$ и скоростями $\mathbf{v}_i$ обладает моментом количества движения, равным

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

Если же рассматривать систему координат, жестко связанную с центром масс, то можно считать, что система имеет момент количества движения $\mathbf{L}_{\text{ц.м.}}$. Пусть $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$ — это положение и скорость центра масс, а $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — общая масса всех частиц. Покажите, что

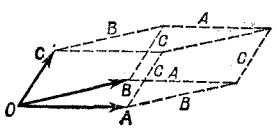
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{ц.м.}} + M (\mathbf{R}_{\text{ц.м.}} \times \mathbf{v}_{\text{ц.м.}}).$$

Сравните результат с решением задачи **11.9** (стр. 36).

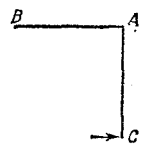
20. 5. а) Любые три вектора **A**, **B**, **C** можно рассматривать как определяющие твердое тело с шестью попарно параллельными плоскостями, т. е. параллелепипед. Покажите, что объем этого тела равен

$$V = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|.$$

б) Параллелепипед, одна из вершин которого находится в начале координат, имеет три соседние вершины в точках (10, —5, 3), (3, —4, 7) и (—5, —6, 3). Используется прямоугольная система координат (x, y, z). Чему равен объем параллелепипеда?

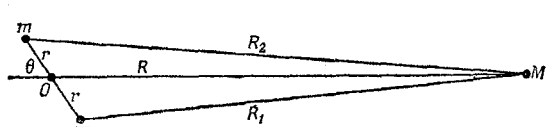


20. 6. Два однородных одинаковых жестких стержня AB и AC скреплены в точке A ($AC \perp AB$) и перемещаются на гладком горизонтальном столе. В точке C перпендикулярно AC наносится горизонтальный удар. Найдите отношение скоростей центров масс стержней AB и AC немедленно после удара.



20. 7. Маховик, имеющий форму однородной тонкой круглой пластинки массы 10,0 *кг* и радиуса 1,00 *м*, смонтирован на оси, проходящей через центр масс и составляющей угол 1° с перпендикуляром, восстановленным к плоскости маховика. Если последний вращается относительно этой оси с угловой скоростью 25,0 *рад/сек*, то чему равна пара сил, приложенная к его подшипникам?

20. 8. Два тела с одинаковыми массами m, скрепленные жестким стержнем (не имеющим массы) на расстоянии $2r$ друг от друга, притягиваются гравитационным образом телом массы M, расположенным на расстоянии $R \gg r$ от центра стержня. Стержень составляет угол θ с направлением R. Найдите приближенную величину пары сил, приложенной к стержню, относительно его центра.



20. 9. Как Луна, так и Солнце в результате действия на Землю образуют пару сил, поскольку Земля слегка сплющена. Какое тело образует бóльшую пару сил и приблизительно во сколько раз? (См. предыдущую задачу.)

20.10. Экваториальный и полярный радиусы Земли равны 6378,388 и 6356,912 *км* соответственно. Плотность ρ на различных глубинах D, отсчитанных на поверхности Земли, приведена ниже (звездочкой помечена разрывность):

D, *км*	0	30 *	100	200	400	1000	2000	2900 *	3500	5000 *	6000
ρ, *г/см*^{3}	2,60	3,0 3,3	3,4	3,5	3,6	4,7	5,2	5,7 9,4	10,2	11,5 16,8	17,1

Используя эти значения, оцените:
а) момент инерции Земли;
б) ее вращательный момент количества движения;
в) кинетическую энергию вращения.

20.11. 1) Симметричное тело начинает катиться (без скольжения) вниз по наклонной плоскости с высоты h. Момент инерции тела относительно собственного центра масс равен I, масса M, радиус поверхности качения, находящейся в контакте с наклонной плоскостью, r. Определите линейную скорость центра масс в нижней точке наклонной плоскости.

2) Примените полученное вами общее выражение для определения скорости центра масс тела, если это тело а) сфера; б) диск; в) диск массы M_1 с внешним радиусом R_1, насаженный на вал массы m_2 и радиуса r_2.

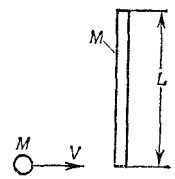
20.12. Тонкий стержень массы M и длины L лежит на горизонтальной абсолютно гладкой поверхности. Маленький кусочек замазки такой же массы, обладающей скоростью v, которая направлена перпендикулярно стержню, ударяется об один конец стержня и прилипает к нему, совершая тем самым неупругое столкновение очень малой продолжительности.

а) Какова скорость центра масс системы до и после столкновения?

б) Чему равен момент количества движения системы относительно ее центра масс непосредственно перед столкновением?

в) Чему равна угловая скорость (относительно центра масс) сразу же после столкновения?

г) На сколько уменьшается кинетическая энергия системы при столкновении?

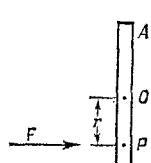


20.13. Если весь лед на Земле растопить, то средний уровень мирового океана поднимется приблизительно на 61 *м*. Примите среднюю широту, где находятся льды, равной 80°; нерегулярным распределением водных масс океанов на Земле пренебрегите и рассчитайте, на сколько секунд увеличится при этом длина дня? Предполагаем, что Земля — сфера радиуса 6370 *км* с моментом инерции $8{,}11 \cdot 10^{37}$ *кгм*^{2}.

20.14. Однородный стержень длины L и массы M покоится на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. За очень малый промежуток времени он получает импульс $J = \int F\,dt$, приложенный в точке P ($OP = r$).

а) Чему равна скорость центра масс O сразу же после сообщения импульса? Чему равна угловая скорость относительно точки O? Какова мгновенная скорость точки A на другом конце стержня?

б) Определите расстояние AP, для которого скорость точки A равнялась бы нулю сразу же после удара?



К главе 21. **Гармонический осциллятор**

21. 1. Твердое тело массы M свободно насажено на расположенную горизонтально ось, которая проходит на расстоянии d от центра масс C. Момент инерции относительно оси вращения равен I (трение отсутствует).

а) Напишите дифференциальное уравнение, которое описывает изменение угла отклонения θ со временем (угол θ отсчитывайте от равновесного положения тела).

б) Если тело совершает малые колебания, так что $\sin\theta \approx \theta$, то чему равен период этих колебаний?

21. 2. В предыдущей задаче момент инерции твердого тела относительно его центра масс равен I_c. Найдите выражение для периода малых колебаний как функции d (и I_c) и покажите:

а) что имеются два значения d: d_1 и d_2, которые соответствуют данному периоду;

б) что период равен $T=2\pi\left(\frac{d_1+d_2}{g}\right)$;

в) что период минимален, когда $d=\sqrt{I_c/M}$. Найдите это минимальное значение периода.

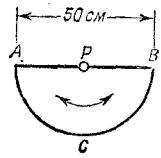
21. 3. Линейная пружина, находясь в свободном состоянии, имеет длину D, а когда на ее конце подвешен груз массы m, ее длина становится равной $D+A$. На груз, находящийся в покое, с высоты A падает другой груз такой же массы, прилипающий к первому. Найдите период и амплитуду колебаний такой системы и максимальную высоту (над первоначальным положением равновесия), достигаемые в результирующем движении.

21. 4. Две частицы A и B совершают гармоническое движение с одинаковой амплитудой (10 *см*) по одной и той же прямой. Частоты их движений составляют $\omega_A=20$ *сек*$^{-1}$, $\omega_B=21$ *сек*$^{-1}$ соответственно. В момент времени $t=0$ обе частицы проходят точку $x=0$ в положительном направлении оси x (следовательно, они находятся «в фазе»).

а) На каком расстоянии они будут находиться друг от друга в момент $t=0{,}350$ *сек*?

б) Какова скорость частицы B относительно A в этот же момент времени?

21. 5. Каркас, сделанный из жесткой проволоки однородного поперечного сечения и постоянной плотности, состоит из дуги полуокружности ACB и диаметра AB. Этот каркас прикрепляется с помощью абсолютно гладкого штифта в точке P, проходящей через отверстие в средней точке его диаметра, и приводится в движение, как маятник. Если диаметр каркаса AB равен 50 *см*, то каков период колебательного движения такого каркаса?



21. 6. На вертикальной пружине пренебрежимо малой массы подвешена пластина 20 *г*, на которой лежит грузик 5 *г*. Если оттянуть пружину, то система начнет колебаться с периодом $\pi/3$ *сек*. Затем груз 5 *г* заменяется другим с массой 25 *г*. Каково будет смещение пластины при равновесии?

21. 7. Две частицы с массами $^3/_4M$ и M соединены пружиной пренебрежимо малой массы; длина пружины в свободном состоянии равна L, упругая постоянная K. Вначале массы покоятся на расстоянии L друг от друга на горизонтальном абсолютно гладком столе. Третья частица массы $^1/_4M$, движущаяся вдоль линии, соединяющей первые две частицы, сталкивается и прилипает к частице с массой $^3/_4M$. Найти амплитуду и период колебаний системы.

21. 8. Гравитационная сила, действующая на частицу, которая помещена в твердый однородный шар, прямо пропорциональна расстоянию от центра шара. Если принять за такой шар Землю и просверлить сквозь нее вдоль ее диаметра, соединяющего полюса,

отверстие, то сколько времени понадобится телу, попавшему в это отверстие, чтобы достигнуть поверхности с противоположной стороны Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

21. 9. В начальном состоянии колония бактерий растет со скоростью, пропорциональной числу наличных бактерий. Написать дифференциальное уравнение, выражающее это соотношение.

21.10. Точка подвеса математического маятника, период собственных колебаний которого равен 1 *сек*, совершает синусоидальные колебания с амплитудой 1,00 *см* и периодом 1,10 *сек*. Какова амплитуда установившихся колебаний маятника?

К главе 22. ***Алгебра***

Наиболее общим видом числа, которое удовлетворяет правилам элементарной алгебры, является *комплексное число*. Оно может быть записано в виде суммы действительного (вещественного) и мнимого чисел

(Комплексное число) $u =$ (Вещественное число) $x +$
$+$ (Мнимое число) iy,

$i=\sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Любое алгебраическое уравнение должно оставаться справедливым при изменении знака i. Такая операция носит название *комплексного сопряжения*. Если $u=x+iy$, то комплексно сопряженное число u^* равно $x - iy$.

Правила алгебры, примененные к комплексным числам, дают

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\,(b+d),$$
$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i\,(ad+bc).$$

Величина $|u|=\sqrt{uu^*}=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* числа u.

Вещественное число, возведенное в мнимую степень, становится комплексным числом с амплитудой, равной единице. Вещественная и мнимая части комплексного числа осциллируют подобно синусу и косинусу, когда величина мнимой степени изменяется. В частности,

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \qquad (A)$$

• • •

22. 1. В равенстве $u+iv=(a+ib)(c+id)$ положим

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{d}{c}=\operatorname{tg}\beta.$$

Используя формулу (22.4) «Лекций» (вып. 2, стр. 118) и формулы тригонометрии, покажите, что

а) $\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$,

б) $\frac{v}{u}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

22. 2. Решите предыдущую задачу, используя приведенную выше формулу (А).

22. 3. Покажите, что

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

22. 4. Покажите, что

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

22. 5. Функции $\operatorname{ch}\theta$ и $\operatorname{sh}\theta$, определяемые равенствами

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sh}\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2},$$

называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом угла θ.
Покажите, что

$$\cos i\theta=\operatorname{ch}\theta,$$
$$\sin i\theta=i\operatorname{sh}\theta,$$
$$\operatorname{ch}^2\theta-\operatorname{sh}^2\theta=1.$$

22. 6. Используя основную формулу дифференцирования

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

докажите, что

$$\frac{d}{dx}(e^{ax})=ae^{ax}.$$

22. 7. а) Последовательным дифференцированием или каким-либо иным способом покажите, что функция e^x может быть представлена в виде следующего

бесконечного ряда:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

б) Покажите, что функции $\cos x$ и $\sin x$ могут быть представлены следующими бесконечными рядами:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots .$$

(Эти ряды часто применяются при вычислении функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ для значений $x \ll 1$, хотя они сходятся при любых x.)

22. 8. Найдите полное алгебраическое решение уравнения

$$y = \sqrt[n]{1},$$

где n — целое число.

22. 9. Используя свойства функции $e^{in\theta}$ и биномиальную теорему, покажите, что

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots .$$

22.10. а) Воспользовавшись соотношением $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$, выведите тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы двух углов.

б) Дайте геометрическую интерпретацию результата умножения одного комплексного числа $Ae^{i\theta}$ на другое комплексное число $Be^{i\varphi}$.

22.11. Используя таблицу последовательных значений корней r-й степени из 11, найдите $\log_{11} 2$, $\log_{11} 7$:

Показатель корня	$\sqrt[r]{11}$	$\log_{11} \sqrt[r]{11}$
1	11,000	1,00000
2	3,3166	1,50000
4	1,8212	0,25000
8	1,3495	0,12500
16	1,1617	0,06667
32	1,0778	0,03333
64	1,0382	0,01667
128	1,0189	0,00833

Проверьте свой результат с помощью тождества

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N,$$

где a и b — любые два значения основания логарифмов.

К главе 23. **Резонанс**

23. 1. Составьте и решите дифференциальное уравнение, описывающее поведение тока, когда он протекает:
а) по индуктивности L,
б) по емкости C,
если к ним приложено синусоидальное напряжение частоты ω.
Найдите комплексный импеданс указанных выше цепей.

23. 2. Найдите зависимость импеданса (полного сопротивления) $\hat{Z}$ от частоты ω для цепи, состоящей из индуктивности L и емкости C, если они соединены:
а) последовательно,
б) параллельно.
Качественно обсудите полученные результаты.

23. 3. а) Покажите, что дифференциальное уравнение, описывающее движение прикрепленного к пружине с упругой постоянной k тела массы m, на которое действует сила трения $-m\gamma v$, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{где} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

б) Найдите решение этого уравнения (используйте комплексную форму записи!), предполагая, что оно имеет вид $x = e^{\alpha t}$, а затем покажите, что общее решение дается выражением

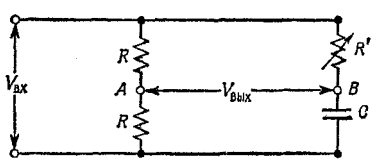
$$x = e^{-1/2\gamma t}\left[A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t\right)\right],$$

если $\gamma < 2\omega_0$.

в) Как изменится вид найденного решения, если $\gamma > 2\omega_0$?

23. 4. В момент времени $t=0$ положение и скорость тела массы m (см. предыдущую задачу) равны $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$. Найдите A и B.

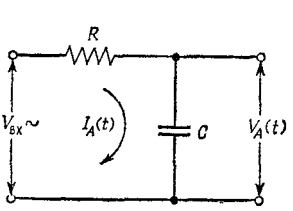
23. 5. Часто требуется, чтобы в электрической цепи имелось синусоидальное напряжение постоянной амплитуды, но переменной фазы. Электрическая схема, с помощью которой можно осуществить это требование, называется *цепью с фазовым сдвигом*. Один из примеров такой цепи показан на рисунке. Докажите, что амплитуда напряжения между точками A и B составляет половину амплитуды входного напряжения, а фаза может меняться в пределах от 0 до 180° при изменении R'.



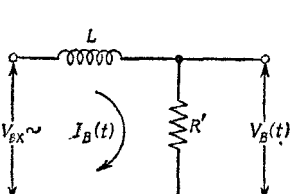
23. 6. На входе цепей A и B (см. рисунок) находится источник с напряжением $V_{вх}=V_0\cos\omega t$. Положим, что ток, протекающий через клеммы на выходе цепей, пренебрежимо мал.

а) Найдите соотношение, которое должно существовать между R, C, R' и L, чтобы выходные напряжения обеих цепей $V_A(t)$ и $V_B(t)$ были равны.

б) Найдите постоянные токи $I_A(t)$ и $I_B(t)$.



а



б

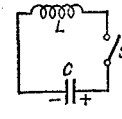
К главе 24. ***Переходные решения***

24. 1. Тело на воздушной подушке при движении теряет свою скорость главным образом из-за вязкости в тонком воздушном слое под ним, причем сила торможения пропорциональна скорости. Составьте и решите дифференциальное уравнение плоского движения тела. Как его скорость изменяется:
а) со временем?
б) с расстоянием?

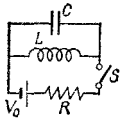
24. 2. Пластины конденсатора емкости C, первоначально заряженного до напряжения V_0, в момент времени $t=0$ соединяются через сопротивление R. Составьте дифференциальное уравнение для V как функции t. Решите это уравнение, предполагая, что существует экспоненциальное решение.

24. 3. Тело на воздушной подушке содержит в себе магнит. Этот магнит при движении тела генерирует круговые токи, магнитные поля которых действуют на магнит, в результате чего появляется замедляющая сила, пропорциональная скорости. Найдите (в зависимости от коэффициента торможения γ):
а) конечную скорость, достигаемую телом;
б) скорость тела в зависимости от времени;
в) его положение в зависимости от времени, если оно начинает двигаться из состояния покоя.

24. 4. Конденсатор емкостью C и катушка с индуктивностью L соединены так, как показано на рисунке. Конденсатор первоначально заряжен до напряжения V_0, а ключ S разомкнут. В момент времени $t=0$ он замыкается.
а) Найдите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.
б) Рассчитайте зависимость от времени величин $CV^2/2$ и $LI^2/2$. Каков, по-вашему, физический смысл этих величин?



24. 5. В электрической цепи, показанной на рисунке, ключ S вначале замкнут. По цепи протекает постоянный ток $I=V_0/R$. В момент времени $t=0$ ключ внезапно размыкает цепь.
Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.



24. 6. Найдено, что тело массы 5,0 *кг* колеблется с затуханием, которым можно пренебречь. Подвешенное на пружине тело совершает 10 полных колебаний за 10,0 *сек*, затем приводится в действие маленький магнитный замедлитель движения и появляется затухание, пропорциональное скорости движения. В результате амплитуда колебаний уменьшается за 10 полных циклов от 0,2 до 0,1 *м*.
а) Составьте уравнение движения тела, причем коэффициенты перед членами d^2x/dt^2, dx/dt и x выразите в *численном* виде, воспользовавшись системой единиц MKS.
б) Чему равен новый период колебаний тела?
в) За сколько колебаний (начиная с цикла с амплитудой 0,2 *м*) амплитуда уменьшается до 0,05 *м*? До 0,02 *м*?
г) Чему равна максимальная скорость диссипации энергии в течение первого колебания?

24. 7. Гармонический осциллятор с затуханием представляет собой шарик массой m, подвешенный на пружине с упругой постоянной k; он находится в вязкой среде, в результате взаимодействия с которой появляется сила затухания, равная $-m\gamma(dx/dt)$.
1) Для случая движения с затуханием найдите решения $x=x(t)$ для $t\geqslant 0$, если на шарик действует сила:

$$\text{а) } F=\begin{cases} 0 & \text{при } t<0, \\ F_0=\text{const} & \text{при } t\geqslant 0; \end{cases}$$

б) сила отсутствует, но в момент времени $t=0$ шарику сообщается импульс $p=p_x$;

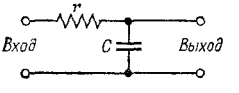
в) $F=\begin{cases} 0 & \text{при } t<0, \\ F_0\cos\omega_0 t & \text{при } t\geqslant 0, \end{cases}$ $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

2) Если на осциллятор действует сила $F=F_0\cos\omega t$ и рассматриваются достаточно большие отрезки времени, то чему равна частота ω^*, при которой амплитуда колебаний достигает максимального значения?

Примечание. Помните, что полное решение содержит два члена, описывающие как стационарное, так и переходное движение, и что начальные условия полностью определяют постоянные интегрирования.

К главе 25. ***Линейные системы***

25. 1. Чтобы уменьшить колебания напряжения, снимаемого с выпрямительного устройства, используется так называемый «сглаживающий» фильтр. В простейшей форме он состоит из сопротивления ($r=10^3$ *ом*), соединенного с конденсатором ($C=10$ *мкф*) так, как показано на рисунке. Найдите напряжение на выходе конденсатора, если входное напряжение имеет постоянную компоненту V_0 и переменную компоненту с циклической частотой 120 *сек*$^{-1}$ и амплитудой V_2.



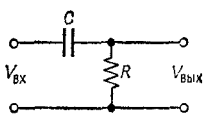
25. 2. Во многих случаях желательно иметь электрическую цепь, которая «дифференцирует» функцию, описывающую подаваемое на ее вход напряжение по времени. Простая цепь, удовлетворяющая этому требованию, изображена на рисунке. Покажите, что выходное напряжение в такой цепи (если пренебречь

током, протекающим на выходе) равно

$$V_{\text{вых}}(t) = RC\frac{dV_{\text{вх}}}{dt}$$

при условии, что

$$|V_{\text{вых}}| \ll |V_{\text{вх}}|.$$



25. 3. Найдите $V_{\text{вых}}$ в цепи, изображенной на рисунке к предыдущей задаче, для случая, когда $V_{\text{вх}}=V_0\cos\omega t$, и проверьте еще раз правильность результата, полученного выше.

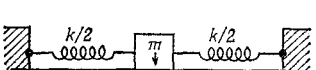
25. 4. Придумайте простую цепь, которая «интегрировала» бы входную функцию, и обсудите ее свойства.

25. 5. Тело массы m, прикрепленное двумя одинаковыми горизонтальными пружинами с упругими постоянными $k/2$, скользит по поверхности стола. Предполагается, что коэффициент трения постоянен. Тело оттягивается в сторону на расстояние A вправо от центральной точки и затем отпускается.

а) Составьте дифференциальное уравнение движения тела и решите его для временно́го интервала

$$0 < t < \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

б) Каково должно быть расстояние A, чтобы размах колебания тела оставался больше расстояния B от центра после пересечения точки $x=0$ целое число (0, 1, 2 . . .) раз?



3

ИЗЛУЧЕНИЕ • ВОЛНЫ • КВАНТЫ

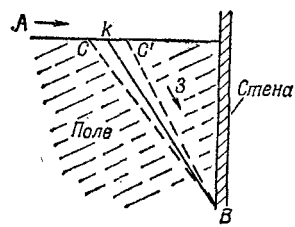
К главе 26. ***Оптика. Принцип наименьшего времени***

26. 1. Пешеход, идя по тротуару, проходит 1,5 *м* в 1 *сек*, а по вспаханному полю — только 0,9 *м* за 1 *сек*. Он вышел из точки A, находящейся на расстоянии 42 *м* от стены, и направляется в точку B, расположенную к югу вдоль стены на расстоянии 36 *м* от края поля.

а) По какому пути AkB должен идти пешеход, чтобы пройти его в кратчайшее время? (Уместно предположить, что к этой задаче приложим «закон преломления». Однако если вы достаточно смелы, то попытайтесь решить ее без такого предположения.)

б) Чему равно это кратчайшее время?

в) Какое потребуется время, чтобы пройти по маршрутам ACB и $AC'B$, если $Ck=kC'=3$ *м*?

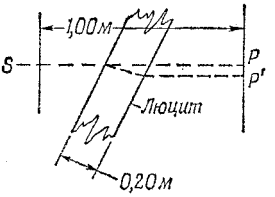


26. 2. Свет от источника S, отстоящего на расстоянии 1 *м* от экрана, посылается узким пучком перпендикулярно экрану и попадает на него в точке P. На пути луча помещается пластина из люцита толщиной 0,2 *м* (показатель преломления люцита 1,5) так, чтобы направление распространения пучка в этой

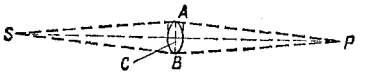
пластине составляло 30° с первоначальным направлением (когда не было пластины).

а) Найдите боковое смещение луча PP'.

б) Найдите процентное увеличение времени прохождения лучом пути SP' по сравнению с временем, необходимым для прохождения первоначального пути SP в воздухе.



26. 3. Пусть S — источник света, а P — его изображение, даваемое линзой ACB, $SC=CP=1$ *м*, $AC=BC=0{,}1$ *м*. Линза ACB имеет на краях толщину 3 *мм*. Если луч проходит путь SCP за то же время, что и расстояния SAP и SBP, то какова толщина линзы в середине (в точке C)? (Показатель преломления стекла 1,60.)



26. 4. В обычном плоском зеркале наше изображение оказывается перевернутым справа налево, т. е. изображение правой руки выглядит так, как левая рука «человека» в зеркале. Почему зеркало не переворачивает еще все вверх ногами? Что действительно переворачивается зеркалом?

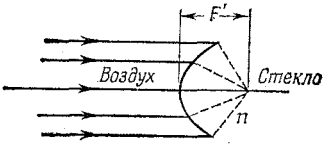
26. 5. Два плоских зеркала расположены так, что образуют прямой двугранный угол, причем линия пересечения вертикальна. Объяснить, почему в таком зеркале мы «видим себя такими, какими нас видят другие люди».

26. 6. Три взаимно перпендикулярных зеркала расположены так, что образуют прямой трехгранный угол. Луч света падает на одно из зеркал, а затем, отражаясь от него, попадает на другое зеркало, а может быть, и на третье. Покажите, что после всех отражений (мы предполагаем, что зеркала огромны) луч выйдет в направлении, строго противоположном первоначальному, но окажется несколько смещенным. Знаете ли вы практическое применение такого «углового отражателя»?

26. 7. Хорошо известно, что когда свет переходит из одной прозрачной среды в другую, то не все лучи испытывают преломление, некоторая их часть отражается, а весьма малая доля (если таковая вообще есть), поглощается или рассеивается. Что происходит, когда пучок света падает на поверхность раздела двух сред под большим углом к нормали, проходя вначале через более плотную в оптическом отношении (имеющую больший показатель преломления) среду?

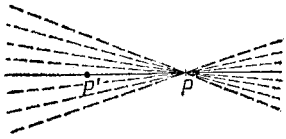
К главе 27. ***Геометрическая оптика***

27. 1. Параллельный пучок света, распространяющийся в воздухе, собирается в фокусе преломляющей поверхности, которая ограничивает область с показателем преломления n.
Найдите форму этой поверхности.



27. 2. Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки равен D, показатель ее преломления n. Если смотреть на трубку со стороны, то кажется, что маленькое капиллярное отверстие имеет диаметр d. Чему в действительности равен диаметр d' трубки?

27. 3. Пучок света сходится в определенной точке P. Нужно в данной точке Q, лежащей на оси, поместить такую отражающую поверхность, которая даст изображение в новом фокусе — в точке P'. Определите форму требуемой поверхности.



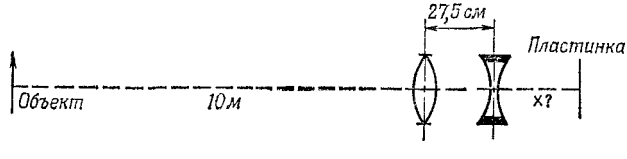
27. 4. Линза с фокусным расстоянием F дает действительное изображение отдаленного объекта, которое рассматривается через увеличительное стекло с фокусным расстоянием f. Если в момент рассматривания глаз сфокусирован на бесконечность, то чему равно кажущееся угловое увеличение системы?

27. 5. Обычный человеческий глаз может быть сфокусирован на объект, лежащий между 25 *см* и бесконечностью. Прямо против глаза расположена простая тонкая увеличивающая линза с фокусным расстоянием $f=+5$ *см*.

а) Между какими двумя предельными положениями должен быть расположен рассматриваемый объект, чтобы его было ясно видно?

б) Определите угловое увеличение системы для каждого из этих двух положений.

27. 6. Телеобъектив состоит из положительной линзы с фокусным расстоянием $f_1=30$ *см* и отрицательной линзы с фокусным расстоянием $f_2=-10$ *см*; расстояние между обеими линзами 27,5 *см*. Где должна быть расположена фотопластинка, на которой будет сфотографирован объект, находящийся впереди первой линзы на расстоянии 10 *м*? Тщательно проследите путь луча.



27. 7. 200-дюймовый телескоп Гейла имеет фокусное расстояние 160 *м*. Какова разница в положении изображений при наблюдении отдаленных звезд и
а) Луны;
б) искусственного спутника, находящегося от Земли на расстоянии 320 *км*?

27. 8. Две тонкие линзы L и L' с фокусными расстояниями f и f' находятся на расстоянии D друг от друга. Найдите эквивалентное фокусное расстояние F всего устройства и расстояния Δ и Δ' от главных плоскостей до линз L и L'.

К главе 28. ***Электромагнитное излучение***

28. 1. Дайте геометрическую интерпретацию комплексных чисел, используемых в двух следующих задачах, и найдите модули следующих комплексных величин:

а) $re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}$,

б) $\sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi}$.

К главе 29. ***Интерференция***

29. 1. Две антенны расположены так, как показано на фиг. 29.5 «Лекций» (вып. 3, стр. 52). Они работают в одной фазе так, что, когда одна из них излучает с интенсивностью I_0 по всем горизонтальным направлениям, интенсивность излучения другой составляет $2I_0$. Чему равна наблюдаемая интенсивность излучения обеих антенн в различных направлениях, указанных на рисунке?

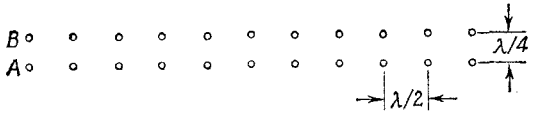
29. 2. Четыре идентичных дипольных излучателя расположены параллельно друг другу и находятся на одинаковых расстояниях 2,50 *см* друг от друга. Они работают на частоте $3{,}00 \cdot 10^9$ *сек*$^{-1}$ и сфазированы так, что излучение каждого последующего диполя отстает от предыдущего на 90°. Найдите интенсивность излучения на больших расстояниях от системы в экваториальной плоскости (перпендикулярной оси диполя) и постройте эту функцию

в полярных координатах. Полученная диаграмма носит название *картины излучения* антенной системы.

29. 3. Две параболоидные «чаши» радиотелескопа КАЛТЕХа в Оуенс Вэлли расположены на расстоянии 480 *м* друг от друга. Каждая «чаша» концентрирует поступающее излучение в малом приемнике, находящемся в фокусе. Два принимаемых сигнала подаются в расположенный посередине между «чашами» единый смеситель, где оба сигнала складываются, а затем вычисляется средний квадрат результирующей амплитуды. С какой точностью можно установить угловое положение удаленного точечного источника, наблюдаемого с помощью радиотелескопа, если 10%-ные флуктуации выходного сигнала уже считаются значительными? Длину волны возьмите равной 50 *см*.

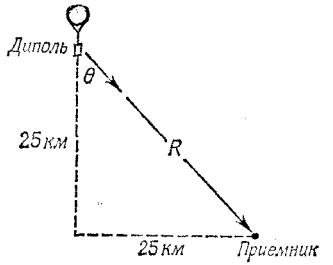
29. 4. Заряд q совершает движение по окружности радиуса a с угловой частотой ω. Вычислите электрическое поле, создаваемое зарядом, на большом расстоянии R от системы под углом θ к оси круговой орбиты. Найдите интенсивность излучения в плоскости орбиты и на оси орбиты при больших значениях R.

29. 5. Все N диполей в линии A работают в одинаковой фазе, а все диполи в линии B отстают по фазе на 90° от диполей в линии A. Определите картину излучения в экваториальной плоскости (как в задаче **29.2**) на большом расстоянии от линий.



29. 6. Электроны в длинной прямой тонкой проволоке длиной L колеблются с угловой частотой ω и малой амплитудой a в одинаковой фазе вдоль проволоки. Найдите электрическое поле, создаваемое ими под углом θ относительно направления проволоки на больших расстояниях R от нее ($R \gg L$).

29. 7. Количество энергии на единицу площади, переносимой электромагнитной волной, пропорционально среднему квадрату напряженности электрического поля. Найдите долю полной энергии, излучаемой колеблющимся зарядом, которая падает на единицу площади, нормальной к радиусу-вектору R, проведенному под углом θ к оси колебаний. Рассчитайте и выразите в *вт/м*^{2} эту величину для случая вертикально ориентированного колеблющегося диполя, подвешенного к радиозонду космических лучей, который находится на высоте 25 *км* и на расстоянии 25 *км* по горизонтали, если всего им излучается 0,5 *вт*.



К главе 30. ***Дифракция***

30. 1. Длины волн D-линий в спектре возбуждения натрия равны 5889,95 и 5895,92 Å соответственно. Какую длину должна иметь решетка, содержащая 600 линий на 1 *мм*, чтобы разрешить эти линии в спектре первого порядка?

30. 2. По прямой дороге идет обычная автомашина с включенными фарами (рассматриваемыми как точечные источники). Расстояние между фарами автомобиля 120 *см*. На каком расстоянии от наблюдателя должна находиться машина, чтобы он был уверен, что видит два источника света, а не один? Примите диаметр зрачка глаза равным 0,5 *см*, а эффективную длину света, испускаемого фарами,

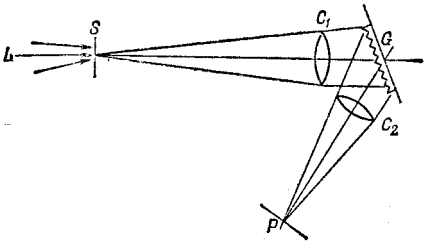
равной 5500 Å. Как вы думаете, тот факт, что свет «белый» (т. е. смесь лучей с разными длинами волн), облегчает или затрудняет разрешение двух источников света?

30. 3. На рисунке показан общий вид спектрографической решетки. Свет от источника L проходит через узкую щель S, затем через коллиматорную линзу (или зеркало) C_1, которая превращает его в параллельный пучок лучей (так что на решетку падает как бы плоская волна, приходящая из бесконечности). Далее параллельный пучок лучей дифрагирует от решетки G; дифрагированный свет, идущий в определенном угловом интервале, падает на линзу C_2, называемую камерной, и фокусируется ею в плоскости P. Получается набор узких спектральных линий. Пусть длина щели равна h, ее ширина w, фокусные расстояния линз C_1 и C_2 равны F_1 и F_2, а углы между нормалью к решетке и осями линз C_1 и C_2 равны θ_i и θ_d; 1 *мм* решетки содержит N линий. Дайте ответ на следующие вопросы:

а) Какую ширину будет иметь полоса, занимаемая спектром в плоскости P?

б) Какой длине волны (s) будет отвечать линия, лежащая на плоскости P в месте прохождения оси линзы C_2?

в) На каком расстоянии друг от друга в фокальной плоскости будут находиться две спектральные линии, длины волн которых отличаются на 1,00Å? Такая величина часто называется *дисперсией* оптического устройства.



г) Какова ширина спектральной линии в плоскости P, если ширина щели w много больше разрешения коллиматорной линзы [равного $1{,}22\lambda(F_1/A_1)$, где A_1 — апертура], и уширения, создаваемого решеткой и равного $(\lambda/L)F_1$, где L — размер решетки?

30. 4. Спектрограф 150-футового солнечного башенного телескопа, находящегося в обсерватории Маунт Вильсон, показан схематически на рисунке. В этом устройстве одна и та же линза действует и как коллиматорная и как камерная, а $\theta_i = -\theta_d$ (почти!). Фокусное расстояние всего устройства $F = 23$ *м*, а решетка имеет площадь 15 *см* × 25 *см*, причем в 1 *мм* ее содержится 600 линий. Обычно при наблюдениях используется спектр пятого порядка.

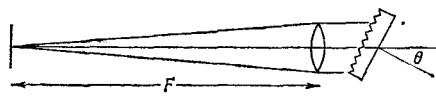
а) При каком угле θ наклона решетки линия спектра возбуждения нейтрального железа, отвечающая длине волны $\lambda = 5250{,}218$ Å, будет совпадать с положением щели в спектре пятого порядка?

б) Для каких других длин волн в интервале от $\lambda = 3600$ Å до $\lambda = 7000$ Å линия спектра также будет совпадать с положением щели?

в) Предложите простой способ устранения в наблюдаемой картине спектров нежелательных порядков, оставив только спектр пятого порядка.

г) Какова дисперсия рассматриваемого устройства при длине волны $\lambda = 5250$ Å, отвечающей линии в спектре пятого порядка?

д) Каково минимальное теоретическое значение $\Delta\lambda$, которое может быть разрешено при длине волны $\lambda = 5250$ Å в спектре пятого порядка?

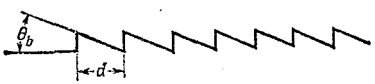


30. 5. Длины волн спектральных линий обычно измеряются с точностью около 0,001 Å при помощи спектрографов, разрешающая сила которых составляет только 0,010 Å. Не нарушаются ли при этом какие-нибудь основные законы физики? Объясните.

30. 6. Когда желобки дифракционной решетки располагаются так, что они отражают бо́льшую часть падающего излучения только в определенном направлении, то говорят, что решетка *блестит* в этом направлении. Предположим, что желобки можно нанести так, чтобы сечение решетки представляло собой пилообразную функцию, показанную на рисунке, причем поверхность каждого желобка лежит под определенным углом θ_b.

а) Используя понятие о дифрагированном пучке света как об излучении, испускаемом в веществе осцилляторами, которые колеблются в одной фазе с падающим излучением, определите, в каком направлении дифрагированный пучок будет иметь наибольшую интенсивность, если $\theta_i = 0$?

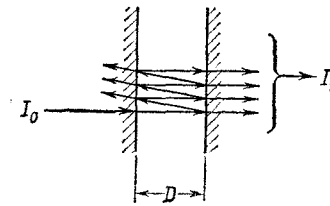
б) Приблизительно оцените тот угловой интервал, внутри которого решетка «блестит».



30. 7. Интерферометр Фабри — Перо состоит из пары прецизионно отшлифованных плоских поверхностей, параллельных друг другу и расположенных на расстоянии D. Эти поверхности отражают часть R^2 света, нормально падающего на них, и пропускают долю T^2. Свет с интенсивностью I_0 и длиной волны λ вначале падает слева (см. рисунок), причем часть лучей сразу проходит через систему, а некоторая их доля отражается от правой поверхности, потом от левой, а затем проходит сквозь систему. В общем проходящий пучок состоит из лучей, которые отразились 0, 2, 4, 6 . . . раз и в конце концов прошли через обе поверхности. Как интенсивность проходящего света зависит от величин D, λ, R и T?

Примечание. Узкополосные оптические фильтры, называемые интерференционными, действуют по такому же принципу. Обе отражающие поверхности у них сделаны из нескольких слоев высококаче-

ственного стекла точно фиксированной толщины и с различными показателями преломления.



К главе 31. ***Как возникает показатель преломления***

31. 1. Найдите показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны $1{,}56 \cdot 10^{-8}$ *см*, предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту, много меньшую, чем частота рентгеновских лучей.

31. 2. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой 100 *мксек*$^{-1}$ равен $n=0{,}90$. Определите плотность электронов в 1 *см*^{3} ионосферы.

31. 3. Электрическое поле E световых волн, проходящих через среду с показателем преломления n, равно $E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}$.

а) Покажите, что если $n=n'-in''$, то

$$E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega\,(t-n'z/c)}.$$

б) Используя выражение $n-1=\dfrac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m}\cdot\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$, найдите, по какому закону ослабляется интенсивность световой волны, частота которой в точности равна собственной частоте ω_0 атома.

31. 4. Известно, что мгновенная плотность потока энергии электромагнитной волны равна $S=\varepsilon_0 cE^2$ *вт/м*^{2}.

а) Найдите полную энергию, излучаемую в единицу времени электроном, осциллирующим с амплитудой x_0 и угловой частотой ω.

б) Сравните энергию, излучаемую за одно колебание, с запасенной энергией $^1/_2 m\omega^2 x_0^2$, и найдите

константу затухания γ_R. Это затухание называется *радиационным затуханием.*

в) Возбужденный атом испускает фотоны с определенной длиной волны λ. Рассчитайте ожидаемое уширение $\Delta\lambda$ спектральной линии, если оно возникает исключительно из-за радиационного затухания. (Рассматривайте атом как крошечный осциллятор, обладающий затуханием.)

К главе 32. ***Радиационное затухание. Рассеяние света***

32. 1. Покажите, что если уравнение движения заряженного осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x-\frac{2e^2}{3c^3m}\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{F(t)}{m},$$

то член, содержащий третью производную, правильно описывает скорость уменьшения энергии при излучении (сопротивление излучения) для любой частоты.

Примечание. Пусть $F(t)=A\cos\omega t$. Найдите количество энергии, излучаемой осциллятором.

32. 2. Пучок света проходит через область, содержащую N рассеивающих центров в единице объема. Сечение рассеяния света на каждом из них равно σ. Покажите, что интенсивность света в зависимости от пройденного расстояния x описывается формулой $I=I_0e^{-N\sigma x}$.

32. 3. Используя выражение для сечения рассеяния

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_ec^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

и выведенную ранее формулу для показателя преломления газа, покажите, что величина $N\sigma$ может быть записана в виде

$$N\sigma=\frac{2}{3\pi}\frac{(n-1)^2}{N}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4.$$

(Таким способом было вычислено впервые число Авогадро при изучении рассеяния света.)

32. 4. Сколько голубого света (λ=4500 Å), испускаемого Солнцем, проходит через атмосферу, когда Солнце находится
а) в зените?
б) под углом 10° к горизонту?

32. 5. Открыты новые лучи (названные *X*-лучами, ибо они обладают неизвестными, но удивительными свойствами) и высказано предположение, что это, подобно свету, поперечные волны. Затем было замечено, что электроны вещества рассеивают эти лучи. Как можно доказать, что они действительно поперечны? Можно ли их поляризовать?

32. 6. Внутренняя корона Солнца (называемая *K*-короной) представляет собственно солнечный свет, рассеянный свободными электронами. Кажущаяся яркость этой *K*-короны на расстоянии одного солнечного радиуса от солнечного диска составляет около 10^{-8} от яркости самого диска (на единицу площади). Вычислите число свободных электронов в 1 $см^3$ пространства вблизи Солнца.

32. 7. Покажите, что величина $(\varepsilon_0 c)^{-1}$ имеет размерность сопротивления и оцените ее численно.

32. 8. Межзвездное пространство заполнено облаками из крошечных пылинок, состоящих из углерода, льда и очень малого количества других элементов. Какова должна быть минимальная масса таких пылинок, отнесенная к единице площади (1 $г/см^2$), способная ухудшить наши наблюдения за звездами, скажем, в 100 раз (т. е. на 5,0 звездной величины). Не забудьте, что свет от звезд может не только рассеиваться на пылинках, но и просто поглощаться ими.

32. 9. Короткий прямой кусок медной проволоки, помещенный в поток электромагнитных волн радарной системы, рассеивает волны. Электрическое поле падающей волны взаимодействует с движущимися электронами в проволоке, в результате чего происходит рассеяние. Если рассматривать достаточно короткий кусок проволоки (длина которого много

меньше λ), то можно предположить, что среднее смещение электронов в нем вдоль оси пропорционально компоненте $E_{\parallel}$ электрического поля волны, параллельной проволоке. Таким образом, если в проволоке имеется N электронов, а d — их среднее смещение, то $d=\chi E_{\parallel}$. Нам нужно знать (в зависимости от χ и N):

а) чему равно сечение рассеяния проволоки?

б) как зависит сечение рассеяния от ориентации проволоки?

К главе 33. ***Поляризация***

33. 1. Две поляроидные пластинки расположены под прямым углом, а третья размещается между ними так, чтобы ее ось составляла угол θ с осью первого поляроида. Какова интенсивность света, проходящего через такое устройство, если все поляроиды идеальны (потерь нет)?

33. 2. Предположим, что когда пучок плоско поляризованного света падает на поляроидную пластинку, то часть его $\alpha^2 I_0$ (I_0— интенсивность падающего света) проходит через пластинку, если ось поляроида параллельна направлению поляризации. Если же эти оси образуют прямой угол, то через пластинку проходит только доля падающего света $\varepsilon^2 I_0$. (Если поляроид идеальный, то α^2 должно быть равно единице, а ε^2 — нулю.) Неполяризованный свет интенсивности I_0 проходит через пару поляроидных пластинок, оси которых образуют угол θ. Какова интенсивность прошедшего света? (Пренебречь эффектами отражения.)

33. 3. Покажите, что для угла Брюстера (угол падения i, при котором отраженный луч полностью поляризован) справедливо соотношение $\operatorname{tg} i=n$.

33. 4. Оцените интенсивность и поляризацию излучения электрона, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите, для точек, расположенных:

а) на оси, проходящей через центр круга,

б) в плоскости окружности.

33. 5. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 *ммк* равны $n_o = 1{,}544$ и $n_e = 1{,}553$ для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на 90°, если используется свет указанной длины волны?

33. 6. Первокурсник КАЛТЕХа, прогуливаясь с девушкой, видит Луну под углом 10° над горизонтом и ее отражение в спокойном озере. С тоской вспоминая гл. 33 «Лекций», он делает попытку рассчитать яркость изображения по сравнению с яркостью самой Луны, полагая, что излучение от Луны не поляризовано (почти), и забывая, что обиженная спутница уйдет. Какой результат он получит? Покажите, что интенсивность отраженных касательных лучей достигает 100%.

33. 7. Свет падает перпендикулярно плоскости одной из граней алмаза ($n = 2{,}40$).
а) Какая доля падающего излучения отражается?
б) Чему равен угол Брюстера для алмаза?

33. 8. В дополнение к задаче **33.5** предположим, что показатели преломления кварца для света с длиной волны $\lambda_1 = 410$ *ммк* равны $n_o = 1{,}557$ и $n_e = 1{,}567$ и что кристалл кварца есть четвертьволновая пластинка для света с длиной волны $\lambda_2 = 600$ *ммк*. Полностью опишите состояние поляризации света с длиной волны λ_1, прошедшего через кристалл, если падающие лучи были линейно поляризованы.

33. 9. Вам дана отполированная пластинка из черного обсидиана, нужно измерить показатель преломления этого материала. Как вы поступите?

К главе 34. Релятивистские явления в излучении

34. 1. Диск радиуса A катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Напишите уравнение пути, проходимого точкой, находящейся на расстоянии $R \leqslant A$ от центра диска в зависимости от A, R и угла поворота диска θ. Ось x направлена вертикально от центра диска, а ось z — в направлении его движения. Найдите ускорение d^2x/dt^2 точки при $z=ct$.

34. 2. Полученное в предыдущей задаче выражение необходимо для вычисления интенсивности излучения частицы, движущейся по круговой траектории радиуса R. Выразите результат через наблюдаемые величины R, v (скорость частицы) и x (положение частицы в момент наблюдения).

34. 3. Найдите отношение интенсивностей излучения заряженной частицы, когда она движется по направлению к наблюдателю и от него по круговой орбите.

34. 4. Получите формулу $\sin\theta = v/c$, используя преобразования Лоренца.

34. 5. Покажите, что скорость электрона с энергией 1 *Гэв* отличается от скорости света на одну восьмимиллионную часть.

34. 6. При наблюдении D-линии излучения атомов натрия (лабораторная длина волны 589,0 *ммк*) установлено, что она сдвинута в спектре излучения звезды и имеет длину волны 588,0 *ммк*. Чему равна скорость звезды относительно наблюдателя?

34. 7. Астроном из КАЛТЕХа Р. Минковский пришел к выводу, что наиболее отдаленная туманность, которую он наблюдал, имела скорость движения 0,6 c (удаленные космические объекты движутся от нас). Чему равен допплеровский сдвиг для света, приходящего от этой туманности? Найдите наблюдаемую длину волны в спектре света от этой туманности, если длина волны в лабораторной системе составляет 300 *ммк*.

34. 8. Брэдли открыл в 1728 г. аберрацию света, суть которой состоит в том, что при наблюдении звезды кажутся смещенными из-за того, что Земля движется по своей орбите. Поэтому в опытах телескоп должен быть направлен вперед максимум на 20,5″, когда рассматриваются звезды, находящиеся вблизи от полюса эклиптики. Если считать, что скорость света равна $3{,}00 \cdot 10^8$ *м/сек*, то какова величина радиуса земной орбиты в этом опыте?

34. 9. Предположим, что межпланетное пространство заполнено малыми крупинками пыли со средним удельным весом ρ и приблизительно сферической формы радиуса R.

а) Покажите, что для песчинки любого размера отношение силы гравитационного притяжения к Солнцу и радиационного отталкивания от Солнца не зависит от расстояния до него.

б) Используя тот факт, что интенсивность солнечного излучения на земной орбите составляет 1374 *вт/м*^{2}, и предполагая сечение поглощения излучения равным πR^2, найдите, для какого значения радиуса R силы радиационного давления и гравитационного притяжения будут полностью скомпенсированы?

в) Учитывая результаты, полученные в гл. 32 «Лекций» (вып. 3), можно ли утверждать, что сечение поглощения песчинки может быть значительно больше πR^2?

К главе 38. ***Соотношение между волновой и корпускулярной точками зрения***

38. 1. В гл. 32 «Лекций» мы показали, что возбужденный атом излучает свою энергию определенными порциями. Это приводит к эффекту ограничения «времени жизни» возбужденного состояния и к образованию конечной ширины соответствующей спектральной линии. Покажите, что эти эффекты, интерпретируемые как неопределенности в измерении

энергии и времени излучения фотона, согласуются с принципом неопределенности.

38. 2. Анализируя размерности, оцените «боровский радиус» атома водорода. Покажите, пользуясь принципом неопределенности, что энергия, необходимая для отрыва электрона от протона в атоме водорода,— порядка нескольких электрон-вольт.

38. 3. В ультрафиолетовой части спектра возбуждения водорода наблюдается серия линий, известных под названием серии Лаймана. Три линии этой серии имеют длины волн: 1216, 1026, 973 Å. Рассчитайте длины волн, отвечающие трем другим возможным линиям в спектре возбуждения водорода, которые могут быть «предсказаны» на основе одних этих данных, а также комбинационного принципа Ритца. Две из них лежат в видимой области (серия Бальмера), а одна — в инфракрасной (первая линия серии Пашена).

4

КИНЕТИКА • ТЕПЛОТА • ЗВУК

К главе 39. ***Кинетическая теория газов***

39. 1. Можно показать, что при адиабатическом сжатии идеального газа выполняется соотношение $PV^{\gamma}=\text{const}$ [см. формулу (39.14), вып. 4, стр. 13]. С другой стороны, при всех условиях $PV/T=\text{const}$. Используя эти данные, найдите связь между параметрами P и T или V и T для случая адиабатического сжатия.

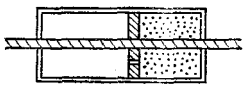
39. 2. С помощью двухтактного насоса, который используется для накачивания велосипедных шин, можно достигнуть давления 3,5 *кГ/см*^{2}, начав накачку воздуха при нормальном атмосферном давлении [1 *кГ/см*^{2} при 20° С (293° К)]. Какова температура (по шкале Цельсия) воздуха, выходящего из насоса, если для воздуха $\gamma=1{,}40$? Потери тепла через стенки насоса пренебрежимо малы.

39. 3. Гелий (газ) содержится в одной половине двух идентичных теплоизолированных сосудов, причем другая половина каждого из сосудов откачана до полного вакуума. Каждый сосуд разделен перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие (см. рисунок). Ставятся два опыта:

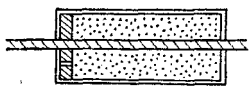
а) Отверстие в перегородке одного сосуда открывается, и газ перетекает в другую половину сосуда, пока не установится равновесие. Затем перегородку начинают медленно передвигать к одному из краев сосуда.

б) Перегородку другого сосуда очень медленно двигают по направлению к вакуумированному краю до упора. Сравните количественно конечное

состояние газа в этих двух сосудах (трением при передвигании перегородки можно пренебречь).



Начальное состояние



Конечное состояние

39. 4. а) Представьте себе высокую вертикальную колонку, наполненную газом или жидкостью, плотность которых изменяется с высотой. Покажите, что в этом случае зависимость давления от высоты описывается дифференциальным уравнением $dP/dh = -\rho(h)g$.

б) Решите это уравнение для случая атмосферного воздуха (молекулярный вес μ), если его температура не зависит от высоты.

39. 5. Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность в зависимости от высоты удовлетворяют соотношению $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$.

а) Покажите, что температура такой атмосферы линейно уменьшается с высотой, и найдите коэффициент пропорциональности. Такой температурный градиент называется *адиабатическим*. Найдите температурный градиент для земной атмосферы.

б) Используя аргументы, основанные на энергетических соображениях, покажите, что атмосфера с температурным градиентом, меньшим или большим адиабатического, будет соответственно стабильной или нестабильной относительно конвекции.

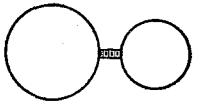
39. 6. Цилиндр с непроницаемой абсолютно гладкой перегородкой содержит 1 $м^3$ газа при давлении 1 *атм*. Газ медленно сжимается при постоянной температуре до конечного объема 0,4 $м^3$. Какая работа затрачивается при этом?

39. 7. Два газа, A и B, занимающие один и тот же начальный объем V_0, при одинаковом начальном давлении

P_0 внезапно подвергаются адиабатическому сжатию, каждый — до половины своего первоначального объема. Каково конечное давление в каждом газе по сравнению с начальным, если $\gamma_A = {}^5/_3$ (одноатомный газ), $\gamma_B = {}^7/_5$ (двухатомный)?

39. 8. Найти отношение количеств работы, необходимой для сжатия газов A и B, рассмотренных в задаче **39.7**.

39. 9. Две сферы объемом 200 и 100 *см*^{3} соединены короткой трубкой (см. рисунок), в которой имеется изолирующая пористая перегородка. С ее помощью можно добиться равенства давлений в сосудах, но не температуры. Система находится при $t = 27°$ С и содержит кислород под давлением 760 *мм рт. ст.* Малая сфера помещается в сосуд со льдом при 0° С, а большая — в сосуд с паром при 100° С. Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сфер пренебречь.



39.10. Резервуар на 50 *л* соединен с резервуаром на 15 *л* с помощью короткой трубки, в которой имеется специальный клапан давления, позволяющий газу просачиваться из большого резервуара в малый, если давление в большом превышает давление в меньшем на 88 *см рт. ст.* При $t = 17°$ С больший резервуар содержит газ при атмосферном давлении, а меньший — полностью вакуумирован. Каково будет давление в последнем, если оба резервуара нагреть до 162° С?

39.11. При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует в двуокись азота:

$$N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2.$$

В вакуумированный сосуд объемом 250 *см*^{3} вводится 0,90 *г* жидкого N_2O_4 при 0° С. Когда температура в сосуде увеличивается до 27° С, жидкость испаря-

ется, а давление становится равным 960 *мм рт. ст.* Сколько процентов четырехокиси азота при этом диссоциирует?

39.12. Вначале 1 моль идеального одноатомного газа находится в изолированном сосуде с подвижной крышкой, занимая объем V_1 при давлении P_1 и температуре $T_1=27^\circ$ С. Затем он медленно нагревается с помощью помещенного внутрь нагревателя, на что полностью тратится энергия 8,31 *вт-ч*. В результате газ расширяется при постоянном давлении P_1, нагреваясь до температуры T_2 и занимая конечный объем V_2. Вычислите работу, проделанную газом при расширении, и запас энергии газа, а также найдите: а) T_2, б) V_2/V_1.

К главе 40. ***Принципы статистической механики***

40. 1. В радиометре молекулы газа бомбардируют тонкие легкие крылышки вертушки, которые с одной стороны зачернены, а с другой — покрыты блестящей краской. Когда на крылышки попадает излучение, поглощенная ими при этом энергия уносится в основном молекулами, бомбардирующими зачерненную сторону каждого крылышка. В результате возникает результирующая несбалансированная сила, которая поворачивает вертушку. Рассмотрим сосуд, в котором имеется n молекул массы m в единице объема, при абсолютной температуре T. Тонкое крылышко единичной площади, расположенное внутри такого сосуда, поглощает радиационную энергию со скоростью π *вт*, причем эта энергия уносится (изотропно) молекулами, попадающими только на одну сторону крылышка. Оцените примерно силу, действующую на крылышко в воздухе при комнатной температуре.

40. 2. Какая доля молекул газа (газ находится в тепловом равновесии), достигающих в единицу времени поверхности сосуда, обладает кинетической энергией:
а) большей, чем средняя тепловая,
б) в 3 раза большей, чем средняя тепловая?

40. 3. Молярная теплоемкость вещества при постоянном объеме C_V — это количество энергии, необходимое для повышения температуры 1 моля вещества на 1°, если объем остается постоянным. Чему равна молярная теплоемкость при постоянном объеме:
а) идеального одноатомного газа?
б) идеального двухатомного газа?

40. 4. Газ при нормальных давлении и температуре втекает со скоростью v через гладкую трубку с постоянным поперечным сечением площадью A. Когда газ проходит через проволочную сетку, оказывающую пренебрежимо малое сопротивление потоку, он нагревается. Приобретаемая мощность равна q *вт*. Из трубки газ вытекает со скоростью v'. Напишите уравнения, выражающие законы сохранения массы, энергии и импульса для случая, когда через трубку протекает воздух, а затем найдите:
а) v',
б) конечную температуру T,
в) напор F (основная характеристика реактивного двигателя).

40. 5. Обсудите достоинства воздушного реактивного двигателя в свете предыдущей задачи, если при его работе затрачивается 100 *кг* воздуха и 2,00 *кг* керосина в секунду. Теплотворная способность керосина составляет около $4{,}65 \cdot 10^7$ *дж/кг*. Какие обстоятельства могут сделать неправильным полученный вами результат?

40. 6. Закон распределения Максвелла имеет вид

$$\frac{dN}{dv} = Av^2 e^{-bv^2}.$$

Он может быть преобразован так: $y = x^2 e^{-x}$.
а) Нарисуйте график этой функции для $0 \leqslant x \leqslant 3{,}0$ и покажите, что при увеличении x главную роль играет экспоненциальный член.
б) Найдите максимальное значение y.

40. 7. При атмосферном давлении закон $n = n_0 e^{-mgh/kT}$; величина $\frac{kT}{mg} = \frac{RT}{ug} = h_0$ определяет собой так назы-

ваемую *шкалу высоты* (u — молекулярный вес). Рассчитайте шкалу высоты для земной атмосферы и околосолнечного пространства, если

$u_\oplus = 29$, $T_\oplus = 300°$ K,
$u_\odot = 1{,}5$, $T_\odot = 5500°$ K, $g_\odot = 2{,}7 \cdot 10^2$ *м/сек*^{2}.

Значения u, g, T относятся соответственно к условиям у поверхности Солнца ($\odot$) и Земли ($\oplus$).

К главе 41. ***Броуновское движение***

41. 1. Рассчитайте (и запомните):
а) температуру T, при которой $kT = 1$ *эв*;
б) величину kT (в *эв*) при комнатной температуре;
в) длину волны фотона, соответствующей квантовому переходу с разностью энергий 1 *эв*.

41. 2. Закон распределения излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$I(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}.$$

Перейдя к новой переменной $x = \hbar\omega/kT$, покажите, что:
а) проинтегрированная по всем частотам полная интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры;
б) частота ω_m, при которой $I(\omega)$ имеет максимальное значение, пропорциональна абсолютной температуре.

41. 3. Найдите относительные интенсивности света с длиной волны 0,31 *мк*, излучаемого двумя абсолютно черными телами, которые находятся при температуре 2000 и 4000° K соответственно.

К главе 42. ***Применения кинетической теории***

42. 1. Энергия активации, теплота испарения, теплоты образования или диссоциации и т. д. обычно выражаются в джоулях на 1 *г-моль* или в электронвольтах на 1 атом. Сколько *дж/г-моль* содержится в 1 *эв/атом*? (Химики обычно используют энергетическую единицу, называемую килокалорией; 1 *ккал* = 4186 *дж*.)

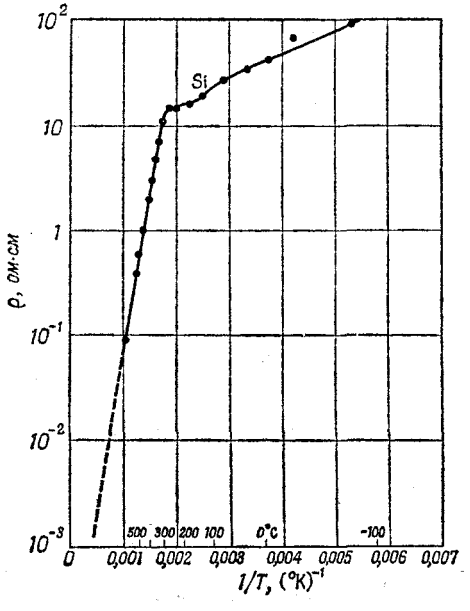
42. 2. а) Постройте график плотности паров ртути в зависимости от $1/T$ в полулогарифмической шкале (соответствующие данные возьмите из учебников физики и химии). С помощью графика определите теплоту испарения ртути. Сравните ваши результаты с табличной величиной.

б) Проделайте то же самое для воды.

42. 3. В температурном интервале 0—300° С теплота возгонки ртути изменяется только на 3% (в среднем это составляет около 0,61 *эв/атом*). Какую ошибку вы сделаете при расчете плотности паров ртути при 0° С, если используете теплоту возгонки при 300° С вместо правильного значения при 0° С?

Замечание. Незначительное в процентном отношении отличие в показателе экспоненты может привести к большой ошибке.

42. 4. Сопротивление почти чистого кремния в зависимости от температуры показано на прилагаемом графике.



Сделайте качественный вывод о природе прямого тока в этом веществе выше и ниже 300° С.

К главе 43. ***Диффузия***

43. 1. «Диаметр» молекулы кислорода приблизительно равен $d=3$ Å. Вычислите среднюю длину свободного пробега и среднее время между двумя столкновениями для молекул кислорода при нормальных давлении и температуре.

43. 2. Сосуд содержит 10^{24} молекул газа, средняя длина свободного пробега одной молекулы равна l. Для какой длины пробега L вероятность того, что хоть *какая-нибудь из молекул* пройдет в сосуде без столкновения путь, превышающий L, меньше 50%?

43. 3. Если в веществе существует температурный градиент, то происходит перенос тепла, причем количество переносимой энергии в единицу времени пропорционально этому градиенту (без учета конвекции). Коэффициент пропорциональности, приведенный к единице площади и к единице температурного градиента, называется *теплопроводностью* K. Таким образом, $dE/dt=KA(dt/dx)$. Покажите, что в отсутствие конвекции теплопроводность газа равна

$$K = kn_0 v \frac{l}{\gamma - 1} = \frac{kv}{(\gamma - 1)\sigma}.$$

Примечание. Интерпретируйте теплопроводность как перенос внутренней (тепловой) энергии U через плоскость внутри вещества, как это было сделано при рассмотрении процесса диффузии.

43. 4. Когда в жидкости существует градиент скорости, причем скорость зависит от расстояния в направлении, перпендикулярном потоку, то в результате возникает тормозящий движение фактор, называемый *вязкостью*. В газе его появление обусловлено переносом импульса. Через каждую плоскость импульс переносится молекулами, находящимися

по обе стороны от нее на расстоянии, не превышающем длину свободного пробега. Если поток движется в направлении оси x и существует градиент скорости v_x в направлении оси y, то сила вязкости, отнесенная к единице площади плоскости, перпендикулярной оси y, равна $F/A=\eta dv_x/dy$. Покажите, что для газа коэффициент вязкости η приближенно равен

$$\eta = n_0 vml = \frac{vm}{\sigma},$$

где n — концентрация молекул; m — масса молекулы; l — длина свободного пробега; $\sigma=n_0 l$.

43. 5. Отметим, что теплопроводность и вязкость газа не зависят от давления. Измените соответствующим образом формулу для количества энергии, переносимой между двумя поверхностями, имеющими температуры T и $T+\Delta T$ и находящимися на расстоянии D друг от друга, если $l \gg D$. Проделайте то же самое, рассматривая процесс переноса импульса между двумя такими поверхностями, движущимися со скоростями v и $v+\Delta v$.

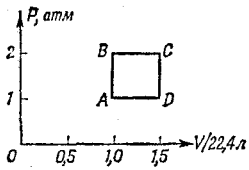
43. 6. Два газа A и B с плотностями ρ_A и ρ_B находятся при определенной температуре T_0. Отдельный ион, за которым ведется наблюдение, обладает подвижностями μ_A в газе A и μ_B в газе B ($\mu=v_{\text{др}}/F$, где F — сила, см. вып. 4, стр. 90). Какова подвижность иона в смеси этих газов с плотностью $\rho_A+\rho_B$ при той же температуре T_0?

К главе 44. ***Законы термодинамики***

44. 1. Идеальный газ, имеющий $\gamma={}^4/_3$, последовательно переводится из состояния A (давление $P=1$ *атм*, объем $V=22{,}4$ *л*, температура $t=300°$ К) в состояние C ($P=2$ *атм*, $V=33{,}6$ *л*) либо по пути ABC, либо по пути ADC.

а) Покажите, что изменение энтропии в обоих случаях одинаково.

б) Рассчитайте это изменение.



44. 2. Переведите идеальный цикл Карно *abcd* на диаграмме p—V между состояниями, характеризующимися параметрами T_1 и T_2 и (p_a, V_a), (p_c, V_c), в цикл $ABCD$ на диаграмме энтропия — температура (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 109).

44. 3. Температура парогенератора на современной теплоэлектростанции, использующей перегретый пар, равна 600° С. В холодильник подается речная вода при t=20° С. Каков максимальный к. п. д., который может быть получен на такой станции?

44. 4. В идеальном обратимом двигателе, в котором в качестве рабочего тела используется 28 *г* азота ($\gamma = {}^7/_5$), рабочий цикл *abcd* происходит без использования золотника (см. фиг. 44.6 «Лекций», вып. 4, стр. 109). Температура нагревателя 400° К, холодильника 300° К. Начальный объем газа в точке *a* равен 6,0 *л*, а объем в точке *c* составляет 18,0 *л*.

а) При каком объеме V_b нужно прекратить подачу в цилиндр тепла (изотермическое расширение) и, теплоизолировав его, начать адиабатическое расширение от V_b к V_c? При каком объеме V_d начнется адиабатическое сжатие?

б) Какое количество тепла поступает в систему на участке $a \to b$ цикла?

в) Какое количество тепла уходит из системы на участке $c \to d$?

г) Чему равен к. п. д. двигателя?

д) Чему равно изменение энтропии на 1 *г* рабочего вещества на участках $a \to b$ и $c \to d$?

Примечание. Вы должны получить, что для цикла Карно в случае идеального газа отношения V_b/V_a и V_c/V_d равны.

44. 5. Беззаботный экспериментатор, торопясь уйти, оставил золотник резервуара, наполненного гелием, неплотно закрытым. Газ, первоначально находившийся при давлении 200 *атм*, медленно изотермически выходит из резервуара при температуре 20° С. Чему равно изменение энтропии на 1 *кг* газа?

К главе 45. ***Примеры из термодинамики***

45. 1. Солнце излучает приблизительно как черное тело при температуре 5700° К. Если солнечным светом облучать абсолютно черную медную сферу, расположенную на расстоянии 1 *А.Е.* от Солнца, то какая равновесная температура будет достигнута при этом? (Диаметр Солнца виден с Земли под углом 0,50°.)

45. 2. Солнечный свет падает перпендикулярно на некоторую область, находящуюся в Экваториальной Африке. Если поверхность излучает как абсолютно черное тело, то какова максимальная температура этой области? (Солнечная постоянная равна 1395 *вт/м*^{2}.)

45. 3. Черное тело радиуса r при температуре T окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиуса R. Найдите, насколько такой радиационный экран уменьшает скорость охлаждения тела. (В пространстве между телом и оболочкой — вакуум, потерь, связанных с теплопроводностью, нет.)

45. 4. Плотность в центре Солнца равна приблизительно 80 *г/см*^{3}, а температура $\sim 13 \cdot 10^6$ °К. Вещество Солнца почти целиком состоит из протонов и электронов. Найдите давление газа и радиационное давление в центре Солнца.

45. 5. Скрытая теплота испарения воды равна приблизительно $2{,}44 \cdot 10^6$ *дж/м*^{3}, а плотность пара при 100° С составляет 0,598 *кг/м*^{3}. Используя уравнение Клаузиуса — Клапейрона, найдите скорость изменения температуры кипения с высотой в *град/км*,

принимая за начало отсчета уровень моря. Положите температуру воздуха равной 300° К.

45. 6. Покажите, что для идеального газа, внутренняя энергия которого зависит только от температуры, разность между молярными теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме равна газовой постоянной R:

$$C_p - C_v = R.$$

45. 7. При 0° С удельный объем насыщенного водяного пара равен 206 *м³/кг*. Какова скрытая теплота испарения в *дж/кг* при этой температуре? (Определите dp/dt из таблиц, рассчитайте L и сравните с табличным значением.)

45. 8. Тело поглощает фиксированную долю A полного излучения, падающего на его поверхность, и отражает остаток. Покажите, что при температуре T оно излучает энергию $A\sigma T^4$.

45. 9. а) Используя термодинамические соображения, покажите, что если вещество при замерзании расширяется, то его температура замерзания должна уменьшаться с увеличением давления.

б) Рассчитайте самую низкую температуру льда на катке, при которой катание на коньках еще возможно.

К главе 47. ***Звук. Волновое уравнение***

47. 1. Найдите отношение скоростей звука в гелии и водороде при одной и той же температуре.

47. 2. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный почти до температуры жидкого воздуха (—180° С), и теплый воздух.
Один свисток издает звук ровно на октаву выше, чем другой (т. е. удвоенной частоты). Какова должна быть температура воздуха, вдуваемого во второй свисток?

47. 3. Если вы вдохнете гелий и начнете разговаривать, то звук вашего голоса будет неестественно высоким.

Если все ваши резонансные полости («пустоты в вашей голове») будут заполнены гелием, а не воздухом, то насколько увеличится каждая *резонансная* частота? Если вы при этом напеваете, то как повлияет наличие гелия на тональность, в которой вы поете? Обсудите.

47. 4. Рассмотрим постоянную плоскую звуковую волну с частотой 1000 $сек^{-1}$, в которой экстремумы давления отличаются на ± 1 $дин/см^2$ от среднего атмосферного давления $1 \cdot 10^6$ $дин/см^2$.

а) Чему равно изменение плотности, сопровождающее распространение такой волны?

б) Чему равно максимальное смещение χ_m частиц?

в) Чему равна интенсивность волны?

(Примите скорость звука равной 340 *м/сек.*)

47. 5. Зажмите кончиками пальцев обеих рук резиновую полоску длиной около 5 *см*, а затем попросите товарища слегка щелкнуть по резине. Послышится звук. Потом растяните полоску в 2, 3, 4, 5 раз, *не меняя массу* полоски между руками, и повторите ту же процедуру. Обсудите результаты наблюдения. Почему ничего похожего не происходит со струной скрипки?

47. 6. Однородная абсолютно гибкая струна линейной плотности σ *кг/м* растянута с натяжением T. Сформулируйте волновое уравнение, описывающее поперечное смещение струны y, и найдите скорость распространения возмущения вдоль струны. Используйте предположение о том, что $\partial y/\partial x \ll 1$ во всех точках в любой момент времени, и рассмотрите только плоские колебания струны. Отметим, что компонента натяжения струны в поперечном направлении очень близка к $T\,\partial y/\partial x$.

47. 7. Покажите, что выражение $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при условии, что ω и k связаны соотношением $\omega = vk$.

К главе 48. ***Биения***

48. 1. Фазовая скорость волны с длиной волны λ, распространяющейся по водной поверхности, если пренебречь поверхностным натяжением и конечной глубиной водоема, $v_{фаз}=\sqrt{g\lambda/2\pi}$. Покажите, что групповая скорость волны равна половине фазовой. Чему равна групповая и фазовая скорости волны длиной 1000 *м*?

48. 2. Если в предыдущей задаче рассматривать влияние поверхностного натяжения, то можно показать, что фазовая скорость волны на поверхности жидкости с плотностью ρ и с поверхностным натяжением T равна $v_{фаз}=(2\pi T/\lambda\rho+g\lambda/2\pi)^{1/2}$, когда глубина водоема достаточно велика. Найдите групповую скорость такой волны.

48. 3. Найдите фазовую скорость ряби с длиной волны 1,0 *см* на поверхности:
а) воды (поверхностное натяжение 70 *дин/см*);
б) этилового спирта (поверхностное натяжение 26 *дин/см*).

48. 4. Найдите длину волны и частоту ряби на поверхности воды, которая движется с *минимальной* скоростью.

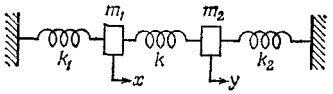
48. 5. Длинный дизельный товарный поезд идет в гору со скоростью 5,0 *м/сек* по прямому пути. Когда он достигает туннеля в отвесной скале, машинист дает длинный непрерывный гудок с основной частотой 340 *гц*. Звук гудка и его эхо, возникающее при отражении от стены, слышат машинист и человек, находящийся на земле вблизи последнего вагона. Какой частоты звук слышит каждый из них?

К главе 49. ***Собственные колебания***

49. 1. Два тела с массами m_1 и m_2 прикреплены к двум стенам пружинами, коэффициенты упругости которых k_1 и k_2 соответственно. Друг с другом они соединены пружиной с жесткостью k (см. рисунок).

Напишите уравнения движения этих тел, положив

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2.$$



49. 2. Подставьте $x=Ae^{i\omega t}$ и $y=Be^{i\omega t}$ в полученные выше уравнения и найдите частоты и отношения амплитуд грузиков для нормальных колебаний.

49. 3. Покажите, что функция

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = Ae^{i\omega t} \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c},$$

где

$$\omega^2 = v^2\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right),$$

а l, m, n — целые числа, большие или равные единице,

а) удовлетворяет трехмерному волновому уравнению (описывающему волну со скоростью распространения v);

б) равна 0 при $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$;

в) осциллирует во времени подобно синусоиде.

49. 4. Полагая, что в предыдущей задаче $a : b : c = 1 : 2 : 3$, найдите 10 минимальных частот, выраженных через наименьшую частоту ω_0. Расположите их в порядке возрастания и отложите на вертикальной шкале.

49. 5. Используя понятие о бесконечно длинных периодических волнах, распространяющихся в противоположных направлениях, выясните, что́ произойдет, если идеальная однородная натянутая струна длины L оттянута от средней точки на расстояние A, а затем отпущена. Нарисуйте несколько положений струны в различные моменты времени в течение одного полупериода первой гармоники.

К главе 50. **Гармоники**

50. 1. Используя фурье-разложения прямоугольной волны

$$f(x)=\text{}=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right),$$

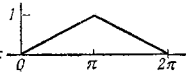
покажите, что

а) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$,

б) $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$,

в) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

50. 2. Разложите функцию $g(x)=$  в интеграл Фурье и покажите, что полученные результаты согласуются с тем, что получается при интегрировании функции, использованной в предыдущей задаче.

50. 3. Используя результат предыдущей задачи, покажите

а) $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2^4}{2^4-1}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)=\frac{\pi^4}{90}$.

50. 4. В гл. 45 нам надо было вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}.$$

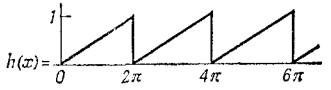
Теперь вы можете это сделать, умножив числитель и знаменатель на e^{-x}, разложив подынтегральную

функцию в ряд и интегрируя почленно. Получим

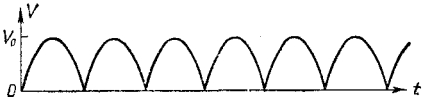
$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty u^3 e^{-u} du \left[1 + \frac{!}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right] = 6\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Проверьте это.

50. 5. Найдите фурье-разложения пилообразной функции, которая описывает ток, протекающий в горизонтальной цепи развертки электронного осциллографа:



50. 6. Выпрямитель есть устройство, которое преобразует синусоидальную волну, например напряжения с амплитудой V_0, в



а) Вычислите среднее значение $V(t)$. Оно называется выходным напряжением.

б) Найдите амплитуду второй гармоники в выходном напряжении.

50. 7. С трансформатора снимается выходное напряжение, пропорциональное $V_{\text{вых}} = V_{\text{вх}} + e(V_{\text{вх}})^3$. Выясните, к каким эффектам приведет учет кубического члена, если:

а) входная волна синусоидальная;

б) имеются две или более входные синусоидальные волны с разными частотами.

Решения и ответы

1

СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРИРОДЕ • ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

К главе 1. ***Атомы в движении***

1.1. а) Известно, что при нормальных условиях грамм-молекула любого вещества содержит A молекул ($A=6{,}02\cdot10^{23}$ — число Авогадро) и занимает в газообразном состоянии объем $v_0=22{,}4\ л=22\,400\ см^3$. Следовательно, в 1 $см^3$ газообразного воздуха содержится $n_в$ «молекул»:

$$n_в=\frac{A}{v_0}=2{,}7\cdot10^{19}\ см^{-3}.$$

Плотность газообразного и жидкого воздуха равна соответственно

$$\rho_в=mn_в \quad \text{и} \quad \rho_ж=mn_ж,$$

где m — масса «молекулы» воздуха, а $n_ж$ — число «молекул» в 1 $см^3$ жидкого воздуха, поэтому

$$\frac{\rho_ж}{\rho_в}=\frac{n_ж}{n_в} \quad \text{и} \quad n_ж=\frac{\rho_ж}{\rho_в}n_в=2{,}7\cdot10^{22}\ см^{-3}.$$

б) Зная плотность воздуха, вычисляем массу «молекулы» воздуха

$$m=\frac{\rho_в}{n_в}=3{,}7\cdot10^{-23}\ г.$$

в) Представим себе молекулу воздуха в виде твердого шарика с радиусом r. Ясно, что молекулы столкнутся, если их центры подойдут на расстояние, меньшее или равное $2r$. За единицу времени молекула пролетает путь, равный ее средней скорости v. При этом она сталкивается со всеми молекулами, центры которых окажутся в «захватываемом» ею объеме $\pi(2r)^2v$, т. е. испытывает $4\pi r^2n_0v$ столкновений (n_0 — число молекул в 1 $см^3$ воздуха при нормальных условиях).

Считая для оценки, что между двумя последовательными столкновениями молекула проходит равные расстояния λ (это и есть длина свободного пробега) и что все молекулы одинаковы, находим

$$\lambda=\frac{v}{(2r)^2\pi vn_0}=\frac{1}{4\pi r^2n_0}.$$

Полагая $r \approx 10^{-8}$ *см*, получаем $\lambda = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ *см*. От давления зависит только число частиц в 1 *см*^{3}, которое просто пропорционально давлению, так что можно написать $n = cp$ (c — коэффициент пропорциональности) и $\lambda = 1/(4\pi r^2 cp)$, откуда $\lambda p = \text{const}$. Поэтому для длины свободного пробега молекулы при разных давлениях, но одинаковой температуре газа имеем

$$\lambda_0 p_0 = \lambda_1 p_1.$$

Таким образом, давление, при котором длина свободного пробега составляет 1 *м*, равно

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ атм}.$$

1.2. Предположим, что объем древней капли был равен примерно 1 *см*^{3}, т. е. что капля содержала около $N \approx 3 \cdot 10^{22}$ молекул. Естественно предположить, что за огромный промежуток времени, прошедший от палеозойской эры до наших дней, молекулы капли равномерно распределились по всей имеющейся на Земле воде. В этом случае студент-геолог проглотил $n = (v/V)\,N$ молекул нашей капли, где v — объем выпитой им воды, а V — объем всей воды на Земле. Оценим V.

Будем считать, что вода покрывает равномерно весь земной шар слоем толщиной $d \approx 3$ *км*. В этом случае

$$V = 4\pi R_3^2 d \approx 1{,}5 \cdot 10^{23} \text{ см}^3,$$

где R_3 — радиус Земли. Положив $v = 150$ *см*^{3} (три четверти стакана), получим $n \approx 30$.

1.3. Рассмотрим сначала, как будет происходить испарение, если стакан накрыть крышкой и откачать из-под нее весь воздух. Пока водяного пара под крышкой мало, жидкость будет испаряться. Из воды все время будут вылетать молекулы воды, а из пара какое-то число молекул будет возвращаться в воду, т. е. конденсироваться. Через некоторое время в стакане установится динамическое равновесие: число вылетающих из воды молекул станет равным числу возвращающихся обратно. Если убрать крышку, вода начнет непрерывно испаряться, причем число вылетающих молекул будет таким же, как и тогда, когда стакан был накрыт, ведь процесс испарения зависит только от движения молекул в воде, число же возвращающихся в воду молекул зависит от количества водяных паров в воздухе над стаканом.

Оценим количество вылетающих из воды молекул в единицу времени при равновесии. Проще вычислять не это число, а равное ему число конденсирующихся молекул пара.

Пусть в единице объема воздуха над крышкой содержится n молекул водяного пара. Число n зависит только от температуры воздуха, оно измерено экспериментально; существуют таблицы зависимости n от температуры. За про-

межуток времени t поверхности воды достигнут только те молекулы пара (скорость молекулы v), которые находились в начальный момент времени не дальше, чем $v_в t$ ($v_в$ — вертикальная скорость молекулы). Другими словами, поверхности воды достигают те молекулы, которые находятся в объеме $Sv_в t$ над стаканом (S — площадь поперечного сечения стакана). Следовательно, в единицу времени конденсируется $^1/_2 nSv$ молекул пара.

Как уже отмечалось, число испаряющихся молекул при снятой крышке будет таким же, как и при закрытой крышке. Но число конденсирующихся молекул зависит от того, сколько молекул пара содержится в единице объема воздуха над поверхностью жидкости. Будем считать, что влажность воздуха близка к нормальной.

Влажностью (относительной) называют отношение числа содержащихся в воздухе молекул водяного пара в данный момент времени к максимально возможному (т. е. числу молекул пара в единице объема при равновесии). Нормальной считается влажность около 60—80%. Мы положим, что влажность воздуха 50%, т. е. в единице объема воздуха содержится $n/2$ молекул водяного пара. В этом случае, как следует из предыдущего рассмотрения, в воду из пара должно конденсироваться $^1/_4\ nSv$ молекул. Однако так было бы лишь при условии, что над водой находятся только водяные пары, а не смесь воздуха с паром. При наличии воздуха молекулы из воды отлетают без столкновений только на длину свободного пробега λ (это расстояние $\sim 3\cdot 10^{-5}$ *см*, см. задачу **1.1**), дальше они движутся от поверхности жидкости с очень малой скоростью (по сравнению с тепловой). Поэтому число конденсирующихся молекул определяется не плотностью пара на большом расстоянии от воды, а плотностью пара на расстоянии длины свободного пробега. Считая, что плотность пара в перпендикулярном к поверхности воды направлении меняется линейно, а на расстоянии примерно 1 *см* она равна уже $n/2$, находим, что плотность водяных паров на расстоянии λ примерно равна

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}(1-\lambda)=n\left(1-\frac{\lambda}{2}\right).$$

Таким образом, с поверхности воды в единицу времени испаряется около $n\lambda Sv/4$ молекул воды. После этого рассмотрения мы можем ответить на поставленные в задаче вопросы.

а) В стакане воды содержится $n_в Sh$ молекул воды, где $n_в = 3\cdot 10^{22}$ *см*$^{-3}$ — число молекул воды в 1 *см*^{3} (см. предыдущую задачу), а h — высота стакана, которую примем равной 10 *см*. Вся вода испарится за время

$$\frac{4n_в h}{\lambda n v}\approx 0{,}6\cdot 10^6\ сек \approx 7\ дней$$

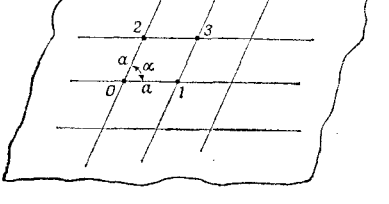
(при $t = 25°$ С, $v = 6000$ *м/сек*, $n = 10^{18}$ *см*$^{-3}$).

б) С площадки в 1 $см^2$ каждую секунду испаряется $n\lambda v/4 \approx$ $\approx 2 \cdot 10^{18}$ молекул.

в) В среднем за год должно испариться количество воды, равное среднегодовому количеству осадков. Конечно, полученное нами число в пункте (а) превышает количество осадков, так как для расчетов мы выбрали такие условия атмосферы, когда преобладает процесс испарения.

1.4. Хотя атомы и находятся в непрерывном движении, это еще не означает, что они в среднем изменяют свое относительное расположение. В частности, атом, колеблющийся около своего места в кристаллической решетке, в среднем покоится в нем, так что кристаллические тела не меняют своей формы до тех пор, пока амплитуда колебания составляющих их частиц мала по сравнению с расстояниями между ближайшими атомами. При достаточно сильном нагревании эта амплитуда становится столь большой, что атомы уже больше не «привязаны» к определенному месту, наступает процесс плавления и твердое тело меняет форму.

1.5. Рассмотрим часть грани кристалла. Расположение атомов в кристалле таково, что каждый атом окружен определенным образом расположенными другими атомами. Это означает, что атомы одного сорта расположены в так называемых эквивалентных точках, т. е. точках, окружение которых совершенно одинаково. Минимальное расстояние между эквивалентными точками a называется *периодом решетки*. На фиг. 1 эквивалентные точки — это точки *0*, *1*, *2*, *3*.

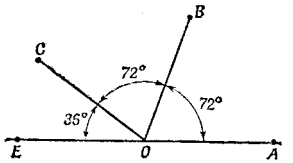


Фиг. 1

Ближайшие эквивалентные точки образуют некоторую плоскую фигуру — «ячейку» (на рисунке это ромб с вершинами в точках *0*, *1*, *2*, *3*), а если рассматривать весь кристалл, а не его грани, то объемную фигуру. При формировании кристалла нарастает все больше и больше ячеек, поэтому форма грани кристалла зависит от геометрической формы ячейки. Разумеется, скорость роста кристалла в разных направлениях различна, так что внешние грани кристалла

не являются просто повторением формы ячейки. Но совершенно ясно, что углы между сторонами грани кристалла равны углам между сторонами ячейки, поэтому для ответа на поставленный в задаче вопрос нам достаточно указать, что не может существовать ячеек в форме правильного пятиугольника.

Приведем доказательство от противного. Пусть ячейка кристалла — правильный пятиугольник, а O и A — эквивалентные точки (фиг. 2). Очевидно, эквивалентной должна быть и точка E (если эквивалентная точка помещается на расстоянии a от O при перемещении вправо, то должна быть эквивалентная точка и при перемещении влево на то же расстояние). Другие эквивалентные точки можно построить, поворачивая отрезок OA на угол $2\pi/5 = 72°$. После первого поворота получим точку B, а после второго — точку C. Но расстояние $EC < a$, что противоречит исходному предположению (расстояние между эквивалентными точками не меньше, чем a). Таким образом, грань кристалла не может быть правильным пятиугольником. Можно строго показать, что аналогичное построение непротиворечиво только в том случае, если ячейки кристалла имеют форму правильного треугольника, четырехугольника (квадрата) и шестиугольника.



Фиг. 2

1.6. Беспрерывно ударяясь о стенки сосуда, молекулы газа действуют на них с некоторой силой. Действительно, если сделать одну из стенок сосуда подвижной, то, чтобы удержать ее под градом ударов молекул в неизменном положении, нужно приложить к ней определенную силу. Величина этой силы, отнесенная к единице площади стенки, и есть давление газа. Понятно, что давление будет тем больше, чем больше молекул ударяется о единичную площадку поверхности стенки и чем энергичнее каждый удар. Если плотность газа не особенно велика, то число ударяющихся о стенку молекул просто пропорционально плотности. Сила же удара молекулы о поршень зависит от скорости молекулы: чем быстрее движется молекула, тем сильнее она наносит удар. С другой стороны, понятно, что при данной плотности газа к поршню подлетает и ударяется о него тем больше молекул, чем больше их скорость. Таким образом, мы видим, что от скорости молекул зависит и число ударов о поршень, и сила удара. Поэтому зависимость давления газа от средней ско-

рости молекул — нелинейная. Точный расчет показывает, что давление газа пропорционально среднему квадрату скорости, а не средней скорости.

1.7. Действительно, теплота есть не что иное, как движение молекул, но движение хаотическое, беспорядочное. Когда тело в целом покоится, его молекулы тем не менее могут обладать большой энергией хаотического движения. При этом мы говорим, что тело сильно нагрето (обладает высокой температурой). Если нагревать тело, т. е. дальше увеличивать его температуру, то скорость беспорядочного хаотического движения будет возрастать.

Молекулы холодного быстро движущегося бейсбольного мячика наряду с хаотической скоростью обладают еще скоростью направленного движения, одинаковой для всех молекул, которая характеризует энергию движения мячика как целого, а не его внутреннее состояние. Скорость же беспорядочного движения молекул холодного мячика меньше, чем нагретого.

1.8. Как бы ни были отполированы трущиеся поверхности машины, они никогда не будут совершенно гладкими. В действительности эти поверхности можно представить себе покрытыми (хотя и очень маленькими) бугорками, ступеньками и т. п. При движении таких поверхностей относительно друг друга происходит множество микроскопических ударов, неровности сминают друг друга. В результате таких беспорядочных ударов в конце концов увеличивается скорость хаотического движения молекул (в § 2 «Лекций», вып. 1, показано, что при ударе молекулы о движущуюся ей навстречу поверхность, скорость молекулы увеличивается). А это означает, что трущиеся тела нагреваются.

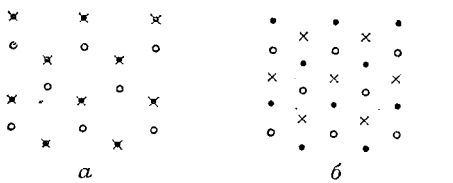
1.9. Кусок резины состоит из длинных перекрывающихся цепочек атомов, которые беспорядочно ориентированы в пространстве. При растягивании резины, т. е. когда к ней приложена некоторая внешняя сила, часть этих цепочек вытягивается вдоль внешней силы. При этом «ориентирующиеся» цепочки атомов сталкиваются с другими молекулами резины и заставляют их двигаться быстрее, подобно тому, как вдвигаемый в сосуд с газом поршень заставляет двигаться быстрее молекулы газа. Поэтому температура куска резины при его растяжении увеличивается, т. е. резина нагревается.

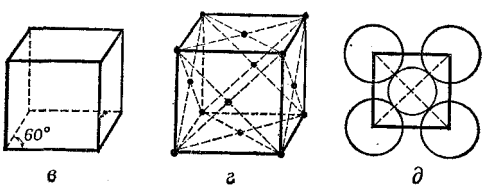
1.10. Резина с подвешенным на ней грузом растянута. Это значит, что некоторые молекулярные цепочки атомов расположены вдоль направления растяжения. В то же время все молекулы (цепочки) участвуют в беспорядочном тепловом движении и непрерывно сталкиваются друг с другом. В результате таких столкновений первоначально ориентированные цепочки атомов стремятся снова запутаться с остальными молекулами, но этому мешает приложенная внешняя сила. При нагревании резины скорость движения молекул увеличивается, усиливается бомбардировка ориентированных цепей, что

приводит к более сильному их запутыванию. Последнее означает, что длина натянутой резины при нагревании уменьшается.

1.11. Посмотрим, как разместятся шарики при наиболее плотной упаковке (как раз тогда в сосуде поместится максимальное число шариков). Первый слой шариков ляжет так, что каждый шарик соприкоснется с шестью другими (положение центров шариков этого слоя показано на рис. *а* черными точками). Шарики второго слоя лягут в «ямки» первого слоя, так что каждый шарик второго слоя соприкоснется с тремя шариками нижнего (обратите внимание, что используется только половина «ямок» первого слоя), а в остальном второй слой выглядит точно так же, как первый, только смещен относительно него в вертикальном направлении. Центры шариков второго слоя, если смотреть на них сверху, займут положение, обозначенное на рис. *а* светлыми кружочками. Третий слой шариков можно наложить двумя разными способами: шарики могут лечь в те «ямки» второго слоя, которые находятся над центрами шариков нижнего слоя, тогда получится, что шарики третьего слоя лежат точно над шариками первого слоя (центры шаров верхнего слоя обозначены крестиками). Если же шарики третьего слоя лягут в другие «ямки» второго слоя, то окажется, что они будут находится как раз над «свободными ямками» первого слоя (рис. *б*). Плотность упаковки и в том и в другом случаях одинакова, т. е. число шариков в единице объема в обоих случаях одинаково.

Укладывая таким же способом следующие слои шариков, замечаем, что их центры располагаются в пространстве в определенном порядке, т. е. образуют «кристаллическую» решетку. В первом из рассматриваемых случаев эта решетка,





как легко заметить, имеет вид, приведенный на рис. *в*. Это так называемая *гексагональная решетка*.

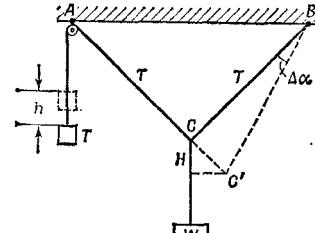
Вид решетки, получающейся при втором способе укладки, приведен на рис. *г* (*кубическая гранецентрированная решетка*). Чтобы увидеть, что центры шариков расположены именно так, нужно представить себе, что одна из диагоналей куба, изображенного на рис. *г*, перпендикулярна горизонтальной плоскости, а шарики, центры которых лежат в вершинах куба, принадлежат четырем горизонтальным слоям.

Рассчитаем максимальное число помещающихся в сосуд шариков при каком-нибудь одном способе размещения, например втором. Длина ребра кубической гранецентрированной решетки, как видно из рис. *д*, равна $l=\sqrt{2}d$ (d — диаметр шарика). С каждым таким кубом связано 14 шариков: 8 находятся в вершинах куба, а 6 лежат в середине каждой из его граней. Но внутри куба лежит только часть каждого шарика, общий занимаемый ими объем равен объему 4 шариков (по половине от каждого из шариков, центры которых лежат на гранях куба и по $^1/_8$ от шариков, находящихся в вершинах куба). В объеме V помещается всего V/V_0 кубических ячеек, где $V_0=l^3=2\sqrt{2}d^3$ — объем одной ячейки, так что в сосуде объемом V может быть помещено самое большее $N=4V/V_0=\sqrt{2}V/d^3$ шариков.

К главе 4. Сохранение энергии

4.1. Представим себе, что груз весом W уравновешен при помощи некоторого другого грузика, который подвешен на маленьком блоке, как показано на рисунке. Вопрос о натяжении проволоки сводится, таким образом, к вопросу о величине веса грузика, так как натяжение проволоки равно весу грузика. Обозначим поэтому вес грузика через T.

Предположим теперь, что грузик T поднялся на небольшую высоту h. При этом груз W опустится на расстояние H, а проволока BC повернется на малый угол $\Delta\alpha$.



Размеры проволок AC и AB таковы, что угол ACB прямой, поэтому $H = CC' \sin 45° = h/\sqrt{2}$ (угол $\Delta\alpha$ — маленький, поэтому CC' можно считать продолжением AC).

Увеличение потенциальной энергии грузика T по закону сохранения энергии равно уменьшению потенциальной энергии груза W, т. е. $Th = WH$, откуда

$$T = \frac{H}{h} W = \frac{W}{\sqrt{2}} \approx 35{,}5\ кГ.$$

4.2. Введем следующие обозначения: F_1 — сила давления роликов на вертикальную стену; F_2 и F_3 — горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления лестницы на землю. Очевидно, что F_1 направлена налево, F_2 — направо, а F_3 — вниз. Силы, приложенные к лестнице, равны по величине F_1, F_2 и F_3 и направлены в противоположных направлениях.

Рассмотрим следующие виртуальные перемещения лестницы. Пусть она сместится вниз параллельно себе самой на расстояние y. Неважно, что в действительности лестница так двигаться не может, ведь это перемещение воображаемое. В результате указанного перемещения потенциальная энергия лестницы и груза уменьшится на $(W + P)y$, а сила F_3 совершит работу $F_3 y$. Из закона сохранения энергии следует равенство этих двух величин, так что $(W + P)y = F_3 y$ и, следовательно, $F_3 = W + P = 36\ кГ$ (P — вес лестницы).

Выберем теперь другое виртуальное перемещение, состоящее в переносе лестницы параллельно себе в горизонтальном направлении, скажем вправо, на расстояние x. Аналогично предыдущему случаю можно написать $F_1 x = F_2 x$, откуда $F_1 = F_2$. Чтобы найти численные величины этих сил, необходимо иметь еще одно уравнение. Его можно получить, записав закон сохранения энергии при виртуальном повороте лестницы на небольшой угол вокруг оси, проходящей через нижний конец лестницы. Пусть α — угол, который образует лестница с Землей, а φ — тот малый угол, на который повернута лестница (по часовой стрелке). Точка, находящаяся на расстоянии l от оси вращения, опишет дугу длиной $l\varphi$. Так как угол φ мал, можно считать, что стягивающая дугу хорда имеет ту же длину и образует угол α, но с вертикальной стенкой (т. е. хорда перпендикулярна лестнице). Поэтому рассматриваемая точка при виртуальном повороте сместится вверх на величину $l\varphi \cos\alpha$ и вправо — на $l\varphi \sin\alpha$.

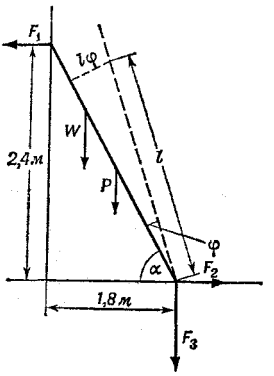
Используя только что полученный результат, убеждаемся в том, что при повороте на малый угол φ потенциальная энергия лестницы с грузом увеличится на $^1/_2 PL\varphi \cos\alpha + {}^3/_4 WL\varphi \cos\alpha$, а сила F_1 совершит работу $F_1 L\varphi \sin\alpha$ (L — длина лестницы). Из закона сохранения энергии

$$F_1 L\varphi \sin\alpha = \frac{1}{2} PL\varphi \cos\alpha + \frac{3}{4} WL\varphi \cos\alpha,$$

откуда

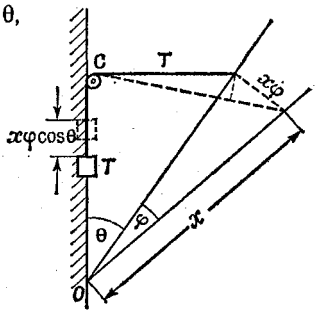
$$F_1 = \frac{(P/2 + 3W/4)\, L \cos\alpha}{L \sin\alpha}.$$

По условию задачи $L\cos\alpha = 1{,}8$ *м*, $L\sin\alpha = 2{,}4$ *м*, так что $F_1 = 18$ *кГ*.



4.3. Уравновесим стержень подъемного устройства грузом T, подвешенным на малом блоке в точке C. При виртуальном повороте стержня по часовой стрелке на малый угол φ вокруг нижнего конца точка M стержня, находящаяся на расстоянии l от оси вращения, опустится вниз на расстояние $l\varphi\sin\theta$ и сместится вправо на $l\varphi\cos\theta$ (см. предыдущую задачу). Поэтому при таком перемещении потенциальная энергия стержня и груза W уменьшится на $(W + {}^1/_2 w)\cdot L\varphi\sin\theta$, а груз T, как видно из рисунка, поднимется на высоту $x\varphi\cos\theta$, т. е. его потенциальная энергия увеличится на $Tx\varphi\cos\theta$. Из закона сохранения энергии

$$\left(W + \frac{1}{2}w\right) L\varphi\sin\theta = Tx\varphi\cos\theta,$$

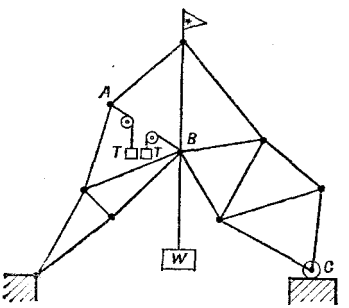


откуда

$$T=\frac{L}{x}\left(W+\frac{1}{2}w\right)\operatorname{tg}\theta.$$

4.4. а) Представим себе, что стержень AB фермы удален. Тогда под действием груза W шарнир B пойдет вниз направо, а шарнир A — вверх налево. Ясно поэтому, что стержень AB был растянут. Однако и удалив стержень, мы тоже можем удержать ферму в равновесии, подвесив два равных груза на неподвижных блоках так, как это показано на рисунке. Если длина AB увеличивается, грузы поднимаются и их потенциальная энергия возрастает. Чтобы потенциальная энергия всей системы оставалась неизменной, груз W должен опуститься. Следовательно, при нагревании стержня AB груз W опускается.

б) Вес рассматриваемых нами грузиков равен силе растяжения стержня T (ферма находится в равновесии). Если увеличить длину AB на величину x, грузы поднимутся вверх, причем сумма изменений высот грузов также равна x, а груз W опустится на y. Поэтому $Tx=Wy$, т. е. $T=(y/x)\,W$.



4.5. Пусть груз w опустится вниз на расстояние y. Потенциальная энергия груза при этом уменьшится на wy. Посмотрим, как изменится потенциальная энергия тележки весом W. Прежде всего заметим, что когда груз w опускается на расстояние y, ось подвижного блока, на котором он висит, опускается на вдвое меньшее расстояние. Так как тележка связана с грузом при помощи двух подвижных блоков, она передвинется по наклонной плоскости на расстояние в 4 раза меньшее, чем то, на которое опустится груз w, т. е. на величину $y/4$. По вертикали тележка поднимется на высоту $y/4\sin\theta$, поэтому ее потенциальная энергия увеличится на $^1/_4Wy\sin\theta$. Из закона сохранения энергии $^1/_4Wy\sin\theta=wy$, откуда $W=4w/\sin\theta$.

4.6. Повернем катушку на угол φ против часовой стрелки вокруг ее оси. При этом груз W опустится на расстояние $y=R\varphi$, а центр тяжести катушки поднимется на $x=r\varphi$, т. е. груз W опустится на расстояние $y-x$. Из закона сохранения энергии $W(y-x)=wx$, откуда

$$W=\frac{x}{y-x}w=\frac{r}{R-r}w.$$

4.7. По условию задачи $F_1/F_2=R$, где F_1 и F_2—силы, которые необходимо приложить к цепи для перемещения груза W вверх и вниз соответственно. Используем принцип виртуальной работы для этих двух случаев.

Предположим сначала, что, выбирая верхнюю часть ведущей цепи ворота с силой F_1, мы повернули верхний блок на полный оборот против часовой стрелки. При этом мы, очевидно, протянули n звеньев цепи, или же n/N *м*, так как длина одного звена цепи равна $1/N$ *м*. Посмотрим теперь, что происходит с грузом W. Правая часть цепи, на которой висит подвижный блок, поднялась на n звеньев, зато левая опустилась на $n-1$ звено, так что груз W поднялся на высоту $[n-(n-1)]/2N$ *м*. Если обозначить через X работу сил трения при одном обороте верхнего блока, то из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{n}{N}F_1=X+\frac{W}{2N}.$$

Чтобы повернуть верхний блок на один оборот по часовой стрелке, необходимо протянуть $n-1$ звено [или $(n-1)/N$ *м*] нижней части ведущей цепи ворота с силой F_2. При этом груз W опустится на расстояние $[n-(n-1)]/2N$ *м*. Так как по предположению сила трения не зависит от направления движения груза W и поскольку каждый раз мы рассматриваем один полный оборот верхнего блока, работа сил трения в этом случае та же, что и в предыдущем, т. е. равна X. Согласно закону сохранения энергии,

$$X=\frac{n-1}{N}F_2+\frac{W}{2N}.$$

Таким образом, для неизвестных сил F_1 и F_2 и работы сил трения получаем следующую систему трех уравнений:

$$\frac{n}{N}F_1=X+\frac{W}{2N},$$

$$\frac{n-1}{N}F_2=X-\frac{W}{2N},$$

$$\frac{F_1}{F_2}=R.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$F_2=\frac{W}{n(R-1)+1}$$

и

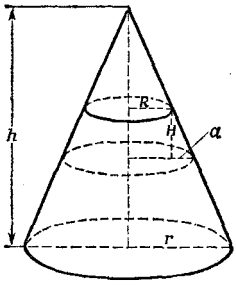
$$F_1=\frac{WR}{n(R-1)+1}.$$

4.8. Выберем такое виртуальное перемещение цепи, при котором она опускается на расстояние H вниз по вертикали параллельно самой себе. Потенциальная энергия ее при этом уменьшится на WH. Радиус же цепи при таком перемещении увеличится на величину a. Легко сообразить, что увеличение радиуса цепи и ее смещение вниз связаны соотношением $a/H=r/h$. Если натяжение цепи обозначить через T, то виртуальная работа сил натяжения при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи равна

$$[2\pi(R+a)-2\pi R]\,T=2\pi aT$$

(R — радиус цепи). Но виртуальная работа силы T равна изменению потенциальной энергии цепи, т. е. $2\pi aT=WH$. Отсюда следует

$$T=\frac{WH}{2\pi a}=\frac{Wh}{2\pi r}.$$



4.9. Повернем раму на небольшой угол φ. При таком повороте участок рамы $AA'CD$ опустится вниз параллельно самому себе на расстояние $AP\cdot\varphi$, а часть $B'BGH$ таким же образом поднимется вверх на высоту $PB\cdot\varphi$. Так как противовес w_c уравновешивает раму в отсутствие грузов, изменение его потенциальной энергии при любом изменении положения рамы равно по величине изменению потенциальной энергии самой рамы, поэтому в силу закона сохранения энергии должны быть равными и изменения потенциальной энергии грузов W_1 и W_2, т. е. $W_1AP\cdot\varphi=W_2BP\cdot\varphi$. Учитывая, что $AP=\frac{1}{2}BP$, находим $W_2=\frac{1}{2}W_1=0{,}25$ *кГ*.

4.10. Очевидно, вниз будет двигаться груз на той наклонной плоскости, которая образует больший угол с горизонталью. Легко убедиться в том, что, пройдя расстояние D вдоль наклонной плоскости, левый груз поднимется вверх на высоту $D\sin\theta$, а правый опустится вниз на расстояние $D\sin\varphi$. Грузы при этом будут двигаться с некоторой скоростью v. Из закона сохранения энергии изменение потенциальной энергии грузов равно их кинетической энергии (вначале грузы покоились). Так как кинетическая энергия каждого груза равна $Wv^2/2g$, а изменение потенциальной энергии грузов есть $WD(\sin\varphi-\sin\theta)$, то

$$2\cdot\frac{Wv^2}{2g}=WD(\sin\varphi-\sin\theta),$$

следовательно,

$$v^2=gD(\sin\varphi-\sin\theta).$$

4.11. Так как углы наклона плоскостей одинаковы, грузы начнут двигаться так, что больший из них будет опускаться. При смещении на расстоянии D потенциальная энергия грузов уменьшится на $(W_1-W_2)D\sin\theta$ (см. предыдущую задачу), а их кинетическая энергия станет $(W_1+W_2)v^2/2g$. Из закона сохранения энергии

$$\frac{W_1+W_2}{2g}v^2=(W_1-W_2)D\sin\theta,$$

откуда

$$v^2=2g\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}D\sin\theta.$$

4.12. Пусть уровень воды в баке уменьшится на небольшую глубину Δh. Это значит, что небольшая масса воды $\Delta m=\rho A\Delta h$ ($\Delta h\cdot A$ — объем вытекшей жидкости, а ρ — ее плотность) вытекла из сосуда через отверстие α с некоторой скоростью v. Так как площадь отверстия мала по сравнению с площадью поперечного сечения сосуда ($\alpha\ll A$), скоростью изменения уровня жидкости в сосуде можно пренебречь. Изменение потенциальной энергии жидкости равно ΔmgH, а изменение ее кинетической энергии есть $\Delta mv^2/2$.

Из закона сохранения энергии

$$\Delta mgH=\frac{\Delta mv^2}{2},$$

так что $v=\sqrt{2gH}$. Таким образом, в принятом приближении скорость вытекания жидкости не зависит ни от площади поперечного сечения сосуда, ни от сечения отверстия, а только от уровня жидкости над отверстием.

Можно учесть и скорость изменения уровня жидкости в сосуде, которую обозначим через v_1. В этом случае изме-

нение кинетической энергии равно

$$\frac{\Delta m v^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

(а не $\Delta m v^2/2$, как мы считали раньше). Через поперечное сечение сосуда в единицу времени протекает объем жидкости $v_1 A$, а через сечение α за то же время вытекает объем $v\alpha$. Так как жидкость практически несжимаема, $v_1 A = v\alpha$, так что $v_1 = (\alpha/A)\, v$.

Учитывая это, изменение кинетической энергии жидкости запишем как $(\Delta m/2)\, v^2[1 - (\alpha/A)^2]$, а закон сохранения энергии в виде $(\Delta m/2)\, v^2[1 - (\alpha/A)^2] = \Delta m g H$. Из последнего выражения находим скорость вытекания жидкости из сосуда:

$$v = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 - (\alpha/A)^2}}.$$

4.18. I. Пусть стороны треугольника равны d_1, d_2 и L, а угол между сторонами d_1 и d_2 равен α. Тогда, как известно, $L^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos\alpha$. Увеличим угол α на небольшую величину $\Delta\alpha$. Сторона, лежащая против этого угла, станет равной L_1, т. е. увеличится на небольшую величину $\Delta L = L_1 - L$. Но, по той же теореме косинусов, $L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos(\alpha + \Delta\alpha)$. Вспоминая, что $\cos(\alpha + \Delta\alpha) = \cos\alpha \cos\Delta\alpha - \sin\alpha \sin\Delta\alpha$ и что для малых углов $\cos\Delta\alpha \approx 1$, $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, находим

$$L_1^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 (\cos\alpha - \Delta\alpha \sin\alpha).$$

Вычитая L^2 из L_1^2, получаем

$$L_1^2 - L^2 = 2d_1 d_2 \Delta\alpha \sin\alpha.$$

С другой стороны,

$$L_1^2 - L^2 = (L_1 - L)(L_1 + L) = 2L\Delta L, \qquad (L_1 + L_2 \approx 2L).$$

Сравнивая эти выражения для разности квадратов сторон, получаем приведенную в тексте задачи формулу

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin\alpha \Delta\alpha.$$

II. Катеты a и b и гипотенуза c прямоугольного треугольника по теореме Пифагора связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. Увеличим длины катетов на небольшие отрезки Δa и Δb, длина гипотенузы треугольника при этом также увеличится и станет равной $c + \Delta c$. Согласно теореме Пифагора, $(c + \Delta c)^2 = (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2$ или $c^2 + 2c\,\Delta c = a^2 + 2a\Delta a + b^2 + 2b\Delta b$. Записывая последнее равенство, мы пренебрегли квадратами малых величин $(\Delta a)^2$, $(\Delta b)^2$ и $(\Delta c)^2$ по сравнению с членами типа a^2 и $a\Delta a$. Вычитая c^2 из

$(c+\Delta c)^2$, находим

$$2c\Delta c = 2a\Delta a + 2b\Delta b.$$

Отсюда

$$c\Delta c = a\Delta a + b\Delta b.$$

4.14. Пронумеруем бревна, как показано на рисунке. Пусть бревно *2* при небольшом уменьшении угла θ начнет двигаться вниз, выталкивая бревно *3* вверх по кузову. Ясно, что в конце движения бревно *2* займет положение бревна *3*, а бревно *3* — положение, показанное на рисунке пунктиром. Так как при первоначальном расположении бревна находились в равновесии, изменение потенциальной энергии бревен при рассмотренных перемещениях должно равняться нулю. Это возможно только в том случае, если центр бревна *2* в первом и центр бревна *3* во втором случаях находятся на одной и той же высоте. Обозначим указанные высоты через y_1 и y_2 соответственно. Вычисление y_2 не вызывает никаких затруднений. Непосредственно из рисунка видно, что $y_2 = R\cos\theta + 5R\sin\theta$, где R — радиус бревна.

Для вычисления y_1 замечаем, что $y_1 = O_2A + O_1B$. Из прямоугольного треугольника O_1O_2A находим

$$O_2A = 2R\sin(60^\circ + \theta),$$

так как $O_1O_2O_3$ равносторонний треугольник со стороной $2R$, а $\angle O_3O_1A = \theta$. Из треугольника OO_1B следует

$$O_1B = \sqrt{2}\,R\sin(45^\circ + \theta),$$

так как $OO_1 = \sqrt{2}\,R$ есть не что иное, как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника OCO_1, длина катета которого равна R. Таким образом,

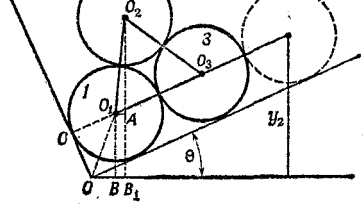
$$y_1 = 2R\sin(60^\circ + \theta) + \sqrt{2}\,R\sin(45^\circ + \theta) =$$
$$= 2R\sin\theta + (\sqrt{3} + 1)\,R\cos\theta.$$

Наконец, приравнивая y_1 и y_2, получаем

$$R\cos\theta + 5R\sin\theta = 2R\sin\theta + (\sqrt{3} + 1)\,R\cos\theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \theta = 30^\circ.$$



4.15. а) Гибкими связями можно заменить те стержни, которые растянуты. Чтобы выяснить, сжат данный стержень или растянут, удобно воспользоваться следующим простым приемом. Представим, например, что стержень AB фермы удален. Тогда груз W пойдет вниз, а точка B начнет перемещаться к точке A. Стержень AB препятствует такому движению, следовательно, он сжат. Удалим стержень AC. Груз W снова начнет двигаться вниз, а шарниры A и C разъедутся. Стало быть, стержень AC растянут. Удаляя последовательно каждый стержень фермы, можно убедиться, что стержни BC, AC, CE, EG, ED и EF растянуты, т. е. их можно заменить гибкими связями. Все остальные стержни сжаты.

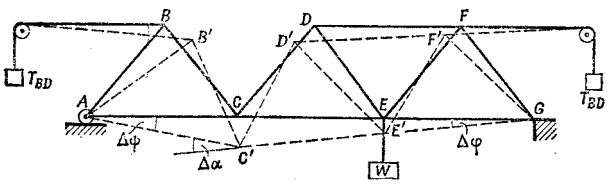
б) Удалим стержень BD. Чтобы ферма осталась в равновесии, к ней нужно на двух блоках подвесить два груза весом по T_{BD} каждый, как показано на рисунке (T_{BD} — усилие в стержне BD). Рассмотрим следующее виртуальное перемещение. Представим себе, что ферма переломилась в шарнире C, в результате чего часть фермы $GFDCE$ повернулась как целое на небольшой угол $\Delta\varphi$ вокруг шарнира G, а часть ABC — на угол $\Delta\Psi$ вокруг шарнира A. Углы $\Delta\varphi$ и $\Delta\Psi$ считаем малыми, такими, чтобы смещением точки A можно было пренебречь.

При таком перемещении фермы груз W опустится вниз на расстояние $EE' = EG\cdot\Delta\varphi$, а подвешенные на блоках грузики поднимутся вверх. Как видно из рисунка, сумма высот подъема грузов равна $BD - B'D' = \Delta BD$. Чтобы найти эту величину, удобно воспользоваться формулой, доказанной в пункте (1) задачи **4.13**; для этого нужно лишь определить изменение угла BCD: $\Delta\alpha = \angle BCD - \angle B'C'D'$. Легко убедиться в том, что $\Delta\alpha = \Delta\varphi + \Delta\Psi$. Но $CC' = CG\Delta\varphi = AC\Delta\Psi$, так что $\Delta\Psi = (CG/AC)\,\Delta\varphi = 2\Delta\varphi$, поэтому $\Delta\alpha = 3\Delta\varphi$.

Таким образом,

$$\Delta BD = \frac{(BC)^2}{BD}\cdot \sin\angle BCD\cdot\Delta\alpha = \frac{12}{5}\,BC\Delta\varphi,$$

так как $\sin\angle BCD = 24/25$. (Все стороны треугольника BCD известны, поэтому вычисление синуса не представляет труда.)



Из закона сохранения энергии $T_{BD}\Delta BD = WEG\Delta\varphi$, откуда

$$T_{BD} = \frac{EG\cdot\Delta\varphi}{\Delta BD}W = \frac{1}{2}W.$$

4.16. Если стержень находится в равновесии, то, повернув его на малый угол $\Delta\varphi$ около точки P, мы должны обнаружить, что потенциальная энергия не изменилась. Это означает, что потенциальная энергия одного из кусков увеличивается, а другого уменьшается, в точности компенсируя это увеличение. Так как потенциальная энергия однородного стержня зависит от высоты его середины, нужно определить, как изменятся высоты середин кусков при повороте на угол $\Delta\varphi$ (см. рисунок). Как видно из рисунка (для удобства треугольники $BB'B''$ и $CC'C''$ нарисованы отдельно), середина куска весом $2W$ опустится на величину $B'B'' = \sin\alpha_1\cdot BB'$, а середина куска весом W поднимется на $C'C'' = \sin\alpha_2\cdot CC'$. Итак,

$$2WBB'\sin\alpha_1 = WC'C\sin\alpha_2.$$

Но $B'B = C'C$ ($BB' = PB\cdot\Delta\varphi$, $C'C = PC\cdot\Delta\varphi$, а $PB = PC$), поэтому

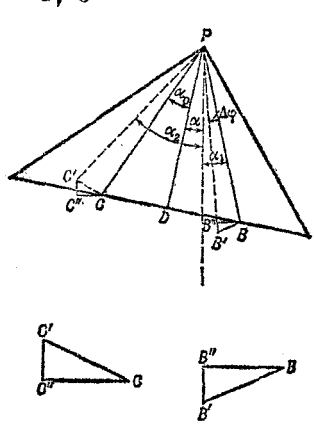
$$2\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2.$$

Заметим далее, что $\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha$ а $\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha$ (α — искомый угол). Пользуясь формулами для синуса суммы и разности углов, находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Определив $\operatorname{tg}\alpha_0$:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{CD}{PD} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$



получаем окончательно

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{6\sqrt{3}} \text{ и } \alpha=5°30'.$$

4.17. Грузы W_1 и W_2 на проволочной рамке можно уравновесить, подвесив на двух блоках два других груза весом T каждый (T — натяжение нити), как показано на рисунке. Пусть груз W_2 сдвинется на небольшое расстояние Δx_2 вниз по проволоке, а груз W_1 останется неподвижным. При таком перемещении груз W_2 опустится по вертикали на расстояние $\Delta x_2 \cos 30°$, а грузы T поднимутся вверх на величину $\Delta l=\Delta x_2 \cos(90°-\alpha)$ (Δl — удлинение нити при выбранном *виртуальном перемещении*). Согласно закону сохранения энергии

$$W_2\Delta x_2 \cos 30°=T\Delta x_2 \cos(90°-\alpha),$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{2}W_2=T\sin\alpha.$$

Сместим теперь вниз по проволоке на расстояние Δx_1 груз весом W_1, а второй оставим неподвижным. Те же рассуждения приведут нас к уравнению

$$W_1\Delta x_1 \cos 60°=T\Delta x_1 \cos\alpha,$$

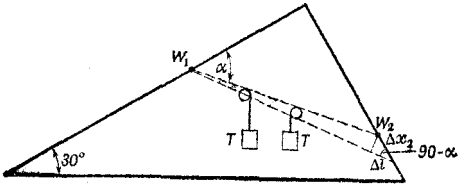
откуда

$$\frac{1}{2}W_1=T\cos\alpha.$$

Решая полученные два уравнения для α и T, легко найти

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\frac{W_2}{W_1}=3\sqrt{3}$$

(т. е. $\alpha\approx 79°$), а сама сила натяжения нити T равна 265 *Г*.



К главе 6. **Вероятность**

6.1. Как было показано в § 3 гл. 6 «Лекций» (вып. 1), при случайных блужданиях молекула, сделав N шагов, отклонится от первоначального положения в среднем на расстояние $D=\sqrt{N}l$, где l—длина одного шага (в нашем случае это просто длина свободного пробега молекулы между двумя последовательными столкновениями). Заметим, что используемая нами формула для пройденного расстояния (среднего квадратичного отклонения) отличается от формулы (6.10) «Лекций» (вып. 1, стр. 112) тем, что в ней явно фигурирует длина одного шага (в «Лекциях» же длина шага принята равной единице и поэтому явно в формулу не входит).

Итак, чтобы удалиться на расстояние D, молекула должна сделать $N=D^2/l^2$ шагов. Каждый шаг совершается за промежуток времени $\tau=l/\langle v\rangle$ ($\langle v\rangle$—средняя скорость молекулы), т. е. за время между двумя последовательными столкновениями молекулы. Поэтому для преодоления расстояния в 1 *см* молекуле понадобится время

$$T=N\tau=\frac{D^2}{l\langle v\rangle}\approx 3\ \textit{сек}.$$

6.2. Число существенно различных способов вынуть 3 шарика из 6 равно $C_6^3=20$. Из всех этих способов только одним способом можно вынуть все три шарика одного цвета (нужно, чтобы все шарики были красными) и, как легко подсчитать, шестью—разного цвета (три возможности—белый шарик, первый зеленый шарик, один из трех красных; другие три способа—белый шарик, второй зеленый шарик и один из трех красных шариков), Поэтому вероятность того, что все шарики окажутся одного цвета, равна $^1/_{20}$; вероятность же того, что все три шарика окажутся разного цвета, равна $^6/_{20}=^3/_{10}$.

6.3. Обозначим через p расстояние от центра шарика до оси, проходящей через центр неподвижной сферы параллельно скорости шарика (так называемый *прицельный параметр*). Как видно из рисунка, $p=(a+b)\sin\alpha$, где α—угол между скоростью шарика и радиусом сферы, проведенным в точку попадания шарика, т. е. угол падения. Введем угол рассеяния χ—угол между начальной и конечной скоростями шарика. Учитывая, что угол падения равен углу отражения, находим $\chi=\pi-2\alpha$.

Итак, угол рассеяния целиком определяется углом падения, т. е. в конечном итоге *прицельным расстоянием*. Если посмотреть со стороны движущихся шариков, то точки попадания шариков с одним и тем же прицельным расстоянием p образуют окружность радиусом p. Шарики с несколько меньшим прицельным расстоянием $p-\Delta p$ отклоняются

на бо́льший угол $\chi+\Delta\chi$. Очевидно, что все шарики, попавшие на заштрихованное кольцо, отклоняются на углы, лежащие между χ и $\chi+\Delta\chi$. Если Δp мало, то площадь этого кольца равна $2\pi p\Delta p$, а число шариков, попадающих на него в единицу времени, равно $n\cdot 2\pi p\Delta p$, где n — плотность потока, т. е. число шариков, проходящих в единицу времени через единичную площадку, расположенную нормально к потоку. Выразим теперь Δp через χ и $\Delta\chi$. Так как $\alpha=(\pi-\chi)/2$, то

$$\Delta p=(a+b)\left(\cos\frac{\chi}{2}-\cos\frac{\chi+\Delta\chi}{2}\right)=\frac{a+b}{2}\sin\frac{\chi}{2}\Delta\chi.$$

[Мы учли здесь то обстоятельство, что при малых $\Delta\chi$ $\sin\Delta\chi/2\approx\Delta\chi/2$ и $\sin((\chi+\Delta\chi)/2)\approx\sin\chi/2$.] Таким образом, число частиц, рассеянных в единицу времени на углы от χ до $\chi+\Delta\chi$, равно

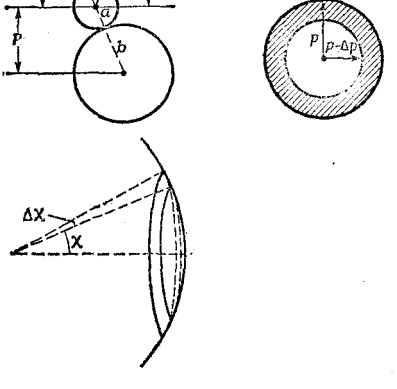
$$n\pi(a+b)^2\sin\frac{\chi}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\Delta\chi.$$

Если сечение потока шариков равно S, то доля шариков, рассеянных на углы от χ до $\chi+\Delta\chi$, равна

$$\frac{1}{S}\cdot\pi(a+b)^2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\Delta\chi=\frac{1}{S}\Delta\sigma(\chi,\ \Delta\chi).$$

Величину $\Delta\sigma$ называют *сечением рассеяния*. Имеем

$$\Delta\sigma(\chi,\ \Delta\chi)=\frac{\pi(a+b)^2}{2}\sin\chi\Delta\chi.$$



Эту формулу полезно записать в несколько ином виде. Представим себе сферу единичного радиуса и отложим из центра этой сферы векторы, изображающие скорости рассеянных шариков. Тогда векторы, отвечающие шарикам, рассеянным в интервале углов от χ до $\chi+\Delta\chi$, «пронижут» нашу сферу по кольцу, показанному на рисунке. Средний радиус этого кольца приблизительно равен $\sin\chi$, а площадь (для малых $\Delta\chi$) $2\pi\sin\chi\Delta\chi$. Обозначив эту площадь через $\Delta\Omega$, запишем

$$\Delta\sigma(\Delta\Omega)=\frac{(a+b)^2}{4}\Delta\Omega.$$

Наш результат можно выразить словами: сечение рассеяния в направления, лежащие в некотором телесном угле, пропорционально величине этого угла. Заметим, что полное сечение рассеяния σ на все углы ($\Omega=4\pi$) равно $\pi(a+b)^2$, что, конечно, вполне естественно.

К главе 7. ***Теория тяготения***

7.1. Элементы орбиты Луны приведены в условии задачи. Для спутника же расстояния от центра Земли в перигее и апогее равны соответственно

$$r_c^p=R_З+225\ км=6603\ км,$$

$$r_c^a=R_З+710\ км=7088\ км.$$

Для определения периода спутника T_c воспользуемся третьим законом Кеплера $T_c^2/T_Л^2=a_c^3/a_Л^3$, где a_c и $a_Л$ — большие полуоси орбит спутника и Луны соответственно, а $T_Л$ — период обращения Луны.

Выразим длину большой полуоси орбиты через r^p и r^a, воспользовавшись для этого формулами, приведенными на стр. 19:

$$r^p=a-c,\quad r^a=a+c,$$

откуда

$$a=\frac{r^p+r^a}{2}.$$

Подставляя a в формулу для отношения периодов, находим

$$T_c^2=\left(\frac{r_c^p+r_c^a}{r_Л^p+r_Л^a}\right)^3 T_Л^2.$$

В нашем случае это дает $T_c=1{,}55$ *час*.

7.2. а) Так как спутник движется по круговой орбите радиусом R, то, сместившись на x в горизонтальном направлении, он одновременно переместится на расстояние s

по вертикали. Выпишем формулу, связывающую s и x (см. «Лекции», вып. 1, подпись к рис. 74, стр. 127):

$$\frac{x}{s}=\frac{2R-s}{x}\approx\frac{2R}{x}$$

(s считаем малым, т. е. считаем, что прошло очень мало времени с того момента, как спутник побывал в точке A). Таким образом,

$$s=\frac{x^2}{2R}.$$

Длина дуги AB равна vt (v — скорость спутника). Но если эта длина мала, то можно считать, что и $x\approx vt$, следовательно,

$$s=\frac{v^2}{R}\cdot\frac{t^2}{2}.$$

С другой стороны, формула пути для равноускоренного движения имеет вид $s=at^2/2$. Сравнивая эти две формулы, видим, что центростремительное ускорение спутника $a_{\text{ц}}=v^2/R$.

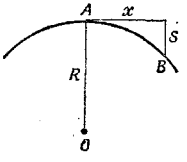
б) Если положить $a=GM/R^2$, то

$$\frac{v^2}{R}=\frac{GM}{R^2}\quad\text{и}\quad v^2=\frac{GM}{R}.$$

Период обращения есть время, за которое тело совершает один оборот, так что $T=2\pi R/v$, или

$$T^2=\frac{4\pi^2R^2}{v^2}=\frac{4\pi^2}{GM}R^3.$$

Найденное выражение для T соответствует третьему закону Кеплера: квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси орбиты (в нашем случае круговой орбиты — ее радиусу) (см. § 2 гл. 7 «Лекций», вып. 1, стр. 123).



7.3. а) Будем считать, что Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R_{\text{Л}}=380\,000$ *км* с периодом $T_{\text{Л}}=27{,}3$ дня, а Земля вращается вокруг Солнца по такой же орбите с параметрами $R_{\text{З}}=149\,500\,000$ *км*; $T_{\text{З}}=365{,}25$ дня.

Воспользуемся формулой для периода обращения спутника, полученной в предыдущей задаче:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Записав периоды обращения Луны и Земли и взяв их отношение, получим

$$\frac{T_Л^2}{T_З^2} = \frac{R_Л^3}{R_З^3} \frac{M_С}{M_З},$$

где $M_С$ и $M_З$ — масса Солнца и Земли соответственно, откуда

$$\frac{M_С}{M_З} = \frac{T_Л^2}{T_З^2} \cdot \frac{R_З^3}{R_Л^3} = 3{,}3 \cdot 10^5.$$

б) Рассмотрев аналогично движение Луны вокруг Земли и спутника Ио вокруг Юпитера, получим

$$\frac{M_Ю}{M_З} = \left(\frac{T_Л}{T_{Ио}}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_{Ио}}{R_Л}\right)^3 = 318,$$

где $M_Ю$ — масса Юпитера, а $T_{Ио}$ и $R_{Ио}$ — период обращения и радиус орбиты спутника Ио.

7.4. Пусть массы M_1 и M_2 вращаются по круговым орбитам с радиусами r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 + r_2 = R$ (R — постоянное расстояние между массами). Вращаясь вокруг неподвижной точки (их общего центра масс), эти тела все время находятся на одной прямой, соединяющей данные массы и проходящей через неподвижную точку вращения. Поэтому периоды обращения обоих тел одинаковы и равны T.

Рассмотрим движение одного тела, например первого. Сила притяжения, действующая на него со стороны второго тела, равна

$$F^{(1)} = \frac{GM_1M_2}{R^2}.$$

Как было показано в задаче 7.2, под действием этой силы тело движется с центростремительным ускорением

$$a_ц^{(1)} = \frac{V_1^2}{r_1}.$$

Учитывая, что период обращения $T = 2\pi r_1/v_1$ и что $F^{(1)} = M_1 a_ц^{(1)}$ (см. § 3 гл. 7 «Лекций», вып. 1), получаем

$$F^{(1)} = M_1 \frac{(2\pi)^2 r_1^2}{T^2 r_1} = G \frac{M_1M_2}{R^2},$$

откуда

$$\frac{(2\pi)^2 r_1}{T^2} = \frac{GM_2}{R^2}.$$

Аналогично можем написать для второго тела:

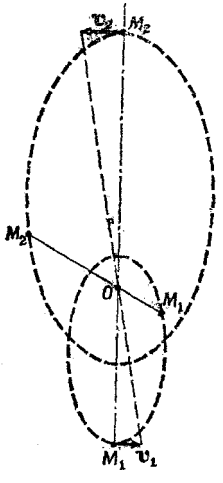
$$\frac{(2\pi)^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{R^2}.$$

Складывая два последних выражения и учитывая, что $r_1 + r_2 = R$, находим

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Полученная формула показывает, что период обращения тел зависит только от расстояния между ними и их суммарной массы (а не массы каждого из тел или же отношения их масс).

Перейдем теперь к случаю эллиптических орбит. Речь идет в сущности о трех эллипсах: по эллипсам движутся оба тела (легкое — по большому, тяжелое — по малому) и, кроме того, относительное движение тел также происходит по эллипсу (см. «Лекции», вып. 1, гл. 7). Все три эллипса подобны друг другу, т. е. обладают одним и тем же эксцентриситетом. Если учесть также, что центр масс системы остается неподвижным (он лежит в общем фокусе орбит обоих тел), а расстояния от центра масс до тел обратно пропорциональны их массам, то мы придем к выводу, что расположение тел и их орбит такое, как на рисунке.



Обозначим через v_1 и v_2 скорости тел M_1 и M_2 в тот момент времени, когда они находятся в апогее. Как видно из рисунка,

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1+c_1}{a_2+c_2}=\frac{a_1(1+e)}{a_2(1+e)}=\frac{a_1}{a_2}$$

(индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к эллипсам, по которым движутся массы M_1 и M_2).

Чтобы получить для эллиптических орбит те же выражения, что и для круговых, вспомним, что эллипс можно представить себе как окружность, видимую под некоторым углом к своей плоскости или (что то же самое) как проекцию окружности на наклонную плоскость. Иначе говоря, эллипс можно получить из окружности, если изменить масштаб вдоль одной из осей координат. Ускорение тела при движении его по окружности было вычислено в «Лекциях» (вып. 1, гл. 7, подпись к рис. 7.4, стр. 127). Чтобы получить ускорение тела (например, M_1) в интересующем нас случае, представим себе, что его орбита получена из круговой увеличением масштаба в «вертикальном направлении» в a_1/b_1 раз. Величина x при этом не изменится, а s увеличится и станет равным $s_1=(a_1/b_1)\,s$.

Подставив в соотношение $x^2=2Rs$ (справедливое для окружности) их значения после увеличения масштаба $x_1=x$, $s_1=(a_1/b_1)\,s$ и $R=b_1$ («горизонтальные» размеры не изменились, поэтому малая полуось эллипса равна радиусу исходной окружности), получим

$$x^2=2\frac{b_1^2}{a_1}s_1.$$

Таким образом, радиус кривизны эллипса в точке пересечения с большой полуосью равен b_1^2/a_1. Считая, что в течение очень малого промежутка времени первое тело движется по круговой орбите этого радиуса, можно написать

$$\frac{v_1^2\,a_1^2}{b_1^2}=\frac{GM_2}{(a+c)^2}=\frac{GM_2}{a^2(1+e)^2}$$

(здесь a и c — параметры орбиты относительного движения тел: $a=a_1+a_2$, $c=c_1+c_2$). Аналогично для второго тела

$$\frac{v_2^2\,a_2^2}{b_2^2}=\frac{GM_1}{a^2(1+e)^2}.$$

Складывая последние два равенства и выражая v_2 через v_1, получаем

$$\frac{v_1^2(1+e)}{a_1^2(1-e)} = \frac{G(M_1+M_2)}{a^3}.$$

Остается лишь выяснить, какое отношение имеет к периоду обращения величина, стоящая в левой части этого равенства. Заметим прежде всего, что площадь, которую за единицу времени «заметает» радиус-вектор тела M_1 (проведенный из точки 0), равна $^1/_2 v_1(a_1+c_1) = {}^1/_2 v_1 a_1(1+e)$. Хотя фактически мы вычислили скорость изменения «заметаемой» площади для того момента, когда тело M_1 находится в апогее, согласно второму закону Кеплера, эта скорость не меняется при движении тела по орбите. Поэтому величина $^1/_2 v_1 a_1(1+e)\,T$ (здесь T — период обращения) равна площади орбиты тела M_1. Площадь эллипса легко вычислить, если сообразить, что при увеличении масштаба по одной из осей площадь фигуры увеличивается во столько же раз, что и масштаб. Поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b_1^2 \cdot \frac{a_1}{b_1} = \pi a_1 b_1 = \pi a_1^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что

$$T = \frac{2\pi a_1}{v_1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad \text{а} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1+M_2)}.$$

7.5. Как было показано в предыдущей задаче, квадрат периода обращения двух тел вокруг их центра масс есть

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1+M_2)}.$$

(Здесь R — большая полуось относительного движения двух звезд.)

Применяя эту формулу к движению двух звезд a и b и к системе Солнце—Земля, пишем

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_a+M_b)} \quad \text{и} \quad T_3^2 = \frac{(2\pi)^2 R_3^3}{G(M_C+M_3)}.$$

(R_3 и T_3 — большая полуось земной орбиты и период обращения Земли.) Беря отношение этих периодов и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$\frac{M_a+M_b}{M_C} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^3\left(\frac{T_3}{T}\right)^2.$$

Но $T_3 = 1$ год; $R_3 = 1\,A.E.$ (по определению астрономи-

ческой единицы длины), так что

$$\frac{M_a+M_b}{M_\odot}=\frac{R^3}{T^2}.$$

7.6. а) Предположим, что плоскость орбиты системы Сириуса перпендикулярна направлению на Землю. В этом случае по рис. 7.7 «Лекций» (вып. 1, стр. 131) можно определить величину большой полуоси орбиты Сириуса B (в угловых единицах). Она оказывается равной примерно 7,30″. Из того же рисунка можно заключить, что период обращения системы около 45 лет.

В предыдущей задаче было показано, что при орбитальном движении различных тел можно установить соотношение

$$\frac{M_a+M_b}{M_\odot}=\left(\frac{R}{R_\oplus}\right)^3\left(\frac{T_\oplus}{T}\right)^2$$

(обозначения те же, что и в задаче 7.5).

Отсюда суммарная масса двойной звезды Сириуса равна

$$M_a+M_b=\left(\frac{R}{R_\oplus}\right)^3\left(\frac{T_\oplus}{T}\right)^2 M_\odot\approx 3{,}7M_\odot.$$

б) Это значение массы есть ее нижний предел, так как если плоскость орбиты не перпендикулярна направлению на Землю, то ее большая полуось в действительности больше ее видимого с Земли размера. Масса двойной звезды пропорциональна кубу большой полуоси, так что минимальной величине полуоси соответствует минимальное же значение массы.

7.7. Орбитальная скорость планеты такова, что за равные промежутки времени τ ее радиус-вектор «заметает» равные площади (второй закон Кеплера). Рассмотрим движение Земли вблизи перигея и апогея за такие малые интервалы времени Δt, чтобы ее траекторию можно было считать прямолинейной. Тогда «заметаемые» площади есть треугольники с основаниями $v_{\text{мин}}\Delta t$ и $v_{\text{макс}}\Delta t$ и высотами r_a и r_p соответственно, так что

$$\frac{v_{\text{мин}}\Delta t r_a}{2}=\frac{v_{\text{макс}}\Delta t r_p}{2}.$$

Отсюда

$$\gamma=\frac{v_{\text{макс}}}{v_{\text{мин}}}=\frac{r_a}{r_p}.$$

Но для эллипса $r_a=a(1+e)$, а $r_p=a(1-e)$; следовательно, $\gamma=(1+e)/(1-e)\approx 1+2e$ (поскольку $e\ll 1$). Это дает $\gamma\approx 1{,}0334$.

7.8. а) По данным о появлении кометы находим ее период T обращения вокруг Солнца. Он равен $T=76$ лет. Пользуясь третьим законом Кеплера, найдем большую полуось a орбиты кометы

$$\left(\frac{a}{a_З}\right)^3\left(\frac{T_З}{T}\right)^2=1,$$

где $a_З$ и $T_З$ — большая полуось орбиты и период обращения Земли.

Если измерять a в $A.E.$, а T в годах, то

$$a=T^{2/3}\approx 18 A.E.$$

Для расстояний в апогее и перигее имеем

$$r_a=a+c \text{ и } r_p=a-c,$$

что дает

$$r_a=2a-r_p=35{,}4 A.E.$$

б) В предыдущей задаче было показано, что отношение максимальной и минимальной скоростей γ равно отношению расстояний в апогее и перигее. Итак,

$$\gamma=\frac{r_a}{r_p}=59.$$

7.9. В задаче **7.4** было показано, что период обращения двух тел вокруг их общего центра масс равен

$$T^2=\frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1+M_2)},$$

где R — расстояние между телами; M_1 и M_2 — их массы, а G — постоянная в законе тяготения.

Применив эту формулу к системе Земля — Луна, найдем массу Луны:

$$M_Л=\frac{(2\pi)^2 R^3}{GT_Л^2}-M_З$$

($T_Л$ — период обращения Луны вокруг Земли, $M_З$ — масса Земли, $M_Л$ — масса Луны, $R_Л$ — расстояние от Земли до Луны).

Достижения современной ракетной техники дают нам еще один способ определения массы Луны. Запустив искусственный спутник Луны и определив его период обращения T и большую полуось его орбиты R, записываем (см. задачу **7.2**)

$$T^2=\frac{(2\pi)^2 R^3}{GM_Л}, \text{ т. е. } M_Л=\frac{(2\pi)^2 R^3}{GT^2}$$

(мы пренебрегли массой искусственного спутника по сравнению с массой Луны).

Или, чтобы исключить G (см. задачу **7.3**):

$$\frac{T^2}{T_Л^2}=\frac{R^3}{R_Л^3}\cdot\frac{M_З}{M_Л},\quad\text{откуда}\quad M_Л=\frac{R^3}{R_Л^3}\cdot\frac{T_Л^2}{T^2}\cdot M_З.$$

7.10. Тело массы m, находящееся на поверхности Земли, притягивается к ней с силой

$$F=G\frac{mM_З}{R_З^2}.$$

Но $F=mg_З$, где $g_З$ — ускорение силы тяжести на Земле. Приравнивая эти два выражения, получаем

$$mg_З=G\frac{mM_З}{R_З^2}\quad\text{и}\quad g_З=G\frac{M_З}{R_З^2}.$$

Аналогично,

$$g_Л=\frac{GM_Л}{R_Л^2}$$

($M_Л$, $g_Л$, $R_Л$ — масса, радиус и ускорение силы тяжести Луны). Сравнивая $g_Л$ и $g_З$, находим

$$g_Л=\frac{M_Л}{M_З}\left(\frac{R_З}{R_Л}\right)^2 g_З\approx 1{,}67\ м/сек^2.$$

7.11. Пусть лаборатория, где производится эксперимент, расположена в точке C Земли. На тела, находящиеся в лаборатории, действуют силы притяжения Земли и Луны, причем эти силы вычитаются, если Луна находится в точке A, или складываются, если Луна находится в точке B. Ускорение свободного падения для этих двух случаев равно

$$g_1=\frac{GM_З}{R_З^2}-\frac{GM_Л}{(R-R_З)^2},\qquad g_2=\frac{GM_З}{R_З^2}+\frac{GM_Л}{(R_З+R)^2}.$$

где R — расстояние от центра Земли до Луны.

Очевидно, что g_1 и g_2 — минимальное и максимальное значения, которые ускорение g принимает в течение суток.

Таким образом, самое большое изменение ускорения свободного падения тел за счет суточного вращения Земли равно

$$\Delta g=g_2-g_1=\frac{GM_Л}{(R+R_З)^2}+\frac{GM_Л}{(R-R_З)^2}\approx\frac{2GM_Л}{R^2}$$

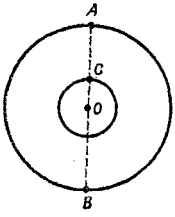
(мы учли, что $R_З\ll R$).

Среднее ускорение силы тяжести равно $GM_З/R_З^2$.

Таким образом,

$$\frac{\Delta g}{g}=2\frac{M_Л}{M_З}\left(\frac{R_З}{R}\right)^2\approx 10^{-5}.$$

Следовательно, величину g нужно измерять с точностью не меньшей, чем до пятого знака, чтобы уловить ее изменение вследствие суточного вращения Земли.



К главе 8. ***Движение***

8.1. Известно [формула (8.9) «Лекций», вып. 1, стр. 153], что ускорение есть производная скорости по времени: $a=dv/dt$. Стало быть, нужно подобрать такую функцию $v_x(t)$, чтобы ее производная была постоянной и равной a. Легко убедиться в том, что $v_x(t)=at+c$, где c — некоторая постоянная величина (ее производная равна нулю!). Физический смысл постоянной c легко выяснить, если положить $t=0$ в формуле для $v_x(t)$. Тогда $c=v_x(0)=v_{x_0}$.

Вспомним теперь, что $v=dx/dt$ и подберем $x(t)$ так, чтобы получилась нужная производная.

Очевидно, $x(t)=at^2/2+v_{x_0}t+d$. Снова, полагая $t=0$, убеждаемся, что здесь $d=x(0)=x_0$.

8.2. Из полученного в предыдущей задаче выражения для скорости находим $t=(v_x-v_{x_0})/a$. Подставляя это выражение в формулу для x, получаем

$$v_x^2=v_{x_0}^2+2a(x-x_0).$$

8.3. Для движений вдоль осей x, y, z можно непосредственно написать

$$v_x=v_{x_0}+a_xt,\qquad x=x_0+v_{x_0}t+\frac{1}{2}a_xt^2,$$

$$v_y=v_{y_0}+a_yt,\qquad y=y_0+v_{y_0}t+\frac{1}{2}a_yt^2,$$

$$v_z=v_{z_0}+a_zt,\qquad z=z_0+v_{z_0}t+\frac{1}{2}a_zt^2.$$

Последнее выражение задачи 8.2 можно записать как

$$v_x^2=v_{x_0}^2+2a_x(x-x_0).$$

Обобщая его на случай движения вдоль осей y и z, имеем

$$v_y^2 = v_{y_0}^2 + 2a_y (y - y_0),$$
$$v_z^2 = v_{z_0}^2 + 2a_z (z - z_0).$$

Складывая три последних равенства и учитывая формулу (8.16) «Лекций» (вып. 1, стр. 155), получаем

$$v^2 = v_0^2 + 2 [a_x (x - x_0) + a_y (y - y_0) + a_z (z - z_0)].$$

8.4. Обозначим расстояние, которое пролетит снаряд по горизонтали, через S, а максимальную высоту его полета — через H. В начальный момент времени ($t = 0$), $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а $v_{x_0} = v \cos \theta$, $v_{y_0} = v \sin \theta$ (см. § 5 гл. 8 «Лекций», вып. 1, стр. 152). Используя результаты задачи 8.3, находим

$$x = v_{x_0} t,$$
$$y = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

(здесь учтено, что $a_y = -g$).

Очевидно, расстоянию S по оси x соответствует $y = 0$; отсюда можно найти момент падения снаряда на землю:

$$v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

так что

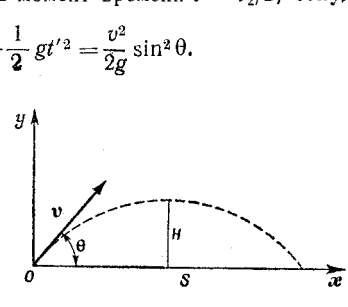
$$t_1 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{2 v_{y_0}}{g}.$$

Решению $t_1 = 0$ соответствует просто начальное положение $x = 0$, $y = 0$. Значит,

$$S = v_{x_0} t_2 = v \cos \theta \frac{2v \sin \theta}{g} = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Из соображений симметрии понятно, что максимальная высота достигается снарядом в момент времени $t' = t_2/2$, откуда

$$H = v_{x_0} t' - \frac{1}{2} g t'^2 = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta.$$



8.5. В предыдущей задаче было показано, что дальность горизонтального полета снаряда определяется формулой

$$S = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta.$$

Максимальной дальности полета соответствует такой угол вылета θ, что $\sin 2\theta = 1$. Отсюда $\theta = \pi/4$.

8.6. Запишем выражение для пройденного пути при ускоренном движении автомобиля: $s(t) = v_0 t + {}^1/_2 a t^2$, где v_0 — скорость автомобиля в начале ускоренного движения, a — его ускорение.

Учитывая, что в момент времени $t_1 = 16$ *сек* путь $s_1 = 0{,}1$ мили, а при $t_2 = 16 + 8 = 24$ *сек* $s_2 = 0{,}2$ мили, записываем два уравнения для a и v_0:

$$0{,}1 = v_0 16 + \frac{1}{2} a 16^2,$$

$$0{,}2 = v_0 24 + \frac{1}{2} a 24^2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a = \frac{0{,}1}{320} \text{ мили/сек}^2 = 0{,}5 \text{ м/сек}^2,$$

$$v_0 = \frac{0{,}3}{80} \text{ мили/сек} = 21{,}6 \text{ км/час}.$$

Используя эти значения a и v_0, находим скорость автомобиля в момент времени t_2:

$$v_{t_2} = v_0 + a t_2 = 64{,}8 \text{ км/час}.$$

8.7. а) В промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 50$ *сек*, т. е. во время работы двигателя, ракета двигалась с ускорением $2g$. Значит, в этом интервале времени скорость ракеты определяется формулой

$$v = 2gt.$$

Графиком этой зависимости является прямая (отрезок OA). С момента времени $t = 50$ *сек* и дальше до падения на Землю ракета движется с ускорением $-g$, так что

$$v = 100g - g(t - 50).$$

График этой функции тоже прямая (справа от точки A).

б) Так как вертикальная скорость обращается в нуль в наивысшей точке траектории, моменту времени t_B соответствует максимальная высота полета ракеты. Таким образом,

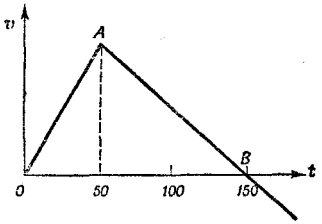
$$H_{\text{макс}} = \frac{1}{2} 2gt_1^2 + 100g(t_B - 50) - \frac{g}{2}(t_B - 50)^2 = 75\,500 \text{ м}.$$

в) С высоты $H_{\text{макс}}$ (с момента времени t_B) ракета свободно падает вниз. Землю она достигает через t' *сек*, причем

$$t' = \sqrt{\frac{2H_{\text{макс}}}{g}} = 122{,}5 \text{ сек}.$$

Полное время движения ракеты

$$T = t_B + t' = 272{,}5 \text{ сек}.$$



8.8. Обозначим ускорение тележки с ракетным двигателем через a_1, а с авиационным — через a_2. Пусть $2S$ — проходимый тележками путь. Тележка с ракетным двигателем первую половину пути проходит за время t_1, определяемое из уравнения

$$S = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad \text{т. е.} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a_1}}.$$

Вторую половину пути она проходит за время t_2,

$$S = v_0 t_2,$$

где v_0 — скорость тележки в конце первой половины пути, т. е. $v_0 = a_1 t_1$, откуда

$$S = a_1 t_1 t_2 \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{S}{a_1 t_1} = \sqrt{\frac{S}{2a_1}}.$$

Тележка с реактивным двигателем проходит все расстояние за время t, такое, что

$$2S = \frac{1}{2} a_2 t^2, \quad \text{т. е.} \quad t = \sqrt{\frac{4S}{2a_2}}.$$

По условию задачи $t = t_1 + t_2$, так что

$$\sqrt{2\frac{S}{a_1}} + \sqrt{\frac{S}{2a_1}} = \sqrt{\frac{4S}{a_2}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8}.$$

8.9. Угол, под которым должна быть выпущена мина, чтобы пройти возле края обрыва, определим по формуле (см. задачу **8.4.**)

$$\sin 2\alpha = \frac{Sg}{v_0^2}.$$

Зная, что $S = 8100$ *м*, $v_0 = 300$ *м/сек*, получаем $\sin 2\alpha = 0{,}882$ и $\alpha_1 = 31°$, $\alpha_2 = 59°$.

Очевидно, чем больше будет угол, под которым выпущена мина, тем ближе она упадет к основанию обрыва, поэтому в нашем случае следует выбрать бо́льший из углов, т. е. α_2.

Рассмотрим теперь движение мины за краем обрыва. Скорость мины вблизи края обрыва направлена под углом $\alpha = 59°$ к горизонту. Следовательно, до падения на землю мина пролетит по горизонтали расстояние $S_{\text{мин}} = v_0 t \cos\alpha$ (t — время движения за краем обрыва). Вычислим t. Так как вертикально вниз мина движется с начальной скоростью $v_0 \sin\alpha$ и ускорением g, то $h = v_0 t \sin\alpha + gt^2/2$ (h — высота обрыва). Подставляя вместо h, v_0 и α их численные значения, находим $t = 0{,}408$ *сек*, $S_{\text{мин}} \approx 63$ *м*.

8.10. а) Известно, что $\theta = S/R$. По определению $\sin\theta = AC/R$, а $\cos\theta = OC/R$. При малых углах θ дугу AB можно заменить перпендикуляром AC, а OC — радиусом R. В этом случае $\sin\theta \approx S/R = \theta$ и $\cos\theta \approx R/R = 1$.

б) Вычисление производных $\sin x$ и $\cos x$ ясно из приведенных ниже формул:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x$$

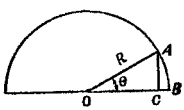
и

$$\frac{d\cos x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos\Delta x - \sin x \sin\Delta x - \cos x}{\Delta x} = -\sin x.$$

Здесь использован тот факт, что

$$\sin\Delta x \approx \Delta x, \text{ а } \cos\Delta x \approx 1.$$



8.11. а) Пусть тело в момент времени t окажется в точке $M(x, y)$ окружности. Обозначим через φ угол между радиусом этой точки и положительным направлением оси x. Как видно из рисунка, координаты этой точки:

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Производную $d\varphi/dt$ (скорость изменения угла со временем) назовем угловой скоростью ω.

Таким образом, $v = \omega R$, или $\omega = v/R$. Поскольку v не зависит от времени, то и ω не зависит от времени, так что $\varphi = \omega t$. Вообще говоря, следовало бы написать $\varphi = \omega t + c$, но по условию задачи $\varphi = 0$ при $t = 0$, так что $c = 0$. Следовательно, $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$,

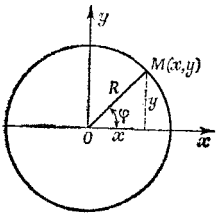
$$v_x = -R\omega\sin\omega t, \quad v_y = R\omega\cos\omega t$$

и

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2\sin\omega t.$$

б) Сравнивая выражения для x и $a_x = \ddot{x}$ и y и $a_y = \ddot{y}$, убеждаемся, что

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$



8.12. Координату x камешка удобно представить в виде суммы $x = x' + x''$, где x' — координата относительно оси колеса, а x'' — координата оси колеса (см. рисунок). Выражение для

x' и y' получены в предыдущей задаче (мы должны лишь заменить в соответствующих формулах ωt на $-\omega t$, так как, когда колесо катится в положительном направлении оси x, оно вращается по часовой стрелке, а в предыдущей задаче рассмотрено вращение против часовой стрелки). Итак,

$$x' = R\cos\frac{v}{R}t,$$

$$y' = -R\sin\frac{v}{R}t.$$

С другой стороны, $x'' = vt$, так что

$$x = vt + R\cos\frac{v}{R}t,$$

$$y = -R\sin\frac{v}{R}t.$$

Если исключить из этих соотношений время, то мы получим зависимость $y(x)$, которая графически изображается кривой, называемой циклоидой (см. рисунок). Дифференцируя полученные выше выражения для x и y по времени, получаем

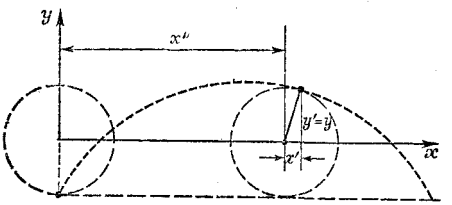
$$v_x = v - v\sin\frac{v}{R}t,$$

$$v_y = -v\cos\frac{v}{R}t$$

и

$$a_x = -\frac{v^2}{R}\cos\frac{v}{R}t,$$

$$a_y = \frac{v^2}{R}\sin\frac{v}{R}t.$$



К главе 9. *Динамические законы Ньютона*

9.1. Поскольку сила перпендикулярна скорости, то она не может изменить модуль скорости, а может лишь изменить ее направление. Так как модуль скорости постоянен, то постоянна и сама сила ($F = \beta v$). Эта сила вызывает ускорение (в на-

правлении, перпендикулярном к v), величина которого определяется из соотношения $ma=\beta v$, т. е. $a=\beta v/m$.

В § 4 гл. 7 «Лекций» (вып. 1) рассматривалось такого рода движение с постоянной по величине скоростью и постоянным ускорением, перпендикулярным скорости. Было показано (см. задачу **7.2**), что это есть движение по окружности с радиусом $R=v^2/a=mv/\beta$.

9.2. При вычислении радиусов кривизны воспользуемся формулой для ускорения, перпендикулярного скорости

$$a_\perp=\frac{v^2}{R}.$$

Далее,

$$a_\perp=\sqrt{a^2-\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, в дополнение к величинам, приведенным в табл. 9.2 «Лекций» (вып. 1, стр. 170), следует вычислить также величины dv/dt и v^2. Проведя вычисления, находим для радиуса кривизны орбиты:

$$R=0{,}664 \quad \text{при} \quad t=0,$$
$$R=0{,}650 \quad \text{при} \quad t=0{,}82,$$
$$R=0{,}665 \quad \text{при} \quad t=2{,}086.$$

9.3. а) Мяч влетел в окно горизонтально; это означает, что окно находилось в наивысшей точке траектории мяча. Максимальная же высота подъема определяется по формуле (см. задачу **8.4**)

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha,$$

откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{2gH}{\sin^2\alpha}}=14{,}5 \text{ м/сек}.$$

б) В наивысшей точке скорость горизонтальна, а ускорение равно $-g$ (ускорение свободного падения), вертикально и, таким образом, перпендикулярно скорости. Поэтому

$$g=\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$R=\frac{v^2}{g}=2{,}46 \text{ м}.$$

Определим теперь радиус кривизны в произвольный момент времени t.

Обозначив через $a_\perp$ и $a_\parallel$ компоненты ускорения — перпендикулярную и параллельную скорости, запишем

$$a_\perp^2 = \sqrt{g^2 - a_\parallel^2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + mgh\right) = 0,$$

т. е.

$$v\frac{dv}{dt} = -g\frac{dh}{dt} = -gv_y.$$

Вспоминая, что $a_\parallel = dv/dt$, находим

$$a_\parallel = -\frac{gv_y}{v}$$

и

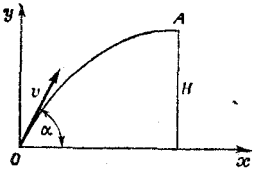
$$a_\perp = \frac{gv_x}{v},$$

так как $a_\perp = \frac{v^2}{R}$,

$$R = \frac{v^2}{a_\perp} = \frac{v^3}{gv_x}.$$

Далее, $v_x = v_0\cos\alpha$, $v_y = v_0\sin\alpha - gt$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, поэтому в произвольный момент времени

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0\sin\alpha t)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha}$$



9.4. Все величины в системе M′K′S′A′ будем обозначать буквой со штрихом. Без штриха будем обозначать те же величины в системе MKSA. Очевидно,

$$v' = \frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau}\frac{dl}{dt} = \frac{\lambda}{\tau}v,$$

$$a' = \frac{d^2l'}{dt^2} = \frac{d}{dt'}\frac{dl'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau^2}\frac{d^2l}{dt^2} = \frac{\lambda}{\tau^2}a,$$

$$E' = \frac{m'v'^2}{2} = \frac{\mu m\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 v^2}{2} = \mu\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 E,$$

$$F' = m'a' = \mu m\,\frac{\lambda}{\tau^2}\,a = \frac{\mu\lambda}{\tau^2}\,am = \frac{\mu\lambda}{\tau^2}\,F,$$

($l' = \lambda l$, $m' = \mu m$ и $t' = \tau t$).

9.5. В системе единиц M'K'S'A' сила тяготения запишется в виде

$$F' = G'\frac{M_1' M_2'}{R'^2},$$

где G — гравитационная постоянная. Значит,

$$G' = \frac{F'R'^2}{M_1' M_2'} = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}\,\frac{FR}{M_1 M_2} = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}\,G.$$

(При получении этой формулы был использован результат предыдущей задачи: $F' = (\mu\lambda/\tau^2)\,F$.)

9.6. Заметим прежде всего, что величина $GM_\odot$ в штрихованной системе единиц и в системе MKS связаны между собой соотношением

$$G'M_\odot' = \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}\,G\mu M_\odot = \frac{\lambda^3}{\tau^2}\,GM_\odot.$$

В системе MKS $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ *ньютон*$\cdot$*м*^{2}/*кг*^{2}, $M_\odot \approx 2\cdot 10^{30}$ *кг*, поэтому $GM_\odot = 13{,}34\cdot 10^{19}$ *м*^{3}/*сек*^{2}. Вычислим λ и τ.

За единицу длины в рассматриваемой системе единиц берется длина большой полуоси орбиты Земли, т. е. расстояние в $14{,}9\cdot 10^{10}$ *м*. Поэтому длина l' в *А.Е.* через длину l выражается так:

$$l' = \frac{l}{14{,}9\cdot 10^{10}}\ (\text{т. е. } \lambda^{-1} = 14{,}9\cdot 10^{10}).$$

Аналогично, $\tau^{-1} = 3{,}15\cdot 10^7$ (число секунд в году). Таким образом,

$$G'M_\odot' = 3\cdot 10^{-19} GM_\odot \approx 40\ (A.\ E.)^3/\text{лет}^2.$$

Величину $G'M_\odot'$ можно легко вычислить и другим способом, если вспомнить выражение для периода обращения планеты, полученное нами в задаче **7.4**:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Применяя эту формулу для системы Солнце—Земля и пренебрегая массой Земли по сравнению с массой Солнца, получаем

$$GM_\odot = \frac{(2\pi)^2 R^3}{T^2}.$$

Но $R=1$ *А.Е.*, а $T=1$ год, так что $G'M'_{\odot}=(2\pi)^2\approx 40$.

9.7. В модели Солнечной системы все расстояния измеряются числами, в k раз меньшими, чем в «натуральной» системе. Представим себе, что это изменение чисел произошло не вследствие реального уменьшения размеров системы, а в результате перехода к новой системе единиц, такой, что $l'=kl$. Но тогда и все единицы, размерность которых включает длину, так же претерпят определенные изменения. В частности, плотность $\rho=m/l^3$ станет равной

$$\rho'=\frac{m'}{l'^3}=\frac{m'}{k^3l^3}.$$

По условию задачи $\rho'=\rho$. Это значит, что нужно взять новую единицу измерения не только для длины, но и для массы тела, причем, очевидно, $m'=k^3m$.

Как было показано в задаче **7.4**, период обращения T планеты вокруг Солнца выражается через суммарную массу M Солнца и планеты и большую полуось орбиты R, так что

$$T^2=\frac{(2\pi)^2R^3}{GM}.$$

В новой системе единиц

$$T'^2=\frac{(2\pi)^2R'^3}{G'M'}=\frac{(2\pi)^2R^3}{GM}.$$

Здесь мы использовали доказанное в предыдущей задаче соотношение

$$G'M'=\frac{k^3}{\tau^2}GM.$$

(Роль λ задачи **9.6** у нас играет k, а $\tau=1$.) Таким образом, мы убеждаемся, что периоды обращения «планет» в изготовленной модели будут такими же, как и в реальной Солнечной системе.

9.8. Изменение потенциальной энергии при движении грузов равно изменению потенциальной энергии маленького разновеска (насколько одна масса M опустится, настолько другая поднимется), т. е. $\Delta u=mgh$. Если тела в начальный момент покоились, то это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии всей системы в тот момент, когда подхватывается разновесок:

$$mgh=\frac{M}{2}v^2+\frac{M}{2}v^2+\frac{m}{2}v^2,$$

откуда

$$g=\frac{2M+m}{2mh}v^2.$$

9.9. Нагрузка N на подвес, а следовательно, и на мачту и гондолу при таком способе перевозки марсиан определяется равенством

$$N = T_1 + T$$

(T — натяжение нити, T_1 — нагрузка на ось неподвижного блока); T_1 равна сумме натяжений нити с одной и другой стороны неподвижного блока, т. е. $T_1 = 2T$, так что $N = 3T$.

Запишем уравнения движения обоих марсиан:

$$\frac{P}{g} a_2 = P - 2T,$$

$$\frac{F}{g} a_1 = F - T$$

(здесь g — ускорение марсианской силы тяжести). Так как веревка нерастяжима, то a_1 и a_2 связаны между собой. Очевидно, что при смещении оси подвижного блока вниз на x_2 груз F поднимется на расстояние $2x_2$, т. е. $2x_2 = -x_1$ (грузы смещаются в противоположные стороны). Дважды дифференцируя по времени это соотношение, называемое уравнением связи, получаем

$$2a_2 = -a_1.$$

Требуется решить уравнения движения совместно с полученным уравнением для ускорений.

После простых подстановок имеем

$$-\frac{P}{2g} a_1 = P - 2\left(F - \frac{F}{g} a_1\right) = P - 2F + \frac{2F}{g} a_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{2F - P}{2F + \frac{P}{2}} g = \frac{4F - 2P}{4F + P} g.$$

Таким образом,

$$T = F - F\frac{4F - 2P}{4F + P} = \frac{3FP}{4F + P},$$

а нагрузка на гондолу

$$N = \frac{9FP}{4F + P}.$$

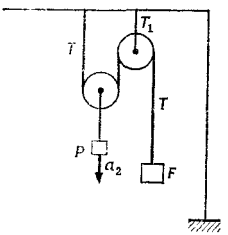
В нашем случае $P = 90$ *кГ* и $F = 60$ *кГ*, поэтому для N получаем 147 *кГ*.

Выигрыш в нагрузке на гондолу равен

$$\Delta N = (F + P) - N = 3 \text{ кГ}.$$

Гондольер Джузеппе мог бы получить значительно больший выигрыш в нагрузке, если бы поменял влюбленных

местами. Нетрудно подсчитать, что в этом случае $N = 116\ кГ$, а $\Delta N = 34\ кГ$, т. е. выигрыш в нагрузке увеличился бы примерно в 11 раз. Правда, в этом случае Паоло будет двигаться вниз с ускорением, в 3 раза превышающим то, с каким двигалась Франческа при первом способе перевозки, так что Джузеппе придется значительно увеличить скорость гондолы.



9.10. Вес гири A на Луне меньше 1 $кГ$, поэтому камень B на блоке перетянет гирю. Запишем уравнения движения:

$$m_B a = m_B g_Л - T,$$

$$m_A a = -m_A g_Л + T$$

($g_Л$ — ускорение силы лунного тяготения, T — натяжение нити), откуда

$$(m_B + m_A)\, a = (m_B - m_A)\, g_Л.$$

Кроме того, известно, что камень B растягивает пружину на Луне так же, как гиря A растягивает ее на Земле. Это означает, что $m_A g = m_B g_Л$, т. е. $g_Л = (m_A/m_B)\, g$ (g — ускорение силы тяжести на Земле).

Подставляя это значение $g_Л$ в выражение для a, после несложных преобразований получаем квадратное уравнение для m_B:

$$a m_B^2 - m_A (g - a)\, m_B + m_A^2 g = 0.$$

Отсюда находим

$$m_B = 5{,}75\ кг.$$

(Второе решение квадратного уравнения $m_B = 1{,}34\ кг$ отбрасываем, так как известно, что $g/g_Л \approx 6$, поэтому должно быть и $m_B/m_A \approx 6$.)

9.11. а) Чтобы найти ускорение лифта, запишем уравнение движения системы как целого

$$(M_1 + M_2)\, a = F - (M_1 + M_2)\, g,$$

откуда

$$a=\frac{F-(M_1+M_2)\,g}{M_1+M_2}=\frac{F}{M_1+M_2}-g.$$

б) На груз M_1 действуют две силы: натяжение нити и сила веса, причем $M_1a=T-M_1g$ (масса M_1 движется вверх с тем же ускорением a, что и лифт), т. е.

$$T=M_1(a+g)=M_1\frac{F}{M_1+M_2}.$$

в) После обрыва нити на массу M_1 действует только сила тяжести, так что она движется вниз с ускорением g. Ускорение же лифта по-прежнему направлено вверх; величину его найдем из нового уравнения движения

$$M_2a=F-M_2g,$$

т. е.

$$a_2=\frac{F-M_2g}{M_2}=\frac{F}{M_2}-g.$$

г) Таким образом, мы убедились, что тело M_1 движется вниз с ускорением g, а лифт поднимается вверх с ускорением a_2. Значит, относительно лифта оно движется по направлению к полу с ускорением

$$a_1=g+a_2=\frac{F}{M_2}.$$

Путь S тело пройдет за время t, так что $S=\frac{1}{2}a_1t^2$, откуда

$$t=\sqrt{\frac{2S}{a_1}}=\sqrt{\frac{2SM_2}{F}}.$$

9.12. Обозначим массу маляра через M_1, а массу кресла через M_2. Запишем уравнения движения маляра и кресла:

$$M_1a=T-M_1g+P,$$
$$M_2a=T-M_2g-P,$$

где P — сила давления маляра на кресло.

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, находим

$$a=\frac{2P-(M_1-M_2)\,g}{M_1-M_2}=\frac{1}{3}\,g.$$

Складывая затем уравнения движения, находим

$$2T=(M_1+M_2)(a+g)=\frac{4}{3}(M_1+M_2)\,g=112\ \kappa\Gamma.$$

Это и есть полная нагрузка на блок:

$$N=2T=112\ \kappa\Gamma.$$

9.13. Если груз M_2 не опускается и не поднимается, то это означает, что его вес (M_2g) равен натяжению нити. Найдем ускорение M_1:

$$M_1a=T=M_2g, \quad \text{т. е.} \quad a=\frac{M_2}{M_1}g.$$

Определим теперь силу F. Так как M, M_1 и M_2 движутся как одно целое, то

$$F=(M+M_1+M_2)\,a=(M+M_1+M_2)\,\frac{M_2}{M_1}\,g.$$

9.14. Массы M и m движутся вправо как единое целое, поэтому $(M+m)\,a=2T$, где a—ускорение горизонтального движения, а T—натяжение нити. Грузик m движется вертикально вниз с ускорением a_1, уравнение его движения имеет вид $ma_1=mg-T$.

Из рисунка, приведенного в условии задачи (стр. 29), видно, что при смещении рамы вправо на расстояние x грузик m опустится вниз на расстояние $y=2x$, что дает $a_1=2a$.

Таким образом,

$$(M+m)\,a_1=4T \quad \text{и} \quad ma_1=mg-T.$$

Из этих двух уравнений находим

$$a_1=\frac{4m}{M+5m}\,g.$$

В начальный момент времени грузик m_1 покоился, поэтому время t, за которое он пройдет по вертикали расстояние d, можно найти из уравнения

$$d=\frac{1}{2}\,a_1t^2,$$

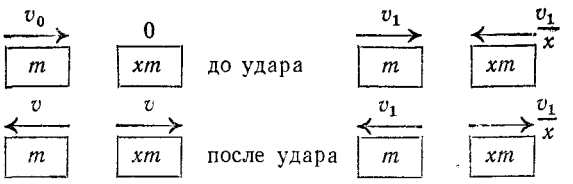
т. е.

$$t=\sqrt{\frac{2d}{a_1}}=\sqrt{\frac{M+5m}{2m}\cdot\frac{d}{g}}\approx 1\ \textit{сек}.$$

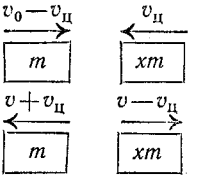
К главе 10. ***Закон сохранения импульса***

10.1. Пусть масса движущегося тела m, его скорость до соударения v_0, а масса покоящегося тела xm (т. е. искомое отношение масс тел обозначено через x).

Рассмотрим сначала процесс столкновения двух тел не в неподвижной относительно Земли системе координат (будем называть ее лабораторной, или л-системой), а в системе центра масс (системе ц.м.):



В этой системе сумма импульсов тел равна нулю (т. е. в момент столкновения массы m и xm можно рассматривать как одно покоящееся тело). Отсюда сразу вытекает, что скорости тел m и xm обратно пропорциональны массам. Так как процесс абсолютно упругий, величины скоростей до и после удара одинаковы. Система ц.м. движется относительно Земли (т. е. относительно л-системы) с некоторой скоростью $v_ц$. Процесс столкновения в л-системе изображен на схеме слева. Столкновение в системе ц.м. можно наблюдать, если, скажем, сесть в машину, движущуюся вправо со скоростью $v_ц$. При этом вид из машины будет такой



Сравнивая эту картину с тем, что было сказано о столкновении в системе ц.м. ранее, получаем

$$v_1 = v_0 - v_ц,$$

$$v_ц = \frac{v_1}{x},$$

$$v_1 = v + v_ц$$

и

$$\frac{v_1}{x} = v - v_ц.$$

Вычитая из третьего уравнения четвертое и деля получившееся выражение на второе уравнение, находим

$$\frac{v_1 - v_1/x}{v_1/x} = 2,$$

откуда $x = 3$.

10.2. Рассмотрим сначала случай, когда скорости сталкивающихся тел одинаковы и равны v. После столкновения тела разлетаются с меньшими скоростями $(v - \Delta v)$. Согласно

условию,

$$\frac{(m/2)\,v^2-(m/2)\,(v-\Delta v)^2}{(m/2)\,v^2}=f,$$

или

$$\frac{v^2-(v-\Delta v)^2}{v^2}=f,$$

откуда

$$v-\Delta v=v\sqrt{1-f}\approx v\left(1-\frac{f}{2}\right),$$

т. е.

$$\Delta v=\frac{vf}{2}.$$

Обратимся теперь к случаю, когда одно из тел покоится, а другое движется со скоростью v. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $v/2$ в том же направлении, что и налетающее тело. Тем самым мы свели задачу к предыдущей, с той лишь разницей, что скорости сталкивающихся тел теперь уже не v, а $v/2$. Соответственно

$$\Delta v=\frac{vf}{4},$$

т. е. после столкновения тела разлетаются со скоростями

$$\frac{v}{2}-\frac{vf}{4}.$$

Переходя в неподвижную систему координат, убеждаемся, что ранее неподвижное тело движется со скоростью

$$v-\frac{vf}{4}\approx v,$$

а налетевшее — с малой скоростью $vf/4$ в том же направлении, что и до соударения.

10.3. Двигаясь по орбите, спутник в единицу времени сталкивается с молекулами воздуха, занимающими объем vS (v — скорость спутника, S — площадь его поперечного сечения). Масса этого объема воздуха $m_1=\rho Sv$, где ρ — плотность воздуха.

Изменение количества движения спутника за этот же промежуток времени $\Delta p=m\,(v-v')$ равно, очевидно, изменению количества движения массы m_1 воздуха, т. е.

$$\Delta p=m_1v=\rho Sv^2.$$

(До столкновения средняя скорость молекулы воздуха относительно Земли равна нулю, после столкновения — скорости спутника v.)

Но изменение количества движения тела в единицу времени есть просто сила, действующая на тело. Таким образом, тормозящая сила $F_{\text{торм}} = \rho S v^2$, т. е. пропорциональна квадрату скорости спутника. Найдем ее величину.

Для стационарной орбиты

$$\frac{mv^2}{R+h} = \frac{GmM}{(R+h)^2},$$

откуда

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

(M и R — масса и радиус Земли, G — постоянная тяготения).

Если тело находится на поверхности Земли, то, очевидно,

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \text{ и } GM = gR^2.$$

Подставляя это значение GM в выражение для скорости спутника, получаем

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h} \approx gR\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

[Здесь мы воспользовались приближенной формулой: $1/(1+x) \approx 1-x$ при $x \ll 1$.] Таким образом,

$$F_{\text{торм}} = \rho S g R\left(1 - \frac{h}{R}\right) \approx 0{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ ньютон}$$

($\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ кг/м^3, $S = 0{,}5$ м^2, $g = 9{,}8$ м/сек^2, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, $h = 0{,}2 \cdot 10^6$ м).

Как видно из формулы, связывающей высоту и скорость спутника, скорость спутника по мере уменьшения его высоты увеличивается. Может показаться странным, что действие силы торможения приводит к увеличению скорости. Однако дело состоит в том, что при наличии торможения скорость спутника уже не перпендикулярна к направлению силы тяжести, т. е. появляется составляющая силы тяжести, изменяющая величину скорости спутника. Ускоряющее действие этой составляющей превосходит тормозящее действие силы торможения.

10.4. а) Можно считать, что в самом начале движения масса ракеты остается все время постоянной и равной M_0, т. е. можно пренебречь массой истекающих газов по сравнению с начальной массой ракеты. Кроме того, можно считать скорость газов относительно Земли постоянной и равной v_0, так как скорость ракеты очень мала. Если вначале ракета покоилась, то количество движения ра-

кеты вместе с топливом равно нулю. За время t из ракеты выбрасывается $r_0 t$ *кг* газа со скоростью v_0, сама ракета начинает двигаться со скоростью v в противоположном направлении. Из закона сохранения количества движения $v_0 r_0 t = M_0 v$, или $v = (v_0 r_0 / M_0)\, t$. Ускорение же ракеты равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 r_0}{M_0}.$$

б) Силой тяги называется произведение массы ракеты на ускорение. Как было показано в пункте (а), это ускорение равно $v_0 r_0 / M_0$, откуда $F = v_0 r_0$. Следовательно, расход топлива для создания необходимой силы тяги есть

$$r_0 = \frac{F}{v_0} = \frac{9{,}8 \cdot 10^5 \text{ ньютон}}{2 \cdot 10^3 \text{ м/сек}} = 490 \text{ кг/сек}.$$

Мы здесь рассматривали силу тяги и расход топлива только в начальный момент времени. Ниже будет показано, что при постоянной относительной скорости истечения газов v_0 сила тяги тоже постоянна, т. е. полученный результат справедлив в любой момент времени.

в) Пусть M — масса ракеты, а v — ее скорость в произвольный момент времени t. За промежуток времени dt из ракеты будет выброшено $r_0\, dt$ газов со скоростью (относительно Земли) $v - v_0$, в результате чего скорость ракеты возрастет на dv. Согласно закону сохранения количества движения,

$$Mv = (v - v_0)\, r_0\, dt + (v + dv)\, (M - r_0\, dt),$$

откуда следует

$$M \frac{dv}{dt} = r_0 v_0.$$

В левой части полученного уравнения стоит произведение массы ракеты в данный момент времени на ее ускорение dv/dt, следовательно, в правой части стоит сила F. Как видим, при постоянных r_0 и v_0 она также постоянна. Но $M = M_0 - r_0 t$, так что

$$\frac{dv}{v_0} = \frac{r_0\, dt}{M_0 - r_0 t}.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем зависимость скорости ракеты от времени

$$\frac{v}{v_0} = -\ln (M_0 - r_0 t) + C.$$

Интеграл, стоящий в правой части, можно найти в математическом справочнике. Во всяком случае, пользуясь приближенной формулой $\ln(1+x) \approx x$ при $x \ll 1$, можно показать, что

$$\frac{d \ln x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln[x(1+\Delta x/x)] - \ln x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Постоянная C определяется начальными условиями. Если при $t=0$ ракета покоилась, то $C = \ln M_0$. Поэтому

$$v = v_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - rt} = v_0 \ln \frac{M_0}{M}.$$

10.5. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $v_{\text{ц.м.}}$. В этой системе скорости m_1 и m_2 будут соответственно $v_1 - v_{\text{ц.м.}}$ и $v_2 - v_{\text{ц.м.}}$. По определению системы ц.м.

$$m_1(v_1 - v_{\text{ц.м.}}) = -m_2(v_2 - v_{\text{ц.м.}}),$$

откуда

$$v_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

10.6. Пусть имеется n тел с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и скоростями $v_1, v_2, \ldots, v_n$. В системе, движущейся со скоростью $v_{\text{ц.м.}}$, скорости тел соответственно равны $v_1 - v_{\text{ц.м.}}$, $v_2 - v_{\text{ц.м.}}$, $\ldots$, $v_n - v_{\text{ц.м.}}$, а сумма импульсов равна нулю:

$$m_1(v_1 - v_{\text{ц.м.}}) + m_2(v_2 - v_{\text{ц.м.}}) + \ldots + m_n(v_n - v_{\text{ц.м.}}) = 0.$$

Собирая члены, содержащие $v_{\text{ц.м.}}$, и перенося их в правую часть, в конце концов получаем

$$v_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

10.7. Скорости тел в неподвижной (лабораторной) системе координат обозначим v_1 и v_2, а в системе центра масс — v_1' и v_2', причем $v_1' = v_1 - v_{\text{ц.м.}}$ и $v_2' = v_2 - v_{\text{ц.м.}}$. Кинетическая

энергия этих тел в л-системе равна

$$T=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1v_1'^2}{2}+\frac{m_2v_2'^2}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\text{ц.м.}}^2+v_{\text{ц.м.}}\,(m_1v_1'+m_2v_2').$$

Сумма первых двух членов есть кинетическая энергия тел в системе центра масс — $T_{\text{ц.м.}}$, а скобка при $v_{\text{ц.м.}}$ равна нулю по определению системы ц.м. Таким образом,

$$T=T_{\text{ц.м.}}+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\text{ц.м.}}^2.$$

10.8. Для произвольного числа тел формула для кинетической энергии будет иметь ту же структуру, что и в задаче **10.7**. Коэффициент при $v_{\text{ц.м.}}$ по той же причине, что и в задаче **10.7**, будет равен нулю. Поэтому

$$T=T_{\text{ц.м.}}+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)v_{\text{ц.м.}}^2,$$

где

$$T_{\text{ц.м.}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i'^2.$$

10.9. Пусть скорость нейтрона до удара была v. Если масса нейтрона m, то масса ядра C^{12} равна примерно $12m$. Закон сохранения количества движения дает

$$mv=12mv_2-mv_1,$$

или

$$v_2=\frac{v+v_1}{12}$$

(v_1 — скорость нейтрона после столкновения, а v_2 — скорость ядра). Согласно закону сохранения энергии, имеем

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(12m)\,v_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2.$$

Подставляя в это уравнение выражение для v_2, находим

$$13v_1^2+2vv_1-11v^2=0,$$

откуда

$$v_1=\frac{-v+\sqrt{v^2+11\cdot13v^2}}{13}=\frac{-v+12v}{13}=\frac{11}{13}v.$$

Мы выбираем в качестве v_1 положительное решение квадратного уравнения, так как заранее знаем, что нейтрон полетит назад (из тех же соображений, что и в задаче **10.1**).

Направление скорости нейтрона после удара уже фактически учтено нами при записи закона сохранения импульса.

Для отношения кинетических энергий нейтрона до и после соударения получаем

$$\frac{E'}{E}=\frac{{}^1/_2 m v_1^2}{{}^1/_2 m v_2^2}=\left(\frac{11}{13}\right)^2\approx 0{,}71.$$

10.10. Найдем в первую очередь начальную скорость бруска v_1. При этом можно воспользоваться законом сохранения импульса: пока брусок не отклонился, горизонтальные силы отсутствуют и поэтому импульс бруска с попавшей в него пулей равен начальному импульсу пули

$$(M+m)\,v_1=mv.$$

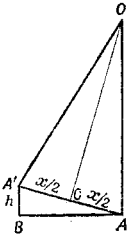
В точке наивысшего подъема кинетическая энергия бруска и пули ${}^1/_2\,(M+m)\,v_1^2$ переходит в потенциальную $(M+m)\,gh$, где h—высота подъема бруска, поэтому $v_1^2=2gh$. Выразим h через x и L. Как видно из рисунка, треугольники AOC и $AA'B$ подобны и $h/x=x/2L$, т. е. $h=x^2/2L$.

Стало быть,

$$v_1^2=\frac{x^2 g}{L};$$

таким образом,

$$v=\frac{M+m}{m}\,x\sqrt{\frac{g}{L}}.$$



К главе 11. **Векторы**

11.1. а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

в) $a_x=3$.

г) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}=3$.

д) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=6-2-1=3$.

е) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=9\mathbf{b}-3\mathbf{c}=15\mathbf{i}-18\mathbf{j}+9\mathbf{k}$.

11.2. а) Велосипедиста обдувают два потока воздуха: встречный, движущийся со скоростью его собственного движения v, и косой — со скоростью v_1. Естественно, велосипедист ощущает суммарный результат действия этих двух потоков, так что ему кажется, что ветер дует под углом α. Истинное же направление ветра (к направлению движения велосипедиста) составляет угол $\varphi=\alpha+\beta$. Угол β найдем, принимая во внимание, что $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}$ образуют треугольник.

Для треугольника скоростей имеем

$$\frac{v_1}{\sin\alpha}=\frac{v}{\sin\beta}, \quad \text{откуда} \quad \sin\beta=\frac{v}{v_1}\sin\alpha=0{,}431,$$

т. е.

$$\beta=25^\circ 30'.$$

Таким образом,

$$\varphi=\alpha+\beta=40^\circ 30'.$$

б) Если велосипедист движется на юг, то угол γ между кажущимся направлением ветра и направлением движения велосипедиста удовлетворяет соотношению

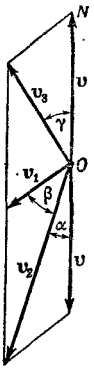
$$\frac{v_1}{\sin\gamma}=\frac{v}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)]}=\frac{v}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

откуда

$$\frac{v}{v_1}=\frac{\sin\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma},$$

или

$$\operatorname{ctg}\gamma=\left[\frac{v}{v_1}-\cos(\alpha+\beta)\right]\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}=1{,}39, \text{ т. е. } \gamma=35^\circ 40'.$$



11.3. а) Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена строго на восток, а ось y — на север. Предположим далее, что второй корабль в начальный момент времени находится

в начале координат O, а вектор его скорости $\mathbf{v}_2$ образует угол α с осью OX. Очевидно, первый корабль находится в точке B, лежащей на оси y на расстоянии 6 миль от O, а его скорость направлена параллельно оси x.

Таким образом, изменение координат кораблей со временем дается выражениями

$$x_1 = v_1 t, \qquad y_1 = 6,$$
$$x_2 = v_2 t \cos\alpha, \qquad y_2 = v_2 t \sin\alpha.$$

Квадрат расстояния между двумя кораблями, очевидно, равен

$$r^2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = (15 - 26\cos\alpha)^2 t^2 + (6 - 26t\sin\alpha)^2.$$

В условии задачи дано, что минимальное расстояние между кораблями равно 3 милям. Значит, r^2 как функция времени t имеет минимум при некотором значении времени $t = t_{\text{мин}}$. Но в этот момент времени производная от r^2 обращается в нуль:

$$\frac{dr^2(t_{\text{мин}})}{dt} = 0,$$

поэтому

$$2(15 - 26\cos\alpha)^2 t_{\text{мин}} - 2(6 - 26 t_{\text{мин}}\sin\alpha)\, 26\sin\alpha = 0,$$

откуда

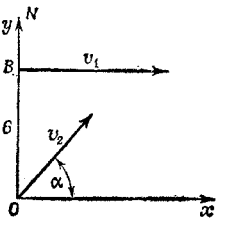
$$t_{\text{мин}} = \frac{6 \cdot 26 \sin\alpha}{15^2 - 30 \cdot 26 \cos\alpha + 26^2}.$$

Наконец, из того, что $r^2(t_{\text{мин}}) = 9$, находим

$$6^2 \cdot 26 \cos^2\alpha - 27 \cdot 30 \cos\alpha = 0,$$

откуда $\cos\alpha_1 = 0$ $(\alpha_1 = 90°)$ и $\cos\alpha_2 = 0{,}866$ $(\alpha_2 = 30°)$.

б) При меньшем значении угла $\alpha_2 = 30°$ второй корабль проходит перед носом первого на расстоянии 3 миль, поэтому это значение угла должно быть исключено по условию задачи. Таким образом, второй корабль движется курсом строго на север и окажется на минимальном расстоянии от первого через $t_{\text{мин}} = 0{,}17$ *час* от начального момента.



11.4. Можно считать, что произвольная точка M колеса участвует в двух движениях: равномерном со скоростью v вдоль оси x и вращательном вокруг центра колеса с угловой скоростью $\omega = v/R$ (см. задачу **8.12**). Пусть в начальный момент времени $t=0$ радиус-вектор точки M направлен под углом φ_0 к оси x. Действуя точно так же, как и в задаче **8.12**, находим координаты x и y точки M в произвольный момент времени t:

$$x = vt + R\cos(\varphi_0 + \omega t),$$
$$y = -R\sin(\varphi_0 + \omega t).$$

Компоненты скорости точки M найдем, дифференцируя по времени выражения для координат:

$$v_x = v - R\omega\sin(\varphi_0 + \omega t) = R\omega[1 - \sin(\varphi_0 + \omega t)],$$
$$v_y = -R\omega\cos(\varphi_0 + \omega t).$$

Вектор скорости есть

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}.$$

Будем считать, что в момент времени t точка M занимает положение, указанное на рисунке, а колесо соприкасается с горизонтальной поверхностью в точке A. Очевидно,

$$\mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{а} \quad \mathbf{r}_A = vt\mathbf{i} - R\mathbf{j}.$$

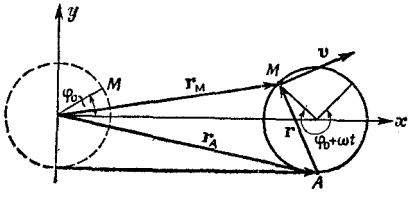
Проведем вектор $\mathbf{r}$ из точки касания A в точку M. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = R\cos(\varphi_0 + \omega t)\cdot\mathbf{i} + R[1 - \sin(\varphi_0 + \omega t)]\cdot\mathbf{j}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что скалярное произведение $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ (т. е. скорость точки M направлена перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$), а

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \omega r.$$

Поскольку точка колеса M произвольна, полученный результат означает, что движение колеса в любой момент времени эквивалентно «чистому» вращению колеса с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку соприкосновения колеса с горизонтальной плоскостью в тот же момент времени.



11.5. При движении против течения реки скорость лодки равна $v-u$, а по течению $v+u$. Поэтому время t_V равно

$$t_V=\frac{d}{v-u}+\frac{d}{v+u}=\frac{2dv}{v^2-u^2}.$$

При движении поперек реки скорость лодки должна быть направлена под некоторым углом α к направлению на противоположный берег (иначе лодка не попадет в нужную точку). Скорость лодки поперек реки равна, как видно из рисунка, $\sqrt{v^2-u^2}$, поэтому время движения в поперечном направлении равно

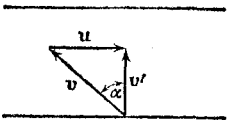
$$t_A=\frac{2d}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

Наконец, по озеру расстояние $2d$ лодка пройдет за время $t_L=2d/v$. Таким образом,

$$\frac{t_V}{t_A}=\frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}} \quad \text{и} \quad \frac{t_A}{t_L}=\frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}},$$

т. е.

$$\frac{t_V}{t_A}=\frac{t_A}{t_L}.$$



11.6. Обозначим скорость плывущего человека буквой v, скорость реки через u, а скорость ходьбы человека через v_1. Чтобы попасть на противоположный берег в точку B, плывя под некоторым углом к течению, человеку потребуется время (см. предыдущую задачу)

$$t_1=\frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}}=40\ мин.$$

Если же он будет плыть перпендикулярно течению, то на противоположный берег он попадет за время $t_2'=d/v$, но течением его снесет в точку C, которая находится ниже B на расстоянии $BC=ut_2'$.

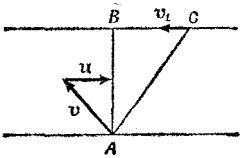
Пешком это расстояние человек пройдет за время

$$t_2''=\frac{BC}{v_1}=\frac{u}{v_1}t_2',$$

поэтому полное время движения человека вторым способом равно

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \left(1 + \frac{u}{v_1}\right)\frac{d}{v} = \frac{(v_1+u)\,d}{v_1 v} = 36 \text{ мин}.$$

Таким образом, двигаясь вторым способом, человек попадет в точку B на 4 *мин* раньше.



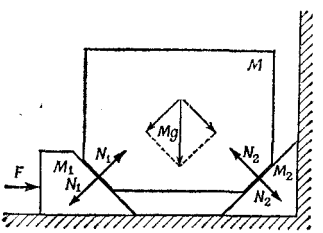
11.7. Запишем сначала уравнение движения для клина M_1. На этот клин действуют две силы: F и N_1 — сила давления со стороны груза M, горизонтальная проекция которой равна $N_1\,(1/\sqrt{2})$ и направлена против движения (фиг. 1). Итак,

$$M_1 a_1 = F - \frac{1}{\sqrt{2}} N_1.$$

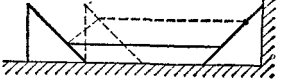
Обратимся теперь к грузу M. Он скользит вверх по поверхности клина M_2 (т. е. под углом 45° к горизонту) и в уравнение движения для этого груза входят поэтому лишь силы, действующие вдоль этого направления. Таких сил две: N_1 и проекция силы тяжести $Mg\,(1/\sqrt{2})$. Имеем

$$Ma = N_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} Mg.$$

Теперь нужно найти связь между a и a_1. Как видно из фиг. 2, смещение груза M (изображена лишь нижняя кромка этого груза) вдоль поверхности клина M_2 в $\sqrt{2}$ меньше смещения M_1 по горизонтали. Следовательно, $a = a_1/\sqrt{2}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Полученные уравнения запишем в виде системы

$$M_1 a_1 = F - \frac{N_1}{\sqrt{2}},$$
$$Ma_1 = -Mg + \sqrt{2}\,N_1.$$

Умножая первое из этих уравнений на 2 и складывая правые и левые части, находим

$$a_1 = \frac{2F - Mg}{2M_1 + M} = 2g.$$

Имеем далее

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,g.$$

Легко также найти силу N_2; так как движения перпендикулярно поверхности M_2 не происходит, то

$$N_2 = \frac{Mg}{\sqrt{2}} \approx 272\ кГ.$$

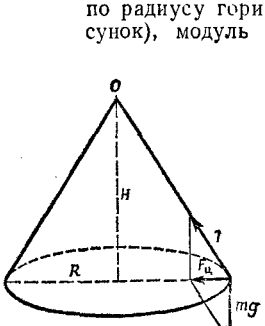
Таким образом:

а) клин M_1 движется горизонтально с ускорением $2g$, направленным к неподвижной стенке;

б) груз M движется вверх вдоль неподвижного клина M_2 с ускорением $\sqrt{2}\,g$;

в) сила давления клина M_2 на груз M равна 272 $кГ$

11.8. Пусть точка M движется по окружности радиусом R с постоянной скоростью v. Время одного оборота, т. е. период движения, есть $T = 2\pi R/v$. К точке M приложены две силы: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити T, направленная вверх по нити. Очевидно, центростремительная сила $\mathbf{F}_ц = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$; она направлена по радиусу горизонтальной окружности. Как видно (см. рисунок), модуль ее равен $F_ц = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α—угол между



нитью и вертикалью, т. е. вызываемое этой силой центростремительное ускорение равно по величине $g \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, оно, как известно, равно v^2/R, поэтому $v^2/R = g \operatorname{tg} \alpha$ и $v^2 = gR \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}},$$

так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}.$$

11.9. а) Пусть имеется n тел с массами $m_1, \ldots, m_n$ и скоростями $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. В системе ц. м. эти скорости соответственно равны $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}, \ldots, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}$ По определению,

$$m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}) + \ldots + m_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{v}_{\text{ц. м.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i.$$

б) Обозначим через $\mathbf{v}_1', \ldots, \mathbf{v}_n'$ скорости тел в системе ц. м. Тогда $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}, \ldots, \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n' + \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}$ суть скорости тел в неподвижной системе координат. Кинетическая энергия в этой системе

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\text{ц. м.}})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} v_{\text{ц. м.}}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \mathbf{v}_{\text{ц. м.}} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i'.$$

Но по определению ц. м.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i' = 0, \quad \text{а} \quad {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 = T_{\text{ц. м.}}$$

есть кинетическая энергия тел в системе ц. м., поэтому

$$T = T_{\text{ц. м.}} + \frac{v_{\text{ц. м.}}^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = T_{\text{ц. м.}} + \frac{1}{2} M v_{\text{ц. м.}}^2.$$

11.10. Закон сохранения количества движения в векторной форме гласит

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v};$$

отсюда

$$\mathbf{v}=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}=2\,(\mathbf{j}+\mathbf{k})\ м/сек.$$

11.11. Кинетическая энергия частиц до столкновения равна

$$T_{ц.\,м.}=\frac{1}{2}\,m_1v_1'^2+\frac{1}{2}\,m_2v_2'^2,$$

где $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ — скорости первой и второй частиц в системе ц. м. Обратим внимание, что вычисленная нами в предыдущей задаче скорость $\mathbf{v}$ есть фактически скорость центра масс $\mathbf{v}_{ц.\,м.}$.

Следовательно,

$$\mathbf{v}_1'=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}=3\mathbf{i}-3\mathbf{k}\ м/сек,$$
$$\mathbf{v}_2'=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{k}\ м/сек,$$
$$T_{ц.\,м.}=30\ дж.$$

11.12. Выберем систему координат, в которой ось y направлена на север, а ось x — на восток. В этой системе координат скорость первого тела до и после удара есть

$$\mathbf{v}_1=6\mathbf{j}\ м/сек,\quad \mathbf{u}_1=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\ м/сек.$$

а) Скорость $\mathbf{u}_2$ более тяжелого тела после столкновения определим, пользуясь законом сохранения импульса:

$$m_1\mathbf{v}_1=m_1\mathbf{u}_1+m_2\mathbf{u}_2,$$

откуда

$$\mathbf{u}_2=\frac{m_1\,(\mathbf{v}_1-\mathbf{u}_1)}{m_2}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}\ м/сек.$$

Величина этой скорости

$$u_2=\sqrt{5}\ м/сек.$$

б) Учитывая, что

$$\mathbf{v}_{ц.\,м.}=\frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1+m_2}=2\mathbf{j}\ м/сек,$$

находим скорости тел до и после столкновения в системе ц. м.

$$\mathbf{v}_1'=4\mathbf{j}\ м/сек,\qquad \mathbf{u}_1'=2\mathbf{i}\ м/сек,$$
$$\mathbf{v}_2'=-2\mathbf{j}\ м/сек,\qquad \mathbf{u}_2'=-\mathbf{i}\ м/сек.$$

Кинетическая энергия до удара в системе ц. м. равна

$$T_{ц.\,м.}=\frac{1}{2}\,m_1v_1'^2+\frac{1}{2}\,m_2v_2'^2=12\ дж,$$

а после удара

$$T'_{ц.\,м.}=\frac{1}{2}\,m_1u_1'^2+\frac{1}{2}\,m_2u_2'^2=3\ дж.$$

Таким образом, потеря энергии

$$\Delta T = T_{\text{ц. м.}} - T'_{\text{ц. м.}} = 9 \text{ дж}$$

и относительная потеря энергии $\Delta T/T = {}^3/_4$.

в) Согласно пункту (б), более легкое тело в системе ц. м. имело скорость до удара $4\mathbf{j}$, а после удара $2\mathbf{i}$. Это значит, что до удара оно двигалось вдоль оси y, а после удара — вдоль оси x. Следовательно, в системе ц. м. оно отклонилось на угол 90°.

11.13. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость налетающей частицы. Найдем $\mathbf{v}_{\text{ц. м.}}$:

$$\mathbf{v}_{\text{ц. м.}} = \frac{m\mathbf{v}}{2m} = \frac{\mathbf{v}}{2}.$$

Начальные скорости частиц в системе ц. м. равны $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}/2$ и $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}/2$.

После абсолютно упругого столкновения скорости частиц в системе ц. м. остаются прежними по величине ($u'_1 = u'_2 = v/2$), но линия относительного движения поворачивается. Чтобы перейти к л-системе координат, нужно прибавить к векторам $\mathbf{u}'_1$ и $\mathbf{u}'_2$ вектор $\mathbf{v}_{\text{ц. м.}}$. Соответствующее построение приведено на рисунке. Так как $BC = AC = CD$, через точки A, B и D можно провести окружность с центром в точке C. Следовательно, угол BAD — прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Этот же результат можно получить и вычислениями. Пусть $\mathbf{u}'_1$ образует угол α с осью x. Тогда

$$\mathbf{u}'_1 = \frac{v}{2}\cos\alpha\mathbf{i} + \frac{v}{2}\sin\alpha\mathbf{j},$$

а

$$\mathbf{u}'_2 = -\frac{v}{2}\cos\alpha\mathbf{i} - \frac{v}{2}\sin\alpha\mathbf{j}$$

($\mathbf{u}_2$ образует угол $\pi + \alpha$ с осью x).

В л-системе

$$\mathbf{u}_1 = \frac{v}{2}\cos\alpha\mathbf{i} + \frac{v}{2}(1+\sin\alpha)\,\mathbf{j} \text{ и } \mathbf{u}_2 = -\frac{v}{2}\cos\alpha\mathbf{i} + \frac{v}{2}(1-\sin\alpha)\,\mathbf{j}.$$

Теперь легко убедиться, что $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, откуда следует, что векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ перпендикулярны друг другу.

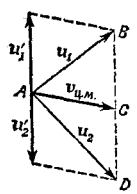
Приведем также другое решение, при котором не нужно переходить в систему ц. м. Из закона сохранения импульса имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат

$$v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$$

и вычитая из получившегося соотношения другое равенство, следствие закона сохранения энергии $v^2 = u_1^2 + u_2^2$, находим $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ перпендикулярны друг другу.



11.14. Уравнение движения для обоих шариков одно и то же: $\ddot{\mathbf{r}} = g\mathbf{k}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любого из шариков. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \frac{1}{2} gt^2\mathbf{k},$$

где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — некоторые не зависящие от времени векторы. Они-то как раз и будут разными для разных шариков. Легко убедиться, что $\mathbf{c}_1$ равен радиусу-вектору частицы при $t = 0$, т. е. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}(0)$, а $\mathbf{c}_2$ — равен начальной скорости частицы $\mathbf{v}(0)$. Следовательно,

$$\mathbf{r}_a(t) = 7(1+t)\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4{,}9(1+t^2)\,\mathbf{k}\ м,$$
$$\mathbf{r}_b(t) = 7(7-t)\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 4{,}9(1+t^2)\,\mathbf{k}\ м.$$

11.15. Будем действовать по схеме, описанной в условии к задаче 11.13. Выберем ось x в направлении движения первой частицы, а ось y — перпендикулярно к ней вверх.

Очевидно, в л-системе скорости частиц равны

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \text{а } \mathbf{v}_{ц.м.} = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} v_1\mathbf{i}.$$

Скорости частиц до соударения в системе ц. м.

$$\mathbf{v}_1' = \frac{3}{4} v_1\mathbf{i}, \qquad \mathbf{v}_2' = -\frac{1}{4} v_1\mathbf{i}.$$

Так как соударение абсолютно упругое, в системе ц.м. скорости частиц по величине остались прежними, но линия относительного движения повернулась на некоторый угол.

Чтобы понять, на какой именно угол повернулась эта линия, рассмотрим отдельно движение второй частицы в л-системе и системе ц.м.

В системе ц.м. частица двигалась со скоростью $v_2' = v_{\text{ц.м.}}$ вдоль оси x (см. рисунок в условии задачи, стр. 37). С той же по величине скоростью она движется и после столкновения, только под некоторым углом к оси x, т. е. $u_2' = v_{\text{ц.м.}}$ В л-системе $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2' + \mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$, причем угол между $\mathbf{u}_2$ и осью x равен 45°. Таким образом, треугольник OAB — равнобедренный с углами при основании по 45°; следовательно, угол $OAB = 90°$.

Итак, линия относительного движения в системе ц.м. повернулась на угол 90°. Это значит, что вектор $\mathbf{u}_1'$ также направлен по оси y:

$$\mathbf{u}_1' = \frac{3}{4} v_1 \mathbf{j}.$$

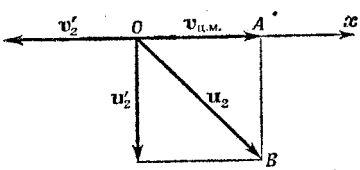
В л-системе

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4} v_1 \mathbf{i} + \frac{3}{4} v_1 \mathbf{j},$$

так что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = 3,$$

т. е. $\theta_1 = 71°30'$.



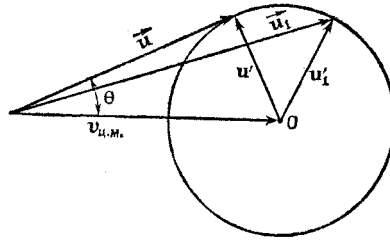
11.16. Пусть скорость тяжелой частицы до соударения v, а после соударения u. В системе ц.м. ($v_{\text{ц.м.}} = Mv/(M+m)$) модули этих скоростей равны

$$u' = v' = \frac{M}{M+m} v.$$

Направление вектора $\mathbf{u}'$ произвольно, так что конец этого вектора описывает окружность радиусом $mv/(M+m) < v_{\text{ц.м.}}$. Поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$, простым геометрическим построением легко найти различные значения вектора $\mathbf{u}$. Как видно из рисунка, угол отклонения налетающей частицы (направление начальной скорости $\mathbf{v}$ совпадает с направлением $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$) максимален в том случае, когда $\mathbf{u}$ направлено по касатель-

ной к окружности. При этом

$$\sin\theta=\frac{u'}{v_{\text{ц.м.}}}=\frac{m}{M}\,.$$



11.17. Выполнив для частицы массы m такое же построение, как и в предыдущей задаче (только теперь $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}=m\mathbf{v}/(M+m)$, а $u'_m=Mv/(M+m)$, так что $u'_m>v_{\text{ц.м.}}$), с учетом того, что угол между $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$ и $\mathbf{u}_m$ равен 90°, определим $\mathbf{u}'_m=\mathbf{u}_m-\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}$. Построим теперь на этом же рисунке $\mathbf{u}'_M$ и $\mathbf{u}_M$ [$u'_M=v_{\text{ц.м.}}=mv/(M+m)$]. Определим длину BD. Треугольники BDC и AOB подобны, поэтому

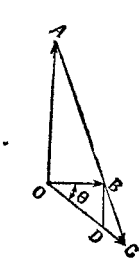
$$\frac{BD}{OA}=\frac{u'_M}{u'_M+u'_m}=\frac{m}{M+m}\,.$$

Но $OA=\sqrt{u'^2_m-v^2_{\text{ц.м.}}}=v\left[\sqrt{M^2-m^2}/(M+m)\right]=$ $=v\sqrt{(M-m)/(M+m)}$, так что

$$BD=\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\cdot\frac{m}{M+m}\,v.$$

Наконец,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{BD}{OB}=\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}=\sqrt{\frac{1-(m/M)}{1+(m/M)}}\,.$$



11.18. Задача решается так же, как и предыдущая, с тем лишь отличием, что u'_m и u'_M теперь уже не равны v'_m и v'_M. Скорости в системе ц.м. после соударения найдем из соотношения

$$\frac{1}{2}mu'^2_m+\frac{1}{2}Mu'^2_M=\frac{1}{2}\alpha^2(mv'^2_m+Mv'^2_M).$$

Учитывая, что $mu'_m=Mu'_M$ и $mv'_m=Mv'_M$, находим

$$u'_m=\alpha v'_m,\quad u'_M=\alpha v'_M.$$

Стало быть, отношение BD/OA остается тем же, что и в предыдущей задаче, но длина OA меняется. В нашем случае $OA=v[\sqrt{\alpha^2M^2-m^2}/(M+m)]$.
Таким образом,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{\alpha^2M^2-m^2}}{M+m}=\frac{\sqrt{\alpha^2-(m/M)^2}}{1+(m/M)}.$$

Если $\alpha=1$ (абсолютно упругое соударение), этот результат переходит в результат предыдущей задачи. При уменьшении α уменьшается $\operatorname{tg}\theta$, а при $\alpha=m/M$ он обращается в нуль. Если $\alpha<m/M$, полученная нами формула теряет смысл. Это и понятно: при столь малых значениях α $u'_m<v_{\text{ц.м.}}$, поэтому рассеяние на прямой угол невозможно.

11.19. Если радиус-вектор частицы со временем меняется по закону

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{j}-\left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sin\pi\frac{t}{2}\,\mathbf{k}\ м,$$

то скорость ее есть

$$\mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}+(1+t)\,\mathbf{j}-\frac{2}{\pi}\cos\pi\frac{t}{2}\,\mathbf{k}\ м/сек,$$

а ускорение

$$\mathbf{a}(t)=\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{j}+\sin\pi\frac{t}{2}\,\mathbf{k}\ м/сек^2.$$

а) В момент времени $t=0$

$$\mathbf{r}(0)=0,\quad \mathbf{v}(0)=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{2}{\pi}\,\mathbf{k}\ м/сек,$$

$$\mathbf{a}(0)=\mathbf{j}\ м/сек^2,\quad T=\frac{mv^2}{2}=\left(1+\frac{2}{\pi^2}\right)дж\approx 1{,}2\,дж.$$

В момент времени $t=1$

$$\mathbf{r}(1)=\mathbf{i}+\frac{3}{2}\,\mathbf{j}-\frac{4}{\pi^2}\,\mathbf{k}\ м,\quad \mathbf{v}(1)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}\ м/сек,$$

$$\mathbf{a}(1)=\mathbf{j}+\mathbf{k}\ м/сек^2,\quad T=\frac{5}{2}\,дж.$$

б) Действующую на частицу силу находим из уравнения движения:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{j} + \sin \pi \frac{t}{2}\, \mathbf{k} \text{ ньютон.}$$

в) Радиус кривизны траектории определяется как $R = v^2/a_\perp$. В нашем случае $v^2 = 1 + (1+t)^2 + (2/\pi^2)^2 \cos^2 \pi\,(t/2)$; дифференцируя по t, получаем

$$2v\frac{dv}{dt} = 2va_\parallel = 2\,(1+t) - \left(\frac{2}{\pi}\right)\cos \pi \frac{t}{2} \sin \pi \frac{t}{2}.$$

В момент времени $t = 1$

$$v = \sqrt{5}\ м/сек, \quad a_\parallel = \frac{2}{\sqrt{5}}\ м/сек^2,$$

$$a = \sqrt{2}\ м/сек^2, \quad a_\perp = \sqrt{a^2 - a_\parallel^2} = \sqrt{\frac{6}{5}}\ м/сек^2.$$

Таким образом,

$$R = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\ м \approx 4{,}6\ м.$$

11.20. Используя решение задачи **11.14**, можем сразу написать

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2\, \mathbf{k}$$

(ось z направлена вертикально вверх).

11.21. Рассмотрим точку A на земной поверхности с координатами λ_1 и φ_1. Проведем из начала прямоугольной системы координат (выбранной так, как указано в примечании к условию задачи, стр. 38) радиус-вектор в точку A и найдем его компоненты:

$$\mathbf{r}_A = R\cos\lambda_1 \cos\varphi_1 \mathbf{i} + R\cos\lambda_1 \sin\varphi_1 \mathbf{j} + R\sin\lambda_1 \mathbf{k},$$

где R — радиус Земли.

Аналогично, для другой точки с угловыми координатами (λ_2, φ_2) имеем

$$\mathbf{r}_B = R\cos\lambda_2 \cos\varphi_2 \mathbf{i} + R\cos\lambda_2 \sin\varphi_2 \mathbf{j} + R\sin\lambda_2\, \mathbf{k}.$$

Длина дуги большого круга S_{AB}, проходящего через рассматриваемые точки, равна ΦR, где Φ — угол между векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$. Этот угол найдем, вычислив скалярное произведение векторов $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$:

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = R^2 \cos\Phi,$$

откуда

$$\cos\Phi = \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{R^2}.$$

С другой стороны,

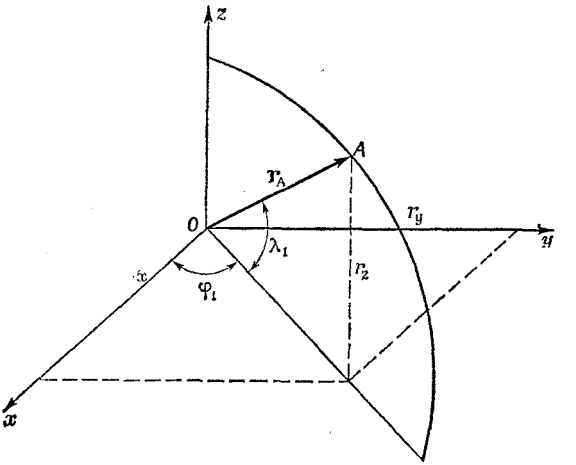
$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = R^2 (\cos\lambda_1 \cos\varphi_1 \cos\lambda_2 \cos\varphi_2 + \\ + \cos\lambda_1 \sin\varphi_1 \cos\lambda_2 \sin\varphi_2 + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2) = \\ = R^2 [\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2].$$

Поэтому

$$\cos\Phi = \cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2$$

и

$$S_{AB} = R \arccos [\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2].$$



11.22. На рисунке схематически показано и отмечено цифрами I, II, III положение Луны в новолуние, первую четверть и полнолуние.

Рассмотрим движение Луны относительно Земли. Будем считать, что вокруг Земли Луна движется по круговой орбите, поэтому ее ускорение всегда направлено по радиусу орбиты к Земле.

Величина этого ускорения равна

$$a_{Л} = \frac{v^2}{R_{Л}} = \frac{4\pi^2 R_{Л}}{T_{Л}^2},$$

где $R_{Л}$ — расстояние от Земли до Луны, а $T_{Л}$ — период обращения Луны.

В задаче 7.3 было показано, что

$$\left(\frac{T_{Л}}{T_{З}}\right)^2 = \left(\frac{R_{Л}}{R_{З}}\right)^3 \frac{M_{С}}{M_{З}},$$

($T_З$ — период обращения Земли вокруг Солнца, $R_З$ — расстояние от Земли до Солнца, а $M_З$ и $M_С$ — массы Земли и Солнца).

Учитывая это, находим

$$a_Л = \frac{4\pi^2}{T_З^2}\frac{R_З^3}{R_Л^2}\frac{M_З}{M_С} \approx 0{,}27\ см/сек^2.$$

Двигаясь вместе с Землей по круговой орбите вокруг Солнца, Луна обладает еще одним центростремительным ускорением, направленным по радиусу к Солнцу, величиной

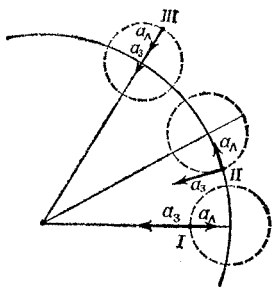
$$a_З = \frac{4\pi^2}{T_З^2} R_З \approx 0{,}60\ см/сек^2$$

(здесь мы пренебрегли $R_Л$ по сравнению с $R_З$). Таким образом, результирующее ускорение Луны по отношению к Солнцу в любой момент времени равно $\mathbf{a} = \mathbf{a}_Л + \mathbf{a}_З$. Поэтому

$a_I = a_З - a_Л = 0{,}33\ см/сек^2$ (направлено к Солнцу),

$a_{II} = \sqrt{a_Л^2 + a_З^2} = 0{,}66\ см/сек^2$ (направлено под углом α к линии Луна—Солнце, причем $\operatorname{tg}\alpha = a_Л/a_З = 0{,}45$, $\alpha = 24°13'$);

$a_{III} = a_З + a_Л = 0{,}87\ см/сек^2$ (направлено к Солнцу).



К главе 12. **Характеристики сил**

12.1. Кирпич расположен на плоскости так, как показано на фиг. 1. Чтобы нагляднее изобразить силы, действующие на тело, нарисуем наклонную плоскость в другой проекции (фиг. 2). На тело действует сила веса mg, направленная вертикально вниз. Ее можно разложить на составляющие $F_\parallel$ и $F_\perp$ вдоль

и перпендикулярно наклонной плоскости. Первая вызывает движение вдоль оси y, вторая уравновешивается реакцией плоскости. Из треугольника сил находим эти силы:

$$F_{\parallel} = mg \sin\theta, \quad F_{\perp} = mg \cos\theta.$$

а) При движении тела вверх (т. е. в положительном направлении оси y) уравнение движения имеет вид

$$ma_y = -mg \sin\theta - F_{тр},$$

но

$$F_{тр} = \mu F_{\perp},$$

так что

$$a_y = -g \sin\theta - \mu g \cos\theta = -g \cos\theta (\operatorname{tg}\theta + \mu).$$

б) При движении вниз

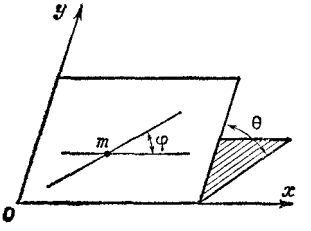
$$ma_y = mg \sin\theta - \mu mg \cos\theta,$$
$$a_y = g \sin\theta - \mu g \cos\theta = g \cos\theta (\operatorname{tg}\theta - \mu),$$

т. е. если $\mu \geqslant \operatorname{tg}\theta$, то скользить по наклонной плоскости только под действием силы тяжести кирпич не может.

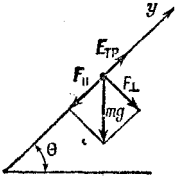
в) Нарисуем для удобства плоскость xy так, чтобы она совпадала с плоскостью страницы. Составляющая силы $F_{\parallel}$ направлена вертикально вниз, а $F_{\perp}$ —перпендикулярно рисунку за страницу.

Если кирпич скользит вниз по AB, то сила трения направлена вверх по AB, как показано на фиг. 3. Кроме того, к кирпичу приложена со стороны линейки сила, равная $mg \sin\theta \cos\varphi$ и направленная перпендикулярно линии AB. Поэтому

$$a_x = \mu g \cos\theta \cos\varphi - g \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi =$$
$$= g(\mu \cos\theta - \sin\theta \sin\varphi) \cos\varphi,$$
$$a_y = -g \sin\theta + \mu g \cos\theta \sin\varphi + g \sin\theta \cos^2\varphi =$$
$$= g(\mu \cos\theta - \sin\theta \sin\varphi) \sin\varphi.$$



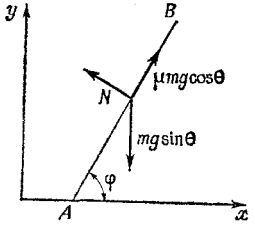
Фиг. 1



Фиг. 2

Аналогично при движении кирпича вверх по AB:

$$a_x = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi,$$
$$a_y = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi.$$



Фиг. 3

12.2. а) Пусть кирпич движется вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0. Уравнение его движения имеет вид

$$y = v_0 t - \frac{a_1 t^2}{2},$$

где $a_1 = g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$ (см. предыдущую задачу).

Через промежуток времени $t_1 = v_0/a_1 \approx 0{,}45$ *сек* (в этот момент времени его скорость $v = v_0 - a_1 t_1$ обратится в нуль) он достигнет наивысшей точки и пройдет по наклонной плоскости путь

$$S = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a_1} \approx 0{,}68\ м.$$

б) Двигаясь вниз по наклонной плоскости с ускорением $a_2 = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ (см. предыдущую задачу) и нулевой начальной скоростью, кирпич пройдет тот же путь S за время t_2. Очевидно,

$$S = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

так что

$$t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}} \approx 0{,}65\ сек.$$

Полное время движения кирпича равно $t_1 + t_2 = 1{,}1$ *сек*.

в) Кирпич теряет энергию на преодоление силы трения, поэтому изменение его кинетической энергии равно работе силы трения на пути $2S$: $\Delta T = 2S\mu mg\cos\theta \approx 2{,}3$ *дж*.

Этот же результат можно получить, вычислив непосредственно изменение кинетической энергии кирпича:

$$\Delta T = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m}{2}(a_2 t_2)^2 \approx 2{,}3\ дж.$$

12.3. Рассмотрим сначала случай, когда сила **H** направлена к склону. Вес **W** и приложенную внешнюю силу **H** разлагаем на две составляющие: нормальную к наклонной плоскости и параллельную к ней. Как видно из рисунка (где показано разложение только силы **H**),

$$W_{\parallel} = W \sin\alpha, \quad W_{\perp} = W \cos\alpha$$

и

$$H_{\parallel} = H \cos\alpha, \quad H_{\perp} = H \sin\alpha.$$

При достаточно большой силе H груз W начнет двигаться вверх по наклонной плоскости, так как $H_{\parallel}$ направлено вверх по плоскости, а в отсутствие силы H груз W покоится ($\mu > \operatorname{tg}\alpha$). Непосредственно перед началом движения, когда к телу приложена сила $H^{\text{мин}}$, разность $H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel}$ должна равняться силе трения. Последнюю получим, умножив силу нормального давления $H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp}$ на коэффициент трения μ. Итак,

$$H_{\parallel}^{\text{мин}} - W_{\parallel} = \mu\,(H_{\perp}^{\text{мин}} + W_{\perp})$$

или

$$(H^{\text{мин}} \cos\alpha - W \sin\alpha) = \mu(H^{\text{мин}} \sin\alpha + W \cos\alpha),$$

откуда

$$H^{\text{мин}} = \frac{3 \operatorname{tg}\alpha}{1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha} W = \frac{3\mu}{2 - \mu^2} W \qquad (\mu = 2 \operatorname{tg}\alpha).$$

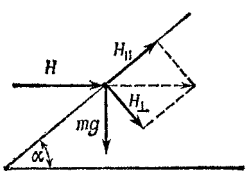
Найдем теперь минимальное значение силы **H**, направленной от наклонной плоскости, способной привести тело в движение. В этом случае тело W начнет двигаться вниз, а для минимальной силы записываем уравнение

$$(H^{\text{мин}} \cos\alpha + W \sin\alpha) = 2 \operatorname{tg}\alpha \ (-H^{\text{мин}} \sin\alpha + W \cos\alpha),$$

откуда

$$H^{\text{мин}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} W = \frac{\mu}{2 + \mu^2} W.$$

Так как $3/(2-\mu^2)$ всегда больше $1/(2+\mu^2)$, во втором случае сила, приводящая в движение тело весом W, меньше.



12.4. В точке O горизонтальная составляющая натяжения нити $T\cos\alpha$ уравновешивается силой трения, которая непосредственно перед началом скольжения кольца равна $\mu T \sin\alpha$.

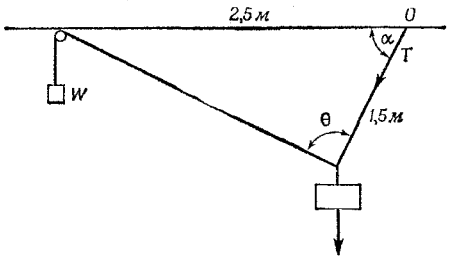
Таким образом, $T\cos\alpha=\mu T\sin\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=1/\mu={}^4/_3$. После простых вычислений находим также, что $\sin\alpha={}^4/_5$, $\cos\alpha={}^3/_5$. По теореме синусов:

$$\frac{2{,}5}{\sin\theta}=\frac{1{,}5}{\sin[180-(\alpha+\theta)]};\ \text{откуда}\ \operatorname{ctg}\theta=0,\ \text{т. е.}\ \theta=90^\circ.$$

Спроектируем силы, действующие на груз весом 1 $кГ$, на направление перекинутой через блок нити. Сумма этих проекций должна быть равна нулю. Итак,

$$W-mg\cos\alpha=0,\ \text{т. е.}\ W=\frac{3}{5}\ кГ.$$

Аналогично, проектируя силы на направление нити длиной 1,5 $м$, находим $T={}^4/_5\ кГ$.



12.5. Пусть N — давление одной части замка на другую. Непосредственно перед началом движения $F_{тр}=\mu N$. Так как части замка не движутся, сумма вертикальных проекций сил, действующих на часть A, так же как и горизонтальных, действующих на часть B, равна нулю. Поэтому

$$\frac{N}{\sqrt{2}}-\frac{\mu N}{\sqrt{2}}-mg=0,$$
$$-\frac{N}{\sqrt{2}}-\frac{\mu N}{\sqrt{2}}+F=0,$$

откуда

$$N=\frac{\sqrt{2}\,mg}{1-\mu};\qquad F=\frac{1+\mu}{1-\mu}\,mg.$$

12.6. В системе, связанной с тележкой, на «неосторожного молодого человека» действует, кроме силы веса, псевдосила, равная $-m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение тележки (мы знаем, что его величина $g\sin\alpha$). Вертикальная составляющая ускорения равна $g\sin^2\alpha$, поэтому весы будут показывать вес $mg(1-\sin^2\alpha)=mg\cos^2\alpha$. Так как этот вес составляет ${}^3/_4$ «настоящего»

веса, то

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \alpha=30^\circ.$$

12.7. Ускорение груза массы M_2 обозначим через a_2; направим его вертикально вверх. Ускорение a_1 груза M_1 (направление которого совпадает с поверхностью наклонной плоскости) связано с ускорением a_2, как мы уже знаем, соотношением $a_1=2a_2$ (см., например, задачи **9.9**, **9.14**, **4.5**).

Составим уравнения движения грузов M_1 и M_2:

$$M_1a_1=M_1g\sin\theta-\frac{T}{2},$$
$$M_2a_2=-M_2g+T,$$

где T — натяжение нити, на которой подвешен груз M_2, или

$$4M_1a_2=M_1g-T,$$
$$M_2a_2=-M_2g+T,$$

откуда

$$a_2=\frac{M_1-M_2}{4M_1+M_2}g=\frac{1}{9}g$$

и

$$T=\frac{5M_1M_2}{4M_1+M_2}g=222\ \kappa\Gamma.$$

Натяжение нити, прикрепленной к грузу M_1, равно, очевидно, $T/2=111\ \kappa\Gamma$.

12.8. Рассмотрим движение брусков непосредственно перед тем, как они начнут проскальзывать друг относительно друга. Запишем уравнение движения обоих брусков вместе, обозначив через μ_1 коэффициент трения второго бруска о первый, а через μ_2 — бруска о наклонную плоскость:

$$(m_1+m_2)\,a=F-(m_1+m_2)\,g\sin\alpha-\mu_2\,(m_1+m_2)\,g\cos\alpha;$$

здесь α — угол, который образует наклонная плоскость с горизонтом, причем $\sin\alpha=5/13$, $\cos\alpha=12/13$.

К верхнему бруску приложена только сила трения, равная (непосредственно перед началом проскальзывания) $\mu_1m_1g\cos\alpha$. Под ее действием брусок движется с тем же самым ускорением a, что и нижний, поэтому

$$m_1a=\mu_1m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha,$$

откуда

$$a=g\,(\mu_1\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{13}g\approx 0{,}75\ м/сек^2.$$

Наконец, величина силы F, соответствующая этому значе-

нию a, равна

$$F=\left(\frac{1}{13}+\sin\alpha+\mu_2\cos\alpha\right)(m_1+m_2)\,g\approx 200\ Г.$$

12.9. Пусть угол θ и коэффициент трения μ таковы, что куб, предоставленный сам себе, начинает скользить. При этом изменение его потенциальной энергии (за счет опускания ц. м.) окажется больше работы силы трения: за счет этой разницы и появляется кинетическая энергия у куба. Ясно, что в положении, когда силы трения едва хватает, чтобы удержать куб, изменение потенциальной энергии при (воображаемом) небольшом смещении куба будет как раз равно работе силы трения. Как видно из рисунка, высота ц. м. куба равна $h=(l/\sqrt{2})\cos(45°-\theta)$ (l — длина ребра куба), а расстояние от нижнего ребра до стенки $x=l\cos\theta$.

Если угол θ уменьшился на величину $\Delta\theta$, то уменьшение потенциальной энергии куба равно

$$mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin(45°-\theta)\Delta\theta,$$

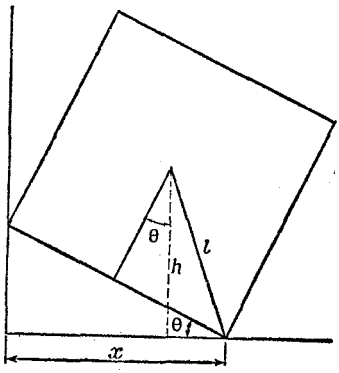
а работа силы трения равна $\mu Nl\sin\theta\Delta\theta$, где N — сила давления куба на пол. Если угол θ такой, что куб все-таки не движется, то $N=mg$ (сумма сил, действующих на куб, должна быть равна нулю). Итак,

$$mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin(45°-\theta)=\mu mgl\sin\theta,$$

или

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1+2\mu}.$$

Проверим, насколько разумен наш ответ. Предположим, что угол θ очень мал. Ясно, что в этом случае нужно очень большое трение, чтобы удержать куб от скольжения. Это видно и из нашей формулы (при $\theta\to 0$ $\mu\to\infty$). Если $\theta=45°$, куб балансирует на нижнем ребре и нужна очень маленькая сила со стороны стенки и соответственно очень маленькая сила трения, чтобы удержать его (при $\theta=45°$ $\mu=0$). Наконец, если $\mu=1$, куб будет в равновесии при $\theta=18°30'$.



12.10. Обозначим через N_1 и N_2 силы нормального давления, возникающие в верхнем и нижнем соединениях кронштейна со столбом, а через $F_{тр}^{(1)}$ и $F_{тр}^{(2)}$ — силы трения в этих же соединениях. Так как кронштейн находится в равновесии, то проекции всех сил на горизонтальное и вертикальное направления равны нулю. Поэтому

$$N_1 = N_2,$$

$$50P + P = F_{тр}^{(1)} + F_{тр}^{(2)}$$

(P — вес кронштейна).

Непосредственно перед тем, как кронштейн начнет соскальзывать по столбу, силы трения (направленные вверх, что учтено при записи второго уравнения) равны

$$F_{тр}^{(1)} = 0{,}3N_1 \quad \text{и} \quad F_{тр}^{(2)} = 0{,}3N_2.$$

Учитывая это и вводя обозначение $N_1 = N_2 = N$, вместо системы двух уравнений получаем $51P = 0{,}6N$.

Еще одно уравнение для P и N получаем, используя принцип виртуальных перемещений.

Поворачивая кронштейн как целое на малый угол $\Delta\varphi$, например, вокруг точки O, убеждаемся (см. задачи к гл. 4), что любая точка кронштейна, находящаяся на расстоянии l от оси вращения, при этом смещается влево на расстояние $l\cos\varphi\Delta\varphi$ и вниз — на $l\sin\varphi\Delta\varphi$. Но $l\cos\varphi$ — расстояние до данной точки от оси вращения по вертикали, а $l\sin\varphi$ — расстояние по горизонтали, поэтому закон сохранения энергии при выбранном виртуальном перемещении записывается в виде

$$50PX\Delta\varphi + 15P\Delta\varphi + 3N\Delta\varphi - 22N\Delta\varphi = 0,$$

или

$$50PX + 15P = 19N.$$

Из системы двух уравнений

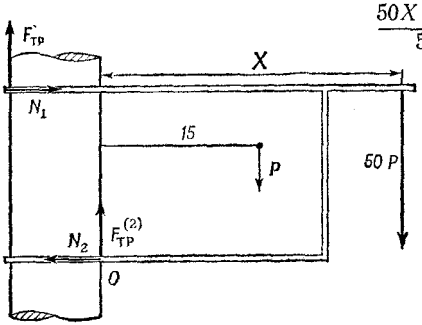
$$50PX + 15P = 19N,$$

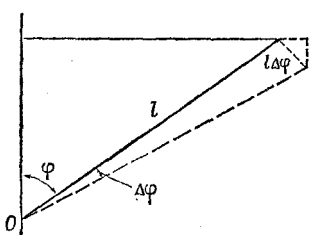
$$51P = 0{,}6N$$

находим

$$\frac{50X + 15}{51} = \frac{19}{0{,}6},$$

откуда $X = 32$ *см*.





12.11. а) Если веревка подвинется вправо на расстояние S, то при этом будет выполнена работа ΔTS. Эта работа должна равняться работе сил трения

$$\Delta TS = F_{\text{тр}} \cdot S,$$

откуда $\Delta T = F_{\text{тр}}$.

Но $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N — сила нормального давления. Из рисунка видно, что

$$N = 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = T\Delta\theta$$

(мы пренебрегли при сложении сил величиной ΔT по сравнению с T).

Таким образом,

$$\Delta T = \mu T \Delta\theta,$$

или для бесконечно малых углов

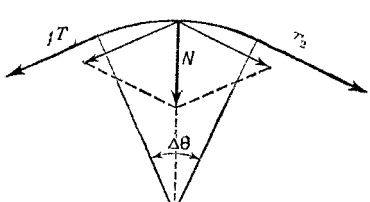
$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta.$$

б) Интегрируя полученное в пункте (а) уравнение, находим

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\alpha} d\theta \quad \text{и} \quad \ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\alpha,$$

так что

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha}.$$



12.12. Перейдем в систему координат, жестко связанную с полосой. В этой системе на тело действует псевдосила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Разложим ее на две составляющие: $F_{\parallel}$ вдоль полосы и $F_{\perp}$ — перпендикулярно к ней. Они равны соответственно (см. рисунок)

$$F_{\parallel} = F \cos\theta, \quad F_{\perp} = F \sin\theta.$$

Уравнение движения в выбранной нами системе координат имеет вид (ось x направлена вверх по полосе)

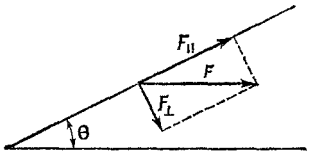
$$m\ddot{x} = F_{\parallel} - mg \sin\theta,$$

т. е.

$$\ddot{x} = a\cos\theta - g\sin\theta.$$

Путь S тело проходит за время (начальная скорость тела равна нулю)

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a\cos\theta - g\sin\theta}} \approx 2{,}16 \text{ сек}.$$



12.13. а) В гл. 12 «Лекций» (вып. 1) показано, что на заряд q, помещенный в электрическое поле напряженностью E, действует сила F, равная qE, причем F измеряется в ньютонах, а q—в кулонах.
Отсюда

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \text{ньютон/кулон}$$

(символ $[A]$ означает размерность физической величины A).

б) На заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью v, действует сила

$$F = qvB \ (B\text{—магнитная индукция}),$$

откуда

$$[B] = \frac{[F]}{[q]\,[v]} = \frac{\text{ньютон}\cdot\text{сек}}{\text{кулон}\cdot\text{м}}.$$

в) Размерность отношения E к B есть

$$\frac{[E]}{[B]} = [v] = \text{м/сек}.$$

Обратите внимание, что так называемая скорость дрейфа частиц в скрещенном электрическом и магнитном полях равна как раз этому отношению (подробнее см. «Лекции», вып. 6, стр. 340 или задачу **12.16**).

г) Для гравитационного поля C:

$$F = mC \text{ и } [C] = \frac{[F]}{[m]} = \text{ньютон/кг}.$$

12.14. Пусть частица движется в плоскости xy, а магнитная индукция направлена по оси z. На частицу действует сила, компоненты которой

$$F_x = qv_yB, \ F_y = -qv_xB.$$

Легко видеть, что $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ (так как $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$) и

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = qvB.$$

Как было показано в задаче **9.1**, под действием такой силы частица равномерно движется по круговой орбите, лежащей в плоскости xy, причем радиус орбиты равен $R = mv/qB$.

12.15. Так как частица движется равномерно по круговой орбите, то время одного оборота T найдем по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(в предыдущей задаче показано, что $R = mv/qB$).

При ускорении частицы в циклотроне необходимо точно знать время T, чтобы правильно выбрать частоту ускоряющего электрического поля. Период колебаний этого поля должен совпадать с периодом обращения частицы (так называемое условие резонанса, или синхронизма).

12.16. *а*) Уравнение движения частицы в данном электромагнитном поле есть [см. формулу (12.11) «Лекций», вып. 1, стр. 224]

$$m\ddot{x} = qv_yB_z = q\dot{y}B_z,$$
$$m\ddot{y} = qE_y - qv_xB_z = qE_y - q\dot{x}B_z,$$
$$m\ddot{z} = 0.$$

б) Применяя преобразования Галилея

$$x' = x - \frac{E_y}{B_z}t, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

так что

$$\dot{x}' = \dot{x} - \frac{E_y}{B_z}, \quad \dot{y}' = \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z}$$

и

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z},$$

получаем следующие уравнения движения в штрихованной системе:

$$m\ddot{x}' = q\dot{y}'B_z,$$
$$m\ddot{y}' = -q\dot{x}'B_z,$$
$$m\ddot{z} = 0.$$

Как следует из уравнений движения, в штрихованной системе координат частица будет двигаться по круговой орбите в плоскости $x'y'$ радиусом $R = mv/qB_z$.

Из преобразований Галилея видно, что штрихованная система координат движется в положительном направлении оси x нештрихованной системы со скоростью $v_d = E_y/B_z$.

(Скорость v_d называют скоростью дрейфа.) Значит, в нештрихованной системе координат частица движется по циклоиде (сравните с задачей 8.12).

К главе 14. ***Работа и потенциальная энергия***

14.1. Сила $\mathbf{F} = 1{,}5y\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j} - 0{,}2\,(x^2+y^2)\,\mathbf{k}$ *ньютон.*

При $t=0$ $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ *м*, а $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *м/сек*, поэтому

а) $\mathbf{F}_0 = 4{,}5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 2{,}6\mathbf{k}$ *ньютон*,

б) $\mathbf{a}_0 = 4{,}5\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 2{,}6\mathbf{k}$ *м/сек*^{2},

в) $T_0 = \dfrac{mv_0^2}{2} = 2{,}5$ *дж*,

г) $\dfrac{dT}{dt} = \mathbf{F}_0\mathbf{v}_0 = 21{,}4$ *дж/сек*.

14.2. Приближенно можно положить

а) $\mathbf{r}\,(t=0{,}01) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot 0{,}01 = 2{,}001 + 3{,}02\mathbf{j} + 0{,}01\mathbf{k}$ *м*,

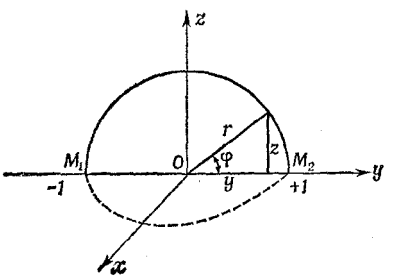
б) $\mathbf{v}\,(t=0{,}01) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot 0{,}01 = 0{,}045\mathbf{i} + 2{,}12\mathbf{j} + 0{,}97\mathbf{k}$ *м/сек*,

в) $T\,(t=0{,}01) = T_0 + \dfrac{dT}{dt} \cdot 0{,}01 = 2{,}71$ *дж* (или $T = \dfrac{mv^2}{2} = 2{,}71$ *дж*).

14.3. а) При перемещении частицы вдоль оси y работу совершает только y-компонента силы. Но $F_y = 3x^2 = 0$ ($x=0$ при движении вдоль оси y), поэтому и работа силы $\mathbf{F}$ равна нулю.

б) В этом случае нужно принимать во внимание только y- и z-компоненты силы $\mathbf{F}$, так как перемещение перпендикулярно оси x. Однако $F_y = 0$ ($x=0$ для всех точек плоскости $y-z$), поэтому работа силы $\mathbf{F}$ равна

$$W = \int_{M_1}^{M_2} F_z dz = -0{,}2 \int_{M_1}^{M_2} y^2 dz.$$



Как видно из рисунка, $z=\sin\varphi$, $y=\cos\varphi$, точке M_1 соответствует значение угла $\varphi=\pi$, а точке M_2 — значение $\varphi=0$, поэтому

$$W=-0{,}2\int\limits_{\pi}^{0}\cos^2\varphi d\varphi=-0{,}2\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0}=0.$$

Однако это еще не означает, что сила **F** консервативна. Можно найти такие траектории частицы, для которых работа силы **F** не равна нулю. Например, если частица перемещается из точки M_1 в точку M_2 по окружности единичного радиуса, лежащей в плоскости $x-y$, работа силы **F** равна

$$W=\int\limits_{M_1}^{M_2}F_x dx+\int\limits_{M_1}^{M_2}F_y dy=3\int\limits_{-1}^{1}x^2dy=3\int\limits_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy=4\ дж.$$

Таким образом, работа при перемещении частицы из точки (0, —1, 0) в точку (0, 1, 0) зависит от пути перемещения, поэтому поле силы **F** неконсервативно.

14.4. 1. а) Кинетическая энергия частицы в конце пути равна работе, совершаемой силой **F**. Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2}=\int\limits_{0}^{3}(3+4x)\,dx=27\ дж,$$

откуда

$$v=3\ м/сек.$$

б) Из уравнения движения $ma=F_x$ находим

$$a=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x\right)\ м/сек^2.$$

Поэтому ускорение частицы в конце пути $a=2{,}5\ м/сек^2$.

в) Мощность равна изменению кинетической энергии в единицу времени, т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=45\ вт.$$

2. В этом случае удобнее непосредственно проинтегрировать уравнение движения $ma=3+4t$, откуда

$$v=\frac{3}{m}t+\frac{4}{2m}t^2$$

(здесь учтено, что $v=0$ при $t=0$). Следовательно, при $t=3$ *сек*

$$v=4{,}5 \text{ м/сек}, \quad a=\frac{3+4t}{m}=2{,}5 \text{ м/сек}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2}=Fv=67{,}5 \text{ вт}.$$

14.5. Как было показано в «Лекциях» (вып. 1), поле и потенциал вне сферической оболочки равны полю и потенциалу точечного заряда, помещенного в центр сферы и равного по величине полному заряду оболочки. (Внутри оболочки поле равно нулю, т. е. потенциал не меняется от точки к точке.) Итак,

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где R — радиус оболочки; q — ее полный заряд. Находим далее

$$q=4\pi\varepsilon_0\varphi R=5{,}6\cdot 10^{-5} \text{ кулон}.$$

14.6. Пусть A и B — радиусы соответственно внешней и внутренней сфер. Пользуясь результатом предыдущей задачи и принципом суперпозиции, вычислим потенциал на поверхности внешней сферы. Заряды, расположенные на внутренней сфере, создают на внешней сфере потенциал $q/4\pi\varepsilon_0 A$ (q — заряд внутренней сферы), а заряды, расположенные на самой внешней сфере, — потенциал $-q/4\pi\varepsilon_0 A$ (напомним, что заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку). Таким образом, потенциал внешней сферы равен нулю.

Займемся теперь внутренней сферой. Потенциал, создаваемый на ней ее собственными зарядами, равен $q/4\pi\varepsilon_0 B$, а зарядами внешней сферы $-q/4\pi\varepsilon_0 A$. Итак, разность потенциалов между сферами равна потенциалу внутренней сферы, так что

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)$$

и

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{AB}{A-B} \text{ ф}.$$

14.7.

$$\varphi_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=1{,}6\cdot 10^3 \text{ в} \quad (R_3=6370 \text{ км}).$$

14.8. Мощность N связана с силой F и скоростью v соотношением $N=Fv$, так что $F=N/v$.

Из уравнения движения $ma=F$ (m — масса автомобиля) имеем

$$a=\frac{F}{m}=\frac{N}{mv}=7{,}2 \text{ м/сек}^2.$$

14.9. Масса всего кабеля $m = ML$. В начальный момент времени центр тяжести кабеля находился на расстоянии $L/4$ от оси блока, в конечный — на расстоянии $L/2$.

Таким образом, изменение потенциальной энергии кабеля ΔU равно

$$MLg\frac{L}{2} - MLg\frac{L}{4},$$

т. е.

$$\Delta U = \frac{1}{4}ML^2g.$$

Изменение кинетической энергии ΔE кабеля с учетом того, что вначале он покоился, равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} = \frac{ML}{2}v^2.$$

(Разумеется, все точки кабеля движутся с одной и той же скоростью v.)

Из закона сохранения энергии имеем $\Delta U = \Delta E$, откуда

$$\frac{ML^2g}{4} = \frac{MLv^2}{2} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

14.10. Пусть вода вырывается из наконечника со скоростью v. Зная высоту подъема воды и угол наклона наконечника к горизонту, можно найти начальную скорость струи.

Действительно, $H_{\text{макс}} = (v^2/2g)\sin^2\alpha$, откуда

$$v^2 = \frac{2gH}{\sin^2\alpha} = 8gH$$

(здесь учтено, что $\alpha = 30°$).

В единицу времени из шланга выбрасывается масса воды $m = \rho Sv$, где S — площадь поперечного сечения наконечника, а ρ — плотность воды. Полезная работа мотора в единицу времени затрачивается на поднятие этой массы воды на высоту h и на выбрасывание ее из шланга со скоростью v. Она равна

$$P_n = mgh + \frac{mv^2}{2} = \rho Svg(h + 4H).$$

Мощность мотора P, очевидно, равна

$$P = \frac{P_n}{\eta},$$

где η — коэффициент полезного действия, т. е.

$$P = \frac{\rho Svg}{\eta}(h + 4H).$$

Подставляя численные значения входящих в формулу для P величин, получаем $P = 25$ *квт*.

14.11. Работа W, затрачиваемая атлетом на каждый бросок, равна $mv^2/2$, где m — масса спортивного снаряда, а v — его начальная скорость. Таким образом, для вычисления W необходимо найти v.

Обозначим через S дальность полета снаряда. Как видно из рисунка, $S=S_0+S_1$, где S_0 — дальность полета снаряда, если бы он был брошен со скоростью v с поверхности Земли, а S_1 — горизонтальная дальность полета из точки B до соприкосновения снаряда с Землей. Имеем

$$S_0=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{v^2}{g}$$

(здесь учтено, что $\alpha=45^\circ$), а S_1 вычислим, рассматривая отдельно движение снаряда из точки B. Из закона сохранения энергии следует, что $\mathbf{v}_B=\mathbf{v}$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем) и что $\mathbf{v}_B$ направлена под углом 45° к горизонту. Поэтому $S_1=(v/\sqrt{2})\,t$, где t — время падения снаряда из точки B на Землю, которое определяется из уравнения

$$h=\frac{v}{\sqrt{2}}\,t+\frac{gt^2}{2}.$$

Положительное решение этого квадратного (относительно t) уравнения есть

$$t=\frac{-\sqrt{2}\,v+\sqrt{2v^2+8gh}}{2g}.$$

Таким образом,

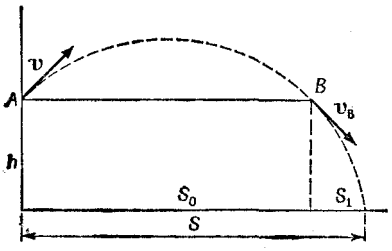
$$S_1=\frac{-v^2+v\sqrt{v^2+4gh}}{2g}\quad\text{и}\quad S=\frac{v^2+v\sqrt{v^2+4gh}}{2g}.$$

Из последнего соотношения выражаем v^2 через S и h:

$$v^2=\frac{gS^2}{S+h}.$$

Следовательно, искомая работа

$$W=\frac{m}{2}\,\frac{gS^2}{S+h}.$$



Подставляя в это выражение массы ядра, диска и копья и дальности их полета, выпишем работу, затраченную спортсменами при рекордных бросках этих снарядов:

$$W_я = 647\ дж, \quad W_д = 588\ дж, \quad W_к = 328\ дж.$$

14.12. При равномерном движении автомобиля по горизонтальному участку дороги вся мощность двигателя P_1 уходит на преодоление сил трения, поэтому $P_1 = F_{тр} v$, откуда $F_{тр} = P_1/v$.

При движении под углом θ к горизонту мощность двигателя расходуется как на преодоление сил тяготения, так и на преодоление сил трения. Следовательно, развиваемая мотором сила тяги F равна

$$F = W \sin\theta + F_{тр}$$

(W — вес автомобиля), а его мощность

$$P = Fv = \left(W \sin\theta + \frac{P_1}{v} \right) v = Wv \sin\theta + P_1.$$

При максимальном угле уклона мотор развивает максимально возможную мощность ($P_{макс} = 85$ *л. с.*).
Таким образом,

$$\sin\theta_{макс} = \frac{P_{макс} - P_1}{Wv} = 0{,}28 \quad \text{и} \quad \theta_{макс} = 16°20'.$$

14.13. Разобьем все сферическое тело на большое число тонких слоев и проследим действие этих слоев на частицу массы m, находящуюся на расстоянии r от центра тела. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 1, стр. 239) было показано, что если масса m находится вне шарового слоя, то потенциальная энергия массы m такова, как если бы вся масса слоя собралась в его центре. Если $r > R$, то масса m является внешней по отношению ко всем слоям сферического тела, следовательно, ее потенциальная энергия W такова, как если бы вся масса тела собралась в его центре, т. е.

$$W = -\frac{GmM}{r}.$$

Потенциал Ψ гравитационного поля массы M связан с энергией W частицы m в этом поле соотношением $W = m\Psi$, а с напряженностью $\mathbf{C}$ этого поля соотношением $\int \mathbf{C}\, d\mathbf{s} = -\Psi$ [см. «Лекции», вып. 1, стр. 254, формула (14.7)].

Поэтому в рассматриваемом случае $\Psi = -GM/r$, а напряженность $C = GM/r^2$ и направлена к центру сферы.

Если $r < R$, масса m окажется внешней по отношению ко всем слоям, радиусы которых меньше r, и внутренней по отношению ко всем остальным слоям.

Поэтому потенциальная энергия массы m состоит из двух членов W_1 и W_2; W_1 — потенциальная энергия по отно-

шению к внешним слоям и равна

$$\frac{1}{r}\left\{GM\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 m\right\}=-\frac{GMmr^2}{R^3};$$

W_2 — потенциальная энергия массы m по отношению к тем слоям, внутри которых она находится.

Рассмотрим отдельно один шаровой слой радиусом r_1 и толщиной dr_1. Потенциальная энергия тела m по отношению к этому слою dW' постоянна и равна

$$dW'=-\frac{Gm\,dm'}{r_1},$$

где $dm'=\frac{4\pi r_1^2 dr_1}{4/3\pi R^3}$ — масса шарового слоя, т. е.

$$dW'=-\frac{3GmM}{R^3}r_1\,dr_1.$$

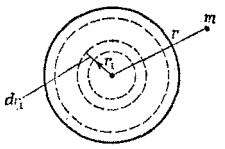
Полную энергию массы m по отношению ко всем внешним слоям найдем, проинтегрировав dW' по всем слоям

$$W_2=\int_r^R dW'=-\frac{3GmM}{R^3}\int_r^R r_1\,dr_1=-\frac{3}{2}\frac{GMm}{R^3}(R^2-r^2).$$

Таким образом, энергия тела m внутри массы M равна

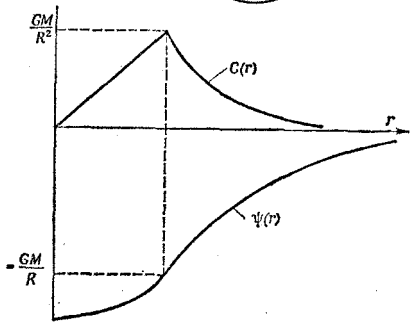
$$W_1+W_2=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}(r^2-3R^2).$$

Отсюда легко получить потенциал и напряженность гравитационного поля внутри тела:



$$\Psi=-\frac{3}{2}\frac{GM}{R}+\frac{GM}{2R^2}r^2,$$

$$C=\frac{GM}{R^3}r^2.$$



14.14. Скорость груза m непосредственно перед падением его на чашку весов, определенная из закона сохранения энергии, равна $v=\sqrt{2gh}$. Скорость v_1 чашки с грузом после удара найдем из закона сохранения количества движения

$$mv=(m+m_1)\,v_1, \quad \text{т. е.} \quad v_1=\frac{m}{m+m_1}\,v,$$

где m_1 — масса чашки.

В наинизшей точке (находящейся на h_1 ниже первоначального положения чашки) полная кинетическая и потенциальная энергия чашки и груза перейдет в потенциальную энергию растянутой пружины:

$$\frac{m+m_1}{2}\,v_1^2+(m_1+m)\,gh_1=\frac{1}{2}\,k\,(h_1+l_0)^2-\frac{1}{2}\,kl_0^2,$$

где k — упругость пружины, а l_0 — ее удлинение перед падением груза на чашку, $l_0=m_1g/k=1{,}6$ *см*.

После несложных преобразований полученное уравнение приводится к виду

$$h_1^2-2h_0h_1-\frac{2m}{m+m_1}\,h_0h=0$$

(здесь введено обозначение $h_0=mg/k=3{,}2$ *см*). Решая это уравнение, находим

$$h_1=h_0+\sqrt{h_0\left(h_0+\frac{2m}{m+m_1}\,h\right)}\approx 10{,}1 \text{ см}.$$

Таким образом, груз m опустится вниз на расстояние $h+h_1=19{,}1$ *см*.

14.15. Пусть к пружине приложена сила F_0. Величина растяжения пружины x_0 определяется из условия $kx_0=F_0$.

Растянем теперь пружину на величину x относительно нового положения равновесия. Сила, приложенная к пружине, равна теперь $k(x+x_0)=kx_0+kx=F_0+kx$. Видно, что добавочная сила, растягивающая пружину на расстояние x из нового положения равновесия, такая же, как если бы пружина растягивалась на x из ненапряженного состояния. Отсюда следует, что жесткость пружины осталась неизменной.

14.16. Если тележка проходит верхнюю точку петли «на пределе», почти не касаясь путевого полотна, сила давления на нее со стороны полотна, естественно, равна нулю. Таким образом, в этой точке на тележку действует только сила тяжести mg. Ускорение тележки в наивысшей точке равно $v^2/R=g$, поэтому ее скорость в этой точке равна $\sqrt{gR}$. Если тележка начала движение с высоты H над петлей без

начальной скорости, то из закона сохранения энергии следует

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \text{ т. е. } H = \frac{1}{2}R.$$

14.17. Пусть тело срывается в точке сферы, радиус-вектор которой образует угол α с вертикалью. В этой точке сила нормального давления тела на сферу равна нулю. Поэтому проекция ускорения силы тяжести на радиус ($g\cos\alpha$) равна центростремительному ускорению.

Таким образом,

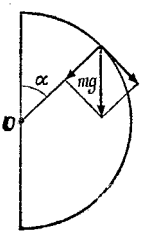
$$\frac{v^2}{R} = g\cos\alpha.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Решая совместно эти два уравнения, получим $\cos\alpha = {}^2/_3$.

Таким образом, тело сорвется в точке, отстоящей от вершины сферы по вертикали на расстоянии ${}^1/_3 R$. По дуге сферы тело пройдет при этом путь $S = \alpha R = 0{,}85\,R$.



14.18. Поместим начало системы координат в фокус эллипса (там же находится масса M), а ось x направим вдоль его большой оси. Полная энергия тела массы m, являющаяся суммой его кинетической и потенциальной энергий $E = mv^2/2 - GMm/r$, сохраняется и E есть просто константа, не зависящая ни от времени, ни от r. Поэтому удобно вычислить ее для таких положений тела m, в которых его радиус-вектор и скорость особенно просто выражаются через параметры эллипса.

Такими положениями являются апогей и перигей, отмеченные точками A и P на рисунке. Для них $r_A = a(1+e)$, $r_P = a(1-e)$. Скорости v_A и v_P перпендикулярны оси x (так как они направлены по касательной к эллипсу). Кроме того, как было показано в задаче **7.7**, в соответствии со вторым законом Кеплера эти скорости связаны между собой соотношением

$$v_A r_A = v_P r_P.$$

Таким образом,

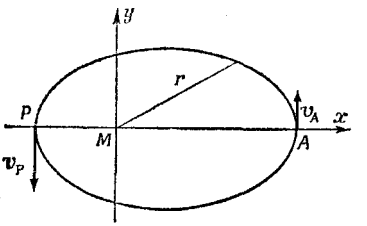
$$E_A=\frac{mv_A^2}{2}-\frac{GMm}{a(1+e)},$$

$$E_P=\frac{mv_P^2}{2}-\frac{GMm}{a(1-e)},$$

$$v_Ar_A=v_Pr_P, \qquad E_A=E_P,$$

откуда следует

$$E=-\frac{GMm}{2a}.$$



14.19. а) Эллипс можно получить из окружности радиусом b, если увеличить масштаб вдоль одной из осей координат в a/b раз. При увеличении масштаба вдоль одной из осей площади фигур увеличиваются во столько же раз, поэтому площадь эллипса равна

$$\pi b^2\frac{a}{b}=\pi ab$$

(a — длина большой полуоси).

б) Вычислим скорость планеты в апогее (см. решение задачи **14.18**):

$$\frac{mv_A^2}{2}-\frac{GMm}{a(1+e)}=-\frac{GMm}{2a},$$

откуда

$$v_A^2=\frac{GM}{a}\cdot\frac{1-e}{1+e}.$$

Действуя далее так же, как в задаче **7.4**, находим

$$T^2=\frac{(2\pi)^2a^3}{GM}.$$

в) Используя результат задачи **14.18**, выразим длину большой полуоси орбиты через полную энергию и массу планеты:

$$a=\frac{GM}{2}\cdot\frac{m}{|E|}.$$

Подставляя ее в формулу для периода, получаем

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 G^2 M^2}{8} \left(\frac{m}{|E|} \right)^3 .$$

Отсюда и следует утверждение, что орбиты всех тел, у которых на единицу массы приходится одинаковая энергия, соответствуют равным периодам обращения (период зависит только от отношения m к $|E|$).

14.20. Уменьшение кинетической энергии корабля по мере его удаления от Земли происходит за счет увеличения его потенциальной энергии, т. е.

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{r} .$$

Здесь v_0 и v — скорости корабля соответственно около Земли ($R = 6500$ *км*) и на расстоянии $r \approx 10^6$ *км*.

Если бы корабль покинул Землю с первой космической скоростью v_1, то на очень больших расстояниях от Земли он двигался бы с очень маленькой скоростью, т. е.

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{GM}{R} .$$

Таким образом,

$$v^2 = v_0^2 - v_1^2 + 2\frac{GM}{r} = v_0^2 - v_1^2 + v_1^2 \frac{R}{r} \approx 23{,}8 \ (км/сек)^2,$$

т. е.

$$v \approx 4{,}88 \ км/сек.$$

14.21. Обозначим через v скорость космического корабля относительно Солнца в момент прекращения работы двигателей, а через v' — его скорость «на выходе». Потенциальная энергия корабля обусловлена притяжением Земли и Солнца. Когда корабль находится около Земли, его потенциальная энергия равна

$$-\frac{GMm}{R} - \frac{GM_\odot m}{R_1} ,$$

где m, M и $M_\odot$ — массы соответственно корабля, Земли и Солнца; R — радиус Земли; R_1 — радиус земной орбиты, которую для простоты будем считать круговой.

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R} + \frac{GM_\odot}{R_1} + \frac{v'^2}{2} .$$

Заметим, что

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2} v_1^2 ,$$

где v_1 — вторая космическая скорость (см. предыдущую за-

дачу), а из условия стационарности земной орбиты следует

$$v_0^2 = \frac{GM_\odot}{R_1},$$

где v_0 — орбитальная скорость Земли.

Таким образом, $v^2 = v_1^2 + 2v_0^2 + v'^2$, откуда $v = 47$ *км/сек*. Скорость корабля относительно Земли будет минимальной, когда он запущен в направлении орбитального движения Земли. Тогда

$$v_{\text{мин}} = v - v_0 = 17 \text{ км/сек}.$$

14.22. Скорость корабля относительно Земли максимальна, если корабль запущен по касательной к орбите Земли в направлении, противоположном движению Земли. В этом случае $v_{\text{макс}} = v + v_0 = 77$ *км/сек*.

14.23. Период обращения планеты вокруг Солнца зависит только от величины большой полуоси эллипса орбиты. Из того, что периоды обращения Земли и космического корабля совпадают, следует равенство больших полуосей орбит Земли и корабля.

Величиной большой полуоси полностью определяется и другая характеристика планеты — *полная энергия на единицу массы* (см. задачу **14.18**). Поэтому, когда Земля и космический корабль находятся на одинаковом расстоянии от Солнца (и, следовательно, имеют по отношению к Солнцу одинаковую потенциальную энергию на единицу массы), их скорости относительно Солнца одинаковы по величине.

Заметим, что мы не учли в этих рассуждениях притяжения корабля Землей. Будем считать для начала, что корабль берет старт не с Земли, а из некоторой периферийной точки «околоземного пространства», где потенциал тяготения Солнца начинает превышать потенциал тяготения Земли. Оценим, насколько такая точка удалена от Земли. Потенциал Солнца ($-GM_\odot/R_1$) и потенциал Земли ($-GM/R$) сравниваются, если $R = R_1 M/M_\odot$. Так как $M/M_\odot \approx 2{,}5 \cdot 10^{-5}$, если удалиться от Земли, скажем, на десятитысячную радиуса земной орбиты, потенциал Солнца будет превышать потенциал Земли (а «с точки зрения Солнца» Земля и корабль будут по-прежнему в одном и том же месте!).

Существуют четыре варианта запуска. Два из них изображены на рисунке (*а* и *б*). Рассчитаем вариант *а* (как более экономный). Так как корабль в перигее подходит очень близко к Солнцу, его скорость при пересечении земной орбиты (которую здесь и далее считаем круговой) практически параллельна линии, проходящей через фокусы орбиты корабля. Найдем угол α. Из прямоугольного треугольника OAK (на рисунке *в*) $\cos\alpha = (a - r_p)/a = 0{,}99$ (a — большая полуось орбиты корабля, равная радиусу орбиты Земли). Из треугольника ABC находим $BC = v'$ — скорость запуска корабля из периферии околоземного пространства. Учитывая,

что $AB=AC=v_0$ (v_0—орбитальная скорость Земли), имеем

$$v'^2=2v_0^2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=2v_0^2\,(1-\sin\alpha).$$

Вспоминая, что $v_0=30$ *км/сек*, находим

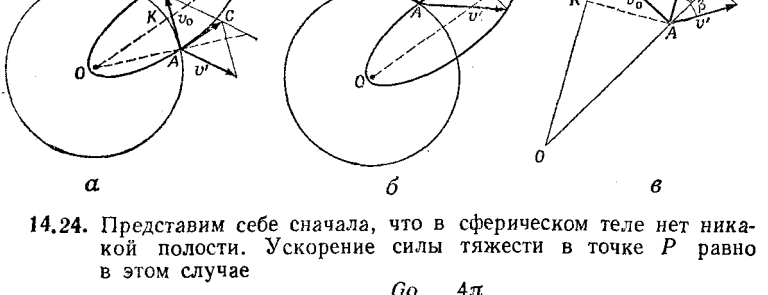
$$v'=39{,}2\ км/сек.$$

Угол β, под которым запущен корабль относительно линии Земля—Солнце, найдем из треугольника ABD (замечая, что $\angle ABC=\beta+\alpha$):

$$\beta=\frac{90-\alpha}{2}=41°.$$

Учтем теперь, что корабль стартует с поверхности Земли. Вспоминая задачу **14.21**, находим, что истинная скорость запуска $v=\sqrt{v'^2+v_1^2}$, где v_1—вторая космическая скорость.

Итак, $v\approx 42$ *км/сек*.



а *б* *в*

14.24. Представим себе сначала, что в сферическом теле нет никакой полости. Ускорение силы тяжести в точке P равно в этом случае

$$a_0=\frac{G\rho}{(R+x)^2}\,\frac{4\pi}{3}\,R^3.$$

Выделим теперь внутри тела часть вещества, занимающую тот же объем и положение, что и фигурирующая в условии полость. Согласно принципу суперпозиции, ускорение в точке P можно представить в виде суммы двух членов: ускорения, обусловленного веществом, занимающим выделенный объем

$$a'=\frac{G\rho}{(x+{}^5/_4R)^2}\,\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{4}\right)^3,$$

и интересующим нас ускорением a, связанным с притяжением тела с полостью. Так как все три ускорения направлены вдоль одной прямой PC, то

$$a=a_0-a'=\frac{G\rho}{(x+R)^2}\,\frac{4\pi}{3}\,R^3\left[1-\left(8+\frac{2R}{x+R}\right)^{-2}\right].$$

2

ПРОСТРАНСТВО • ВРЕМЯ • ДВИЖЕНИЕ

К главе 15. ***Специальная теория относительности***

15.1. Так как уравнения, связывающие x', y', z', t' с x, y, z, t, линейны, выразить нештрихованные координаты через штрихованные не представляет труда. Имеем

$$x=\gamma\,(x'+\beta ct'),\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}\,x'\right),$$

где введены обозначения $\beta=u/c$, $\gamma=(\sqrt{1-\beta^2})^{-1}$.

Эти формулы можно было получить и не решая уравнений, а просто заменив в исходных преобразованиях Лоренца u на $-u$ и поменяв местами координаты x, y, z, t и x', y', z', t' (так как система x, y, z движется относительно x', y', z' со скоростью $-u$).

15.2. Рассмотрим работу «световых часов» в неподвижной и движущейся системах координат. Для наблюдателя, который движется вместе с часами, луч света от одного конца стержня до другого и обратно проходит за промежуток времени $t=2L/c$, где L — длина стержня.

Как же представляется работа этих часов для неподвижного наблюдателя? Прежде всего ему кажется, что длина стержня не L, а $L'=L\sqrt{1-u^2/c^2}$ (u — скорость движения часов). Если время движения светового сигнала от одного конца стержня до другого в направлении движения стержня равно t_1, то за это время сам прибор сместился на расстояние ut_1, поэтому свет прошел расстояние не L', а $L'+ut_1$, так что $ct_1=L'+ut_1$ и $t_1=L'/(c-u)$. Для прохождения света от одного конца стержня до другого против движения самого стержня требуется время t_2, причем $ct_2=L'-ut_2$ и $t_2=L'/(c+u)$. Общее время движения света равно

$$t_1+t_2=\frac{2L'}{c\,(1-u^2/c^2)}=\frac{2L}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Таким образом, свету понадобится большее время, чтобы пройти из конца в конец движущийся стержень, нежели неподвижный стержень, т. е. движущиеся часы будут отставать по сравнению с неподвижными. Обратим внимание, что это отставание точно такое же, как и в случае, когда

часы ориентированы поперек движения (см. § 4 гл. 15 «Лекций», вып. 2, стр. 12).

15.3. С точки зрения земного наблюдателя время жизни мюона такое, что за это время, двигаясь со скоростью u, он успевает пройти путь l, поэтому

$$t=\frac{l}{u}=1{,}67\cdot 10^{-5}\ сек.$$

Время жизни τ мезона в его собственной системе координат есть

$$\tau=t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=2{,}33\cdot 10^{-6}\ сек;$$

пройденный же им путь (вернее, толщина слоя «прошедшей» мимо него атмосферы) равен

$$D=\tau u=l\sqrt{1-u^2/c^2}=0{,}7\ км.$$

15.4. а) Для производства энергии E необходимо превратить в энергию вещество массой $m=E/c^2$. В нашем случае $m=86\ кг$.

б) В каждом акте синтеза двух атомов дейтерия в гелий выделяется энергия

$$\varepsilon=(2M_{H^2}-M_{He^4})c^2=2{,}42\cdot 10^{-12}\ дж$$
$$(1\ а.е.м.=1{,}66\cdot 10^{-24}\ г),$$

т. е. в энергию превращается 0,0155 *а.е.м.* Но как раз два атома дейтерия входят в молекулу тяжелой воды, масса которой равна 20,0294 *а.е.м.*, поэтому можно сказать, что только $0{,}77\cdot 10^{-3}$ часть тяжелой воды превращается в энергию. Отсюда следует, что годовое потребление тяжелой воды равно $M=(86/0{,}77)\cdot 10^3\ кг$, а ее ежесекундный расход $M/\tau=3{,}5\ г/сек$ (τ — число секунд в году).

15.5. Если W — мощность солнечного излучения, поглощаемая в земной атмосфере, то энергия, выделяемая на Солнце в 1 *сек*, равна $E=4\pi D^2W$, где D — расстояние от Земли до Солнца. Следовательно, выделяемой в единицу времени энергии соответствует масса $m=E/c^2$. Реакция образования гелия из обычного водорода заключается в том, что четыре атома водорода ($m_H=1{,}0081\ а.е.м.$) объединяются в атом гелия ($m_{He}=4{,}0039\ а.е.м.$). Хотя при этом образуются две частицы с массой покоя, отличной от нуля, они в дальнейшем также превращаются в излучение (позитроны, встречаясь с электронами, «пропадают», образуя γ-кванты). Поэтому можно утверждать, что часть массы водорода

$$k=\frac{4m_H-m_{He}}{4m_H}=7{,}1\cdot 10^{-3}$$

отвечает энергии, выделившейся в результате реакции.

Таким образом, в 1 *сек* на Солнце «сгорает» масса водорода

$$M=\frac{m}{k}=\frac{4\pi D^2 W}{kc^2}=6{,}25\cdot 10^8\ m,$$

что составляет примерно $3\cdot 10^{-17}\%$ массы Солнца.

15.6. Сила и импульс в релятивистской механике связаны между собой таким же образом, как и в ньютоновской, $F=d(mv)/dt$, только масса в релятивистском случае не постоянна, а выражается через массу покоя как $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, т. е. зависит от скорости движения частицы. Итак,

$$F=\frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_0\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}+\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\right]\frac{dv}{dt}.$$

Дифференцируя функцию $x(t)$, находим

$$v=\frac{c^2 t}{\sqrt{b^2+c^2t^2}}\quad\text{и}\quad\frac{dv}{dt}=\frac{c^2b^2}{(b^2+c^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, действующая на частицу сила $F=m_0c^2/b$ постоянна.

15.7. а) Единица длины *световой год* — это то расстояние, которое луч света проходит за один год; она равна $c\tau$, где $c=3\cdot 10^8$ *м/сек* — скорость света, а $\tau=3{,}15\cdot 10^7$ — число секунд в году. Поэтому

$$g=9{,}8\cdot\frac{\tau}{c}\ \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2}=1{,}03\ \frac{\text{свет. год}}{\text{год}^2}.$$

б) Сила тяжести, которую чувствуют космонавты, — это сила, прижимающая их к кораблю. Корабль, конечно, действует на них с такой же силой. Согласно условию задачи, эти силы постоянны и, таким образом, движение всех предметов внутри корабля — это движение под действием постоянной силы. Такое движение изучалось в предыдущей задаче. Поэтому, чтобы сразу использовать результаты этой задачи, представим силу в нашем случае в виде $F=m_0c^2/b$. Константу b определим из условия $m_0c^2/b=m_0g_0$. Вычисления будем проводить в такой системе единиц, где расстояния измеряются световыми годами, а время — годами. В этой системе единиц скорость света равна 1 свет. год/год. Результаты вычислений дают:

$$b=\frac{c^2}{g}=0{,}97\ \text{свет. года},$$

скорость корабля в конце 5-го года движения

$$v=\frac{c^2 t}{\sqrt{b^2+c^2t^2}}=0{,}98\ c,$$

пройденное им расстояние

$$x=\sqrt{b^2+c^2t^2}-b^2=4{,}15 \text{ свет. года.}$$

К главе 16. Релятивистская энергия и релятивистский импульс

16.1. Рассмотрим систему координат x, y, z, t и штрихованную систему x', y', z', t', движущуюся относительно исходной со скоростью u в положительном направлении оси x. Формулы задачи **15.1** для связи нештрихованных координат со штрихованными запишем в виде

$$x=\gamma(x'+\beta ct'),\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right),$$

где $\beta=u/c$, $\gamma^{-1}=\sqrt{1-\beta^2}$. Беря дифференциалы от правых и левых частей этих соотношений, получаем преобразования Лоренца в дифференциальной форме:

$$dx=\gamma(dx'+\beta c\,dt'),\quad dy=dy',\quad dz=dz',$$
$$dt=\gamma\left(dt'+\frac{\beta}{c}dx'\right).$$

Разделив dx на dt, получим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+\beta c\,dt'}{dt'+(\beta/c)\,dx'}=\frac{(dx'/dt')+\beta c}{1+(\beta/c)\,(dx'/dt')}.$$

Но $dx/dt=v_x$—скорость в неподвижной системе координат, а $dx'/dt'=v_{x'}$—скорость в движущейся системе координат, поэтому

$$v_x=\frac{v_{x'}+u}{1+uv_{x'}/c^2}.$$

Аналогично

$$v_y=\frac{v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv_{x'}/c^2},\quad v_z=\frac{v_{z'}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv_{x'}/c^2}.$$

Если $v_{x'}=0$, то получаем формулу (16.7), приведенную в «Лекциях» (вып. 2, стр. 30) для v_y.

16.2. Чтобы найти величину скорости в движущейся системе координат, выразим дифференциалы штрихованных координат через дифференциалы нештрихованных координат: $dx'=\gamma(dx-\beta c\,dt)$, $dy'=dy$, $dz'=dz$, $dt'=\gamma[dt-(\beta/c)\,dx]$. Разделив dx' на dt', найдем скорость в подвижной системе координат

$$v_{x'}=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}.$$

(Конечно, эту формулу можно написать сразу, изменив

только знак скорости u в соответствующей формуле предыдущей задачи.)

Вычислим дифференциал $dv_{x'}$:

$$dv_{x'} = \frac{(1-u^2/c^2)}{(1-uv_x/c^2)}\,dv_x.$$

Разделив $dv_{x'}$ на dt' и учитывая, что $a_{x'} = dv_{x'}/dt'$, $a = dv_x/dt$, получим

$$a_{x'} = \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv_x/c^2)^3}\,a_x.$$

16.3. Из треугольника скоростей (см. «Лекции», вып. 2, стр. 34) следует, что скорости v, w и u связаны между собой соотношением $v^2 = u^2 + w^2\,(1-u^2/c^2)$, поэтому

$$m_w = \frac{m_0}{\sqrt{1-w^2/c^2}}, \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-[u^2+w^2\,(1-u^2/c^2)]/c^2}}.$$

Чтобы доказать приведенную в тексте формулу, остается только внимательно проделать следующие выкладки:

$$\frac{m_w}{m_v} = \frac{\sqrt{1-(u^2c^2+w^2c^2-w^2u^2)/c^4}}{\sqrt{1-w^2/c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2\,(c^2-w^2)-u^2\,(c^2-w^2)}{c^2\,(c^2-w^2)}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

16.4. Рассмотрим неупругое столкновение частиц в такой системе координат, в которой они налетали бы друг на друга с одинаковой скоростью w. Очевидно, эта система координат сама движется с той же скоростью w в направлении движущейся частицы. Так как в неподвижной системе скорость налетающей частицы равна $^4/_5\,c$, то

$$\frac{2w}{1+w^2/c^2} = \frac{4}{5}\,c.$$

Мы могли бы решить это уравнение относительно w и убедиться, что $w = {}^1/_2\,c$, но мы не будем этого делать, так как в § 3 гл. 16 «Лекций» (вып. 2, стр. 30) было показано, что в результате сложения двух скоростей по $^1/_2\,c$ каждая получаем скорость, равную $^4/_5\,c$. Поэтому $w = {}^1/_2\,c$.

В выбранной таким образом движущейся системе координат образовавшаяся составная частица неподвижна, а ее масса есть $M_0 = 2m_w = 4m_0/\sqrt{3}$. Таким образом, составная частица с массой покоя M_0 движется в исходной системе координат со скоростью $^1/_2 c$.

16.5. В системе координат, в которой протоны ускорителя и мишени налетают друг на друга с одинаковыми скоростями, скорость протонов w определяется из следующего условия:

$2m_p/\sqrt{1-w^2/c^2}=4m_p$, откуда $w=(\sqrt{3}/2)\,c$. Скорость протонов в лабораторной системе координат (в этой системе частицы мишени покоятся) равна

$$v=\frac{2w}{1-w^2/c^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}c.$$

Кинетическая энергия налетающих протонов есть разность между их полной энергией и энергией покоя, т. е.

$$E_{\text{кин}}=(m_{pv}-m_p)\,c^2=6m_pc^2.$$

К главе 17. ***Пространство-время***

17.1. Из соотношения между энергией и импульсом $E^2-p^2=m_p^2$ (в системе единиц, где $c=1$) следует, что $E\approx p$, так как E и p намного больше m_p. Из определения же релятивистского импульса частицы находим

$$v^2=\frac{1}{1+(m_p/p)^2}\approx 1-\left(\frac{m_p}{p}\right)^2=1-10^{-20}$$

(здесь учтено, что $m_p/p\ll 1$ и использована приближенная формула $1/(1+x)\approx 1-x$). Таким образом, скорость протона такой большой энергии отличается от скорости света только в 20-м знаке! Поэтому с точки зрения земного наблюдателя такой протон пересечет Галактику по диаметру за 10^5 лет. С точки зрения протона такое путешествие займет всего

$$\tau=\frac{10^5\text{ лет}}{\sqrt{1-v^2}}=10^{-5}\text{ лет}\approx 315\text{ сек}\approx 5\text{ мин}.$$

17.2. Здесь нужны только вычисления. Масса покоя электрона $m_e=9{,}11\cdot 10^{-28}$ *г*, $c=3\cdot 10^8$ *м/сек*, поэтому $m_ec^2=81{,}99\cdot 10^{-15}$ *дж*. Посмотрев в справочник, можно убедиться, что 1 *эв* $=1{,}6\cdot 10^{-19}$ *дж*, так что

$$m_ec^2=51{,}1\cdot 10^4\text{ эв}=0{,}511\text{ Мэв}.$$

17.3. Из закона сохранения импульса следует, что трехмерные импульсы μ-мезона $\mathbf{p}_\mu$ и нейтрино $\mathbf{p}_\nu$ равны и направлены в противоположные стороны. Из закона сохранения энергии вытекает, что сумма полной энергии мезона и нейтрино равна энергии покоя π-мезона, т. е. $E_\nu+E_\mu=m_\pi$ (в системе единиц, где $c=1$).

Так как $E_\nu=p_\nu$ (масса покоя нейтрино равна нулю) и $E_\mu=\sqrt{p_\mu^2+m_\mu^2}$, то $\sqrt{p_\mu^2+m_\mu^2}+p_\mu=m_\pi$. Отсюда

$$p_\mu=\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{2m_\pi}=29{,}8\text{ Мэв}.$$

Кинетическую энергию μ-мезона найдем как разность его

полной энергии и энергии покоя:

$$T=\sqrt{p_\mu^2+m_\mu^2}-m_\mu=4{,}1\ \textit{Мэв}.$$

Кинетическая энергия нейтрино равна его полной энергии и равна импульсу.

17.4. В задаче **12.14** было показано, что заряженная частица в магнитном поле B движется по окружности радиусом R, причем $R=mv/qB$. Этот результат сохраняется и в релятивистском случае, поскольку при таком движении меняется только направление скорости, а не ее величина.

Так как $mv=p$, то $p=qBR$. Здесь q измеряется в кулонах, B — в *вебер/м*^{2}, R — в метрах, а p — в *кг·м/сек*. Учитывая, что 1 *вебер/м*$^2=10^4$ *гс*, заряд частицы равен $q=Zq_e$, а $q_e=1{,}6\cdot10^{-19}$ *к* и 1 *кг·м/сек* $=(1{,}6/c)\cdot10^{-25}$ *Мэв*, получаем $p=3\cdot10^{-2}\ ZBR$. В этой формуле единицы измерения физических величин следующие: p — *Мэв*, B — гауссы, R — метры, Z — безразмерная величина.

17.5. а) Радиус магнита циклотрона должен быть не меньше радиуса кривизны траектории частицы предельной энергии в данном магнитном поле. Используя результаты предыдущей задачи, имеем $R=p\cdot10^2/3ZB$. Импульс релятивистской частицы равен $\sqrt{E^2-m_0^2}$, а ее полная энергия E есть сумма кинетической энергии T и энергия покоя $E=T+m_0$, поэтому

$$p=\sqrt{T(T+2m_0)}\ \text{ и }\ R=\frac{\sqrt{T(T+2m_0)}}{3ZB}\cdot10^2\ \textit{м}=1{,}85\ \textit{м}.$$

б) Частота ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой обращения частицы (см. задачу **12.5**), т. е.

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi m}{3\cdot10^{-2}ZB}.$$

В этом выражении m измеряется в *Мэв*, B — в гауссах, а время — в метрах. Таким образом, частота ускоряющего поля в конце ускорения равна

$$\nu=\frac{3\cdot10^{-2}ZB}{2\pi m}\ c\ \textit{сек}^{-1}.$$

Но $m=m_0/\sqrt{1-v^2}$, а

$$v=\frac{p}{E}=\frac{\sqrt{T(T+2m_0)}}{T+m_0}=\frac{1}{2},$$

так что $m=2m_0/\sqrt{3}$ и, следовательно,

$$\nu=0{,}13\cdot10^8\ \textit{сек}^{-1}.$$

в) В начале ускорения частиц частота электрического поля должна быть

$$\nu_0 = \frac{3\cdot 10^{-2} ZB}{2\pi m_0} c = 0{,}15\cdot 10^8 \text{ сек}^{-1},$$

поэтому изменение частоты в процессе ускорения равно

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 12\%.$$

К главе 18. ***Двумерные вращения***

18.1. а) По определению момента силы $\tau = xF_y - yF_x = 140$ *нм*. Но момент мы можем представить и в виде

$$\tau = Fp = F_t \cdot r,$$

где p — плечо силы, а F_t — тангенциальная (перпендикулярная к $\mathbf{r}$) составляющая силы. Из этих двух равенств находим

б) $$p = \frac{\tau}{F} = 2{,}8 \text{ м}.$$

в) $$F_t = \frac{\tau}{r} = \frac{\tau}{\sqrt{x^2+y^2}} = 14 \text{ ньютон}.$$

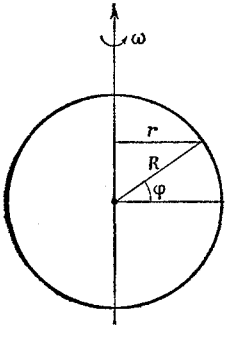
18.2. За счет суточного вращения Земли каждая точка земной поверхности приобретает зависящую от широты φ скорость $v = \omega r = \omega R\cos\varphi$ (см. рисунок), где ω — угловая скорости вращения Земли.

В Лос-Анджелесе ($\varphi_0 = 34°$, см. географическую карту) $v = R\omega\cos\varphi_0$. Широту искомой точки земной поверхности найдем из уравнения

$$R\omega\cos\varphi_0 - R\omega\cos\varphi = 200,$$

откуда

$$\cos\varphi = 0{,}395; \quad \varphi = 66°40'.$$



18.3. Найдем сначала проекции силы на оси координат (ось y направим вверх по прямой OP, а ось x—направо по AB). Так как в равновесии сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, имеем

$$F_x+50-\frac{50}{\sqrt{2}}=0,$$

$$F_y+50-\frac{50}{\sqrt{2}}=0,$$

т. е.

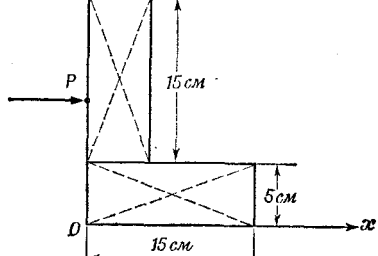
$$F_x=F_y=-50\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=-14{,}6\ н.$$

Учтем теперь, что полный момент силы (будем вычислять его относительно точки O) также должен равняться нулю. Прежде всего ясно, что точка приложения силы F должна лежать слева от точки O; необходимо, чтобы сила F вращала пластинку против часовой стрелки. Приравнивая нулю полный момент сил, найдем l—расстояние от точки O до точки приложения силы

$$F_y\cdot l=50\cdot 0{,}1 \quad \text{и} \quad l=0{,}34\ м.$$

Итак, удерживающая сила величиной $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\approx$ $\approx 20{,}5$ *ньютон* приложена левее точки O на 0,34 *м* и направлена параллельно силе, приложенной в точке O.

18.4. Уголок не вращается после удара в том случае, если удар произведен по линии, проходящей через его центр масс (момент количества движения относительно ц. м., переданный при ударе, в этом случае равен нулю). Поэтому $OP=y_0$, где y_0—ордината центра масс. Так как толщина горизонтальной и вертикальной сторон уголка постоянна, центры



масс сторон уголка совпадают с их геометрическими центрами. Как видно из рисунка, ордината центра масс горизонтальной стороны $y_1 = 2{,}5$ *см*, а вертикальной $y_2 = 12{,}5$ *см*. Ординату центра масс всего уголка найдем по формуле

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + y_2}{2} = 7{,}5 \text{ см}.$$

18.5. Условия равновесия всей фермы в целом таковы:

$$F_1 + F_2 = W \quad \text{и} \quad F_1 \cdot 2l - F_2 l = 0$$

(l — длина стержня).
Отсюда

$$F_1 = \frac{W}{3} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{2W}{3}.$$

Стержень GF испытывает сжатие, а EG — растяжение. Их нагрузки равны соответственно T_1 и T_2. Но $F_2/T_1 = \cos 30°$, откуда

$$T_1 = \frac{4W}{3\sqrt{3}},$$

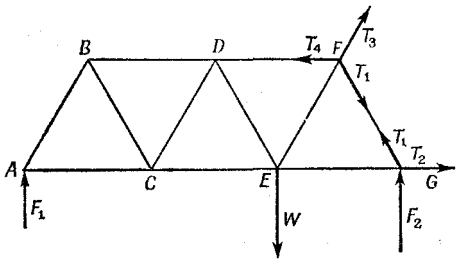
Из равновесия в узле F имеем $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 = 0$ ($\mathbf{T}_3$ и $\mathbf{T}_4$ — напряжения в стержнях EF и DF). Проектируя это равенство на вертикальную ось, получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} T_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad T_1 = T_3.$$

Приравнивая затем нулю сумму проекций на горизонтальную ось, находим

$$T_4 = 2T_1 \cos 60° = \frac{4W}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, стержень FD сжат, его напряжение $4W/3\sqrt{3}$.



18.6. а) Момент инерции стержня в системе координат, ось x которой направлена вдоль стержня, а начало совпадает с концом стержня, равен

$$I=\int_0^L x^2\,dm=\rho\int_0^L x^2\,dx,$$

где ρ — его линейная плотность ($\rho=M/L$), так что

$$I=\frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx=\frac{ML^2}{3}.$$

б) Если ось проходит не через конец стержня, а через его середину, то интегрирование следует проводить в пределах не от 0 до L, а от $-L/2$ до $L/2$:

$$I=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx=\frac{ML^2}{12}.$$

Этот же результат можно получить из теоремы о параллельном переносе оси, относительно которой вычисляется момент инерции: $I=I_{\text{ц. м.}}+md^2$ (d — расстояние между осями, а $I_{\text{ц. м.}}$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс). Искомый момент инерции есть как раз $I_{\text{ц. м.}}$, так как центр масс стержня находится на середине L:

$$I_{\text{ц. м.}}=I-Md^2=\frac{ML^2}{3}-\frac{ML^2}{4}=\frac{ML^2}{12}.$$

в) Если цилиндр тонкостенный, то вся его масса m находится на расстоянии r от оси вращения, поэтому, согласно определению момента инерции, $I=mr^2$.

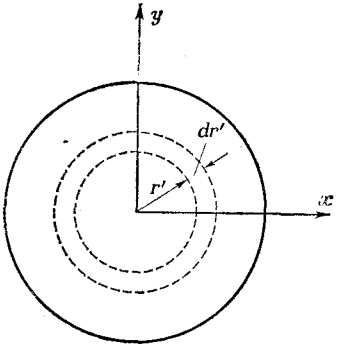
г) Для вычисления момента инерции сплошного цилиндра разобьем его на большое число тонкостенных полых цилиндров. На рисунке показан один такой цилиндр радиусом r' и толщиной dr'. Момент инерции этого цилиндра [см. пункт (в)] $dI=r'^2dm'$, где

$$dm'=\frac{m}{\pi r^2H}2\pi r'H\,dr'=\frac{2m}{r^2}\,r'dr'$$

(m — масса цилиндра, H — высота цилиндра).

Таким образом, момент инерции сплошного цилиндра вычисляется так:

$$I=\int_0^r dI=\frac{2m}{r^2}\int_0^r r'^3\,dr'=\frac{mr^2}{2}.$$



18.7. Когда цилиндр поворачивается на угол φ, груз опускается на расстояние $r\varphi$, поэтому ускорение груза a связано с угловым ускорением цилиндра $d^2\varphi/dt^2$:

$$a=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вращение цилиндра описывается уравнением

$$\frac{dL}{dt}=\tau$$

или

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=Tr.$$

Здесь $L=I\,d\varphi/dt$, I — момент инерции цилиндра, T — натяжение нити. Учитывая, что $I=Mr^2/2$, получаем

$$\frac{Ma}{2}=T.$$

Складывая это уравнение с уравнением движения груза

$$ma=mg-T,$$

находим

$$a=\frac{mg}{m+M/2}.$$

18.8. а) Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент количества движения груза сохраняется, т. е. $mr_1v_1 = mr_2v_2$. Отсюда скорость груза в конечном состоянии

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1.$$

б) Работа внешней силы равна изменению кинетической энергии груза, поэтому

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_2^2}.$$

в) Пусть F — сила, которую необходимо приложить к нити, чтобы удержать шарик на расстоянии r. При виртуальном перемещении dr эта сила выполняет работу [см. пункт (б)]

$$F\,dr = \frac{mv^2}{2}\left[\frac{(r+dr)^2}{r^2} - 1\right] = \frac{mv^2}{r}\,dr.$$

[Мы пренебрегли членом $\sim (dr)^2$.] Сокращая dr, получаем $F = mv^2/r$, что, конечно, и следовало ожидать.

18.9. Момент количества движения планеты является суммой двух членов $L_1 + L_2$; L_1 связан с движением планеты по орбите ($L_1 = mvR$), а L_2 — с ее вращением вокруг своей оси ($L_2 = I\omega$). Учитывая, что для движения по круговой орбите $v^2/R = GM/R^2$ (считаем, что центральное тело очень тяжелое), получаем

$$L_1 = m\sqrt{GMR}.$$

Величина L_2 для всех реальных случаев оказывается гораздо меньше L_1.

Рассмотрим теперь систему Земля — Луна. В момент количества движения этой системы дают вклад следующие движения: движение Луны относительно ц. м. системы Земля — Луна, вращение Луны вокруг своей оси, движение Земли относительно ц. м. системы, вращение Земли вокруг своей оси.

Вспомним теперь, что период вращения Луны вокруг своей оси равен периоду ее движения по орбите. Поэтому

$$\frac{L_{1Л}}{L_{2Л}} = \frac{m_Л R^2}{I_Л} \sim \frac{R^2}{r_Л^2},$$

где R — радиус лунной орбиты, а $r_Л$ — радиус Луны. Таким образом, $L_{1Л} \gg L_{2Л}$, и этой последней величиной можно пренебречь. Далее, поскольку период обращения Земли и Луны вокруг ц. м. системы одинаков, а расстояние до ц. м. обратно пропорционально массам

$$L_{1З} = \frac{m_Л}{m_З} L_{1Л} \sim 5 \cdot 10^{-3} L_{1Л},$$

т. е. вклад орбитального движения Земли в момент количества движения также очень мал. Оценим теперь вклад вращения Земли вокруг своей оси. Имеем

$$L_{2З} = I_З \omega_З = \frac{2}{5} m_З^2 r_З^2 \omega_З.$$

Учитывая, что $m_З \sim 80 m_Л$, $r_З \sim 6 r_Л$, $\omega_Л = 28\omega_З$, убеждаемся, что

$$\frac{L_{2З}}{L_{1Л}} \sim 0{,}1.$$

Следовательно, момент количества движения системы Земля — Луна равен приближенно

$$L = L_{1Л} + L_{2З} = m_Л \sqrt{G m_З R} + I_З \omega_З.$$

Из-за приливов, тормозящих вращение Земли, длина суток медленно увеличивается, т. е. уменьшается угловая скорость вращения, а с ней и момент количества движения Земли $L_{2З}$. Так как полный момент количества движения системы Луна — Земля должен оставаться постоянным, момент количества движения Луны $L_{1Л}$ должен медленно возрастать, компенсируя уменьшение $L_{2З}$.

Увеличение $L_{1Л}$ (см. выражение для этой величины) возможно только в случае увеличения расстояния между Луной и Землей.

Энергия системы Земля — Луна состоит из кинетической и потенциальной энергий Луны и кинетической энергии вращения Земли (мы опять пренебрегли кинетической энергией вращения Луны и движения Земли по орбите как малыми величинами).

Как было показано в задаче **14.18** (стр. 200), полная энергия Луны равна

$$-\frac{G m_З m_Л}{2R},$$

а энергия вращения Земли вокруг своей оси

$$\frac{1}{2} I_З \omega_З^2 = 0{,}2 m_З r_З^2 \omega_З^2.$$

Полная энергия рассматриваемой системы

$$0{,}2 m_З r_З^2 \omega_З^2 - \frac{G m_З m_Л}{2R}$$

положительна, в чем можно убедиться, подставив вместо букв соответствующие числа. В предельном случае (далеком будущем), когда Земля полностью прекратит вращаться вокруг своей оси ($\omega_З = 0$), полная энергия системы Земля —

Луна станет отрицательной ($-Gm_3m_Л/2R_0$), R_0—расстояние между Луной и Землей при $\omega_3=0$; это означает, что полная механическая энергия системы Земля—Луна уменьшается по мере удаления Луны от Земли. Это и понятно, ведь часть механической энергии вследствие приливного трения превращается в теплоту.

18.10. Когда подвешиваются грузы W_1 и W_2, силы, действующие в шарнирах, изменяются. Нас будут интересовать только эти добавки. Силы, которые действовали в шарнирах раньше, как раз такие, чтобы рама с грузом W_c оставалась в равновесии, поэтому, рассматривая только добавки, мы можем не учитывать ни веса рамы, ни груза W_c. Выясним условие равновесия планки AB. Суммарный момент силы, действующий на эту планку,

$$F_A\,AP-F_BPB=0.$$

Здесь F_A и F_B—вертикальные составляющие силы в шарнирах A и B (момент горизонтальных составляющих сил равен нулю). Аналогично,

$$F_{A'}A'P'-F_{B'}P'B'=0.$$

Складывая эти уравнения, находим

$$(F_A+F_{A'})\,AP=(F_B+F_{B'})\,PB.$$

Из условия равновесия углов ACB и BGH

$$F_A+F_{A'}=W_1,$$
$$F_B+F_{B'}=W_2,$$

откуда

$$W_2=\frac{AP}{PB}\,W_1=0{,}25\ кГ.$$

18.11. По условию задачи машина должна отключаться, когда AC достигнет значения $\sqrt{2}\cdot 30$ *см*, т. е. когда угол $\alpha=45°$. В системе координат, вращающейся вместе с регулятором, массы M находятся в равновесии. На каждую из них действует центробежная сила F и реакции стержней T_1 и T_2 (направление сил показано на рисунке).

Используем условие равновесия массы M. Из равенства нулю суммы горизонтальных составляющих сил получаем

$$F=\frac{T_1}{\sqrt{2}}+\frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Из равенства нулю суммы вертикальных составляющих сил:

$$Mg=\frac{T_1}{\sqrt{2}}-\frac{T_2}{\sqrt{2}}.$$

Наконец, условие равновесия массы C записывается как

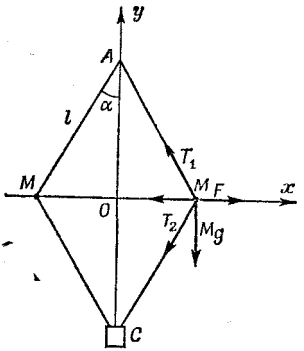
$$mg = \sqrt{2}T_2.$$

Из этих трех уравнений находим

$$F = (M+m)g \quad \text{или} \quad 4\pi^2 n^2 \frac{l}{\sqrt{2}} M = (M+m)g.$$

Таким образом,

$$M = \frac{g}{\dfrac{4\pi^2 n^2 l}{\sqrt{2}} - g} m \approx 1{,}7 \text{ кг}.$$



18.12. Мощность, необходимая для вращения вала, равна мощности сил трения, т. е.

$$P = F_{\text{тр}} v,$$

где v — скорость масс m, $v = \omega r$.

Сила трения каждой колодки равна произведению коэффициента трения на величину силы, прижимающей колодку к цилиндру, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu m \omega^2 r.$$

Таким образом,

$$P = \mu m \omega^3 r^2.$$

18.13. Поместим начало системы координат в середину основания нижнего бруска. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаты центров масс соответствующих брусков (см. фиг. *а*). Очевидно, что сооружение из брусков опрокинется, когда координата x_0 центра масс всей системы брусков, лежащих на нижнем, выйдет за его основание, т. е. когда $x_0 \geqslant L/2$ (знак равенства соответствует неустойчивому равновесию).

Поясним это, рассмотрев условие равновесия двух брусков, лежащих друг на друге. Пусть сначала бруски расположены так, как это показано на фиг. *б*. Повернем верхний брусок относительно точки O на малый угол $\Delta\varphi$ по

часовой стрелке и отпустим его. Как будет двигаться брусок дальше?

Сила веса бруска создает относительно точки O вращающий момент $\tau = mg[(L/2) - l]$ (m — масса бруска, l — длина выступающей части торца), который стремится повернуть брусок в исходное положение. Это и означает, что в положении, показанном на фиг. *б*, брусок находится в равновесии. По мере стремления l к $L/2$ величина вращающего момента убывает. Наконец, $\tau = 0$ при $l = L/2$. Теперь достаточно отклонить верхний брусок на бесконечно малый угол, чтобы брусок начал вращаться по часовой стрелке; это означает, что верхний брусок находится в положении неустойчивого равновесия. Разумеется, при $l > L/2$ (см. фиг. *в*), возникает вращающий момент $\tau = mg\,(l - L/2)$, опрокидывающий верхний брусок.

Вычислим координату центра масс всех брусков, лежащих на нижнем. Очевидно,

$$x_1 = \frac{L}{l}, \qquad x_2 = 2\,\frac{L}{l}, \ \ldots, \ x_n = n\,\frac{L}{l}.$$

Поэтому

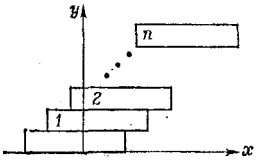
$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{1}{n}\,(x_1 + \ldots + x_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{L}{l}\,\frac{n+1}{2}\,n = (n+1)\cdot\frac{L}{2l}.$$

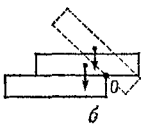
Неустойчивое равновесие наступит при $x_0 = L/2$, откуда

$$n = l - 1.$$

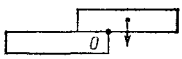
Следовательно, максимальное число брусков, которые можно уложить указанным способом, равно l.



а



б



в

К главе 19. **Центр масс; момент инерции**

19.1. Энергия, затраченная механизмом K, равна изменению кинетической энергии вращения системы, т. е.

$$E=\frac{I_1\omega_1^2}{2}-\frac{I_0\omega_0^2}{2},$$

где I_0 и I_1 — моменты инерции «квадратной» и «крестообразной» систем, а ω_1 — конечная угловая скорость вращения. Момент инерции системы складывается из моментов инерции стержней и момента инерции внутреннего механизма.

Пользуясь теоремой о параллельном переносе оси, находим, что момент инерции одного стержня относительно оси O равен в начальном состоянии $(4/3)\,mL^2$, а в конечном $(m/3)\,L^2$. Поэтому

$$I_0=\frac{32}{3}mL^2+\frac{40}{3}mL^2=24mL^2$$

и

$$I_1=8\,\frac{mL^2}{3}+\frac{40}{3}mL^2=16mL^2.$$

Конечную угловую скорость вращения ω_1 находим из закона сохранения момента количества движения (механизм, складывающий стержни,— внутренний!)

$$I_1\omega_1=I_0\omega_0,$$

откуда

$$\omega_1=\frac{I_0}{I_1}\,\omega_0=\frac{3}{2}\,\omega_0.$$

Итак, затраченная механизмом K энергия равна

$$E=\frac{9}{8}\,I_1\omega_0^2-\frac{1}{2}\,I_0\omega_0^2=6mL^2\omega_0^2.$$

19.2. а) Пусть нить закручена на угол θ. Чтобы удержать ее в этом положении, к нити нужно приложить внешние силы, момент которых τ был бы равен упругому моменту нити с обратным знаком, т. е. $\tau=k\theta$.

При дальнейшем закручивании нити на малый угол $\Delta\theta$, как было показано в гл. 18 «Лекций» (вып. 2, стр. 53), внешние силы совершают работу $\Delta W=\tau\cdot\Delta\theta$. Нить, закрученная на фиксированный угол θ_0, обладает, таким образом, потенциальной энергией U, равной по величине работе внешних сил, поворачивающих нить от ненапряженного состояния ($\theta=0$) до угла θ_0, т. е.

$$U=\int_0^{\theta_0}\tau\,d\theta=\int_0^{\theta_0}k\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\,k\theta_0^2.$$

б) В момент разряда конденсатора на рамку действует момент $\tau = nAB\left|dq/dt\right|$, в результате чего рамка начнет вращаться с угловой скоростью $\omega = L/I$, где L—момент количества движения рамки, I—ее момент инерции. Величину L найдем, интегрируя уравнение

$$\frac{dL}{dt} = nAB\left|\frac{dq}{dt}\right|$$

от $t=0$ до момента окончания разряда конденсатора, что дает $L = nABq_0$ (q_0—первоначальный заряд конденсатора). Когда катушка отклоняется на максимальный угол и останавливается, начальная кинетическая энергия рамки

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I} = \frac{n^2A^2B^2q_0^2}{2I}$$

переходит в потенциальную энергию закрученной нити, на которой подвешена катушка, $U = \frac{1}{2}k\theta_{\text{макс}}^2$, т. е.

$$\frac{1}{2}k\theta_{\text{макс}}^2 = \frac{n^2A^2B^2q_0^2}{2I}, \quad \text{откуда} \quad \theta_{\text{макс}} = \frac{nABq_0}{\sqrt{kI}},$$

т. е. максимальный угол поворота рамки пропорционален начальному заряду конденсатора.

19.3. Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее частей. Поэтому момент инерции проволоки, вычисленный относительно оси, проходящей через точку A, не зависит от угла θ и равен $ML^2/12$.

19.4. Для моментов инерции пластинок относительно осей, проходящих через точки A и B, можем написать

$$I_A = I_C + Mr_1^2, \quad I_B = I_C + Mr_2^2,$$

откуда

$$I_B = I_A - Mr_1^2 + Mr_2^2 = I_A + M(r_2^2 - r_1^2).$$

Приведенное в тексте равенство выполняется, если $r_3^2 = r_2^2 - r_1^2$, т. е. когда r_1, r_2, r_3 образуют прямоугольный треугольник, причем гипотенузой является r_2.

19.5. Объем фигуры вращения равен произведению длины дуги, описываемой центром масс плоской фигуры, на площадь этой фигуры. В нашем случае

$$V = 2\pi R \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^3,$$

так как центр масс однородного круга лежит в его геометрическом центре.

19.6. Энергия, затрачиваемая на достижение данной угловой скорости ω_0 из неподвижного состояния, равна кинетической энергии вращающегося тела. Эта энергия тем меньше, чем меньше момент инерции тела (ω_0 фиксировано!).

Для любого тела $I = I_{\text{ц. м.}} + Md^2$, где $I_{\text{ц. м.}}$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; d — расстояние от этой оси до параллельной ей оси вращения. Очевидно, что $I_{\text{мин}}$ отвечает $d = 0$. Таким образом, ось вращения должна проходить через центр масс, который находится на расстоянии $M_2L/(M_1 + M_2)$ от конца невесомого стержня, несущего массу M_1.

19.7. Пусть диск с прижатыми грузиками вращается с угловой скоростью ω. Его момент количества движения L_0 равен $[(MR^2/2) + 2mR^2] \cdot \omega$.

В момент срыва нитей с крючков H и H' диск вращается с угловой скоростью ω_1, определяемой из закона сохранения момента количества движения:

$$\left(\frac{MR^2}{2} + 2mR^2\right)\omega = \left[\frac{MR^2}{2} + 2m\,(R + l)^2\right]\omega_1,$$

т. е.

$$\omega_1 = \frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4m\,(l + R)^2}.$$

После отделения грузиков диск продолжает вращаться с той же угловой скоростью ω_1, так что угловая скорость диска уменьшается в n раз, если

$$\frac{MR^2 + 4mR^2}{MR^2 + 4\,(R + l)^2\, m} = \frac{1}{n}, \text{ т. е. } l = R\left(\sqrt{n + \frac{M}{4m}(n - 1)} - 1\right).$$

19.8. В неподвижной системе координат xy на тело действует сила F. Тело будет двигаться в этой системе координат согласно уравнениям движения $m\ddot{x} = F_x$; $m\ddot{y} = F_y$. При повороте системы координат на угол $\theta = \omega t$ координаты преобразуются следующим образом:

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta,$$
$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta,$$

откуда

$$\dot{x}' = \dot{x} \cos\omega t - x\omega \sin\omega t + \dot{y} \sin\omega t + y\omega \cos\omega t,$$
$$\ddot{x}' = \ddot{x} \cos\omega t + \ddot{y} \sin\omega t - 2\dot{x}\omega \sin\omega t + 2\dot{y}\omega \cos\omega t - x\omega^2 \cos\omega t - y\omega^2 \sin\omega t,$$

и

$$\dot{y}' = -\dot{x} \sin\omega t - x\omega \cos\omega t + \dot{y} \cos\omega t - y\omega \sin\omega t,$$
$$\ddot{y}' = -\ddot{x} \sin\omega t - 2\dot{x}\omega \cos\omega t + x\omega^2 \sin\omega t + \ddot{y} \cos\omega t - 2\dot{y}\omega \sin\omega t - y\omega^2 \cos\omega t.$$

Компоненты силы в штрихованной системе координат имеют вид

$$F'_x = m\ddot{x}' = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta + 2m\dot{y}'\omega + m\omega^2 x',$$
$$F'_y = m\ddot{y}' = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'.$$

Первые два члена в каждом выражении есть компоненты истинной силы $\mathbf{F}$ в повернутой системе координат, третьи слагаемые — компоненты силы Кориолиса, и последние — центробежной силы.

19.9. Уравнение движения для центра масс шара

$$Ma = -\mu gM,$$

откуда $a = -\mu g$ и $v_{\text{ц. м.}} = v - \mu gt$ (v — начальная скорость шара).

Для вращательного движения

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu gMR.$$

Так как $I = \frac{2}{5}MR^2$ (см. «Лекции», вып. 2, стр. 77), то

$$\omega = \frac{5}{2}\frac{\mu gt}{R}.$$

Скорость той точки шара, которая соприкасается с плоскостью, равна $v_{\text{ц. м.}} - \omega R$. Когда эта скорость обращается в нуль, шар начинает катиться без проскальзывания. Это произойдет через промежуток времени t от начала движения, равный

$$t = \frac{2}{7}\frac{v}{\mu g}.$$

Расстояние, пройденное шаром за это время,

$$S = vt - \frac{at^2}{2} = \frac{12}{49}\frac{v^2}{\mu g},$$

и его скорость к этому моменту $v_t = v - \mu gt = {}^5/_7 v$.

19.10. Вес W валика разложим на две составляющие: силу нормального давления его на вал P, равную $F_1 = Mg\sin\theta$, и перпендикулярную к ней, $F_2 = Mg\cos\theta$.

Контакт между передающим валиком T и барабаном K не будет теряться в том случае, если «сила тяги» F, приложенная со стороны печатного вала P к валику T (как раз и обусловливающая вращение валика T), меньше или равна F_2, т. е.

$$F \leqslant Mg\cos\theta$$

(знак равенства соответствует нулевому давлению T на K).

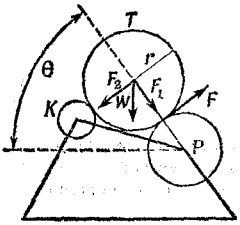
Уравнение вращательного движения для валика T, когда он не давит на барабан K, имеет вид $IA_1 = Fr$, или $(Mr^2/2)\,A_1 = Mg\cos\theta \cdot r$ (здесь через $A_1 = d\omega/dt$ обозначено угловое ускорение валика T), так как

$$I = \frac{Mr^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad A_1 = \frac{2g}{r}\cos\theta.$$

Линейные ускорения точек обода T и P одинаковы, так что $A_1 r = AR$, откуда

$$A = A_1\frac{r}{R} = \frac{2g}{R}\cos\theta,$$

где R — радиус вала P.



19.11. Обозначим массу первой секции через m, тогда массы соответствующих квадрантов будут:

$$m_1 = m, \quad m_2 = 2m, \quad m_3 = 3m, \quad m_4 = 4m.$$

Поскольку каждая из секций однородна, то центры масс их расположены одинаково относительно самих секций. Если координаты центров масс секций $(x_1y_1)\ldots(x_4y_4)$, то положение центра масс всего тела вычисляется по формулам

$$X = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4}{10} \quad \text{и} \quad Y = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{10}$$

Из соображений симметрии ясно, что центр масс каждой из секций лежит на биссектрисе соответствующего прямого угла, на одинаковом расстоянии от начала координат.

Обозначим координаты центра масс первой секции через a:

$$x_1 = y_1 = a.$$

Очевидно, в этом случае

$$x_2 = a, \qquad y_2 = -a,$$
$$x_3 = -a, \qquad y_3 = a,$$
$$x_4 = -a, \qquad y_4 = -a.$$

Таким образом,

$$X = -0{,}4a, \qquad Y = -0{,}2a.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки (0, 0) и (X, Y), есть

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y},$$

так что искомое уравнение имеет вид

$$y=\frac{1}{2}x.$$

19.12. Пусть M — масса диска с отверстием; m — масса вырезанной части диска; x — абсцисса центра масс диска с отверстием. Поскольку центр масс сплошного диска находится в его центре, то

$$\frac{Mx-m\,(R/2)}{M+m}=0,$$

откуда

$$x=\frac{m}{M}\,\frac{R}{2}=\frac{(R/2)^2\cdot(R/2)}{R^2-(R/2)^2}=\frac{R}{6}=1{,}67\ см$$

19.13. Выберем систему координат, как рекомендовано в условии задачи. Так как проволока расположена симметрично относительно оси x, то, очевидно, $y_{ц.\,м.}=0$. По определению центра масс

$$x_{ц.\,м.}=\frac{\int x\,dm}{\int dm};$$

эта формула является обобщением приведенной в «Лекциях» формулы $x_{ц.\,м.}=\dfrac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$.

Масса проволоки бесконечно малой длины dl равна ρdl, где $\rho=M/L$ — масса единицы длины проволоки, поэтому

$$x_{ц.\,м.}=\frac{1}{L}\int x\,dl.$$

Вычислять такой интеграл в прямоугольной системе координат довольно громоздко. Эти вычисления значительно упрощаются, если заметить, что для произвольной точки проволоки, радиус-вектор которой образует угол φ с осью y, $x=R\cos\varphi$, а $dl=Rd\varphi$ (см. рисунок). Чтобы были учтены все точки проволоки, угол φ должен пробегать значения от $(\pi-\alpha)/2$ до $(\pi+\alpha)/2$, где $\alpha=L/R$ — угол между радиусами-векторами концов проволоки.

Таким образом,

$$x_{ц.\,м.}=\frac{R^2}{L}\int\limits_{(\pi-\alpha)/2}^{(\pi+\alpha)/2}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{2R^2}{L}\sin\frac{\alpha}{2}=R\left(\frac{2R}{L}\right)\sin\frac{L}{2R}.$$

Этот же результат может быть получен из теоремы Паппа (см. «Лекции», вып. 2, стр. 72—73). При вращении проволоки вокруг оси y получается шаровой пояс площадью

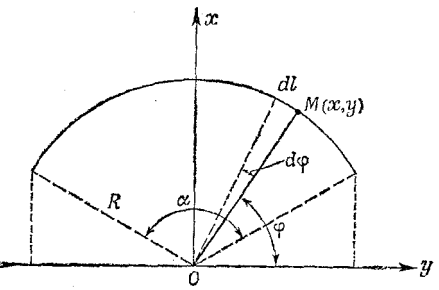
$$2\pi R \cdot 2R \cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 4\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Центр масс проволоки описывает окружность длины $2\pi x_{\text{ц. м.}}$, так что

$$4\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2} = 2\pi x_{\text{ц. м.}} L,$$

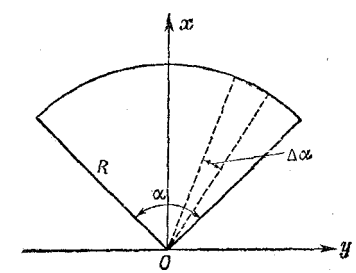
откуда

$$x_{\text{ц. м.}} = R\left(\frac{2R}{L}\right)\sin\frac{L}{2R}.$$



19.14. Разобьем сектор на большое число секторов с вершинами в точке O и очень малым центральным углом $\Delta\alpha$. Каждый такой сектор с большой точностью можно рассматривать как равнобедренный треугольник, центр масс которого лежит на высоте, на расстоянии $^2/_3 R$ от его вершины.

Таким образом, задача о нахождении центра масс сектора свелась к нахождению центра масс дуги окружности



радиусом $^2/_3 R$ с углом раствора α, т. е. к предыдущей задаче. В такой же системе координат, как и в задаче **19.13**, $y_{\text{ц. м.}}=0$, а

$$x_{\text{ц. м.}}=\frac{2}{3}R\left(2\cdot\frac{2}{3}\frac{R}{L}\right)\sin\left(\frac{L}{2\cdot\frac{2}{3}R}\right).$$

Учитывая, что $L=^2/_3 R\alpha$, находим

$$x_{\text{ц. м.}}=\frac{4}{3}\frac{R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

19.15. а) Определим положение центра масс, получившегося после склеивания тела. Как было показано в предыдущей задаче, центр масс сектора лежит на его биссектрисе на расстоянии $^4/_3(R/\alpha)\sin(\alpha/2)$ от центра окружности. (В нашем случае это расстояние равно $\sqrt{3}$ *см*, так как $R=\pi$ *см* и $\alpha=2\pi/3$.) Биссектриса сектора массы $2M$ направлена горизонтально, поэтому координаты центра масс этого тела $x_2=-\sqrt{3}$ *см*, $y_2=0$. Биссектриса сектора массы M образует угол 30° с вертикалью, так что координаты x_1 и y_1 центра масс этого сектора равны:

$$x_1=\sqrt{3}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ см,\quad y_1=-\sqrt{3}\cos 30^\circ=-\frac{3}{2}\ см.$$

Следовательно, координаты центра масс тела, получившегося после склеивания двух частей, есть

$$X=\frac{Mx_1+2Mx_2}{2+2M}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ см,$$

$$Y=\frac{My_1+2My_2}{M+2M}=-\frac{1}{2}\ см.$$

Рассмотрим силы, действующие на тело. Это сила тяжести, приложенная в центре масс тела, силы давления пола и стенки P и N и сила трения о пол $F_{\text{тр}}$. Эти силы приложены в точках соприкосновения тела со стенкой и полом и направлены так, как это показано на рисунке. Так как тело находится в равновесии, геометрическая сумма всех сил равна нулю; сумма моментов этих сил, например относительно точки O, также равна нулю. Это дает

$$P=3Mg,\qquad N=F_{\text{тр}}\quad\text{и}\quad \pi F_{\text{тр}}=-X\cdot 3Mg,$$

откуда

$$N=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}Mg.$$

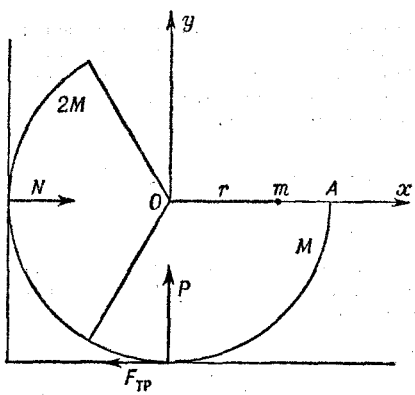
Поскольку $M=1$ *кг*, тело давит на стенку с силой $3\sqrt{3}/2\pi$ *кГ*.

б) Если поместить на линию OA массу m на расстоянии r от точки O, то система останется в равновесии, если будут равны друг другу моменты сил веса составного тела и шарика относительно точки соприкосновения тела и пола:

$$mgr=3XMg,$$

что дает

$$r=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{M}{m}.$$



19.16. Поскольку вся фигура, подвешенная в точке P, находится в равновесии независимо от ее положения, точка P является ее центром масс.

Пусть высота вырезанного треугольника равна h. Его центр масс находится на расстоянии $^2/_3\,h$ от P. Центр масс полученной фигуры и вырезанного треугольника находится в точке O, следовательно (см. задачу **19.12**),

$$\left(a^2-\frac{1}{2}\,ah\right)\left(h-\frac{a}{2}\right)=\frac{ah}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{h}{3}\right).$$

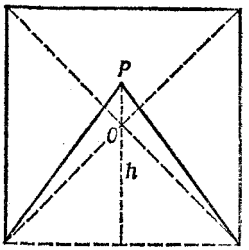
Из этого соотношения получаем квадратное уравнение для h

$$2h^2-6ah+3a^2=0,$$

откуда

$$h=\frac{a(3\pm\sqrt{3})}{a}.$$

Так как по смыслу задачи $h < a$, в качестве решения выбираем меньший корень квадратного уравнения, т. е. $h = 0{,}63\,a$.



19.17. а) На катушку действует сила веса, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити T, направленная по нити. Катушка не будет раскачиваться, если нет горизонтальных сил, т. е. если нить вертикальна.

б) Запишем уравнение движения катушки:
для поступательного

$$2Ma = 2Mg - T,$$

для вращательного

$$I\varepsilon = Tr;$$

здесь a — ускорение центра масс катушки, ε — ее угловое ускорение. Учитывая, что $\varepsilon = a/r$ и $I = MR^2$, уравнения движения перепишем в виде

$$MR^2a = T,$$
$$2Ma = -T + 2Mg,$$

откуда

$$a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}}.$$

19.18. а) Из закона сохранения момента количества движения

$$(I_0 + mR^2)\,\omega_0 = (I_0 + mr^2)\,\omega,$$

так что

$$\omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}\,\omega_0.$$

б) Изменение кинетической энергии системы равно

$$\frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\,\omega^2 - \frac{1}{2}(I_0 + mR^2)\,\omega_0^2 =$$
$$= \frac{\omega_0^2}{2}(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right].$$

С другой стороны, чтобы удержать вращающуюся с угловой скоростью ω массу m на расстоянии x от оси вращения, необходимо приложить к нити силу

$$F = m\omega^2 x = \left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mx^2}\right)^2 m\omega_0^2 x.$$

Работа этой силы при изменении x от R до r есть

$$W = \int_R^r F\,dx = (I_0 + mR^2)^2 \omega_0^2 \int_R^r \frac{mx\,dx}{(I_0 + mx^2)^2} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right],$$

что равно разности кинетических энергий системы в конечном и начальном состояниях.

в) В системе координат, вращающейся вместе со столом, скорость тележки увеличивается благодаря действию центробежной силы, так что в этой системе кинетическая энергия тележки в точке R равна вычисленной в пункте (б) работе W, т. е.

$$\frac{mv_r^2}{2} = W,$$

откуда

$$v_r^2 = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}(R^2 - r^2)\,\omega_0^2.$$

К главе 20. ***Вращение и пространство***

20.1. Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Используя свойства детерминанта, получаем

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x + c_x & b_y + c_y & b_z + c_z \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a_x & \alpha a_y & \alpha a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha(\mathbf{a} \times b),$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+$$

$$+a_z(b_xc_y-b_yc_x)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_yc_z-b_zc_y & b_zc_x-b_xc_z & b_xc_y-b_yc_x\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z)+\ldots=$$

$$=\mathbf{i}[b_x(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_yb_y+a_zb_z+a_xb_x)+$$

$$+a_xb_xc_x-a_xb_xc_x]+\ldots=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

20.2. Направим ось z вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$ (т. е. вдоль оси вращения твердого тела), а начало координат поместим в произвольной точке на оси вращения. Вычислим векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки P тела) в этой системе координат

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}.$$

Полученный вектор лежит в плоскости xy и перпендикулярен вектору $\mathbf{r}'(x, y)$, модуль его равен $\omega\sqrt{x^2+y^2}=\omega r'$. Так как r' — расстояние точки P до оси вращения, вычисленное векторное произведение есть не что иное, как скорость точки P твердого тела, т. е. $\mathbf{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$.

20.3. Пусть тело повернется на некоторый очень малый угол $\Delta\theta_1$ вокруг оси l, проходящей через начало координат. Введем вектор $\Delta\boldsymbol{\theta}_1$, величина которого равна $\Delta\theta_1$, а направление совпадает с осью вращения, т. е. $\Delta\theta_1=\Delta\theta_1\cdot\mathbf{n}_1$ ($\mathbf{n}_1$ — единичный вектор вдоль оси вращения). Очевидно, что при таком повороте радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки M станет равным $\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$. Величина приращения радиуса-вектора равна (см. рисунок) $r\sin\alpha\,\Delta\theta_1$; вектор $\Delta\mathbf{r}$ направлен перпендикулярно $\mathbf{r}$ и оси вращения (т. е. $\Delta\boldsymbol{\theta}_1$), поэтому, вспоминая определение векторного произведения,

$$\Delta\mathbf{r}=\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\mathbf{r}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\mathbf{r}.$$

Если произведен еще один поворот на малый угол $\Delta\theta_2$ вокруг другой оси, проходящей через начало координат, то новый радиус-вектор той же точки M (обозначим его $\mathbf{r}''$) может быть выражен через $\mathbf{r}$ как

$$\mathbf{r}''=\mathbf{r}'+\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\mathbf{r}+\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times(\mathbf{r}+\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\mathbf{r})=$$

$$=\mathbf{r}+(\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\Delta\boldsymbol{\theta}_2)\times\mathbf{r}.$$

В последнем выражении отброшены бесконечно малые второго порядка.

Таким образом, два последовательных поворота на углы $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$ вокруг разных осей эквивалентны одному повороту на угол

$$\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + 2\Delta\theta_1\Delta\theta_2\cos(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)}$$

вокруг оси, направление которой совпадает с направлением вектора $\Delta\boldsymbol{\theta}_1 + \Delta\boldsymbol{\theta}_2$. Аналогично для N поворотов на малые углы $\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ имеем

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \sum \Delta\boldsymbol{\theta}_i.$$

Рассматривая угловую скорость как вектор, направленный вдоль оси вращения, модуль которого равен изменению угла в единицу времени, записываем $\boldsymbol{\omega}_i = \Delta\boldsymbol{\theta}_i/\Delta t$. Поэтому вращение тела с несколькими угловыми скоростями эквивалентно вращению с одной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_i,$$



20.4. Обозначим через $\mathbf{r}'$ координаты частиц в системе ц. м. Очевидно,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{r}_i' \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{v}_i'.$$

Момент количества движения системы частиц равен

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{r}_i') \times (\mathbf{v}_{\text{ц. м.}} + \mathbf{v}_i') = \sum_i m_i \mathbf{R}_{\text{ц. м.}} \times \mathbf{v}_{\text{ц. м.}} +$$
$$+ \mathbf{v}_{\text{ц. м.}} \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i' + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' + \mathbf{R}_{\text{ц. м.}} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i'.$$

Так как $\sum m_i \mathbf{r}_i' = 0$ и $\sum m_i \mathbf{v}_i' = 0$ по определению центра масс системы,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{ц. м.}} + M\mathbf{R}_{\text{ц. м.}} \times \mathbf{v}_{\text{ц. м.}}$$

20.5. а) Объем V параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V = SH$.

Обозначим угол между сторонами A и B основания через α. Величина площади основания равна

$$S = AB \sin\alpha = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|.$$

Вектор $\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ направлен перпендикулярно векторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, т. е. его направление совпадает с нормалью к основанию.

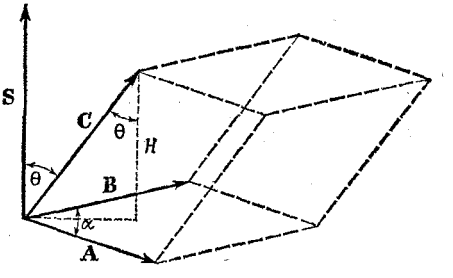
Если угол между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{C}$ равен θ, то $V = SH = SC\cos\theta = \mathbf{C}\cdot\mathbf{S} = |\mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})|$.

б) Параллелепипед определен тремя векторами:

$$\mathbf{a} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Следовательно, его объем есть абсолютная величина детерминанта

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 406 \text{ единиц объема.}$$



20.6. Центр масс системы двух стержней находится в точке O, делящей отрезок O_1O_2 пополам (O_1, O_2—центры стержней). После удара в точку C стержни придут в движение, которое можно разложить на два: поступательное движение системы как целого со скоростью v по линии удара и вращательное вокруг центра масс O с некоторой угловой скоростью ω. Пусть m и l—масса и длина каждого из стержней, а p—переданный в результате удара импульс. Из закона сохранения импульса $2mv = p$ следует, что скорость поступательного движения системы равна $v = p/2m$, а из закона сохранения момента количества движения $I\omega = pDC$, что $\omega = (3p/4I)$ $(DC = {}^3/_4\, l)$, где I—момент инерции стержней относительно центра масс системы.

Из прямоугольного треугольника O_1AO_2 легко найти, что

$$OO_1=\frac{1}{2}O_1O_2=\frac{l}{2\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$I=2\left(\frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{8}\right)=\frac{5}{12}ml^2 \quad \text{и} \quad \omega=\frac{9}{5}\frac{p}{ml}.$$

Линейные скорости центров масс стержней O_1 и O_2, возникающие за счет вращательного движения, равны по модулю

$$u=\omega O_1O=\frac{9}{10\sqrt{2}}\frac{p}{m}$$

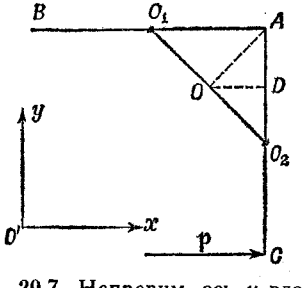
и направлены перпендикулярно линии O_1O_2. В системе координат, изображенной на рисунке, скорость поступательного движения имеет только x-составляющую, а вращательные скорости точек O_1 и O_2 образуют угол 45° с осями координат. Результирующие скорости центров масс стержней v_1 и v_2 равны векторной сумме скорости центра масс системы в целом и скорости, приобретенной центрами масс стержней за счет вращательного движения. Имеем

$$v_1^x=v-\frac{1}{\sqrt{2}}u=\frac{1}{20}\frac{p}{m}, \quad v_1^y=-\frac{1}{\sqrt{2}}u=-\frac{9}{20}\frac{p}{m};$$

$$v_2^x=v+\frac{1}{\sqrt{2}}u=\frac{19}{20}\frac{p}{m}, \quad v_2^y=\frac{1}{\sqrt{2}}u=\frac{9}{20}\frac{p}{m}.$$

Отношение модулей скоростей равно

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{(v_1^x)^2+(v_1^y)^2}}{\sqrt{(v_2^x)^2+(v_2^y)^2}}\approx 0{,}43.$$



20.7. Направим ось y вдоль вектора угловой скорости маховика (т. е. по оси вращения). Введем также другую систему координат $x'y'$, ось y' которой перпендикулярна плоскости диска,

а x' лежит в этой плоскости. Компоненты угловой скорости в этой системе

$$\omega_{x'} = \omega \sin \alpha, \quad \omega_{y'} = \omega \cos \alpha, \quad \omega_{z'} = 0$$

(α — угол между осью вращения и осью y'). Компоненты момента количества движения в штрихованной системе координат равны

$$L_{y'} = I_{y'} \omega_{y'} = \frac{MR^2}{2} \omega \cos \alpha,$$

$$L_{x'} = I_{x'} \omega_{x'} = \frac{mR^2}{4} \omega \sin \alpha,$$

$$L_{z'} = 0$$

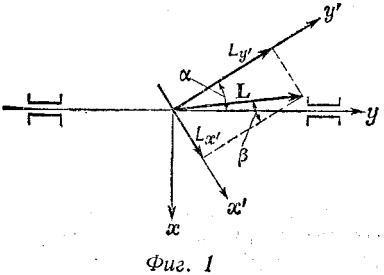
(M — масса диска, R — его радиус).

При вычислении момента инерции диска относительно оси x' мы воспользовались тем, что $I_{y'} = I_{x'} + I_{z'}$. Ввиду симметрии диска, $I_{x'} = I_{z'}$, так что $I_{x'} = I_{y'}/2 = MR^2/4$.

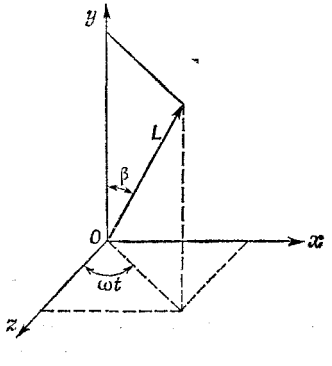
Вектор момента количества движения образует с осью y угол β, причем

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{L_{x'}}{L_{y'}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как углы α и β малы, можно положить $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) \approx \approx \alpha - \beta$, а $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, так что $\alpha - \beta = {}^1/_2\, \alpha$, откуда $\beta = {}^1/_2\, \alpha$. В нештрихованной системе координат вектор количества движения $\mathbf{L}$ вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω. Следовательно, его x- и z-компоненты меняются со вре-



Фиг. 1



Фиг. 2

менем по закону (фиг. 2)

$$L_z = L\beta \cos \omega t; \quad L_x = L\beta \sin \omega t,$$

где

$$L = \sqrt{L_{x'}^2 + L_{y'}^2} = \frac{mR^2}{4} \omega \sqrt{5}.$$

Значит, на маховик действует момент сил $\tau = d\mathbf{L}/dt$, компоненты которого

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt} = L\beta\omega \cos \omega t,$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = -L\beta\omega \sin \omega t,$$

$$\tau_y = 0,$$

а модуль равен

$$\tau = L\omega\beta = \omega^2 \frac{MR^2 \sqrt{5}}{8} \alpha =$$

$$= 1{,}22 \text{ ньютон} \cdot \text{м}.$$

20.8. Силы притяжения тел массы m к массе M равны

$$F_1 = \frac{GmM}{R_1^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GmM}{R^2 \left(1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right)} \approx$$

$$\approx \frac{GmM \left(1 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right)}{R^2}$$

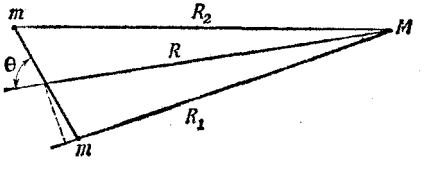
и

$$F_2 = \frac{GmM}{R_2^2} = \frac{GmM}{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta} \approx \frac{GMm}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right).$$

При получении приближенных формул мы пренебрегли r^2 по сравнению с R^2 и учли, что $(r/R) \cos \theta \ll 1$, воспользовавшись соотношением $1/(1 \pm x) \approx 1 \mp x$ при $x \ll 1$. Вращающий момент τ равен разности моментов сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ относительно точки O, так что $|\tau| = F_1 r \sin \theta - F_2 r \sin \theta$ (плечи обеих сил приближенно равны $r \sin \theta$).

Подставляя вместо F_1 и F_2 их значения, получаем

$$\tau = \frac{2GMmr^2}{R^3} \sin 2\theta.$$



20.9. Сплюснутость Земли при вычислении действующего на нее момента сил можно приближенно учесть, заменив Землю двумя точечными массами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. Далее, воспользовавшись конечным результатом предыдущей задачи, находим отношение вращательных моментов, создаваемых Солнцем и Луной:

$$\frac{\tau_С}{\tau_Л}=\frac{M_С}{M_Л}\left(\frac{R_Л}{R_С}\right)^2\approx 0{,}47,$$

где $M_Л$ и $M_С$ — массы Луны и Солнца, а $R_Л$ и $R_С$ — расстояние от Земли до Луны и Солнца соответственно.

20.10. а) Перепишем таблицу удельной плотности в более удобной форме, отсчитывая расстояния от центра Земли, а не от ее поверхности, и принимая средний радиус Земли равным 6370 *км*:

R *км*,	370	1370	2870	3470	4370	5370	5970	6170	6270	6340	6370
ρ, *г/см*^{3}	17,1	11,5 16,8	10,2	5,7 9,4	5,2	4,7	3,6	3,5	3,4	3,0 3,3	2,6

Землю представим себе состоящей из нескольких шаровых слоев, плотность внутри каждого из которых постоянна и равна полусумме плотностей на радиусах слоя. Там, где имеется разрыв плотности, бóльшее значение ее будем приписывать внутренней части слоя, а меньшее — внешней.

Момент инерции шарового слоя с постоянной плотностью ρ и внешним и внутренним радиусами r_1 и r_2 найдем, вычитая из момента инерции шара радиусом r_1 момент инерции шара радиусом r_2. Таким образом,

$$I=\frac{2}{5}M_1r_1^2-\frac{2}{5}M_2r_2^2=\frac{8}{15}\pi(r_1^5-r_2^5)\rho$$

или для i-го слоя

$$I_i=\frac{8}{15}\bar{\rho}_i(r_i^5-r_{i-1}^5).$$

Полный момент инерции Земли равен сумме моментов инерции шаровых слоев, так что

$$I=\sum_{i=1}^{11}I_i\approx 8{,}1\cdot 10^{37}\ кг\cdot м^2.$$

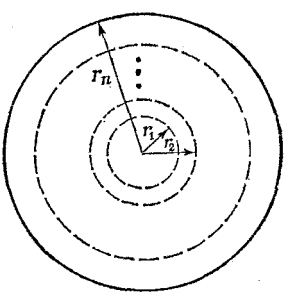
б) Момент количества движения Земли L равен

$$L = I\omega = \frac{2\pi I}{t} \approx 5{,}9 \cdot 10^{33}\ кг \cdot м^2/сек$$

($t = 8{,}64 \cdot 10^3\ сек$ — период обращения Земли вокруг своей оси).

в) Кинетическая энергия Земли

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \approx 2{,}1 \cdot 10^{29}\ дж.$$



20.11. 1) Согласно формуле, полученной в задаче **10.8.** (стр. 164), кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии движения его центра масс и кинетической энергии тела в системе ц. м. Так как тело скатывается по наклонной плоскости без скольжения и ввиду симметрии тела относительно оси вращения, его центр масс находится на этой оси, движение тела в системе ц. м. представляет собой чистое вращение, угловая скорость которого $\omega = v/r$ (v — скорость тела в произвольный момент времени). Таким образом, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения.

Величину скорости v центра масс в нижней точке наклонной плоскости определим из закона сохранения энергии

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2},$$

откуда

$$v=\sqrt{\frac{2Mgh}{M+I/r^2}}.$$

2) Применим эту формулу для частных случаев, перечисленных в условии задачи.

а) Сфера:

$$I=\frac{2}{3}Mr^2; \qquad v=\sqrt{\frac{6}{5}gh}.$$

б) Диск:

$$I=\frac{Mr^2}{2}; \qquad v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

в) Диск массы M_1 радиусом R_1, насаженный на вал массой m_2 и радиусом r_2:

$$I=\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{m_2r_2^2}{2},$$

$$v=\sqrt{\frac{2(M_1+m_2)gh}{{}^3/_2M_1+m_2\left[1+\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^2\right]}}.$$

20.12. а) Центр масс однородного стержня находится в его середине, т. е. на расстоянии $L/2$ от конца. Центр масс системы из стержня и замазки находится посредине отрезка, соединяющего замазку и точку O, т. е. на расстоянии $L/4$ от линии удара.

Стержень до удара покоился, поэтому

$$\mathbf{v}_{\text{ц. м.}}=\frac{M\mathbf{v}}{M+M}=\frac{\mathbf{v}}{2}.$$

Из закона сохранения импульса следует, что скорость центра масс после удара не изменилась, т. е. осталась равной $\mathbf{v}/2$.

б) Момент количества движения системы относительно ее центра равен до удара $MvL/4$.

в) Момент количества движения системы после столкновения равен $I\omega$, где I — момент инерции относительно центра масс, т. е.

$$I=\frac{ML^2}{12}+2M\frac{L^2}{16}=\frac{5}{24}ML^2,$$

а ω — угловая скорость вращения относительно центра масс.

Из закона сохранения момента количества движения

$$\frac{L}{4}Mv=\frac{5}{24}ML^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{L}.$$

г) Так как скорость центра масс равна $v/2$, кинетическая энергия системы после удара

$$T_к = \frac{1}{2}(2M)\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{2}{5}Mv^2.$$

Изменение кинетической энергии при ударе

$$\Delta T = \frac{1}{2}Mv^2 - T_к = 0{,}2T_н$$

($T_н = {}^1/_2 Mv^2$ — начальная кинетическая энергия системы).

20.13. Пусть I — момент инерции Земли до таяния льда, а $I + \Delta I$ — после того, как лед растаял. Из закона сохранения момента количества движения

$$I\omega = (I + \Delta I)(\omega + \Delta\omega)$$

(ω и $\omega + \Delta\omega$ — угловые скорости вращения Земли в два рассматриваемых момента), или

$$\frac{I}{T} = \frac{I + \Delta I}{T + \Delta T},$$

так как

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Таким образом,

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I}T.$$

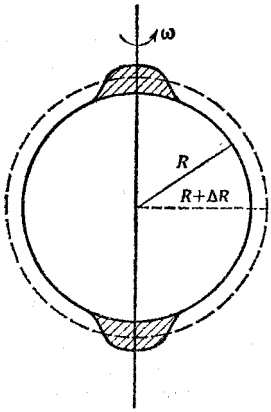
Изменение момента инерции Земли ΔI произошло за счет того, что вода, сосредоточенная ранее (в виде льда) вблизи оси вращения (и поэтому дававшая очень малый вклад в момент инерции Земли), расстаяв, распределилась по шаровому слою радиусом R и толщиной ΔR. Момент инерции такого слоя (см. задачу **20.10**):

$$\Delta I = \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \Delta R.$$

Таким образом,

$$\Delta T = \frac{8}{3}\frac{\pi\rho R^4}{I}T\Delta R.$$

Учитывая, что для воды $\rho = 1$ *г/см*$^3 = 10^3$ *кг/м*^{3}, а период вращения Земли $T = 24$ *час*, получаем $\Delta T \sim 1$ *сек*.



20.14. а) Скорость центра масс найдем из закона сохранения импульса $Mv_0 = J$, откуда $v_0 = J/M$. Из закона сохранения момента количества движения определим угловую скорость вращения вокруг центра масс

$$Jr = \frac{ML^2}{12\omega}\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{12Jr}{ML^2}.$$

Скорость точки A в момент удара есть сумма скоростей двух движений: поступательного со скоростью v_0 и вращательного с угловой скоростью ω. Поэтому

$$v_A = -\omega\frac{L}{2} + v_0 = -\frac{12Jr}{ML^2} + \frac{J}{M} = \frac{J}{M}\left(1 - \frac{6r}{L}\right).$$

б) Если $v_A = 0$, то для расстояния $OP = r$ получим уравнение

$$1 - \frac{6r}{L} = 0,$$

откуда

$$r = \frac{L}{6}.$$

Очевидно,

$$AP = AO + OP = \frac{L}{2} + \frac{L}{6} = \frac{2}{3}L.$$

К главе 21. **Гармонический осциллятор**

21.1. а) Пусть C — центр масс тела, а через точку O проходит ось вращения. В положении равновесия O и C находятся на одной вертикали. Уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M},$$

где $\mathbf{L}$ — момент количества движения, а $\mathbf{M}$ — момент внешних сил.

В нашем случае нужно учесть только силу тяжести (проложенную в точке C), момент которой относительно точки O равен $-Mg\,d\sin\theta$. Момент количества движения тела равен $I\omega$, так что

$$\frac{d}{dt}I\omega=-Mg\,d\sin\theta.$$

Но $\omega=d\theta/dt$, поэтому после дифференцирования по времени получим

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgd\sin\theta.$$

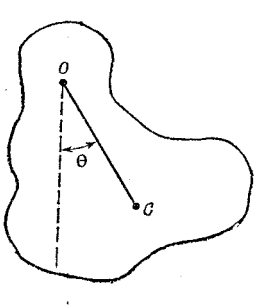
Это и есть дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла θ со временем.

б) Если предположить, что θ мало, т. е. $\sin\theta\approx\theta$, то получим

$$I\frac{d^2\theta}{d\theta^2}+Mg\,d\theta=0,\text{ или }\ddot{\theta}+\frac{Mgd}{I}\theta=0.$$

В § 2 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 48) было показано, что такое дифференциальное уравнение описывает колебания с периодом $T=2\pi/\omega$, где $\omega^2=Mgd/I$. Поэтому период малых колебаний тела

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$



21.2. В найденном в предыдущей задаче выражении для периода колебаний положим $I = I_C + Md^2$. Тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + Md^2}{Mgd}}.$$

а) Найдем d, соответствующее данному значению периода. Решая квадратное уравнение

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} + \frac{I_C}{M} = 0,$$

находим

$$d_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\frac{g^2T_0^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}$$

и

$$d_2 = \frac{gT^2}{8\pi^2} - \sqrt{\frac{g^2T_0^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{M}}.$$

б) Складывая d_1 и d_2, получаем

$$d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}, \quad \text{откуда} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}.$$

в) Период минимален при таком значении d, при котором минимально выражение

$$\frac{I_C + Md^2}{Mgd}$$

(подкоренное выражение в формуле для периода). Условие минимума имеет вид

$$\left(\frac{I_C + Md^2}{Mgd}\right)' = 0$$

(штрих означает дифференцирование по d), т. е.

$$\frac{2Md\,Mgd - (I_C + Md^2)\,Mg}{M^2g^2d^2} = 0.$$

Отсюда

$$d_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{I_C}{M}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для периода колебаний, получаем минимальное значение периода

$$T_{\text{мин}} = 2\pi \sqrt{\frac{2d_{\text{мин}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_C}{M}}}.$$

21.3. Из того, что пружина под действием силы веса груза массой m удлиняется на A, находим ее коэффициент жесткости $k=mg/A$.

Когда на пружине неподвижно висят два груза общей массой $2m$, ее длина l_0 определяется условием

$$k(l_0-D)=2mg, \quad \text{так что} \quad l_0=D+2A.$$

Поместим начало координат в точку l_0, а ось x направим вертикально вниз. В этом случае уравнение движения грузиков примет вид

$$2m\ddot{x}=-kx, \quad \text{или} \quad \ddot{x}+\frac{g}{2A}x=0.$$

Как известно, дифференциальное уравнение такого типа описывает колебания с периодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2A}{g}}.$$

Легко убедиться в том, что решением этого уравнения является функция

$$x(t)=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t,$$

где B_1 и B_2—постоянные, определяемые из начальных условий.

Систему координат мы выбрали таким образом, что $x=x_0=-A$ при $t=0$. Начальную скорость v_0 находим, учитывая сохранение импульса при ударе

$$mv=2mv_0,$$

откуда

$$v_0=\frac{v}{2}$$

(v—скорость тела, упавшего с высоты A, т. е. $v=\sqrt{2Ag}$). Таким образом,

$$v_0=\sqrt{\frac{gA}{2}}.$$

Этим начальным условиям соответствуют постоянные $B_2=-B_1=A$, т. е. решение уравнения движения имеет вид

$$x=A(\sin\omega t-\cos\omega t).$$

Амплитуда колебаний, т. е. максимальное отклонение точки от положения равновесия, достигается в тот момент времени t_1, когда скорость колеблющихся грузов равна нулю:

$$\dot{x}=A\omega(\sin\omega t_1+\cos\omega t_1)=0,$$

что дает

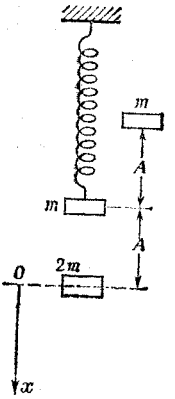
$$\sin\omega t_1=-\cos\omega t_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$x_{\text{макс}} = A\sqrt{2}.$$

Максимальная высота подъема над первоначальным положением равновесия (находящимся на расстоянии A вверх от начала координат)

$$H = x_{\text{макс}} - A = A(\sqrt{2}-1).$$



21.4. а) Частицы A и B движутся вдоль прямой по закону

$$x_A = a\sin\omega_A t;\quad x_B = a\sin\omega_B t.$$

В момент времени $t = 0{,}350$ *сек* расстояние между ними

$$x_B - x_A = a(\sin\omega_B t - \sin\omega_A t) = 2{,}17 \text{ см}.$$

б) Относительная скорость B по отношению к A

$$v_{B/A} = \dot{x}_B - \dot{x}_A = a(\omega_B\cos\omega_B t - \omega_A\cos\omega_A t) = 50 \text{ см/сек}.$$

21.5. В задаче **21.1** получено уравнение малых колебаний твердого тела

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I}\theta,$$

где d — расстояние от оси вращения до центра масс тела, I — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса. Из него следует, что

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}.$$

Если масса единицы длины проволоки ρ, то масса всего каркаса $M = \rho(\pi R + 2R) = \rho R(\pi+2)$ (R — радиус полуок-

ружности ACB), а

$$I=\pi\rho R\cdot R^2+2R\rho\frac{(2R)^2}{12}=\rho R^3\left(\frac{2}{3}+\pi\right).$$

Центр масс полуокружности ACB лежит на перпендикуляре к диаметру AB, проходящем через точку подвеса P на расстоянии (см. задачу **19.13.**)

$$d_1=R\left(\frac{2R}{L}\right)\sin\frac{L}{2R}=\frac{2R}{\pi}\quad(L=\pi R),$$

а центр масс диаметра AB находится в точке подвеса. Поэтому

$$d=\frac{\pi R\rho\cdot d_1}{\pi R\rho+2R\rho}=\frac{\pi}{2+\pi}d_1=\frac{2R}{2+\pi}.$$

Таким образом,

$$T=2\pi\sqrt{\left(\frac{2}{3}+\pi\right)\frac{R}{2g}}\approx 2\ сек.$$

21.6. Обозначим жесткость пружины через k. Период колебания пластинки массы m и грузика массы m_1 равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+m_1}{k}}.$$

Учитывая, что $T=\pi/3$, находим

$$k=36\,(m+m_1).$$

Удлинение пружины после того, как с пластинки снят груз m_1 и положен груз m_2:

$$d=\frac{m_2-m_1}{36\,(m+m_1)}g=21{,}8\ см.$$

21.7. После удара центр масс всей системы будет двигаться вправо со скоростью $v_{ц.\,м.}$, определяемой из закона сохранения количества движения:

$$\frac{1}{4}Mv=2Mv_{ц.\,м.},\ \text{откуда}\ v_{ц.\,м.}=\frac{1}{8}v.$$

В системе координат, жестко связанной с центром масс системы, частицы (массой M каждая) совершают гармонические колебания (при этом они движутся либо навстречу друг другу, либо в противоположные стороны) около положений равновесия, лежащих в точках $-L/2$ и $L/2$ для левой и правой массы соответственно.

Если обозначить через x_1 и x_2 отклонения масс от положения равновесия, то удлинение пружины равно $x=x_2-x_1$, а уравнения движения грузов имеют вид

$$M\ddot{x}_1=-k\,(x-x_2);\quad M\ddot{x}=-k\,(x+x_1).$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$M\ddot{x} = -kx.$$

Таким образом, пружина колеблется по закону

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t,$$

где $\omega = 2\pi \sqrt{M/k}$, а A_1 и A_2 определяются начальными условиями. В момент столкновения пружина была ненапряжена, т. е. $x = 0$, а массы двигались навстречу друг другу со скоростями $^1/_8 v$, т. е. $\dot{x} = {}^1/_4 v$. При таких начальных условиях $A_1 = 0$, $B_1 = v/4\omega$, т. е. $x = (v/4\omega) \sin \omega t$. Итак, период колебаний системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}},$$

а амплитуда этих колебаний

$$\frac{v}{4} \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

21.8. Из условия задачи следует, что действующая на частицу сила прямо пропорциональна r — расстоянию от центра Земли и направлена к центру, поэтому $m\ddot{r} + kr = 0$, где k — коэффициент пропорциональности в зависимости силы от расстояния. Таким образом, частица совершает колебания вокруг центра Земли с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

где $\omega^2 = k/m$.

Замечая, что на поверхности Земли сила притяжения равна весу тела, находим константу $k = mg/R$. Очевидно, сквозь Землю по диаметру тело пройдет за время $t = T/2$.

Используя найденное значение k, получаем

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 2500 \text{ сек} \approx 42 \text{ мин}.$$

21.9. Обозначим через n число бактерий в колонии. Скорость роста населения колонии равна dn/dt. По условию

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n.$$

Это и есть дифференциальное уравнение роста колонии. Из него следует, что население колонии растет со временем по закону $n = n_0 e^{\alpha t}$.

21.10. Поместим начало координат в положение равновесия, а оси координат направим, как показано на рисунке. Колебания точки подвеса будем характеризовать координатой x, а

самого маятника — углом φ. Как видно из рисунка, в произвольный момент времени

$$x_м = x + l \sin \varphi,$$

$$y_м = l \cos \varphi.$$

где l — длина маятника.

Запишем уравнение движения маятника в системе координат, движущейся вместе с точкой подвеса. В этой системе на массу m действует псевдосила $-m\ddot{x}$, поэтому $I(d^2\varphi/dt^2) = -mgl \sin \varphi - m\ddot{x} \cos \varphi$.

Учитывая, что $I = ml^2$, получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l} \cos \varphi.$$

Предположим, что φ мало, так что $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi = 1$. В этом приближении (приближении малых колебаний) уравнение для φ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{\omega^2}{l} \sin \omega t,$$

где учтено, что по условию задачи

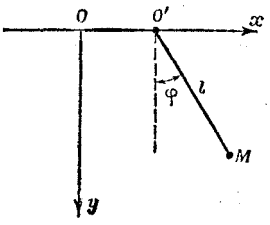
$$x = a \sin \omega t \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T},\ a = 1\right).$$

Удобно вернуться к переменной $x_м$, используя соотношения

$$\frac{x_м - x}{l} = \sin \varphi \approx \varphi$$

и

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_м - \ddot{x}}{l}.$$



Для этой переменной

$$\ddot{x}_м + \omega_0^2 x_м = \omega^2 \sin \omega t.$$

Мы пришли к такому же дифференциальному уравнению для $x_м$, как и в § 5 гл. 21 «Лекций» (вып. 2, стр. 105), только в правой части вместо функции $\cos \omega t$ имеем $\sin \omega t$. Поэтому будем искать решение в виде $x_м = c \sin \omega t$ (c — амплитуда колебаний).

Подставляя это выражение $x_м$ в уравнение колебаний, получаем

$$-c\omega^2 \sin \omega t + c\omega_0^2 \sin \omega t = \omega^2 \sin \omega t,$$

откуда

$$c = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, находим

$$c = \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} = 5{,}76 \text{ см}.$$

К главе 22. **Алгебра**

22.8. Единицу можно представить в виде $1 = e^{2\pi i m}$, где m — любое целое число. Корни заданного уравнения представляют собой комплексные числа $e^{2\pi i m/n}$. Всего существует n различных корней, их можно получить, придавая m любое из n значений от 0 до $n-1$.

22.9. Запишем $e^{in\theta}$ в виде

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta = (e^{i\theta})^n =$$
$$= (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos^n\theta + in \cos^{n-1}\theta \cdot \sin\theta +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + \ldots + i^n \sin^n\theta.$$

Приравнивая по отдельности в этом соотношении вещественные и мнимые части, получаем требуемую формулу.

22.10. а) Перемножая функции и приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части соотношения

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi) =$$
$$= e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = (\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

находим

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi,$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi.$$

б) В результате перемножения получается вектор в комплексной плоскости, длина которого равна произведению модулей, т. е. $A \cdot B$, а его направление составляет угол $\theta + \Phi$ с вещественной осью.

22.11. $\log_{11} 2 = 0{,}28906$, $\log_{11} 7 = 0{,}81146$.

К главе 23. ***Резонанс***

23.1. Пусть приложено напряжение вида

$$V(t) = V_0 \cos \omega t.$$

Введем комплексное напряжение $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$, так что $V(t) = \operatorname{Re} \hat{V}$.

а) Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = V_0 e^{i\omega t}.$$

Интегрируя, находим

$$\hat{I} = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{\hat{V}}{i\omega L} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_L}.$$

Следовательно, комплексный импеданс цепи с индуктивностью равен

$$\hat{Z}_L = i\omega L.$$

б) В этом случае уравнение имеет простой вид

$$\frac{\hat{q}(t)}{C} = V_0 e^{i\omega t},$$

т. е.

$$\hat{q}(t) = V_0 C e^{i\omega t}.$$

Отсюда

$$\hat{I} = \frac{d\hat{q}}{dt} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C \hat{V} = \frac{\hat{V}}{\hat{Z}_C}.$$

Следовательно, комплексный импеданс цепи с емкостью равен

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

23.2. а) Рассмотрим цепь, изображенную на фиг. 1. Введем комплексное напряжение $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ и комплексный заряд $\hat{q}(t)$ на обкладках конденсатора. Тогда на основании решения к задаче **23.1** напишем дифференциальное уравнение для

определения стационарного тока

$$\frac{q(t)}{C}+L\frac{dI}{dt}=V=\hat{V}_0e^{i\omega t},$$

где $I=dq/dt$.

Продифференцируем обе части этого уравнения по времени. В результате получим уравнение для комплексного тока:

$$\frac{I}{C}+L\frac{d^2I}{dt^2}=i\omega\hat{V}_0e^{i\omega t}=i\omega V.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $I=\hat{I}e^{i\omega t}$. Выполнив необходимое дифференцирование, мы найдем связь между $\hat{I}$ и $\hat{V}$

$$\left(\frac{1}{i\omega C}+i\omega L\right)\hat{I}=\hat{V}.$$

Отсюда следует, что импеданс цепи $\hat{Z}=\hat{V}/\hat{I}$ в случае последовательного соединения равен

$$Z=\frac{1}{i\omega C}+i\omega L.$$

б) При параллельном соединении емкости и индуктивности электрическая цепь имеет вид, изображенный на фиг. 2. В этом случае, очевидно, выполняется условие равенства потенциалов на индуктивности и емкости

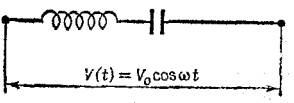
$$V=\frac{q}{C}=L\frac{d\hat{I}_2}{dt},$$

где $\hat{I}_2$ — комплексный ток через индуктивность. Суммарный ток через цепь равен $I=I_1+I_2$, где I_1 — ток через емкость. Учитывая тот факт, что

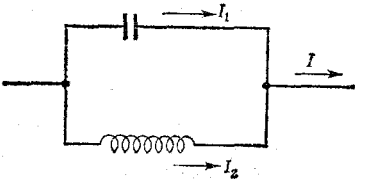
$$q=\frac{dI_2}{dt},$$

и полагая

$$I_1=\hat{I}_1e^{i\omega t}, \qquad I_2=\hat{I}_2e^{i\omega t},$$



Фиг. 1



Фиг. 2

находим

$$\hat{I}_1 = i\omega C\hat{V}, \qquad \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}}{i\omega L}$$

и, следовательно,

$$\hat{I} = \hat{V}\left(i\omega C + \frac{1}{i\omega L}\right).$$

Отсюда

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \left(i\omega C + \frac{1}{i\omega L}\right)^{-1}.$$

При последовательном соединении при $\omega \to \infty$ сопротивление цепи обусловлено индуктивностью, а при $\omega \to 0$ — емкостью. При частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ имеет место «резонанс»: импеданс цепи обращается в нуль.

При параллельном соединении ситуация противоположна случаю (а): при $\omega \to \infty$ сопротивление носит в основном емкостный характер (ток течет через емкость), а при $\omega \to 0$ сопротивление цепи связано с наличием индуктивности.

При частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ наступает резонанс: импеданс цепи обращается в бесконечность.

23.3. а) Упругая сила, действующая на тело массой m, равна $-kx$, а сила трения $-m\gamma v = -m\gamma\,(dx/dt)$. Так как ускорение тела равно d^2x/dt^2, то уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt}.$$

Поделим обе части этого уравнения на массу m и перенесем все члены уравнения в левую часть, затем, используя обозначение $\omega_0^2 = k/m$, получим искомое уравнение.

б) Будем искать решение сформулированного уравнения в экспоненциальном виде $x = e^{\alpha t}$. Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнение на $e^{\alpha t}$, находим квадратное уравнение для определения α:

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Два корня этого уравнения равны

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = \pm\, i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}.$$

(Здесь учтено, что $\gamma < 2\omega_0$.) С учетом найденного запишем общее решение уравнения движения:

$$x = \mathrm{Re}\left(C_1 e^{\alpha_1 t} + D_1 e^{\alpha_2 t}\right),$$

где C_1 и D_1 — комплексные постоянные интегрирования. Представляя эти постоянные в виде $C_1 = Ce^{i\theta_1}$ и $D_1 = De^{i\theta_2}$, где C и D — вещественные числа, и определяя вещест-

венную часть x, находим

$$x(t)=e^{-\gamma t/2}\left[C\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t+\theta_1\right)+\right.$$
$$\left.+D\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t+\theta_2\right)\right].$$

Воспользовавшись формулой для косинуса суммы углов найдем, что решение можно представить в искомом виде, если вместо произвольных постоянных C, D, θ_1 и θ_2 ввести новые две вещественные постоянные A и B, связанные с ними соотношениями

$$A=C\cos\theta_1+D\cos\theta_2,\qquad B=-(C\sin\theta_1+D\sin\theta_2).$$

в) В этом случае α_1 и α_2 — вещественны и общее решение уравнения движения имеет вид

$$x(t)=e^{-\gamma t/2}\left[Ae^{-t\sqrt{(\gamma^2/4)-\omega_0^2}}+Be^{+t\sqrt{(\gamma^2/4)-\omega_0^2}}\right].$$

23.4. Следует рассмотреть два случая:

а) $\gamma<2\omega_0$. Для определения A и B здесь имеем два уравнения:

$$x_0=A,\qquad v_0=-\frac{\gamma}{2}A+B\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$A=x_0,\qquad B=\frac{v_0+(\gamma x_0/2)}{\sqrt{\omega_0^2-(\gamma^2/4)}}.$$

б) $\gamma>2\omega_0$. Из двух уравнений, получаемых из начальных условий

$$x_0=A+B,\qquad v_0=-\frac{\gamma}{2}[A+B]+[B-A]\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2},$$

найдем

$$A=\frac{1}{2}\left[x_0-\frac{v_0+(\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4)-\omega_0^2}}\right],$$
$$B=\frac{1}{2}\left[x_0+\frac{v_0+(\gamma x_0/2)}{\sqrt{(\gamma^2/4)-\omega_0^2}}\right].$$

23.5. Обозначим через $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$ — комплексные токи, протекающие через точки A и B. Тогда, очевидно,

$$\hat{I}_1 2R=\hat{I}_2\left(R'+\frac{1}{i\omega C}\right)=\hat{V}.$$

Определив токи, найдем

$$\hat{V}_A = \hat{I}_1 \cdot R = \frac{\hat{V}}{2}, \qquad \hat{V}_B = \hat{I}_2 R' = \frac{\hat{V}R'}{R' + (1/i\omega C)}.$$

Далее,

$$\hat{V}_{AB} = \hat{V}_A - \hat{V}_B = \frac{\hat{V}}{2} - \frac{\hat{V}R'}{R' + (1/i\omega C)} = \\ = -\frac{\hat{V}}{2}\,\frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)}.$$

Так как можно представить

$$R' \pm \frac{i}{\omega C} = e^{\pm i\varphi} \sqrt{R'^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,(1/\omega C R')$, то

$$\frac{R' + (i/\omega C)}{R' - (i/\omega C)} = e^{2i\varphi}.$$

Таким образом, найденное выражение для разности потенциалов $\hat{V}_{AB}$ можно представить в виде произведения модуля комплексного числа, равного $V/2$, на фазовый множитель. Фаза разности потенциалов $\hat{V}_{AB}$ при этом равна

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega C R'} + \pi.$$

Так как при изменении x от 0 до ∞ функция $\operatorname{arc\,tg} x$ меняется в пределах от 0 до $\pi/2$, то, меняя R' (в пределах от 0 до ∞), можно менять фазу $\hat{V}_{AB}$ от π до 0.

23.6. а) Введем комплексную э.д.с. $\hat{V}_{вх} = V_0 e^{i\omega t}$, так что $V_{вх} = \operatorname{Re} \hat{V}_{вх}$. Так как полный импеданс цепи A равен $\hat{Z} = R + (1/i\omega C)$, а полный импеданс цепи B равен $i\omega L + R'$, то

$$\hat{I}_A(t) = \frac{\hat{V}_{вх}}{R + (1/i\omega C)}, \qquad \hat{I}_B(t) = \frac{\hat{V}_{вх}}{R' + i\omega L}.$$

Очевидно, что

$$\hat{V}_A(t) = \hat{I}_A(t)\,\frac{1}{i\omega C} = \frac{\hat{V}_{вх}(t)}{1 + i\omega C R},$$

$$\hat{V}_B(t) = \hat{I}_B(t) R' = \frac{\hat{V}_{вх}(t)}{1 + (i\omega L/R')}.$$

Если $\hat{V}_A(t) = \hat{V}_B(t)$, то $i\omega C R + 1 = i\omega\,(L/R) + 1$.

Отсюда следует, что должно выполняться соотношение

$$CRR' = L.$$

б) Определяя вещественную часть найденных выражений для $\hat{I}_A$ и $\hat{I}_B$, находим

$$I_A(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi_A)}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}}, \qquad I_B(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \varphi_B)}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L^2}},$$

где

$$\varphi_A = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega C R}, \qquad \varphi_B = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R'}.$$

К главе 24. ***Переходные решения***

24.1. Если направить ось x вдоль направления движения тела, то уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде $x = Ae^{\alpha t}$, то легко найти, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\gamma$. Следовательно, общее решение этого уравнения можно представить так:

$$x(t) = A + Be^{-\gamma t}.$$

Если начальные условия выбрать в форме

$$x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0,$$

то находим

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}),$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\gamma t}.$$

Так как

$$x = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}), \quad \text{то} \quad e^{-\gamma t} = 1 - \frac{\gamma x}{v_0}.$$

Следовательно,

$$v(x) = v_0 - \gamma x.$$

24.2. Для заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Так как напряжение на конденсаторе связано с зарядом

соотношением $q(t)/C = V(t)$, то можно написать

$$CRV + \frac{dV}{dt} = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $V(0) = V_0$, имеет вид

$$V(t) = V_0 e^{-t/CR}.$$

24.3. Уравнение движения тела вдоль оси x можно записать в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} = F_0,$$

или

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}.$$

а) В установившемся движении скорость тела будет постоянна, т. е. $dv/dt = 0$. Отсюда

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma}.$$

б) Попытаемся найти решение неоднородного уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F_0}{m}$$

в виде суммы решения однородного уравнения $\dot{v} + \gamma v = 0$ и любого решения неоднородного уравнения. В качестве последнего можно выбрать

$$v_{\text{стац}} = \frac{F_0}{m\gamma} = \text{const}.$$

Так как общее решение однородного уравнения имеет вид $v = Ae^{-\gamma t}$, где A — произвольная константа, то

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma} + Ae^{-\gamma t}.$$

Непосредственной проверкой мы убеждаемся, что получили самое общее решение исходного уравнения.

в) Если тело в начальный момент времени $t = 0$ покоилось, то $v(0) = 0$, $x(0) = 0$. Используя первое из этих условий, находим

$$v(t) = \frac{F_0}{m\gamma}(1 - e^{-\gamma t}).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma}t + \frac{F_0}{m\gamma^2}e^{-\gamma t} + B,$$

Учитывая, что $x(0)=0$, находим

$$B=-\frac{F_0}{m\gamma^2}.$$

Следовательно,

$$x(t)=\frac{F_0}{m\gamma}\left[t-\frac{1}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)\right].$$

24.4. Для мгновенного значения заряда на обкладках конденсатора можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0.$$

Обозначим $\omega^2=1/LC$. Тогда написанное выше уравнение приобретает вид уравнения гармонического колебания: $\ddot{q}+\omega^2 q=0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

Начальное условие состоит в том, что $V_0=q(0)/C$ при $t=0$ и ток в начальный момент времени равен нулю, т. е. $dq/dt=0$. Определяя из этих условий константы A и B, находим

$$q(t)=V_0C\cos\omega t$$

а) Так как в каждый момент времени напряжение на конденсаторе равно $V(t)=q(t)/C$, то

$$V(t)=V_0\cos\omega t, \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

б) Используя этот результат, находим, что запасенная в конденсаторе электростатическая энергия, равная $CV^2/2$, и энергия магнитного поля в катушке $LI^2/2$ изменяются со временем по закону

$$\frac{1}{2}CV_0^2\cos^2\omega t \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}CV_0^2\sin^2\omega t.$$

Сумма названных выше энергий, как нетрудно видеть, равна энергии $^1/_2CV_0^2$, первоначально запасенной в конденсаторе.

24.5. После того как цепь разомкнута, ток будет течь через LC-контур. При этом задача становится эквивалентной задаче **24.4**, но с другими начальными условиями. Именно, в данной задаче

$$q(t=0)=0 \text{ и } I(t=0)=\left.\frac{dq(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{V_0}{R},$$

Так как, согласно решению задачи **24.4**, мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора можно представить в виде

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = 1/\sqrt{LC}$, то с учетом начальных условий находим напряжение на конденсаторе в момент времени $V(t) = q(t)/C$:

$$V(t) = \frac{V_0}{C\omega R}\sin\omega t = \frac{V_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Из этого выражения видно, что максимальное напряжение на конденсаторе (амплитуда напряжения) равно

$$\frac{V_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

24.6. а) Уравнение движения тела до включения замедлителя в буквенных обозначениях имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\ сек^{-1}.$$

После включения замедлителя уравнение движения имеет другой вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \gamma\frac{dx}{dt} = 0.$$

Общее решение последнего уравнения найдено в гл. 24 «Лекций» (вып. 2). Как следует из этого решения, амплитуда колебаний тела уменьшается со временем по закону $\exp(-\gamma t/2)$, причем новый период колебания равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}.$$

За 10 полных циклов, т. е. за время

$$t_0 = \frac{20\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}},$$

по условию задачи амплитуда колебания уменьшается в два раза, т. е. справедливо соотношение $^1/_2 = e^{-\gamma t_0/2}$. Отсюда находим

$$\gamma = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\frac{1}{4} + (10\pi/\ln 2)^2}} \approx \frac{\ln 2}{5}\ сек^{-1} \ll \omega_0.$$

Следовательно, в системе единиц МКС

$$5\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}693\frac{dx}{dt}+20\pi^2x=0.$$

б) Так как $\gamma \ll \omega_0$, то

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}}\approx\frac{2\pi}{\omega_0(1-\gamma^2/8\omega_0^2)}\approx$$

$$\approx T_0\left(1+\frac{\gamma^2T_0^2}{32\pi^2}\right)=1{,}006\ сек.$$

в) Если амплитуда уменьшается в 4 раза, то $\exp(-\gamma t_1/2)=1/4$, т. е. $t_1\approx 4\ln 2/\gamma\approx 20$ *сек*. Так как период колебания равен $T\approx T_0=1$ *сек*, то уменьшение амплитуды колебания в 4 раза произойдет за 20 полных колебаний, а в 10 раз примерно за 33 или 34 полных колебания.

г) Скорость диссипации энергии, т. е. теряемая из-за сопротивления мощность, равна

$$P=\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Решение уравнения движения имеет вид

$$x(t)=e^{-(\gamma/2)(t-t_0)}\left[A\cos(t-t_0)\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}+\right.$$

$$\left.+B\sin(t-t_0)\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\right]\approx$$

$$\approx e^{-(\gamma/2)(t-t_0)}[A\cos\omega_0(t-t_0)+B\sin\omega_0(t-t_0)].$$

Здесь мы учли, что $\gamma\ll\omega_0$. Нисколько не уменьшая общности вывода, предположим, что в момент включения затухания, т. е. при $t=t_0$ тело двигалось таким образом, что $A=0$ (ведь начальное состояние тела в условии задачи не фиксировано!). Отсюда

$$P=\gamma m\omega_0^2e^{-\gamma(t-t_0)}B^2\cos^2\omega_0(t-t_0).$$

Из этого выражения видно, что скорость диссипации энергии была максимальна при $t=t_0$. В этот момент времени она была равна $\gamma m\omega_0^2B^2$. Согласно условию задачи, $B=0{,}2$ *м*, $\gamma=0{,}693$, $m=5$, $\omega_0^2=4\pi^2$. Отсюда находим $P=1{,}1$ *вт*.

24.7. 1) Уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\gamma\dot{x}=\frac{F(t)}{m},$$

где $\omega_0^2=k/m$.

а) Так как при $t \leqslant 0$ сила на осциллятор не действовала, то в начальный момент времени он покоился (ведь осциллятор с затуханием!). Общим решением уравнения движения при $t > 0$ (действующая сила постоянна!) является решение

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left(A\cos t\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + B\sin t\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Учитывая начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, находим

$$A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}, \qquad B = -\frac{\gamma F_0}{2m\omega_0^2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\left[1 - e^{-\gamma t/2}\left(\cos t\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{\gamma\sin t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}\right)\right],$$

Мы предполагали выше, что $\omega_0^2 > \gamma^2/4$. В противном случае, когда $\omega_0^2 < \gamma^2/4$, и, следовательно,

$$\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2},$$

учитывая, что $\sin ix = i\,\mathrm{sh}\,x$ и $\cos ix = \mathrm{ch}\,x$, общее решение запишем в виде

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[1 - e^{-\gamma t/2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,t + \frac{\gamma\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}}{2\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}}\right)\right].$$

б) В этом случае общее решение уравнения движения записывается в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left(A\cos\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t + B\sin\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t\right),$$

где A и B — постоянные интегрирования, которые надлежит определить из начальных условий: $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = J_x/m$. В результате находим

$$x(t) = \frac{J_x}{m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}e^{-\gamma t/2}\sin\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t.$$

в) Найдем вначале частное решение уравнения движения. Будем искать его в виде $x_1(t) = D \sin \omega_0 t$. Подставив это выражение в уравнение движения, определим константу D

$$D = \frac{F_0}{\gamma m \omega_0}.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left(A \cos \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t + B \sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t\right) + \frac{F_0}{\gamma m \omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, в рассматриваемом случае находим

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0}{\gamma m}\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{F_0}{\gamma m}\left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}\, e^{-\gamma t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t\right).$$

2) Будем искать частное решение неоднородного уравнения движения в виде $x_1(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$. Подставляя это выражение в исходное уравнение и приравнивая отдельные коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, находим

$$C(\omega_0^2 - \omega^2) + D\omega\gamma = \frac{F_0}{m},$$
$$-C\omega\gamma + D(\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Отсюда следует

$$C = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]}, \qquad D = \frac{\omega\gamma F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]}.$$

Следовательно, общее решение уравнения движения в данном случае имеет вид

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left(A \cos \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t + B \sin \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t\right) + \frac{F_0}{\sqrt{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega\gamma}\right).$$

За достаточно большое время $t \gg 2/\gamma$ решение, отвечающее собственным затухающим колебаниям, обратится в нуль, а основными останутся лишь вынужденные колебания. Амплитуда последних резонансно зависит от частоты, из приведенного выражения видно, что наибольшей амплитудой обладают колебания с часто-

той $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$. При этом амплитуда «резонансного» колебания равна $F_0/m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$.

К главе 25. ***Линейные системы***

25.1. Согласно условию задачи,

$$V_{вх}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t,$$

где $\omega = 120$ *сек*$^{-1}$. Дифференциальное уравнение, описывающее напряжение на конденсаторе, т. е. $V_{вых}(t)$, имеет вид

$$CR\frac{dV_{вых}}{dt} + V_{вых}(t) = V_{вх}(t) = V_0 + V_2 \cos \omega t.$$

Решение соответствующего однородного уравнения легко найти. Оно имеет вид

$$V_{вых}(t) = Ae^{-t/RC}.$$

Эта часть решения существенна лишь в начальные моменты времени работы выпрямительного устройства. Она за времена, большие чем RC, экспоненциально быстро обратится в нуль, и ее можно в дальнейшем игнорировать.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$V^{(1)}_{вых}(t) = V_0 + B \cos \omega t + D \sin \omega t.$$

Подставляя $V^{(1)}_{вых}$ в исходное дифференциальное уравнение и по отдельности приравнивая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в правой и левой частях уравнения, находим

$$V^{(1)}_{вых}(t) = \frac{V_2}{1 + C^2R^2\omega^2}[\cos \omega t + \omega CR \sin \omega t] + V_0.$$

Из этого выражения видно, что постоянная составляющая напряжения остается той же, но амплитуда переменной составляющей равна

$$V_2' = \frac{V_2}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}}.$$

Подставляя в это выражение $R = 10^3$ *ом*, $C = 10$ *мкф*, $\omega = 2\pi \cdot 120$ *сек*$^{-1}$, находим $V_2' = V_2/7{,}6$, т. е. амплитуда переменной составляющей уменьшается в 7,6 раза.

25.2. Дифференциальное уравнение, определяющее изменение со временем напряжения на конденсаторе $V_1(t)$, имеет вид

$$CR\frac{dV_1}{dt} + V_1(t) = V_{вх}(t).$$

Так как, согласно схеме цепи, $V_{вх}=V_1+V_{вых}$, то

$$V_{вых}=CR\frac{dV_{вх}}{dt}+CR\frac{dV_{вых}}{dt}.$$

Если $|V_{вых}|\ll|V_{вх}|$, то получим $V_{вых}(t)=CR\,(dV_{вх}/dt)$.

25.3. Используя уравнение для $V_{вых}$, найденное в предыдущей задаче, запишем

$$V_{вых}+CR\frac{dV_{вых}}{dt}=-CRV_0\omega\sin\omega t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V_{вых}=Ae^{-t/CR}+\frac{CR\omega V_0}{1+C^2R^2\omega^2}(CR\omega\cos\omega t-\sin\omega t).$$

Из этого выражения видно, что условие $|V_{вых}|\ll|V_{вх}|$, фигурирующее в предыдущей задаче, сводится к условию $CR\omega\ll1$, т. е. $T\gg1/CR$. Следовательно, уже за время, меньшее одного периода колебаний, первый член в выражении для $V_{вых}$ станет пренебрежимо малым и выходное напряжение можно представить в виде

$$V_{вых}=-CRV_0\omega\sin\omega t=CR\frac{d}{dt}V_{вх}(t).$$

25.4. Простейшей цепью, с помощью которой можно было бы интегрировать входную функцию, является цепь, изображенная на рисунке в условии к задаче **25.2** (стр. 77), но в которой $V_{вх}$ и $V_{вых}$ поменялись местами. В этом случае, используя результат задачи **25.2**, можно записать

$$\frac{d}{dt}V_{вых}(t)=\frac{1}{CR}V_{вх}(t)$$

или

$$V_{вых}(t)=\frac{1}{CR}\int V_{вх}(t)\,dt.$$

25.5. а) На тело, сдвинутое на расстояние x от центральной точки, действуют две упругие силы: со стороны правой пружины сила, равная $-\frac{k}{2}x$, и со стороны левой — сила, равная $-\frac{k}{2}x$. Суммарная упругая сила, таким образом, равна $-kx$. В предположении о постоянстве коэффициента трения f сила трения равна по величине fmg, где g — ускорение, и направлена всегда против движения. В отсутствие трения движение тела описывалось бы дифференциальным уравнением $\ddot{x}+\omega^2x=0$, где ω — частота колебаний, равная $\omega=\sqrt{k/m}$. В течение

интервала времени $0 < t < \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, т. е. в первый полупериод колебания, тело двигалось бы налево. Если учесть трение, то при движении налево на тело действовала бы сила трения, равная fmg. Уравнение движения для этого временно́го интервала записывается следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = fg.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C\cos\sqrt{\frac{k}{m}} + D\sin\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{mfg}{k}.$$

Удовлетворяя начальным условиям $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, находим, что для $0 < t < \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$x(t) = \left(A - \frac{fmg}{k}\right)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mfg}{k}.$$

Из этого решения следует, что в момент времени $t = \pi\sqrt{m/k}$ тело достигнет крайней левой точки $x = -[A - (2mfg/k)]$, остановится, а затем начнет двигаться вправо. Даже без решения уравнения движения в следующий полупериод колебания ясно, что за половину периода сила трения каждый раз приводит к уменьшению амплитуды колебания на величину, равную $2mfg/k$.

б) Если тело n раз пересечет точку $x = 0$, то из вышеприведенного рассуждения следует, что амплитуда колебания тела станет равной

$$A - n\frac{2mfg}{k}.$$

Чтобы размах колебания тела после n пересечений точки $x = 0$ оставался больше B, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$B \leqslant A - n\frac{2mfg}{k},$$

т. е. должно быть

$$A \geqslant B + n \cdot \frac{2mfg}{k}.$$

3

ИЗЛУЧЕНИЕ • ВОЛНЫ • КВАНТЫ

К главе 26. ***Оптика. Принцип наименьшего времени***

26.1. а) Обозначим через x расстояние от точки K до стены. Тогда время T, затраченное на ходьбу, выражается через x следующим образом:

$$T(x) = \frac{42-x}{1{,}5} + \frac{\sqrt{x^2+36^2}}{0{,}9}.$$

Необходимо найти величину $x=x_0$, при которой это время минимально. Она находится из условия, чтобы первая производная dT/dx обращалась в нуль при $x=x_0$:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=x_0} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получаем квадратное уравнение $1{,}8\sqrt{x_0^2+36^2} - 3x_0 = 0$. Его положительный корень $x_0 = 27$, что соответствует $AK = 15$ *м*.

б) Подставляя $x = x_0 = 27$ *м* в $T(x)$, находим кратчайшее время $T_{\text{мин}} = 60$ *сек*.

в) Вблизи минимума функцию $T(x)$ можно приближенно представить в виде

$$T(x) \approx T(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2.$$

Вычисляя вторую производную в точке x_0 и подставляя в приближенную формулу $x - x_0 = \pm 3$ *м*, получаем $T = 60{,}1$ *сек*. Точность этого приближения можно проверить непосредственным вычислением $T(x_0 \pm 3)$ по точной формуле.

26.2. Пусть луч распространяется горизонтально. Обозначим угол, образуемый нормалью к пластине с горизонталью, через α (он равен углу падения), угол преломления через β, толщину пластины через l. Тогда по условиям задачи

$$\alpha = \beta + 30^\circ \quad \text{и} \quad n = 1{,}5 = \frac{\sin(\beta+30^\circ)}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\beta + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\beta = \operatorname{arcctg}(3-\sqrt{3}) = 38^\circ;$$

отсюда

а) $$PP' = \frac{l \sin 30^\circ}{\cos \beta} = 0{,}127 \text{ м}.$$

б) Время прохождения в воздухе $t = 1$ м/с (c — скорость света в воздухе). При наличии пластины полное время прохождения

$$t' = t - \frac{l \cos 30^\circ}{c \cos \beta} + \frac{ln}{c \cos \beta}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$\frac{t - t'}{t} = 16\%.$$

26.3. Пусть b — толщина края линзы, d — ее толщина по оси, радиус $h = 0{,}1$ м. Тогда времена прохождения равны: для «периферического» луча

$$t' = \frac{(2\sqrt{(SC - b/2)^2 + h^2} + bn)}{c},$$

для «центрального» луча

$$t_2 = \frac{2SC + d(n-1)}{c}.$$

Приравнивая их, получаем соотношение для определения d. Подставляя в него численные значения, получаем $d \approx 20$ мм.

26.4. В действительности у зеркального изображения меняются местами не «правая и левая рука», а «лицо и затылок» — зеркало выворачивает изображение вдоль оси, перпендикулярной поверхности зеркала, а оси справа налево и сверху вниз не преобразуются совсем.

26.5. Потому что мы видим в таком зеркале двукратно отраженное изображение.

26.6. Разберем лишь нетривиальный случай, когда падающий луч испытывает трехкратное отражение. Для этого он должен быть не параллелен ни одной из плоскостей, образующих трехгранный угол. В противном случае он испытывает не больше двух отражений и движется все время в одной плоскости.

Очевидно справедливы следующие два утверждения:

а) углы падения и отражения проектируются как равные на любую плоскость, перпендикулярную отражающей плоскости;

б) отраженный и падающий лучи проектируются на отражающую плоскость в одну прямую.

Рассмотрим проекцию хода луча на каждую из граней угла. Из двух высказанных утверждений следует, что это будет ломаная линия из трех отрезков, у которой смеж-

ные отрезки образуют равные углы с линиями — проекциями двух остальных граней угла на рассматриваемую грань. Следовательно, отрезки, не имеющие общих точек, параллельны. Эти отрезки будут проекциями падающего и выходящего лучей на рассматриваемую плоскость. Две линии, проекции которых на все координатные плоскости параллельны, являются параллельными прямыми, что и доказывает утверждение задачи.

26.7. Показатель преломления для перехода луча из оптически более плотной среды в менее плотную $n_{12} < 1$. Согласно закону преломления, $\sin\theta_2 = \sin\theta_1/n_{12}$. Когда $\sin\theta_1$ становится больше n_{12}, равенство не может выполняться и, следовательно, преломления не происходит — свет отражается от границы раздела как от зеркала (явление «полного внутреннего отражения»).

К главе 27. ***Геометрическая оптика***

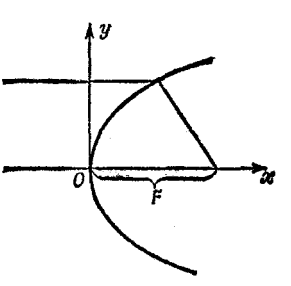
27.1. Время хода для осевого луча должно быть равно времени хода для произвольного луча, проходящего через точку с координатами x и y, лежащую на преломляющей поверхности. Разность этих времен равна

$$\frac{x}{c} + \frac{n\sqrt{y^2 + (F-x)^2}}{c} - \frac{F}{c},$$

где c — скорость света в воздухе.

Приравнивая эту разность нулю, получаем искомое уравнение поверхности. Разрешая его относительно y, приходим к выражению

$$y = \pm\frac{1}{n}\sqrt{2xFn(n-1) - x^2(n^2-1)}.$$



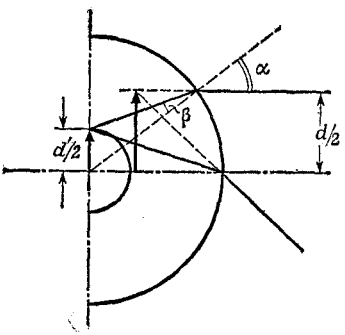
27.2. На рисунке изображен поперечный разрез капиллярной трубки. Нужно построить изображение радиуса капилляр-

ного отверстия, создаваемое стенкой трубки, которая действует как толстая цилиндрическая линза. Способ построения ясен из чертежа; из закона преломления и рассмотрения треугольников на рисунке вытекают следующие соотношения:

$$d = D \sin\alpha; \quad \sin\alpha = n \sin\beta;$$

$$\frac{d'}{D} = \frac{\sin\beta}{\sin(180° - \beta - 90° + \alpha)} = \frac{\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

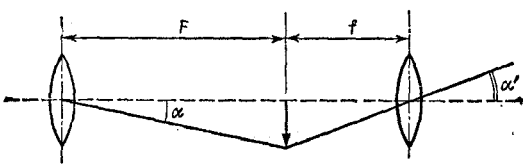
Исключая из них α и β, можно получить довольно громоздкое точное выражение для d через d', D и n. Интересно простое приближенное выражение для случая, когда $d \ll D$. Тогда углы α и β (и, следовательно, $\alpha - \beta$) малы, и в точном выражении $d = d'n\cos(\alpha - \beta)$, следующем из выписанных соотношений, можно положить в первом приближении косинус равным единице. Тогда $d = d'n$.



27.3. Эта поверхность — эллипсоид вращения с фокусами в точках P и P' (см. «Лекции», § 4 гл. 26, вып. 3, стр. 13).

27.4. Эта задача на расчет простейшей подзорной трубы. Первая линза — объектив, вторая — окуляр. Как следует из рисунка, угловое увеличение

$$M = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y/f}{y/F} = \frac{F}{f}.$$



27.5. Поскольку глаз располагается вплотную за линзой, он может рассматривать лишь *мнимое* изображение, располагающееся по ту же сторону линзы, что и предмет (см. рисунок).
Для получения мнимого изображения предмет должен быть расположен *между* фокусом и линзой, и в формуле линзы

нужно брать отрицательное расстояние S_1:

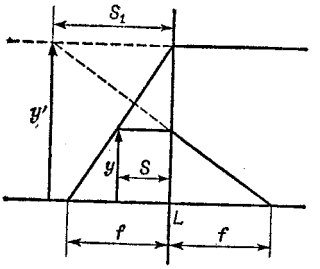
$$\frac{1}{S}-\frac{1}{S_1}=\frac{1}{f}; \qquad S=\frac{fS_1}{S_1+f}; \qquad S_{\text{макс}}=5\ см\ (S_1=\infty);$$

$$S_{\text{мин}}=4{,}16\ см \quad (S_1=25\ см).$$

Угловое увеличение, как следует из рисунка, равно

$$M=\frac{y'}{y}\frac{S}{S_1}=\frac{S(S_1+f)}{S_1 f}.$$

В первом случае $M=1$, во втором $M=1{,}66$.



27.6. Пусть $S=10\ м$ — расстояние от объекта до положительной линзы, Δ — расстояние между линзами, которые расположены в точках O_1 и O_2 соответственно (см. рисунок).

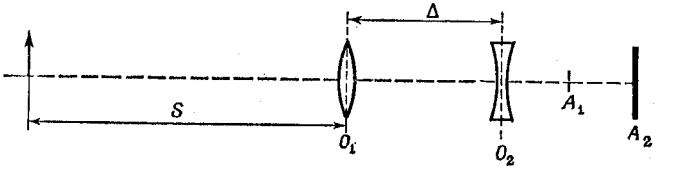
Положительная линза создает изображение предмета в точке A_1; это изображение «рассматривается» отрицательной линзой, которая создает изображение в точке A_2, где и должна быть помещена фотопластинка. Нужно найти расстояние O_2A_2. Для этого можно дважды последовательно применить уравнение линзы в форме $x\cdot x'=f^2$. В первом случае $x_1=S-f_1$, $x_1'=O_1A_1-f_1$; отсюда определим

$$O_1A_1=f_1+x_1'=f_1+\frac{f_1^2}{x_1}=30{,}93\ см,$$

$$O_2A_1=O_1A_1-\Delta=3{,}43\ см.$$

Во втором случае $x_2=-f_2-O_2A_1=6{,}57\ см$. Искомое расстояние

$$O_2A_2=x_2'-f_2=\frac{f_2^2}{x_1}+10\ см=25{,}25\ см.$$



27.7. В обоих случаях нужно найти величину x' — расстояние от главного фокуса до изображения; $x'=f^2/x$, где f — фокусное расстояние, а x — расстояние до Луны или спутника. В случаях (а) и (б) соответственно получаем значения

$$x'=6{,}65\cdot 10^{-2}\ мм \text{ и } 80\ мм.$$

27.8. Из определения главных плоскостей оптической системы следует их важное свойство: если точка находится в главной плоскости на расстоянии y от оптической оси, то ее изображение получается в другой главной плоскости *на том же расстоянии* от оптической оси. Этим свойством главных плоскостей мы и воспользуемся для решения задачи. Построение изображения точки, расположенной в главной плоскости, производится на рисунке. Очевидны следующие соотношения:

$$y=f\operatorname{tg}\varphi=F\operatorname{tg}\Phi;\quad y'=\operatorname{tg}\varphi\,(D-f)=\operatorname{tg}\Phi\,(f'+x).$$

Из уравнения линзы для L' следует также

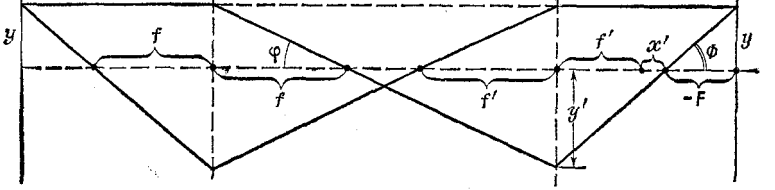
$$f'^2=x'\,(D-f-f').$$

Исключая отсюда углы φ и Φ, а также расстояние x_i получаем

$$F=\frac{ff'}{D-f-f'};\quad \Delta'=f'+x'+F=\frac{f'D}{D-f-f'}.$$

Из аналогичного рассмотрения для линзы L:

$$\Delta=\frac{fD}{D-f-f'}.$$



К главе 28. ***Электромагнитное излучение***

28.1. а) $A=re^{i\varphi/2}+re^{-i\varphi/2}=r\cos\varphi/2+ir\sin\varphi/2+r\cos\varphi/2-ir\sin\varphi/2=2r\cos\varphi/2=|A|$ — чисто вещественное число, равное с точностью до знака своему модулю.
Геометрическая интерпретация: складываются два вектора

длиной r, один из которых образует с осью x угол $\varphi/2$, а другой $-\varphi/2$.

б) Воспользуемся общей формулой для суммы произвольного числа членов геометрической прогрессии (она выполняется и для комплексных чисел). Первый член прогрессии r, показатель $e^{i\varphi}$, полное число членов N:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi} = r\,\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}};$$

$$|A| = r\,\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin\varphi/2}.$$

Геометрическая интерпретация: складываются N векторов длиной r, первый из которых направлен по оси абсцисс, а каждый последующий повернут относительно предыдущего на угол φ.

К главе 29. ***Интерференция***

29.1. Если обозначить амплитуду поля, создаваемого первой антенной, через A_1, то аналогичная величина для второй антенны есть $A_2 = \sqrt{2}\,A_1$. Разность фаз между двумя антеннами в зависимости от угла θ, отсчитываемого от направления «на восток», равна $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi d \sin\theta/\lambda = \pi\sin\theta$ в нашем случае. Тогда по общей формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$I = I_0\left[1 + 2 + 2\sqrt{2}\cos(\pi\sin\theta)\right].$$

Для направлений, указанных на рис. 29.5 (см. «Лекции», вып. 3, стр. 52) получим

$$I(0) = 5{,}8I_0; \quad I(30^\circ) = 3I_0; \quad I(90^\circ) = 0{,}17I_0.$$

29.2. При указанной частоте расстояние между соседними излучателями равно четверти длины волны и, следовательно, полная разность фаз между ними в зависимости от угла есть $\Delta\varphi = \pi/2\,(1 - \sin\theta)$. Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды, можно воспользоваться результатом задачи **28.1** (б). Подставив в него $N = 4$ и возводя в квадрат, находим

$$I \sim |A|^2 \sim \frac{\sin^2\pi\,(1-\sin\theta)}{\sin^2[\pi\,(1-\sin\theta)/4]}.$$

29.3. На рисунке схематически изображен радиотелескоп с расстоянием между чашами-приемниками 1 и 2, равным d. Телескоп регистрирует сигналы от удаленного источника. Малое изменение углового положения источника приводит

к фазовому сдвигу $\Delta\varphi$ между сигналами, поступающими в приемники. Этот сдвиг по общей формуле связан с углом $\Delta\theta$ следующим образом:

$$\Delta\varphi = \frac{d \sin\theta \cdot \Delta\theta \cdot 2\pi}{\lambda}$$

(λ — длина волны радиоизлучения). Сигналы равной амплитуды A от двух приемников смешиваются (векторно складываются), поэтому интенсивность I выходного сигнала есть

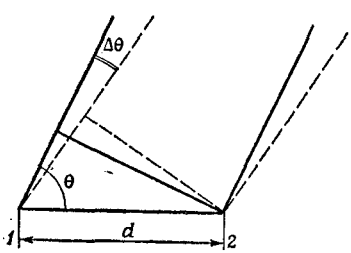
$$I = 2A^2(1+\cos\Delta\varphi) = 4A^2\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 4A^2\left[1-\frac{(\Delta\varphi)^2}{4}\right].$$

По условиям задачи минимально регистрируемое колебание интенсивности равно 10%, что соответствует $(\Delta\varphi)^2/4 = 0{,}1$. Отсюда, полагая $\sin\theta \approx 1$, находим

$$\Delta\varphi = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63 = 2\pi\frac{480}{0{,}5}\Delta\theta$$

и

$$\Delta\theta \approx 10^{-4}\,рад = 21''.$$



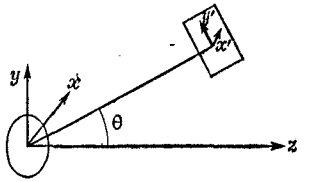
29.4. Круговое движение есть наложение двух колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях с разницей фаз $\pi/2$ (см. «Лекции», § 1 гл. 33, вып. 3, стр. 116). Компоненты электрического поля в плоскости, перпендикулярной лучу (см. рисунок), согласно формуле (29.3) «Лекций» (вып. 3, стр. 49), равны

$$E_{y'} = -q\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{a\omega^2\cos\left(\omega t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2},$$

$$E_{x'} = -q\frac{a\omega^2\cos\left(\omega t-\frac{r}{c}-\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}.$$

В плоскости орбиты $E_{y'}=0$ и интенсивность излучения пропорциональна $\cos^2[\omega t-(r/c)-\pi/2]$. На оси орбиты вектор

электрического поля сохраняет свою длину и равномерно вращается, поэтому интенсивность от времени не зависит и вдвое превышает среднюю интенсивность в плоскости орбиты на том же расстоянии от источника.



29.5. Амплитуда излучения в направлении, образующем угол $(\pi/2)-\theta$ к линии диполей в экваториальной плоскости, имеет вид (в комплексной форме)

$$A = r\,(1+e^{i\Delta\varphi_2})\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi_1}.$$

Здесь N — число диполей в каждой линии; r — амплитуда каждого диполя; $\Delta\varphi_1 = \pi\sin\theta$ — сдвиг фаз между соседними диполями в каждой линии; $\Delta\varphi_2 = \pi/2\,(1-\sin\theta)$ — сдвиг фаз между соответствующими диполями в разных линиях. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, поэтому интенсивность

$$I \sim |A|^2 = \frac{2r^2\sin^2\varphi_2\cdot\sin^2 N\Delta\varphi_1}{\sin^2\Delta\varphi_1}.$$

Картина интенсивности, получающаяся в случае одного ряда диполей, «модулируется» в случае двойного ряда множителем

$$2\sin^2\frac{\pi}{2}(\sin\theta-1).$$

29.6. Ускорение каждого из электронов равно $a\omega^2\cos(\omega t-\varphi_0)$, и все электроны можно рассматривать как осцилляторы, излучающие в фазе. Если ρ — число электронов на единицу длины проволоки, их полное число равно $L\rho$ и искомое поле находится согласно общей формуле

$$E = \frac{-q\sin\theta L\rho\, a\omega^2\cos(\omega t - r/c+\varphi_0)}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}.$$

29.7. Вектор напряженности электрического поля излучения лежит в этом случае в вертикальной плоскости и длина его пропорциональна $\sin\theta$ (см. рисунок в условии задачи, стр. 85). Следовательно, интенсивность излучения на заданном расстоянии от источника, пропорциональная среднему квадрату напряженности, может быть записана в виде $I = C\sin^2\theta$ (C — подлежащая определению постоянная).

Константу C при заданном R можно найти, приравнивая полный поток излучения через сферу радиуса R в единицу времени, т. е. интеграл от I по сфере, полной мощности передатчика:

$$\int I\,dS = 2\pi R^2 C \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta = C\frac{8\pi}{3}R^2 = 0{,}5\ вт.$$

При $R = 2{,}5\cdot 10^4$ *м*, $C = 0{,}5\ вт\cdot 3/8\pi R^2 = 10^{-10}\ вт/м^2$. По условиям задачи $\theta = 45°$, поэтому искомая интенсивность есть

$$I(45°) = \frac{C}{2} = 0{,}5\cdot 10^{-10}\ вт/м^2.$$

К главе 30. ***Дифракция***

30.1. Разрешающая способность связана с порядком спектра и числом линий решетки n соотношением $\lambda/\delta\lambda = mn$. По условиям задачи $m = 1$, $\Delta\lambda = 5{,}90$Å, $\lambda = 5900$Å. Отсюда $n = 1000$, что при плотности линий $600/мм$ соответствует длине решетки 1,7 *мм*.

30.2. Угловая разрешающая способность глаза $\theta = 1{,}22\lambda/L$, где λ — длина волны света, а L — диаметр зрачка. Приравнивая эту величину углу l/R, под которым интервал между фарами l виден с расстояния R, получаем

$$R = \frac{l\cdot L}{1{,}22\lambda} \approx 9\ км.$$

Сложный спектральный состав белого света затрудняет разрешение двух источников — «изображения» их, соответствующие длинноволновой части спектра, сливаются раньше.

30.3. а) Щель спектрографа параллельна оси, вокруг которой поворачивается решетка, поэтому независимо от угла ее поворота длина изображения щели на экране P (а это и есть ширина спектральной полосы) определяется увеличением системы из двух линз, которое равно F_2/F_1. Следовательно,

$$h' = \frac{hF_2}{F_1}.$$

(Не путать ширину *полосы* с шириной *линии* в спектре.)

б) Условие, при котором максимум интенсивности для заданной длины волны λ соответствует направлению, совпадающему с осью C_2, т. е. углу выхода точно θ_d, имеет вид

$$\lambda = \frac{d}{m}\,|\sin\theta_d - \sin\theta_i| = \frac{1}{Nm}\,|\sin\theta_d - \sin\theta_i| = 10^7\text{Å}$$

(m — порядок спектра).

в) Искомое расстояние равно $D=F_2\Delta\theta_d$, где $\Delta\theta_d$ — разность между углами, которые соответствуют максимумам с разницей длин волн 1Å при фиксированном угле θ_i. Дифференцируя соотношение $\sin\theta_d=\sin\theta_i+m\lambda/d$, получаем $\cos\theta_d\Delta\theta_d=m\cdot\Delta\lambda/d$. Отсюда при $\Delta\lambda=1$Å получаем $D=F_2mN\cdot10^{-7}/\cos\theta_d$.

г) Решение аналогично случаю (а) с той разницей, что *ширина* изображения щели в отличие от длины меняется при поворотах решетки и линзы C_2 пропорционально $\cos\theta_i/\cos\theta_d$. Следовательно,

$$w'=\frac{wF_2\cos\theta_i}{F_1\cos\theta_d}.$$

30.4. а) $\sin\theta_i=-\sin\theta_d=\sin\theta$ и условие максимума имеет вид $2\sin\theta=m\lambda/d$. Подставляя численные значения, получаем $\sin\theta=0{,}786$, $\theta=51{,}9°$.

б) Искомые линии содержатся в спектрах других порядков m_i, и их длины волн связаны с длиной волны λ из пункта (а) соотношениями $\lambda_i=5\lambda/m_i$. В пределах видимого спектра укладываются три таких линии, соответствующие $m_i=7$, 6, 4, с длинами волн $\lambda_i=3750$, 4370 и 6560Å.

в) Линию 5250Å можно отделить от остальных трех, подобрав соответствующий фильтр. Общий способ получения сразу спектра высокого порядка состоит в обеспечении значительной начальной разности фаз, соответствующей нескольким длинам волн, между соседними штрихами решетки. Он реализуется в решетках со ступенчатым профилем (см. решение задачи **30.6**).

г) Используя решения задачи **30.3** (в) и подставляя в полученное там выражение для дисперсии угол θ, вычисленный в пункте (а) данной задачи, получаем $D=7{,}8$ *мм*.

д) $\delta\lambda=\lambda/mn$, где n — полное число линий на решетке. Отсюда $\delta\lambda=0{,}007$Å.

30.5. Разрешающая способность характеризует то уширение спектральной линии, которое создается дифракционной решеткой. Нельзя, конечно, различить две спектральные линии, расстояние между которыми меньше, чем это уширение, но длину волны *уединенной* линии измеряют по положению *максимума* интенсивности, а ошибка при измерении положения максимума может быть в несколько раз меньше, чем это уширение.

30.6. а) Прежде всего должны быть в фазе лучи, рассеянные разными «осцилляторами», принадлежащими поверхности одной ступеньки, т. е. от каждой из них свет для получения максимальной интенсивности должен отражаться по закону «угол падения равен углу отражения». Кроме того, должны находиться в фазе лучи от соседних ступенек. Следовательно, для направления, в котором

решетка «блестит», должны выполняться два условия:

$$\varphi = \theta_b, \tag{1}$$

$$d \sin \varphi = m\lambda, \tag{2}$$

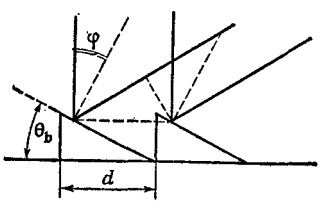
где m — порядок спектра. При значительной величине угла φ равенство (2) может выполняться лишь для достаточно высоких порядков.

б) Искомый угловой интервал можно определить, используя равенство (2). Он равен изменению, которое испытывает угол φ, когда при фиксированном m длина волны λ пробегает весь интервал значений $\Delta\lambda$, соответствующий видимому спектру. Дифференцируя (2), получаем

$$2d \cos \varphi \Delta\varphi = m\Delta\lambda.$$

Подставляя сюда $\varphi = \theta_b$, имеем

$$\Delta\varphi = \frac{m\Delta\lambda}{2d \cos \theta_b}.$$



30.7. При каждом отражении амплитуда волны уменьшается в R раз. При каждом пересечении зазора фаза увеличивается на $2\pi D/\lambda$. Амплитуда волны, испытавшей $2n$ отражений и $2n$ раз пересекшей зазор между поверхностями, есть

$$A_n = TA_0 (Re^{i2\pi D/\lambda})^{2n}.$$

Суммарная амплитуда волны, падающей на правую поверхность, есть

$$A = TA_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \frac{1}{1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}},$$

а полная интенсивность равна A^2. Следовательно, полная интенсивность прошедшего света есть

$$\frac{I}{I_0} = T^2 |A|^2 = \frac{T^4}{|1 - R^2 e^{i4\pi D/\lambda}|^2}.$$

При R, близком к единице, как видно из полученного выражения, для тех длин волн, при которых фаза экспоненты равна четному числу π, интенсивность прошедшего света, равная $(1 - R^2)/2$, может быть очень велика. На этом свойстве и основано использование интерферометра как узкополосного оптического фильтра.

К главе 31. ***Как возникает показатель преломления***

31.1. Воспользовавшись формулой для показателя преломления

$$1-n=-\frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}$$

[см. «Лекции», формула (31.19), вып. 3, стр. 91] и считая $\omega_0 \ll \omega$, найдем

$$1-n=6{,}5\cdot 10^{-7}.$$

Экспериментально найденное значение составляет

$$(1-n)=8{,}4\cdot 10^{-6}.$$

31.2. Порядка 10^6 электронов в 1 *см*^{3}.

31.3. б) При $\omega=\omega_0$ вещественная n' и мнимая n'' части показателя преломления равны $n'=1$ и $n''=Nq^2/2\varepsilon_0 m\gamma\omega$. Так как интенсивность световой волны пропорциональна E^2, то, используя результат, найденный в пункте (а) данной задачи, находим

$$I=I_0 e^{-Nq^2 z/\varepsilon_0 m\gamma\omega}.$$

31.4. а) Здесь удобно воспользоваться выражением для напряженности электрического поля

$$E(t)=-\frac{qa\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 cr},$$

созданного зарядом q на расстоянии r от него в момент времени t, в направлении θ от оси движения заряда (см. «Лекции», вып. 3, стр. 47). Здесь a — ускорение заряда, равное, очевидно, $-\omega^2 x_0\cos\omega t$. Следовательно,

$$E(t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^2 x_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\sin\theta.$$

Так как плотность потока энергии в электромагнитной волне равна $\varepsilon_0 cE^2$, то мощность S, излучаемая через единицу поверхности на расстоянии r под углом θ, равна

$$S=\frac{q^2\omega^4 x_0^2\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta.$$

Чтобы найти полную энергию P, излучаемую в единицу времени электроном, усредним S за период движения

$\overline{(\cos^2 \omega t} = 1/2$) и умножим S на площадь, приходящуюся на элемент телесного угла $d\Omega$:

$$r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Интегрируя затем по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π, найдем

$$P = \frac{q^2\omega^4 x_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

б) Константа затухания, по определению, равна $\gamma_R = P/W$, где W — энергия, запасенная на одно колебание. Отсюда

$$\gamma_R = \frac{q^2\omega^4 x_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{2}{m\omega^2 x_0^2} = \frac{q^2\omega^2}{6\pi m\varepsilon_0 c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{mc^3}.$$

в) Из равенства $\lambda = 2\pi c/\omega$ находим

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c\Delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\pi c}{\omega^2}\gamma_R = \frac{q^2}{3\pi m\varepsilon_0 c^2} = \frac{4\pi r_0}{3} = 0{,}74\cdot 10^{-3}\text{Å}$$

$$\left(r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82\cdot 10^{-15}\ м\right).$$

К главе 32. ***Радиационное затухание, Рассеяние света***

32.1. Пусть $F(t) = E_0 e^{i\omega t}$. Тогда решение уравнения движения заряженного осциллятора имеет вид

$$x = \frac{E_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_R\omega)}.$$

Отсюда следует искомый результат

$$\gamma_R = \frac{2e^2}{3c^2}\omega^2$$

[ср. с выражением для γ_R, найденным в задаче **31.4**, пункт (б)].

32.2. Рассмотрим слой единичной площади и бесконечно малой толщины dx, расположенный перпендикулярно падающему свету. Тогда изменение интенсивности dI света в этом слое равно произведению самой интенсивности на вероятность рассеяться в этом объеме. В этом слое будет Ndx центров. Суммарная эффективная площадь рассеяния равна сумме эффективных сечений рассеяния всех центров в слое (поскольку dx бесконечно малая величина, элементарные пло-

щадки σ не перекрываются друг с другом), т. е. равна $N\sigma\,dx$. Вероятность рассеяния в выделенном слое будет равна отношению площади $N\sigma\,dx$ к единичной площади поверхности слоя, т. е. численно равна $N\sigma\,dx$. Отсюда

$$dI = -IN\sigma\,dx, \quad \text{или} \quad \frac{dI}{dx} = -IN\sigma.$$

Интегрируя получившееся уравнение, находим

$$I = I_0 e^{-N\sigma x}.$$

32.3. Выражение для показателя преломления света имеет следующий вид [см. «Лекции», формула (31.19) вып. 3, стр. 91]:

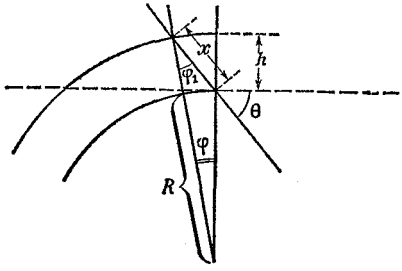
$$n - 1 = \frac{2\pi N q_e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} = 2\pi N c^2 \left(\frac{q_e^2}{m_e c^2}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Возводя обе части этой формулы в квадрат и поделив левую и правые части получающегося выражения на соответственно левую и правую части выражения для σ, получаем соотношение, из которого требуемый результат вытекает уже совсем просто.

32.4. Воспользуемся результатами задач **32.2** и **32.3**. Для воздуха $n - 1 = 0{,}000292$; при атмосферном давлении число молекул в единице объема $N = 6 \cdot 10^{23}/22400 = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$. Толщина атмосферы, приведенная к постоянному давлению в 1 *атм*, равна примерно $h \approx 10$ *км*. Интенсивность солнечного излучения, прошедшего в атмосфере путь x, равна

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} = I_0 e^{-\frac{2(n-1)^2}{3\pi N}\left(\frac{2\pi}{x}\right)^4 x}. \qquad (1)$$

Зависимость x от угла θ, под которым Солнце стоит над горизонтом, можно определить геометрически (см. рисунок):



$$\frac{R+h}{\sin\theta}=\frac{x}{\sin\varphi}=\frac{R}{\sin\varphi'},$$
$$\varphi+\varphi'=\theta$$

(R — радиус Земли). Исключая из этих соотношений φ и φ', получаем

$$x=\sqrt{(R+h)^2-R^2\cos^2\theta}-R\sin\theta.$$

Принимая $R=6400$ *км*, имеем

$$x=h\sqrt{641^2-640^2\cos^2\theta}-640\sin\theta.$$

Подставляя это выражение и числовые данные задачи в формулу (1), получаем $I(90°)/I_0(0)\approx e^{-0{,}32}=73\%$; $I(10°)/I_0\approx e^{-8}\approx 3{,}5\cdot 10^{-4}$.

32.5. Проверить поперечность излучения и поляризовать его можно при рассеянии на свободных электронах (см. § 2 гл. 33 «Лекций», вып. 3, стр. 119).

32.6. Для проведения расчетов необходимо сделать конкретизирующие предположения о распределении электронов в околосолнечном пространстве. Для требуемой оценки можно предположить, что они равномерно заполняют сферу с радиусом вдвое больше солнечного.

Свет, рассеянный в K-короне свободными электронами, будет равномерно излучаться во все стороны и определять яркость свечения короны. Если считать, что каждый квант света рассеивается не больше чем один раз, то на расстоянии, равном солнечному радиусу, будет рассеяна доля полного солнечного излучения, равная

$$r'=(1-e^{-N_e\sigma R}), \qquad (1)$$

где N_e — искомая плотность электронов; $\sigma=8\pi/3\,(e^2/mc^2)^2=6{,}25\cdot 10^{-25}$ *см*^{2} — томпсоновское сечение рассеяния. Этот рассеянный свет излучается сферой, радиус которой вдвое, а поверхность вчетверо больше поверхности Солнца. Поэтому отношение ее яркости к яркости солнечного диска (яркость в данном случае есть количество квантов, испускаемых единицей площади поверхности в единицу времени) есть $r=R'/4$. Поскольку для рассеянного излучения $N_e\sigma R$ и, следовательно, показатель экспоненты в выражении (1) малы, то можно воспользоваться приближенной формулой $e^{-x}\approx 1-x$. Тогда, приравнивая r численному значению из условия задачи, получаем $r=10^{-8}=N_e\sigma R/4$; подставляя $R=7\cdot 10^{10}$ *см*, вычисляем

$$N_e=\frac{4r}{\sigma R}=\frac{4\cdot 10^{-8}}{6{,}25\cdot 10^{-25}\cdot 7\cdot 10^{10}}\approx 10^6\ \text{см}^{-3}.$$

32.7. В гл. 31 «Лекций» получено выражение, связывающее количество энергии излучения, проходящей в 1 *сек* через 1 $м^2$ поверхности, со средней напряженностью поля излучения в этой точке, $S=\varepsilon_0 c\langle E\rangle^2$ (P имеет размерность $вт/м^2$, E — $в/м$). Вспоминая формулу для джоулева тепла $Q=V^2/R$, убеждаемся, что размерность величины $\varepsilon_0 c$ — обратное сопротивление. Численное значение $1/\varepsilon_0 c=377$ *ом*.

32.8. Пока размер частицы R меньше длины волны λ, все рассеивающие атомы излучают с близкими фазами и интенсивность рассеянного света и сечение рассеяния примерно пропорциональны N^2 (N — число атомов в частице), т. е.

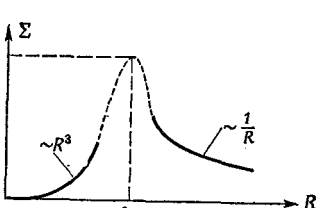
$$\sigma\sim N^2\sim R^6.$$

Тогда сечение рассеяния *единицей массы* $\Sigma=\sigma\cdot n\sim R^3$ ($n\sim 1/R^3$ — число частиц в единице массы). При $R>\lambda$ ситуация меняется — внутрь непрозрачной большой частицы свет не попадает, он рассеивается и поглощается лишь атомами, расположенными на поверхности, и суммарное сечение поглощения и рассеяния примерно равно поперечному сечению частицы: $\sigma=\pi R^2$, а $\Sigma\sim 1/R$. Эта ситуация схематически изображена на рисунке. Значит, эффективность рассеяния единицей массы достигает максимума примерно при $R=\lambda$ и в этом случае $\sigma\approx\pi\lambda^2$. Для оценки можно воспользоваться этим приближенным соотношением. По условиям задачи $N\sigma x=\ln 100$. Искомая масса на единицу площади равна

$$M=Nxm=\frac{m\ln 100}{\sigma},$$

где m — масса одной частицы. Подставляя $m=\frac{4}{3}\pi\lambda^3\rho$, $\rho=1$ $г/см^3$ (плотность льда) и $\lambda=5\cdot 10^{-5}$ *см* (видимый свет), получаем

$$M=3\cdot 10^{-5}\ г/см^3.$$



32.9. а) Сечение рассеяния определяется как отношение полной энергии, излучаемой рассеивающей системой в секунду, к энергии радарного луча, падающей на 1 $м^2$ в 1 *сек*. Все электроны проволоки из-за малой ее длины можно считать колеблющимися в фазе, тогда можно воспользоваться результатами задачи **29.6** (стр. 275), где для

такого случая было получено выражение для поля излучения на больших расстояниях r от проволоки под углом θ к ее оси. Перепишем полученное там выражение в обозначениях данной задачи:

$$E = -q \sin\theta \frac{N\chi E_{\parallel}\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 r c^2} \cos\left(\omega t - \frac{r}{c} + \varphi_0\right).$$

Интенсивность излучения $S = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle$. Интегрируя ее по сфере радиусом r (см. «Лекции», § 2 гл. 32, вып. 3, стр. 103) и подставляя среднее по времени значение квадрата косинуса, равное $^1/_2$, получаем среднюю энергию, излучаемую по всем направлениям:

$$P = \frac{N^2\chi^2\omega^4 q^2 E_{\parallel}^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Относя ее к среднему потоку в радарном луче $P_p = \varepsilon_0 c E_0^2/2$, получаем выражение для сечения

$$\sigma = \frac{N^2\chi^2\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4}\left(\frac{E_{\parallel}}{E_0}\right)^2.$$

б) Поскольку

$$E_{\parallel} = E_0 \cos\theta,$$

где θ—угол между проволокой и направлением падающей волны

$$\sigma \sim \cos^2\theta.$$

К главе 33. ***Поляризация***

33.1. Если начальный пучок неполяризован, то при начальной амплитуде A_0 амплитуда волны после прохождения последовательных поляроидов будет $A_0/\sqrt{2}$, $A_0\cos\theta/\sqrt{2}$ и $A_0\cos\theta\sin\theta/\sqrt{2}$ соответственно. Поэтому окончательная интенсивность

$$I = \frac{I_0}{8}\sin 2\theta.$$

33.2. Выберем ось x по оси первого поляроида и примем амплитуду неполяризованного светового пучка за единицу. Тогда после прохождения первого поляроида составляющие амплитуды по осям будут

$$A_x^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad A_y^{(1)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

После прохождения второго поляроида

$$A_x = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\alpha;$$
$$A_y = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\varepsilon.$$

Окончательная интенсивность прошедшего света

$$\frac{I}{I_0} = A_x^2 + A_y^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^4 + \varepsilon^4\right)\cos^2\theta + \alpha^2\varepsilon^2\sin^2\theta + \\ + (\alpha^2 + \varepsilon^2)\,\alpha\varepsilon\sin 2\theta.$$

33.3. При падении света под углом Брюстера прошедший и отраженный лучи взаимно перпендикулярны, т. е. $\sin r = \cos i$, поэтому

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i,$$

что и требовалось показать.

33.4. Из решения задачи **29.4** следует, что в случае (а) излучение будет поляризовано по кругу, а в случае (б)—линейно поляризовано в плоскости орбиты. Там же были получены формулы для интенсивности.

33.5. Сдвиг фаз вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)\,d,$$

где d—расстояние, пройденное светом. Полагая $\varphi = \pi/2$ и произведя вычисления, находим

$$d = 16{,}7\ \text{мм} = 1{,}67\cdot 10^{-2}\ \text{мм}.$$

33.6. Используя формулы Френеля для интенсивности отраженных волн с разной поляризацией, получаем для неполяризованного света

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}\left(|b|^2 + |B|^2\right) = \frac{\dfrac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \dfrac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}}{2}$$

($i = 80°$ по условиям задачи). Зная коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$, находим $r = 48°$. Для этих численных значений $I/I_0 \approx 35\%$.

33.7. а) Доля отраженного света при нормальном падении на поверхность равна

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = 17\%.$$

б) Угол Брюстера $\varphi = \operatorname{arctg} n = 67{,}5°$.

33.8. Рассмотрим общий случай, когда плоскость поляризации падающего света с амплитудой A образует с осью угол θ. Тогда амплитуда обыкновенной компоненты есть $A_0 = A\cos\theta$, а необыкновенной $A_e = A\sin\theta$. Сдвиг фаз между компонентами на выходе равен

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)\,d = \frac{\pi\cdot 2\cdot 0{,}01\cdot 1{,}67\cdot 10^{-2}}{4{,}1\cdot 10^{-4}} \approx 0{,}8\ \pi.$$

Таким образом, вектор амплитуды вышедшей волны можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_0\cos\omega t + \mathbf{k}Ae\cos(\omega t - 0{,}8\ \pi)$$

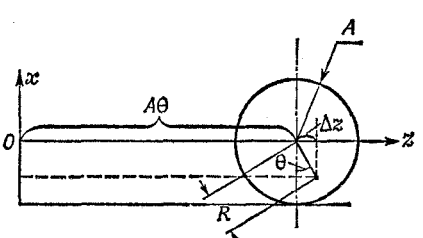
— эллиптически поляризованный свет (см. «Лекции», фиг. 33.2, вып. 3, стр. 118).

33.9. Оценить показатель преломления можно, отражая от обсидиановой пластинки свет, поляризованный в плоскости падения, и меняя угол падения. Резкий спад интенсивности отраженного света будет заметен, когда угол падения сравняется с углом Брюстера, для обсидиана, а его тангенс как раз равен показателю преломления (см. «Лекции», гл. 33, вып. 3, стр. 125).

К главе 34. Релятивистские явления в излучении

34.1. Перемещение точки по вертикали равно $x = -R\cos\theta$ (см. рисунок). Горизонтальное перемещение складывается из поступательного, равного $A\theta$ (диск катится без скольжения), и вращательного, равного $\Delta z = R\sin\theta$, т. е.

$$z = A\theta + R\sin\theta.$$



34.2. Искомое ускорение находится двукратным дифференцированием x по t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\Big/\frac{dt}{d\theta}.$$

Находим

$$\frac{dx}{d\theta} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{d\theta}$$

дифференцированием выражений, полученных в предыдущей задаче:

$$\frac{dx}{d\theta} = R\sin\theta; \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{c}\frac{dz}{\lambda\theta} = \frac{A + R\cos\theta}{c}.$$

Аналогично,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d}{d\theta}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \Big/ \frac{dt}{d\theta} = c^2 \frac{AR\cos\theta + R^2}{(A + R\cos\theta)^3}.$$

По условию задачи требуется выразить результат через наблюдаемые величины R, $v = cR/A$ и x (см. «Лекции», § 2 гл. 34, вып. 3, стр. 136). Заменяя в полученном выражении $R\cos\theta$ на x, а A на cR/v, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2x}{R^2}\frac{(1 - vR/x)}{(1 - vx/cR)^3}.$$

34.3. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату поля, а оно в свою очередь пропорционально «запаздывающему» ускорению частицы. Подставляя в формулу для ускорения, полученную в предыдущей задаче, $x = R$ и значения скорости $+v$ и $-v$, получаем

$$\frac{I_{\text{макс}}}{I_{\text{мин}}} = \left|\frac{d^2x}{dt^2}(v) \Big/ \frac{d^2x}{dt^2}(-v)\right|^2 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^4 \Big/ \left(1 - \frac{v}{c}\right)^4.$$

34.4. Выберем ось x неподвижной системы координат по направлению движения Земли, а ось y — по направлению луча (предполагая, что оно перпендикулярно оси x). Оси движущейся системы координат, связанной с Землей, обозначим x' и y' соответственно, направив их параллельно осям x и y. Проекции волнового вектора света звезды в неподвижной системе по условию равны $k_x = 0$, $k_y = k = \omega/c$. Скорость движущейся системы относительно неподвижной равна v. Согласно преобразованию Лоренца,

$$k_{x'} = \frac{k_x + \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad k_{y'} = k.$$

Следовательно, в системе координат, связанной с Землей, волновой вектор образует с осью y угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_{x'}}{k_{y'}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

отсюда получаем для угла аберрации $\sin\theta = v/c$.

34.5. Масса покоя электрона $m_e = 0{,}5$ *Мэв* $= 5 \cdot 10^{-4}$ *Гэв*. Значит, при энергии 1 *Гэв* $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/2000$. Отсюда $(c - v)/c \approx {}^1/_8 \cdot 10^6$.

34.6. Звезда приближается со скоростью примерно 500 *км/сек*.

34.7. Ответ: 600 *ммк*.

34.8. Непосредственно наблюдение аберрации позволяет вычислить скорость Земли по орбите из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = v/c$ (φ — угол аберрации). Отсюда $v = c\operatorname{ctg}\varphi = 30$ *км/сек*. Приравняв центробежную силу силе солнечного притяжения, получим

$$G = \frac{m_3 m_C}{R^2} = \frac{v^2}{R} m_3.$$

Масса Земли m_3 сокращается. Подставляя значения солнечной массы и гравитационной постоянной $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}*/г·сек*, получаем

$$R = \frac{Gm_C}{v^2} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ км}.$$

34.9. а) Сила гравитационного притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Сила светового давления пропорциональна импульсу, переданному частице за единицу времени поглощенным излучением, а импульс в свою очередь — энергии излучения на единицу площади, т. е. интенсивности ($\sim L^{-2}$). Таким образом, силы светового давления и притяжения одинаково зависят от L и их отношение, следовательно, постоянно.

б) Если обозначить интенсивность солнечного излучения через W, то сила светового давления, т. е. импульс, переданный в единицу времени, есть

$$F = \frac{dP}{dt} = Wc\pi R^2.$$

Приравнивая эту величину силе притяжения

$$F_g = \frac{{}^4/_3\,\pi R^2 \rho v^2}{L},$$

где L — радиус земной орбиты, а v — скорость движения Земли по ней, вычисленные в предыдущей задаче, получаем после сокращения

$$R = \frac{3}{4}\frac{WcL}{\rho v^2} = \frac{0{,}6}{\rho} \text{ мк},$$

если выражать ρ в *г/см*^{3}.

К главе 38. Соотношения между волновой и корпускулярной точками зрения

38.1. В § 3 гл. 32 «Лекций» (вып. 3, стр. 105) при классическом рассмотрении были получены выражения для ширины спектральной линии

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c\Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\lambda}{Q}$$

и для «времени жизни» возбужденного состояния свободного атома (времени, в течение которого энергия убывает в e раз за счет излучения)

$$\Delta T = \frac{Q}{\omega}$$

(здесь Q — классическая величина радиационного затухания). Если записать энергию возбужденного состояния в соответствии с квантовыми представлениями как $E = \hbar\omega$, то с помощью вышеприведенных соотношений получаем квантовое соотношение неопределенности для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta T = \hbar\Delta\omega \cdot \Delta T = \frac{\hbar\lambda\omega^2}{2\pi cQ} \cdot \frac{Q}{\omega} = \hbar.$$

Заметим далее, что «неопределенность положения» фонона Δx есть по смыслу длина отвечающего ему волнового пакета, равная $c\Delta T$. Неопределенность импульса Δp связана с шириной спектральной линии $\Delta\lambda$ и равна $\Delta p = (h/\lambda^2)\,\Delta\lambda$ (так как $p = h/\lambda$). Итак,

$$\Delta x\Delta p = h\frac{C\Delta T\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{h}{\hbar} = \hbar.$$

38.2. а) В задачу об определении радиуса электронной орбиты входят следующие константы: постоянная Планка $\hbar$, масса электрона m и константа, характеризующая силу притяжения между электроном и протоном; в качестве такой величины возьмем e^2 ($e^2 = q_e^2/4\pi\varepsilon_0$). Размерности этих констант соответственно: энергия × время, масса, энергия × × длина. Вспоминая размерность энергии, нетрудно убедиться, что единственная комбинация из этих констант, имеющая размерность длины, есть $\hbar^2/me^2 = a_0$. Это и есть боровский радиус.

б) Используя соотношение неопределенностей $\Delta p\Delta x = \hbar$ и считая, что точность локализации электрона в атоме $\Delta x \approx a_0$, получаем $\Delta p \approx \hbar/a_0$. Кинетическая энергия, соответствующая такому импульсу, есть

$$\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{a_0^2 2m} = \frac{\hbar^2 m^2 e^4}{\hbar^4 \cdot 2m} \approx 20\ эв.$$

Эта энергия по порядку величины равна искомой энергии ионизации.

38.3. Частоты ω_i, соответствующие трем перечисленным линиям с длинами волн λ_i, равны $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$. Согласно комбинационному принципу Ритца (см. «Лекции», § 5 гл. 38, вып. 3, стр. 231), из этих трех частот можно скомбинировать другие, равные разностям или суммам исходных. Поскольку исходные линии соответствуют ультрафиолетовой области, а искомые — видимой и инфракрасной областям, то частоты искомых линий должны быть меньше исходных и будут их разностями. Соответствующие длины волн удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_k} \qquad (\lambda_k > \lambda_i)$$

и равны 4860, 6560 и 1880 Å.

4

КИНЕТИКА • ТЕПЛОТА • ЗВУК

К главе 39. ***Кинетическая теория газов***

39.1. $TV^{\gamma-1}=\text{const}$ и $TP^{(1-\gamma)/\gamma}=\text{const}$,

39.2. Так как процесс сжатия воздуха можно считать адиабатическим, то, согласно результату предыдущей задачи, можно написать соотношение

$$T_1P_1^{(1-\gamma)/\gamma}=T_2P_2^{(1-\gamma)/\gamma},$$

где индексами 1 и 2 помечены температура и давление воздуха до и после сжатия. Из этого соотношения следует

$$T_2=T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}=173^\circ\text{C}.$$

39.3. а) В первом процессе газ, расширяясь, не совершает никакой работы. Следовательно, его энергия, а потому и температура остаются постоянными, т. е. $T=T_0$. Так как $V=2V_0$, из закона идеального газа следует, что $P=P_0/2$.

б) Второй процесс является адиабатическим. Так как для гелия $\gamma=5/3$, то, согласно решению задачи **39.1**, находим, что в конечном состоянии

$$P=P_02^{-5/3},\quad T=T_02^{-2/3},\quad V=2V_0,$$

где P_0, V_0, T_0 — давление, объем и температура газа гелия в исходном состоянии.

39.4. а) Рассмотрим два горизонтальных сечения колонки: на высоте h и высоте $h+dh$. Разность давлений на этих высотах равна весу жидкости или газа в столбике высотой dh и единичной площадью, взятому с противоположным знаком (ясно, что давление падает с высотой)

$$dP=P(h+dh)-P(h)=-\rho(h)\,g\,dh.$$

Отсюда и следует искомое уравнение.

б) Плотность воздуха с давлением и температурой связана соотношением

$$\rho(h)=\frac{\mu P(h)}{TR},$$

которое следует из закона идеального газа $PV=NkT$. Поэтому мы получаем уравнение

$$\frac{dP}{dh}=-\frac{\mu gP}{RT}.$$

Интегрируя, находим $P=P_0e^{-\mu gh/RT}$, где P_0—давление у поверхности Земли, т. е. при $h=0$.

39.5. а) Поскольку для адиабатической атмосферы справедливо соотношение $P\rho^{-\gamma}=P_0\rho_0{}^{-\gamma}$, где P_0 и ρ_0—давление и плотность атмосферы на поверхности Земли, то, согласно решению задачи **39.1**, справедливо и соотношение

$$TP^{(1-\gamma)/\gamma}=T_0P_0{}^{(1-\gamma)/\gamma},$$

откуда

$$T=T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Дифференцируя левую и правую части этого соотношения по высоте и учитывая уравнение $dP/dh=-\rho(h)g$ (см. задачу **35.4**), находим

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{T_0\rho_0}{P_0}g\frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

Согласно закону идеального газа, $\rho_0T_0/P_0=\mu/R$, где μ—молекулярный вес, R—газовая постоянная. Таким образом, окончательно находим

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{\mu g(\gamma-1)}{R\gamma}.$$

Так как для воздуха $\mu=29$, $\gamma=1{,}4$, то $dT/dh=-9{,}75$ *град/км*.

б) Атмосфера может находиться в механическом равновесии (в ней не будет происходить макроскопических движений), не находясь при этом в тепловом равновесии. Зависимость давления газа от высоты, найденная в пункте (а) задачи **39.4**, являющаяся условием механического равновесия, может иметь место и при непостоянной температуре в атмосфере. В связи с этим возникает вопрос, при каких же условиях такое равновесие будет устойчивым?

Если условие устойчивости не выполняется, в атмосфере возникнут течения, стремящиеся перемешать газ атмосферы и выровнять ее температуру, т. е. возникает так называемая конвекция. Чтобы выяснить условие устойчивости атмосферы, предположим, что два элемента газа (оба единичной массы), находившиеся на разных высотах (разность высот Δh), поменялись местами.

Если при этом энергия системы уменьшится, это значит, что такой обмен выгоден и первоначальное распределение неустойчиво. Напротив, если энергия системы в целом увеличится, первоначальное распределение устойчиво. Переходя к вычислению энергии, заметим, во-первых, что потенциальная энергия силы тяжести не меняется — обмениваются местами элементы одинаковой массы. Далее, при обмене местами элементов совершается работа, равная $P\Delta V$, ΔV — разница объемов элементов газа. Эта работа идет на изменение энергии газа, окружающего выделенные нами элементы. Кроме того, за счет разности температур меняется и энергия самих выделенных элементов U и, следовательно, полное изменение энергии равно

$$\Delta U + P\Delta V.$$

Таким образом, условие устойчивости атмосферы можно записать в виде

$$\frac{dU}{dh} + P\frac{dV}{dh} > 0,$$

или, если воспользоваться формулой $U = PV/(\gamma - 1)$,

$$\frac{V}{\gamma - 1}\frac{dP}{dh} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}P\frac{dV}{dh} \geqslant 0.$$

Используя далее закон идеального газа $V = RT/\mu P$, получаем

$$P\frac{dV}{dh} = \frac{R}{\mu}\frac{dT}{dh} - V\frac{dP}{dh}.$$

Подставляя последнее соотношение в левую часть приведенного выше неравенства и учитывая тот факт, что $dP/dh = -\rho g$, находим

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{\mu}\frac{dT}{dh} + V\rho g \geqslant 0.$$

Отсюда следует условие устойчивости атмосферы относительно конвекции

$$\frac{dT}{dh} \geqslant -\frac{V\rho g\mu}{R}\frac{\gamma - 1}{\gamma} = -\frac{\mu g(\gamma - 1)}{R\gamma}.$$

39.6. Работа, затрачиваемая при изотермическом процессе на сжатие от объема V_1 до объема V_2, равна

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -NkT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = P_1V_1\ln\frac{V_1}{V_2} = 10^5\ дж.$$

39.7. $P_A = P_0 \cdot 2^{5/3}$, $P_B = P_0 \cdot 2^{7/3}$.

39.8. Работу, необходимую для адиабатического сжатия, легко найти, если учесть, что $P_0V_0^\gamma = PV^\gamma$:

$$R = -\int_{V_0}^{V_0/2} PdV = -P_0V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_0/2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1}\left[2^{(\gamma-1)} - 1\right].$$

Поэтому

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\gamma_B - 1}{\gamma_A - 1} \frac{(2^{\gamma_A - 1} - 1)}{(2^{\gamma_B - 1} - 1)} = 1{,}13.$$

39.9. Для конечного состояния системы можно написать уравнения

$$PV_1 = N_1kT_1 \quad \text{и} \quad PV_2 = N_2kT_2 = (N - N_1)\,kT_2,$$

где N — полное число молекул газа. Число N нетрудно найти, если написать аналогичное уравнение для исходного состояния системы $N = P_0(V_1 + V_2)/kT_0$, где P_0 и T_0 — начальное давление и температура системы. Подставляя во второе из написанных уравнений выражение для N_1, полученное из первого уравнения $N_1 = PV_1/kT_1$, легко находим

$$P = P_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{V_1 + V_2}{V_2 + (T_2/T_1)\,V_1} = 842 \text{ мм рт. ст.}$$

39.10. Обозначим через P_1, N_1 и P_2, N_2 давления и числа молекул в большом и малом резервуаре после нагрева до температуры $T = 162°\,\text{C} = 435°\,\text{K}$. По условию задачи $P_1 - P_2 = P_0 = 88$ *см рт. ст.* Обозначим через N полное число молекул газа. Очевидно, $N = N_1 + N_2 = PV_1/kT_0$, где $P = 760$ *мм рт. ст.* — атмосферное давление, $T_0 = 17°\,\text{C} = 290°\,\text{K}$ — начальная температура. Для конечного состояния можно написать два уравнения:

$$(P_0 + P_2)\,V_1 = N_1kT$$

и

$$P_2V_2 = N_2kT = (N - N_1)\,kT = NkT - N_1kT.$$

Решая эту систему уравнений относительно P_2, находим

$$P_2 = \frac{NkT - P_0V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\left[P\frac{T}{T_0} - P_0\right] = 200 \text{ мм рт. ст.}$$

39.11. Число образовавшихся молекул NO_2 равно $N = PV/kT$. Так как молекулярный вес двуокиси азота равен 46, то x — число граммов диссоциировавшей жидкости определится как $x = 46N/N_{Ав} = 46PV/PT = 0{,}6$ *г*. Следовательно, диссоциировало 66% четырехокиси азота.

39.12. Тепло $Q = 8{,}31$ *вт·ч*, сообщенное телу при постоянном давлении, можно представить в виде

$$Q = \frac{5}{2} R\,(T_2 - T_1).$$

Следовательно,

а) $$T_2 = T_1 + \frac{2Q}{5R} = 1740^\circ \text{ K}.$$

б) В конечном состоянии газа $P_1V_2 = RT_2$. Учитывая, что в начальном состоянии $P_1V_1 = RT_1$, находим $V_2/V_1 = T_2/T_1 = 5{,}8$. Работа, совершенная газом, равна

$$R = P_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = \frac{2}{5}Q = 3{,}32 \text{ вт} \cdot \text{ч}.$$

Энергия газа равна

$$U = \frac{3}{2}RT_2 = 21\,700 \text{ дж}.$$

К главе 40. ***Принципы статистической механики***

40.1. Пусть в единицу времени о крылышко (о его зачерненную сторону) ударится ν молекул. Каждая из них после удара унесет энергию $\Delta\varepsilon$, которую следует определить из условия $\Pi = \Delta\varepsilon\nu$. Если через $\bar{v}$ обозначить среднюю скорость молекул газа, то уносимый молекулами импульс Δp связан с $\Delta\varepsilon$ простым соотношением

$$\Delta\varepsilon = \frac{\bar{p}\Delta p}{m} = \bar{v}\Delta p.$$

Так как разность сил, действующих на рассматриваемое крылышко, равна изменению импульса крылышка за единицу времени, то $F = \Delta p\nu = \Pi/\bar{v}$. Разумеется, при строгом решении задачи следовало бы учесть, что изотропно отскакивающие молекулы уносят различные значения импульса, так как они вылетают под разными углами к поверхности. Однако при этом мы получили бы численный коэффициент, который был бы порядка единицы. Столь же нестрого определим среднюю скорость молекул как скорость, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT,$$

т. е. $\bar{v} = \sqrt{3kT/m}$. В результате окончательно найдем

$$F \approx \frac{\Pi}{\sqrt{3kT/m}}.$$

40.2. Пусть поверхность сосуда совпадает с плоскостью координат yz, а ось x перпендикулярна к ней. Тогда dn_{v_x} — число частиц в единице объема, x — проекция скорости которых

заключена в интервале v_x, v_x+dv_x, равно

$$dn_{v_x}=n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x,$$

где n_0 — число частиц газа в единице объема. Ясно, что из этих частиц только те достигнут за единицу времени поверхности сосуда, т. е. плоскости yz, которые расположены от нее не далее расстояния, численно равного v_x, т. е. их число равно

$$v_x\cdot n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x.$$

Следовательно, ν — полное число частиц, которые за единицу времени достигнут поверхности сосуда, равно

$$\nu=\int_0^\infty v_x n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x=\frac{n_0\bar{v}}{4},$$

где $\bar{v}=\sqrt{8kT/\pi m}$ — средняя тепловая скорость молекулы газа. Скорость $\bar{v}$ находится с помощью распределения Максвелла:

$$\bar{v}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT}\,dv.$$

Следовательно, можно написать

$$\nu=n_0\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT}\,dv.$$

Перейдем в получившемся интеграле к новой переменной $\varepsilon=mv^2/2$ — энергии частиц:

$$\nu=\frac{2n_0\pi}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon.$$

Из последнего выражения видно, что величину

$$d\nu_\varepsilon=n_0\frac{2\pi}{m^2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}d\varepsilon$$

можно интерпретировать как число молекул, достигших единичной площадки поверхности сосуда в единицу времени, энергия которых заключена в пределах ε, $\varepsilon+d\varepsilon$.

а) Используя этот результат, находим, что число молекул, достигших единичной площадки поверхности сосуда с энер-

гией больше тепловой, т. е. с $\varepsilon > \bar{\varepsilon} = {}^3/_2\, kT$, равно

$$\frac{2\pi n_0}{m^2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int\limits_{{}^3/_2 kT}^{\infty}\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}d\varepsilon = \frac{\bar{v}n_0}{4}\frac{5}{2}e^{-3/2}.$$

Следовательно, искомая доля равна ${}^5/_2\, e^{-1,5} = 0{,}55$.

б) $$\frac{11}{2}e^{-4,5} = 0{,}061.$$

40.3. Теплоемкость при постоянном объеме определяется как производная от внутренней энергии газа по температуре $C_V = dU/dT$.

а) Так как внутренняя энергия 1 моля одноатомного газа равна $U = {}^3/_2\, RT$, то $C_V = {}^3/_2\, R = 12{,}4$ *дж/град·моль*.

б) Для двухатомного газа

$$U = \frac{7}{2}RT \quad \text{и} \quad C_V = \frac{7}{2}R = 29{,}1 \text{ дж/град·моль}.$$

40.4. Законы сохранения массы, импульса и энергии требуют, чтобы потоки этих величин слева и справа от сетки равнялись друг другу.

Проще всего записать закон сохранения массы. Введем величину j — плотность потока массы. При этом jA равно массе газа, которая проходит через любое поперечное сечение трубы в единицу времени. Если ρ и ρ' — плотности газа перед и за сеткой, то, согласно закону сохранения массы,

$$j = \rho v = \rho' v'.$$

Найдем далее выражение для потока импульса. В газе, который как целое покоится, плотность потока импульса, очевидно, равна

$$nm\langle v_x^2\rangle,$$

где n — число молекул в единице объема; m — масса молекулы ($\rho = nm$), а усреднение производится с помощью распределения частиц по скоростям. Действительно, импульс одной молекулы в направлении к сетке (выберем его за направление оси x) равен mv_x, а поток импульса mv_x^2. Если умножить mv_x^2 на n, то получаемая при этом величина будет равна плотности потока импульса в направлении x, обусловленная всеми частицами, компонента скорости которых равна v_x. Так как частицы в газе распределены по скоростям, величину nmv_x^2 следует усреднить по всем скоростям. При этом получаем естественный результат: плотность потока импульса равна P — давлению в газе [см. «Лекции», § 2 гл 39, формула (39.5), вып. 4, стр. 10]. Если же газ как целое движется со скоростью v в направлении оси x, то простое обобщение

формулы для плотности потока импульса приводит к выражению

$$nm\langle(v_x+v)^2\rangle = P+\rho v^2 = P+jv.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\langle v_x\rangle = 0$.

Учтем далее то обстоятельство, что по условию задачи сетка практически не оказывает сопротивления потоку газа, т. е. не происходит повышения давления газа перед сеткой. Это, конечно, не означает, что молекулы газа не обмениваются импульсом с сеткой. Наоборот, именно переданный газом сетке импульс в единицу времени определяет силу тяги, развиваемую трубой.

Обозначим через r импульс, передаваемый газом единичной площадке сетки в единицу времени, так что величина $F = A\cdot r$ будет равна силе тяги трубы. Полагая в соответствии с условием задачи $P = P'$, запишем закон сохранения импульса в виде

$$j\cdot v + r = j\cdot v'.$$

Рассуждая аналогично, находим далее выражение для плотности потока энергии

$$nm\left\langle\left[\frac{(v_x+v)^2}{2}+\frac{v_y^2}{2}+\frac{v_z^2}{2}\right](v_x+v)\right\rangle = \frac{\rho}{2}\left\langle(v_x+v)^3\right\rangle + \\ + \frac{\rho}{2}\langle(v_y^2+v_z^2)v_x\rangle + \frac{\rho v}{2}\langle v_y^2+v_z^2\rangle.$$

В силу того что

$$\langle(v_y^2+v_z^2)v_x\rangle = 0, \qquad \langle v_x^3\rangle = 0,$$

а

$$\langle v_y^2+v_z^2\rangle = 2\langle v_x^2\rangle,$$

имеем

$$\frac{3\rho v}{2}\langle v_x^2\rangle + \frac{\rho v^3}{2} + \frac{\rho v}{2}\langle v_x^2\rangle = \left(\frac{3}{2}\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)j.$$

Внимательно вглядевшись в наши выкладки, мы видим, что слагаемое $^3/_2\ P/\rho$ есть не что иное, как U — энергия единицы массы газа. Как отмечалось в «Лекциях», множитель $^3/_2$ появляется лишь в рассматривавшейся выше модели одноатомного газа. В общем случае его нужно заменить на $1/(\gamma-1)$, где γ — газовая постоянная. Если это сделать, то закон сохранения энергии в данной задаче запишется в виде

$$\left(\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho}+\frac{v^2}{2}\right)j - \left(\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho'}+\frac{v'^2}{2}\right)j = -\frac{q}{A}.$$

Используя далее закон сохранения массы и импульса и вводя обозначение $\gamma P/\rho = \gamma RT/\mu = c^2$, где c — скорость звука, из закона сохранения энергии получаем квадратное уравнение

для v'

$$\frac{2c^2}{(\gamma-1)\,v}(v'-v)+v'^2-v^2=\frac{2q}{jA}.$$

Решая его, находим

а) $v'=\sqrt{\left(v+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}\right)^2+\frac{2q}{jA}}-\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}$.

б) Из закона идеального газа находим $T'/T=\rho/\rho'=v'/v$ и, следовательно,

$$T'=T\left[\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v^2}\right)^2+\frac{2q}{jAv^2}}-\frac{c^2}{(\gamma-1)v^2}\right].$$

в) Сила тяги, развиваемая такой трубой, очевидно, равна

$$F=r\cdot A=Aj\,(v'-v)=$$

$$=Aj\left[\sqrt{\left(v+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}\right)^2+\frac{2q}{jA}}-\left(v+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}\right)\right].$$

40.5. Основной характеристикой, определяющей достоинства двигателя, является его коэффициент полезного действия. Он равен отношению полезной мощности, развиваемой двигателем к полным энергетическим затратам. Если реактивный двигатель развивает силу тяги F и летит со скоростью v, то, очевидно, полезная мощность, развиваемая им, равна Fv. С другой стороны, полная затраченная энергия равна $q=GH$, где G — расход горючего в единицу времени, а H — теплотворная способность горючего. Отсюда

$$\text{К. п. д.}=\frac{Fv}{q}=$$

$$=\frac{Ajv}{q}\left[\sqrt{\left(v+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}\right)^2+\frac{2q}{jA}}-\left(v+\frac{c^2}{(\gamma-1)\,v}\right)\right].$$

Заметим, что в данной задаче, строго говоря, в законах сохранения следовало бы учитывать массу горючего, сжигаемого в двигателе и выбрасываемого с воздухом. Однако, поскольку расход горючего по условию задачи мал по сравнению с расходом воздуха, мы этим эффектом пренебрежем. При достаточно малых скоростях и величинах q приведенное выше выражение для к. п. д. упрощается, если разложить подкоренное выражение по малой величине q. При этом оказывается, что к. п. д. двигателя не зависит от q и определяется только скоростью полета:

$$\text{К. п. д.}\approx\frac{v^2(\gamma-1)}{c^2}.$$

Так как, согласно условию задачи, $Aj = 100$ *кг/сек*, $q = 9{,}3 \cdot 10^7$ *вт*, $\gamma = {}^9/_7$ и, кроме того, при нормальных условиях $c = 340$ *м/сек*, то, принимая скорость v равной обычной крейсерской скорости полета реактивных самолетов, т. е. примерно 800 *км/час*, находим

$$\text{К. п. д.} \approx 10\%.$$

Заметим, что несмотря на то, что наши выражения в данной и предыдущей задачах остаются формально разумными при скоростях $v > c$, они на самом деле перестают быть справедливыми. При сверхзвуковых скоростях полета физическая картина работы двигателя усложняется необходимостью рассмотрения ударных волн, что выходит за рамки нашего анализа.

40.6. б) $y_m = e^{-1} = 0{,}368$.

40.7. $h_\oplus = 8{,}8$ *км*,
$h_\odot = 113$ *км*.

К главе 41. ***Броуновское движение***

41.1. а) $T = 11600°$ К.
б) $T = 0{,}025$ *эв*.
в) $\lambda = 12395 \cdot 10^{-8}$ *см* или $1{,}24\mu$.

41.2. а) $$I = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \int\limits_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} \sim T^4.$$

б) Условие $dI/d\omega = 0$ в переменной $x = \hbar\omega/kT$ выглядит следующим образом: $x = 3(1 - e^{-x})$. Численное решение дает $x_m = 2{,}822$. Следовательно, $\omega_m = 2{,}822\ kT/\hbar \sim T$.

41.3. Из условия к задаче 41.2 находим

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\exp(\hbar\omega/kT_1) - 1}{\exp(\hbar\omega/kT_2) - 1}.$$

Так как заданная длина волны отвечает $\hbar\omega/k = 4{,}64 \cdot 10^4$ *град*, то

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = e^{11{,}6}.$$

К главе 42. ***Применения кинетической теории***

42.1. 1 *эв/атом* $= 96520$ *дж/г·моль*.

42.3. $\Delta n/n = (W/kT)(\Delta W/W)$, где $\Delta W/W = 3\%$ — относительная ошибка в определении теплоты возгонки. Следовательно, ошибка в W/kT в 2,4 раза больше, т. е. почти 7%.

42.4. При температурах $T < 300°C$ наличие свободных электронов в Si объясняется ионизацией примесных центров. При $T > 300°C$ наступает так называемая собственная проводимость: все примесные атомы уже ионизированы, а экспоненциональное падение сопротивления связано с отрывом электронов проводимости от атомов кремния. На этот отрыв требуется бо́льшая энергия, чем для отрыва электрона от примесного атома. С этим связан более крутой наклон кривой $\rho(1/T) \sim \exp(-W/kT)$ при $T > 300°K$.

К главе 43. ***Диффузия***

43.1. Длина свободного пробега равна $l = 1/n\sigma_c$. Если молекулы рассматривать как твердые шарики, то $\sigma_c = \pi d^2$. Согласно закону идеального газа, число молекул в единице объема газа равно $n = P/kT$. Следовательно, $l = kT/\pi Pd^2$. Средняя скорость молекулы в идеальном газе $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$. Поэтому $\tau = \sqrt{\pi mkT}/2\sqrt{2}\,\pi Pd^2$. Отсюда при нормальных давлении и температуре

$$l = 1{,}4 \cdot 10^{-7}\ м, \qquad \tau = 2 \cdot 10^{-10}\ сек.$$

43.2. Вероятность того, что молекула пройдет путь L без столкновения, равна $e^{-L/l}$. Из N молекул путь L пройдет без столкновения лишь $Ne^{-L/l}$ молекул. Если, как это требуется в условии задачи, $Ne^{-L/l} < 1/2$, то $L > l \ln 2N \approx 56l$.

43.3. При решении задачи можно рассуждать так: для одной молекулы [в среднем на молекулы в газе приходится внутренняя энергия $U = kT/(\gamma - 1)$] есть 6 равноправных направлений движения. Поэтому через выделенную плоскость, с одной стороны, будет проходить поток энергии, равный $Q_+ = \frac{1}{6} n\bar{v}\,U(-l)$, а с другой, $Q_- = \frac{1}{6} n\bar{v}\,U(l)$ (n — число молекул в единице объема, $\bar{v}$ — средняя скорость молекулы в газе). Строгий расчет дает численный множитель $1/4$ вместо $1/6$. Однако для нашего приближенного качественно правильного рассмотрения это различие несущественно. Результирующий поток энергии через единицу поверхности плоскости равен

$$\frac{1}{A}\frac{dE}{dt} = Q = Q_+ - Q_- = \frac{1}{6} n\bar{v}\,[U(-l) - U(l)] =$$

$$= \frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)}\,[T(-l) - T(l)] = -\frac{n\bar{v}k}{6(\gamma - 1)}\frac{dT}{dx}\,2l$$

(рассматриваются молекулы, находящиеся на расстоянии $-l$ влево и $+l$ вправо от выделенной плоскости).

Из того факта, что $Q=-K\,dT/dx$, следует

$$K=\frac{n\bar{v}kl}{3(\gamma-1)}=\frac{1}{3}C\bar{v}l,$$

где $C=nk/(\gamma-1)$ — теплоемкость единицы объема газа. Если пренебречь численным коэффициентом $^1/_3$, появившимся из-за приближенности расчета, то получим искомый результат.

43.4. Разделим газ плоскостью, перпендикулярной к оси y. Плотность потока частиц сверху вниз, обусловленного молекулами, находящимися на расстоянии l от плоскости, равна $nv\,(l)/4$ (см. решение к задаче **43.3**). При этом плотность потока переносимого этими молекулами импульса примерно равна $(mn/4)\,v^2\,(l)$. Соответственно плотность потока импульса снизу вверх равна $mnv^2\,(-l)/4$. Результирующий поток импульса через единичную площадку плоскости, равный силе, действующей на эту площадку, запишется так:

$$F=\frac{mn}{4}\,[v^2\,(l)-v^2\,(-l)]\approx\frac{mn}{4}\,2v\,(0)\frac{\partial v_x}{\partial y}\cdot 2l=mn\bar{v}l\frac{\partial v_x}{\partial y}=$$

$$=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Нетрудно видеть, что из этого выражения следует искомый результат.

43.5. Рассуждая так же, как и при решении задачи **43.3**, найдем результирующий поток энергии между заданными поверхностями

$$\frac{1}{A}\frac{dE}{dt}=Q=\frac{1}{6}\bar{nv}U(0)-\frac{1}{6}\bar{nv}U(D)=\frac{1}{6}\frac{n\bar{v}k}{(\gamma-1)}[T(0)-T(D)]=$$

$$=\frac{\bar{nv}k}{6(\gamma-1)}\Delta T.$$

При этом переносимый поток импульса

$$\frac{F}{A}=\frac{1}{6}\,\bar{nv}\bar{mv}\Big|_{v}-\frac{1}{6}\,\bar{nv}\,\bar{mv}\Big|_{v+\Delta v}=\frac{mn}{3}\,v\Delta v.$$

43.6. Подвижность иона массы m в газе определяется его средней скоростью $\bar{v}$ и длиной свободного пробега l:

$$\mu=\frac{l}{m\bar{v}}.$$

Если n_A^0 и n_B^0—число молекул в единице объема исходных газов A и B, то можно написать соотношения

$$\frac{1}{\mu_A}=m\bar{v}\sigma_A n^0\ , \qquad \frac{1}{\mu_B}=m\bar{v}\sigma_B n_B^0\ ,$$

где σ_A и σ_B—полные сечения рассеяния иона на молекулах сорта A и B. Плотности газов выражаются через массы составляющих его молекул формулами $\rho_A=m_A n_A^0$ и $\rho_B=m_B n_B^0$. В смеси газов, в единице объема которой содержится n_A молекул сорта A и n_B молекул сорта B, величина, обратная длине свободного пробега иона, равна $1/l=\sigma_A n_A+\sigma_B n_B$. В этом нетрудно убедиться, если рассуждать точно так же, как при выводе выражения для l через полное сечение σ и число молекул в единице объема n в случае однокомпонентного газа. Поэтому подвижность иона в смеси газов равна

$$\frac{1}{\mu}=m\bar{v}\,(\sigma_A n_A+\sigma_B n_B).$$

Плотность смеси газов равна $\rho=\rho_A+\rho_B=m_A n_A+m_B n_B=$ $=m_A n_A^0+m_B n_B^0$. Отсюда, положив $n_A=n_A^0$ и $n_B=n_B^0$, находим

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu_A}+\frac{1}{\mu_B}\ .$$

Следовательно,

$$\mu=\frac{\mu_A\mu_B}{\mu_A+\mu_B}\ .$$

К главе 44. *Законы термодинамики*

44.1. I. Процесс AB протекает при $V=\text{const}$. В этом случае

$$\Delta S_{AB}=\int_{T_A}^{T_B}\frac{dQ}{T}=\frac{kN}{(\gamma-1)}\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T}=$$

$$=\frac{kN}{(\gamma-1)}\ln\frac{T_B}{T_A}=\frac{kN}{(\gamma-1)}\ln\frac{P_B}{P_A}=\Delta S_{DC}.$$

II. Процесс BC протекает при $P=\text{const}$.

$$\Delta S_{BC}=\frac{kN\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_C}{T_B}=\frac{kN\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V_C}{V_B}=\Delta S_{AD}$$

а) Из пунктов I и II следует, что

$$\Delta S_{ABC}=\Delta S_{ADC}=\frac{kN}{\gamma-1}\ln\frac{P_B}{P_A}+$$
$$+\frac{kN\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V_C}{V_B}=\frac{kN}{\gamma-1}\left[\ln\frac{P_B}{P_A}+\gamma\ln\frac{V_C}{V_B}\right]=$$
$$=\frac{kN}{\gamma-1}\ln\frac{P_CV_C^\gamma}{P_AV_A^\gamma}.$$

б) Так как, согласно условию задачи, $N=N_{\text{Ав}}$, то

$$\Delta S_{ABC}=\Delta S_{ADC}=\frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{P_CV_C^\gamma}{P_AV_A^\gamma}=30{,}7\ \textit{дж/град}.$$

44.2. В силу закона идеального газа

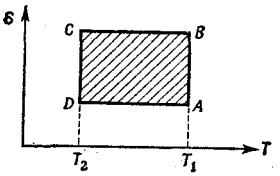
$$P_aV_a=NkT_1,$$
$$P_cV_c=NkT_2,$$

температуры T_1 и T_2 связаны соотношением

$$T_2=\frac{T_1P_cV_c}{P_aV_a}.$$

Изменение энтропии в изотермическом процессе равно

$$\Delta S_{AB}=\int_A^B\frac{dQ}{T}=\int_A^B\frac{dU+PdV}{T_1}=$$
$$=\frac{1}{T_1(\gamma-1)}\left[\int_{P_A}^{P_B}VdP+\gamma\int_{V_A}^{V_B}PdV\right]=$$
$$=\frac{Nk}{\gamma-1}\left[\int_{P_A}^{P_B}\frac{dP}{P}+\gamma\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V}\right]=Nk\ln\frac{V_B}{V_A}.$$



44.3. Для цикла Карно

$$\text{К.п.д.} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{873 - 293}{873} = 66{,}3\%.$$

44.4. а) Из уравнения адиабаты в $V-T$ переменных (см. решение к задаче **39.1**) следует, что

$$V_b = V_c \left(\frac{T_c}{T_b}\right)^{1/(\gamma-1)} = 8{,}8 \text{ л},$$

$$V_d = V_a \left(\frac{T_a}{T_d}\right)^{1/(\gamma-1)} = 12{,}3 \text{ л}.$$

б) Согласно результату задачи **44.2**, в изотермическом процессе

$$\Delta Q_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = 2390 \text{ дж}.$$

в) $$\Delta Q_{cd} = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} = -910 \text{ дж}.$$

г) $$\text{К.п.д.} = (T_2 - T_1)/T_2 = 25\%.$$

д) $$\Delta S_{ab} = \Delta Q_{ab}/T_1 = 6 \text{ дж/град}, \quad \Delta S_{cd} = \Delta Q_{cd}/T_2 = -3{,}1 \text{ дж/град}.$$

44.5. Так как процесс расширения является изотермическим, (см. решение задачи **44.2**), то

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = Nk \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{M}{\mu} R \ln \frac{P_1}{P_2},$$

где P_1 — начальное давление, P_2 — давление атмосферы. Отсюда

$$\frac{\Delta S}{M} = \frac{R}{\mu} \ln \frac{P_1}{P_2} = 11 \cdot 10^3 \text{ дж/град} \cdot \text{кг}.$$

К главе 45. ***Примеры из термодинамики***

45.1. Если через $R_\odot$ обозначить радиус Солнца, то полная интенсивность излучаемой Солнцем энергии равна $4\pi R_\odot^2 \sigma T^4$. Из расстояния 1 *А.Е.*, равного расстоянию от Земли до Солнца ($L = 1$ *А.Е.* $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ *м*), на площадь πr^2 (r — радиус медной сферы) будет попадать энергия, равная

$$\pi r^2 \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T^4}{4\pi L^2} = \frac{\pi r^2 R_\odot^2 \sigma T^4}{L^2}.$$

Так как $R_\odot = L\alpha/2$, где α — угол, под которым виден диаметр Солнца с Земли, а интенсивность энергии, излучаемой

медной сферой с температурой T_1, равна $4\pi r^2\sigma T_1^4$, то из условия теплового баланса

$$\frac{\pi}{4} r^2\alpha^2\sigma T^4 = 4\pi r^2\sigma T_1^4,$$

находим

$$T_1 = \frac{T\sqrt{\alpha}}{2} = 270^\circ\text{K}.$$

45.2. Максимальную температуру этой области Земли следует определить из условия $1395\ вт/м^2 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ вт/м^2\cdot град^4\cdot T^4$, $T = 122^\circ$ С.

45.3. Внутреннее тело излучает в единицу времени энергию, равную $4\pi r^2\sigma T^4$. (Эта энергия, конечно, поглощается оболочкой.) За это же время тело поглощает энергию $4\pi r^2\sigma T_1^4$, излученную оболочкой. Таким образом, в единицу времени оболочка получает от внутреннего тела энергию, равную $4\pi r^2\sigma\,(T^4 - T_1^4)$. Из непрерывности потока энергии внутри и вне оболочки найдем T_1:

$$4\pi R^2\sigma T_1^4 = 4\pi r^2\sigma\,(T^4 - T_1^4).$$

Отсюда

$$T_1^4 = \frac{r^2}{r^2 + R^2}\,T^4.$$

Следовательно, отношение энергии, излучаемой оболочкой в единицу времени во внешнее пространство ($4\pi R^2\sigma T_1^4$), к интенсивности излучения энергии в отсутствие ее ($4\pi r^2\sigma T^4$), равно $R^2/(r^2 + R^2)$. В столько же раз уменьшится скорость охлаждения тела.

45.4. Давление газа $P_г = \rho RT/\mu = 1{,}7\cdot 10^{16}$ *ньютон/м²*, радиационное давление $P_{рад} = {}^4/_3\sigma T^4/c = 7{,}2\cdot 10^{14}$ *ньютон/м²*.

45.5. Согласно уравнению Клапейрона—Клаузиуса,

$$\frac{dT}{dP_{пар}} = \frac{TV_G}{L},$$

где V_G — объем газа, L — скрытая теплота испарения массы воды V_G/ρ_G. Давление пара с высотой падает по закону $dP_{пар}/dz = -\rho g$ (ρ — плотность воздуха). Следовательно ($\rho = 1{,}3\ кг/м^3$):

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dP_{пар}}\,\frac{dP_{пар}}{dz} = -\frac{TV_G\rho g}{L} = 3{,}1\ град/км.$$

45.6. Теплоемкость C тела равна производной от сообщенного телу тепла Q по температуре: $C = dQ/dT$. При постоянном давлении $dQ = dH$, т. е. сообщенное тепло равно изменению энтальпии. Поэтому $C_p = dH/dT$. При постоянном объеме

$dQ=dU$, где U—внутренняя энергия тела. Следовательно, $C_V=dU/dT$. Энтальпия и внутренняя энергия связаны соотношением $H=U+PV$. Дифференцируя левую и правую части этого соотношения по температуре, находим $C_P=C_V+(d/dT)\,PV$. Так как, согласно закону идеального газа, $PV=RT$, то $C_P-C_V=R$.

45.7. Из уравнения Клапейрона—Клаузиуса $L=\Delta VT\,(dP/dT)$, где $\Delta V=V_{\text{пар}}-V_{\text{вода}}=V_{\text{пар}}=206$ *м³/кг*. Из таблиц находим $(dP/dT=45$ *ньютон/м²·град*. Отсюда $L=2{,}5\cdot10^6$ *дж/кг* (это значение для L совпадает с табличным).

45.8. Когда абсолютно черное тело т. е. тело, поглощающее всю падающую на него энергию, находится в равновесии с излучением, то оно поглощает столько же энергии, сколько и испускает, т. е. σT^4. Следовательно, поток энергии излучения на черное тело равен σT^4. Но такой же поток энергии будет падать и на единицу поверхности тела, находящегося в равновесии с излучением и поглощающего только долю A полного излучения. Поскольку такое тело поглощает столько энергии, сколько и испускает, то излучаемая им энергия равна $A\sigma T^4$. Если же тело не находится в равновесии с излучением, то испускаемая им плотность потока энергии по прежнему будет равна $A\sigma T^4$.

45.9. а) Если L—скрытая теплота плавления, то

$$\frac{dP}{dT}=\frac{L}{T\,(V_L-V_G)},$$

где V_L—объем 1 моля жидкости, V_G—объем 1 моля вещества в твердом состоянии (см. «Лекции», вып. 4, стр. 135). Так как $L>0$, то при $V_G>V_L$ (если вещество при замерзании расширяется) $dP/dT<0$, или $dT/dP<0$, т. е. температура замерзания должна понижаться с повышением давления.

б) Если пренебречь зависимостью величины L от температуры и малой сжимаемостью жидкости и твердого тела (т. е. считать V_L и V_G не зависящими от давления), то уравнение Клапейрона—Клаузиуса можно проинтегрировать. Записав это уравнение в виде

$$\frac{dT}{T}=\frac{V_L-V_G}{L}\,dP,$$

найдем после интегрирования

$$T=T_0e^{P\,(V_L-V_G)/L},$$

где T_0—постоянная интегрирования. Определим T_0 из условия, что при нормальном давлении $P_0=1$ *атм* температура таяния льда равна 0° С, т. е. 273° К:

$$T=273^\circ\text{ К}\,e^{(P-P_0)(V_L-V_G)/L}.$$

Подсчитаем далее примерное давление P, которое оказывает лезвие конька на лед. Длина конька примерно равна 40 *см*, а ширина лезвия 2 *мм*. При этом площадь лезвия конька оказывается равной 8 $см^2$. Принимая средний вес человека равным 80 *кГ* и считая, что этот вес распределен по площади одного конька, находим $\Delta P = P - P_0 = 9 \cdot 10^4$ $кГ/м^2 = 8{,}8$ *ньютон*/$м^2$. Так как $\Delta V = V_G - V_L = 8 \cdot 10^{-5}$ $м^3$ и $L = 334$ *дж*/*кГ*, то находим

$$T \approx 273^\circ \text{ K} \left[1 + \frac{(P - P_0)(V_L - V_G)}{L} \right],$$

или

$$t^\circ \text{ C} = -273 \frac{\Delta P \Delta V}{L} = -57^\circ \text{ C}.$$

К главе 47. ***Звук. Волновое уравнение***

47.1. Так как $\mu_{H_2} = 2$, $\mu_{He} = 4$, $\gamma_{He} = {}^5/_3$, $\gamma_{H_2} = {}^7/_5$, то

$$\frac{C_{He}}{C_{H_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_{He}\mu_{H_2}}{\gamma_{H_2}\mu_{He}}} = 0{,}78.$$

47.2. Так как частота звука, издаваемого свистком, пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4), а последняя $\sim \sqrt{T}$, то искомая температура в шкале градусов Кельвина в 4 раза больше температуры жидкого воздуха, т. е. равна 372° K = 99° C.

47.3. Резонансная частота пропорциональна скорости звука (см. гл. 49 «Лекций», вып. 4). Поэтому при заполнении резонансных полостей гелием частоты увеличатся в

$$\sqrt{\frac{\gamma_{He}\mu_{возд}}{\gamma_{возд}\mu_{He}}} = 2{,}9 \text{ раза}$$

$$(\gamma_{He} = {}^5/_3, \quad \gamma_{возд} = {}^7/_5, \quad \mu_{возд} = 29, \quad \mu_{He} = 4).$$

47.4. Изменение давления ΔP в звуковой волне связано с изменением плотности $\Delta\rho$ соотношением $\Delta P = c_s^2 \Delta\rho$, где c_s — скорость звука.

а) $\Delta\rho_m = \dfrac{\Delta P_m}{c_s^2} \approx 10^{-8}$ $г/см^3$.

б) В плоской волне $\Delta\rho = \Delta\rho_m e^{ik(x - c_s t)}$ и $\Delta\rho = -\rho_0 (\partial\chi/\partial x)$, поэтому, учитывая, что $\rho_0 = \gamma P / c_s^2$, находим

$$\chi_m = \frac{\Delta\rho_m}{\rho_0} \frac{c_s}{\omega} = \frac{\Delta P_m}{\gamma P} \frac{c_s}{\omega} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

47.5. Частоты колебания резины пропорциональны корню квадратному из отношения натяжения T к линейной плотности σ (см., например, решение к задаче **47.6**) и обратно пропорциональны ее длине, т. е. $\omega \sim (1/L)\sqrt{T/\sigma}$. Так как $T \sim L$, $\sigma \sim 1/L$, то ясно, что частоты колебания такой резины не зависят от ее длины. Поэтому высота звука такой «струны» будет все время одинаковой. Иначе обстоит дело для скрипичной струны, поскольку для струны $\sigma = \text{const}$ и $L = \text{const}$. Поэтому с увеличением натяжения струны звук получается более высокой частоты.

47.6. Рассмотрим участок струны длиной

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx$$

и напишем для него уравнение движения вдоль оси y. Очевидно, масса этого участка равна σdx, а ускорение d^2y/dt^2. Равнодействующую сил, действующих на выделенный участок, найдем, спроектировав силы натяжения в точках x и $x+dx$ на ось y. На концах отрезка эти проекции равны величине T, умноженной на синусы углов, которые составляют касательные к струне в этих точках с осью x. В силу малости углов синусы приближенно равны тангенсам этих углов, т. е. dy/dx. Следовательно, равнодействующая сила, действующая на участок струны и направленная в поперечном направлении, равна

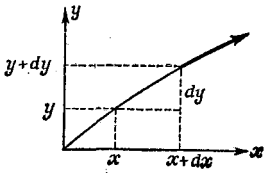
$$T\frac{dy}{dx}\bigg|_{x+dx} - T\frac{dy}{dx}\bigg|_{x} = T dx \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Уравнение движения для выделенного участка струны запишется в виде

$$\sigma dx \frac{d^2y}{dt^2} = T dx \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Сокращая на dx обе части получившегося уравнения и вводя обозначение $v^2 = T/\sigma$, находим искомое волновое уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$



47.7. Решение тривиально.

К главе 48. Биения

48.1. Согласно определению, $v_{фаз}=\omega/k$, где $k=2\pi/\lambda$ — волновой вектор. Так как, согласно условию задачи, $v_{фаз}=\sqrt{g/k}$, то $\omega=\sqrt{gk}$. Групповая скорость тогда равна

$$v_{гр}=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\frac{1}{2}v_{фаз}.$$

Если $\lambda=10^3$ *м*, то $v_{фаз}=39{,}5$ *м/сек*.

48.2. Для заданной волны $\omega=kv_{фаз}=\sqrt{gk+Tk^3/\rho}$. Отсюда

$$v_{гр}=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{\lambda\,(g+12\pi^2T/\rho\lambda^2)}{4\pi\sqrt{\lambda g/2\pi+2\pi T/\lambda\rho}}.$$

48.3. а) $v_{фаз}=\left(\frac{2\pi T}{\lambda\rho}+\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}=24{,}4$ *см/сек*.

б) $v_{фаз}=17{,}8$ *см/сек*.

48.4. Для искомой длины волны $dv_{фаз}/d\lambda=0$. Из этого уравнения следует

$$-\frac{2\pi T}{\rho\lambda^2}+\frac{g}{2\pi}=0;$$

отсюда

$$\lambda_{мин}=2\pi\sqrt{\frac{T}{\rho g}}=1{,}5\ см$$

и

$$\omega_{мин}=\sqrt{\frac{4\pi g}{\lambda_{мин}}}=90{,}6\ сек^{-1}.$$

48.5. Частота звука, регистрируемая от какого-либо источника, согласно эффекту Допплера, зависит как от скорости источника звука, так и наблюдателя. Если наблюдатель покоится, а источник звука движется со скоростью v к наблюдателю или от него (последнему случаю отвечает знак минус в приведенной ниже формуле), то частота регистрируемого звука равна

$$\omega=\omega_0\left(1\pm\frac{v}{c_s}\right)=\omega_0\pm\omega_0\frac{v}{c}=\omega_0+\Delta\omega,$$

где ω_0 — частота звука, испускаемого покоящимся источником. Так как $\omega_0=340$ *гц*, $c_s=340$ *м/сек*, $v=5$ *м/сек*, то $\Delta\omega=5$ *гц*.

Машинист движется вместе с источником звука. Поэтому он слышит звук частоты $\omega_0=340$ *гц*. Однако частота эхо, которое он слышит, равна 350 *гц*. Действительно, на скалу упадет звук, испущенный движущимся к скале источником.

Частота его равна $\omega_0+\Delta\omega$. Как известно, при отражении частота не меняется. Если учесть, что машинист движется к скале со скоростью v, то частота вернувшегося к нему эхо будет равна $\omega_0+2\Delta\omega$.

Человек, стоящий на земле около последнего вагона, услышит гудок с частотой $\omega_0-\Delta\omega=335$ *гц*, так как источник звука удаляется от него со скоростью v. Эхо, имеющее частоту звука, испущенного движущимся гудком, придет к человеку с частотой, равной $\omega_0+\Delta\omega=345$ *гц*. Так как частоты гудка и эхо различаются, при их интерференции возникнут биения звука с частотой в 10 *гц*. Такие биения отметит и машинист, и человек, стоящий на земле возле последнего вагона.

К главе 49. ***Собственные колебания***

49.1. Обозначим через x и y смещения грузов m_1 и m_2. Очевидно, сила, действующая на массу m_1 со стороны левой пружины равна $-k_1x$, а со стороны правой равна $k(y-x)$. На массу m_2 слева действует сила $-k(y-x)$, а справа — сила, равная $-k_2y$. Тогда легко написать уравнения движения:

$$m_1\ddot{x}=-k_1x+k(y-x),$$
$$m_2\ddot{y}=-k(y-x)-k_2y.$$

С учетом того, что $k_1/m_1=k_2/m_2=\omega_0^2$, эту систему дифференциальных уравнений можно привести к виду

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{k}{m_1}(y-x),$$
$$\ddot{y}+\omega_0^2y=-\frac{k}{m_2}(y-x).$$

49.2. Будем искать решение полученной в предыдущей задаче системы уравнений в виде $x=Ae^{i\omega t}$ и $y=Be^{i\omega t}$. Выполняя необходимые дифференцирования и сокращая уравнения на $e^{i\omega t}$, находим

$$\left(\omega^2-\omega_0^2-\frac{k}{m_1}\right)A+\frac{k}{m_1}B=0,$$
$$\frac{k}{m_2}A+\left(\omega^2-\omega_0^2-\frac{k}{m_2}\right)B=0.$$

Введя обозначение $\lambda=\omega^2-\omega_0^2$, запишем эту систему однородных уравнений в виде

$$\left(\lambda-\frac{k}{m_1}\right)A+\frac{k}{m_1}B=0,$$
$$\frac{k}{m_2}A+\left(\lambda-\frac{k}{m_2}\right)B=0.$$

Отличное от нуля решение этой системы существует только в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, обращается в нуль, т. е. если

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{k}{m_1}, & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2}, & \lambda - \frac{k}{m_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим квадратное уравнение, имеющее два вещественных решения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = k(m_1^{-1} + m_2^{-1})$. Следовательно,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2,$$
$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + k(m_1^{-1} + m_2^{-1}).$$

Подставляя ω_1^2 в систему уравнений, находим, что $A = B$. Для частоты ω_2 получим

$$B = -\frac{m_1}{m_2} A.$$

Таким образом, произвольное решение уравнений движения имеет вид

$$x = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t},$$
$$y = A_1 e^{i\omega_1 t} - \frac{m_1}{m_2} A_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Отсюда видно, что линейные комбинации координат x и y

$$\xi = x - y, \qquad \eta = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

являются нормальными координатами системы, так как они удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\xi} + \omega_2^2 \xi = 0$$

и

$$\ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta = 0.$$

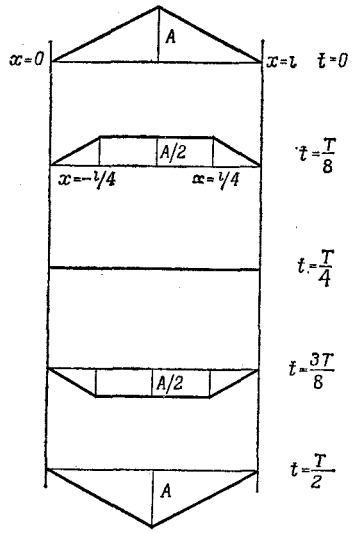
49.3. Решение тривиально.

49.4. Согласно условию задачи,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{l^2 + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9}},$$

где $\omega_0 = v\pi/a$. Наименьшая частота, очевидно, равна $\omega_0/3$. Десять искомых частот, измеренных в единицах $\omega_0/3$, равны 1; 1,665; 2,05; 2,22; 2,78; 3,33; 3,50; 3,76; 3,93; 4,04; 4,33.

49.5. Пусть $f(x)$ — функция, описывающая начальную форму оттянутой струны, а T — полный период колебания. Представим себе начальную форму струны как суперпозицию двух горбов, описываемых функциями $f(x)/2$, движущихся с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Тогда отражение каждого горба от соответствующего закрепленного конца струны можно описать так, как это изложено в § 1 гл. 49 «Лекций» (вып. 4). Найденные таким построением положения струны в момент времени $t=0$, $T/8$, $T/4$, $3T/8$ и $T/2$ изображены на рисунке.



К главе 50. **Гармоники**

50.1. а) Так как, с одной стороны, $f(\pi/2)=1$, а с другой, $f(\pi/2)=(4/\pi)\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$, то отсюда следует искомый ответ.

б) Воспользуемся «теоремой об энергии» [см. «Лекции», формула (50.23), вып. 4, стр. 213]. В рассматриваемом случае $T=2\pi$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi = \pi\cdot\frac{16}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right).$$

Разделив на численный множитель, стоящий перед суммой ряда, получим требуемый результат.

в) Эту часть задачи можно решить по крайней мере двумя способами:

1. Сдвинем прямоугольную волну на $-\pi/2$. Вычисляя коэффициенты фурье-разложения аналогично тому, как это было сделано в «Лекциях» (вып. 4, стр. 212), и используя «теорему об энергии», находим, что сумма квадратов обратных четных чисел равна $\pi^2/24$. Сумма квадратов обратных нечетных чисел найдена в пункте (б) задачи и равна $\pi^2/8$. Складывая два ряда, находим, что сумма заданного ряда равна $\pi^2/6$.

2. Второй способ решения. Обозначив через $\sum$ сумму данного ряда, перепишем ряд следующим образом:

$$\sum = \left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\sum.$$

Так как $\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right)=\pi^2/8$, то, определяя из получившегося выше уравнения $\sum$, находим

$$\sum = \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right)=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

50.2. Заданная функция имеет вид

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\pi}, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ \dfrac{2\pi-x}{\pi}, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Согласно общей формуле фурье-разложения,

$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi^2 n^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx dx=0.$$

Следовательно,

$$g(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right).$$

50.3. а) Воспользуемся «теоремой об энергии» (см. «Лекции», вып. 4, стр. 213):

$$\int_0^T f^2(t)\,dt=Ta_0^2+\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $T=2\pi$, $b_n=0$ и $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=2\pi/3$, находим

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{4}+\pi\frac{16}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right).$$

Нетрудно видеть, что отсюда следует искомый ответ.

б) Рассмотрим ряд

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots.$$

Представим этот ряд в виде

$$I=\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)+\frac{I}{2^4}.$$

Решая это простое уравнение, находим

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2^4}{2^4-1}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)=\frac{2^4}{(2^4-1)}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

50.4. Задача легко решается, если вспомнить, что при $q<1$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots.$$

Поэтому

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}=\int_0^{\infty}x^3e^{-x}dx\,(1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots).$$

Если интегрировать почленно и в n-м члене (n — любое) делать замену переменной интегрирования $u=nx$, то мы придем к результату

$$I=\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)\int_0^\infty u^3e^{-u}du.$$

Так как, согласно задаче **50.3**, сумма ряда, стоящего перед интегралом, равна $\pi^4/90$, а сам интеграл равен 6, то отсюда следует искомый результат.

50.5. Заданная функция $h(x)$ на интервале $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ имеет вид $h(x)=x/2\pi$. Определяя коэффициенты фурье-разложения, находим

$$h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

50.6. а) Так как $V(t)=V_0\sin\omega t$, то $T=2\pi/\omega$ и

$$\bar{V}=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}V_0\sin\omega t\,dt=\frac{2V_0}{\pi}.$$

б) Разложим функцию в ряд Фурье. Он имеет вид

$$V(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos n\omega t,$$

где

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt=\frac{2V_0}{\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T V(t)\sin n\omega t\,dt.$$

Амплитуда второй гармоники, т. е. b_2, равна

$$b_2=\frac{2V_0}{T}\int_0^T|\sin\omega t|\cos 2\omega t\,dt=\frac{8V_0}{3\pi}.$$

50.7. а) $V_{\text{вх}}(t)=V_0\sin\omega t$. Представляя $\sin^3\omega t$ в виде

$$\sin^3\omega t=\frac{1}{4}(-\sin 3\omega t+3\sin\omega t),$$

находим

$$V_{\text{вых}}(t)=\left(V_0+\frac{3eV_0^3}{4}\right)\sin\omega t-\frac{eV_0^3}{4}\sin 3\omega t.$$

Искажение волны, следовательно, сводится к изменению амплитуды основной гармоники и появлению третьей гармоники. Эффект выпрямления отсутствует.

б) Пусть $V_{вх}(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$, причем $\omega_1 \neq \omega_2$. Возведем это выражение в куб:

$$V^3_{вх}(t) = A^3 \sin^3 \omega_1 t + 3A^2 B \sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t + \\ + 3AB^2 \sin \omega_1 t \sin^2 \omega_2 t + B^3 \sin^3 \omega_2 t.$$

Члены, содержащие синусы в кубе, можно разложить по гармоникам, используя решение к пункту (а) этой задачи. Остальные члены разложим по синусам и косинусам. Например,

$$\sin^2 \omega_1 t \sin \omega_2 t = \frac{1}{2} [\sin \omega_2 t - \cos 2\omega_1 t \sin \omega_2 t] = \\ = \frac{1}{2} \sin \omega_2 t - \frac{1}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t - \frac{1}{4} \sin (\omega_2 - 2\omega_1) t.$$

Используя эти разложения, окончательно находим

$$V_{вых}(t) = \left(A + \frac{3eA^3}{4} + \frac{3eAB^2}{2} \right) \sin \omega_1 t + \\ + \left(B + \frac{3eB^3}{4} + \frac{3eA^2 B}{4} \right) \sin \omega_2 t - \frac{eA^3}{4} \sin 3\omega_1 t - \\ - \frac{3eA^2 B}{4} \sin (2\omega_1 + \omega_2) t + \frac{3eA^2 B}{4} \sin (2\omega_1 - \omega_2) t - \\ - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 + 2\omega_2) t - \frac{3eAB^2}{4} \sin (\omega_1 - 2\omega_2) t - \\ - \frac{eB^3}{4} \sin 3\omega_2 t.$$

Таким образом, помимо изменения амплитуд колебания основных гармоник, кубическая нелинейность приводит к появлению новых колебаний с частотами $3\omega_1$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $\omega_1 \pm 2\omega_2$, $3\omega_2$. Эффект выпрямления отсутствует.

Том II

5. Электричество и магнетизм
6. Электродинамика
7. Физика сплошных сред

В этой части приводятся задачи, которые были предложены студентам второго курса КАЛТЕХа в течение тех первых двух лет обучения, когда курс физики был пересмотрен на основе лекций Р. Фейнмана. Эти упражнения давались студентам либо в виде домашних заданий, либо в качестве задач на экзаменах и поэтому сильно различаются по трудности. Порядок их расположения примерно соответствует, хотя и не всегда строго, степени их трудности. Подобно упражнениям к тому I, эту систему упражнений ни в коей мере не следует считать «окончательной», она, несомненно, будет пересматриваться и дополняться, как и сам курс лекций.

Примерно половина задач и упражнений принадлежит Р. Фейнману, остальные составили преподаватели, проводившие занятия со студентами второго курса: Дж. Блю, Т. Кохи, Г. Чаплин, М. Клаузер, Р. Дашен, Р. Доллен, Р. Гриффит, Ф. Хэни, В. Карзас, Р. Каванах, П. Петерс, Дж. Пайн, М. Плессет, М. Сэндс, И. Таммару, А. Тайтл и К. Уилтс.

Первыми редакторами большинства задач в 1962/63 учебном году были К. Уилтс и я. Большинство задач оригинальны или представляют собой нетривиальные варианты «стандартных» задач, однако часть задач заимствована из книг Н. Франка (N. H. Frank) «Introduction to Electricity and Optics», McGraw-Hill, 1950, и Д. Халлидэя и Р. Резника (D. Halliday, R. Resnick) «Physics for Students of Science and Engineering», Wiley, 1960. Мы приносим благодарность авторам этих книг за разрешение опубликовать эти задачи в нашем сборнике.

Дж. Нойгебауер

5

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

К главе 1. ***Электромагнетизм***

1. 1. Электрические силы и силы гравитации.

а) Какой должна была бы быть масса протона, чтобы сила гравитационного притяжения между двумя покоящимися протонами по величине совпадала с силой их электрического отталкивания? Каково отношение этой массы к обычной массе протона?

б) Какой была бы величина силы электростатического взаимодействия двух монет по 1 копейке, помещенных на противоположных концах лекционной доски, ширина которой равна 10 *м*, если бы заряды ядер и электронов этих монет компенсировали себя лишь с точностью до 1%? Можете ли вы себе представить тело, вес которого по величине совпадал бы с этой силой?

1. 2. Оцените приближенно работу, которую необходимо затратить на преодоление силы электрического отталкивания при образовании ядра урана из двух одинаковых половинок. Чему равна эта работа при образовании ядра гелия из двух дейтронов? Выразите оба ответа в киловатт-часах на килограмм.

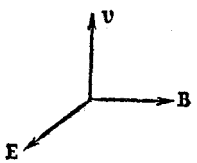
1. 3. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Какова средняя скорость электронов проводимости, если через медный провод диаметра 0,2 *мм* течет ток 10 *а*? Чему равно в этом случае отношение v^2/c^2? (Напомним, что отношение «магнитных» эффектов к «электрическим» такого же порядка.)

1. 4. В области пространства создано однородное электрическое поле **E** напряженностью 10 000 *в/см*,

направленное вдоль оси x, а также однородное магнитное поле **B**, направленное вдоль оси y. Через эту область в направлении оси z *по прямой линии* движется пучок μ-мезонов со скоростью, равной $c/3$.

а) Какова напряженность магнитного поля **B**? (Масса заряженного μ-мезона равна 207 электронным массам, а его заряд по величине совпадает с зарядом электрона.)

б) Можно ли с помощью этого эксперимента определить знак заряда мюона?



1. 5. а) В некоторой области пространства создано постоянное однородное магнитное поле $B_x=0$, $B_y=0$ и $B_z=B_0$. Электрических полей и токов в этой области пространства нет. Из начала координат в положительном направлении оси x со скоростью v вылетает частица массы m с положительным зарядом q. Опишите траекторию частицы в переменных B_0, m, v и q (предполагая, что $v/c \ll 1$).

б) Предположите, что $B_x=0$, $B_y=0$, а $B_z=B_0+ax$, где ax всюду мало по сравнению с B_0. Опишите качественно траекторию частицы [см. работу Шарпака с сотрудниками, опубликованную в «Physical Review Letters», **6**, 128 (1961), где подобное поле использовалось в одном ответственном эксперименте].

в) Покажите, что магнитное поле такого вида не удовлетворяет уравнениям Максвелла, если оно замкнуто в конечном объеме или, как предполагалось выше, в объеме отсутствуют токи или электрическое поле.

1. 6. В поле неподвижного отрицательного точечного заряда, расположенного в начале координат, а также в однородном магнитном поле B_0, направленном в положительном направлении оси z, из точки $x=z=0$, $y=a$ движется частица массы m с положительным зарядом q и малой скоростью $\mathbf{v}=v_0\mathbf{e}_x$.

а) При какой величине напряженности поля B_0 траектория частицы будет представлять собой окружность радиуса a с центром в начале координат?

б) Объясните, почему в том случае, когда напряженность магнитного поля отличается от найденной, скорость частицы зависит только от ее расстояния до начала координат.

в) Схематически нарисуйте несколько витков траектории частицы, когда частица начинает свое движение из точки $x=z=0$, $y=a$ с нулевой скоростью.

К главе 2. ***Дифференциальное исчисление векторных полей***

2. 1. Медная проволока радиуса $a=1$ *мм* равномерно покрыта слоем изоляции, внешний радиус которого равен b. Электрическим током проволока нагревается до температуры T_1, при этом температура внешней поверхности изоляционного покрытия T_2 остается почти комнатной.

а) Чему равен ∇T внутри покрытия? Ответ выразить в переменных a, b, T_1 и T_2.

б) Чему равна разность температур T_1-T_2, если через медную проволоку, покрытую слоем резины (толщина 0,2 *см*, коэффициент теплопроводности $1{,}6\cdot10^{-3}$ *вт/см·град*), течет ток 20 *а*?

2. 2. Вычислением «в лоб» покажите, что

а) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$,

б) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$.

2. 3. Покажите, что если $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку x, y, z, то

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а)} & \operatorname{div}\mathbf{R}=3, \\ \text{б)} & \operatorname{rot}\mathbf{R}=0, \\ \text{в)} & \nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{R}}{R^3}\right)=0, \\ \text{г)} & \nabla\times\left(-\dfrac{\mathbf{R}}{R^3}\right)=0, \\ \text{д)} & \nabla\left(\dfrac{1}{R}\right)=-\dfrac{\mathbf{R}}{R^3} \end{array}\right\} \text{(при } R\neq 0\text{).}$$

е) Из равенства (б) и формулы (2.46) «Лекций» (вып. 5, стр. 42) следует, что вектор $\mathbf{R}$ можно представить в виде $\mathbf{R}=\nabla\varphi$. Найдите функцию φ.

2. 4. Уравнения Максвелла имеют вид

$$1)\quad \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$2)\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$3)\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0,$$

$$4)\quad c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{B}}{\varepsilon_0}.$$

Закон сохранения заряда можно записать в виде

$$5)\quad \nabla\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

а) Покажите, что уравнения 3 и 2 совместны.

б) Покажите, что уравнение 5 можно получить, взяв дивергенцию от левой и правой частей уравнения 4 (т. е. убедитесь, что уравнения Максвелла справедливы лишь при выполнении закона сохранения заряда).

в) Покажите, что в пустоте ($\mathbf{j}=0$, $\rho=0$) поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0.$$

г) Покажите, что в пустоте поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет такому же волновому уравнению

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0.$$

д) Покажите, что, согласно уравнению 2, поле $\mathbf{E}$ можно представить в виде $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-(\partial\mathbf{A}/\partial t)$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$. Почему вектор $\mathbf{B}$ может быть представлен в таком виде?

2. 5. Пусть $\mathbf{v}$ (x, y, z) — поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси. Покажите, что

а) $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$,

б) $\nabla\times\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}$,

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

2. 6. Покажите прямым вычислением, что если $\mathbf{A}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, то

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{R})=2\mathbf{A}.$$

Если, однако, в хорошо известную формулу

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}$$

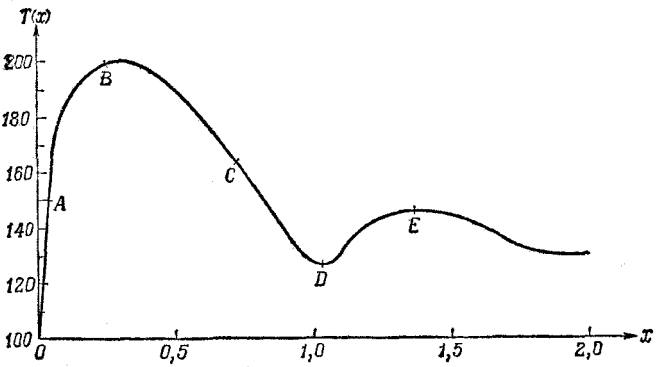
вместо векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ формально подставить ∇ и $\mathbf{R}$, то получится неверный результат

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{R})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{R})-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{R}=3\mathbf{A}.$$

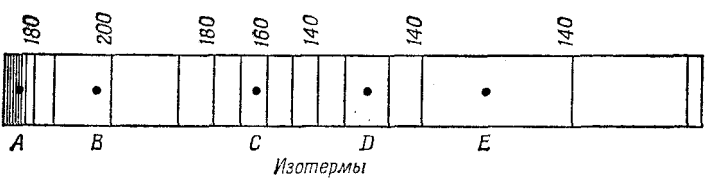
В чем тут дело?

2. 7. Длинный стальной стержень подвергается некоторой термической обработке, в результате чего в некоторый момент времени после начала остывания стержня распределение температуры $T(x)$ вдоль стержня имеет вид, изображенный на фиг. 1. Изотермы, нанесенные с интервалом температур в 10° С, изображены на фиг. 2. Будем предполагать, что температура в каждой точке стержня зависит только от расстояния x до конца стержня. Нарисуйте в точках A, B, C векторы, направление и длина которых совпадают с направлением и вели-

чиной ∇T. В какой из пяти отмеченных точек дивергенция теплового потока $\mathbf{h}$ максимальна? В каких из пяти точек $\nabla \times \mathbf{h} = 0$?



Фиг. 1



Фиг. 2

К главе 3. ***Интегральное исчисление векторов***

3. 1. а) Уравнения Максвелла в гл. 1 «Лекций» были сформулированы словесно, а в гл. 2 — в дифференциальной форме. Покажите, что обе формы уравнений Максвелла эквивалентны.

б) Покажите, что уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где ρ — плотность зарядов, а $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, есть не что иное, как закон сохранения заряда.

3. 2. Поверхность шара покрыта равномерным слоем радиоактивного вещества, которое испускает α-частицы высокой энергии. Вообразим, что α-частицы

вылетают только наружу от поверхности шара, причем только в радиальном направлении. С поверхности шара тем самым стекают заряды, т. е. течет некоторый ток. Создает ли этот ток магнитное поле?

3. 3. Напряженность электрического поля точечного заряда, помещенного в начало координат, имеет вид

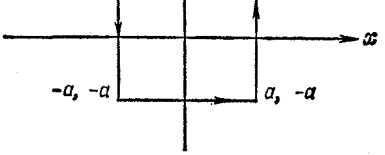
$$\mathbf{E} = \frac{K}{r^3}\mathbf{r}, \quad \text{где} \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

(K — некоторая постоянная).

а) Вычислите поток вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ через поверхность сферы радиуса a, центр которой совпадает с зарядом.

б) Воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, представьте поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность сферы в виде объемного интеграла от $(\nabla \cdot \mathbf{E})$. Можете ли вы объяснить полученный вами результат?

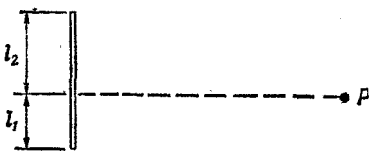
в) Вычислите циркуляцию вектора $\mathbf{E}$ вдоль контура, изображенного на рисунке (контур лежит в плоскости xy). Убедитесь в правильности полученного результата, воспользовавшись теоремой Стокса.



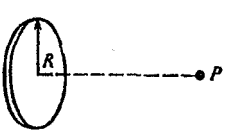
3. 4. Воспользовавшись решением задачи 2.3(а), получите формулу (практически бесполезную) для произвольного объема в виде интеграла по поверхности этого объема. Убедитесь в правильности вашего ответа для сферы и прямоугольного параллелепипеда.

К главе 4. Электростатика

4. 1. Найдите потенциал φ в точке P, удаленной на расстояние r от заряженной нити длиной l_1+l_2 *м*. Линейная плотность зарядов на нити равна λ (см. рисунок).
Сравните полученный результат с тем, которого следует ожидать в случае $r \gg (l_1+l_2)$. Проверьте ваш ответ в предельном случае $r \ll (l_1+l_2)$, сравнив напряженности электрического поля, найденные с помощью φ и по теореме Гаусса.



4. 2. Вычислите напряженность электрического поля в точке P, расположенной на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса R на расстоянии r от его центра.



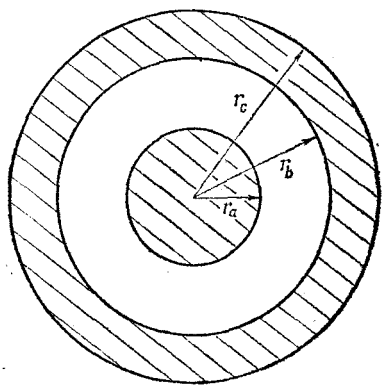
4. 3. Две металлические сферы имеют общий центр, причем внутренней из них сообщен заряд q', а внешней — заряд q.

а) Найдите зависимость электрического потенциала от радиуса на далеких расстояниях.

б) Найдите зависимость напряженности электрического поля от радиуса.

в) Чему равен потенциал на поверхности внутренней сферы?

г) Как изменится электрическое поле на расстояниях $r > r_c$ и $r_c > r > r_b$, если центры внутренней и внешней сфер слегка разойдутся?



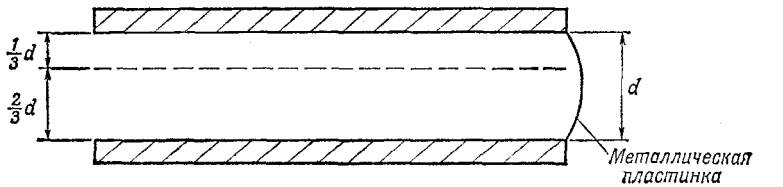
К главе 5. ***Применения закона Гаусса***

5. 1. Покажите, что электрический потенциал φ обладает следующим интересным свойством: среднее значение $\overline{\varphi}$ на воображаемой сферической поверхности равно значению $\varphi(0)$ в центре этой сферы *при условии*, что внутри сферы нет никаких зарядов. В каких задачах, по вашему мнению, удобно воспользоваться этим свойством?

5. 2. Найдите напряженность электрического поля во внутренних точках очень длинного равномерно заряженного цилиндра, достаточно удаленных от его концов. Чем отличается результат от получающегося в случае равномерно заряженного шара?

5. 3. Две широкие параллельные металлические пластины находятся друг от друга на расстоянии d. Края этих пластин соединены металлическим проводом. Между пластинами на расстоянии $^1/_3 d$ ниже верхней пластины натянута тонкая равномерно заряженная пластмассовая пленка, на единицу площади которой приходится заряд σ. Найдите напряженности элект-

рического поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ вблизи верхней и нижней пластин.

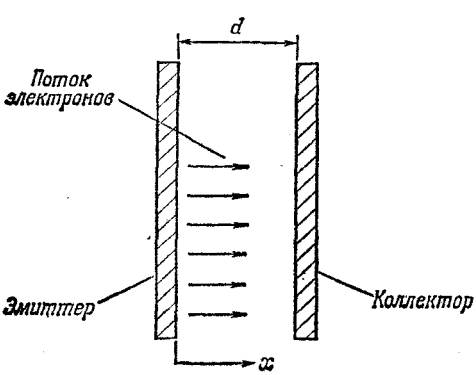


5. 4. Найдите выражение для x-компоненты электрического поля, если плотность зарядов ρ в пространстве зависит только от x.

5. 5. В электронной лампе электроны вылетают из раскаленной металлической пластины (катод) и собираются на плоской металлической пластине (анод), расположенной параллельно эмиттирующей поверхности на расстоянии d от нее. (Расстояние d предполагается малым по сравнению с размерами обеих пластин.) Потенциал электрического поля между пластинами меняется по закону $\varphi = kx^{4/3}$, где x — расстояние от эмиттера.

а) Чему равна плотность поверхностных зарядов на эмиттере? На коллекторе?

б) Как меняется плотность объемного заряда $\rho(x)$ в пространстве между пластинами, т. е. в интервале $0 < x < d$?



5. 6. Пусть на поверхности проводника распределены заряды с плотностью σ *кулон/м*^{2}, где σ — вообще говоря, переменная величина. Покажите, что сила, действующая на заряд, заключенный в элементарной площадке dA, нормальна к поверхности проводника и равна $^1/_2(\sigma^2/\varepsilon_0)dA$. (Множитель $^1/_2$ правилен. Объясните, почему он возникает?)

5. 7. Максимальная напряженность электрического поля, которое может существовать на поверхности проводника, граничащего с вакуумом, по порядку величины равна 10 *в/м*. Полагая, что поверхностный заряд, создающий это поле, отрицателен, сравните число избыточных электронов, приходящееся на единицу площади, с числом атомов, приходящихся на ту же площадь. Сравните величину силы, действующей на электрон в таком поле, с величиной силы, которую испытывает электрон в поле протона на расстояниях порядка атомных.

5. 8. Отрицательный мюон (μ-мезон) — это частица, заряд которой равен заряду электрона, а масса в 207 раз тяжелее массы электрона. При торможении в веществе отрицательный мюон может быть захвачен ядром какого-нибудь атома и заместить один из вращающихся вокруг ядра электронов, образовав «мезоатом». Так как масса мюона велика, то размер его орбиты во много раз меньше размеров орбит атомных электронов, например, для тяжелых ядер орбита мюона, соответствующая его наинизшему энергетическому состоянию, даже находится внутри ядра. Мюон взаимодействует с ядерным веществом с помощью не ядерных сил, а электрических, причем ядро им воспринимается как равномерно заряженный шар. Из независимых экспериментов было найдено, что радиус ядра зависит от суммарного числа протонов и нейтронов (A) следующим образом: $R=R_0\cdot A^{1/3}$ ($R_0\approx 1{,}2\cdot 10^{-15}$ *м*). Рассмотрим модель мезоатома свинца, в котором мюон осциллирует относительно центра ядра вдоль произвольной линии, проходящей через этот центр. Чему равна собственная частота ω таких осцилляций?

Вы уже знаете, что квантовые уровни гармонического осциллятора отстоят друг от друга на энергию $\hbar\omega$. Чему равна разность энергий двух самых низких состояний мезоатома в рассматриваемой модели? Экспериментально было обнаружено, что при образовании мезоатомов в свинце испускаются γ-лучи с энергией $6 Мэв$. Как бы вы интерпретировали этот факт?

5. 9. Представьте себе, что через земной шар по диаметру прорыт туннель. Плотность пород, образующих земной шар, можно считать постоянной. Покажите, что если в этот туннель бросить какой-то предмет, то он будет совершать колебания относительно центра земного шара с периодом, равным периоду обращения спутника, запущенного вокруг Земли над самой ее поверхностью.

5.10. Известно, что за год Земля выделяет тепловую энергию, примерно равную $Q=8\cdot10^{20}$ $дж$. Не строя последовательной теории этого явления, можно рассмотреть несколько весьма упрощенных моделей, позволяющих сделать правильные оценки по порядку величины. В качестве примера рассмотрим модель, согласно которой все тепло создается в результате распада радиоактивных веществ, однородно распределенных по объему земного шара: кинетическая энергия испускаемых ими частиц полностью переходит в тепло.
По существующим оценкам температура в центре Земли примерно равна 2500° С, а теплопроводность земных пород в среднем равна 0,03 $дж/см\cdot сек\cdot град$. Находится ли описанная выше модель в согласии с этими оценками?

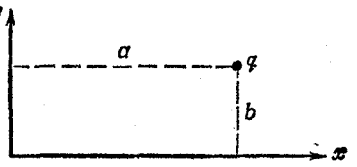
5.11. Два длинных коаксиальных проводящих цилиндра заряжены так, что на далеком расстоянии от их концов на единицу длины внутреннего цилиндра приходится λ_1 кулонов, а на единицу длины внешнего цилиндра λ_2 кулонов. Внутренний и внешний радиусы внутреннего цилиндра равны r_1 и r_2, а внешнего цилиндра равны r_3 и r_4. Найдите поле $\mathbf{E}(r)$

в точках, расположенных вблизи середины цилиндров (т. е. там, где краевыми эффектами можно пренебречь). Определите разность потенциалов между цилиндрами.

Опишите качественно, в какую сторону будут меняться напряженность поля и потенциал, если:
1) r_1 будет уменьшаться;
2) r_2 будет увеличиваться;
3) внешний контур сечения внутреннего цилиндра имеет форму квадрата со сторонами, равными $2r_2$ (при этом предполагается, что $\sqrt{2}r_2 < r_3$)?

К главе 6 и 7. ***Электрическое поле в разных физических условиях***

6. 1. Методом изображений найдите силу, действующую на заряд q, помещенный на расстояниях a и b от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол.



6. 2. Частица с зарядом q, в начальный момент времени закрепленная на расстоянии x_0 от поверхности заземленной проводящей плоскости, освобождается и начинает двигаться по направлению к поверхности.
а) Как зависит кинетическая энергия частицы от расстояния x до поверхности? (Потерями энергии частицы на излучение пренебречь.) Есть ли что-нибудь нефизическое в вашем ответе?
б) Реальную металлическую пластинку можно рассматривать как идеальную проводящую плоскость лишь на расстояниях, превышающих межатомные, т. е. лишь до расстояний примерно 2—3 Å. Оцените кинетическую энергию электрона, который в момент $t=0$ был освобожден на расстоянии

1 *см* от проводящей пластинки. Ответ выразить в электрон-вольтах.

6. 3. Прямоугольный пластмассовый брусок с размерами 1 *см* × 10 *см* × 100 *см* равномерно заряжен. Плотность зарядов равна ρ *кулон/см*^{3}. Нарисуйте примерный ход потенциала φ как функции расстояния до центра бруска вдоль прямой линии, перпендикулярной стенке с размерами 10 *см* × 100 *см* и проходящей через *центр* бруска. Рассмотрите интервал расстояний от 0,001 *см* (внутри бруска) до расстояний, во много раз превышающих 100 *см*. Масштаб возьмите дважды логарифмический, т. е. нарисуйте $\log\varphi$ как функцию логарифма расстояния. На том же графике нарисуйте кривую зависимости напряженности электрического поля **E** от расстояния.

6. 4. Земля непрерывно облучается космическими лучами высокой энергии, приходящими из пространства вне Солнечной системы. С помощью измерений, выполненных на зондах и спутниках, было установлено, что космические лучи в основном состоят из протонов и лишь малую часть их составляют α-частицы, тяжелые ядра и электроны. Средняя энергия протонов в космических лучах оказалась равной нескольким миллиардам электрон-вольт; интенсивность потока протонов, достигающих земной атмосферы, примерно равна одному протону в секунду на 1 *см*^{2}. Интересно, какое время необходимо, чтобы заряженные частицы космических лучей подняли потенциал Земли настолько, чтобы протоны уже не могли попасть на поверхность Земли из-за электрического отталкивания? Велико ли это время по сравнению с возрастом Земли, оцениваемым примерно в 5 миллиардов лет? Если это время меньше возраста Земли, то почему космические лучи продолжают достигать ее поверхности?

6. 5. Определите емкость, приходящуюся на единицу длины бесконечного цилиндрического конденсатора, изготовленного из двух проводящих коаксиальных цилиндров, радиусы которых равны a (внутренний цилиндр) и b. Ответьте качественно на вопрос, что

случилось бы, если бы в конструкции конденсатора оказались дефекты, скажем на поверхности внешнего цилиндра имелся бы острый выступ?

6. 6. а) Чему равна плотность поверхностных зарядов, индуцированных на поверхности незаряженной изолированной проводящей сферы, расположенной на расстоянии b от точечного заряда q?

б) Чему равна сила, действующая на заряд со стороны сферы, если потенциал последней равен V?

6. 7. В гл. 6 «Лекций» (вып. 5) на основе качественных рассуждений было показано, что электрическое поле вне сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется в зависимости от полярного угла θ как $\cos\theta$, можно себе представить как суперпозицию электрических полей двух слабо сдвинутых относительно друг друга и противоположно заряженных шаров. Покажите теперь это путем вычислений и найдите электрическое поле как *вне*, так и *внутри* сферы, считая, что плотность поверхностных зарядов на ней зависит от полярного угла θ: $\sigma(\theta)=A\cos\theta$, где A — некоторая постоянная.

6. 8. Поле электрического диполя определяется выражениями (6.14) и (6.15) «Лекций» (вып. 5, стр. 113).

а) Найдите радиальную и тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля диполя в точке (r, θ, φ).

б) Покажите, что электрическое поле диполя направлено в одну и ту же сторону во всех точках прямой, проходящей через диполь.

в) Найдите направление и относительные величины напряженности $\mathbf{E}$ на некотором произвольном расстоянии от диполя в точках, определяемых углами 0, $\pi/4$, и $\pi/2$, отсчитанными от направления вектора $\mathbf{p}$?

6. 9. Пусть диполь находится в однородном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$.

а) Если направление дипольного момента совпадает с направлением электрического поля, то существует эквипотенциальная поверхность, охваты-

вающая диполь. Покажите, что такой поверхностью является сфера, и найдите величину дипольного момента, для которой сфера имеет радиус a.

б) Опишите электрическое поле вне этой сферы.

в) Изменится ли электрическое поле, если с этой эквипотенциальной поверхностью совпадет тонкая проводящая сфера, заряженная до того же потенциала?

г) Как будут распределены заряды на сфере?

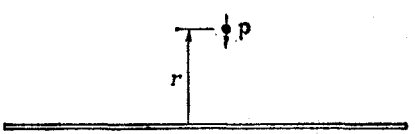
д) Каким дипольным моментом будет обладать это распределение зарядов?

е) Как бы вы использовали полученные результаты?

6.10. Частица с дипольным моментом $\mathbf{p}$ помещена на расстоянии r от длинного провода, на единицу длины которого приходится заряд λ (λ — константа). Вектор дипольного момента расположен в плоскости, проходящей через провод и частицу.

а) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент этой силы, если вектор $\mathbf{p}$ направлен нормально к проводу?

б) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент силы, если вектор $\mathbf{p}$ параллелен проводу?



6.11. Найдите потенциал, создаваемый большой пластиной, на единицу площади которой приходится N диполей, как функцию расстояния от этой пластины. Считайте, что все диполи обладают одинаковым дипольным моментом $\mathbf{p}$, направленным перпендикулярно поверхности пластины.

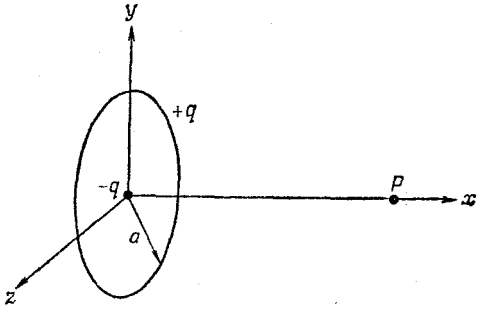
6.12. Электрический заряд $+q$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса a. Центр кольца совпадает с началом координат, а плоскость кольца

совпадает с плоскостью yz. В начале координат помещен заряд $-q$.

а) Найдите потенциал φ в точке P, расположенной на оси x на расстоянии x от начала координат.

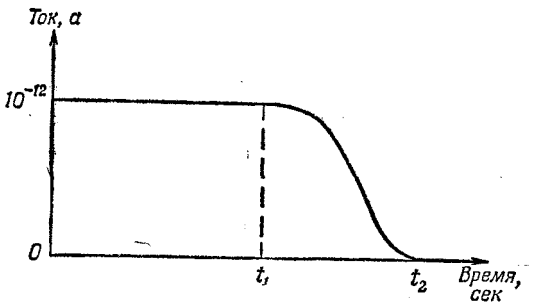
б) Чему равно электрическое поле в этой точке?

в) Как зависит электрическое поле от x на расстояниях $x \gg a$? Убывает ли оно быстрее электрического поля диполя на больших расстояниях? Как это объяснить?



6.13. Плоский конденсатор емкостью 100 *пф*, расстояние между обкладками которого 1 *см*, заряжается с помощью батареи до разности потенциалов 10 *в*. После этого батарея отключается. Нижняя пластина конденсатора затем облучается синим светом, выбивающим из нее электроны, кинетическая энергия которых лежит в интервале от 0 до 1,5 *эв*. Обкладки заряжены так, что электроны притягиваются к верхней из них. На приведенном рисунке показана зависимость от времени полного тока, текущего на верхнюю пластину конденсатора. Сколько времени понадобится для того, чтобы разность потенциалов на обкладках обратилась в нуль (время t_1 на рисунке)? Чему равна разность потенциалов в момент времени $t \gg t_2$? Как изменится ваш ответ, если *перед* зарядкой конденсатора расстояние между пластинами увеличить вдвое? Как изменится ваш ответ, если расстояние между пластинами было увеличено вдвое лишь *после того*,

как конденсатор был полностью заряжен и батарея отключена?



6.14. Палочка из изолятора длиной 1 *м* и радиусом $R=1$ *см* вытянута вдоль оси x так, что ее концы расположены в точках с координатами $x=0{,}5$ *м* и $x=-0{,}5$ *м*. Плотность объемного заряда в палочке равна $\rho=ar^2$, где r — расстояние до оси палочки, а a — положительная постоянная, равная 2 *кулон/м*$^{-5}$.

а) Найдите напряженность электрического поля **E** в четырех точках $x=0$, $z=0$, $y=0$, 0,5, 1,0 и 2,0 *см*. В этой части задачи считайте палочку бесконечно длинной.

б) Дайте разумную оценку потенциала в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$, взяв за нуль потенциала его значение на бесконечности Укажите неопределенность вашей оценки и обоснуйте ее.

в) Будет ли потенциал в точке $x=0{,}5$ *м*, $y=z=0$ больше, меньше или равен потенциалу в начале координат?

7. 1. а) Покажите, что эквипотенциальные поверхности вокруг двух параллельных противоположно заряженных нитей представляют собой цилиндры вращения. Нити находятся на расстоянии d, линейная плотность зарядов на них равна $+\lambda$ и $-\lambda$ *кулон/м*.

б) Используя результат предыдущей части задачи, найдите емкость, приходящуюся на единицу длины двух параллельных проводов с радиусом

поперечного сечения r_0, оси которых находятся на расстоянии d. Считайте, что $d \gg 2r_0$.

в) Покажите, что при $x, y > d$ потенциал может быть представлен в комплексном виде

$$f(z) \equiv U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}.$$

К главе 8. ***Электростатическая энергия***

8. 1. Согласны ли вы с утверждением, содержащимся в гл. 8 «Лекций» (вып. 5), что электростатическая энергия ядра, содержащего Z протонов, более или менее однородно распределенных по объему сферы радиуса r, примерно равна величине

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r}?$$

8. 2. Максимальная емкость конденсатора настройки в радиоприемнике равна 100 *пф*. Путем поворота подвижных пластин емкость конденсатора может быть уменьшена до 10 *пф*. Предположим, что конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 *в*, когда его емкость максимальна. Затем ручка настройки поворачивается и емкость конденсатора становится минимальной. Чему равна работа, совершенная при повороте ручки настройки?

8. 3. Заряды на обкладках двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 равны q_1 и q_2. Покажите, что, за исключением особых случаев, запасенная электростатическая энергия конденсаторов уменьшается, если они соединяются параллельно. Куда при этом девается энергия? Найдите условия, при которых соединение конденсаторов не приводит к потере энергии.

8. 4. а) Покажите, что в электрическом поле $\mathbf{E}$ электростатическая энергия диполя с дипольным моментом $\mathbf{p}$ равна

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

б) Вычислите момент силы, действующей на диполь в электрическом поле $\mathbf{E}$. Сделайте это как прямым путем, так и с помощью приведенного выше

выражения для энергии диполя. Будет ли энергия диполя той же самой, если он создан путем последовательного помещения его зарядов в электрическое поле? Если нет, то вычислите разность энергий; если да, то приведите физические соображения в защиту вашего утверждения.

8. 5. Покажите, что обкладки плоского конденсатора притягивают друг друга с силой $F=q^2/2\varepsilon_0 A$ (A — площадь обкладки). Найдите работу, которую необходимо затратить, чтобы расстояние между обкладками увеличить с x до $x+dx$.

8. 6. Известно, что пион (π-мезон) может находиться в трех различных зарядовых состояниях. Иными словами, существуют положительный, отрицательный и нейтральный пионы. Масса (умноженная на c^2) заряженного пиона равна 139,6 *Мэв*, масса же нейтрального пиона равна 135 *Мэв*. В одной из моделей пиона предполагается, что различие масс определяется лишь электростатической энергией. Если далее предположить, что заряженные пионы имеют сферическую форму и заряд равномерно распределен по их объему, то можно вычислить радиус пиона. Вычислите радиус пиона в этих предположениях. Находится ли ваш результат в согласии с существующими оценками размеров ядер?

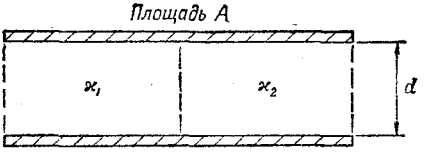
8. 7. Внутренний радиус металлической сферической оболочки равен a, ее внешний радиус равен b, а центр находится в начале координат. В оболочке просверлено небольшое отверстие. Полный заряд оболочки равен нулю. Какую работу нужно затратить, чтобы заряд q_1 перевести из бесконечности через отверстие в начало координат? Чему равна эта работа, если полный заряд оболочки равен q_2?

К главе 10. **Диэлектрики**

10. 1. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком, состоящим из двух половинок равных размеров, но с разными диэлектрическими проницаемостями $\varkappa$ (см. рисунок).

Покажите, что емкость такого конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}.$$

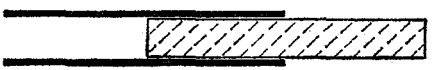


10. 2. Расстояние между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму квадратов с площадью 400 *см*^{2}, равно 1 *см*. С помощью электрической батареи конденсатор заряжается до разности потенциалов 10 *в*, а затем отключается от нее. После этого между обкладками конденсатора вставляется широкая пластина из диэлектрика толщиной, немного меньшей 1 *см*, причем так, что остается закрытой лишь площадь 10×20 *см*^{2}. Диэлектрическая проницаемость пластины равна 4.

а) Чему равна сила притяжения обкладок конденсатора друг к другу?

б) Чему равен дипольный момент единицы объема диэлектрика внутри, но достаточно далеко от краев конденсатора (чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами)?

в) Предположим, что внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью 4,0 равномерно распределены маленькие металлические шарики. Будет ли при этом разность потенциалов на пластинах конденсатора больше, меньше или равна той, которая существовала бы в случае однородного диэлектрика?



10. 3. Емкость плоского конденсатора с расстоянием d между его пластинами на воздухе равна C_0. Между пластинами конденсатора вдвигается пластина из

изолятора с диэлектрической проницаемостью $\varkappa$, толщиной $t<d$ и площадью, равной площади пластин конденсатора, причем так, что ее плоскости параллельны пластинам. Пренебрегая краевыми эффектами, покажите, что емкость конденсатора при этом становится равной

$$C=\frac{C_0}{1-[(\varkappa-1)/\varkappa](t/d)}.$$

10. 4. Изолированному металлическому шару радиуса a сообщен заряд Q. Поверхность шара равномерно покрыта слоем диэлектрика с внутренним радиусом a и внешним радиусом b.

а) Вычислите поверхностный заряд, наведенный на внутренней и внешней поверхности диэлектрика.

б) Найдите, чему равна плотность наведенных зарядов в объеме диэлектрика.

10. 5. Плоский конденсатор подключен к электрической батарее, поддерживающей на его пластинах разность потенциалов V_0. В пространство между обкладками конденсатора вдвигается пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varkappa$ так, что это пространство полностью заполняется диэлектриком.

а) Покажите, что при этом электрической батареей совершается работа $q_0V_0(\varkappa-1)$, где q_0 — заряд на обкладках конденсатора до заполнения его диэлектриком.

б) Какую работу при заполнении конденсатора диэлектриком совершают механические силы? Совершается ли эта работа над диэлектриком или самим диэлектриком?

10. 6. Две коаксиальные трубки радиуса a и b $(a<b)$ погружаются вертикально в масляную ванну. Покажите, что, если между трубками существует разность потенциалов V, масло в них поднимется на высоту

$$h=\frac{2V^2(\varkappa-1)\varepsilon_0}{\ln(b/a)\,\rho\,(b^2-a^2)\,g},$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость масла.

10. 7. Покажите, что силовые линии электрического поля, пересекающие поверхность раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, образуют с нормалью к этой поверхности углы θ_1 и θ_2, связанные соотношением $\varkappa_1 \operatorname{ctg}\theta_1 = \varkappa_2 \operatorname{ctg}\theta_2$.

К главе 11. ***Внутреннее устройство диэлектриков***

11. 1. Найдите электрическое поле внутри и вне однородно поляризованного шара радиуса a (см. фиг. 11.7, вып. 5, стр. 223).

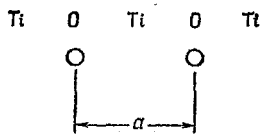
11. 2. Диэлектрическая проницаемость газа гелия при 0° С и давлении 1 *атм* равна 1,000074. Найдите дипольный момент атома гелия в однородном электрическом поле с напряженностью 100 *в/см*.

11. 3. Диэлектрическая проницаемость водяного пара, газа полярных частиц, весьма заметно зависит от температуры. В приведенной ниже таблице представлены экспериментальные данные по исследованию этой зависимости. Считая водяной пар идеальным газом, вычислите поляризуемость его молекул как функцию температуры и начертите график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс обратную температуру. По наклону кривой определите дипольный момент молекулы воды.

T, °К	Давление, *см. рт. ст.*	$(\varkappa - 1)\cdot 10^6$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

11. 4. Рассмотрите систему, состоящую из двух атомов, расположенных на расстоянии a друг от друга. Поляризуемость каждого атома равна α. Найдите связь между a и α, при которой эта система будет сегнетоэлектриком. (*Ответ*: $a^3 = \alpha/2\pi$.) Если эта

задача покажется вам слишком простой, рассмотрите линейную цепочку атомов кислорода, расположенных на расстоянии a друг от друга, между каждой парой которых находится атом титана.



Найдите соотношение между поляризуемостью атома кислорода α_O и атома титана α_{Ti}, при котором такая система будет сегнетоэлектриком.
Примечание:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}20.$$

11. 5. «Диэлектрик» представляет собой пространственную решетку регулярно расположенных стеклянных шариков диаметра d с минимальным расстоянием между соседними шариками, равным $3d$. Предполагая, что поляризация, наведенная во внешнем электрическом поле в каждом стеклянном шарике, не зависит от наличия остальных (т. е. пренебрегая перераспределением наведенных зарядов благодаря взаимному влиянию шариков), найдите диэлектрическую проницаемость такого «диэлектрика».

К главе 12. ***Электростатические аналогии***

12. 1. Из медной проволоки диаметром поперечного сечения b сделано кольцо радиуса a, причем $b \ll a$. Кольцо помещено в центр пластмассового шара, радиус которого во много раз больше радиуса кольца. Переменным магнитным полем в кольце наводится ток. Ток нагревает проволоку, причем в единицу времени в кольце выделяется W тепла (в *дж/сек*). Температура на поверхности шара равна T_0. Чему равна температура в центре шара в стационарном случае?

12. 2. В задаче **5.10** была обрисована одна из простейших моделей для описания теплового баланса Земли. Другая модель (тоже сильно упрощенная) состоит в предположении, что внутри Земли существует ядро радиуса a с предельно высокой теплопроводностью. Найдите, какого размера должно быть это ядро, считая его температуру равной 2500° С, а коэффициент теплопроводности окружающих ядро пород равным 0,03 *дж/см·сек·град* и принимая во внимание тот факт, что Земля ежегодно выделяет $8\cdot 10^{20}$ *дж* тепла.

12. 3. а) В ряде случаев электростатический потенциал φ можно представить в виде $\varphi = f(r)\cos\theta = f(r)\, z/r$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Например, потенциал такого вида в гл. 12 «Лекций» (вып. 5) возникает при решении задачи об обтекании шара «сухой» водой. Если функцию $f(r)$ разложить в ряд

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

то для потенциала φ, удовлетворяющего уравнению Лапласа, только два коэффициента b_n будут отличны от нуля. Найдите эти коэффициенты.

б) В двумерной задаче потенциал φ может быть записан в виде

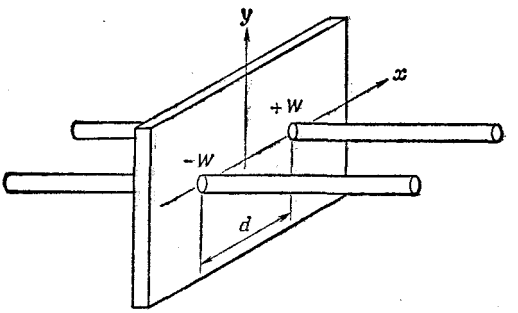
$$\varphi = g(\rho)\cos\theta = g(\rho)\cdot\frac{z}{\rho}, \qquad g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n,$$

где $\rho^2 = y^2 + z^2$. Найдите отличные от нуля коэффициенты, если потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

При решении задачи *используйте декартову систему координат.*

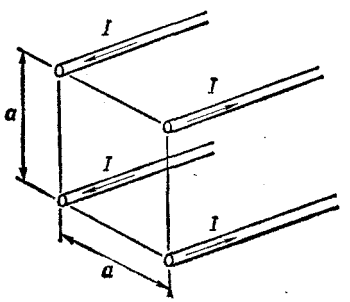
12. 4. Две тонкие водопроводные трубы, расположенные параллельно на расстоянии d друг от друга, пересекают под прямым углом широкую стенку толщиной t. Теплопроводность стенки равна K, а температура на далеких расстояниях от труб равна T_0. По трубе, пересекающей стенку в точке $x = +d/2$,

течет горячая вода, сообщающая стенке $+W$ *вт* тепла. По другой трубе течет холодная вода, которая, наоборот, забирает от стенки $-W$ *вт* тепла. Считая трубы бесконечно длинными, а задачу двумерной, найдите температуру в точке P с координатами $x=100\,d$, $y=100\,d$. Пусть $T_0=20^\circ$ С, $d=50$ *см*, $K=0{,}03$ *вт/см·град*, $W=200$ *вт* и толщина стенки равна 10 *см*. Решите задачу в разумных приближениях.



К главе 13. Магнитостатика

13. 1. Концы четырех параллельных медных проводов сечением 1 *мм*^{2} достаточно большой длины образуют квадрат со стороной 20 *см* (см. рисунок). По каждому проводу течет ток 20 *а* в направлении, указанном стрелками. Какова величина и направление вектора магнитного поля **B** в центре квадрата? Куда направлена сила, действующая на 1 погонный метр левого нижнего из проводов, и какова ее величина?



$a=20$ *см*
$I=20$ *а*

13. 2. Длинный диэлектрический цилиндр радиуса a *статически* поляризован, причем вектор поляризации во всех точках цилиндра направлен радиально, а величина его пропорциональна расстоянию от оси, т. е. $\mathbf{P}=P_0\mathbf{r}/2$. Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Найдите магнитное поле в точках на оси цилиндра, достаточно удаленных от его концов.

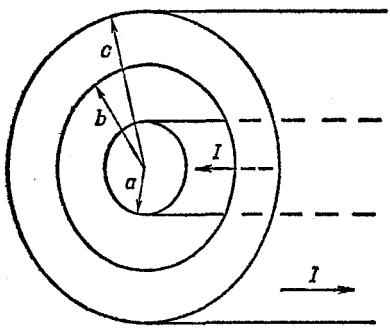
13. 3. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух концентрических проводников, размеры которых указаны на рисунке. Предполагается, что плотность токов в проводниках однородна по сечению.

а) Найдите магнитное поле **B** в точках r внутри центрального проводника ($r<a$).

б) Найдите **B** в пространстве между проводниками ($a<r<b$).

в) Найдите **B** внутри внешнего проводника ($b<r<c$).

г) Найдите **B** вне кабеля ($r>c$).



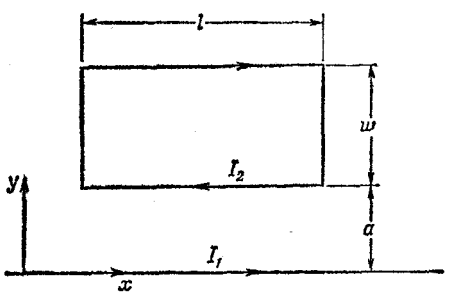
13. 4. Развертка электронного луча в телевизионной электронно-лучевой трубке осуществляется магнитным полем, создаваемым системой отклоняющих катушек, расположенных в узкой части электронно-лучевой трубки. Источником электронов, как правило, служит электронная пушка, из которой электроны вылетают с энергией 3 *кэв*. После отклонения электроны затем ускоряются электрическим полем. Оцените напряженность магнитного поля, соот-

ветствующую максимальному отклонению электронного луча. Оцените в тот же момент времени число ампер-витков в отклоняющей катушке. При оценке ускорением электронов после отклонения можно пренебречь. В какую сторону изменятся ваши оценки, если учесть это ускорение?

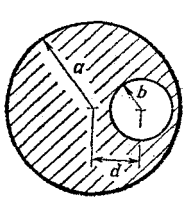
13. 5. По длинному прямолинейному проводу течет ток I_1, а по контуру, имеющему форму прямоугольника со сторонами l и w, течет ток I_2. Прямолинейный проводник и контур лежат в одной плоскости.

а) Чему равна сила, действующая на контур? Какая сила действует при этом на линейный проводник?

б) Какой вращающий момент приложен к контуру? Чему равен вращающий момент, приложенный к линейному проводнику?



13. 6. Внутри очень длинного проводящего стержня радиуса a имеется цилиндрическая полость радиуса b, ось которой параллельна оси стержня, но находится от нее на расстоянии d. По проводнику течет ток, плотность которого по сечению однородна и равна $+j$. Чему равно магнитное поле на оси полости, вдали от концов стержня?

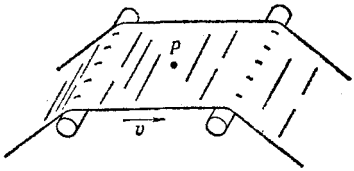


К главе 14. ***Магнитное поле в разных случаях***

14. 1. При производстве пластмассовой пленки широкая тонкая полоса пластмассы протягивается со скоростью v через два последовательно расположенных ролика. В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный электрический заряд σ.

а) Найдите векторный потенциал вблизи поверхности полосы в центре пролета между роликами (вблизи точки P на рисунке).

б) Чему равно поле $\mathbf{B}$ в этой же области?

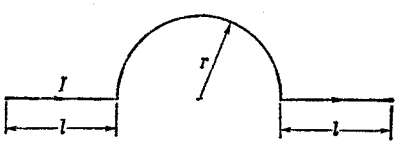


14. 2. По тонкому проводу течет ток I. Чему равно магнитное поле в центре полукруга, созданное:

а) каждым из прямолинейных участков провода, длина которых равна l?

б) криволинейным участком провода длиной πr?

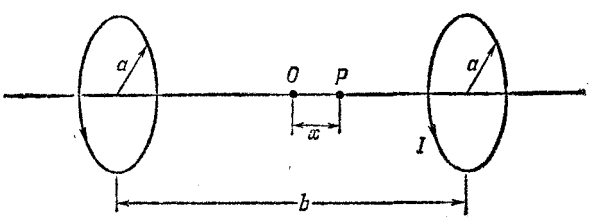
в) всем проводом?



14. 3. В используемых на практике устройствах часто необходимо добиться высокой однородности магнитного поля. Одной из важнейших характеристик этих устройств является однородность поля, создаваемого кольцами Гельмгольца: двумя коаксиальными витками проволоки, по которым течет ток в одном направлении. Пусть радиус витков равен a, сила тока в них I, а расстояние между ними равно b.

а) Найдите магнитное поле на оси витков в точке P, расположенной на расстоянии x от средней точки между витками.
б) Разложите полученное выражение в ряд по степеням x с точностью до членов x^2.
в) Каково соотношение между величинами a и b, при котором слагаемые с x^2 обращаются в нуль?
г) Покажите, что созданное витками магнитное поле в указанном в пункте (б) приближении и при условии, найденном в пункте (в), определяется выражением

$$B_x = \frac{8I}{5^{3/2} a \varepsilon_0 c^2}.$$



14. 4. По квадратной проволочной рамке со сторонами, равными a, течет ток I.
а) Используя закон Био—Савара, покажите, что магнитное поле **B** на оси рамки в точке, расположенной на расстоянии x от ее центра, равно

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi (4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2} \varepsilon_0 c^2}.$$

б) Получите тот же результат, определив векторный потенциал.
Примечание. Исходите из интегрального представления векторного потенциала и используйте соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy,$$

$$\lim_{x \to c} \int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b \left\{ \lim_{x \to c} f(x, y) \right\} dy.$$

14. 5. Определив векторный потенциал, вычислите магнитное поле на оси бесконечно тонкого кольца радиуса a, по которому течет ток I.

14. 6. Проводящая сфера радиуса a заряжена до потенциала V. Сфера вращается вокруг одной из осей, проходящих через ее центр, с угловой скоростью ω. Покажите, что магнитное поле сферы совпадает с полем магнитного диполя, магнитный момент которого равен,

$$\mu = \varepsilon_0 \omega V \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right).$$

Покажите также, что поле внутри сферы равно

$$B_{\text{вн}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

Эти выражения точные для всех точек соответственно вне и внутри сферы. Если вы не можете доказать этого, получите ответ на первый вопрос для расстояний, намного превышающих a, а второй результат — для центра сферы.

14. 7. Как отмечалось в «Лекциях», скорость вращения Земли в принципе можно определить, измерив разность потенциалов между центром и поверхностью проводящего цилиндра, помещенного на Северном полюсе Земли так, что его ось проходит через центр земного шара.

а) Покажите, что эту разность потенциалов можно представить в виде

$$V = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0},$$

где v — линейная скорость точек на поверхности цилиндра, а λ — поверхностный заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра.

б) Можно ли представить себе установку с разумными параметрами для измерения этого эффекта?

6

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

К главе 15. Векторный потенциал

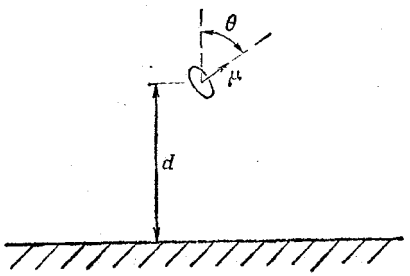
15. 1. Внутри сверхпроводника поля **B** и **E** равны нулю.

а) Граничным условием для поля **E** на поверхности сверхпроводника является равенство нулю его тангенциальных компонент. Как выглядят граничные условия для магнитного поля?

б) Маленькая рамка с током помещена на расстоянии d от поверхности сверхпроводника, занимающего полупространство. Магнитный момент μ рамки образует угол θ с нормалью к поверхности. Несколькими словами опишите метод, с помощью которого можно найти магнитное поле в любой точке пространства, предполагая, что поле магнитного диполя уже известно.

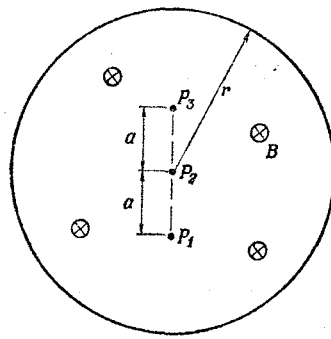
в) Найдите зависимость от угла θ вращающего момента, приложенного к диполю. Найдите углы, соответствующие равновесию диполя. Какие из них отвечают устойчивому равновесию, а какие — неустойчивому?

г) Найдите зависимость от угла θ силы, притягивающей магнитный диполь к сверхпроводнику или отталкивающей диполь от него.

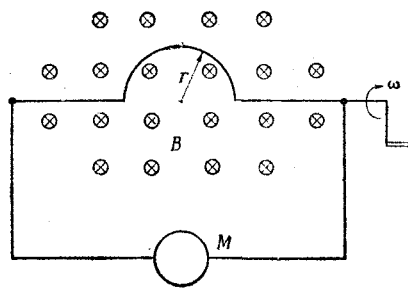


К главе 17. ***Законы индукции***

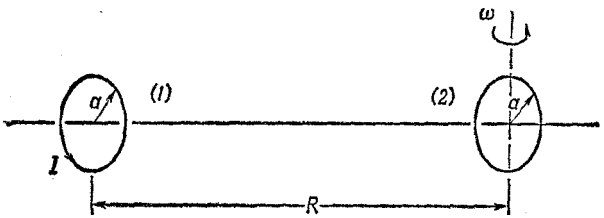
17. 1. На приведенном рисунке изображено однородное магнитное поле **B** внутри цилиндра радиуса r. Напряженность магнитного поля **B** уменьшается с постоянной скоростью 100 *гс/сек*. Чему равно мгновенное ускорение (величина и направление) электрона, помещенного в точки P_1, P_2 и P_3? Величину a считать равной 5,0 *см*.



17. 2. Жесткий провод, согнутый в полукруг радиуса r, вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле. Чему равна частота и амплитуда напряжения и тока, наведенного в проводнике, если внутреннее сопротивление вольтметра M равно R_M, а сопротивление остальных частей цепи ничтожно? Предположите, что поле, создаваемое током, мало по сравнению с полем **B**, т. е. наведенный ток мал и неспособен существенно изменить величину **B**.



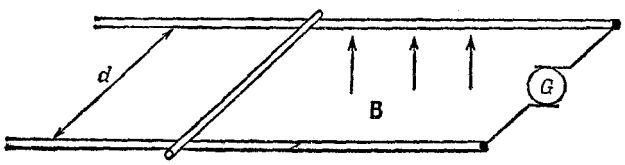
17. 3. По круговому витку (*1*) провода, радиус a которого мал, течет постоянный ток I. Другой точно такой же виток провода (*2*) помещен на оси, проходящей через центр первого витка, на расстоянии R, причем $R \gg a$. Плоскости витков параллельны. Затем виток (*2*) приводится во вращение с угловой скоростью ω вокруг одного из его диаметров. Какова наведенная в цепи витка (*2*) э. д. с., если он разомкнут?



17. 4. Металлический провод массы m скользит без трения по двум параллельным металлическим рельсам, находящимся на расстоянии d друг от друга, как показано на рисунке. При движении провод пересекает силовые линии однородного магнитного поля **B**, направленного вертикально.

а) Генератор G создает постоянный ток I, текущий от одного рельса к другому через скользящий провод. Определите скорость (величину и направление) провода как функцию времени, предполагая, что в момент $t=0$ провод покоился.

б) Генератор заменяется электрической батареей с постоянной э. д. с. Провод при этом движется с постоянной скоростью. Найдите скорость установившегося движения. Достигает ли скорость такой величины в условиях задачи (а)?



в) Чему равен ток в задаче (б) в условиях установившегося движения? Считайте, что магнитное поле, создаваемое током I, значительно меньше **B**.

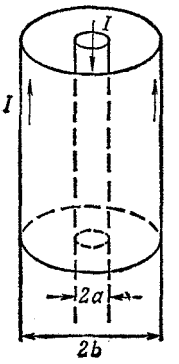
17. 5. Цепь состоит из двух соединенных последовательно катушек с индуктивностями L_1 и L_2. Взаимная индукция катушек равна $\mathfrak{M}$. Найдите полную индуктивность цепи. Как изменится суммарная индуктивность, если витки одной катушки перемотать в другую сторону?

17. 6. Кабель сделан из провода и охватывающего его коаксиального проводящего цилиндра, по которому течет ток в противоположном направлении. Радиус внутреннего провода кабеля равен a, а внешний радиус цилиндра равен b.

а) Покажите, что если предположить, что ток во внутреннем проводе течет только по его поверхности, то индуктивность, приходящаяся на единицу длины кабеля, равна

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

б) Вычислите индуктивность, если ток равномерно распределен по сечению внутреннего провода кабеля. Сравните оба полученных результата. Сильно ли зависит результат от характера распределения тока по сечению центрального провода?



17. 7. Тороидальная катушка из N витков, внутренний радиус которой равен b, в поперечном сечении имеет форму квадрата со сторонами, равными a.

а) Покажите, что индуктивность катушки равна

$$\mathscr{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

б) Выразите через те же величины взаимную индукцию системы, состоящей из тороидальной катушки и длинного прямолинейного провода, вытянутого вдоль оси симметрии катушки. Считайте, что проводники, замыкающие цепь, настолько удалены от катушки, что их влиянием можно пренебречь.

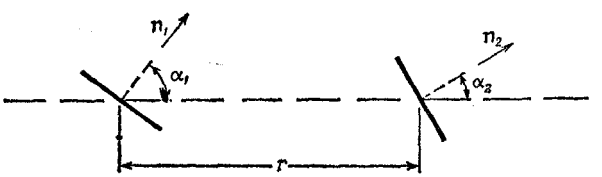
в) Найдите отношение индуктивности катушки к взаимной индукции системы.

17. 8. Два плоских витка провода с одинаковой площадью A и током I помещены на расстоянии r друг от друга так, как показано на рисунке. Единичные векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, определяющие направления нормалей к виткам, образуют с линией, соединяющей центры витков, углы α_1 и α_2 и лежат с ней в одной плоскости.

а) Предполагая, что радиус каждого витка во много раз меньше r, найдите взаимную индукцию $\mathfrak{M}$ двух витков.

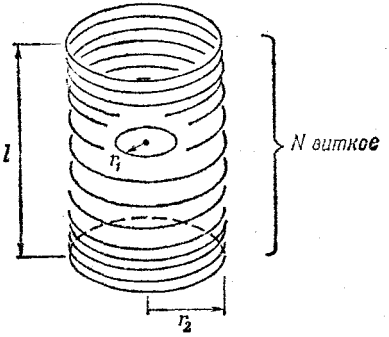
б) Используя найденное выражение для $\mathfrak{M}_{12}$, найдите величину и направление силы, действующей между витками.

в) Как изменится эта сила, если направление тока в одном из витков или сразу в обоих поменять на противоположное?

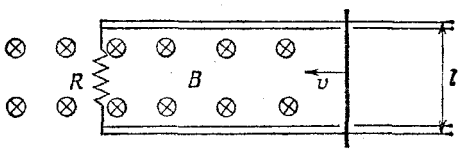


17. 9. Круговой виток провода радиуса r_1 расположен в центре соленоида длиной l, состоящего из N витков

радиуса r_2, причем $r_2 \gg r_1$. Оси витка и соленоида совпадают. Обозначив цепь кругового витка индексом 1, а цепь соленоида индексом 2, найдите индуктивности $\mathfrak{M}_{12}$ и $\mathfrak{M}_{21}$.



17.10. В однородном магнитном поле **B**, направленном перпендикулярно плоскости рисунка, по двум проводящим рельсам со скоростью v движется провод. Какой ток течет через сопротивление R, если $v = 100$ *см/сек*, $l = 10$ *см*, $\mathbf{B} = 0{,}1$ *вебер/м*^{2} и $R = 10$ *ом* (магнитным полем, создаваемым током, пренебречь). В какую сторону изменится найденный вами ток, если не пренебрегать полем, создаваемым движущимся проводником? Изменится ли ваш ответ, если магнит, создающий поле **B**, будет двигаться со скоростью v в ту же сторону, что и провод? Как меняется со временем коэффициент самоиндукции изображенной на рисунке цепи?



17.11. Рассмотрим два витка провода радиуса a, находящиеся на расстоянии d друг от друга ($d \gg a$). Центры витков лежат на одной прямой, перпендикулярной

плоскости обоих витков. Через виток A в направлении, показанном на рисунке стрелкой, пропускается ток $I=K_0 t^2$ (t — время). Сопротивление витка $Б$ равно R.

а) Если пренебречь самоиндукцией витков, то чему равен момент сил, действующих на виток $Б$?

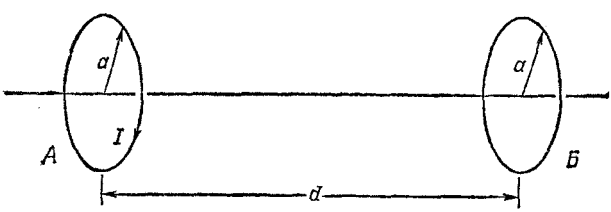
б) Покажите, что если пренебречь самоиндукцией, то сила, действующая на виток $Б$, равна

$$\frac{24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2 d^7 R}.$$

В какую сторону направлена эта сила?

в) Покажите качественно, в каком направлении изменится найденная вами величина силы и величина момента силы, если самоиндукцией витков не пренебрегать?

г) Выясните, как изменится ответ к пунктам (а) и (б) задачи, если виток $Б$ повернуть на 90° вокруг оси, перпендикулярной общей оси витков.



К главе 20. ***Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве***

20. 1. Решение дифференциальных уравнений иногда удобно искать в комплексном виде.

а) Покажите, что если электрическое поле зависит от времени t и координаты x (зависимости от y и z нет)

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t-kx)},$$

то каждая компонента вектора напряженности электрического поля удовлетворяет волновому уравнению. (Напомним, что физическое поле

описывается вещественной частью приведенного выражения.)

б) Убедитесь, что вещественная часть **E** описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x. В какую сторону оси x распространяется волна?

в) Покажите, что если оператор ∇ действует на функции, подобные приведенной в пункте (а), то он имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{e}_x (-ik),$$

где $\mathbf{e}_x$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, т. е. что его действие сводится к простому умножению функции на число. Можно ли подобное утверждать относительно оператора производной по времени?

г) Используя результат пункта (в), покажите, какой вид имеют уравнения Максвелла для полей, зависящих от t и x синусоидально. Какая связь должна существовать между ω и k?

д) Как изменятся ваши ответы, если электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t + kx)}?$$

20. 2. Плоская электромагнитная волна частоты ω отражается от зеркала, движущегося со скоростью v в направлении распространения волны. Используя уравнения Максвелла, найдите частоту отраженной волны, которая регистрируется неподвижным наблюдателем. Сравните ваш результат с тем, который был получен в вып. 3 с помощью теории относительности.

К главе 21. ***Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами***

21. 1. Выведите подробно выражение (21.26) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 155).

21. 2. С помощью уравнения (21.1) (см. вып. 6, стр. 142) можно найти электрическое поле, создаваемое

движущимся зарядом. Рассмотрим диполь, образованный положительным и отрицательным зарядами, осциллирующими относительно начала координат вдоль оси z так, что координата положительного заряда меняется со временем по закону $z_+ = d/2\cos\omega t$, а отрицательного $z_- = -d/2\cos\omega t$. Дипольный момент такой системы зарядов равен $\mathbf{p} = d\mathbf{e}_z\, d\cos\omega t$. Покажите, что электрическое поле диполя, найденное из упомянутого уравнения, имеет вид

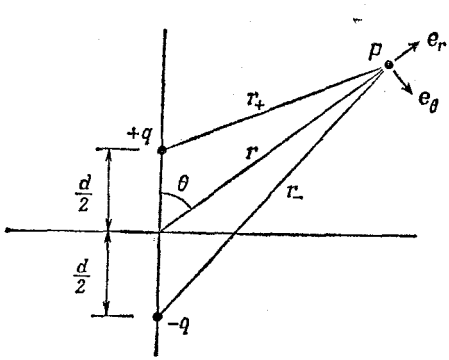
$$E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{1}{r^3}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],$$

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left[\frac{1}{r^3}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

При решении задачи считайте, что точка P находится на расстоянии $r \gg d$ от диполя.

Примечание. $\mathbf{e}_{r+} \approx \mathbf{e}_r \approx \mathbf{e}_{r-}$, а $d\mathbf{e}_{r+}/dt$ и $d^2\mathbf{e}_{r+}/dt^2$ — это векторы, направления которых практически совпадают с направлением вектора $\mathbf{e}_\theta$.



21. 3. Используя симметрию уравнений Максвелла и вид электрического и магнитного полей осциллирующего электрического диполя, найдите поле осциллирую-

щего магнитного диполя *. Это поле должно совпадать с полем диполя, создаваемого контуром с током $i=i_0\cos\omega t$, радиус которого равен a ($a\ll c/\omega$).

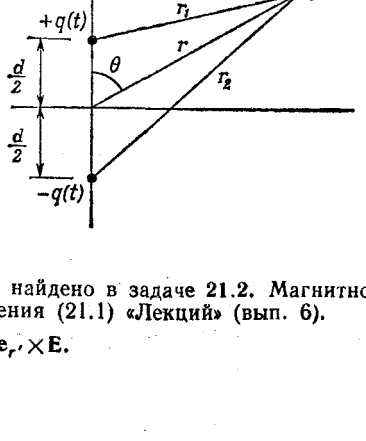
21. 4. В задаче 21.2 диполь состоял из двух зарядов, осциллирующих вокруг начала координат. Диполь, величина которого изменяется со временем по гармоническому закону, можно построить иным способом: взять два проводящих шара, соединить их проводником длиной d и по проводнику пропустить переменный ток. Тогда на концах проводника возникает переменный заряд $\pm q(t)$, а сам проводник остается в целом нейтральным; заряд $q(t)$ можно рассматривать как вещественную часть выражения $Q_0e^{i\omega t}$.

В произвольной точке P на расстоянии $r\gg d$ от диполя интегральное представление для запаздывающего потенциала приводит к точному выражению для φ (см. рисунок)

$$\varphi=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\omega\,(t-r_1/c)}{r_1}-\frac{\cos\omega\,(t-r_2/c)}{r_2}\right].$$

а) Предполагая $\omega d/2c\ll 1$, покажите, что

$$\varphi=\frac{Q_0d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r}\left[\frac{1}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$



* Электрическое поле диполя найдено в задаче 21.2. Магнитное поле диполя находится из уравнения (21.1) «Лекций» (вып. 6).

$$c\mathbf{B}=\mathbf{e}_{r'}\times\mathbf{E}.$$

б) Покажите далее, что

$$A_z \approx -\frac{Q_0 \omega d \sin \omega (t - r/c)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}.$$

в) Убедитесь, что из найденных вами потенциалов следуют те же выражения для электрического и магнитного полей.

21. 5. Антенна, предназначенная для работы на частоте $\omega = 2\pi c/\lambda$, изготовлена из двух колинеарных проводов, длина каждого из которых равна $^1/_4$ длины волны. На антенну подается синусоидальное меняющееся напряжение требуемой частоты. Возникающее в антенне распределение токов с большой степенью точности описывается выражением

$$i = -i_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

Для определения поля излучения антенну можно представить в виде суперпозиции большого числа диполей длины Δz, причем каждый из них расположен в точке z. Величина дипольного момента меняется от диполя к диполю.

а) Покажите, что дипольный момент каждого такого диполя следует брать в виде

$$\Delta p = \left\{\frac{i_0}{\omega} \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t\right\} \Delta z.$$

б) Покажите, что на больших расстояниях ($r \gg c/\omega$) электрическое и магнитное поля антенны имеют вид

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi\varepsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

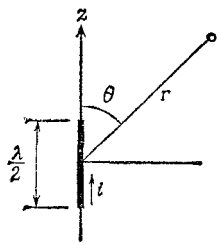
$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta.$$

в) Нарисуйте примерный вид кривой зависимости E_θ от угла θ. На этом же рисунке нанесите кривую зависимости $\mathbf{E}_\theta$ от θ для одного диполя и

сравните полученные кривые.

$$i = -i_0 (\sin \omega t) \cos \frac{2\pi z}{\lambda},$$

$$\left(-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4}\right).$$



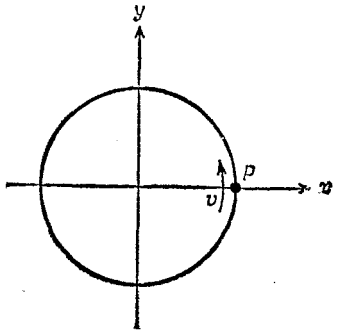
21. 6. Частица с зарядом q движется по кругу радиуса a со скоростью v.

а) Найдите скалярный потенциал φ в центре круга в тот момент, когда частица находится в точке P.

б) Определите векторный потенциал $\mathbf{A}$ в центре круга в тот же момент.

в) Определив потенциалы в окрестности центра круга, воспользуйтесь выражениями (18.16), (18.19) («Лекции», вып. 6, стр. 90) и найдите электрическое и магнитное поля в центре. Как ориентирован вектор напряженности электрического поля по отношению к радиусу-вектору, проведенному в точку P?

г) Вычислите эти поля, воспользовавшись формулой (21.1) (вып. 6, стр. 142). В этой задаче скорость v не предполагается малой по сравнению со скоростью света c.

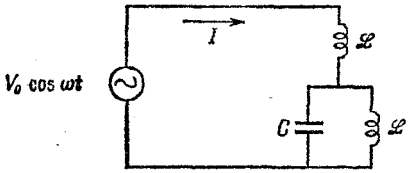


К главе 22. ***Цепи переменного тока***

22. 1. Проволочки соединены так, что они образуют ребра куба, причем сопротивление каждого ребра 1 *ом*. Найдите сопротивление между различными парами вершин куба.

22. 2. а) Найдите ток I в цепи, схема которой изображена на рисунке.

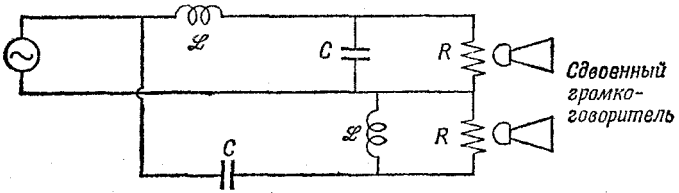
б) Чему равен ток I, если изображенные на схеме катушки индуктивности обладают взаимной индуктивностью $\mathfrak{M}$?



22. 3. Принципиальная схема устройства высокой точности звуковоспроизведения имеет такой вид, как изображено на рисунке. Эффективное сопротивление каждого громкоговорителя равно R.

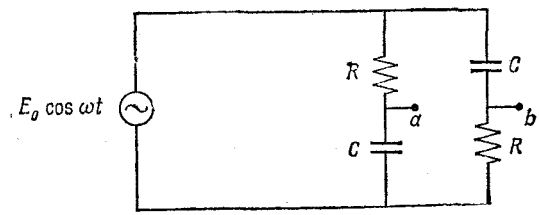
а) Покажите, что при $R^2 = \mathscr{L}/2C$ импеданс на входе (на клеммах генератора) веществен и равен R.

б) Покажите, что $\omega^2 = 1/\mathscr{L}C$. Частота ω_c определяется как та частота, при которой на каждый из громкоговорителей приходится $^1/_2$ общей мощности.



22. 4. Покажите, что амплитуда разности потенциалов (напряжение) между точками a и b цепи, изображенной на схеме, не зависит от ω. Опишите качественно зависимость фазы этой разности потен-

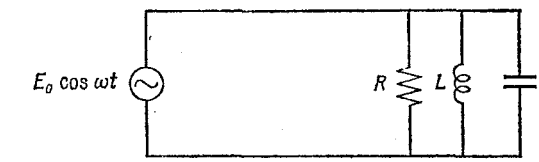
циалов от частоты ω. Как изменится величина разности потенциалов между точками a и b, а также фаза, если источник напряжения обладает внутренним сопротивлением R?



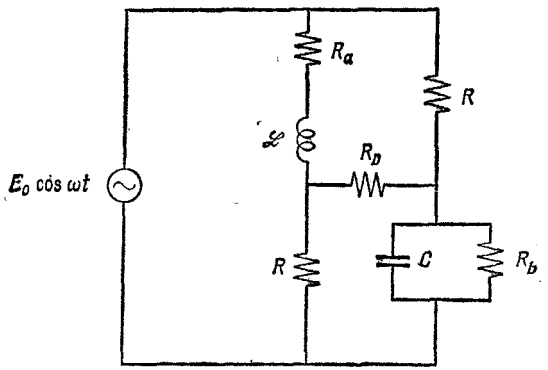
22. 5. Электрическая цепь имеет вид, изображенный на схеме.

а) Изобразите схематически зависимость амплитуды тока в цепи от частоты для произвольно выбранных величин L, C и R.

б) Если $R \gg \sqrt{L/C}$, сравните частоту резонанса и ширину пика резонансной кривой данной цепи с аналогичными величинами для цепи с последовательным соединением ее элементов, но при $R \ll \sqrt{L/C}$. Специально рассмотрите случай $R = K\sqrt{L/C}$ для цепи с параллельным соединением и случай $R = (1/K)\sqrt{L/C}$ для цепи с последовательным соединением.

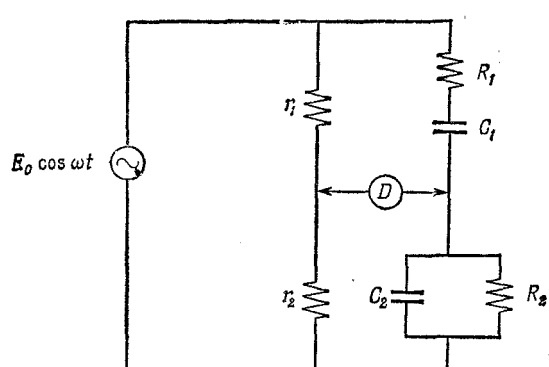


22. 6. Мостовая схема, изображенная на рисунке, используется для измерений индуктивности. Источником переменной э. д. с. частоты ω служит генератор напряжения. Если мост сбалансирован, ток через детектор R_D равен нулю. Найдите $\mathscr{L}$ как функцию R и C.



22. 7. Изображенная схема представляет собой мост Вейна, часто используемый в RC-цепях. Если ток через детектор равен нулю, говорят, что мост сбалансирован. Покажите, что баланс наступает при одновременном выполнении следующих двух условий:

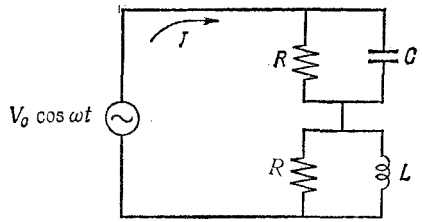
$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{C_2}{C_1}\right), \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$



22. 8. В цепи, изображенной на рисунке, действует источник переменного напряжения $V(t)=V_0 \cos \omega t$.

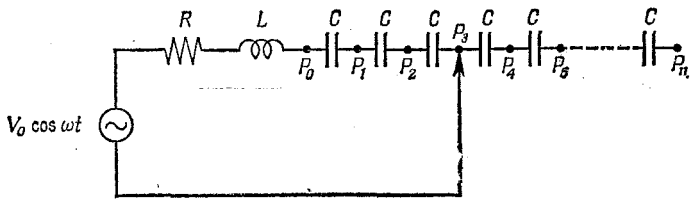
а) Покажите, что если R, L и C подобраны так, что $RC=L/R$, ток I в цепи не зависит от частоты.

б) Какова разность фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах RC-пары (при $RC=L/R$)?



22. **9.** Электрическая цепь собрана так, что один ее свободный конец, изображенный на рисунке стрелкой, упирающейся в точку P_3, может быть присоединен к любой из точек P_0, P_1, ..., P_n.

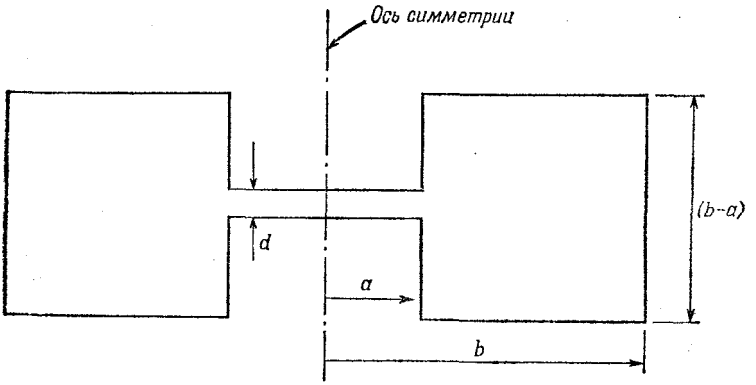
1. Найдите выражение для мощности, выделяемой в сопротивлении R, если цепь замкнута в точке P_m, где $0 \leqslant m \leqslant n$.
2. Допустим, что $R=1000$ *ом*, $L=10$ *генри*, $C=20$ *мкф*, $\omega=100$ *рад/сек*.
   а) При каком значении m найденная мощность максимальна?
   б) Каково максимальное значение напряжения между точками P_0 и P_2 при $m=2$ и $V_0=100$ *в*? На концах сопротивления R?



К главе 23. ***Полые резонаторы***

23. **1.** Найдите приближенно «резонансную» частоту для полости, изображенной на рисунке, предполагая, что $d \ll a$ и $d \ll (b-a)$. Какими основными эффектами вы пренебрегли? Если полость равномерно остывает

(т. е. температура во всех точках полости в один и тот же момент времени одинакова), приведет ли ее тепловое сжатие к увеличению или уменьшению резонансной частоты? А может быть, она останется неизменной?



К главе 24. **Волноводы**

24. 1. Единица длины линии передачи обладает индуктивностью L_0 и емкостью C_0. Покажите, что если напряжение V и ток I в линии передачи меняются медленно (что соответствует передаче сигналов с длиной волны, много большей, чем расстояние между секциями линии передачи), то V и I удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t},$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t},$$

т. е. I и V удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Заметьте, что предположение о медленном изменении сигналов отнюдь не обязательно, но обоснование этого утверждения выходит за рамки гл. 24.

24. 2. Характеристический импеданс равен $Z_0=\sqrt{L_0/C_0}$, где L_0— индуктивность, а C_0— емкость единицы длины.

Покажите, что для линии передачи, состоящей из двух тонких полос шириной b, находящихся на расстоянии a друг от друга ($a \ll b$), характеристический импеданс равен

$$Z_0 \approx \frac{1}{\varepsilon_0 c}\frac{a}{b}.$$

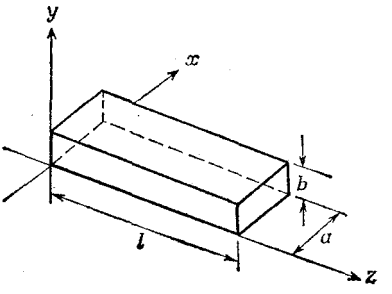
24. 3. Секция цилиндрической коаксиальной линии передачи закрыта с обоих концов проводящими пластинами. Длина полости, образованной таким способом, равна l. Для самой низкой моды, электрическое поле которой радиально:

а) найдите частоту;

б) найдите выражение для $\mathbf{E}$;

в) сравните найденную частоту с $\omega_0=1/\sqrt{\mathscr{L}C}$, где $\mathscr{L}$— индуктивность, а C— емкость, приходящиеся на длину l бесконечной коаксиальной линии.

24. 4. Волновод в форме прямоугольного параллелепипеда (стороны сечения a и b) изготовлен из идеального проводящего материала. Концы одной секции волновода, длина которой l, закрыты пластинами из проводящего материала, так что полость внутри



волновода фактически представляет собой резонатор. Если электрическое поле в полости определяется вещественной частью выражения

$$\mathbf{E}(x,\ y,\ z,\ t)=E_0(x,\ z)\,\mathbf{e}_y e^{i\omega t},$$

то чему равна амплитуда $E_0(x,\ z)$ для колебания самой низкой резонансной частоты? Чему равна сама резонансная частота?

24. 5. Коаксиальный кабель состоит из двух концентрических проводящих цилиндров. Один конец ($x=0$) кабеля подсоединен к генератору переменного напряжения $V(t)=V_0\cos\omega t$. Другой конец ($x=l$) закрыт проводящей пластиной. Индуктивность и емкость единицы длины кабеля равны L_0 и C_0. Поле в таком кабеле можно представить в виде суперпозиции двух волн: падающей и отраженной от закороченного конца. Амплитуды и фазы этих волн должны быть подобраны так, чтобы суммарное напряжение между проводниками было равно нулю при $x=l$ и $V_0\cos\omega t$ при $x=0$.

а) Напишите выражения для падающей и отраженной волн.

б) Нарисуйте кривую зависимости напряжения между проводниками от расстояния x, если длина кабеля l равна $5\pi c/2\omega$ (c — скорость света). Укажите значения x, для которых напряжение максимально.

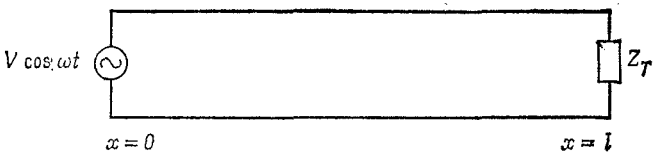
в) Чему равен ток в точках $x=0$, $x=l/2={}^1/_2\,(5\pi c/2\omega)$ и $x=l=5\pi c/2\omega$?

г) Предполагая источник напряжения идеальным, определите *средний* момент сил, который должен быть приложен к его ротору, чтобы последний вращался с угловой скоростью ω.

24. 6. Покажите, что если при $x=l$ линия передачи замкнута (включен элемент с импедансом Z_T), то импеданс на «входе» линии ($x=0$) равен

$$Z_s=iZ_0\,\frac{\operatorname{tg}\omega\sqrt{LC}\,l-iZ_T/Z_0}{1+iZ_T/Z_0\operatorname{tg}\omega\sqrt{LC}\,l},$$

где $Z_0=\sqrt{L/C}$ — характеристический импеданс линии. Чему равно Z_s, если
а) $Z_T=0$?
б) $Z_T=\infty$?
в) $Z_T=Z_0$?



24. 7. Линия передачи с характеристическим импедансом Z_1 соединена с другой линией с характеристическим импедансом Z_2.
Покажите, что если система работает от генератора, подключенного к первой линии (Z_1), «коэффициент отражения», определяемый отношением $V_{\text{отр}}/V_{\text{пад}}$, равен

$$\frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2},$$

а «коэффициент пропускания»

$$\frac{V_{\text{проп}}}{V_{\text{пад}}}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}.$$

24. 8. Электрические поля внутри волноводов, описанных в гл. 24 «Лекций», обладают тем свойством, что проекция вектора напряженности электрического поля на направление распространения волны равна нулю, т. е. электрическое поле поперечное. Кроме того, могут существовать бегущие волны, у которых равна нулю проекция напряженности магнитного поля на направление распространения (так называемые поперечные магнитные волны). Для волновода в форме прямоугольного параллелепипеда (см. «Лекции», вып. 6, стр. 224, фиг. 24.3 и 24.4) векторный потенциал поперечной магнитной волны имеет вид

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_z \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i(\omega t-k_z z)},$$

где

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

а) Убедитесь, что магнитное поле, найденное с помощью этого потенциала, действительно поперечно, и покажите, что электрическое поле **E** и магнитное поле **B** удовлетворяют волновому уравнению и соответствующим граничным условиям.

Примечание. Мы полагаем, что $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, где $\nabla \cdot \mathbf{A} = -1/c^2(d\varphi/dt)$.

б) Покажите, что поперечная магнитная волна не распространяется, если

$$\omega < c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

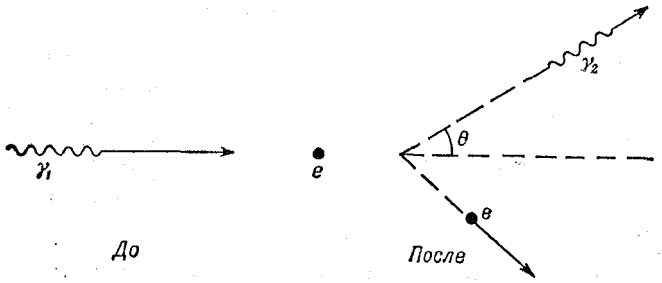
К главе 25. ***Электродинамика в релятивистских обозначениях***

(Единицы измерения выбраны так, что $c = 1$.)

25. 1. Запишите в 4-векторной форме выражения

$$(\varphi^2 - \mathbf{A}^2), \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho\varphi).$$

25. 2. Комптон-эффект состоит в том, что фотон, налетая на покоящийся электрон, рассеивается на нем, как частица на частице. Выразите энергию рассеянного фотона через энергию падающего фотона и угол отклонения его направления распространения от первоначального.



25. 3. Позитрон может быть создан в результате бомбардировки покоящегося электрона фотоном:

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^- + (e^+ + e^-).$$

Какова минимальная энергия фотона, необходимая для осуществления этого процесса? При решении задачи пользуйтесь, где это возможно, 4-векторами и их инвариантными комбинациями.

25. 4. На покоящуюся частицу массы m налетает другая частица с массой M и импульсом p. В результате полностью неупругого соударения частицы сливаются, образуя новую частицу. Какова масса и скорость этой частицы? Сравните ваш результат с тем, который получается в нерелятивистском приближении.

К главе 26. ***Лоренцевы преобразования полей***

(Единицы измерения выбраны так, что $c=1$.)

26. 1. Распишите подробно и вычислите выражение

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}.$$

26. 2. Найдите 4-вектор, пространственные компоненты которого совпадают с компонентами вектора

$$\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Каков физический смысл временной и пространственных компонент этого 4-вектора?

26. 3. Покажите, что $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ и $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Убедитесь, что если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ образуют острый угол в какой-нибудь системе координат, то этот угол будет острым во всех других системах координат. Для какого важного физического явления оба инварианта равны нулю?

26. 4. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженности электрического и

магнитного полей в некоторой точке пространства в данной системе координат. Определите скорость другой системы координат, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Систем координат, обладающих таким свойством, много. Действительно, если найдется хотя бы одна такая система координат,то указанные векторы будут параллельны и во всех других системах координат, движущихся с постоянной скоростью относительно найденной в направлении, общем для векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$. Поэтому удобно и в то же время достаточно рассмотреть систему координат, вектор скорости которой перпендикулярен к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

26. 5. В гл. 26 «Лекций» (вып. 6) 4-мерный потенциал A_μ, создаваемый движущейся с постоянной скоростью заряженной частицей, был найден путем перехода от системы координат, где частица покоится, к лабораторной системе координат. Напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ электрического и магнитного полей с помощью A_μ определялись согласно общим формулам. Найдите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, исходя из известного их вида в системе координат, где заряд покоится, и перейдя к движущейся системе координат.

26. 6. Покажите, что электрическое и магнитное поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}},$$

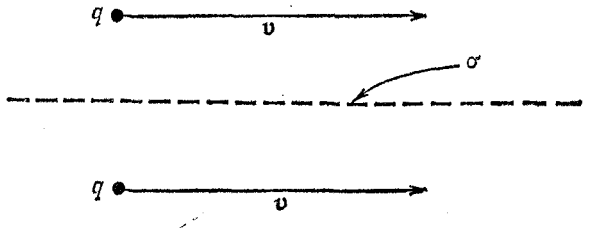
$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}\,\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится заряд, в точку наблюдения, а θ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

26. 7. По очень длинному прямому проводу течет ток I, создаваемый электронами, движущимися со скоростью $\mathbf{v}$. Полная плотность зарядов в каждой точке провода равна нулю благодаря наличию положительно заряженных ионов.

а) Найдите поля вне провода в системе координат, где провод покоится.
б) Найдите те же поля в системе координат, движущейся вместе с электронами. В «Лекциях» электрическое поле в такой системе координат было найдено другим методом [см. вып. 5, стр. 271, выражение (13.28)].

26. 8. Два электрона с одинаковой скоростью v движутся параллельно друг другу по обе стороны от бесконечной положительно заряженной плоскости на расстоянии a от нее; плотность покоящихся поверхностных зарядов равна σ.
а) При какой величине σ расстояние между электронами будет оставаться равным $2a$?
б) Сравните величину σ, которая получается для электронов с энергией 500 *Мэв*, с той, которая будет в случае медленно движущихся электронов.

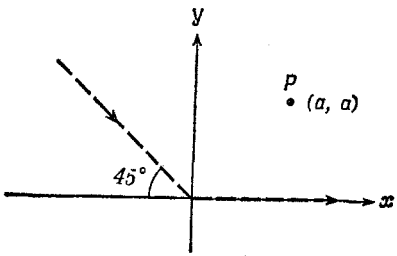


26. 9. Пусть f_μ—4-вектор силы, действующей на частицу, а u_μ—4-вектор ее скорости. Покажите, что

$$f_\mu u_\mu = 0.$$

26.10. Частица с зарядом q движется с постоянной скоростью в плоскости xy вдоль траектории, изображенной на рисунке пунктирной линией (в начале координат частица рассеивается). Величина скорости частицы вдоль всей траектории остается постоянной. В момент времени $t = t_1$ частица находится в точке $x=a$, $y=0$.

а) Найдите электрическое поле в точке P ($x=y=a$) при $t=t_1$, если $v/c=0{,}5$ (c — скорость света).
б) Как изменился бы ваш ответ, если бы до рассеяния в начале координат частица двигалась вдоль оси y?



К главе 27. ***Энергия поля и его импульс***

27. 1. Методом, использованным в «Лекциях» (вып. 6, стр. 288) при выводе выражения (27.11), представьте в ином виде выражения

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \qquad \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

27. 2. Выразите в мегатоннах (*мгт*) энергию магнитного поля Земли, заключенную во всем пространстве, внешнем по отношению к Земле (1 *мгт* — энергия, освобождаемая при взрыве 1 млн. тонн тринитротолуола, т. е. $4{,}2\cdot10^{15}$ *дж*). Предположите, что магнитное поле Земли — это поле диполя с напряженностью на экваторе примерно около $^2/_3$ *гс* ($^2/_3\cdot10^{-4}$ *вебер/м*^{2}).
Как вы считаете, может ли водородная бомба 1 *мгт*, взорванная высоко над поверхностью Земли, существенно исказить магнитное поле Земли?

27. 3. Вычислите поток вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ через поверхность длинного прямолинейного провода, сопротивление единицы длины которого равно R. Сравните ваш результат с омическими потерями.

27. 4. Длинный коаксиальный кабель изготовлен из двух идеально проводящих концентрических цилиндров.

Один конец кабеля подсоединен к электрической батарее, напряжение на клеммах которой равно V. К другому концу кабеля присоединено сопротивление R. Следовательно, ток, протекающий по кабелю, равен $I=V/R$. С помощью вектора Пойнтинга вычислите скорость потока энергии.

27. 5. Средняя мощность, излучаемая широковещательной станцией, составляет примерно 10 *квт*.

а) Чему равна величина вектора Пойнтинга на поверхности Земли в точках, удаленных от станции на 10 *км*? На таком расстоянии излучаемые волны можно считать плоскими. Разумно предположить, что вся мощность излучается $^1/_4\lambda$ антенной, помещенной над идеально проводящей плоскостью.

б) Найдите максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей.

27. 6. Поля, соответствующие наинизшей по частоте поперечной электрической волне в волноводе прямоугольного сечения (см. фиг. 24.6, вып. 6 «Лекций», стр. 227), имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - k_z z),$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x E_0 \frac{k_z}{\omega}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - k_z z) - \mathbf{e}_z E_0 \frac{\pi}{\omega a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t - k_z z).$$

а) Покажите, что приведенное выше решение удовлетворяет граничным условиям задачи.

б) Вычислите вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ и плотность энергии U.

в) Вычислите средний поток энергии через поверхность, перпендикулярную оси z.

г) Вычислите среднюю плотность энергии в волноводе.

д) Используя результаты пунктов (в) и (г), вычислите среднюю скорость распространения энергии. Покажите, что эта скорость совпадает с

групповой скоростью [см. формулу (24.27), вып. 6, стр. 229].

27. 7. а) Найдите плотность потока энергии, излучаемой диполем с осциллирующим дипольным моментом $\mathbf{p}\cos\omega t$.

Примечание. Следует принять во внимание только члены, убывающие с расстоянием по закону $1/r$.

б) Путем интегрирования по поверхности сферы большого радиуса, центр которой совпадает с диполем, покажите, что средняя излучаемая мощность равна

$$\frac{1}{3}\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^4}{c}.$$

27. 8. Плоская электромагнитная волна, падая на свободный электрон, заставляет его осциллировать. Найдите отношение энергии, излучаемой электроном в единицу времени, к плотности потока энергии падающей электромагнитной волны. Частота волны предполагается малой. Поэтому влиянием магнитного поля **B** волны на движение электрона можно пренебречь.

27. 9. Частица пыли в Солнечной системе испытывает действие двух сил: силы притяжения к Солнцу и планетам и силы светового давления, пропорциональной ее поперечному сечению. Существует такой размер частицы, при котором эти силы уравновешивают друг друга. Предполагая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найдите радиус частицы, отвечающий ее равновесию в поле этих двух сил. Объяснение того факта, что «хвосты» комет направлены в сторону от Солнца, покоится на предположении о существовании такого равновесия и о том, что «хвост» кометы состоит из частиц малого размера, возможно даже из молекул газа. Разумно ли такое объяснение? Мощность, излучаемая Солнцем, равна $4\cdot10^{26}$ *вт*, его масса $2\cdot10^{30}$ *кг*.

27. 10. На полый тороид, средний радиус которого равен R, а радиус поперечного сечения r ($r\ll R$), намотано

N витков проволоки. В момент времени $t=0$ по проволоке пропускается ток, сила которого нарастает со временем по линейному закону

$$I(t)=Kt.$$

а) Найдите магнитное поле и энергию, запасенную в тороиде к моменту времени t.
б) Найдите направление и величину вектора Пойнтинга в любой внутренней точке тороида в момент времени t.
в) Используя вектор Пойнтинга, найдите скорость изменения со временем энергии электромагнитного поля внутри тороида в произвольный момент времени. Убедитесь в правильности вашего ответа, используя решение к пункту (а) задачи.

К главе 28. ***Электромагнитная масса***

28. 1. Предполагая, что энергия покоя электрона совпадает с его электростатической энергией и что заряд электрона равномерно распределен по объему сферы, вычислите радиус этой сферы. Сравните полученный результат с выражением $U_{эл}=e^2/2a$ [вып. 6, стр. 303, формула (28.2)].

28. 2. Хорошо известно, что электроны, кроме заряда и массы, обладают еще и собственным моментом количества движения (спином) и магнитным моментом, которые связаны соотношением

$$\frac{\text{Момент количества движения}}{\text{Магнитный момент}}=\frac{m}{q}.$$

Это соотношение выполняется с точностью до 0,1%. Будем предполагать, что вся масса электрона электромагнитная, т. е. $M_{э.м.}=2e^2/3ac^2$ [см. вып. 6, стр. 305, формула (28.4)].
а) В центре однородно заряженной сферической оболочки радиуса a и с полным зарядом q поместите магнитный диполь с магнитным моментом μ и покажите, что момент количества движения

электромагнитного поля равен

$$L=\frac{2}{3}\frac{q\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{a}.$$

б) Определите отношение момента количества движения к магнитному моменту и сравните это отношение с величиной m/q.

в) Считая, что μ_z электрона равно $\hbar q/2m$, вычислите максимальную скорость электрона на поверхности, обусловливающую данное значение магнитного момента. Приведите необходимые, с вашей точки зрения, пояснения. Величина $(4\pi\varepsilon_0 c\hbar/q^2)=1/\alpha$ равна 137.

К главе 29. ***Движение зарядов в электрическом и магнитном полях***

29. 1. Заряженная частица (заряд q, масса покоя m_0) в момент времени $t=0$ покоится в начале координат. Затем на нее начинает действовать постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси x.

а) Вычислите релятивистскую скорость и координаты частицы как функции времени.

б) Как изменится ваш ответ, если в начальный момент частица имела скорость v_0, направленную вдоль оси y?

29. 2. В циклотроне протоны движутся в однородном магнитном поле по круговым траекториям. Найдите зависимость «циклотронной частоты» и угловой скорости протонов от q, B, m для протонов низкой энергии. Как изменится значение циклотронной частоты при увеличении энергии? При каком изменении энергии частота изменится на 1%?

29. 3. В момент времени $t=0$ частица массы m с зарядом q покоится в начале координат. На частицу действует однородное электрическое поле **E**, направленное по оси y, и однородное магнитное поле **B**, направленное по оси z.

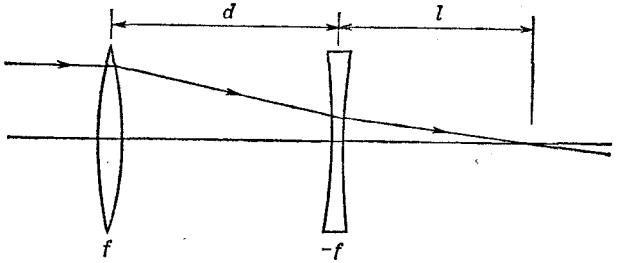
а) Найдите последующее движение частицы, т. е. ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, предполагая дви-

жение нерелятивистским. Какое условие на **E** и **B** накладывает это предположение?

б) Какой характер будет иметь движение в том случае, если $E/B > c$?

в) Пусть разность потенциалов между двумя параллельными пластинами, одна из которых совпадает с плоскостью xz ($y=0$), а другая находится на расстоянии d ($y=d$), равна $V_0 = E \cdot d$, и между пластинами приложено магнитное поле, параллельное пластинам. Пусть кинетическая энергия электронов, вылетающих из отрицательно заряженной пластины, равна нулю. При каком значении напряженности магнитного поля испущенные электроны не будут достигать другой пластины?

29. **4.** Принцип фокусировки частиц в неоднородном поле может быть продемонстрирован с помощью следующей оптической модели:



Даже при одинаковых по модулю фокусных расстояниях линз существуют условия, когда такая система будет фокусировать.

а) Определите зависимость l от d для света, падающего вдоль оптической оси.

б) При каких условиях изображение будет реальным, при каких — мнимым?

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

К главе 32. ***Показатель преломления плотного вещества***

32. 1. В «Лекциях» рассматривалось распространение волн в веществе, состоящем из неполярных частиц. Было показано, что квадрат показателя преломления при низких частотах равен диэлектрической проницаемости. Будет ли этот вывод верен для других (изотропных) веществ?

32. 2. На частоте примерно 6 *Мгц* ионосфера становится прозрачной. В рамках модели свободных электронов оцените плотность электронов в ионосфере.

32. 3. К металлу в течение долгого времени приложено постоянное электрическое поле, а затем оно мгновенно выключается. Используя модель свободных электронов, покажите, что время релаксации (т. е. время, в течение которого дрейфовая скорость электронов падает в e раз) равно τ, где τ — среднее время между столкновениями.

32. 4. Внутри металла существуют решения уравнений Максвелла, имеющие вид плоских волн:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)},$$

где k — комплексное число. Для низких частот

$$k = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}}.$$

а) Напишите выражение для магнитного поля такой волны.

б) Какой угол образуют векторы **E** и **B** для произвольного z?

в) Какова разность фаз векторов **E** и **B**?

[Если момент времени t_1 соответствует максимальной величине **E**, а t_2 — максимальной величине **B**, то разность фаз определяется как $\pm\omega(t_1-t_2)$.]

32. **5.** При выводе выражения (32.50) «Лекций» (вып. 7, стр. 66) предполагалось, что в металле переход от вещественных значений n^2 к мнимым в ультрафиолетовой области очень резкий. На опыте же столь резкого перехода не наблюдается. Покажите, что с помощью более удачной аппроксимации n^2 теорию можно согласовать с экспериментом.

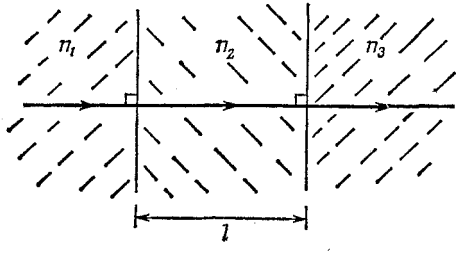
К главе 33. ***Отражение от поверхности***

33. **1.** а) Определите коэффициент пропускания для плоской электромагнитной волны, проходящей через трехслойный диэлектрик.

б) Покажите, что в случае $n_2=\sqrt{n_1 n_3}$ и $l=\lambda_2/4$ коэффициент пропускания равен единице. (Покрытия такого рода используются для «просветления» оптики в хороших фотокамерах и биноклях.)

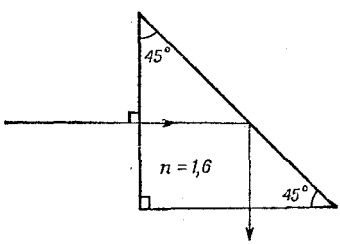
в) Какова толщина l для обычного бинокля, т. е. для оптического диапазона длин волн?

г) Одну ли сторону линзы можно просветлять? Важно ли, какая сторона покрыта пленкой? Почему?



33. **2.** Луч света с длиной волны 4500 Å (в пустоте) падает на призму и полностью отражается на угол 90°. Показатель преломления призмы 1,6. Вычислите

расстояние от длинной стороны призмы, на котором напряженность электрического поля уменьшается в e раз по сравнению с ее значением на поверхности. Предполагается, что свет поляризован так, что вектор **E** перпендикулярен к плоскости падения. Изменится ли ваш ответ, если **E** лежит в плоскости падения?



К главе 34. ***Магнетизм вещества***

34. 1. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю **B**. Покажите, что если **B** меняется медленно, магнитный момент орбитального движения частицы остается постоянным. Что мы понимаем под словом «медленно»?

К главе 35. ***Парамагнетизм и магнитный резонанс***

35. 1. В циклотроне, рассчитанном на низкие энергии, период обращения протонов по круговой орбите составляет 0,13 *мксек*. Ядерный магнитный резонанс для протона в магнитном поле циклотрона наступает при частоте 21 *Мгц*. Определите по этим данным g-фактор протона.

35. 2. Выведите формулу (35.9) способом, указанным в гл. 35 (вып. 7, стр. 124). Находится ли этот вывод в противоречии с утверждением, содержащимся в

гл. 34 (вып. 7, стр. 104), о том, что в рамках классической физики парамагнетизм отсутствует?

35. 3. В 1 $см^3$ парамагнитной соли содержится 10^{22} атомов с магнитным моментом в один магнетон Бора каждый.

Соль помещается в однородное магнитное поле напряженностью 10 000 *гс* (1 *вебер/м*^{2}). Выразите в процентах избыток параллельных полю спинов при комнатной температуре и температуре жидкого гелия.

35. 4. Следуя выводу, приведенному в гл. 35, для спина $^1/_2$, найдите квантовомеханическое выражение для парамагнитной восприимчивости частиц со спином 1.

К главе 36. ***Ферромагнетизм***

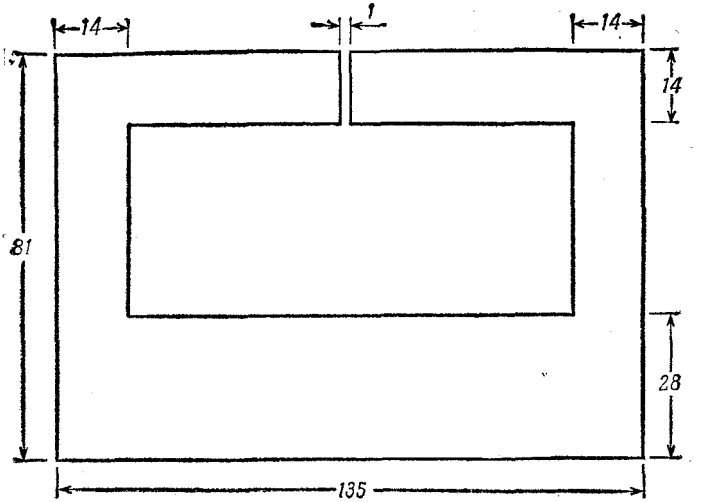
36. 1. Шар радиуса a однородно намагничен так, что его полный магнитный момент равен $^4/_3\pi a^3 M$, где M — намагниченность. Каковы должны быть поверхностные токи, создающие магнитное поле вне шара (тех же размеров), которое совпадает с полем, создаваемым намагниченным шаром. Покажите, что найденное распределение токов обладает таким же полным магнитным моментом.

36. 2. Сердечник магнита изготовлен из мягкого железа и обмотан 2150 витками проволоки, через которую течет ток силой 5 *а*. Толщина сердечника (в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) постоянна и равна 28 *см*. Кривая зависимости B от H для материала каркаса приведена на нижнем рисунке.

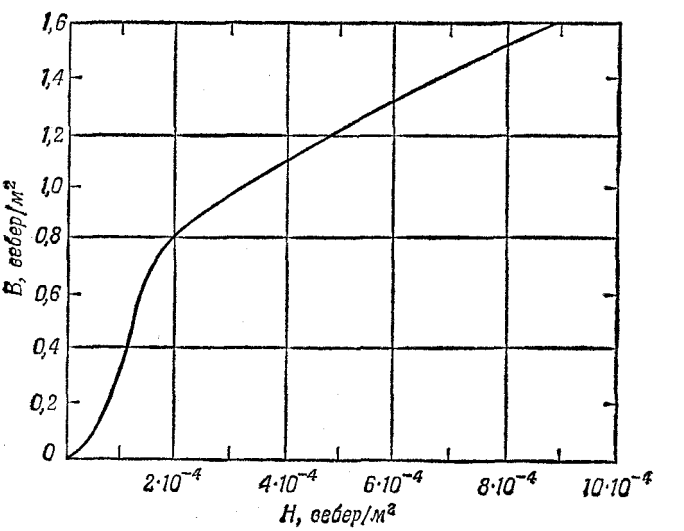
Оцените величину магнитного поля в воздушном зазоре магнита. (Все размеры в сантиметрах.)

Каковы те главные эффекты, которыми следует пренебречь при решении задачи?

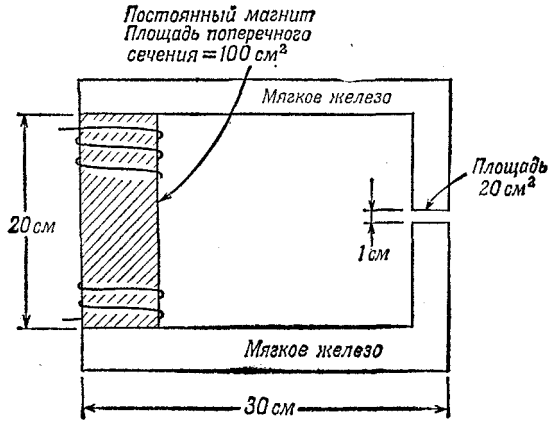
Примечание. Так как эмпирическая зависимость B от H носит нелинейный характер, не нужно смущаться, что задача не решается аналитически и точно.

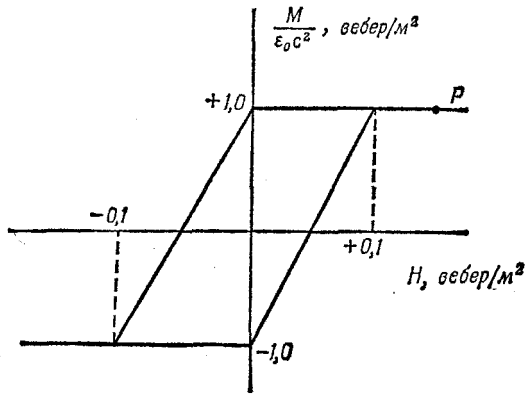

14
1
14
14
81
28
135

(Единицы в см)


1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
B, вебер/м²
2·10⁻⁴
4·10⁻⁴
6·10⁻⁴
8·10⁻⁴
10·10⁻⁴
H, вебер/м²

36. 3. Система состоит из постоянного магнита и двух полюсов, изготовленных из мягкого железа. Пропусканием сильного тока по внешней обмотке брусок намагничивается до точки P на кривой зависимости M от H. Найдите напряженность магнитного поля в зазоре после выключения тока, предполагая, что магнитная проницаемость мягкого железа бесконечна, и пренебрегая утечкой магнитного потока на краях зазора





36. 4. Очень длинный железный стержень в форме цилиндра однородно намагничен так, что вектор намагниченности **M** направлен по оси цилиндра. Найдите B и H внутри стержня, пренебрегая краевыми эффектами. Чему будет равна магнитная индукция **B** в центре игольчатой полости, если ее вырезать вдоль оси стержня?

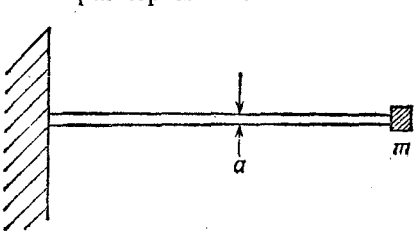
К главе 38. ***Упругость***

36. 1. В ракетной технике необходимы конструкции, которые обладают максимальной прочностью при минимальном весе.

а) Сравните радиусы двух цилиндрических стержней из алюминия и из стали, обладающих одинаковой жесткостью и длиной. (Жесткость определяется как отношение приложенной поперек стержня силы к результирующему смещению.)

б) Сильно ли отличаются массы этих стержней?

38. 2. Алюминиевый стержень квадратного сечения одним концом заделан, а к свободному его концу прикреплена масса m. Найдите собственную частоту колебаний такой системы, если площадь сечения стержня равна a^2, масса его во много раз меньше массы m; размерами самой массы m можно пренебречь.



38. 3. В начале курса (вып. 4, стр. 163) скорость звука в *жидкости* определялась как производная давления по плотности. Покажите, что для *продольных* волн в твердом теле (плоские волны сжатия) фазовая скорость определяется выражением

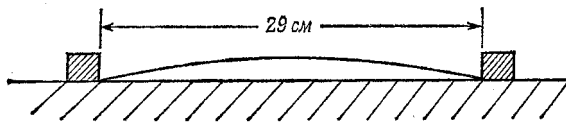
$$v^2_{\text{прод}} = \frac{(1-\sigma)Y}{(1-2\sigma)(1+\sigma)\rho},$$

где σ — отношение Пуассона; Y — модуль Юнга. Эта формула справедлива лишь для продольной волны в «безграничной» среде. В такой волне частицы движутся параллельно направлению распространения. Поперечное же смещение частиц в продольной волне отсутствует в отличие от того, что имеет место, скажем, при сжатии стержня, когда поперечные размеры стержня увеличиваются. Каковы, по вашему мнению, должны быть размеры тела, чтобы приведенное выше выражение для фазовой скорости было справедливо?

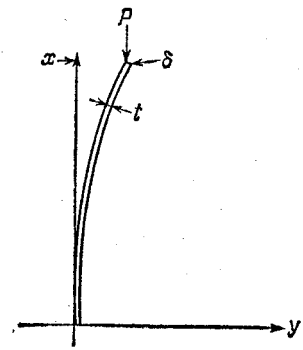
38. 4. Стальная линейка длиной $L=30$ *см*, шириной $a=1{,}5$ *см* и толщиной $b=0{,}08$ *см* концами упирается в две планки, прибитые к столу на расстоянии $l=29$ *см* одна от другой, как показано на рисунке.

а) Какой кривой описывается форма изогнутой линейки?

б) Какова сила, с которой линейка упирается в планки?



38. 5. Нижний конец вертикального стержня заделан, а к его верхнему свободному концу приложена сила. Длина стержня равна L. Поперечное сечение стержня имеет форму прямоугольника со сторонами t (толщина) и w (ширина). Определите силу, приводящую к показанной на рисунке деформации стержня.



К главе 40. ***Течение «сухой» воды***

40. 1. а) Докажите справедливость сделанного в гл. 40 (вып. 7) утверждения о том, что в невязкой жидкости давление одинаково во всех направлениях.

б) В качестве математического упражнения докажите весьма полезное векторное тождество, использованное в гл. 40:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}\,\nabla\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})+(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}),$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}=(\nabla\times\mathbf{v}).$$

40. 2. Жидкость вращается в цилиндре кругового сечения с постоянной угловой скоростью ω. Найдите форму воронки, образующейся на поверхности жидкости, если на расстоянии $\mathbf{r}$ от оси частица жидкости вращается со скоростью $v=\omega r$. Покажите, что циркуляция жидкости, отнесенная к единице площади, т. е. rot $\mathbf{v}$, равна удвоенной угловой скорости вращения жидкости.

40. 3. Шар массы m и радиуса a движется с постоянной скоростью в «сухой» воде. Покажите, что сумма кинетических энергий шара и жидкости равна

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{2}\right)v^2,$$

где M — масса жидкости, вытесненная шаром. Чему равен суммарный импульс шара и жидкости?

К главе 41. ***Течение «мокрой» воды***

41. 1. Если шар радиуса a движется в вязкой жидкости равномерно и достаточно медленно, так что поток обтекающей жидкости можно считать ламинарным, то сила, заставляющая его двигаться, равна вязкой силе трения, действующей со стороны жидкости на шар. Хотя эту силу вы *можете* определить точно, представляет интерес найти для нее выражение из размерных соображений, перечислив все параметры, от которых эта сила может зависеть. Проделайте это. Можете ли вы качественно обосновать, почему

параметры входят в найденное выражение так, а не иначе?

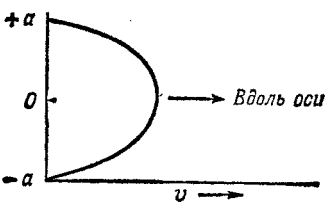
41. 2. Медленный поток вязкой жидкости в цилиндрической трубке можно считать ламинарным, причем профиль скоростей потока выглядит примерно так, как представлено на рисунке. Покажите, что если r — расстояние от оси трубки, η — коэффициент вязкости, а $(P_1 - P_2)/L$ — перепад давления на единице длины трубки, то профиль скоростей в жидкости описывается выражением

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{L}(a^2 - r^2).$$

По аналогии с законом Ома пропускную способность трубки Q можно связать с перепадом давления $\Delta P = P_1 - P_2$ соотношением

$$\Delta P = QR,$$

где R — сопротивление трубки. Найдите сопротивление R для трубок радиуса a и длины L. Как вы думаете, проведение подобной аналогии лишь простая игра слов или есть основания считать такие аналогии полезными? Что является аналогом конденсатора?



41. 3. Дно широкого бассейна покрыто тонким слоем воды (любой «несжимаемой» жидкости с вязкостью η). На поверхности воды плавает тонкая деревянная доска, «дно» которой находится на расстоянии d от дна бассейна. Все остальные размеры доски во много раз больше d. Доска движется горизонтально с малой скоростью v. Чему равна скорость диссипации энергии в единице объема в воде вблизи середины доски?

Решения и ответы

5

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

К главе 1. ***Электромагнетизм***

1.1. а) $m = q_e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} = 1{,}86 \cdot 10^{-6}$ *кг*, где q_e — заряд электрона; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *м*^{3}/*кг*·*сек*^{2} — гравитационная постоянная; $m/m_p = 1{,}1 \cdot 10^{18}$ ($m_p = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*).

б) Если Z — заряд ядра атома, n — число атомов в 1 *г* меди (полагая, что копейка медная), то искомая сила равна $F = 10^{-4} n^2 Z q_e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$, где r — расстояние между копейками. Подставляя численные значения, имеем $F = 1{,}7 \cdot 10^{15}$ *ньютон*.

1.2. Радиусы тяжелых атомных ядер хорошо описываются формулой $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, где A — атомный вес, $R_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-13}$ *см*. Поэтому энергия электростатического отталкивания двух соприкасающихся равномерно заряженных ядер с атомным весом A и атомным номером Z равна

$$E = \frac{(Zq_e)^2}{8\pi\varepsilon_0} R_0 A^{1/3}.$$

Следовательно, работа, которую необходимо затратить на преодоление электрического отталкивания при образовании ядра урана U^{236} из двух одинаковых половинок, приближенно равна ($A = 118$, $Z = 46$), $E_U = 4 \cdot 10^{-11}$ *дж* $= 250$ *Мэв* ($2{,}8 \cdot 10^6$ *квт-час/кг*). Для двух ядер дейтерия ($A = 2$, $Z = 1$), сливающихся в гелий, $E_{He} = 7{,}3 \cdot 10^{-14}$ *дж* $= 0{,}46$ *Мэв* ($5{,}9 \cdot 10^6$ *квт-час/кг*). Последний результат, однако, гораздо менее точен, поскольку использованное выше выражение для радиуса теряет точность для самых легких ядер.

1.3. Искомую скорость через плотность электронов n, площадь поперечного сечения проволоки S и заряд электрона e можно выразить следующим образом: $v = I/neS$. Если считать, что плотность электронов в меди совпадает с числом атомов в единице объема ($A = 64$, $\rho = 7{,}8$ *г*/*см*^{3}), то $v = 2{,}72$ *см*/*сек*. Отсюда $v^2/c^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-21}$.

1.4. Будем считать движение нерелятивистским. Несмотря на то, что $v/c = 1/3$, величина

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}95$$

близка к единице, что оправдывает такое приближение. Уравнение движения частицы

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

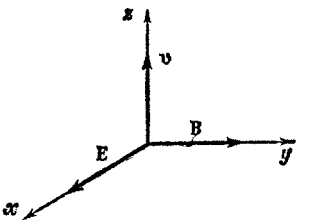
Запишем в компонентах

$$m\dot{v}_x = qE_x - qv_zB, \quad m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = qv_xB.$$

Частица будет совершать все время движение вдоль оси z, если $qE_x = qv_zB$. При этом $v_x = 0$ и $v_z = \text{const}$. Следовательно (так как $v_z = c/3$),

$$B = \frac{E_x}{v_z} = \frac{3E_x}{c} = 10^{-2}\ \textit{вебер/м}^2.$$

Заряд частицы не входит в последнее выражение. Поэтому его знак из данного эксперимента установить невозможно.



1.5. а) Введя обозначение $\omega = qB_0/m$, запишем уравнение движения $m\dot{\mathbf{v}} = q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ в компонентах $\dot{v}_x = \omega v_y$, $\dot{v}_y = -\omega v_x$, $v_z = 0$.

Умножая второе уравнение на мнимую единицу и складывая с первым, находим

$$\frac{d}{dt}\,(v_x + iv_y) = -i\omega\,(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

причем $a = v_0$ (из начального условия $v_x|_{t=0} = v_0$, $v_y|_{t=0} = 0$).

Интегрируя далее и разделяя вещественную и мнимую части, находим

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \quad y = y_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t, \quad z = 0.$$

Удовлетворяя начальным условиям

$$x|_{t=0} = 0, \quad y|_{t=0} = 0,$$

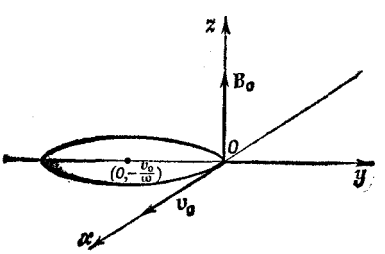
окончательно находим, что частица движется по окруж-

ности (фиг. 1) в плоскости xy, центр которой находится в точке $(0, -v_0/\omega)$, частота вращения равна $\omega = qB/m$:

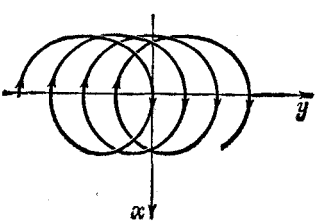
$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \quad y = \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t - 1), \quad z = 0.$$

б) В магнитном поле $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 + ax$ частица полетит по примерно круговой орбите с радиусом $r = mv_0/qB$. Однако в области более сильного поля радиус кривизны траектории будет несколько меньше. При этом орбита уже не будет замкнутой окружностью, а возникнет дрейф, подобный изображенному на фиг. 2.

в) Магнитное поле $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 + ax$ несовместимо с тем уравнением Максвелла, согласно которому циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру в отсутствие электрического поля и токов (в данной задаче $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{j} = 0$) должна равняться нулю. Действительно, возьмем замкнутый контур C в плоскости x_0 в форме прямоугольной рамки со сторонами l и L и вычислим циркуляцию $\mathbf{B}$ вдоль этого контура. Несложные вычисления приводят к результату $\oint_C \mathbf{B}d\mathbf{l} = -a \cdot L \cdot l \neq 0$ в противоречии с уравнением Максвелла.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

1.6. а) Движение частицы будет происходить по окружности радиусом a вокруг заряда Q, если сила Лоренца будет уравновешена центробежной силой

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2} + qv_0B = \frac{mv_0^2}{a},$$

т. е. если

$$B_0 = \frac{c}{a^2 q v_0}\left(-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} + mv_0^2 a\right).$$

б) Сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна ее скорости. Поэтому магнитное поле не производит работы над движущимся зарядом, и

закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(r),$$

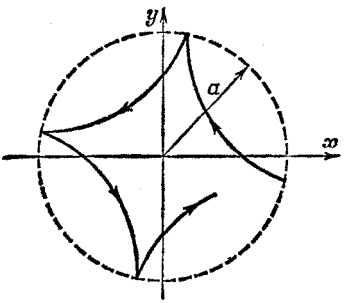
где E — полная энергия, $U(r)$ — энергия электростатического взаимодействия. Отсюда видно, что скорость частицы есть функция только расстояния

$$v(r) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)}.$$

в) В этом случае полная энергия заряда q равна $E = -Qq/4\pi\varepsilon_0 a$ и, следовательно,

$$v(r) = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \qquad (1)$$

Начав в начальный момент «падать» на заряд $-Q$, частица q будет отклонена полем так, как показано на рисунке. Из выражения (1) видно, что в точках окружности $r = a$ скорость частицы будет обращаться в нуль и будет вновь повторяться исходная ситуация.



К главе 2. ***Дифференциальное исчисление векторных полей***

2.1. а) Условия задачи таковы, что полный поток тепла J через поверхность цилиндра произвольным радиусом $a \leqslant r \leqslant b$, коаксиального проволоке, является постоянной величиной. В данной задаче вектор потока тепла $\mathbf{h}$ направлен по радиусу цилиндра, следовательно, для цилиндра единичной длины и радиусом r $(a \leqslant r \leqslant b)$ можно написать соотношение

$$J = h \cdot 2\pi r = \text{const}.$$

Если теперь использовать векторное уравнение потока тепла $\mathbf{h} = -\varkappa \nabla T$ и учесть, что векторы $\mathbf{h}$ и ∇T направлены

по радиусу цилиндра, то можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{J}{2\pi r} = -\varkappa \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$T(r) = -\frac{J}{2\pi\varkappa} \ln r + D, \tag{1}$$

где D — постоянная интегрирования. Величины J и D определим из условий: температура при $r = a$ равна T_1, а при $r = b$ равна T_2. Отсюда

$$T = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b} + T_2.$$

Следовательно, искомый градиент температуры в изоляционном покрытии равен

$$(\nabla T)_r = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \frac{1}{r}.$$

б) В этом пункте задачи граничные условия другие, чем в пункте (а), т. е. задано Q — количество тепла, выделяемое током на единице длины медного провода. Если ρ — удельное сопротивление, то, согласно закону Ома,

$$Q = \frac{I^2\rho}{\pi a^2} = -\varkappa \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=a} 2\pi a,$$

где I — сила тока, протекающего по проводу. Из этого соотношения находим новое граничное условие

$$\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=a} = -\frac{I^2\rho}{\varkappa \cdot 2\pi^2 a^3}.$$

Используя это граничное условие и (1), находим

$$J = +\frac{I^2\rho}{\varkappa\pi a^2} \quad \text{и} \quad D = T_2 + \frac{J}{2\pi\varkappa} \ln b.$$

Следовательно,

$$T = T_2 - \frac{I^2\rho}{\varkappa \cdot 2\pi^2 a^2} \ln \frac{r}{b}.$$

Отсюда ($a = 0{,}1$ *см*, $b = 0{,}3$ *см*, $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ *ом·м*)

$$T_1 - T_2 = \frac{I^2\rho}{2\pi^2 a^2 \varkappa} \ln \frac{b}{a} = 2{,}4°.$$

2.2. а) Согласно «Лекциям» [см. вып. 5, § 5, формулы (2.38) — (2,40)], компоненты ротора вектора **A** равны

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Дивергенция ротора, по определению, равна величине

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \times \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{A})_z.$$

Подставляя в это выражение компоненты ротора **A** и учитывая тот факт, что порядок вычисления смешанных производных произволен, т. е. что, например, $\partial^2 A_x/\partial z \partial y = \partial^2 A_x/\partial y \partial z$, легко убеждаемся в равенстве нулю дивергенции ротора произвольного вектора **A**.

б) Доказательство удобно провести для каждой компоненты в отдельности. Покажем, например, что

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \nabla_x (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x. \qquad (1)$$

Согласно определению, левая часть этого соотношения может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{A})_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right).$$

Прибавляя и вычитая в правой части последнего соотношения величину $\partial^2 A_x/\partial x^2$ и учитывая, что $\partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z = \nabla \cdot \mathbf{A}$, убеждаемся в справедливости соотношения (1). Аналогично доказывается это соотношение для компонент y и z.

2.3. а) Так как $R_x = x$, $R_y = y$, $R_z = z$, то

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

б) $$(\nabla \times \mathbf{R})_x = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{R})_y = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{R})_z = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} = 0.$$

в) Легко убедиться, что если φ — произвольная скалярная функция, а $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, то всегда

$$\nabla\cdot\varphi\mathbf{A}=(\nabla\varphi\cdot\mathbf{A})+\varphi(\nabla\cdot\mathbf{A}).$$

Это соотношение полезно запомнить. Из него, в частности, следует и требуемое в условии соотношение. Действительно, выбирая в качестве $\varphi=1/R^3$ и $\mathbf{A}=\mathbf{R}$, а также учитывая, что, согласно пункту (а), $\nabla\cdot\mathbf{R}=3$ и $\nabla\varphi=-3\mathbf{R}/R^5$,

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{R}}{R^3}=-3\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})}{R^5}+\frac{3}{R^3}=0.$$

Вычисление градиента скалярной функции, зависящей только от модуля радиуса-вектора, — довольно часто встречаемая операция. Поэтому полезно запомнить легко доказываемое соотношение

$$\nabla\varphi(\mathbf{R})=\frac{\partial\varphi}{\partial R}\frac{\mathbf{R}}{R}. \qquad (1)$$

г) Искомое соотношение можно доказать вычислением «в лоб». Однако в силу того, что вычисление ротора — одна из популярных операций в физике, полезно доказать гораздо более общее соотношение

$$\nabla\times\varphi\mathbf{A}=\nabla\varphi\times\mathbf{A}+\varphi(\nabla\times\mathbf{A}).$$

В том, что оно справедливо, можно убедиться непосредственной проверкой. Искомое соотношение следует из вышеприведенного лишь как частный случай. Действительно, выбирая $\varphi=-1/R^3$ и $\mathbf{A}=\mathbf{R}$, учитывая (1) и тот факт, что $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=0$ и $\nabla\times\mathbf{R}=0$ [см. пункт (б) настоящей задачи], находим

$$\nabla\times\left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)=0.$$

д) Результат этого пункта задачи следует как частный случай из соотношения (1).

е) $\varphi=R^2/2$.

2.4. а) Если вычислить дивергенцию левой части уравнения 2, то, согласно пункту (а) задачи **2.2**, дивергенция ротора всегда равна нулю. Совместность уравнений 2 и 3 следует из того, что, согласно уравнению 3, правая часть получающегося при этом соотношения также обращается в нуль.

б) Вычислим дивергенцию от левой и правой частей уравнения 4. Согласно пункту (а) задачи **2.2** в левой части получим нуль и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\mathbf{j}=0.$$

С другой стороны, согласно уравнению 1, $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$. Отсюда видно, что из уравнения 4 действительно следует уравнение 5.

в) Возьмем ротор от левой и правой частей уравнения 2. Воспользовавшись соотношением пункта (б) задачи 2.2 и уравнением Максвелла 4, получим

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Если теперь использовать уравнение 1, то получим искомое волновое уравнение.

г) Если аналогичные выкладки проделать исходя из уравнения 4, получим искомое волновое уравнение для **B**.

д) В силу уравнения 3 вектор **B** всегда может быть представлен как ротор некоторого вектора **A**, так как дивергенция ротора тождественно равна нулю. Тогда из уравнения 2 получаем

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Из этого уравнения мы видим, что ротор вектора $\mathbf{E}+(\partial\mathbf{A}/\partial t)=0$ тождественно обращается в нуль. Это означает, что весь этот вектор может быть представлен как градиент скалярной функции φ (скалярный потенциал электромагнитного поля), так как ротор градиента произвольной скалярной функции φ тождественно обращается в нуль

$$\nabla\times\nabla\varphi=0.$$

В выполнении последнего соотношения легко убедиться непосредственным вычислением. Но и без этих вычислений ясно, что векторное произведение вектора ∇ на самого себя, каковым и является правая часть этого соотношения, всегда равно нулю.

2.5. Поместим начало координат в какую-либо точку на оси вращения тела. Пусть **R** — радиус-вектор, определяющий положение произвольной точки вращающего тела в произвольный момент времени. Очевидно, скорость этой точки тела в тот же момент времени может быть представлена в виде

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

а) Используя то свойство смешанного скалярно-векторного произведения, согласно которому векторы в нем можно циклически переставлять, найдем

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})=-\boldsymbol{\omega}(\nabla\times\mathbf{R}).$$

Если теперь использовать соотношение (б) задачи 2.3, то получим требуемый результат.

б) Вычислим компоненты вектора $\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$, направив ось z вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$. Так как $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})_x=-y\omega$, $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})_y=x\omega$, $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})_z=0$, то

$$(\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}))_x=0,$$
$$(\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}))_y=0,$$
$$(\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}))_z=2\omega.$$

Следовательно,

$$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})=2\boldsymbol{\omega}.$$

2.6. При операциях с вектором ∇ следует всегда помнить, что он действует на векторы, стоящие после него. Поэтому в данном случае формулой для двойного векторного произведения можно пользоваться, но следует изменить в последней формуле порядок сомножителей, т. е. вместо $(\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{R}$ поставить $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{R}$.

2.7. Дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{h}=\partial h_x/\partial x=-\varkappa\,(d^2T/dx^2)$ максимальна в точке B, поскольку в этой точке кривизна больше, чем в точке E, и отрицательна. В точке D кривизна хоть и большая, но положительна и поэтому $\operatorname{div}\mathbf{h}<0$. Во всех точках $\operatorname{rot}\mathbf{h}=0$.

К главе 3. ***Интегральное исчисление векторов***

3.1. а) Согласно «Лекциям» (вып. 5, § 4), первый закон электромагнетизма описывает поток электрического поля: поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен заряду внутри нее, деленному на постоянную ε_0. Обозначая плотность зарядов в пространстве через ρ, запишем этот закон вначале в интегральной форме:

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dV.$$

Используя теперь теорему Гаусса, напишем

$$\int\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,dV.$$

Так как это равенство выполняется для произвольной замкнутой поверхности, то, следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$.

Второй закон электромагнетизма гласит: циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по любому контуру равна производной по времени от потока вектора $\mathbf{B}$ сквозь произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур, т. е.

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\frac{d}{dt}\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}.$$

Используя теорему Стокса, запишем

$$\int \left[\nabla \times \mathbf{E} - \frac{d}{dt}\mathbf{B}\right] \cdot d\mathbf{S} = 0;$$

отсюда

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{B}.$$

Так как, согласно третьему закону электромагнетизма, поток вектора $\mathbf{B}$ через любую замкнутую поверхность равен 0, то $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{B}\, dV = 0$. Отсюда $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Наконец, согласно четвертому закону электромагнетизма, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по контуру может быть представлена в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Используя теорему Стокса, находим

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2\varepsilon_0} \cdot \mathbf{j}.$$

б) Выберем произвольный объем и проинтегрируем по этому объему левую и правую части уравнения $\nabla \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

Если воспользоваться теперь теоремой Гаусса, то это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Левая часть этого соотношения представляет собой скорость изменения заряда внутри объема, а правая — количество заряда, вытекающего (втекающего) в единицу времени из объема. Следовательно, равенство этих частей выражает закон сохранения заряда: сколько зарядов убыло в объеме, столько их и вытекло из этого объема.

3.2. Не создает. Действительно, окружим шар сферической поверхностью произвольного радиуса R и выберем на этой поверхности произвольный замкнутый контур так, что ограниченная им площадь поверхности сферы равна S. Согласно четвертому закону электромагнетизма, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по контуру может быть представлена в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Так как токи и электрическое поле, создаваемое растущим со временем зарядом шара, радиальны, то написанные выше

потоки векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ через поверхность S составляют лишь долю от потока этих векторов через замкнутую сферическую поверхность, равную $S/4\pi R^2$. Но, согласно закону Гаусса и закону сохранения заряда,

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{q(t)}{\varepsilon_0}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}.$$

Величина $q(t)$ в этом соотношении обозначает заряд шара в момент времени t. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}+\frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=0$$

и

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=0.$$

Так как контур был выбран произвольным, то мы делаем вывод, что касательная к сфере составляющая вектора $\mathbf{B}$ равна нулю. Равенство нулю радиальной составляющей вектора $\mathbf{B}$ следует из того, что поток вектора $\mathbf{B}$ через поверхность сферы должен быть равен нулю, и из того, что в силу сферической симметрии системы B_r одинакова во всех точках сферы.

8.3. а) $4\pi K$.

б) Если формально воспользоваться теоремой Гаусса, то в силу того, что $\nabla\cdot(K/r^3)\,\mathbf{r}=0$, поток вектора $\mathbf{E}$ через сферическую поверхность оказывается равным нулю в противоречии с найденным в пункте (а) результатом. Это противоречие только кажущееся, так как $\nabla\cdot K(\mathbf{r}/r^3)=0$ только для $\mathbf{r}\neq 0$. В точке $\mathbf{r}=0$ выражение для $\mathbf{E}$ обращается в бесконечность, и использование теоремы Гаусса требует осторожности. Правильнее в этом случае было бы поступить так: в качестве объема интегрирования выбрать объем, заключенный между двумя сферическими поверхностями, одна из которых имеет произвольный радиус r, а другая — бесконечно малый радиус вокруг точечного заряда. В таком объеме нет зарядов и применение теоремы Гаусса дает правильный результат. При этом поток вектора $\mathbf{E}$ через сферическую поверхность радиусом r оказывается равным потоку через поверхность с бесконечно малым радиусом, но с обратным знаком. Согласно пункту (а), этот поток будет равен $-4\pi K$.

в) Циркуляция равна нулю.

8.4. Применим теорему Гаусса $\oint \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}=\int \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV$, выбрав в качестве вектора $\mathbf{a}$ радиус-вектор $\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{a}=\mathbf{R}$. Учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{R}=3$ [см. задачу **2.3** (а)], находим

$$\oint \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S}=3\int dV=3V.$$

Отсюда

$$V=\frac{1}{3}\oint \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}.$$

К главе 4. ***Электростатика***

4.1. Направим ось y вдоль нити. Тогда заряд, приходящийся на элемент длины dy, равен λdy, а его расстояние до точки P равно $\sqrt{y^2+r^2}$. Интегрируя вдоль нити, находим

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-l_1}^{l_2}\frac{\lambda\,dy}{\sqrt{y^2+r^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon^0}\ln\frac{\sqrt{l_2^2+r^2}-l_2}{\sqrt{l_1^2+r^2}-l_1}.$$

а) Пусть $r\ll l_1,\ l_2$. Тогда с точностью до членов r^2/l^2 получим

$$\varphi=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4l_1l_2}{r}.$$

б) Пусть теперь $r\gg l_1,\ l_2$, тогда с точностью до малых членов порядка l^2/r^2 находим

$$\varphi\approx\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l_1+l_2}{r}.$$

4.2. Найдем потенциал φ в точке P, расположенной на оси диска на расстоянии r от его центра, разбив диск на кольца шириной $d\rho$ и средним радиусом ρ. Так как отдельные элементы каждого такого кольца одинаково удалены от точки P на расстояние $\sqrt{\rho^2+r^2}$, то все они дадут одинаковый вклад в φ. Интегрируя по кольцам, т. е. по ρ от 0 до R, находим

$$\varphi=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^R\frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+R^2}-r\right].$$

Отсюда напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ по величине равна

$$E=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\right)=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

(где Ω — телесный угол, под которым виден диск из точки P) и направлена вдоль оси диска.

4.3. а) $\varphi=\dfrac{q+q'}{r}$.

б)
$$E_r = \begin{cases} 0, & r < r_a, \\ \dfrac{q'}{r^2}, & r_a < r < r_b, \\ 0, & r_b < r < r_c, \\ \dfrac{q+q'}{r^2}, & r_c < r. \end{cases}$$

в)
$$\varphi|_{r=r_a} = \frac{q+q'}{r_c} + \frac{q'}{r_a} - \frac{q'}{r_b}.$$

г) При $r > r_c$ в выражении для потенциала появляется слагаемое, спадающее с расстоянием быстрее, чем $1/r$, т. е. как $1/r^2$. Оно описывает отличие поля от сферически симметричного.

К главе 5. ***Применения закона Гаусса***

5.1. Если внутри сферы нет зарядов, то

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

т. е.

$$\int \nabla_R \varphi \, dS = 0.$$

Перепишем последнее уравнение по-другому:

$$\frac{d}{dR} \int \varphi \, dS = 0$$

или

$$\int \varphi \, dS = \text{const} \quad \text{для всех} \quad R \neq 0.$$

Итак, средние значения потенциала по сферическим поверхностям разных радиусов равны между собой. Вместе с тем среднее по поверхности, близкой к началу координат, равно $\varphi(0)$. Итак,

$$\overline{\varphi} = \varphi(0).$$

5.2. Используя цилиндрическую симметрию задачи, по теореме Гаусса найдем

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L R^2} r = \text{const},$$

где Q — полный заряд цилиндра, R — его радиус, L — его длина. Следовательно, напряженность электрического поля цилиндра линейно зависит от расстояния до оси цилиндра. В случае шара радиусом R электрическое поле радиально

и зависит от r аналогичным образом

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r.$$

5.3. Потенциалы пластин по условию задачи равны. Отсюда

$$E \cdot \frac{1}{3} d = E' \cdot \frac{2}{3} d, \quad \text{т. е.} \quad E = 2E'.$$

При этом использован тот факт, что поле выше и ниже пленки однородно. Окружая пленку соответствующей поверхностью, легко найти по теореме Гаусса, что $E + E' = \sigma/\varepsilon_0$, где σ — плотность поверхностных зарядов на пленке. Отсюда находим

$$E' = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} \text{ (у нижней пластины)},$$

$$E = \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \text{ (у верхней пластины)}.$$

5.4. Рассмотрим бесконечно тонкий слой, заключенный между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси x и расположенными друг от друга на расстоянии dx. Из условия задачи ясно, что электрическое поле будет направлено вдоль оси x. Если в качестве гауссовой поверхности выбрать любой цилиндрик, основаниями которого являются площадки S на плоскостях, а его боковая поверхность перпендикулярна этим плоскостям, то, применяя теорему Гаусса, найдем

$$SE(x+dx) - SE(x) = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} S\, dx.$$

Разлагая в ряд левую часть этого равенства и оставляя лишь наибольшие члены, находим уравнение для $E(x)$:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомый ответ

$$E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(x)\, dx.$$

5.5. В силу симметрии задачи $\varphi(x, y, z) = \varphi(x)$.

а) $$E(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{4}{3} k\, x^{1/3}.$$

Отсюда $\sigma|_{x=0} = \varepsilon_0 E(0) = 0$ и $\sigma|_{x=d} = \varepsilon_0 E(d) = -\frac{4}{3} k d^{1/3}$.

б) Используя результат задачи **5.4**, получаем

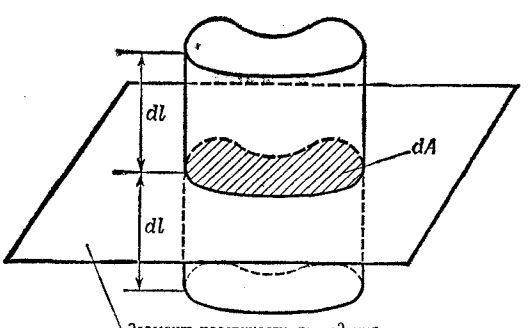
$$\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{dE(x)}{dx}$$

(это уравнение Максвелла $\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0$ в одномерном случае). Отсюда, используя результат пункта (а) данной задачи, находим

$$\rho(x) = -k\varepsilon_0 x^{-2/3}.$$

5.6. В задаче надо различать поле E, созданное самим элементом площади, и поле, созданное всеми остальными элементарными площадками на поверхности проводника.
Окружим элемент поверхности dA гауссовой поверхностью в форме цилиндра, боковые поверхности которого перпендикулярны площадке dA. Тогда, согласно теореме Гаусса, поле E, созданное элементарным зарядом σdA внутри проводника, равно $\sigma/2\varepsilon_0$. Поскольку, однако, поле внутри проводника равно нулю, то, следовательно, остальные поверхностные заряды создают в объеме (охватываемом гауссовой поверхностью) поле, равное $\sigma/2\varepsilon_0$, но противоположно направленное. (В результате сложения получается, что электрическое поле внутри равно нулю, а вне — равно σ/ε_0.) Отсюда следует, что полная сила, действующая на выделенный элементарный участок площади со стороны всех остальных зарядов, равна

$$F = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma \cdot \sigma dA = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dA.$$



5.7. Так как напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника связана с плотностью поверхностных зарядов $\sigma = \varepsilon_0 E$, то число избыточных зарядов (электронов) равно

$$\Delta n = \frac{\sigma}{q_e} = \frac{\varepsilon_0 E}{q_e} \approx 3 \cdot 10^{15}.$$

Расстояние между атомами — порядка ангстрема ($1\text{Å} = 10^{-10}$ м). Поэтому число атомов на единицу площади равно приблизительно 10^{20} м$^{-2}$. Отсюда $\Delta n/n \sim 3 \cdot 10^{-5}$. Сила, испытыва-

мая электроном в поле протона, равна

$$F_1 = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Сравним силы F_1 и $F_2 = q_e E$. Принимая величину a (боровский радиус) равной примерно 1Å, находим

$$\frac{F_2}{F_1} = E\varepsilon_0 \frac{4\pi a^2}{q_e} \sim 4\cdot 10^{-5}.$$

5.8. Если рассматривать ядро как равномерно заряженный шар, то электрическое поле внутри ядра легко найти по теореме Гаусса:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathbf{r}, \qquad r \leqslant R.$$

Здесь R — радиус ядра, Q — полный заряд ядра. Уравнение движения мюона с массой μ (нерелятивистское) имеет вид

$$\mu\ddot{r} = \frac{q_e Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r,$$

или

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0,$$

где введена частота

$$\omega = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\varepsilon_0 \mu R^3}} = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\varepsilon_0 \mu R_0^3 A^3}}. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) $R_0 = 1{,}2\cdot 10^{-15}$ *м*, $Q = 82 q_e$, $A = 209$, $\mu = 207 m_e$, находим

$$\hbar\omega = 6{,}1 \text{ Мэв}.$$

Найденная оценка позволяет интерпретировать наблюдаемое явление как переходы между уровнями энергии осциллятора с испусканием γ-лучей соответствующей энергии.

5.9. Введем напряженность гравитационного поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, где φ — гравитационный потенциал. Так как законы электростатики и тяготения совпадают, то с помощью теоремы Гаусса найдем

$$\mathbf{E} = -\frac{\gamma M}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathbf{r}, \qquad r \leqslant R,$$

где γ — гравитационная постоянная, а R и M — радиус и масса Земли. Уравнение движения тела

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{E} = -m\gamma\frac{M}{R^3}\mathbf{r},$$

или

$$\ddot{r}+\omega^2 r=0, \quad \text{где} \quad \omega=\sqrt{\gamma\frac{M}{R^3}}=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

(g — земное ускорение силы тяжести). Период колебания равен

$$T_{\text{кол}}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Для спутника, вращающегося над самой поверхностью Земли, равенство центробежной силы и силы гравитации

$$\frac{mv^2}{R}=mg$$

приводит к следующему выражению для линейной скорости:

$$v=\sqrt{gR}.$$

Отсюда для угловой скорости вращения спутника находим

$$\omega=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Следовательно, для периода обращения получаем выражение

$$T_{\text{обр}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=T_{\text{кол}},$$

что и требовалось показать.

5.10. Считая Землю однородным шаром, воспользуемся аналогом закона Гаусса: полный поток тепла через замкнутую поверхность равен количеству тепла, выделившемуся в объеме, заключенном внутри этой поверхности (закон сохранения энергии!). Если в качестве такой поверхности взять поверхность сферы произвольного радиуса r ($r<R$, где R — радиус Земли), то значение потока тепла $h=-\varkappa\,(dT/dr)$ ($\varkappa$ — теплопроводность земных пород) в любой точке этой поверхности будет одинаково в силу сферической симметрии задачи. Пусть q — плотность источников тепла, такая, что полное количество выделяемой в Земле энергии равно $Q=(4\pi/3)\,R^3q=8\cdot10^{20}$ *дж/год*. Тогда

$$4\pi r^2\cdot h=-4\pi r^2\varkappa\frac{dT}{dr}=\frac{4\pi}{3}r^3q=\frac{Q}{R^3}r^3.$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{Q}{4\pi R^3\varkappa}r.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$T(r)=-\frac{Q}{8\pi\varkappa R^3}r^2+D,$$

где D — постоянная интегрирования, которую следует найти из граничного условия. В качестве последнего можно выбрать $T(R)=0$. Удовлетворяя граничному условию, находим $D=Q/8\pi\varkappa R$ и, следовательно,

$$T(r)=\frac{Q}{8\pi\varkappa R^3}(R^2-r^2).$$

Отсюда температура в центре Земли $T(0)=Q/8\pi\varkappa R=50\,000^\circ$ К. Таким образом, описанная модель не находится в согласии с оценками.

5.11. Выбирая соответствующую симметрии задачи гауссову поверхность, легко находим

$$E=\begin{cases}0, & r<r_2,\\ \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r_2<r<r_3,\\ 0, & r_3<r<r_4,\\ \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r_4<r.\end{cases}$$

Интегрируя соотношение $E=-d\varphi/dr$, определим

$$\Delta\varphi=\varphi(r_2)-\varphi(r_3)=\int\limits_{r_3}^{r_2}\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_3}.$$

Из найденных выражений следует:
1) при уменьшении r_1 ничего не меняется;
2) при увеличении r_2 электрическое поле **E** уменьшается, а $\Delta\varphi$ увеличивается. В пределе $r_2\longrightarrow r_3$ проводники будут соприкасаться, образуя единый проводник, поле в котором равно нулю, а потенциал всюду постоянный;
3) картина поля в пространстве между цилиндрами изменится. Поле **E** и φ будут больше около уголков, чем около плоскостей призмы.

К главам 6 и 7. Электрическое поле в разных физических условиях

6.1. Полуплоскости, о которых идет речь в условии, — эквипотенциальные поверхности системы четырех зарядов, изображенных на рисунке.
Для решения необходимо найти равнодействующую сил:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_a+\mathbf{F}_b+\mathbf{F}_c.$$

Абсолютные величины сил равны

$$F_a = \frac{q^2}{4a^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$F_b = \frac{q^2}{4b^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad F_c = \frac{q^2}{4(a^2+b^2)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Отсюда находим

$$F_x = \left[-\frac{q^2}{4a^2} + \frac{q^2}{4(a^2+b^2)}\cos\alpha\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$F_y = \left[-\frac{q^2}{4b^2} + \frac{q^2}{4(a^2+b^2)}\sin\alpha\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

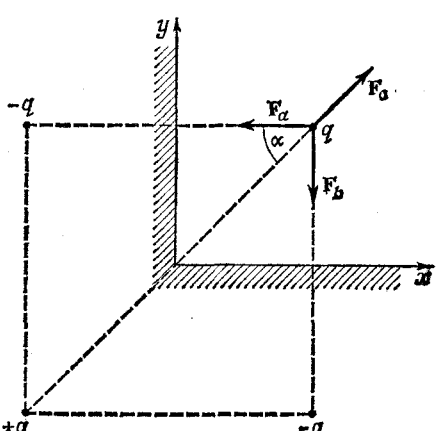
Из рисунка ясно, что

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следовательно,

$$F_x = \left[-\frac{q^2}{4a^2} + \frac{q^2 a}{4(a^2+b^2)^{3/2}}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$F_y = \left[-\frac{q^2}{4b^2} + \frac{q^2 b}{4(a^2+b^2)^{3/2}}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$



6.2. Сила притяжения к электростатическому изображению равна

$$F=\frac{q^2}{4X^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Потенциал $\varphi=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_x^\infty\frac{q^2}{4X^2}dX=-\frac{q^2}{4x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

(потенциал на бесконечности принят равным нулю). Кинетическая энергия заряда на расстоянии x от поверхности равна разности потенциалов

$$T=\left[\frac{q^2}{4x}-\frac{q^2}{4x_0}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

При $x\to 0$ $T\to\infty$. Это нефизично. На самом деле плоскость на бесконечно малых расстояниях нельзя рассматривать как идеально гладкую проводящую плоскость. Оценка при $x=1$ Å, $x_0=1$ *см* приводит к величине

$$T=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x}\approx 3{,}6\ \textit{эв}.$$

6.3. Обозначим длину, ширину и толщину бруска через $2a$, $2b$ и $2c$ соответственно. Пусть r — расстояние от центра бруска вдоль интересующей нас прямой. Для $r\gg a$ потенциал φ, создаваемый бруском, такой же, как и для точечного заряда

$$\varphi=\frac{8\rho abc}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad\text{или}\quad\ln\frac{\varphi\cdot 4\pi\varepsilon_0}{8\rho bc}=-\ln\frac{r}{a}.$$

Приближенно можно считать эту формулу справедливой вплоть до $r=a$. При меньших r ($b<r<a$) разумную аппроксимацию φ дает потенциал длинной нити, который запишем в виде

$$\varphi=-\frac{4\rho bc}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}+D.$$

Постоянную D выберем из условия непрерывности потенциала при $r=a$. Находим $D=4\rho bc/2\pi\varepsilon_0$.

Таким образом, при $b<r<a$

$$\varphi=\frac{4\rho bc}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\ln\frac{r}{a}\right).$$

При $c<r<b$ хорошее приближение дает формула для бесконечной плоскости

$$\varphi=-\frac{\rho cr}{\varepsilon_0}+F.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей при $r=b$, получаем

$$F=\frac{\rho cb}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\ln\frac{b}{a}\right).$$

Наконец, для $0<r<c$ $\varphi=-(\rho r^2/2\varepsilon_0)+G$, где $G=-(\rho c^2/2\varepsilon_0)+F$.

Мы можем теперь вычислить потенциал центра бруска

$$\varphi(0)=G=\frac{\rho cb}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{c}{2b}+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\ln\frac{b}{a}\right)\approx 0{,}6\cdot 10^5\ в.$$

Так как $E_r=-\partial\varphi/\partial r$, то из найденных выше выражений для φ получим

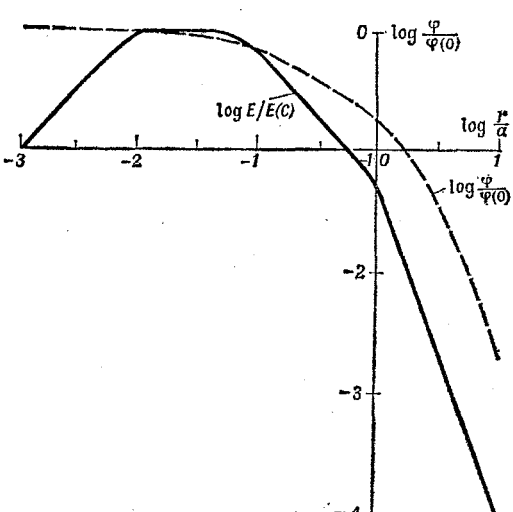
$$E=\frac{8\rho abc}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r\gg a,$$

$$E=\frac{4\rho bc}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad b<r<a,$$

$$E=\frac{\rho c}{\varepsilon_0}, \qquad c<r<b,$$

$$E=\frac{\rho r}{\varepsilon_0}, \qquad 0<r<c.$$

График зависимости $\log[\varphi/\varphi(0)]$ и $\log[E/E(c)]$ от $\log(r/a)$ показан на рисунке.



6.4. Заряд, накопившийся на Земле за время t, равен $q=\eta S q_p t$, где $\eta=1$ *протон/см²·сек* — плотность потока частиц, $S=4\pi R^2$ — площадь поверхности Земли, R — радиус Земли, q_p — заряд протона. Критический заряд q Земли, при котором все заряды с кинетической энергией $E<4\cdot10^9$ *эв* не будут попадать на Землю, находится из очевидного условия

$$\frac{qq_p}{4\pi\varepsilon_0 R}=\eta\frac{Stq_p^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=E,$$

откуда

$$t_{\text{крит}}=\frac{E\varepsilon_0}{\eta q_p^2 R}\approx 0{,}1 \text{ года}.$$

Земля, по оценкам, существует $5\cdot10^9$ лет; казалось бы, на Землю уже давно не должно падать ни одного протона. На самом же деле, положительный заряд Земли постоянно компенсируется за счет потока электронов, энергия которых настолько мала, что эти электроны не относят к космическим лучам.

6.5. Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора определяется из соотношения

$$C=\frac{q}{(\varphi_1-\varphi_2)},$$

где q — заряд на единицу длины, $\varphi_1-\varphi_2$ — разность потенциалов цилиндров конденсатора. Поскольку из соображений симметрии поле E внутри конденсатора радиально, то по теореме Гаусса находим

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Отсюда разность потенциалов между цилиндрами

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_a^b E\,dr=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

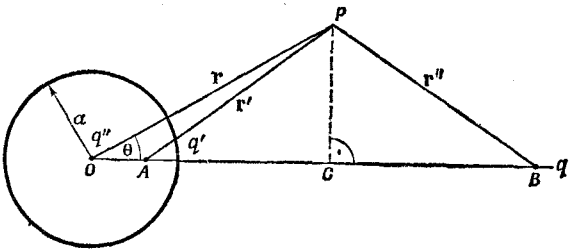
и, следовательно, емкость на единицу длины

$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Если на поверхности внутреннего цилиндра будут острые выступы, емкость конденсатора уменьшится, так как напряженность поля вблизи выступов будет велика, а расстояние между цилиндрами почти не изменится. Это приведет к увеличению разности потенциалов между обкладками и, следовательно, к уменьшению емкости.

6.6. а) Чтобы найти поле системы точечный заряд — проводящая сфера, надо поступить следующим образом (см. «Лекции», вып. 5, стр. 125). Необходимо поместить изображение за-

ряда q величины $q' = -(a/b)\,q$ на радиусе, проходящем через заряд q на расстоянии a^2/b от центра сферы, и, кроме того, в центре сферы поместить заряд $q'' = -q'$ (см. рисунок).



$$OA = \frac{a^2}{b},$$
$$OC = r\cos\theta,$$
$$OB = b,$$
$$AC = r\cos\theta - \frac{a^2}{b},$$
$$CP = r\sin\theta,$$
$$CB = b - r\cos\theta.$$

Тогда потенциал в точке P будет равен

$$\varphi = \left[\frac{q}{r''} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$r' = \sqrt{(AC)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}\,r\cos\theta + \frac{a^4}{b^2}},$$

$$r'' = \sqrt{(CB)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2br\cos\theta + b^2}.$$

$$\varphi = \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br\cos\theta + b^2}} - \frac{aq/b}{\sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}\,r\cos\theta + \frac{a^4}{b^2}}} + \frac{aq/b}{r}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Плотность зарядов на поверхности сферы находится по формуле

$$\sigma = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{ab} - \frac{b^2 - a^2}{a\,(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}}\right].$$

б) Решим теперь задачу о точечном заряде вблизи проводящей сферы, потенциал которой равен V. Выражение для потенциала в этом случае имеет приведенный выше вид, но с той лишь разницей, что заряд q'' в центре сферы следует заменить на $Va4\pi\varepsilon_0$. Таким образом,

$$\varphi_p = \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br\cos\theta + b^2}} - \frac{aq/b}{\sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}\,r\cos\theta + \frac{a^4}{b^2}}} + \frac{4\pi\varepsilon_0 Va}{r}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

При этом сила, действующая между сферой с заданным потенциалом и зарядом, равна $\mathbf{F}=F\cdot\mathbf{b}/b$, где

$$F=-\frac{\partial}{\partial r}q\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\left[Va-\frac{qab^3}{(b^2-a^2)^2}\right].$$

6.7. Покажем, что суммарная поверхностная плотность зарядов, создаваемая двумя противоположно заряженными шарами, слабо сдвинутыми друг относительно друга, действительно меняется как $A\cos\theta$. Пусть объемная плотность зарядов каждого из шаров по абсолютной величине равна ρ. Поверхностная плотность при $\theta=0$ (см. рисунок) равна ρd, а при $\theta\neq 0$, $\sigma(\theta)=\rho h(\theta)$, где $h(\theta)=d\cos\theta$; таким образом, $\sigma(\theta)=A\cos\theta$, где $A=\rho d$.

Поскольку поле вне равномерно заряженного шара с плотностью объемных зарядов ρ равно полю точечного заряда $q=(4\pi/3)R^3\rho$, напряженность электрического поля вне сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом, равным по величине $p=qd=(4\pi/3)R^3\rho d=(4\pi/3)AR^3$ и направленным по оси z. Напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара, как известно, равна

$$\mathbf{E}=\frac{\rho\mathbf{r}}{3\varepsilon_0},$$

или

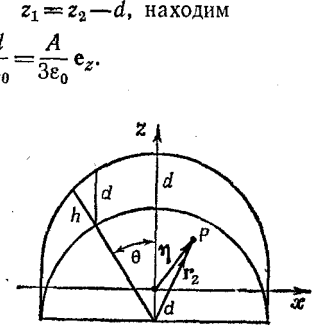
$$E_x=\frac{\rho x}{3\varepsilon_0},\quad E_y=\frac{\rho y}{3\varepsilon_0},\quad E_z=\frac{\rho z}{3\varepsilon_0}.$$

Для нашего случая вектор $\mathbf{E}$ в некоторой точке P, находящейся внутри сферы, равен

$$\mathbf{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Расписывая это соотношение в компонентах и принимая во внимание, что $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2-d$, находим

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_z\frac{\rho d}{3\varepsilon_0}=\frac{A}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_z.$$



6.8. а) Угол θ определим так же, как в «Лекциях» (вып. 5, стр. 112). Угол φ характеризует положение плоскости, проведенной через векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$. От этого угла не зависят ни потенциал, ни поле. Согласно формуле (6.11) «Лекций» (вып. 5, стр. 112),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

Радиальная составляющая напряженности электрического поля равна

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Тангенциальная составляющая E_θ определяется градиентом в перпендикулярном к радиусу-вектору направлении. Приращение расстояния на этом пути равно $dl = rd\theta$ (см. рисунок), поэтому

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

Так как потенциал не зависит от угла φ, $E_\varphi = 0$.

б) Угол α между вектором $\mathbf{E}$ и прямой, проходящей через начало координат определяется соотношением (см. рисунок).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta,$$

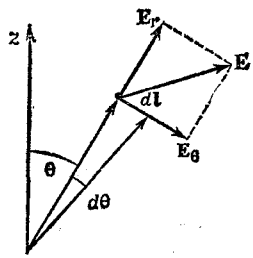
т. е. не зависит от расстояния до диполя.

в) Из полученных формул легко найти:

при $\theta = 0$ $\quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{p}}{r^3}$,

при $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{p}\right)$,

при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{r^3}$.



6.9. а) Потенциал в пространстве при наличии однородного электрического поля равен

$$\varphi = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Когда $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{p} \parallel \mathbf{e}_z$,

$$\varphi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = z\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\right).$$

Эквипотенциальная поверхность находится из условия

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad r = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}.$$

Если радиус сферы равен a, то $p = E_0 a^3 \cdot 4\pi\varepsilon_0$.

б) Электрическое поле находится следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \mathbf{E}_0 + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5} =$$

$$= \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3\mathbf{r}zp}{4\pi\varepsilon_0 r^5}.$$

На поверхности сферы

$$E = 3E_0 \cos\theta.$$

в) Поле не изменится.

г) $\sigma = \varepsilon_0 E = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$.

д) $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\sigma dS = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z.

е) Полученные результаты могут быть использованы, в частности, для решения задачи о поле и распределении зарядов металлической сферы, помещенной в однородное внешнее электрическое поле.

6.10. Соответствующим образом выбирая поверхность, с помощью теоремы Гаусса легко можно найти напряженность электрического поля равномерно заряженной нити

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{r^2},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы в плоскости, перпендикулярной нити, направленные вдоль осей x и y соответственно.

Найдем выражения для силы $\mathbf{F}$ и момента силы $\mathbf{M}$, действующих на диполь в произвольном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Предположим, что отрицательный заряд диполя находится в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, а положительный заряд в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}+\mathbf{d}$, так что дипольный момент диполя равен $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Тогда суммарная сила, действующая на диполь, может быть представлена как сумма сил, действующих на его заряды

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{d}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Считая величину $\mathbf{d}$ малой, разложим электрическое поле в точке $\mathbf{r}+\mathbf{d}$ в ряд по $\mathbf{d}$ и ограничимся линейными по $\mathbf{d}$ членами разложения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{d})=\mathbf{E}(\mathbf{r})+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}d_x+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}d_y+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}d_z=\mathbf{E}(\mathbf{r})+(\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}.$$

Подставляя этот ряд в выражение для $\mathbf{F}$, находим

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}.$$

Чтобы вычислить момент этой силы, действующей на диполь, поступим аналогичным образом. Вспоминая определение момента силы, с точностью до линейных по $\mathbf{d}$ членов находим

$$\mathbf{M}=(\mathbf{r}+\mathbf{d})\times q\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{d})-\mathbf{r}\times q\mathbf{E}(\mathbf{r})=$$
$$=q\mathbf{d}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{r}\times(q\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{r}\times(\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}.$$

Учитывая найденное выше выражение для силы $\mathbf{F}$, окончательно находим $\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})+\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.

а) Выполняя несложное дифференцирование, находим

$$\mathbf{F}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{r^2},$$
$$\mathbf{M}=0.$$

б)
$$\mathbf{F}=0,$$
$$M=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r}.$$

В случае (б) момент силы направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через нить и диполь.

6.11. Задача легко решается, если пластину представить себе как плоский конденсатор с бесконечно малым расстоянием d между пластинами и плотностями поверхностных зарядов на них $+\sigma$ и $-\sigma$, такими, что $p=\sigma d$. Электрическое поле вне такого конденсатора, справа и слева, равно нулю, в чем можно убедиться из теоремы Гаусса. Поэтому потенциалы электрического поля по обеим сторонам от пластины постоянны и не зависят от расстояния до этой пластины. Однако величина этих потенциалов различна, причем разность между ними есть не что иное, как разность потенциалов между пластинами конденсатора. Так как напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора равна σ/ε_0, то разность потенциалов равна $\sigma d/\varepsilon_0=p/\varepsilon_0$.

6.12. а) $$\varphi=\left[-\frac{q}{x}+\frac{q}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

б) $$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left[-\frac{q}{x^2}+\frac{qx}{[a^2+x^2]^{3/2}}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

в) Пусть $x \gg a$. Тогда с точностью до членов порядка a^2/x^2

$$E_x = -\frac{3qa^2}{8x^4\pi\varepsilon_0}.$$

Следовательно, электрическое поле кольца убывает быстрее поля диполя. Это происходит в силу того, что дипольный момент заряженного кольца равен нулю.

6.13. Уменьшение тока при $t > t_1$ происходит потому, что заряд верхней пластины меняет знак и начинает отталкивать электроны.

Заряд на пластине конденсатора после отсоединения батареи равен $q = C\varphi$, где C — емкость, φ — разность потенциалов между пластинами. Время, в течение которого будет скомпенсирован этот заряд q, определится из условия $q = It_1$. Отсюда

$$t_1 = 1000 \text{ сек}.$$

Ток обратится в нуль, когда разность потенциалов станет запирающей, т. е. когда разность потенциалов $e\varphi_{\text{макс}}$ будет соответствовать максимальной энергии частиц 1,5 *эв*. При $t > t_2$ разность потенциалов будет постоянной и равной 1,5 *в*. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора падает вдвое. Если это увеличение произошло до того, как конденсатор был полностью заряжен, то после отсоединения батареи заряд на пластинах будет вдвое меньше и, следовательно, время t_1 вдвое меньше.

Если это увеличение происходит после удаления батареи, то заряд на пластинах не изменится и время t_1 не изменится также.

6.14. а) В этой части задачи напряженность электрического поля легко находится по теореме Гаусса. В результате

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{ar^3}{4\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & r \leqslant R, \\ \dfrac{aR^4}{4\varepsilon_0 r}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & r \geqslant R, \end{cases}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси палочки

$$E(0,\ 0,\ 0) = 0,$$

$$E(0,\ 0,\ 0{,}005\ м) = \frac{ar^3}{4\varepsilon_0} = 0{,}7 \cdot 10^4\ в/м,$$

$$E(0,\ 0,\ 0{,}01\ м) = \frac{aR^3}{4\varepsilon_0} = 5{,}6 \cdot 10^4\ в/м,$$

$$E(0,\ 0,\ 0{,}02\ м) = \left(\frac{aR^3}{4\varepsilon_0}\right)\frac{R}{0{,}02} = 2{,}8 \cdot 10^4\ в/м.$$

б) Значение потенциала в начале координат можно найти из интегрального выражения

$$\varphi(0,\ 0,\ 0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}'|},$$

в котором интегрирование производится по объему палочки. Интегрирование удобно выполнить в так называемой цилиндрической системе координат. Именно, разбивая поперечное сечение цилиндра на кольца площадью $2\pi r dr$, а длину цилиндра на отрезки dx, представим $|\mathbf{r}'|=\sqrt{r^2+x^2}$, $dV=2\pi r\,dr\,dx$. Тогда

$$\varphi(0)=\frac{2\pi a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r^3dr\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+r^2}}=$$

$$=\frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\ln\frac{l+\sqrt{4r^2+l^2}}{-l+\sqrt{4r^2+l^2}}\,dr.$$

Так как $l/2r\geqslant 50$, разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням отношения $2r/l$. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, найдем

$$\varphi(0)=\frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\left(\ln\frac{l}{r}+\frac{r^2}{l^2}+\ldots\right)dr=$$

$$=\frac{aR^4}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\ln\frac{l}{R}+\frac{R^2}{6l^2}\right]\approx\frac{aR^4}{16\varepsilon_0}\left[1+4\ln\frac{l}{R}\right].$$

Точность этого выражения оценим, вычислив поправку $aR^6/6\varepsilon_0 l^2$. Подставляя численные значения из условия задачи, найдем $\varphi(0,\ 0,\ 0)\approx 2350$ *в*, причем ошибка примерно составляет 0,15 *в*.

в) Вспомнив, что потенциал φ в какой-либо точке равен работе, которую нужно затратить, чтобы единичный положительный заряд перевести из бесконечности (где $\varphi=0$) в данную точку, сразу заключаем, что потенциал в точке $(0,\ 0,\ l/2)$ меньше, чем в центре палочки. Действительно, если единичный заряд из бесконечности привести в точку $(0,\ 0,\ l/2)$ и $(0,\ 0,\ 0)$ вдоль оси палочки, то для того, чтобы этот заряд поместить в начало координат, необходимо затратить дополнительную работу против сил отталкивания внутри самой палочки.

7.1. а) Потенциал, создаваемый нитями в произвольной точке $P(x,\ y)$, равен

$$\varphi=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (1)$$

Эквипотенциальные поверхности определяются условием

$r_2/r_1 = \text{const}$, т. е.

$$\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2}{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2}=\text{const}.$$

Если это уравнение записать иначе, т. е. $(x-a)^2+y^2=R^2$, то видно, что оно описывает цилиндр вращения.
В последнем уравнении a и R — некоторые константы, выражающиеся через величины, входящие в исходное уравнение.

б) Определим емкость, приходящуюся на единицу длины. Для этого вычислим потенциал проводов

$$\varphi\,|_{\text{провода}+\lambda}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{d},$$

$$\varphi\,|_{\text{провода}-\lambda}=+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{d}.$$

Отсюда

$$\varphi\,|_{+\lambda}-\varphi\,|_{-\lambda}=-\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{d}$$

и

$$C^*=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r_0)}.$$

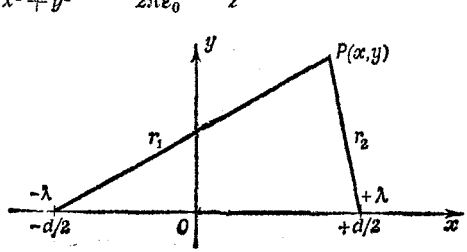
в) $$f(z)=U+iV=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Покажем, что $\varphi=\operatorname{Re} f(z)$ при $x,\ y\gg d$. Действительно,

$$\varphi=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2}}\approx$$

$$\approx-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x^2+y^2)+xd}{(x^2+y^2)-xd}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{2xd}{x^2+y^2}\right)\approx$$

$$\approx-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{x^2+y^2}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{Re}\frac{1}{z}.$$



К главе 8. Электростатическая энергия

8.1. Заряд Zq_e, равномерно распределенный по шарику, обладает электростатической энергией, равной (см. «Лекции», вып. 5, стр. 153)

$$U_1 = \frac{3\,(Zq)^2}{5r \cdot 4\pi\varepsilon_0}.$$

Из этой энергии следует вычесть «нефизическую» энергию самодействия протонов. Энергия, соответствующая протону, заряд которой равномерно размазан по шару радиуса r, равна $U_2 = {}^3/_5\,(q^2/r)$ $({}^1/_{4\pi\varepsilon_0})$. Для Z протонов эта энергия «действия самого на себя» равна $3Zq^2/5r \cdot 4\pi\varepsilon_0$. Следовательно, электростатическая энергия кулоновского взаимодействия протонов в ядре равна ${}^3/_5 Z\,(Z-1)\,(q^2/4\pi\varepsilon_0 r)$.

8.2. Энергия заряженного конденсатора емкости C равна $A = {}^1/_2 CV^2$, где V — разность потенциалов на обкладках. Искомая работа равна разности энергий конденсаторов до и после поворота ручки настройки:

$$A_1 - A_2 = \frac{C_1 - C_2}{2} V^2 = 4{,}05 \cdot 10^{-6}\ дж.$$

8.3. Суммарная энергия конденсаторов до их параллельного соединения равна

$$U_0 = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Поскольку при параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются, то энергия системы после соединения равна

$$U_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2\,(C_1 + C_2)}.$$

Вычислим разность

$$U_1 - U_0 = -\frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2\,(C_1 + C_2)} < 0.$$

Избыток энергии излучается или теряется на тепло в соединительных проводах. Потери энергии не происходит, если $q_1 C_2 = q_2 C_1$.

8.4. а) Пусть $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал внешнего электрического поля, в котором в точке $\mathbf{R}$ помещен диполь $\mathbf{p}$, т. е. в точке $\mathbf{R}+\mathbf{r}_1$ находится заряд $+q$, а в точке $\mathbf{R}+\mathbf{r}_2$ — заряд $-q$ ($|\mathbf{r}_1|$ и $|\mathbf{r}_2| \ll |\mathbf{R}|$), так что $\mathbf{p} = q\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Энергия зарядов диполя во внешнем поле равна

$$U = q\,[\varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_2)] = -(\mathbf{p},\ \mathbf{E}(\mathbf{R})). \qquad (1)$$

б) Вычислим момент силы, действующей на диполь, прямым вычислением. Полный момент внешних сил равен

$$\mathbf{M}=\mathbf{R}+\mathbf{r}_1\times q\mathbf{E}\,(\mathbf{R}+\mathbf{r}_1)+\mathbf{R}+\mathbf{r}_2\times -q\mathbf{E}\,(\mathbf{R}+\mathbf{r}_2).$$

Разлагая это выражение в ряд с точностью до членов первого порядка по $|r_{1,2}|\ll|\mathbf{R}|$, находим

$$\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}+\mathbf{R}\times(\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}.$$

Отсюда в случае однородного электрического поля следует $\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$. Последнее выражение получается также из выражения (1): если ввести угол α между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$, то действующий на диполь момент будет равен по величине

$$M=\frac{\partial U}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(-pE\cos\alpha)=pE\sin\alpha$$

и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$.

в) Если диполь создан путем последовательного помещения зарядов в электрическое поле, то его электростатическая энергия будет отличаться от (1). Действительно, если заряд $+q$ помещен в точке $\mathbf{R}+\mathbf{r}_1$ и, следовательно, обладает энергией $q\varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_1)$, то при помещении заряда $-q$ в точку $\mathbf{R}+\mathbf{r}_2$ будет затрачена работа

$$-q\varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_2)-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}.$$

Таким образом, энергия диполя в этом случае будет меньше и равна

$$U=q\varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_1)-q\varphi(\mathbf{R}+\mathbf{r}_2)-$$
$$-\frac{q^3}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{p}|}=-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{R}))-\frac{q^3}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{p}|}.$$

Искомая разность энергий равна $q^3/4\pi\varepsilon_0|\mathbf{p}|$ и имеет смысл энергии взаимодействия зарядов, составляющих диполь.

8.5. Электростатическая энергия конденсатора равна $W=q^2/2C$, где q—заряд на обкладках; C—емкость, равная $C=\varepsilon_0 A/d$ (d—расстояние между обкладками, A—их площадь). Искомая сила равна

$$F=-\frac{\partial W}{\partial d}=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A},$$

а работа этой силы на расстоянии dx равна $-(q^2/2\varepsilon_0 A)\,dx$.

8.6. Разность Δ энергий покоя мезонов равна $\Delta=(m_{\pi+}-m_{\pi-})c^2=4{,}6$ *Мэв*. Если заряд мезонов равномерно «размазан» по объему шара, то его собственная электростатическая энергия равна [см. «Лекции», формула (8.7), вып. 5 и решение

к задаче 8.1]

$$W=\frac{3}{5}\frac{q_e^2}{d\cdot 4\pi\varepsilon_0}.$$

Из условия $\Delta=W$ получается радиус пиона $a=2\cdot 10^{-14}$ *см*. Отсюда видно, что так определенный радиус пиона оказывается меньше характерных размеров ядра.

8.7. Когда оболочка не заряжена, то на основании закона Гаусса убеждаемся, что электрическое поле помещенного в начало координат заряда q_1 внутри ($r\leqslant a$) и вне оболочки ($r>b$) совпадает с хорошо известным электрическим полем точечного заряда q_1. В самой же оболочке ($a\leqslant r\leqslant b$) напряженность электрического поля равна нулю. Очевидно, работа по перемещению заряда из бесконечности в начало координат будет равна разности энергий, заключенных в поле, одна из которых отвечает заряду в начале координат, а вторая — заряду q_1, помещенному на бесконечности. (Тот факт, что энергия точечного заряда бесконечна, здесь не приводит к затруднению, поскольку мы вычисляем не сами энергии, а их разность.) Искомая работа W_1 равна

$$W_1=-\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{a\leqslant r\leqslant b}\mathbf{E}^2dV=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a-b}{ab}.$$

Когда оболочка имеет заряд q_2, ситуация несколько иная. В начальном состоянии, когда заряд q_1 находится на бесконечности, энергия, сосредоточенная в поле, равна энергии точечного заряда q_1 плюс энергия, заключенная в поле, создаваемом сферической оболочкой. Последнее, как легко убедиться на основании теоремы Гаусса, отлично от нуля лишь при $r\geqslant b$ и совпадает с полем точечного заряда величины q_2. В конечном же состоянии, когда заряд q_1 находится в начале координат, величина напряженности электрического поля в пространстве ведет себя следующим образом (разумеется, поле всюду радиально):

$$E=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r<a,\\ 0, & a\leqslant r\leqslant b,\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>b.\end{cases}$$

Следовательно, искомая работа W_2 во втором случае равна

$$W_2=W_1+\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{r\geqslant b}\left[\left(\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2-\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2\right]dV=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a-b}{ab}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}.$$

К главе 10. ***Диэлектрики***

10.1. Для энергии конденсатора можно написать соотношение

$$\varkappa_1 \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dV_1 + \varkappa_2 \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dV_2 = \frac{CV^2}{2},$$

где V — разность потенциалов на обкладках, а интегрирование производится по двум областям конденсатора. Поскольку поле E в конденсаторе можно считать однородным, то из этого соотношения, если принять во внимание, что $Ed = V$, следует

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\,\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}.$$

10.2. Емкость конденсатора без диэлектрика равна $C_0 = A\varepsilon_0/d$, где A — площадь пластин, d — расстояние между ними; $Q = C_0 V_0$, где V_0 — разность потенциалов. При вдвижении диэлектрика величина Q не меняется, емкость же возрастает и равна (см. решение к задаче **10.1**, учтя, что $\varkappa_1 = 1$) $C = A\varepsilon_0 (1+\varkappa)/2d = C_0 (1+\varkappa)/2$. Энергия конденсатора при этом равна $U = Q^2/2C = C_0 V_0^2/(1+\varkappa)$.

а) Искомая сила равна

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = \frac{Q^2}{2C^2}\,\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{C_0 V_0^2}{1+\varkappa}\,\frac{1}{d} = 7{,}1 \cdot 10^{-8}\ \textit{ньютон}.$$

б) Дипольный момент единицы объема при этом равен

$$P = (\varkappa - 1)\,\varepsilon_0 E = (\varkappa - 1)\,\varepsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{(\varkappa - 1)\,\varepsilon_0}{Cd}\,Q =$$

$$= \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\,\frac{2\varepsilon_0 V_0}{d} = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\ \textit{кулон/м}^2.$$

в) Меньше.

10.3. В отсутствие диэлектрика заряд Q на пластинах конденсатора и разность потенциалов φ_0 связаны соотношением $Q = C_0\varphi_0$, где $\varphi_0 = E_1 d$ (d — расстояние между пластинами). При наличии диэлектрика $Q = C\varphi$, причем $E_2 = E_1/\varkappa$. Отсюда $Q = C\,[E_1 (d-t) + E_1 t/\varkappa]$. Поскольку, с другой стороны, $Q = C_0 E_1 d$, то, приравнивая выражения для Q, находим

$$C = C_0 \left[1 - \frac{t}{d}\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right]^{-1}.$$

10.4. Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ в любой точке $\mathbf{r}$ внутри диэлектрика равен

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Так как $\mathbf{D}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}=(\varkappa-1)\,\varepsilon_0\mathbf{E}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\mathbf{D}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Поверхностная плотность зарядов $\sigma_{\text{пол}}$ равна $\sigma_{\text{пол}}=\mathbf{Pn}$. Следовательно, наведенные на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика заряды Q_a и Q_b соответственно равны

а) $Q_a=4\pi a^2\sigma_{\text{пол}}|_{r=a}=\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\dfrac{Q}{\varepsilon_0}=Q_b$.

б) $\rho_{\text{пол}}=-\nabla\cdot\mathbf{P}=0$.

10.5. Изменение внутренней энергии конденсатора U, равной, как известно, $U=Q^2/2C$ (где Q—заряд на пластинах, C—емкость), в процессе, в котором механические силы вдвигают диэлектрик, изменяя его емкость, а батарея совершает работу по изменению зарядов на величину dQ, равно

$$dU=\frac{Q}{C}\,dQ-\frac{Q^2}{2C^2}\,dC.$$

Первое слагаемое в этом выражении—работа, совершенная электрической батареей по изменению заряда на пластинах конденсатора, а второе—работа механических сил.

Так как разность потенциалов на пластинах остается все время постоянной и равной $V_0=Q/C$, выражение для dU можно записать в виде

$$dU=V_0dQ=\frac{V_0^2}{2}\,dC.$$

а) Подсчитаем работу, совершенную электрической батареей. Учитывая, что заряд на пластинах в начальном состоянии равен q_0, а в конечном состоянии $\varkappa q_0$, находим

$$\int\limits_{q_0}^{q_0\varkappa}V_0\,dQ=V_0\int\limits_{q_0}^{\varkappa q_0}dQ=q_0V_0\,(\varkappa-1).$$

б) Емкость конденсатора в начальном состоянии была q_0/V_0, а в конечном состоянии $\varkappa q_0/V_0$. Следовательно, механические силы совершили работу

$$-\int\limits_{q_0/V_0}^{\varkappa q_0/V_0}\frac{V_0^2}{2}\,dC=-\frac{V_0q_0}{2}\,(\varkappa-1).$$

Работа, как мы видим, совершалась над диэлектриком.

10.6. В некотором смысле эта задача аналогична пункту (б) предыдущей задачи. Над диэлектриком (масло) совершается механическая работа, которая переходит в потенциальную энергию

столбика масла в поле сил тяжести. Эта работа равна

$$W=\frac{V^2}{2}(C_2-C_1),$$

где C_1 и C_2 — емкости трубки до и после втягивания масла на высоту h. Так как емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна $C_0=2\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$ (см. решение к задаче **6.5**), то

$$W=\frac{V^2}{2}(\varkappa-1)\,h\,\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Вес столба втянутого масла равен $\pi(b^2-a^2)\rho gh$. Потенциальная энергия этого столба в поле силы тяжести равна весу, умноженному на координату его центра тяжести, т. е. на $h/2$:

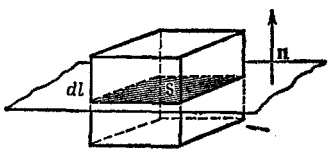
$$\frac{\pi(b^2-a^2)}{2}\rho gh^2.$$

Из равенства работы механических сил потенциальной энергии находим требуемый результат:

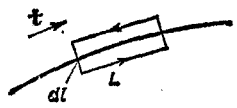
$$h=\frac{2\varepsilon_0V^2(\varkappa-1)}{(b^2-a^2)\,\rho g\ln(b/a)}.$$

10.7. Граничные условия на границе раздела двух сред (1) и (2) имеют вид $E_{1t}=E_{2t}$, $D_{1n}=D_{2n}$ или $E_{1n}/\varkappa_1=E_{2n}/\varkappa_2$, где индексами n и t помечены нормальные и тангенциальные к поверхности составляющие векторов. Эти граничные условия следуют из уравнений Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ и $\nabla\times\mathbf{E}=0$.

Действительно, рассмотрим произвольную поверхность раздела двух сред (фиг. 1). Выберем произвольным образом направление внешней нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности и условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к нижней и верхней средам. Выделим мысленно около рассматриваемой точки поверхности прямую призму с образующими dl, перпендикулярными поверхности. Пусть эта призма вырезает на поверхности элемент S столь малый, что его можно считать плоским. По теореме Гаусса поток вектора электрической индукции через поверхность призмы должен равняться нулю $\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int \operatorname{div}\mathbf{D}\cdot dV=0$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

При стремлении dl к нулю поток вектора **D** через боковую поверхность призмы также будет стремиться к нулю. Для потока же через верхнее и нижнее основание призмы получаем

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n})\, S - (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n})\, S = 0.$$

Отсюда следует искомое граничное условие

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Покажем теперь, что на границе раздела двух сред касательная составляющая вектора напряженности электрического поля **E** непрерывна. С этой целью выберем около произвольной поверхности (на фиг. 2 ее сечение плоскостью рисунка изображено сплошной линией) контур в виде прямоугольной рамки, боковые стороны dl которой нормальны к поверхности раздела сред. Выберем размеры этого контура столь малыми, чтобы поверхность раздела двух сред можно было считать плоской. Мысленно «натянем» на эту рамку стоксову поверхность. Тогда по теореме Стокса

$$\int (\nabla \times \mathbf{E})\, d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

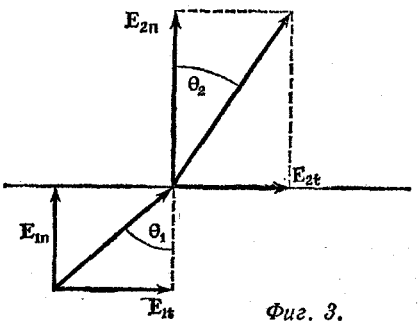
Но при стремлении dl к нулю вклад в интеграл по контуру от боковых сторон будет также стремиться к нулю. Если длину L верхней и нижней сторон рамки выбрать достаточно малой, напряженность электрического поля **E** на этих сторонах рамки можно считать однородной. Отсюда $(\mathbf{E}_1 t)\, L - (\mathbf{E}_2 t)\, L = 0$, или $E_{1t} = E_{2t}$.

Из фиг. 3 видно, что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\varkappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \varkappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2.$$



Фиг. 3.

К главе 11. ***Внутреннее устройство диэлектриков***

11.1. Представим себе однородно поляризованный шар в виде двух равномерно заряженных шаров, полные заряды которых одинаковы, но противоположны по знаку, а центры сдвинуты друг относительно друга на бесконечно малое расстояние. В задаче **6.7** (см. решение) было показано, что электрическое поле такой системы совпадает с электрическим полем сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется как $A\cos\theta$, где θ — угол, отсчитываемый от оси z (последнюю удобно выбрать вдоль направления вектора поляризации шара). При этом напряженность электрического поля вне этой сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом $P=(4\pi/3)\,Aa^3$:

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{P}r^2-3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}, \qquad r>a.$$

Здесь, очевидно, вектор $\mathbf{P}$ совпадает с вектором полного дипольного момента равномерно поляризованного шара. Внутри же такого шара поле $\mathbf{E}$, согласно решению к задаче **6.7**, равно

$$\mathbf{E}=\frac{A}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_z=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \qquad r\leqslant a.$$

11.2. Дипольный момент атома гелия равен

$$P_{\mathrm{He}}=\frac{\varkappa-1}{N}\,\varepsilon_0 E=2{,}4\cdot10^{-37}\ \textit{кулон}\cdot\textit{м}.$$

11.3. Для водяного пара [см. «Лекции», вып. 5, уравнение (11.21)] $\varkappa-1=Np_0^2/3\varepsilon_0 kT$. Следовательно, температурная зависимость поляризуемости $\alpha=\varkappa-1/N$ имеет вид $\alpha=A/T$, где $A=p_0^2/3\varepsilon_0 k$; N — число частиц в единице объема можно найти из уравнения состояния идеального газа $p=NkT$ (p — давление пара, k — постоянная Больцмана). По данным таблицы, приведенной в условии задачи, $N=1{,}138\cdot10^{25}\ м^{-3}$. Для α получается следующая таблица значений:

$10^{30}\alpha$	238	250	269	290
$10^{61}/T$	207	220	236	254

Если построить зависимость $\alpha=f(1/T)$, то экспериментальные точки ложатся на прямую, тангенс угла наклона которой равен $A=1{,}12$. Отсюда $p_0=\sqrt{3\varepsilon_0 kA}=2\cdot10^{-17}\ \textit{кулон}\cdot\textit{м}$.

11.4. В простом варианте задачи $E=(1/4\pi\varepsilon_0)\,(2p/a^3)$ и $p=\alpha\varepsilon_0 E$. Отсюда ответ: $a^3=\alpha/2\pi$. В усложненном варианте электрическое поле в любом узле легко найти:

$$E=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{O}}}{(an)^3}+\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{Ti}}}{\left(\frac{a}{2}\,n\right)^3}.$$

Поскольку дипольные моменты атома кислорода и атома титана равны $p_{\mathrm{O}}=\alpha_{\mathrm{O}}\varepsilon_0 E$ и $p_{\mathrm{Ti}}=\alpha_{\mathrm{Ti}}\varepsilon_0 E$, то при подстановке в эти выражения E следует искомое условие:

$$a^3=\frac{1{,}2}{\pi}\,(\alpha_{\mathrm{O}}+8\alpha_{\mathrm{Ti}}).$$

11.5. В однородном внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ каждый шарик будет равномерно поляризован. Пусть $\mathbf{P}$ — вектор поляризации шара. Равномерная поляризация шара создает внутри него однородное электрическое поле с напряженностью, равной $-\mathbf{P}/3\varepsilon_0$ [см. «Лекции», вып. 5, формула (11.24)]. Тогда суммарное электрическое поле внутри каждого шарика (их взаимным влиянием друг на друга мы, согласно условию задачи, пренебрегаем) равно $\mathbf{E}_i=\mathbf{E}-\mathbf{P}/3\varepsilon_0$. Поскольку $\mathbf{P}=\varepsilon_0\,(\varkappa-1)\,\mathbf{E}_i$, то

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\,(\varkappa-1)\,\mathbf{E}-\frac{\varkappa-1}{3}\,\mathbf{P},$$

откуда

$$\mathbf{P}=\frac{3\,(\varkappa-1)}{\varkappa+2}\,\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Получим полный дипольный момент равномерно поляризованного шарика $\mathcal{P}$, умножив $\mathbf{P}$ на объем шара, т. е. на $(4\pi/3)\,(d/2)^3$:

$$\mathcal{P}=\frac{4\pi\,(\varkappa-1)}{\varkappa+2}\left(\frac{d}{2}\right)^3\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Поскольку шарики образуют пространственную решетку с периодом, равным $3d$, поляризация этой решетки, т. е. дипольный момент, приходящийся на единицу объема решетки, будет равен

$$\frac{1}{(3d)^3}\,\mathcal{P}=\frac{4\pi\,(\varkappa-1)}{6^3\,(\varkappa+2)}\,\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Так как $\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}/\varepsilon_0$, то для диэлектрической постоянной решетки находим выражение

$$\varepsilon=1+\frac{4\pi\,(\varkappa-1)}{6^3\,(\varkappa+2)}.$$

К главе 12. Электростатические аналогии

12.1. Исходя из электростатической аналогии, нам нужно найти потенциал в центре тонкого равномерно заряженного кольца. Имеем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

где Q — полный заряд кольца $Q = \rho\pi a^2 b$. Переходя к задаче о распределении температуры, надо вспомнить, что мы вычислили разность потенциалов между центром кольца и бесконечно удаленной точкой. Если потенциал на бесконечности равен φ_0, то в центре кольца он равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \varphi_0.$$

Переходя к «температурным» величинам, находим температуру в центре кольца (при таком переходе $\varphi \to T$, $\rho \to \varepsilon_0 S/\varkappa$, см. «Лекции», вып. 5, стр. 234, 235)

$$T = \frac{W}{4\pi\varkappa a} + T_0.$$

12.2. Используя аналогию с электростатической задачей, находим $T(r) = -(Sr^2/6\varkappa) + D$, где $S = W/(4\pi/3)R^3$ — плотность источников тепла; $W = 8 \cdot 10^{20}$ *дж/год*; R — радиус Земли. Константу D определим из условия $T(a) = T_0$, т. е. $D = T_0 + Sa^2/6\varkappa$. Радиус a можно найти, положив приближенно температуру поверхности Земли равной нулю. Из этого условия следует

$$a = R\sqrt{1 - \frac{8\pi\varkappa T_0 R}{W}} = 5867 \text{ км}.$$

12.3. а) Трехмерный случай: $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z r^{n-1}$. Подставляя это выражение для φ в уравнение $\Delta\varphi = 0$, получаем $\Delta\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-1)(n+2) b_n z r^{n-3} = 0$. Нетривиальное решение получившегося уравнения будет при условии, что коэффициенты b_1 и b_{-2} отличны от нуля. Следовательно,

$$\varphi = b_1 z + \frac{b_{-2} z}{r^3}.$$

б) Двумерный случай: $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z \rho^{n-1}$. В этом случае $\Delta\varphi = \sum_n (n-1)(n+1) c_n z \rho^{n-3} = 0$. Следовательно, лишь

c_1 и c_{-1} отличны от нуля и решение имеет вид

$$\varphi = c_1 z + (c_{-1} z/\rho^2).$$

12.4. Задача математически аналогична задаче **7.1**. Поэтому для T можно сразу написать решение, если в задаче **7.1** линейную плотность зарядов положить равной $\lambda = W\varepsilon_0/\varkappa t$:

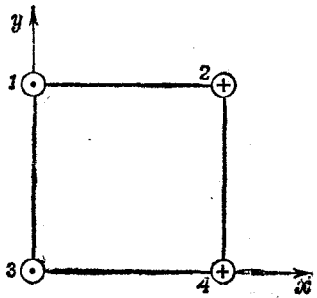
$$T(r) = -\frac{W}{2\pi\varkappa t}\ln\frac{r_2}{r_1} + D.$$

В этом выражении $r_2 = \sqrt{[x-(d/2)]^2+y^2}$ и $r_1 = \sqrt{[x+(d/2)]^2+y^2}$ — расстояния до произвольной точки от труб с $+W$ и $-W$ источником (см. рисунок к решению задачи **7.1**, стр. 421). Постоянная $D = T_0$ определяется из того условия, что вдали от труб температура равна T_0. В точке с координатами $x = 100\,d$ и $y = 100\,d$ температура равна $T = 20{,}5°$ С.

К главе 13. Магнитостатика

13.1. а) Напряженность магнитного поля, создаваемого током, текущим по бесконечному прямому проводу, на расстоянии r от последнего равна $\mathbf{B} = (\mathbf{I}\times\mathbf{e}_r)/2\pi\varepsilon_0 c^2 r$, где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора, лежащего в плоскости, перпендикулярной проводу. В центре квадрата компоненты вектора напряженности магнитного поля равны $B_y = 2I/\pi\varepsilon_0 c^2 a = 8\cdot 10^{-5}$ *вебер/м*^{2}, $B_x = 0$ (см. рисунок). Вектор $\mathbf{B}$, следовательно, направлен вертикально вверх.

б) Сила, действующая на элемент длины тока левого нижнего из проводов, согласно закону $d\mathbf{F} = I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$, равна $f = dF/dl = I\mathbf{e}_3\times\mathbf{B}$, где $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор в направлении силы тока левого нижнего провода. Вычислим напряженность магнитного поля в районе левого нижнего провода (*исключая, конечно, поле самого этого провода*). Нетрудно убедиться, что компоненты вектора $\mathbf{B}$ равны



$B_x = B_0/2$, $B_y = 3B_0/2$, где $B_0 = I/2\pi\varepsilon_0 c^2 a$. Следовательно, $\mathbf{f} = (B_0 I/2)(-3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы в направлении осей x и y. Величина этой силы равна $|\mathbf{f}| = B_0 I \sqrt{10}/2 = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ *ньютон*. Направление силы составляет угол 161°,7 с осью x.

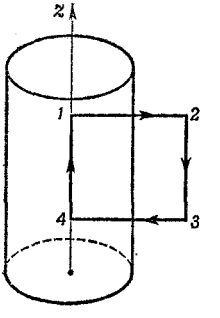
13.2. При вращении цилиндра возникает ток с плотностью

$$\mathbf{j} = \frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{P_0}{2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{P_0}{2}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Выберем контур интегрирования так, как показано на рисунке, и воспользуемся теоремой Стокса. Магнитное поле по соображениям симметрии направлено вдоль оси цилиндра. Находим, что вне цилиндра $\mathbf{B} = 0$. Поле на оси цилиндра равно

$$B(0) = \frac{P_0 \omega R^2}{4\varepsilon_0 c^2}.$$

Направление вектора $\mathbf{B}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости.



13.3. Плотность токов $\mathbf{j}$ найдем из условия однородности тока по сечению. Воспользовавшись тем, что циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру равна

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

получим

а) $B = \dfrac{Ir}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a^2}$, $\qquad 0 < r < a$,

б) $B = \dfrac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}$, $\qquad a < r < b$,

в) $B=\dfrac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$, $\quad b<r<c$,

г) $B=0$, $\quad r>c$.

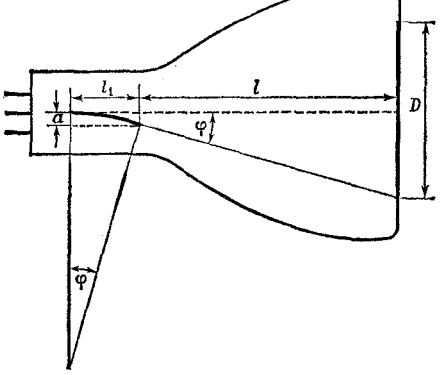
13.4. Под действием силы Лоренца $q_e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ электрон будет двигаться по окружности. Радиус последней находится из уравнения движения электрона в магнитном поле: его ускорение равно центростремительному

$$q_e v_0 B=\frac{mv_0^2}{r},$$

где v_0 — начальная скорость электрона. В своем движении электрон в узкой части трубки опишет дугу. Отклонение луча (в предельном случае на половину экрана) найдем из выражения $D/2=(l-a)\operatorname{tg}\varphi_{\text{макс}}$ (обозначения расшифрованы на рисунке). Так как $a\ll l$, то $\operatorname{tg}\varphi_{\text{макс}}=D/2l$. Нетрудно убедиться, что если отказаться от условия $a\ll l$, то $\varphi_{\text{макс}}$ надо определять из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{макс}}=\left[\frac{D}{2}-l_1\operatorname{tg}\frac{\varphi_{\text{макс}}}{2}\right]\frac{1}{l}.$$

Радиус окружности как функция параметров трубки и угла отклонения есть $r=l_1/\sin\varphi_{\text{макс}}$.
Следовательно, $B=mv_0/q_e l_1\sqrt{1+(4l^2/D^2)}$. Если для оценки величины B задаться следующими параметрами трубки: $D=30$ *см*; $l=30$ *см*, $l_1=5$ *см*, то $B=1{,}60$ *гс* (скорость электрона v_0 определяется по формуле $v=\sqrt{2E/m_e}$, при $E=3$ *кэв* $v_0=3\cdot10^7$ *м/сек*. Число ампер-витков на единицу длины (*м*) соленоида находится по формуле $B=nI/\varepsilon_0 c^2$: $nI=\varepsilon_0 c^2 B=12{,}7\cdot10^3$. Ускорение электронов электрическим полем после их отклонения в магнитном поле увеличивает



составляющую скорости по направлению к экрану. Это приводит к уменьшению угла φ между направлением движения электронов и осью трубки; следовательно, после отклонения в магнитном поле должно быть $\varphi > \varphi_{\text{макс}}$ ($\varphi_{\text{макс}}$ определяется параметрами трубки) и найденные оценки B, nl надо увеличить.

13.5. а) При определении силы, действующей на рамку с током, будем исходить из того, что на элемент тока длиной dl действует сила, равная $d\mathbf{F} = I_2\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Проинтегрируем это выражение по контуру рамки. Ясно, что силы, действующие на участки рамки, перпендикулярные проводу, равны по величине и противоположны по направлению. Их результирующая равна нулю. Сила, реально действующая на рамку, равна сумме сил, действующих на участки, параллельные проводу. Так как магнитное поле, создаваемое проводом на расстоянии y от него, равно

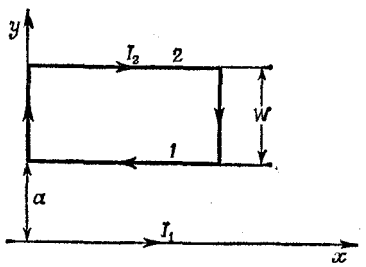
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{I_1}{y}\,\mathbf{e}_z,$$

то

$$\mathbf{F} = I_2\left\{\int\limits_1 d\mathbf{l}\times\mathbf{B} + \int\limits_2 d\mathbf{l}\times\mathbf{B}\right\} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\mathbf{e}_y\,\frac{wl}{a\,(a+w)}.$$

Сила, действующая на провод, равна найденной по величине, но противоположно направлена.

б) Как легко убедиться, момент сил, действующих на рамку, определяемый выражением $\mathbf{M} = I_2 \oint \mathbf{r}\times d\mathbf{l}\times\mathbf{B}$, равен нулю.



13.6. Задача легко решается, если рассмотреть два фиктивных тока: один с плотностью $+\mathbf{j}$, а другой с плотностью $-\mathbf{j}$, «протекающих» по полости так, чтобы результирующий ток через полость был равен нулю. Магнитное поле на оси полости при этом легко находится и равно $B = (1/2\varepsilon_0 c^2)\,\mathbf{j}\times\mathbf{d}$, где $\mathbf{d}$ — радиус-вектор, соединяющий центр сечения стержня с центром сечения полости.

К главе 14. Магнитное поле в разных случаях

14.1. а) Для определения векторного потенциала в точках, удаленных от поверхности пленки на расстояние, гораздо меньшее ее размеров, воспользуемся сформулированным в «Лекциях» (вып. 5, стр. 282, 283) правилом: i-я компонента векторного потенциала, возникающая от плотности тока $\mathbf{j}$, точно такая же, как электрический потенциал φ, созданный плотностью зарядов $\rho = j_i/c^2$. Так как пленку в условиях задачи можно считать неограниченной во всех направлениях, то воспользуемся уже решенной задачей о поле равномерно заряженной плоскости. Выберем сетку координат, направив ось x вдоль вектора $\mathbf{v}$, а ось z — перпендикулярно плоскости пленки. В такой системе координат поверхностный ток имеет только компоненту x, отличную от нуля, поэтому $A_y = A_z = 0$. Электрическое поле равномерно заряженной плоскости, согласно «Лекциям» (вып. 5, стр. 96), равно

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси z. Интегрируя соотношение $E_z = -\partial\varphi/\partial z$, находим электрический потенциал $\varphi = -(\sigma/2\varepsilon_0)z$ (постоянную интегрирования выбираем равной нулю). Используя сформулированное выше правило, находим

$$A_x = -\frac{\sigma v}{2\varepsilon_0 c^2}z, \quad A_y = A_z = 0.$$

Так как $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, то, проделав необходимое дифференцирование, находим $B_x = 0$, $B_y = \sigma v/2\varepsilon_0 c^2$, $B_z = 0$. В векторной форме

$$\mathbf{B} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 c^2}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}).$$

14.2. Для решения задачи удобно воспользоваться законом Био—Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}(d\mathbf{l}\times\mathbf{r}).$$

а) Прямолинейные участки провода вносят в величину магнитного поля в центре полукруга нулевой вклад.

б) Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка и по величине равно $B = 1/4\varepsilon_0 c^2 r$.

в) Магнитное поле, создаваемое всем проводом, равно найденному в пункте (б) данной задачи.

14.3. Если воспользоваться законом Био—Савара, то магнитные поля, создаваемые витками в точке P (см. рисунок), легко найти простым интегрированием $B_{x1} = Ia^2/2\varepsilon_0 c^2 r_1^3$ и

$B_{x2}=Ia^2/2\varepsilon_0c^2r_2^3$, где $r_1=\sqrt{a^2+[(b/2)-x]^2}$ и $r_2=\sqrt{a^2+[(b/2)+x]^2}$.

Полное поле в точке P равно

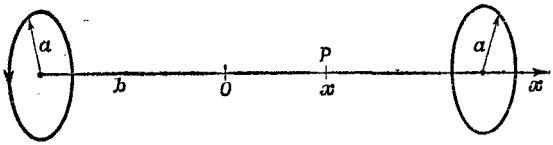
а) $$B_x=B_{x1}+B_{x2}=\frac{Ia^2}{2\varepsilon_0c^2r_1^2}\left[\left[a^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right]^{-3/2}+\right.$$
$$\left.+\left[a^2+\left(\frac{b}{2}+x\right)^2\right]^{-3/2}\right].$$

б) Разлагая полученное выражение в ряд Тэйлора, считая параметр x/r_0 [где $r_0=\sqrt{a^2+(b^2/4)}$] малым, легко найти

$$B=\frac{Ia^2}{\varepsilon_0c^2r_0^3}\left[1+\left(\frac{15}{4}\frac{b^2}{r_0^4}-\frac{3}{r_0^2}\right)\frac{x^2}{2}\right].$$

в) Слагаемое $\sim x^2$ обращается в нуль при условии $5b^2/4=r_0^2$, т. е. если $a=b$.

г) Если $a=b$, то магнитное поле равно $B=8I/5^{3/2}a\varepsilon_0c^2$.



14.4. а) Выберем оси координат, как показано на рисунке. Согласно закону Био—Савара

$$\mathbf{B}=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\oint\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

где интегрирование ведется по всем сторонам рамки. Если представить вектор $\mathbf{r}$ в виде суммы двух векторов, один из которых направлен вдоль оси x и имеет длину, равную x, а другой расположен в плоскости yz, то можно записать

$$\mathbf{B}=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left[\left(\oint\frac{d\mathbf{l}}{r^3}\times\mathbf{x}\right)+\oint\frac{d\mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho}}{r^3}\right].$$



Ясно, что первый интеграл в квадратной скобке равен нулю просто в силу симметрии рамки, поскольку для любого $d\mathbf{l}$ всегда найдется на рамке другой участок, расположенный на таком же расстоянии r от точки M, но с противоположным направлением $d\mathbf{l}$. Что же касается второго интеграла, то в нем вектор $d\mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho}$ всегда направлен вдоль оси x, и, следовательно, магнитное поле рамки перпендикулярно плоскости рамки. Из рисунка видно, что $(d\mathbf{l}\times\boldsymbol{\rho})_x = (a/2)\,dz$.

Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру в условиях данной задачи равен восьми интегралам вдоль отрезка $0 \leqslant z \leqslant a/2$, для которого $r^2 = z^2 + x^2 + a^2/4$, находим

$$B_x = \frac{Ia}{\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{a/2}\frac{dz}{\left(\frac{a^2}{4}+x^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Вычисляя этот интеграл, получим требуемый в задаче ответ.

б) В этом пункте задачи требуется фактически найти закон Био—Савара из общего интегрального выражения для векторного потенциала. В данной задаче это выражение сводится к виду

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint\frac{d\mathbf{l}}{r}.$$

По соображениям, изложенным выше, векторный потенциал в точке M равен нулю. Вычислим $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Воспользовавшись примечанием к задаче, запишем выражение для векторного потенциала в произвольной точке наблюдения

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\nabla\times\left(\oint\frac{d\mathbf{l}}{r}\right) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint\left(\nabla\times\frac{d\mathbf{l}}{r}\right).$$

В последнем интеграле дифференцирование производится по координатам точки наблюдения. При этом дифференцировании вектор $d\mathbf{l}$ следует считать постоянным. Здесь удобно воспользоваться теми соотношениями, которые были получены в решении к задаче 2.3. Получим

$$\nabla\times\frac{d\mathbf{l}}{r} = \left(\nabla\cdot\frac{1}{r}\right)\times d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}.$$

Следовательно, мы приходим к закону Био—Савара, использованному в пункте (а).

14.5. Чтобы определить напряженность магнитного поля, вычислим вначале векторный потенциал в некоторой точке P с координатами x, y, z, расположенной вблизи оси кольца. Выберем оси координат так, чтобы ось z совпадала с осью

кольца. Воспользуемся интегральным выражением для векторного потенциала

$$\mathbf{A}=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint\frac{d\mathbf{l}}{r},$$

где $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$, x' и y' — координаты элемента $d\mathbf{l}$ на кольце ($x^2+y^2=a^2$). Считая $x,\ y\ll a$, приближенно запишем

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2+a^2-2xx'-2yy'}\approx$$
$$\approx\sqrt{z^2+a^2}\left(1-\frac{xx'+yy'}{z^2+a^2}\right).$$

В том же приближении, очевидно,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}+\frac{xx'+yy'}{(z^2+a^2)^{3/2}}.$$

В силу того что $\oint d\mathbf{l}=0$, имеем

$$\mathbf{A}=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2\,(z^2+a^2)^{3/2}}\oint(xx'+yy')\,d\mathbf{l}.$$

Так как токов в направлении оси z нет, то $A_z=0$. Учитывая далее, что

$$\oint x'\,dl_x=0,\qquad \oint y'\,dl_x=-\pi a^2,$$
$$\oint x\,dl_y=\pi a^2,\qquad \oint y\,dl_y=0,$$

находим

$$A_x=-\frac{I\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\,(z^2+a^2)^{3/2}}\,y,$$
$$A_y=\frac{I\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\,(z^2+a^2)^{3/2}}\,x.$$

Вычисляя напряженность магнитного поля $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, находим окончательно $B_x=B_y=0$:

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=\frac{I}{2\varepsilon_0 c^2}\,\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

14.6. Полный заряд проводящей сферы связан с потенциалом V соотношением $Q=4\pi\varepsilon_0 Va$. Поэтому плотность поверхностных зарядов равна $\sigma=\varepsilon_0 V/a$. Для определения векторного потенциала воспользуемся общим интегральным представлением, учтя, однако, что возникающие при вращении сферы токи будут поверхностными и, следовательно, в условиях задачи надо заменить $\mathbf{j}dV$ на $(\sigma a\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{S})$, где $d\mathbf{S}$ — вектор, по величине

равный элементарной площадке dS и направленный перпендикулярно этой площадке. Векторный потенциал при этом равен

$$\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\mathbf{j}dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\boldsymbol{\omega}\times\oint\frac{d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right).$$

Преобразуя поверхностный интеграл в объемный по теореме Гаусса, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int\frac{dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\mathbf{E}_0,$$

где вектор $\mathbf{E}_0$ — напряженность поля равномерно заряженного шара

$$\mathbf{E}_0=\begin{cases}\dfrac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}, & r<a,\\ \dfrac{a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}, & r>a.\end{cases}$$

Отсюда

$$\mathbf{A}=\begin{cases}\dfrac{\sigma a}{3\varepsilon_0 c^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}), & r<a,\\ \dfrac{\sigma a^4}{3\varepsilon_0 c^2}\dfrac{(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}{r^3}, & r>a.\end{cases}$$

Учитывая, что $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=2\boldsymbol{\omega}$, находим магнитное поле $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B}=\begin{cases}\dfrac{2V}{3c^2}\boldsymbol{\omega}, & r<a,\\ \dfrac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r})-\boldsymbol{\mu}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}, & r>a,\end{cases}$$

где

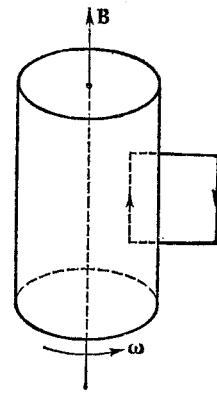
$$\boldsymbol{\mu}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{3}Va^3\boldsymbol{\omega}.$$

14.7. а) Если отрезком проволоки соединить ось цилиндра с его поверхностью, то, поскольку провод движется в магнитном поле, сила $q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ приведет к тому, что концы провода зарядятся. Зарядка будет происходить до тех пор, пока электрическое поле $\mathbf{E}$ не уравновесит $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, т. е. при $E(x)=\omega\cdot x\cdot B$. При этом разность потенциалов на концах провода будет равна $V=\int\limits_0^b E(x)\,dx=(\omega b^2/2)\,B$, где b — радиус цилиндра. Магнитное поле внутри цилиндра (вне его оно равно нулю) легко найти с помощью теоремы Стокса, выбирая контур интегрирования так, как

показано на рисунке: $B=\lambda\omega/2\pi\varepsilon_0 c^2$. Отсюда ответ:

$$V=\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.$$

б) Пусть в нашем распоряжении имеется очень чувствительный вольтметр, с помощью которого можно замерять *разности потенциалов* в 10^{-10} *в*. Из найденного выражения для V следует, что величина V тем выше, чем больше λ—заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра. Пусть плотность поверхностных зарядов σ на цилиндре достаточно велика, скажем такая же, как на проводящей сфере с радиусом в $a=1$ *м*, заряженной до потенциала в $V_0=10^6$ *в*. Тогда $\sigma=\varepsilon_0 V_0/a$ и $\lambda=2\pi\varepsilon_0 V_0 b/a$.
Подставляя это значение λ в выражение для V и учитывая, что $v=\omega\cdot b$, где $\omega=10^{-4}$ *сек*$^{-1}$, найдем $b=[(2c^2a/\omega^2)\,(V/V_0)]^{1/3}=1200$ *м*, что нереально.



6

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

К главе 15. ***Векторный потенциал***

15.1. а) На границе между двумя средами нормальная составляющая магнитного поля должна быть непрерывной (это условие является следствием уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$). Так как внутри сверхпроводника $\mathbf{B}=0$, то на его поверхности нормальная составляющая магнитного поля также равна нулю, т. е. поле снаружи сверхпроводника везде касательно к поверхности последнего — магнитные силовые линии огибают сверхпроводник.

б) Магнитное поле в любой точке A, расположенной над сверхпроводником, можно найти с помощью метода изображений (см. рисунок)

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2,$$

где

$$\mathbf{B}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{3\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_1)-\boldsymbol{\mu}_1\cdot R_1^2}{R_1^5}\right],$$

$$\mathbf{B}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{3\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_2\cdot\boldsymbol{\mu}_2)-\boldsymbol{\mu}_2\cdot R_2^2}{R_2^5}\right].$$

в) Вращательный момент, действующий на диполь, равен

$$\mathbf{M}=\boldsymbol{\mu}_1\times\mathbf{B}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{3\boldsymbol{\mu}_1\times\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0\cdot\boldsymbol{\mu}_2)}{R_0^5}-\frac{(\boldsymbol{\mu}_1\times\boldsymbol{\mu}_2)}{R_0^3}\right].$$

Для определения равновесных углов θ вычислим «механическую» энергию диполя в магнитном поле, создаваемом сверхпроводником

$$U_{\text{мех}}=-(\boldsymbol{\mu}_1\cdot\mathbf{B}_2)=\frac{\mu^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0^3}(\cos 2\theta-3\cos^2\theta).$$

Определяя равновесные значения θ из условия $\partial U/\partial\theta=0$, найдем $\theta=0,\ \pi/2,\ 3\pi/2,\ \pi$. Для найденных значений углов энергия магнитного диполя равна

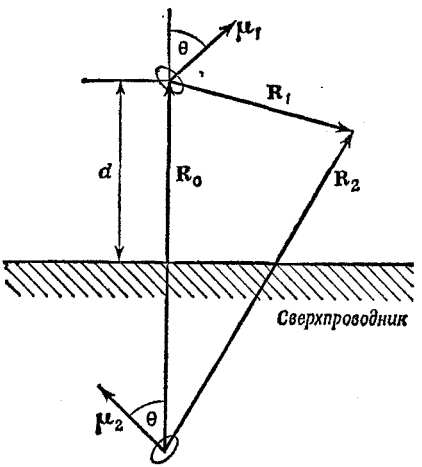
$$U_{\theta=0}=U_{\theta=\pi}=-\frac{2\mu^2}{R_0^3},\qquad U_{\theta=\pi/2}=U_{\theta=3\pi/2}=-\frac{\mu^2}{R_0^3}.$$

Следовательно, при $\theta=0,\pi$ равновесие будет устойчивым, а при $\theta=\pi/2$, $3\pi/2$ — неустойчивым.

г) Сила, действующая на магнитный диполь, определяется выражением $F=-\operatorname{grad} U_{\text{мех}}$. При фиксированном θ сила действует в направлении, перпендикулярном поверхности сверхпроводника, и равна по величине

$$F=-\frac{3\mu^2}{R_0^4}(\cos 2\theta-3\cos^2\theta).$$

При устойчивом равновесии, т. е. при $\theta=0,\pi$, $F=3\mu^2/8d^4$. Сила будет отталкивать диполь от поверхности сверхпроводника.



главе 17. ***Закон индукции***

17.1. Применяя теорему Стокса и считая поле $\mathbf{B}$ однородным внутри цилиндра, легко найти

$$E_t=-\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Мгновенное ускорение следует определить из уравнения движения: $m\mathbf{w}=q_e[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$. Так как в начальный момент времени скорость заряда равна нулю, то $\mathbf{w}=(q_e/m)\,\mathbf{E}_t=-(q_e r/2m)(\partial\mathbf{B}/\partial t)$. Ускорения в точках P_1 и P_3 по величине равны $q_e a(\partial B/\partial t)/2m=1{,}32\cdot10^{20}$ *см/сек*^{2} и противоположны по направлению. Ускорение в точке P_2 равно нулю.

17.2. Магнитный поток через полукольцо равен $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$, где α — угол, который плоскость полукольца образует с силовыми линиями: $S = \pi r^2/2$ — площадь полукольца. Наведенная э. д. с. $\mathcal{E}$ и ток в цепи при этом равны

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{B\pi r^2\omega}{2}\sin\omega t \quad \text{и} \quad I = \frac{B\pi r^2\omega\sin\omega t}{2R_M}.$$

Следовательно, амплитуды э. д. с. и тока равны

$$\mathcal{E}_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2\ \omega}{2} \quad \text{и} \quad I_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2\omega}{2R_M}.$$

17.3. При $R \gg a$ поле, создаваемое витком (*1*), равно

$$B = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{R})\,\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3},$$

где $\boldsymbol{\mu} = I\pi a^2\mathbf{n}_1$; $\mathbf{n}_1$ — единичный вектор нормали к плоскости витка (*1*). Если ввести $\mathbf{n}_2$ — аналогичный вектор для витка (*2*), то магнитный поток через второй виток равен

$$\Phi = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_2) = \frac{I(\pi a^2)^2}{R^3}\left[(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) - \frac{3(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}_1)(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}_2)}{R^2}\right].$$

Так как $\mathbf{n}_1 \| \mathbf{R}$, то, введя угол α, который вектор $\mathbf{n}_2$ образует в момент времени t с векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{R}$, найдем наведенную в витке (*2*) э. д. с.

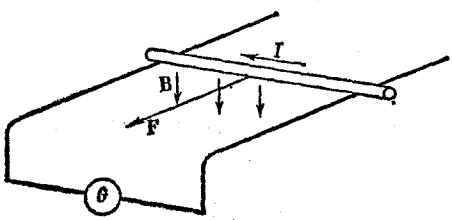
$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{2I}{R^3}(\pi a^2)^2\,\omega\sin\omega t.$$

17.4. а) Провод движется равноускоренно. Действительно, из закона Ампера сила, действующая на провод, равна IBd. Решая уравнение движения для провода с начальным условием $v(t)|_{t=0} = 0$, получаем $v = (IBd/m)\,t$.

б) Если цепь обладает сопротивлением r_0, то, пренебрегая полем, создаваемым током, находим

$$Ir_0 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathcal{E} - vBd.$$

Так как провод движется равномерно, то действующая на него сила (сила Ампера) равна нулю. Отсюда $I = 0$ и, следовательно, $v_{\text{стац}} = \mathcal{E}/d\cdot B$.



в) Ток равен нулю.

17.5. Электрическая энергия цепи с двумя катушками дается выражением [см., например, «Лекции», вып. 6, стр. 70, формула (17.38)]

$$U=\frac{1}{2}\mathscr{L}_1 I_1^2+\frac{1}{2}\mathscr{L}_2 I^2{}_2-\mathfrak{M}I_1 I_2,$$

где I_1, I_2—токи в катушках; $\mathfrak{M}$—коэффициент взаимной индукции. Поскольку по условию задачи $I_1=I_2=I$, то электрическую энергию цепи можно представить в виде $U=\frac{1}{2}\mathscr{L}I^2$, где $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2-2\mathfrak{M}$. Если витки одной катушки перемотать в другую сторону, то изменится знак у $\mathfrak{M}$.

17.6. а) Напряженность магнитного поля внутри кабеля найдем с помощью теоремы Стокса, учтя, что в силу симметрии задачи силовыми линиями магнитного поля будут концентрические окружности. В каждой точке силовой линии радиуса r напряженность магнитного поля равна $B=I/2\pi\varepsilon_0 c^2 r$. Чтобы найти индуктивность кабеля, определим энергию магнитного поля $U=(\varepsilon_0 c^2/2)\int B^2 dV$, приходящуюся на единицу длины кабеля [см. «Лекции», вып. 6, стр. 74, формула (17.48)]. Разделим объем между цилиндрами на цилиндрические слои толщиной dr и учтем, что объем такого слоя, расположенного на расстоянии r от оси кабеля, равен $dV=2\pi r\,dr$, после чего найдем

$$U=\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2\int_a^b\frac{2\pi r\,dr}{r^2}=\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2\cdot 2\pi\ln\frac{b}{a}.$$

Приравнивая это выражение величине $\frac{1}{2}\mathscr{L}I^2$, найдем индуктивность, приходящуюся на единицу длины кабеля:

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\ln\frac{b}{a}.$$

б) В этом случае напряженность магнитного поля B при $a<r<b$ равна найденной в пункте (а). С помощью теоремы Стокса найдем, что для $0<r<a$ $B=Ir/2\pi\varepsilon_0 c^2 a^2$. Вычислим далее энергию магнитного поля во внутреннем проводе, приходящуюся на единицу длины. Поступая так же, как в пункте (а), получаем

$$U_1=\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2\frac{2\pi}{4a}.$$

Складывая это выражение с U_1 и приравнивая сумму величине $\frac{1}{2}\mathscr{L}I^2$, находим

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4}\right].$$

Если $b \gg a$, то из найденного выражения для $\mathscr{L}$ следует, что результат слабо зависит от характера распределения тока по сечению центрального провода.

17.7. а) Напряженность магнитного поля внутри тороидальной катушки легко найти по теореме Стокса, если в качестве стоксовой поверхности взять поверхность, «натянутую» на окружность радиуса r. Для $b < r < b + a$ находим

$$B = \frac{NI}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r},$$

где N — число витков обмотки, I — сила тока в обмотке. Далее вычислим энергию магнитного поля внутри тороидальной катушки. Интегрируя по объему тороида, найдем

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int B^2 dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{NI}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2 2\pi a \ln\frac{b+a}{b}.$$

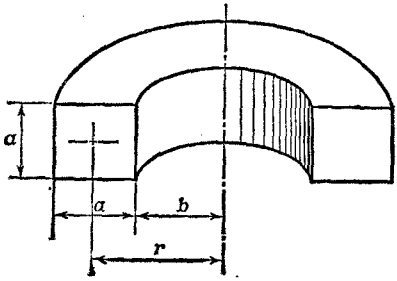
Приравнивая U величине $^1/_2\mathscr{L}I^2$, окончательно находим

$$\mathscr{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right).$$

б) Для определения взаимной индукции системы, состоящей из тороидальной катушки и прямолинейного провода, вычислим Φ_0 — магнитный поток, создаваемый проводом через поперечное сечение тороида. Так как напряженность магнитного поля $\mathbf{B}$, создаваемая прямолинейным проводником на расстоянии r от него, равна $B = I_1/2\pi\varepsilon_0 c^2 r$ (силовые линии поля B представляют собой концентрические окружности), то магнитный поток через один виток тороидальной катушки равен

$$\Phi_0 = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{I_1 a}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right),$$

где I_1 — сила тока в проводе. Поскольку в катушке N витков, поток нужно умножить на N. Следовательно,



э. д. с. в катушке дается выражением

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_0}{dt} = -\frac{aN}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\frac{dI_1}{dt} = +\mathfrak{M}\frac{dI_1}{dt}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{M} = -\frac{aN}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right).$$

в) Из пунктов (а) и (б) следует, что $L/|\mathfrak{M}| = N$.

17.8. а) Как показано в гл. 14, § 5 «Лекций», напряженность магнитного поля, создаваемого витком *1* на большом расстоянии от него, ведет себя как электрическое поле диполя с моментом, перпендикулярным плоскости витка, т. е.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}_1\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3}\right],$$

где $\boldsymbol{\mu}_1 = I\pi a^2\mathbf{n}_1$. Так как вблизи витка *2* поле $\mathbf{B}$ можно считать однородным, магнитный поток через него вектора $\mathbf{B}$ равен $\pi a^2\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_2$. Вычисляя э.д.с., наведенную в витке *2*, находим

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{r^3} - 3\frac{(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n}_1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2)}{r^5}\right]. \qquad (1)$$

Через углы α_1 и α_2 (см. рисунок к условию задачи, стр. 356) взаимная индукция выражается следующим образом:

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r^3}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2) - 3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right].$$

б) Сила взаимодействия витков [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.39)] равна $\mathbf{F} = -I^2\nabla\mathfrak{M}_{12}$. Используя выражение (1), находим

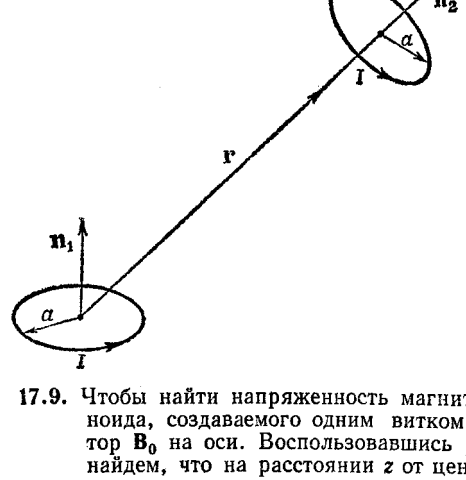
$$\mathbf{F} = \frac{(\pi a^2 I)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\left(\frac{3(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)}{r^4} - 15\frac{(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{r})}{r^6}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{3}{r^5}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{n}_2(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r})\right)\right].$$

Составляющая силы, перпендикулярная плоскости рисунка, равна нулю. Проекции силы $\mathbf{F}$ на линию, соединяющую центры витков, $F_\parallel$ и на перпендикулярную к ней ось (на рисунке направим эту ось вверх) $F_\perp$ соответственно равны

$$F_\parallel = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^4}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2) - 3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right],$$

$$F_\perp = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^4}\sin(\alpha_1+\alpha_2).$$

в) Если изменить направление токов сразу в двух витках, то сила не изменится, если изменить его только в одном витке, то сила изменит знак, так как при этом изменится направление одного из векторов $\mathbf{n}$ на противоположное.



17.9. Чтобы найти напряженность магнитного поля на оси соленоида, создаваемого одним витком, определим вначале вектор $\mathbf{B}_0$ на оси. Воспользовавшись результатом задачи 14.5, найдем, что на расстоянии z от центра витка напряженность магнитного поля на его оси равна по величине

$$B_0 = \frac{Ir_2^2}{2\varepsilon_0 c^2 [z^2 + r_2^2]^{3/2}}.$$

При этом вектор $\mathbf{B}_0$ направлен вдоль оси витка. Чтобы найти напряженность магнитного поля в центре соленоида, создаваемого всеми его витками, проинтегрируем найденное выражение по длине соленоида, введя линейную плотность тока IN/l. Заменяя в приведенном выше выражении для B_0 силу тока на $INdz/l$ и интегрируя по z от $-l/2$ до $+l/2$, находим величину магнитного поля в центре соленоида:

$$B = \frac{INr_2^2}{2\varepsilon_0 c^2 l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{[z^2 + r_2^2]^{3/2}} = \frac{IN}{\varepsilon_0 c^2 l} \frac{l/2r_2}{[1 + (l/2r_2)^2]^{1/2}}.$$

Нетрудно видеть, что, если длина соленоида стремится к бесконечности, выражение для B переходит в найденное в «Лекциях» (вып. 5, гл. 13, § 5) выражение для магнитного поля внутри длинного соленоида. В силу того что $r_2 \gg r_1$, поле B в окрестности петли можно считать однородным (т. е. в области $0 < r < r_1$). Вычисляя магнитный поток

через петлю $\Phi = B \cdot \pi r_1^2$, находим

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{N\pi r_1^2}{\varepsilon_0 c^2 l} \frac{l/2r_2}{\sqrt{1+(l/2r_2)^2}}.$$

Вычислим теперь $\mathfrak{M}_{21}$. Так как размеры витка малы, то его можно рассматривать как магнитный диполь. Поле магнитного диполя равно (см. «Лекции», вып. 6)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(3\frac{\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right),$$

где $\boldsymbol{\mu} = I_1 \pi r_1^2 \mathbf{e}_z$; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный по оси соленоида (ее выбираем в качестве оси z); I_1 — сила тока в витке. Вычислим поток вектора $\mathbf{B}$ через один виток соленоида, расположенный на расстоянии z от центра витка:

$$\Phi_c = \int (Be_z)\, dS = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{r_2} 2\pi\rho\, d\rho \left[\frac{z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{I_1 \pi r_1^2}{2\varepsilon_0 c^2} \frac{r_2^2}{(r_2^2+z^2)^{3/2}}.$$

Если сила тока в витке меняется, то в рассматриваемом витке соленоида наводится э.д.с., равная $\mathcal{E} = -\partial\Phi/\partial t$. Чтобы найти полную э.д.с., мы должны просуммировать найденное нами выражение по всем виткам. Вводя плотность витков $N dz/l$ и интегрируя по z от $-l/2$ до $l/2$, находим

$$\mathcal{E} = -\frac{dI_1}{dt} \frac{N\pi r_1^2 \cdot r_2^2}{2\varepsilon_0 c^2 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2+r_2^2)^{3/2}} = \mathfrak{M}_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Вычисляя найденный интеграл, получаем выражение для $\mathfrak{M}_{21}$, которое, как нетрудно видеть, совпадает с $\mathfrak{M}_{12}$, т. е. $\mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}_{12}$.

17.10. Если пренебречь магнитным полем, создаваемым проводом, то наведенная в нем э.д.с. равна

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -Bvl.$$

Отсюда $I = \mathcal{E}/R = -Bvl/R = -10^{-3}\,a$. Если не пренебрегать магнитным полем, создаваемым движущимся проводником, ток в цепи уменьшится. Ответ по величине не изменится, если магнит, создающий поле B, будет двигаться со скоростью v в ту же сторону, что и провод, так как в этом случае можно считать, что сопротивление R движется вправо со скоростью v и, следовательно, магнитный поток через цепь будет меняться с прежней скоростью. Так как размеры

цепи уменьшаются со временем, коэффициент самоиндукции также будет уменьшаться.

17.11. Механическая сила, действующая между витками, и момент сил, действующий на виток $Б$, определяются выражениями (см. «Лекции», вып. 6, стр. 71)

$$F = -I_A \cdot I_Б \frac{\partial \mathfrak{M}_{АБ}}{\partial d} \quad \text{и} \quad M = -I_A I_Б \frac{\partial \mathfrak{M}_{АБ}}{\partial \alpha},$$

где d — расстояние между центрами витков; α — угол, который составляет нормаль к витку $Б$ с осью, проходящей через эти центры; $\mathfrak{M}_{АБ}$ — коэффициент взаимной индукции витков. Чтобы найти последний, можно воспользоваться результатом задачи **17.8** (см. формулу для $\mathfrak{M}_{12}$);

$$\mathfrak{M}_{АБ} = \frac{(\pi a^2)^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2\cos\alpha}{d^3}.$$

Найдем далее силу тока в витке $Б$:

$$I_Б = \frac{\mathcal{E}_Б}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi_{АБ}}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{M}_{АБ}}{R}\frac{dI_A}{dt} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{4K_0 t\cos\alpha}{Rd^3}.$$

Следовательно,

а) $M = 4\pi^4 a^8 K_0^2 t^3 \sin 2\alpha/(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2 d^6 R$.

Если $\alpha = 0$, то $M = 0$.

б) $F = 24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3/(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2 d^7 R$.

Витки отталкиваются друг от друга.

в) Если самоиндукцией витков не пренебрегать, то величина силы тока $I_Б$ будет меньше. Вместе с этим уменьшатся величины F и M.

г) Ответ к пункту (а) не изменится: при $\alpha = \pi/2$ $\sin 2\alpha = 0$ и, следовательно, момент сил, действующих на виток $Б$, будет по-прежнему равен нулю. Ответ к пункту (б) изменится: при $\alpha = \pi/2$ $\cos\alpha = 0$ и сила, действующая на виток $Б$, обратится в нуль.

К главе 20. Решение уравнений Максвелла в пустом пространстве

20.1. а) Волновое уравнение, которому должно удовлетворять электрическое поле $\mathbf{E}$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Для компоненты α ($\alpha = x, y, z$) это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение $E_\alpha = E_{0\alpha}\exp[i(\omega t - kx)]$ и выполняя дифференцирование, находим $[k^2 - (\omega^2/c^2)]E_\alpha = 0$. Так как $\omega = ck$, это уравнение выполняется для любого α.

б) Представим α-ю компоненту вектора $\mathbf{E}_0$, которая, вообще говоря, комплексна в виде $E_{0\alpha} = E'_{0\alpha}\exp(i\varphi_\alpha)$, где $E'_{0\alpha}$ — модуль комплексного числа $E_{0\alpha}$, а φ_α — его аргумент. Тогда $E_\alpha = E'_{0\alpha}\exp[i(\omega t - kx + \varphi_\alpha)]$. Следовательно, вещественную часть E_α можно записать в таком виде: $E'_{0\alpha}\cos(\omega t - kx + \varphi_\alpha)$. Найдем далее уравнение движения точки, для которой фаза волны $\varphi = \omega t - kx$ имеет некоторое фиксированное значение. Очевидно, в этой точке компоненты напряженности электрического поля волны будут иметь определенные значения, равные $E_\alpha = E'_{0\alpha}\cos(\varphi + \varphi_\alpha)$. Определяя x, находим этот закон

$$x = \frac{\omega}{k}t - \varphi = ct - \varphi.$$

Выбранная точка, таким образом, движется в положительном направлении оси x со скоростью c.

в) Подействуем оператором ∇ на функцию

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp[i(\omega t - kx)]:$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cdot\nabla e^{i(\omega t - kx)} = \mathbf{E}_0(-ik\mathbf{e}_x)e^{i(\omega t - kx)} = -ik\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{E}.$$

Следовательно, действие оператора ∇ на подобные функции сводится к простому умножению их на вектор $-ik\mathbf{e}_x$. Действие оператора $\partial/\partial t$ сводится к умножению таких функций на число $i\omega$.

г) Пусть напряженности электрического и магнитного полей зависят от t и x синусоидально.

Тогда в комплексном виде можно записать $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp[i(\omega t - kx)]$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\exp[i(\omega t - kx)]$. Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла в пустоте

$$(\nabla\cdot\mathbf{E}) = 0,\ (\nabla\times\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B},\ (\nabla\cdot\mathbf{B}) = 0,\ (\nabla\times\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

получаем

$$(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{E}) = 0,\ k(\mathbf{e}_x\times\mathbf{E}) = \omega\mathbf{B},\ (\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{B}) = 0,\ k(\mathbf{e}_x\times\mathbf{B}) = -\frac{\omega}{c^2}\mathbf{E}.$$

Определяя $\mathbf{E}$ из последнего уравнения и подставляя выражение для $\mathbf{E}$ во второе уравнение, находим

$$-k\mathbf{e}_x\times(\mathbf{e}_x\times\mathbf{B}) = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{B}, \qquad (1)$$

так как $\mathbf{e}_x\times(\mathbf{e}_x\times\mathbf{B}) = \mathbf{e}_x(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x)$. Учитывая, что, согласно третьему из полученных уравнений, $\mathbf{e}_x\mathbf{B} = 0$, а также что $(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x) = 1$, из (1) находим $[k^2 - (\omega^2/c^2)]\mathbf{B} = 0$. Отсюда следует, что $\omega = ck$.

д) Электрическое поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 \exp \pm [i(\omega t+kx)]$ описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x. Действие оператора ∇ на подобную функцию сводится к умножению ее на вектор $\pm ike_x$, а действие оператора $\partial/\partial t$—к умножению этой функции на число $\pm i\omega$. При этом уравнения Максвелла и связь между ω и k будут такими же, какими они были найдены в пункте (г) данной задачи.

20.2. Рассмотрим установившийся процесс. Напряженность электрического поля электромагнитной волны, падающей на зеркало, в неподвижной системе координат можно представить в виде $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 \cos(\omega t-kx)$, а волны, отраженной от зеркала, в той же системе координат можно представить в виде $\mathbf{E}'=\mathbf{E}_0' \cos(\omega' t+k'x)$. На прямой линии $x=vt$, где v—скорость зеркала, должны выполняться следующие граничные условия: $\mathbf{E}+\mathbf{E}'=0=\mathbf{E}_0 \cos(\omega t-kx)+\mathbf{E}_0' \cos(\omega' t+k'x)$. Это возможно лишь при $\mathbf{E}_0=-\mathbf{E}_0'$ и $\omega t-kx=\omega' t+k'x$. Подставляя $x=vt$ и $k=\omega/c$, $k'=\omega'/c$, получаем

$$\omega'=\omega\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)\right]\Big/\left[1+\left(\frac{v}{c}\right)\right].$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить, используя преобразования Лоренца.

К главе 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами

21.1. Согласно формулам (21.18) и (21.25) «Лекций» (вып. 6):

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\mathbf{p}+(r/c)\dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c}\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^3}.$$

Вводя обозначение $\mathbf{p}^*=\mathbf{p}(t-(r/c))+(r/c)\dot{\mathbf{p}}(t-(r/c))$ и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\dot{\mathbf{p}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{x_\alpha}{rc}\dot{\mathbf{p}},$$

находим

$$\nabla\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}^*}{r^3}-\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2}-\frac{3(\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r_2}\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r^3}.$$

Подставляя найденные выражения в $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ и учитывая, что

$$\frac{r^2\ddot{\mathbf{p}}}{c^2}-\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2}=\frac{1}{c^2}\mathbf{r}\times(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{r}),$$

находим

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\mathbf{p}^*-\frac{3(\mathbf{p}^*\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^2}+\frac{1}{c^2}\,\mathbf{r}\times\ddot{(\mathbf{p}\times\mathbf{r})}\right],$$

что эквивалентно выражению (21.26) «Лекций», вып. 6, стр. 155.

21.2. Обозначим через r'_+ и r'_- «запаздывающие радиусы-векторы» $\left(r'_\pm=x,\ y,\ z\mp(d/2)\cos\omega t'\right)$ от положительного и отрицательного зарядов. Согласно рисунку в условии задачи (стр. 360),

$$r'^2_\pm=r^2+\left(\frac{d}{2}\cos\omega t'\right)^2\mp rd\cos\theta\cos\omega t',$$

где $t'=t-r'_\pm/c$. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядами $+q$ и $-q$ в точке P, согласно уравнению (21.1) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 142), равна

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{\mathbf{e}_{r'_+}}{r'^2_+}-\frac{\mathbf{e}_{r'_-}}{r'^2_-}\right)-2\left(\frac{\mathbf{e}_{r'_+}}{cr'^2_+}\frac{dr'_+}{dt}-\frac{\mathbf{e}_{r'_-}}{cr'^2_-}\frac{dr'_-}{dt}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{r'_+}\frac{d\mathbf{e}_{r'_+}}{dt}-\frac{1}{r'_-}\frac{d\mathbf{e}_{r'_-}}{dt}\right)+\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2\mathbf{e}_{r'_+}}{dt^2}-\frac{d^2\mathbf{e}_{r'_-}}{dt^2}\right)\right].$$

Воспользуемся тем, что точка P находится на расстоянии $r\gg d$ от диполя. Это позволяет во всех вычислениях ограничиваться лишь линейными по d членами. В таком приближении

$$r'_\pm=r\mp\frac{d}{2}\cos\theta\cos\left(\omega t-\frac{r}{c}\right),$$

$$\mathbf{r}'_\pm=\mp\,\mathbf{e}_z\frac{d}{2}\cos\left(\omega t-\frac{r}{c}\right)+\mathbf{e}_r r,$$

$$\frac{dr'_\pm}{dt}=\pm\frac{d\omega}{2}\cos\theta\sin\left(\omega t-\frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{d\mathbf{e}_{r'_\pm}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}'_\pm}{r'_\pm}=\pm\frac{\mathbf{e}_z}{r}\frac{d\omega}{2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\mp$$
$$\mp\frac{\mathbf{e}_r}{r_\pm}\frac{d\omega}{2}\cos\theta\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{d^2\mathbf{e}_{r'_\pm}}{dt^2}=\pm\frac{\mathbf{e}_z}{r}\frac{d\omega^2}{2}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\mp$$
$$\mp\frac{\mathbf{e}_r}{r}\frac{d\omega^2}{2}\cos\theta\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Убедимся, что векторы $de_{r\pm}/dt$ и $d^2e_{r\pm}/dt^2$ направлены по $\mathbf{e}_\theta$. Вычислим скалярные произведения

$$\left[\mathbf{e}_r\left(de_{r\pm}/dt\right)\right] \text{ и } \left[\mathbf{e}_r\left(d^2e_{r\pm}/dt^2\right)\right].$$

Учитывая, что $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta = \cos\theta$, находим, что эти скалярные произведения равны нулю. Модули векторов $de_{r\pm}/dt$ и $d^2e_{r\pm}/dt^2$ найдем, вычислив скалярные произведения этих векторов на $\mathbf{e}_\theta$. Учитывая, что $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta) = -\sin\theta$, имеем

$$\frac{de_{r\pm}}{dt} = \mp\, \mathbf{e}_\theta \frac{d\omega}{2r} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$\frac{d^2e_{r\pm}}{dt^2} = \mp\, \mathbf{e}_\theta \frac{d\omega^2}{2r} \sin\theta \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

После несложных преобразований окончательно находим

$$\mathbf{E} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left\{2\mathbf{e}_r \cos\theta\left[\frac{1}{r^3}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \mathbf{e}_\theta \sin\theta\left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.$$

Определяя из этого выражения E_φ, E_θ и E_r, приходим к приведенному в условии задачи результату.

21.3. В «Лекциях», вып. 5, гл. 14, § 5 отмечалось, что электрическое поле статического диполя и поле постоянного магнитного диполя одинаковы по виду, хотя и удовлетворяют разным уравнениям Максвелла

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}.$$

Это происходит от того, как отмечалось в «Лекциях», что дипольные поля возникают, когда мы находимся далеко от всех токов и зарядов. Тогда в большой части пространства уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ одинаковы: ротор и дивергенция этих полей равны нулю. Но нетрудно убедиться, что подобная симметрия уравнений Максвелла имеет место и в общем случае переменных полей. Действительно, в далеких от зарядов и токов точках пространства уравнения Максвелла однородны:

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \qquad (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0,$$
$$(\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

и в силу этого обстоятельства имеет место симметрия

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{E} \text{ (электр. диполь)} — \mathbf{B} \text{ (магн. диполь)},$$
$$\mathbf{B} \text{ (электр. диполь)} — — \mathbf{E} \text{ (магн. диполь)}.$$

Поэтому, заменяя в выражениях для электрического и магнитного полей осциллирующего диполя, найденных в задаче 21.2,

$$\mathbf{p}=qd\cos\omega t\cdot\mathbf{e}_z \text{ на } \boldsymbol{\mu}=\mathbf{e}_z\pi a^2 i_0\cos\omega t,$$

находим

$$B_\varphi=0,$$

$$B_\theta=\frac{\pi a^2 i_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\sin\theta\left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{1}{r^3}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],$$

$$B_r=\frac{2\pi a^2 i_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cos\theta\left[\frac{1}{r^3}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],$$

$$\mathbf{E}=c\,(\mathbf{B}\times\mathbf{e}_r).$$

21.4. а) Из рисунка к условию задачи (стр. 361) видно, что (для удобства обозначим $d/2=a$)

$$r_1^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta,\quad r_2^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta.$$

При $r\gg a$ $r_{1,\,2}\approx r\mp a\cos\theta$. Разлагая в ряд по $\omega a/c\ll 1$

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\pm\frac{a\omega}{c}\cos\theta\right]\approx$$

$$\approx\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\mp\frac{a\omega}{c}\cos\theta\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\ldots$$

и учитывая, что при $r\gg a$

$$(r\mp a\cos\theta)^{-1}\approx\frac{1}{r}\left[1\pm\left(\frac{a\cos\theta}{r}\right)\right],$$

получаем требуемое выражение для φ.

б) Заметим, что если использовать результат пункта (а), то можно записать

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{Q_0\omega d}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Если воспользоваться уравнением $\nabla\mathbf{A}=-(1/c^2)(\partial\varphi/\partial t)$, которое в задаче сводится к уравнению $(1/c^2)(\partial\varphi/\partial t)=-(\partial A_z/\partial z)$, то мы видим, что в написанном выше выражении для $(1/c^2)(\partial\varphi/\partial t)$ функция, стоящая после оператора $\partial/\partial z$, есть не что иное, как $-A_z$.

в) Вычисляя $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ с помощью найденных в пунктах (а) и (б) выражений для φ и $\mathbf{A}$, находим ($p=Q_0 d$)

$$\mathbf{E}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\cos\theta\left[\left(\frac{3}{r^3}-\frac{\omega^2}{c^2 r}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cdot\mathbf{e}_r+$$
$$+\mathbf{e}_z\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r}-\frac{1}{r^3}\right)\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\omega}{cr^2}\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.$$

Умножая $\mathbf{E}$ скалярно на $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r)=\cos\theta\mathbf{e}_r-\mathbf{e}_z$, находим выражения для E_φ, E_θ, E_r, приведенные в условии задачи 21.2. При этом $c\mathbf{B}=\mathbf{e}_r\times\mathbf{E}$.

21.5. а) Так как $i=dp/dt$, где p — дипольный момент единицы длины, то, интегрируя (константу интегрирования можно положить равной нулю), находим

$$p=-\frac{i_0}{\omega}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\omega t.$$

Дипольный момент элементарного диполя длиной Δz отсюда равен

$$\Delta p=\left(\frac{i_0}{\omega}\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\omega t\right)\Delta z.$$

б) Векторный потенциал в волновой зоне равен

$$A_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\int\limits_{-\lambda/4}^{\lambda/4} i_0\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\sin\omega\left(t-\frac{r'}{c}\right)dz,$$

где $r'=\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta}$.

При $r\gg\lambda/2$, т. е. при $r\gg c/\omega$, получаем $r'\approx r-z\cos\theta$. Далее, представляя

$$\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\omega z}{c}\cos\theta\right]=$$
$$=\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\cos(kz\cdot\cos\theta)+\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin(kz\cos\theta),$$

где $k=2\pi/\lambda$, и подставляя в формулу для векторного потенциала, простым интегрированием находим A_z:

$$A_z=\frac{2i_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}\,\frac{\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение совпадает с найденным векторным потенциалом **A** в пункте (б) задачи **21.4**, если только положить

$$p_0 = -\frac{2i_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\omega \sin^2\theta}.$$

Поэтому мы можем воспользоваться решением к этой задаче [см. пункт (в) задачи **21.4**] и найти электрическое поле в волновой зоне

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi\varepsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Аналогично для магнитного поля находим, что в волновой зоне существенна лишь компонента B_φ, причем она равна $B_\varphi = E_\theta/c$.

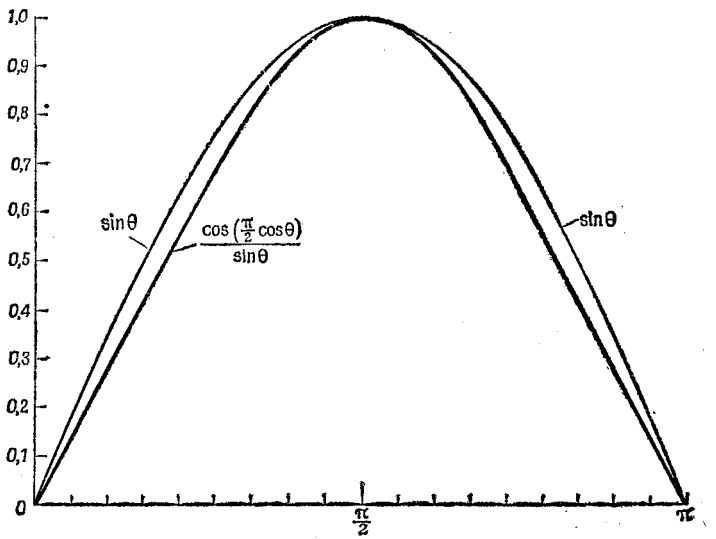
в) Зависимость E_θ от угла θ имеет вид для антенны

$$E_\theta \sim \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta},$$

для одного диполя

$$E_\theta \sim \sin\theta.$$

Характер этой зависимости для антенны и одного диполя примерно одинаковый (см. рисунок).



21.6. Электрическое и магнитное поля движущегося заряда описываются потенциалами Льенара-Вихерта

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 [\mathbf{R}' - (\mathbf{v}'\cdot\mathbf{R}')/c]}, \quad \mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 [\mathbf{R}' - (\mathbf{v}'\cdot\mathbf{R}')/c]},$$

где $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{v}'$ берутся для времени $t' = t - R'/c$.

а) Так как при движении по окружности в любой момент времени $\mathbf{v} \perp \mathbf{R}$, то в центре круга имеем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

б) Аналогично

$$\mathbf{A} = \frac{q\mathbf{v}'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a},$$

где $v'[t'] = v[t - (a/c)]$. Считая момент времени, когда заряд находится в точке P, за начало отсчета времени, находим

$$v'_x = -v \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

$$v'_y = v \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

$(\omega = v/a)$, т. е.

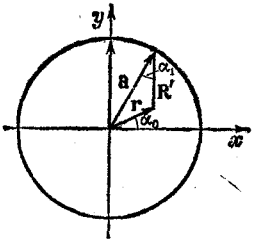
$$A_x = -\frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

$$A_y = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

в) Определим потенциалы в точке, расположенной вблизи центра круга ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор этой точки, см. рисунок). Обозначая через α_0 угол между $\mathbf{r}$ и осью x, запишем

$$R'^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\omega t' - \alpha_0),$$

$$t' = t - \frac{R'}{c}.$$



Наша конечная цель — вычислить производные от потенциалов в начале координат. Поэтому, выражая R' как функцию t, x, y, удержим лишь члены первого порядка по r

$$R' \approx a - r\cos\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = a - x\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \\ - y\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Выразим теперь через x, y, t скалярное произведение $(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{R}')$. Как видно из рисунка, $(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{R}') = -va\sin\alpha_1$. Имеем

$$\cos\alpha_1 = \frac{a^2 + R'^2 - r^2}{2aR'}.$$

Если подставить сюда только что найденное выражение для R', мы найдем $\cos\alpha_1 = 1$, однако если учесть члены второго порядка, то в конце концов получим

$$\sin\alpha_1 = \frac{r}{a}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = \\ = \frac{x}{a}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{y}{a}\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Теперь у нас есть все, чтобы найти $\varphi(x, y, t)$:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[a - \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\left(x + \frac{v}{c}y\right) - \right. \\ \left. - \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\left(y - \frac{v}{c}x\right)\right]^{-1}.$$

Воспользовавшись формулой $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$, вычислим напряженность электрического поля [напомним, что вектор $\mathbf{A}$ в центре круга найден в пункте (б)]. Имеем

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) + \frac{v}{c}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\right],$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c}\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\right].$$

Легко убедиться, что при $t = 0$, т. е. когда заряд находится в точке P, $E_x < 0$ и $E_y < 0$. Таким образом, поле направлено вниз от оси x (а если бы был справедлив «запаздывающий закон Кулона», оно было бы направлено выше оси x).

Определим теперь векторный потенциал **A**. Для этого необходимо найти $v'(t, x, y)$. Имеем

$$v'_x = -v\sin\omega t' =$$

$$= -v\sin\left[\omega t - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{ac}\cos\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right)\right] \approx$$

$$\approx -v\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v^2}{ac}\,x\cos^2\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) -$$

$$- \frac{v^2}{ac}\,y\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

$$v'_y = v\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) -$$

$$- \frac{v^2 x}{ac}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v^2 y}{ac}\sin^2\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Отбрасывая в выражении для A_x члены, пропорциональные x, а в A_y — пропорциональные y (и те и другие не дают вклада в магнитное поле), находим

$$A_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[-\frac{v\sin(\omega t - v/c)}{a - y\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{vy}{c}\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{v^2 y}{ac}\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\right],$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{v\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)}{a - x\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) + \frac{vx}{c}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{v^2 x}{ac}\sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right)\right].$$

Нетрудно убедиться, что только z-компонента магнитного поля отлична от нуля. Для нее

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a^2}.$$

Таким образом, магнитное поле в центре круга не зависит от времени. Оно равно полю в центре витка с током, таким, что $\int \mathbf{I}\cdot d\mathbf{S} = qv$.

Легко понять почему: представьте, что заряд «размазан» вдоль «проволоки» [$\rho = \rho(s)$] и движется как целое; ясно, что лишь в той части витка, где $\rho \neq 0$, ток отличен

от нуля [$I(s) = \rho(s)\, v$], так что

$$\int \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = v \int \rho(s)\, dS = vq.$$

г) Формула (21.1) для напряженности электрического поля (см. «Лекции», вып. 6, гл. 21, стр. 143) принимает в нашем случае вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{a^2} + \frac{1}{ac}\frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{e}_{r'}}{dt^2}\right].$$

С другой стороны,

$$e'_x = -\cos\left(\frac{v}{a}t - \frac{v}{c}\right),$$

$$e'_y = -\sin\left(\frac{v}{a}t - \frac{v}{c}\right).$$

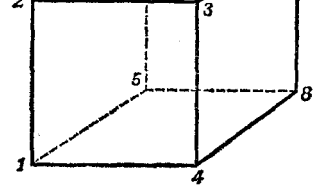
Дифференцируя, получаем для E_x и E_y формулы, совпадающие с уже найденными. Вычислим магнитное поле

$$cB_z = e'_x E_y - e'_y E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a^2},$$

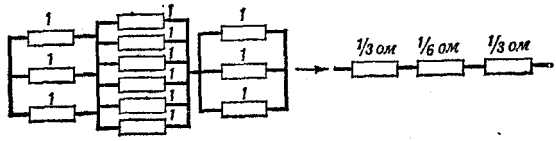
что опять совпадает с прежним результатом.

К главе 22. ***Цепи переменного тока***

22.1. а) Пусть ток втекает в узел *1* (см. рисунок), а вытекает из узла *7*. В силу симметрии системы потенциалы точек

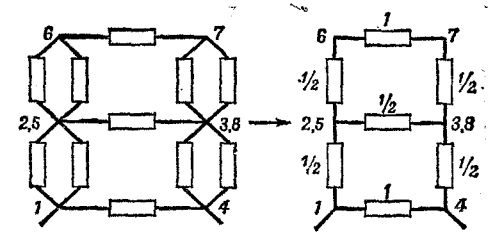


2, *5*, *4* равны. Также равны между собой потенциалы точек *6*, *3* и *8*. В итоге получим электрическую схему следующего типа:

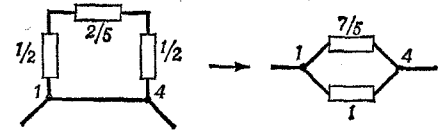


Сопротивление при таком подсоединении равно $^5/_6$ *ом*.

б) Пусть подсоединение сделано так, что ток втекает в узел *1*, а вытекает из узла *4*. Тогда равны потенциалы узлов *2* и *5*. Объединим эти узлы. Соответственно равны потенциалы узлов *3* и *8*. Их также объединяем. В итоге получим следующую плоскую эквивалентную схему:

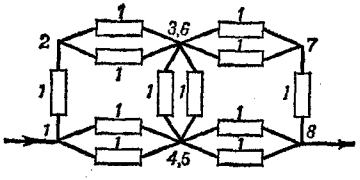


Преобразуем ее

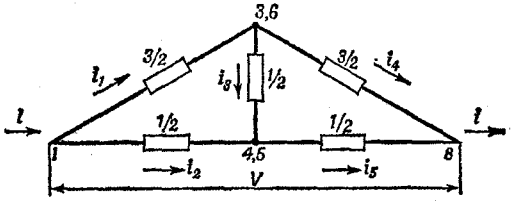


При данном подсоединении сопротивление схемы равно $^7/_{12}$ *ом*.

в) Пусть ток втекает теперь в узел *1*, а вытекает из узла *8*. В этом случае равны попарно потенциалы точек *3* и *6*, а также *4* и *5*. Объединим соответствующие узлы попарно. Получится следующая эквивалентная схема:



Эта схема может быть представлена в виде



Сопротивление такой цепи (см. «Лекции», вып. 6, стр. 180) нельзя вычислить, пользуясь лишь формулами для параллельных и последовательных сопротивлений. Чтобы найти ее сопротивление, запишем уравнение Кирхгофа для токов и напряжений (см. схему):

$$i_1+i_2=i, \qquad i_4+i_5=i,$$
$$i_1-i_3-i_4=0, \qquad \frac{3}{2}i_1+\frac{i_3}{2}-\frac{i_5}{2}=0,$$
$$i_2+i_3-i_5=0, \qquad \frac{3}{2}i_4-\frac{i_3}{2}-\frac{i_5}{2}=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим $i_1=i_4=i/4$, $i_2=i_5=3i/4$, $i_3=0$. Отсюда для напряжения V между узлами *1* и *8* получаем

$$V=\frac{i_2+i_5}{2}=\frac{3i}{4},$$

т. е. сопротивление цепи равно $^3/_4$ *ом*. Другие возможные подсоединения сводятся к одному из рассмотренных выше.

22.2. а) Легко найти полный импеданс цепи. Он равен

$$Z(\omega)=i\omega L\frac{2-\omega^2CL}{1-\omega^2CL}.$$

Если теперь ввести комплексную э.д.с. $\hat{V}=V_0e^{i\omega t}$, то комплексный ток равен

$$\hat{I}=\frac{\hat{V}}{Z(\omega)}=\frac{\hat{V}(1-\omega^2CL)}{i\omega L(2-\omega^2CL)}.$$

Определяя вещественную часть этого выражения, находим силу тока в цепи

$$I=V_0\frac{1-\omega^2CL}{\omega(2-\omega^2CL)}\sin\omega t.$$

б) В этом случае каждая из индуктивностей станет равной $L+\mathfrak{M}$ и ответ будет таким, как был найден выше, но L перейдет в $L+\mathfrak{M}$, а C в $C/(1+\omega^2\mathfrak{M}C)$. Действительно, если обозначить через i_C и i_L токи через параллельно соединенные емкость и индуктивность L, так что $i_C+i_L=I$, где I — полный ток в цепи, то

$$\hat{V}=L\frac{d\hat{I}}{dt}+\mathfrak{M}\frac{d\hat{i}_L}{dt}+L\frac{d\hat{i}_L}{dt}+\mathfrak{M}\frac{d\hat{I}}{dt}$$

и, следовательно,

$$\hat{V}=i\omega(L+\mathfrak{M})\hat{I}+i\omega(L+\mathfrak{M})\hat{i}_L.$$

С другой стороны, согласно закону Кирхгофа, для напря-

жений имеем

$$\hat{i}_C\left(-\frac{i}{\omega C}\right)=i\omega L\hat{i}_L+i\omega\mathfrak{M}\hat{I}=i\omega L\hat{i}_L+i\omega\mathfrak{M}(\hat{i}_C+\hat{i}_L);$$

отсюда

$$-\hat{i}_C\left(\frac{1+\omega^2\mathfrak{M}C}{\omega C}\right)=\hat{i}_L\omega(L+\mathfrak{M}).$$

Из последнего уравнения видно, что уравнения такие же, как и в пункте (а), но

$$L\longrightarrow L+\mathfrak{M},$$
$$C\longrightarrow\frac{C}{1+\omega^2\mathfrak{M}C}.$$

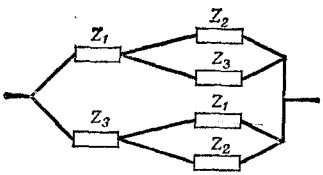
Учитывая это, находим комплексный ток в цепи

$$\hat{I}=\frac{\hat{V}(1-\omega^2LC)}{i\omega(L+\mathfrak{M})[2-\omega^2C(L-\mathfrak{M})]}.$$

Вещественная часть этого выражения дает нам искомую силу тока в цепи

$$I(t)=V_0\frac{(1-\omega^2LC)\sin\omega t}{\omega(L+\mathfrak{M})[2-\omega^2C(L-\mathfrak{M})]}.$$

22.3. а) Схему можно представить в следующем виде:



$$Z_1=i\omega\mathscr{L},$$
$$Z_2=R,$$
$$Z_3=\frac{1}{i\omega C}.$$

Импеданс верхней цепи при этом равен

$$Z'=\frac{z}{Z_2+Z_3},$$

а импеданс нижней $Z''=z/(Z_1+Z_2)$, где
$Z=Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3$. Полный импеданс цепи равен
$Z=Z'Z''/(Z'+Z'')=Z/(Z_1+2Z_2+Z_3)$.
Подставляя в последнее выражение Z_i, с учетом того, что $R^2=\mathscr{L}/2C$, получаем $Z=R$.

б) Убедимся, что при $\omega=\omega_c=\sqrt{1/\mathscr{L}C}$ энергия, выделяемая на Z', равна энергии, выделяемой на Z''. Для этого необходимо, чтобы $|Z'|=|Z''|$ и $\operatorname{Re}Z'=\operatorname{Re}Z''$. Из найденных в пункте (а) выражений для Z' и Z'' следует, что должно выполняться равенство $|Z_2+Z_3|=|Z_1+Z_2|$, т. е. $\sqrt{R^2+(1/\omega^2C^2)}=\sqrt{R^2+\omega^2\mathscr{L}^2}$. Следовательно, $\omega^2=1/\mathscr{L}C$.

22.4. Введем комплексную э. д. с. $\hat{V}=E_0\exp(i\omega t)$. Сначала рассмотрим случай, когда источник э. д. с. не имеет внутреннего сопротивления. Тогда импеданс цепи равен $Z(\omega)=$ $=1/2\,[R-(i/\omega C)]$. Комплексный ток в цепи $\hat{I}=\hat{V}/Z=$ $=2E_0\exp(i\omega t)/[R-(i/\omega C)]$. Потенциалы точек a и b равны соответственно $\hat{V}_a=\hat{V}_c+1/2\hat{I}R$ и $\hat{V}_b=\hat{V}_c-i\hat{I}/2\omega C$. Разность этих потенциалов можно представить в виде

$$\hat{V}_{ab}=\hat{V}_a-\hat{V}_b=E_0e^{i(\omega t+\varphi)},\quad \text{где } \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\omega CR}.$$

Качественно зависимость фазы от частоты изображена на рисунке.

Если источник э. д. с. имеет внутреннее сопротивление $R/10$, то полный импеданс цепи будет равен

$$Z(\omega)=\frac{R}{10}+\frac{1}{2}\left(R-\frac{i}{\omega C}\right).$$

Рассуждая, как раньше, найдем

$$\hat{V}_{ab}=\frac{E_0e^{i\omega t}\,\frac{1}{2}\left(R+\frac{i}{\omega C}\right)}{\frac{R}{10}+\frac{1}{2}\left(R-\frac{i}{\omega C}\right)};$$

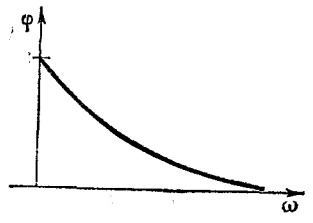
если ввести фазы

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\quad\text{и}\quad\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3\omega CR}\right),$$

то разность потенциалов можно представить в виде

$$\hat{V}_{ab}=E_0\sqrt{\frac{R^2+(1/\omega C)^2}{(3/5R)^2+(1/\omega C)^2}}\,e^{i(\omega t+\varphi+\varphi_1)}.$$

В этом случае амплитуда разности потенциалов перестает зависеть от частоты лишь при очень малых или очень больших частотах. Качественный ход фазы разности потенциалов остается прежним.



22.5. При параллельном соединении импеданс цепи находится следующим образом: $Z^{-1}=R^{-1}+i\,[\omega C-(1/\omega L)]$. Вводя комплексную э. д. с. $\hat{V}=V_0\exp(i\omega t)$ и определяя силу тока в цепи $I=\hat{V}/Z\,(\omega)$, находим выражение для амплитуды силы тока

$$I_0=V_0\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

При $\omega_0^2=1/LC$ наступает «резонанс»: при этом условии сила тока в цепи минимальна и равна (по амплитуде) $I_{\text{мин}}=V_0/R$. Примерный характер «резонансной» кривой изображен на фиг. 1. При малых ω ток в цепи течет в основном через индуктивность, а при больших — через емкость. В момент резонанса ток течет лишь через активное сопротивление.

Определим ширину резонансной кривой подобно тому, как это делалось при анализе механических колебаний (см. «Лекции», вып. 2, гл. 23). Для I_0^2 имеем

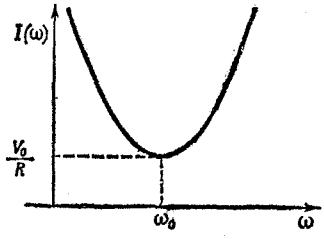
$$I_0^2=V_0^2\left[R^{-2}+\left(\omega C-\frac{1}{L\omega}\right)^2\right]=\frac{V_0^2C^2}{\omega^2}\left[\frac{\omega^2}{(RC)^2}+(\omega^2-\omega_0^2)^2\right],$$

где $\omega_0^2=1/LC$. Если $1/RC\ll\omega_0$, т. е. $R\gg\sqrt{L/C}$, эту формулу можно упростить (таким же образом, как и в гл. 23)

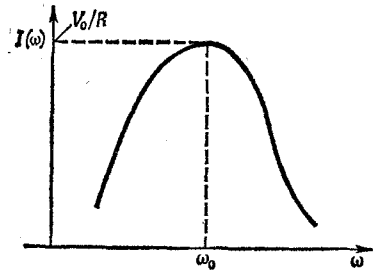
$$I_0^2=V_0^2\cdot 4C^2\left[(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{4\,(RC)^2}\right].$$

Ширину резонансной кривой определим по частотам, при которых I_0^2 в два раза больше, чем в резонансе. Находим $\Delta\omega=1/RC$. При последовательном соединении элементов импеданс цепи $Z\,(\omega)=R+i\,[\omega L-(1/\omega C)]$, а амплитуда тока

$$I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Резонансная кривая в этом случае имеет вид, изображенный на фиг. 2. Зависимость I_0^2 от частоты здесь равна

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{\frac{L^2}{\omega^2}\left[\frac{R^2}{L^2}\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2\right]},$$

где опять-таки $\omega_0^2 = 1/LC$. При $R/L \ll \omega_0$, т. е. $R \ll \sqrt{L/C}$,

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{4L^2\left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2\right]}.$$

Ширина резонансной кривой равна $\Delta\omega = R/L$. Если $R = k\sqrt{L/C}$ для параллельного соединения и $R = 1/k\sqrt{L/C}$ для последовательного, то ширина резонансной кривой в обоих случаях в k раз меньше резонансной частоты.

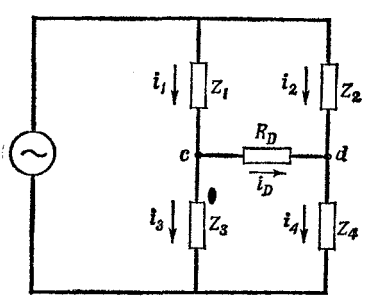
22.6. Представим схему так, как изображено на рисунке. При этом $Z_1 = i\omega\mathscr{L} + R_a$, $Z_2 = R$, $Z_3 = R$, $Z_4 = 1/(i\omega C + R_b^{-1})$. Очевидно,

$$\begin{aligned} &i_1Z_1 + i_DR_D - i_2Z_2 = 0,\\ &i_3Z_3 - i_4Z_4 - i_DR_D = 0,\\ &i_D = i_1 - i_3 = i_4 - i_2. \end{aligned}$$

Условие компенсации имеет вид $i_D = 0$. Отсюда $i_1 = i_3$ и $i_2 = i_4$ и, следовательно, $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$, т. е. $(i\omega\mathscr{L} + R_a)/(i\omega C + R_b^{-1}) = R^2$. Определяя вещественную и мнимую части, находим

$$R^2 = \frac{R_aR_b + \omega^2LCR_b^2}{1 + \omega^2C^2R_b^2}, \qquad \mathscr{L} = CR_aR_b.$$

Из этих выражений следует, что $R^2 = R_aR_b$ и, следовательно, $\mathscr{L} = CR^2$.



22.7. Условие сбалансировки для моста в этой задаче выводится точно так же, как и в задаче **22.6**, но здесь надо лишь считать, что

$$Z_1 = r_1, \qquad Z_3 = r_2,$$
$$Z_2 = R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}, \qquad Z_4 = -\frac{iR_2/\omega C_2}{(R_2 - i/\omega C_2)}.$$

Так как при сбалансировке $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$, то

$$r_1 \frac{-(iR_2/\omega C_2)}{R_2 - \dfrac{i}{\omega C_2}} = r_2\left(R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}\right).$$

Приравнивая по отдельности вещественные и мнимые части этого уравнения, находим условия баланса:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

и

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{C_2}{C_1}\right) + \left(\frac{R_1}{R_2}\right).$$

22.8. Импеданс цепи легко находится:

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}.$$

а) Пусть $RC = L/R$. Тогда $Z = R$. Следовательно, амплитуда тока в этом случае не зависит от частоты.

б) Падение напряжения на RC-паре, когда $RC = L/R$, равно

$$\hat{U} = Z_1\hat{I} = \frac{Z_1V_0}{R}e^{i\omega t},$$

где $Z_1 = R/(1 + i\omega CR)$.

Представляя отношение Z_1/R в виде $Z_1/R = e^{-i\varphi}/\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}$, где $\operatorname{tg}\varphi = \omega CR$, находим искомую разность фаз

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,\omega CR = \operatorname{arc\,tg}\,\frac{\omega L}{R}.$$

22.9. Суммарная емкость m одинаковых последовательно соединенных конденсаторов равна $C_{\text{общ}} = C/m$. Импеданс цепи Z равен сумме сопротивлений: емкостного $Z_c = -im/\omega C$, индуктивного $Z_1 = i\omega L$ и активного сопротивления, равного R. Если э.д.с. представить в комплексной форме, то из закона Ома следует

$$\hat{U} = \frac{V_0 \exp(i\omega t)}{\{R + i[\omega L - (m/\omega C)]\}}.$$

Вещественную часть силы тока можно представить в виде $\operatorname{Re}\hat{I} = I_0\cos(\omega t - \varphi)$, где $I_0 = V_0/\sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}$.

Поэтому

1. $P=I_0^2R/2=V_0^2R/2\sqrt{R^2+[\omega L-(m/\omega C)]^2}$. Мощность, выделяемая на активном сопротивлении, максимальна при m, удовлетворяющем условию $\omega L-(m/\omega C)\approx 0$, т. е. при $m\approx\omega^2CL$.

2. а) При заданных значениях параметров цепи $m=2$.

   б) Падение напряжения на емкости равно $\hat{U}_C=\hat{I}Z_C$. Максимальное мгновенное напряжение на емкости с учетом выражения для тока I_0 равно $\mathrm{Re}\,\hat{U}_C=V_0m/\omega C\sqrt{R^2+[\omega L-(m/\omega C)]^2}$, а на сопротивлении R равно $U_R=I_0R$: $U_R=V_0R/\sqrt{R^2+[\omega L-(m/\omega C)]^2}$. Когда $m=2$, $U_R=\mathrm{Re}\,\hat{U}_C=100$ *в*.

К главе 23. ***Полые резонаторы***

23.1. Будем считать, что вся емкость резонансной полости определяется узким зазором, отдавая, разумеется, себе отчет в том, что это лишь некоторое приближение. С другой стороны, предположим, что вся индуктивность полости определяется ее тороидальной частью, причем напряженность магнитного поля во всех точках сечения полости, расположенных на расстоянии r от ее оси, одинакова. Если зазор рассматривать как плоский конденсатор, то его емкость равна $C=\varepsilon_0\pi a^2/d$. Найдем далее напряженность магнитного поля, выбрав контур в виде окружности радиуса r, ось которой совпадает с осью симметрии полости, и воспользуемся тем, что

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=2\pi r\,B=\frac{I}{\varepsilon_0c^2},$$

где I — полный ток, который течет через конденсатор. Имеем $B=I/2\pi\varepsilon_0c^2r$. Определим $W=\frac{1}{2}LI^2$ — энергию магнитного поля в тороидальной части полости:

$$W=\frac{\varepsilon_0c^2}{2}\int B^2dV=\frac{I^2}{2}\,\frac{(b-a)}{2\pi\varepsilon_0c^2}\ln\frac{b}{a}.$$

Отсюда находим $L=[(b-a)/2\pi\varepsilon_0c^2]\ln(b/a)$ и, следовательно, получаем искомое выражение для резонансной частоты

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\frac{2dc^2}{a^2(b-a)\ln(b/a)}}.$$

Так как при охлаждении полости все ее размеры d, a, b уменьшатся в одинаковое число раз, резонансная частота не изменится.

К главе 24. ***Волноводы***

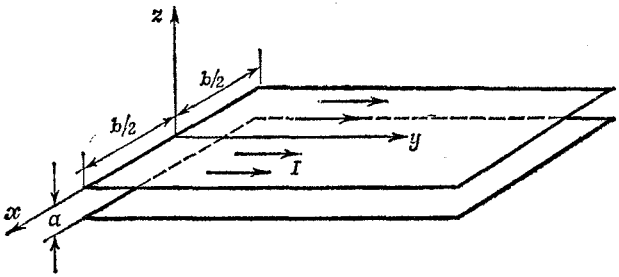
24.1. Вывод этих уравнений см. «Лекции», вып. 6, гл. 24, стр. 220.

24.2. Напряженность магнитного поля бесконечной проводящей плоскости, по которой течет ток, вычислялась в задаче **14.1.** Она равна $B=i/2\varepsilon_0 c^2$, где i — поверхностная плотность тока. Поскольку в нашем случае $a \ll b$, то можно, пренебрегая краевыми эффектами, воспользоваться этой формулой. Тогда поле между пластинами равно $B=I/b\varepsilon_0 c^2$, а напряженность магнитного поля вне пластин равна нулю. Энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины линии, равна

$$\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int B^2 dV = \frac{I^2 a}{2(\varepsilon_0 c^2)^2 b}.$$

Эта энергия равна $\frac{1}{2}L_0 I^2$, следовательно, индуктивность единицы длины $L_0 = a/\varepsilon_0 c^2 b$. Емкость плоского конденсатора равна $C=\varepsilon_0 A/d$, где A — площадь пластин конденсатора, а d — расстояние между ними. Таким образом, емкость, приходящаяся на единицу длины линии, равна $C_0=\varepsilon_0 b/a$. Отсюда импеданс линии равен

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{a}{\varepsilon_0 bc}.$$



24.3. Направим ось z вдоль оси цилиндра. Величина напряженности электрического поля в рассматриваемом случае зависит только от z и r (r — расстояние от оси цилиндра). Зависимость от z необходима для того, чтобы поле на торцах секции, где оно параллельно проводящей поверхности, обращалось в нуль, а зависимость от r при фиксированном z можно найти, используя теорему Гаусса. Имеем $E=f(z)/r$, где $f(z)$ — некоторая подлежащая определению функция z. Компоненты напряженности электрического поля равны $E_x=(x/r^2)f(z)$, $E_y=(y/r^2)f(z)$. Для каждой из этих компонент справедливо уравнение

$$\Delta E_x + \frac{\omega^2}{c^2}E_x = 0,$$

которое после подстановки в него выражения для E_x сводится к

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)=0.$$

Решением такого уравнения являются синусы и косинусы. Нам нужно такое решение, которое обращается в нуль при $z=0$ и $z=l$. Очевидно, таким решением будет $\sin(\pi nz/l)$, где n — целое число. Стало быть $\omega=\pi nc/l$. Для самой низкой моды $n=1$ и $\omega=\pi c/l$.

Емкость единицы длины такой линии передачи равна (см. решение к задаче **6.5**) $C=2\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$, а индуктивность единицы длины (см. решение к задаче **17.6**) равна $\mathscr{L}=(\ln b/a)/2\pi\varepsilon_0c^2$. Отсюда частота $\omega_0=1/\sqrt{\mathscr{L}C}=c/l$. Эта частота в π раз меньше найденной выше минимальной собственной частоты резонатора.

24.4. а) Функция $E_0(x, z)$ должна обращаться в нуль при $x=0, a$ и $z=0, l$. Зависимость напряженности электрического поля от координат в прямоугольных сечениях описывается гармоническими функциями, поэтому для самой низкой частоты, для которой распределение поля имеет самый простой вид

$$E_0(x, z)=A\sin(\pi x/a)\sin(\pi z/l).$$

Подставляя $\mathbf{E}(x, z, t)=E_0(x, z)\exp(i\omega t)$ в уравнение Максвелла

$$\Delta E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0,$$

для самой низкой резонансной частоты находим

$$\omega=\pi c\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{l^2}}.$$

24.5. а) Напряжение в произвольной точке x в момент времени t есть суперпозиция падающей и отраженной волн: $\hat{V}(x, t)=\hat{V}_{\text{пад}}(x, t)+\hat{V}_{\text{отр}}(x, t)=A_1\exp[i(\omega t-kx)]+A_2\exp[i(\omega t+kx)]$, где $k=\omega/c$. Для $x=l$, $V(l, t)=0$, поэтому $A_1\exp(-ikl)+A_2\exp(ikl)=0$, т. е. $A_2=-A_1\exp(-2ikl)$. Для $x=0$, $V(0, t)=V_0\cos\omega t$, поэтому $V_0=A_1+A_2$. В итоге находим

$$A_1=\frac{V_0e^{ikl}}{2i\sin kl},\qquad A_2=-\frac{V_0e^{ikl}}{2i\sin kl}.$$

Таким образом,

$$V_{\text{пад}}(x, t)=\frac{V_0}{2\sin kl}\sin(\omega t-kx+kl),$$

$$V_{\text{отр}}(x, t)=\frac{V_0}{2\sin kl}\sin(\omega t+kx-kl).$$

Обратим внимание на то, что при $kl=\pi n$ (n — целое число) амплитуды волн, согласно нашим формулам, обращаются в бесконечность. Физически это означает наступление резонанса — частота источника сравнивается с одной из резонансных частот отрезка кабеля. Амплитуда колебаний при резонансе на самом деле безусловно конечна: величина ее определяется омическими потерями, которыми мы пренебрегли.

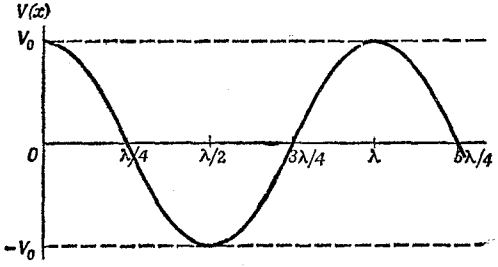
б) $V(x,\ t)=V_{\text{пад}}(x,\ t)+V_{\text{отр}}(x,\ t)=$
$=(V_0/\sin\ kl)\sin\ [k(l-x)]\ \cos\ \omega t$ при $l=5\pi c/2\omega=5\lambda/4$ ($\lambda=2\pi c/\omega$), $V(x,\ t)=V_0\cos\ (\omega x/l)\cos\omega t$. Амплитуда напряжения максимальна при $x=0$, $x=\lambda/2$, $x=\lambda$ (см. рисунок).

в) Пользуясь формулой (24.1) «Лекций» (вып. 6, стр. 220), находим

$$I(0)=0, \qquad I\left(x=\frac{l}{2}\right)=-V_0\sqrt{\frac{C_0}{2L_0}}\sin\omega t,$$

$$I(x=l)=V_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}\sin\omega t.$$

г) Так как поглощение отсутствует, средняя работа, производимая генератором, равна нулю [в этом можно убедиться также, вычислив среднее значение $I(0)V_0(0)$]. Поэтому и средний момент силы равен нулю.



24.6. Как и в предыдущей задаче, представим

$$V(x,\ t)=A_1e^{i(\omega t-kx)}+A_2e^{i(\omega t+kx)},$$

где $k=\omega\sqrt{LC}$. Для определения A_1 и A_2 имеем два условия: $V_0=A_1+A_2$ при $x=0$ и $V(l)/I(l)=Z_T$ при $x=l$. Так как

$$I(l)=I_+(l)+I_-(l)=\frac{V_+(l)}{Z_0}-\frac{V_-(l)}{Z_0}=\frac{1}{Z_0}\ (A_1e^{-ikl}-A_2e^{ikl}),$$

то условие при $x=l$ принимает вид

$$\frac{A_1e^{-ikl}+A_2e^{ikl}}{A_1e^{-ikl}-A_2e^{ikl}}Z_0=Z_T,$$

или

$$A_1\left(1-\frac{Z_T}{Z_0}\right)e^{-tkl}=-A_2\left(1+\frac{Z_T}{Z_0}\right)e^{tk}.$$

Мы имеем два уравнения для A_1 и A_2, поэтому находим эти величины, а затем силу тока при $x=0$

$$I(0)=I_+(0)+I_-(0)=\frac{1}{Z_0}(A_1-A_2)=$$

$$=\frac{V_0}{Z_0}\frac{1+i\frac{Z_T}{Z_0}\operatorname{tg}\omega l\sqrt{LC}}{i\operatorname{tg}l\omega\sqrt{LC}+\frac{Z_T}{Z_0}}.$$

Следовательно,

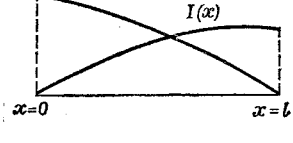
$$Z_s=\frac{V(0)}{I(0)}=iZ_0\frac{\operatorname{tg}\omega l\sqrt{LC}-i\frac{Z_T}{Z_0}}{1+i\frac{Z_T}{Z_0}\operatorname{tg}\omega l\sqrt{LC}}.$$

а) Если $Z_T=0$, то $Z_s=iZ_0\operatorname{tg}\omega l\sqrt{LC}$; $Z_s=0$ при $\omega l\sqrt{LC}=\pi n$, $Z_s=\infty$ при $\omega l\sqrt{LC}=\pi/2+\pi n$.

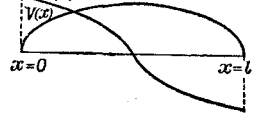
Частоты, удовлетворяющие этим условиям, отвечают разным собственным модам линии. Рассмотрим только самые низкие моды. Если $Z_T=0$, т. е. линия замкнута накоротко, напряжение на конце линии равно нулю. На фиг. 1 изображено распределение амплитуд напряжений и токов, когда $\omega l\sqrt{LC}=\pi/2$. Видно, что при $x=0$ ток равен нулю, что и означает $Z_s=\infty$. Фиг. 2 относится к случаю $\omega l\sqrt{LC}=\pi$. Здесь при $x=0$ обращается в нуль напряжение, т. е. $Z_s=0$.

б) Если $Z_T=\infty$, $Z_s=-iZ_0/\operatorname{tg}\omega l\sqrt{LC}$. Проанализировав этот случай аналогично предыдущему (только теперь при $x=l$ должен обращаться в нуль ток), можно понять, почему при $\omega\sqrt{LC}l=(\pi/2)+n\pi$, $Z_s=0$, а при $\omega\sqrt{LC}l=\pi n$, $Z_s=\infty$ (см. фиг. 2).

в) Если $Z_T=Z_0$, то $Z_s=Z_0$, т. е. линия эквивалентна бесконечной.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

24.7. На стыке двух передающих линий выполняются следующие условия «сшивки»:
для токов

$$I_{\text{пад}}+I_{\text{отр}}=I_{\text{прош}},$$

для напряжений

$$V_{\text{пад}}+V_{\text{отр}}=V_{\text{прош}}.$$

Используя тот факт, что

$$V_{\text{пад}}=Z_1 I_{\text{пад}}, \quad V_{\text{отр}}=-Z_1 I_{\text{отр}}, \quad V_{\text{прош}}=Z_2 I_{\text{прош}},$$

находим систему уравнений

$$\frac{V_{\text{пад}}}{Z_1}-\frac{V_{\text{отр}}}{Z_1}=\frac{V_{\text{прош}}}{Z_2},$$
$$V_{\text{пад}}+V_{\text{отр}}=V_{\text{прош}},$$

решая которую, получаем искомый ответ.

24.8. а) Найдем компоненты напряженности магнитного поля:

$$B_x=(\operatorname{rot}\mathbf{A})_x=k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)\, e^{i(\omega t-k_z z)},$$
$$B_y=(\operatorname{rot}\mathbf{A})_y=-k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y) e^{i(\omega t-k_z z)}$$
$$B_z=(\operatorname{rot}\mathbf{A})_z=0.$$

Магнитное поле действительно поперечно, так как $B_z=0$ (волна распространяется вдоль оси z). Легко убедиться, что найденное поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\mathbf{B}-(1/c^2)(\partial^2\mathbf{B}/\partial t^2)=0$. Проверим теперь выполнение граничных условий. Внутри идеального проводника, из которого, как мы считаем, сделаны стенки волновода, переменное магнитное поле должно отсутствовать (иначе возникли бы бесконечно большие индукционные токи). Так как силовые линии магнитного поля имеют вид замкнутых петель, то на стенках волновода должны быть отличны от нуля лишь тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{B}$. Но это так и есть на самом деле, поскольку $B_z=0$.

Определим вектор $\mathbf{E}$. С этой целью проинтегрируем уравнение $\operatorname{div}\mathbf{A}=-(1/c)(\partial\varphi/\partial t)$ и определим потенциал φ:

$$\varphi=\frac{k_z}{\omega}c \sin(k_x x)\sin(k_y y)\, e^{i(\omega t-k_z z)}.$$

Так как

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

то

$$E_z=\sin(k_x x)\sin(k_y y)\left[\frac{k_z^2}{\omega}c-i\omega\right]e^{i(\omega t-k_z z)},$$

$$E_x=-\frac{k_x k_z}{\omega}c\cos(k_x x)\sin(k_y y)\, e^{i(\omega t-k_z z)},$$

$$E_y=-\frac{k_y k_z}{\omega}c\sin(k_x x)\cos(k_y y)\, e^{i(\omega t-k_z z)}.$$

Электрическое поле также удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\mathbf{E}-(1/c^2)\,(\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2)=0$. Согласно граничным условиям, на стенках волновода должны быть равны нулю касательные составляющие, т. е. должно быть $E_y=0$ при $x=0$ и $x=a$, $E_x=0$ при $y=0$ и $y=b$ и $E_z=0$ на стенках волновода. Найденные выражения для компонент напряженности электрического поля удовлетворяют этим условиям.

б) В этом случае k_z — чисто мнимая величина, т. е. $k_z=-i\alpha$, где α — вещественное число. Но тогда B_x, $B_z\sim\exp(-\alpha z)$ и, следовательно, магнитное поле $\mathbf{B}$ затухает вдоль оси z.

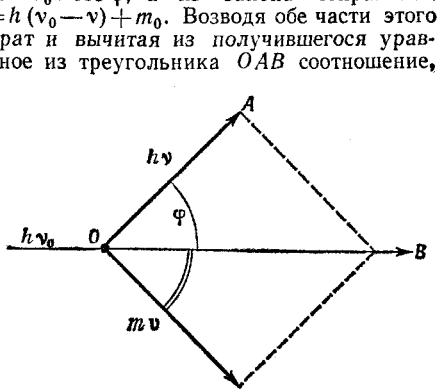
К главе 25. ***Электродинамика в релятивистских обозначениях***

25.1. $\varphi^2-\mathbf{A}^2=+A_\mu A_\mu$; $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}-\rho\varphi=-A_\mu J_\mu$, $\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

25.2. Начальные условия: электрон покоился (его энергия была равна m_0, а импульс — нулю), фотон налетал с энергией $h\nu_0$ и импульсом $h\boldsymbol{\nu}_0$. После соударения энергия электрона стала равна m, а импульс $m\mathbf{v}$, где $m=m_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Энергию фотона после соударения обозначим $h\nu$, а его импульс $h\boldsymbol{\nu}$. Напишем законы сохранения энергии и импульса

$$h\nu_0+m_0=h\nu+m,$$
$$h\boldsymbol{\nu}_0=h\boldsymbol{\nu}+m\mathbf{v}.$$

(В релятивистских обозначениях это можно написать как $\sum_{\text{налет. част.}}\mathbf{P}_\mu=\sum_{\text{разлет. част.}}\mathbf{P}_\mu$.) Из треугольника OAB находим $m^2v^2=h^2\nu_0^2+h^2\nu^2-2h^2\nu_0\nu\cos\varphi$, а из закона сохранения энергии следует $m=h(\nu_0-\nu)+m_0$. Возводя обе части этого соотношения в квадрат и вычитая из получившегося уравнения ранее найденное из треугольника OAB соотношение,



несложными преобразованиями находим

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{\left[1+\frac{h\nu_0}{m_0}\left(1-\cos\varphi\right)\right]},$$

где φ — угол отклонения направления распространения фотона от первоначального.

25.3. Будем исходить из того факта, что квадрат 4-векторного импульса есть инвариант $P_\mu P_\mu = \text{inv}$, т. е. $E^2 - \mathbf{p}^2 = \text{inv}$, где E и $\mathbf{p}$ — полная энергия и импульс системы. Квадрат четырехмерного импульса системы сохраняется в результате реакции и не зависит от системы координат. В лабораторной системе (до реакции) $p_0 = m_e - + E_\gamma$ (E_γ — энергия фотона), а трехмерный импульс равен импульсу фотона, т. е. по модулю равен E_γ. Квадрат четырехмерного импульса в лабораторной системе: $(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2$. Запишем теперь четырехмерный импульс в системе центра масс. Трехмерный импульс здесь по определению равен нулю. Временна́я же компонента равна $(me^-/\sqrt{1-v_1^2}) + + \left(m_e+/\sqrt{1-v_2^2}\right) + \left(m_e-/\sqrt{1-v_3^2}\right)$, где m_e- и m_{e+} — соответственно массы электрона и позитрона ($m_{e-}=m_{e+}=m_e$).

Итак,

$$(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2 = \left(\frac{m_{e-}}{\sqrt{1-v_1^2}} + \frac{m_{e+}}{\sqrt{1-v_2^2}} + \frac{m_{e-}}{\sqrt{1-v_3^2}}\right)^2.$$

Порог реакции будет соответствовать нулевым скоростям электронов и позитрона $v_1 = v_3 = v_2 = 0$. Отсюда $2E_\gamma^{\text{мин}} m_e + + m_e^2 = 9m_e^2$. Следовательно, $E_\gamma^{\text{мин}} = 4m_e = 2{,}04$ *Мэв*.

25.4. Обозначим через P_μ суммарный 4-вектор импульса частиц m и M до соударения в лабораторной системе координат. Очевидно, P_μ $(\sqrt{p^2+M^2}+m, \mathbf{p})$. Обозначим через P'_μ 4-вектор импульса образовавшейся частицы в системе координат, в которой она покоится. Очевидно, P'_μ $(m_1, 0)$. Тогда из инвариантности квадрата 4-вектора импульса и из закона сохранения импульса следует, что $P_\mu^2 = P_\mu'^2$ или

$$\left(p^2+M^2+2m\sqrt{p^2+M^2}+m^2\right) - p^2 = m_1^2.$$

Отсюда находим массу покоя новой частицы: $m_1^2 = m^2 + M^2 + 2m\sqrt{p^2+M^2}$. Поскольку импульс частицы $\mathbf{p}$ до соударения связан с ее скоростью соотношением

$p = Mv/\sqrt{1-v^2}$, то окончательно находим

$$m_1 = \sqrt{m^2 + M^2 + \frac{2mM}{\sqrt{1-v^2}}}.$$

В нерелятивистском случае, т. е. при $v^2 \ll 1$, $m_1 = m + M$. Скорость новой частицы в лабораторной системе координат связана с импульсом $\mathbf{p}'$ и энергией $\mathcal{E}'$ частицы соотношением: $\mathbf{V} = \mathbf{p}'/\mathcal{E}'$. Согласно закону сохранения импульса, $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, а согласно закону сохранения энергии, $\mathcal{E}' = m + \sqrt{p^2 + M^2}$. Отсюда

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}}{M + m\sqrt{1-v^2}}.$$

В нерелятивистском случае ($v^2 \ll 1$) получаем известный результат

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}}{M+m}.$$

К главе 26. ***Лоренцевы преобразования полей***

26.1. В четырехмерной форме результат вычисления $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = (1/\varepsilon_0) j_\mu$, где j_μ (ρ, $\mathbf{j}$)—4-вектор плотности тока.

26.2. Искомым вектором является 4-вектор с компонентами $f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$, где $F_{\mu\nu}$—тензор электромагнитного поля, а j_ν—4-вектор плотности тока. Временная компонента этого вектора $f_4 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$ равна мощности, затрачиваемой электрическим полем на изменение движения зарядов.

26.3. Используя соотношения, приведенные в табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 273), легко показать, что $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}')$ и $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$, т. е. эти величины инвариантны. Поскольку $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$—инвариант, то если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ образуют острый угол в одной системе координат, т. е. если $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) > 0$, то и во всех других инерциальных системах этот угол будет острым. Оба рассмотренных инварианта равны нулю для электромагнитной волны в пустоте.

26.4. Выберем систему координат так, что ось x параллельна вектору $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Система K' с осями $x' \parallel x$, $y' \parallel y$, $z' \parallel z$ движется с искомой скоростью v. В системе K' $(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') = 0$. Распишем это уравнение в компонентах

x: $E'_y B'_z - E'_z B'_y = 0$,

y: $E'_x B'_z - E'_z B'_x = 0$,

z: $E'_x B'_y - E'_y B'_x = 0$.

Выразим в этих уравнениях $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в системе K с помощью лоренцевых преобразований (см. соответствующие формулы преобразования в табл. 26.2 «Лекции», вып. 6, стр. 273).

Легко показать, что

$$(1+v^2)(E_yB_z-E_zB_y)-v(B_z^2+B_y^2+E_z^2+E_y^2)=0,$$
$$E_x(B_z+vE_y)-B_x(E_z-vB_y)=0,$$
$$E_x(B_y-vE_z)-B_x(E_y+vB_z)=0.$$

Поскольку система K выбрана так, что $E_x=0$ и $B_x=0$, два последних уравнения удовлетворяются автоматически, из первого уравнения следует, что

$$\frac{v}{1+v^2}=\frac{(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_x}{E^2+B^2}.$$

26.5. Рассмотрим систему координат K', в которой заряд покоится. В этой системе координат $\mathbf{B}'=0$, $\mathbf{E}'=q\mathbf{R}'/4\pi\varepsilon_0R'^3$. Используя формулы преобразования для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при лоренцевых преобразованиях, находим, что в лабораторной системе K (см. табл. 26.2; в формулах этой таблицы нужно только заменить v на $-v$):

$$E_x=\frac{qx'}{4\pi\varepsilon_0R'^3},\qquad E_y=\frac{qy'}{4\pi\varepsilon_0R'^3\sqrt{1-v^2}},$$

$$E_z=\frac{qz'}{4\pi\varepsilon_0R'^3\sqrt{1-v^2}},$$

$$B_x=0,\qquad B_y=-\frac{qvz'}{4\pi\varepsilon_0c^2R'^3\sqrt{1-v^2}},$$

$$B_z=\frac{qvy'}{4\pi\varepsilon_0c^2R'^3\sqrt{1-v^2}},$$

где $R'^2=[(x-vt)^2+(y^2+z^2)(1-v^2)]/(1-v^2)$ (согласно лоренцевым преобразованиям $x'=(x-vt)/\sqrt{1-v^2}$, $y'=y$, $z'=z$). Подставляя выражение для R' в выражения для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и вводя обозначение

$$R^{*2}=(x-vt)^2+(1-v^2)(y^2+z^2),$$

находим

$$\mathbf{E}=(1-v^2)\frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\varepsilon_0R^{*3}},\qquad \mathbf{B}=\mathbf{v}\times\mathbf{E}.$$

Если ввести θ—угол между векторами $\mathbf{r}_p\{x-vt,\ y,\ z\}$ и $\mathbf{v}$, то $R^{*2}=r_p^2(1-v^2\sin^2\theta)$. Поэтому векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}=\frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\varepsilon_0r_p^3}\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

и

$$\mathbf{B}=\frac{q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{r}_p)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_p^3}\,\frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

26.6. См. решение к задаче **26.5.**

26.7. а) В системе координат K, жестко связанной с проводом, напряженность электрического поля равна нулю в силу электрической нейтральности провода. Магнитное же поле легко найти:

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{2\mathbf{I}\times\mathbf{e}_r}{r},$$

где $\mathbf{I}$ — вектор силы тока [по поводу этой формулы см., например, «Лекции», вып. 5, стр. 263, формула (13.18)]. Если ось x направить вдоль вектора $\mathbf{I}$, то $r=\sqrt{y^2+z^2}$ и

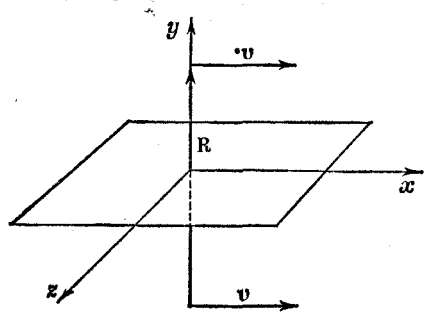
$$B_x=0,\qquad B_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{2Iz}{r},$$

$$B_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{2Iy}{r}.$$

б) Чтобы найти поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в системе координат K', движущейся вместе с электронами, необходимо воспользоваться формулами преобразования полей при лоренцевых преобразованиях (см. табл. 26.2, вып. 6, стр. 273). В результате найдем

$$\mathbf{B}'=\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}},\qquad \mathbf{E}'=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

26.8. Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, из соображений симметрии направлен перпендикулярно этой плоскости. Величину же его легко определить с помощью теоремы Гаусса. В результате $\mathbf{E}=(\sigma/2\varepsilon_0)\,\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор в направлении оси y (см. рисунок).



На заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

В рассматриваемой лабораторной системе координат $\mathbf{B} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{F} = (\sigma q/2\varepsilon_0)\,\mathbf{e}_y$. Заряды отталкивают друг друга с силой Кулона

$$f_y = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{(1-v^2)^2 \sin^2\theta}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

(см. решение к задаче **26.5**), где θ — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{R}$ — радиусом-вектором, соединяющим два заряда. По условию задачи $\theta = \pi/2$. Поэтому $f_y = (q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2)\sqrt{1-v^2}$. Движущиеся заряды не будут отклоняться от плоскости, если $F_y = f_y$. Отсюда следует ответ

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a^2}\sqrt{1-v^2}.$$

Поскольку при малых скоростях зарядов $\sigma \approx \sigma_0 = q^2/2\pi a^2$, то отношение плотностей зарядов на поверхности плоскости при релятивистских скоростях к плотности зарядов в нерелятивистском случае равно $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{1-v^2}$. Так как энергия частицы со скоростью v_2 равна $E = m/\sqrt{1-v^2}$, то $\sigma = \sigma_0\,(m/E)$. Поскольку по условию задачи энергия заряда равна 500 *Мэв*, то, учитывая, что $m = 0{,}5$ *Мэв*, находим $\sigma/\sigma_0 = 10^{-3}$.

26.9. Пользуясь выражением $u_\mu = dx_\mu/ds$, убеждаемся, что $u_\mu^2 = 1$. Далее

$$f_\mu u_\mu = u_\mu \frac{dp_\mu}{ds} = m_0 u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = \frac{1}{2} m_0 \frac{du_\mu^2}{ds} = 0.$$

26.10. а) Прежде всего нужно определить «запаздывающее положение» частицы, т. е. выяснить, на каком этапе движения создается интересующее нас поле. Для этого достаточно ответить на вопрос, какое время больше — затраченное светом для того, чтобы пройти из начала координат в точку (a,a), или затраченное частицей для того, чтобы достичь точки $(a, 0)$, выйдя опять-таки из начала координат. Так как $v/c = 0{,}5$, второе время больше, т. е. поле создается зарядом во время его равномерного движения вдоль оси x.

Электрическое поле равномерно движущегося заряда имеет вид (см., например, решение к задаче **26.5**) или формулы (26.2), (26.3) и (26.6) «Лекций» (вып. 6, стр. 262, 263):

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\dfrac{x-vt}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\frac{y}{\left[\dfrac{x-vt}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}}\frac{z}{\left[\dfrac{x-vt}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}.$$

Согласно условию задачи $z=0$, $y=a$, $x=a$, $vt_1=a$, $v=1/2$. Отсюда $E_x=E_z=0$, $E_y=q/2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2$.

б) Как было выяснено в пункте (а), интересующее нас поле определяется движением частицы вдоль оси x. Оно не зависит от характера движения частицы до прихода ее в начало координат.

К главе 27. *Энергия поля и его импульс*

27.1. Вычислим $\nabla\times\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, дифференцируя так же, как мы дифференцируем произведение функций

$$\nabla\times\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\nabla_A\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\nabla_B\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).$$

Индексы A и B у ∇ мы приписали для удобства, чтобы яснее отметить тот факт, что при дифференцировании оператор ∇ действует только на соответствующий вектор, а другой вектор при этом считается постоянным. Далее, замечая, что

$$\nabla_A\times\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\mathbf{B}\cdot\nabla_A)\,\mathbf{A}-\mathbf{B}\ \mathrm{div}\ \mathbf{A},$$

находим окончательно

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}.$$

Вычислим теперь $\mathrm{grad}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Для i-й компоненты этого вектора можно написать $\nabla_i A_k B_k=A_k\nabla_i B_k+B_k\nabla_i A_k$. Замечая, что $(\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_i=A_k\nabla_i B_k-A_k\nabla_k B_i$, находим $A_k\nabla_i B_k=(\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_i+((\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B})_i$. Отсюда окончательно

$$\nabla\mathbf{AB}=\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}.$$

27.2. Напряженность магнитного поля диполя с магнитным моментом $\mathbf{M}$ равна

$$\mathbf{B}=\frac{3\,(\mathbf{M}\cdot\mathbf{R})\,\mathbf{R}-\mathbf{M}R^2}{4\pi\varepsilon_0 R^5c^2}.$$

Выберем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром Земли, а ось z — с направлением вектора $\mathbf{M}$. Величину M можно определить через магнитное поле у поверхности Земли на экваторе $B_0=M/R_0^3 4\pi\varepsilon_0 c^2$, где R_0 — радиус Земли. Считая Землю шаром, вычислим энергию внешнего по отношению к Земле магнитного поля

по формуле $W=(\varepsilon_0 c^2/2)\int B^2 dV$. Подставляя в эту формулу выражение для $\mathbf{B}$, легко несложным интегрированием показать, что $W=4\pi\varepsilon_0 c^2 B_0^2 R_0^3/3\approx 10^3$ *Мгт*. Отсюда ясно, что по энергетическим соображениям взрыв водородной бомбы в 1 *Мгт* не может существенно исказить магнитное поле Земли.

27.3. Напряженность магнитного поля на поверхности провода $B=I/2\pi\varepsilon_0 c^2 r$, где I — сила тока, протекающего по проводу. Напряженность электрического поля найдем, воспользовавшись законом Ома, $\mathbf{I}=\mathbf{E}/R$, где R — сопротивление единицы длины провода. Тогда плотность потока энергии, равная модулю вектора Пойнтинга, равна $\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}=(\varepsilon_0 c^2/R)\mathbf{I}\times\mathbf{B}$. Поток энергии направлен нормально к поверхности провода. Интегрируя по поверхности провода единичной длины, находим

$$\int S ds = I^2 R.$$

Следовательно, поток вектора Пойнтинга через поверхность прямолинейного провода равен омическим потерям в этом проводе.

27.4. Очевидно, что электромагнитное поле будет заключено в пространстве между цилиндрами. Так как цилиндры изготовлены из идеальных проводников, электрическое поле перпендикулярно поверхности цилиндров, т. е. радиально. Магнитное поле B на расстоянии r от оси цилиндров легко найти по теореме Стокса ($a\leqslant r\leqslant b$): $B=I/2\pi\varepsilon_0 c^2 r$. Силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности с центрами на оси цилиндров. Следовательно, вектор Пойнтинга направлен вдоль оси цилиндров. В задаче **6.5** была найдена емкость C, приходящаяся на единицу длины такого кабеля, как в данной задаче: $C=2\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$. Учитывая, что заряды на цилиндрах связаны с разностью потенциалов V соотношением $q=VC$, и используя теорему Гаусса, находим, что напряженность электрического поля $E=V/r\ln(b/a)$. Поэтому вектор Пойнтинга в каждой точке этого пространства равен по величине

$$|\mathbf{S}|=\varepsilon_0 c^2\,|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|=\frac{IV}{2\pi r^2\ln(b/a)}.$$

Плотность энергии электромагнитного поля

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}[\mathbf{E}^2+c^2\mathbf{B}^2]=\frac{\varepsilon_0 V^2}{2r^2}\left[\frac{1}{\ln^2(b/a)}+\frac{c^2}{R^2(2\pi\varepsilon_0 c^2)^2}\right].$$

Таким образом, скорость распространения энергии равна

$$v=\frac{|S|}{W}=\frac{2R}{R^2C+\mathscr{L}},$$

где $\mathscr{L}=\ln(b/a)/2\pi\varepsilon_0c^2$ — емкость единицы длины кабеля (см. решение к задаче **17.6**). Заметим, что в силу того, что $\mathscr{L}C=1/c^2$, $v=c$ при $R=\sqrt{\mathscr{L}/C}$.

27.5. Антенна длиной $\lambda/4$, помещенная над идеально проводящей плоскостью, эквивалентна рассмотренной в задаче **21.5** антенне с длиной $\lambda/2$ (мы учли зеркальное отображение антенны длиной $\lambda/4$). Поэтому воспользуемся найденными в решении к задаче **21.5** выражениями для напряженностей электрического и магнитного полей на далеком расстоянии от антенны (поля над плоскостью):

$$E_\theta=\frac{\alpha}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

$$B_\varphi=\frac{1}{c}E_\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

где постоянную α мы должны определить из условий задачи. С этой целью вычислим вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{\varepsilon_0c\alpha^2}{r^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Тогда мощность, излучаемая антенной, равна среднему по времени потоку вектора Пойнтинга:

$$W=\varepsilon_0c\alpha^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)dt\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}2\pi\sin\theta\,d\theta.$$

В решении к задаче **21.5** отмечалось, что функция $\cos[(\pi/2)\cos\theta]/\sin\theta$ хорошо аппроксимируется $\sin\theta$. Используя это и учитывая, что $\overline{\cos^2\omega[t-(r/c)]}=1/2$, легко находим $W=(2\pi/3)\varepsilon_0c\alpha^2$. Следовательно, $\alpha=\sqrt{3W/2\pi\varepsilon_0c}$.

а) На поверхности Земли, т. е. при $\theta=\pi/2$, среднее значение по времени вектора Пойнтинга равно

$$\overline{S}=\frac{3W}{2\pi r^2}\overline{\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}=2{,}4\cdot10^{-5}\ вт/м^2.$$

б) Используя найденное выражение для α, находим, что максимальные значения напряженностей электрического

и магнитного полей равны

$$E_\theta\left(r,\ \theta=\frac{\pi}{2}\right)_{\text{макс}}=\frac{\alpha}{r}=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3W}{2\pi\varepsilon_0 c}},$$

$$H_\varphi\left(r,\ \theta=\frac{\pi}{2}\right)_{\text{макс}}=\frac{\alpha}{cr}=\frac{1}{cr}\sqrt{\frac{3W}{2\pi\varepsilon_0 c}}.$$

27.6. а) Граничные условия заключаются в обращении в нуль тангенциальных составляющих E на стенках волновода и нормальных составляющих вектора **B**. Эти условия выполняются, так как $E_y(x=0,\ a)=0$, $E_x(y=0,\ b)=0$, $B_y(y=0,\ b)=0$ и $B_x(x=0,\ a)=0$.

б) $$\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\varepsilon_0 c^2 E_0^2\left[\mathbf{e}_z\frac{k_z}{\omega}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-k_z z)-\right.$$

$$\left.-\mathbf{e}_x\frac{\pi}{\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2(\omega t-k_z z)\right].$$

Плотность энергии равна

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2+\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}^2=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left[\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2(\omega t-k_z z)+\right.$$

$$+\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)(\cos^2(\omega t-k_z z)+$$

$$\left.+\frac{c^2\pi^2}{\omega^2 a^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2(\omega t-k_z z)\right].$$

в) Усредняя выражение для S_z по времени и по сечению волновода, находим

$$\langle\mathbf{S}_z\rangle_{t,x}=\frac{1}{a}\int_0^a\langle\mathbf{S}_z\rangle_t\,dx=\frac{k_z}{\omega}\frac{\varepsilon_0 c^2}{4}E_0^2\mathbf{e}_z.$$

г) Усредняя U по времени и по объему волновода, находим среднюю плотность энергии в волноводе

$$\langle U\rangle_{t,x}=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8}\left[1+\frac{c^2k_z^2}{\omega^2}+\frac{c^2\pi^2}{\omega^2a^2}\right].$$

Если учесть тот факт, что $k_z=\sqrt{(\omega^2/c^2)-(\pi^2/a^2)}$ [см. «Лекции», вып. 6, формулы (24.16), (24.13)], то

$$\langle U\rangle_{t,x}=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}.$$

д) Средняя скорость распространения энергии совпадает с групповой скоростью. Действительно,

$$\mathbf{v}=\frac{\langle\mathbf{S}\rangle_{t,x}}{\langle U\rangle_{t,x}}=c^2\frac{k_z}{\omega}\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_z c\sqrt{1-\frac{\pi^2c^2}{a^2\omega^2}}=\mathbf{v}_{\text{гр}}$$

[ср. формулу (24.27) «Лекций», вып. 6, стр. 229].

27.7. а) Вектор Пойнтинга равен $\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\varepsilon_0 c^3\mathbf{B}^2\mathbf{n}$. Магнитное поле осциллирующего диполя равно [см., например, «Лекции», вып. 6, стр. 153, формула (21.23)]

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в радиальном направлении. Следовательно,

$$\mathbf{S}=\frac{p^2\omega^4\sin^2\theta\cos^2\omega t}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\mathbf{n},$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$.

б) Средняя по времени излучаемая мощность равна

$$W=\oint\bar{\mathbf{S}}d\boldsymbol{\sigma}=\frac{p^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

(с учетом того, что $\overline{\cos^2\omega t}=1/2$). Что и требовалось показать.

27.8. Считая, что на электрон действует только электрическое поле волны $\mathbf{E}=E_0\exp(i\omega t)$, найдем из уравнения движения $m\ddot{\mathbf{r}}=q\mathbf{E}_0\exp(i\omega t)$ дипольный момент колеблющегося электрона. Аналогично предыдущей задаче найдем вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S}=\frac{q^4\mathbf{E}^2\sin^2\theta}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3 r^2 m^2}\mathbf{n}.$$

Если ввести угол θ между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$, то поток излучаемой энергии в элемент $d\Omega$ телесного угла можно записать в виде

$$dJ=|\mathbf{S}|\,d\Omega=\frac{q^4\mathbf{E}^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3 m^2}\sin^2\theta\,d\Omega.$$

Разделив этот поток на плотность энергии в падающей волне $J=\varepsilon_0 cE^2$, получим так называемое дифференциальное сечение рассеяния электромагнитной волны электроном

$$d\sigma=\frac{dJ}{J}=\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2\sin^2\theta\,d\Omega.$$

Полное сечение рассеяния равно

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,$$

где $e^2=q^2/4\pi\varepsilon_0$.

27.9. Сила светового давления на частицу равна

$$F=\frac{S_1}{S_0}\frac{W}{c}(1+\beta),$$

где S_1 — площадь поперечного сечения шарика с радиусом r $S_0 = 4\pi R^2$ (R — расстояние частицы от Солнца); W — энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени; β — коэффициент отражения (по условию задачи $\beta = 0$). Сила гравитационного притяжения равна

$$F_1 = \frac{GMm}{R^2},$$

где m — масса частицы, M — масса Солнца ($M = 2 \cdot 10^{30}$ *кг*), G — гравитационная постоянная ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *м*^{3}/*кг*·*сек*^{2}). В равновесии будут находиться лишь те частицы, радиус которых удовлетворяет условию $F_1 = F$:

$$r = \frac{3}{16\pi} \frac{W}{GM\rho c};$$

здесь ρ — плотность массы частицы. Оценивая радиус частицы в предположении, что $\rho \approx 1$ *г*/*см*^{3}, находим $r_0 \approx 6 \cdot 10^{-5}$ *см*. Частицы с радиусом $r < r_0$ световым давлением будут отбрасываться Солнцем. Таким образом видно, что обычное объяснение хвостов комет вполне разумно.

27.10. а) Учитывая тот факт, что $r \ll R$, магнитное поле внутри тороидальной катушки можно приближенно считать однородным по поперечному сечению. Выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида, с помощью теоремы Стокса легко найти

$$B = \frac{NKt}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R}.$$

Выберем в поперечном сечении тороида контур интегрирования в форме окружности радиусом ρ ($0 \leqslant \rho \leqslant r$). Так как магнитное поле мы считаем однородным по сечению, то магнитный поток через этот контур равен

$$\Phi = \pi\rho^2 B = \frac{\pi\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{NKt}{R}.$$

Следовательно, э.д.с. в этом контуре равна

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\pi\rho^2 NK}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R}.$$

С другой стороны, считая приближенно напряженность электрического поля одинаковой по величине во всех точках этого контура, интегрируя вдоль него, находим

$$\mathcal{E} = \int E\, dl = E \cdot 2\pi\rho$$

(вектор $\mathbf{E}$ в каждой точке контура направлен по касательной). Таким образом,

$$E = -\frac{\rho NK}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}.$$

Энергия, запасенная в тороидальной катушке к моменту времени t, равна

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (E^2 + c^2B^2)\,dV = \frac{\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{N^2K^2t^2}{R} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{NK}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\right)^2 \pi r^5.$$

б) Найдем направление и величину вектора Пойнтинга на поверхности тороида. Величины напряженностей E и B найдены в пункте (а). Направления **E** и **B** таковы, что вектор Пойнтинга **S** в каждой точке на поверхности тороида нормален к поверхности и направлен внутрь тороида. Кроме того, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ в каждой точке. Следовательно, модуль вектора Пойнтинга равен

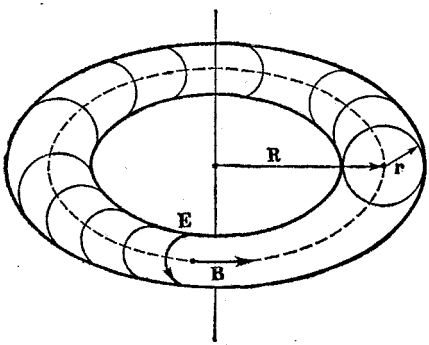
$$S = \varepsilon_0 c^2 E \cdot B = \frac{rt}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 R^2}(NK)^2.$$

Отсюда полная мощность поглощаемой тороидом энергии, равная потоку вектора Пойнтинга через всю поверхность тороида (последняя приближенно равна $2\pi r_0 \cdot 2\pi R$), оказывается равной

$$\oint \mathbf{S}\,d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\pi r^2 t\,(NK)^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R}.$$

Этот результат верен, так как выполняется условие

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint \mathbf{S}\,d\boldsymbol{\sigma}.$$



К главе 28. Электромагнитная масса

28.1. Подсчитаем электростатическую энергию электрона, исходя из общего выражения $U_{эл}=(\varepsilon_0/2)\int \mathbf{E}^2\,dV$. Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром, равна (см. решение к задачам **5.8** и **5.9**)

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, & r\leqslant a,\\[2ex] \dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, & r>a.\end{cases}$$

Интегрируя по всему пространству в сферической системе координат, находим

$$U_{эл}=\frac{3q_e^2}{5\cdot 4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Приравнивая $U_{эл}$ энергии покоя электрона mc^2, находим

$$a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3}{5}\,\frac{q_e^2}{mc^2}=1{,}69\cdot 10^{-13}\ см.$$

28.2. Момент количества движения электромагнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{L}=\varepsilon_0\int(\mathbf{r}\times\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,dV.$$

Согласно условию задачи, электрическое и магнитное поля имеют вид

$$\mathbf{E}=\begin{cases}0, & r<a,\\[2ex] \dfrac{q_e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}, & r>a,\end{cases}\qquad \mathbf{B}=\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\mu}r^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}.$$

Подставим выражение для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в формулу для $\mathbf{L}$ и проинтегрируем по всему пространству в сферической системе координат. В результате найдем

а) $\mathbf{L}=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{q_e\boldsymbol{\mu}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a}$,

б) $\dfrac{L}{\mu}=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 a}=\dfrac{m}{q_e}$

[с учетом того, что $m=\frac{2}{3}(q_e^2/4\pi\varepsilon_0 a c^2)$].

в) Будем считать, что заряд электрона равномерно «размазан» по поверхности сферы и что сфера вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В этих предположениях задача аналогична задаче **14.6**. Если воспользоваться решением к

задаче **14.6**, положив $4\pi\varepsilon_0 Va = q_e$, то мы сразу получим искомый результат $\mu = \omega q_e a^2/3$. Отсюда $\omega = 3\mu/a^2 q_e$. Максимальная скорость электрона на поверхности — это его линейная скорость на экваторе сферы $v_{\text{макс}} = \omega a = 3\mu/aq_e$. Так как по условию задачи

$$\mu = \frac{\hbar q_e}{2m} = \frac{3}{4}\frac{q_e ac}{\alpha},$$

то

$$v_{\text{макс}} = \frac{9c}{4\alpha} \gg c.$$

Следовательно, собственный магнитный момент электрона нельзя объяснить с позиций классической физики — как магнитный момент вращающейся твердой сферы с радиусом, равным электромагнитному радиусу электрона, и с зарядом электрона.

К главе 29. ***Движение зарядов в электрическом и магнитном полях***

29.1. а) Уравнения движения заряда:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0,$$

т. е. $p_x = qEt$, $p_y = 0$.
Следовательно, $v_y = 0$, а для v_x имеем

$$qEt = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}},$$

откуда

$$v_x = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2}}.$$

Таким образом, при малых временах $v \sim t$, а при $t > mc/qE$ частица движется практически равномерно со скоростью, близкой к скорости света

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{c}{qE}\left(\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2} - mc\right).$$

б) В этом случае

$$p_x = qEt,$$

$$p_y = p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

С другой стороны,

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_y^2}{c^2}}}, \qquad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_y^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_0}{qEt}.$$

Видно, что при $t \to \infty$ $v_y \to 0$. Для зависимости $v_x(t)$ имеем

$$v_x = \frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}}.$$

Переход к движению со скоростью, близкой к скорости света, происходит теперь через время порядка $\sqrt{m^2c^2+p_0^2}/qE$, т. е. несколько позже. Зависимость $x(t)$ имеет в остальном тот же характер, что и раньше. Что касается зависимости $y(t)$, то при малых временах $y \sim t$, а при $t \gg \sqrt{m^2c^2+p_0^2}/qE$, $y \sim \ln t$.

29.2. В циклотроне протоны движутся в постоянном однородном магнитном поле $B = \text{const}$. Направим ось z в направлении вектора $\mathbf{B}$. Уравнения движения запишутся в следующем виде:

$$\dot{p}_x = qv_yB, \quad \dot{p}_y = -qv_xB, \quad \dot{p}_z = 0.$$

При этом энергия $\mathcal{E} = \text{const}$, так как $\mathbf{F} \perp \mathbf{V}$. Поскольку $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ и $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, то уравнения движения приобретают вид

$$\dot{v}_x = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}}v_y, \qquad \dot{v}_y = -\frac{qBc^2}{\mathcal{E}}v_x.$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу и складывая его с первым, для комплексной скорости $z = v_x + iv_y$ получаем уравнение $\dot{z} + i\omega z = 0$, где частота колебания $\omega = qBc^2/\mathcal{E} = (qB/m)\sqrt{1-v^2/c^2}$. Если протоны движутся медленно, то $v^2 \ll c^2$ и циклотронная частота имеет обычный вид $\omega = qB/m$. При увеличении энергии циклотронная частота уменьшится. Так как $\Delta\omega/\omega = -\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$, то при изменении циклотронной частоты на 1% энергия изменится также на 1%.

29.3. а) Так как движение предполагается нерелятивистским, то импульс частицы с ее скоростью связан обычным соотношением

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}.$$

Уравнение движения и начальные условия имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}}=q\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}),$$

$$x\,(0)=y\,(0)=z\,(0)=0, \qquad \dot{x}\,(0)=\dot{y}\,(0)=\dot{z}\,(0)=0.$$

Уравнение движения в компонентах запишутся в виде

$$\ddot{x}=\frac{qB}{m}\dot{y}, \quad \ddot{y}=\frac{qE}{m}-\frac{qB}{m}\dot{x}, \quad \ddot{z}=0.$$

Из последнего уравнения с учетом начальных условий следует, что $z\,(t)=0$, т. е. движение происходит в плоскости xy. Если сложить первые два уравнения, предварительно умножив обе части второго уравнения на мнимую единицу и ввести обозначения $\omega=qB/m$, $x+iy=\eta$, то получим одно уравнение $\ddot{\eta}+i\omega\dot{\eta}=iqE/m$. Решение этого уравнения будет суммой решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения $\ddot{\eta}_0+i\omega\dot{\eta}_0=0$ можно представить в виде $\eta_0=C\exp(-i\omega t)$, где комплексную константу C можно написать как произведение ее модуля на фазовый множитель: $C=a\exp(i\varphi)$. В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять $\eta_1=qEt/m\omega$. Следовательно,

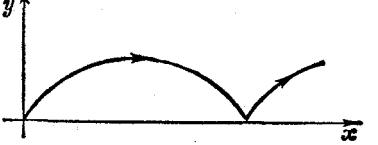
$$\eta=ae^{-i\omega t+i\varphi}+\frac{qE}{m\omega}\,t\equiv x+iy.$$

Отделяя мнимую часть от вещественной и принимая во внимание начальные условия, окончательно находим

$$x=\frac{qE}{m\omega^2}\,(\omega t-\sin\omega t),$$

$$y=\frac{qE}{m\omega^2}\,(1-\cos\omega t),$$

т. е. траектория в плоскости является циклоидой (см. рисунок). Заметим, что из выражения $\dot{x}=(qE/m\omega)(1-\cos\omega t)$ следует, что предположение о нерелятивистском характере движения справедливо, если $qE/m\omega\ll c$, т. е. $E/Bc\ll 1$.



в) Рассмотрим решение $y(t)=(qE/m\omega^2)(1-\cos\omega t)$, найденное в пункте (а) задачи. Условием того, что частица не попадает на анод, будет условие: $y_{\text{макс}} < d$. Отсюда следует, что должно выполняться неравенство

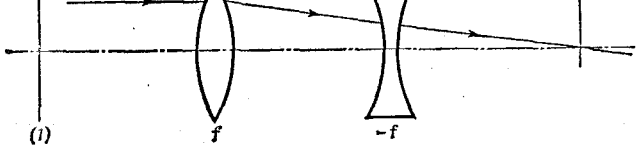
$$\frac{2qE}{m\omega^2} < d \quad \text{или} \quad B > \sqrt{\frac{2mc^2E}{qd}}.$$

29.4. Для данной системы двух тонких линз существует соотношение $F^{-1}=f^{-1}+(-f)^{-1}-d\,(f)^{-1}\,(-f)^{-1}$, где F — фокусное расстояние системы, отсчитываемое от главных плоскостей системы.

Расстояние Δ от первой линзы до первой главной плоскости системы (1) выражается соотношением $\Delta=d\,(-f)^{-1}/F^{-1}$. Из первого уравнения находим $F=f^2/d$. Следовательно, $\Delta=-f$. Положение второй главной плоскости (2) от второй линзы определяется расстоянием $\Delta_1=-d\,(f)^{-1}/F^{-1}$, или $\Delta_1=-d^2/f^3$.

а) Величина главного фокусного расстояния $F=f^2/d$ отсчитывается от первой главной плоскости системы (1), находящейся на расстоянии $\Delta=-f$ от первой линзы. Из рисунка следует, что расстояние от (1) до главного фокуса равно $F=f+d+l$. Так как $F=f^2/d$, то $f^2/d=f+d+l$, или $l=(f^2/d)-(f+d)$.

б) Реальное изображение будет при условии, что $F>0$ или $f+d+l>0$.



7

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

К главе 32. ***Показатель преломления плотного вещества***

32.1. Уравнения Максвелла в диэлектрическом веществе, в котором нет других зарядов, кроме тех, которые связаны в атомах, имеют вид

$$\text{а)}\quad \nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0},\qquad \text{б)}\quad c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}+\mathbf{E}\right),$$

$$\text{в)}\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \text{г)}\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

Как указывалось в «Лекциях» (вып. 7, гл. 32, § 3), эти уравнения допускают волновые решения. Будем искать эти решения для волны в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},\qquad \mathbf{P}=\mathbf{P}_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},\qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}.$$

При этом, если ввести вектор электрической индукции $\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}/\varepsilon_0$, уравнения Максвелла примут вид

$$\text{а)}\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{D}=0,\qquad \text{б)}\quad c^2\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\omega\mathbf{D},$$

$$\text{в)}\quad \mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B},\qquad \text{г)}\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0.$$

Умножая векторно уравнение (в) на $\mathbf{k}$ и используя уравнение (б), получаем

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})=-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D},$$

или

$$\mathbf{D}=\frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(\mathbf{E}-\frac{\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})}{k^2}\right).$$

Так как электрическая волна поляризована в направлении, перпендикулярном $\mathbf{k}$, то $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{D}=n^2(\omega)\,\mathbf{E}$, где $n^2(\omega)=c^2k^2/\omega^2$. Но, с другой стороны, для волны с частотой ω в «линейном» приближении $\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}$ (это приближение справедливо, если электрические поля в диэлектрике слабы по сравнению с электрическими полями в атомах

и молекулах; для лазерного луча, направленного на диэлектрик, возникает необходимость учета нелинейной связи D с E, т. е. учитывать в разложении D по E члены, квадратичные по E, кубичные и т. д.). Следовательно, $\varepsilon(\omega)=n^2(\omega)$. Полагая в этом соотношении $\omega=0$ и учитывая, что $\varepsilon(0)=\varkappa$, находим

$$\varkappa=n^2(0).$$

32.2. Квадрат показателя преломления для плазмы в ионосфере имеет вид (см. „Лекции", вып. 7, стр. 67) $n^2=1-Nq_e^2/m\varepsilon_0\omega^2$. При $\omega>\omega_p$, где $\omega_p=\sqrt{Nq_e^2/m\varepsilon_0}$ — плазменная частота, ионосфера становится прозрачной, так как при этом условии показатель преломления вещественен. Отсюда плотность свободных электронов в ионосфере равна

$$N=\frac{m\varepsilon_0\omega_p^2}{q_e^2}=4{,}5\cdot10^5\ \text{электрон/см}^3.$$

32.3. Так как электрическое поле, действующее на электроны проводимости, равно среднему полю E, то, полагая $\omega_0=0$ в уравнении (32.1) «Лекций» (вып. 7, стр. 50), $v_{\text{дрейф}}=\dot{x}$, можно записать уравнение для дрейфовой скорости электронов:

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt}=\frac{q_eE}{m}-\frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Когда поле E постоянно действует на электроны проводимости, $dv_{\text{дрейф}}/dt=0$, для дрейфовой скорости получаем

$$v_{\text{дрейф}}^{(0)}=\frac{q_eE}{m}\tau$$

[см. «Лекции», вып. 7, стр. 68, формула (32.39)].

Если же в момент времени $t=0$ электрическое поле мгновенно выключается, дрейфовая скорость электронов будет меняться согласно однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt}=-\frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Решая это уравнение, находим

$$v_{\text{дрейф}}=\frac{q_eE}{m}\tau e^{-t/\tau}.$$

Это решение отвечает начальному условию задачи, согласно которому $v_{\text{дрейф}}=v_{\text{дрейф}}^{(0)}$ при $t=0$. Из него видно, что время, за которое величина дрейфовой скорости уменьшится в e раз, в точности равно τ — среднему времени между соударениями.

32.4. Из уравнения Максвелла $\partial \mathbf{B}/\partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$ находим $\partial B_x/\partial t = 0$, $\partial B_y/\partial t = ikE_0 \exp[i(\omega t - kz)]$, $\partial B_z/\partial t = 0$.

Отсюда

а) $B_x = 0$, $B_y = \dfrac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$, $B_z = 0$.

б) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

в) Так как волновой вектор можно записать в виде

$$k = (1-i)\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}} = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\varepsilon_0 c^2}}\, e^{-i\pi/4},$$

то разность фаз, очевидно, равна $-\pi/4$.

32.5. Более реалистичное выражение для n^2 получится, если воспользоваться выражением для показателя преломления: $n^2 = 1 + (\sigma/\varepsilon_0)/i\omega(1 + i\omega\tau)$ [см. «Лекции», вып. 7, стр. 64, формула (32.42)]. Видно, что даже для частот $\omega > \sigma/\varepsilon_0\tau$ n^2 имеет мнимую часть.

К главе 33. ***Отражение от поверхности***

33.1. а) В области *1* будет падающая волна, амплитуду которой примем равной единице, и отраженная волна с амплитудой b_1. В области *2* одна волна с амплитудой a_2 распространяется вправо, а другая волна с амплитудой b_2 — влево. В области *3* имеется лишь одна прошедшая волна, амплитуду которой обозначим через a_3. Записывая плоские волны в виде $E = a \exp i\left(\omega t \mp \dfrac{n\omega}{c} z\right)$, получаем из условий непрерывности на границах раздела тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей (среды считаем немагнитными) следующую систему уравнений:

$$1 + b_1 = a_2 + b_2,$$

$$1 - b_1 = \frac{n_2}{n_1}(a_2 - b_2),$$

$$a_2 e^{-i\frac{n_2\omega}{c}l} + b_2 e^{i\frac{n_2\omega}{c}l} = a_3 e^{-i\frac{n_3\omega}{c}l},$$

$$a_2 e^{-i\frac{n_2\omega}{c}l} - b_2 e^{i\frac{n_2\omega}{c}l} = \frac{n_3}{n_2} a_3 e^{-i\frac{n_3\omega}{c}l}.$$

Решая эту систему, находим выражение для квадрата амплитуды прошедшей волны

$$|a_3|^2 = 16 n_1^2 n_2^2 \left[(n_1+n_2)^2(n_2+n_3)^2 + (n_1-n_2)^2(n_2-n_3)^2 + 2(n_1^2-n_2^2)(n_2^2-n_3^2)\cos\left(2\frac{n_2\omega l}{c}\right)\right]^{-1}.$$

б) При $l=\lambda_2/4=\pi c/2n_2\omega$ и $n_2^2=n_1n_3$ из системы уравнений, приведенной выше, и из выражения для $|a_3|^2$ следует, что $b_1=0$, $|a_3|^2=n_1/n_3$, т. е. плотность потока энергии в падающей слева на слой волне $|S_1|\sim n_1E_1^2=n_1$ равна плотности потока энергии прошедшей волны

$$|S_3|\sim n_3|a_3|^2=n_3\frac{n_1}{n_3}=n_1.$$

в) Толщина пленки при этом примерно равна $\lambda/4n_2=1200$Å.

г) Из предыдущего анализа ясно, что для просветления линзы безразлично, какую ее сторону покрывать. Для просветления важно, чтобы выполнялось соотношение $n_2^2=n_1n_3$. Просветление будет, как в случае $n_1=1$, $n_2^2=n_3$ (покрывается внешняя сторона линзы), так и в случае $n_3=1$, $n_2^2=n_1$ (покрывается внутренняя сторона).

33.2. Выберем систему координат так, как показано на рисунке:

$$k_x''^2=\frac{\omega^2}{c^2}(1-n^2\sin^2\theta)$$

(см. «Лекции», вып. 7, стр. 88).

Отраженная и преломленная волны запишутся соответственно в виде

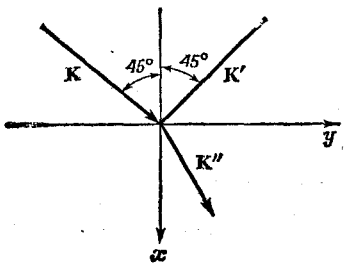
$$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_{02}e^{i\left(\omega t-\frac{\omega n_1}{c}y\sin\beta+\frac{\omega n_1}{c}x\cos\beta\right)}$$

и

$$\mathbf{E}_3=\mathbf{E}_{03}e^{i\left(\omega t-\frac{\omega n_2}{2}y\cdot\sin\gamma-\frac{\omega n_2}{c}x\cos\gamma\right)}.$$

На границе поле E непрерывно. Поэтому

$$E_{01}e^{-\frac{\omega n_1 y}{c}\sin\alpha}+E_{02}e^{-\frac{\omega n_1}{c}y\sin\beta}=E_{03}e^{-\frac{i\omega n_2}{c}y\sin\gamma}.$$



В силу того что x произвольно, из последнего уравнения следует, что $\sin\alpha=\sin\beta$, $\sin\alpha/\sin\gamma=n_2/n_1$. Отсюда

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\alpha}.$$

По условию задачи $n_1/n_2=1{,}6$, $\sin^2\alpha=0{,}5$ ($\alpha=\beta=45°$) и, следовательно, $\cos\gamma=\sqrt{-0{,}28}\approx\pm i0{,}53$. Подставляя найденное значение $\cos\gamma$ в выражение для $\mathbf{E}_3$, получаем ($n_2=1$):

$$\mathbf{E}_3\sim e^{\pm 0{,}53\frac{\omega}{c}z}=e^{\pm 0{,}53\frac{2\pi z}{\lambda}}.$$

Верхнему знаку отвечает экспоненциально нарастающее поле, нижнему — убывающее. Оставляя из физических соображений последнее решение, находим, что в воздухе за большой гранью призмы электрическое поле волны убывает в e раз на расстоянии $x=0{,}3\lambda=1350$ Å. Если вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения, результат будет точно таким же.

К главе 34. ***Магнетизм вещества***

34.1. Сила, действующая на частицу в переменном магнитном поле, равна

$$\mathbf{F}=q\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{E}].$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ вызвано изменяющимся магнитным полем. Если напряженность электрического поля мала, частица движется приблизительно по окружности, радиус которой равен $R=p/qB$ (p — импульс частицы). Момент количества движения частицы при этом равен $J=pR=qBR^2$. Электрическое поле вызывает изменение абсолютной величины импульса $dp/dt=qE$, откуда $dJ/dt=qER$. Величину E можно вычислить, пользуясь теоремой Стокса:

$$E\cdot 2\pi R=-\pi R^2\frac{dB}{dt}.$$

Отсюда следует

$$E=-\frac{R}{2}\frac{dB}{dt},$$

$$\frac{dJ}{dt}=-\frac{qR^2}{2}\frac{dB}{dt}\quad\text{или}\quad\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{B}\frac{dB}{dt}.$$

Наши рассуждения годятся только в том случае, если частица движется по круговой орбите, т. е. если $T\,(dJ/dt)=(T/2)\,(dB/dt)\ll 1$, где T — период обращения частицы по орбите.

К главе 35. Парамагнетизм и магнитный резонанс

35.1. В магнитном поле напряженностью B частица вращается по круговой орбите с ларморовой частотой ω_L, не зависящей ни от радиуса орбиты, ни от скорости частицы (при $v/c \ll 1$) и равной $\omega_L = qB/m$. Выразим величину B через период обращения $T = 2\pi/\omega_L$:

$$B = \frac{2\pi m}{qT}.$$

Частота ядерного магнитного резонанса равна (см. «Лекции», вып. 7, § 6, стр. 130)

$$\omega_p = g\frac{q}{2m}B = \frac{g}{2}\omega_L.$$

Отсюда

$$g = \frac{2\omega_p}{\omega_L} = 2\nu_p T,$$

где $\nu_p = \omega_p/2\pi$. Подставляя численные значения для ν_p и T, данные в условии к задаче, находим $g = 5{,}46$.

35.2. Теорию классического парамагнетизма можно построить аналогично классической теории диэлектрической проницаемости. Энергия магнитного момента μ в магнитном поле равна $-\mu B\cos\theta$, где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{B}$. Согласно статистической физике, число моментов, угол наклона которых к оси z (последняя выбрана совпадающей с вектором $\mathbf{B}$) равен θ, приходящееся на единичный телесный угол, вычисляется по формуле

$$n(\theta) = n_0 e^{\mu B\cos\theta/kT}.$$

Предполагая, что магнитное поле мало, так что $\mu B/kT \ll 1$, разложим экспоненту в ряд и ограничимся первыми двумя основными членами разложения:

$$n(\theta) = n_0\left[1 + \frac{\mu B\cos\theta}{kT}\right].$$

Интегрируя это выражение по всем телесным углам, получаем N — полное число моментов, $N = 4\pi n_0$. Полный магнитный момент определим следующим образом ($\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{B}$):

$$\mathbf{M} = \int(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k}n(\theta)\,d\Omega = -\mathbf{k}\int\mu(\cos\theta)\,n(\theta)\,2\pi\sin\theta\,d\theta.$$

Вычисляя, находим

$$\mathbf{M} = \frac{N\mu^2}{3kT}\mathbf{B}.$$

Подобная теория классического парамагнетизма не противоречит утверждению о том, что в рамках классической физики парамагнетизм вообще отсутствует. Просто классическая физика не может обосновать существование у каждого атома «собственного» магнитного момента μ. Наличие его есть чисто квантовый эффект.

35.3. Избыток параллельных полю спинов можно найти, используя формулу (35.21) «Лекций» (вып. 7, стр. 121) для магнитного момента единицы объема M, если поделить M на магнитный момент одного атома:

$$\frac{N_{\text{изб}}}{N} = \operatorname{th} \frac{\mu_0 B}{kT}.$$

При $T = 300°\text{K}$ отношение $\mu_0 B/kT$ равно $2{,}3 \cdot 10^{-3}$ и, следовательно, $N_{\text{изб}}/N = \operatorname{th} 0{,}0023 \approx 0{,}23\%$. При $T = 4{,}2°\text{K}$ отношение $\mu_0 B/kT$ равно 0,16 и $N_{\text{изб}}/N = 15{,}9\%$.

35.4. Задача решается несложным обобщением формул (35.10)—(35.21) «Лекций» (вып. 7). Если ввести обозначение

$$\mu_0 = g\left(\frac{q_e \hbar}{2m}\right),$$

то энергии, соответствующие различным проекциям спина в магнитном поле, равны $U = -\mu_0 B$ для $J_z/\hbar = +1$, $U = 0$ для $J_z/\hbar = 0$ и $U = +\mu_0 B$ для $J_z/\hbar = -1$. Согласно статистической механике,

$$N_{+1} = n_0 e^{\mu_0 B/kT}, \quad N_0 = n_0, \quad N_{-1} = n_0 e^{-\mu_0 B/kT}.$$

Постоянная находится из условия равенства числа частиц с разными проекциями полному числу частиц N:

$$N = N_{+1} + N_0 + N_{-1} = n_0 \left(e^{\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT} + 1\right).$$

Средний магнитный момент в магнитном поле равен

$$M = \mu_0 N \frac{2 \operatorname{sh} \dfrac{\mu_0 B}{kT}}{1 + 2 \operatorname{ch} \dfrac{\mu_0 B}{kT}}.$$

Отсюда при $\mu_0 B/kT \ll 1$ в силу того, что при $x \ll 1$, $\operatorname{sh} x \approx x$, $\operatorname{ch} x \approx 1$

$$M = \frac{2}{3} \frac{N \mu_0^2 B}{kT}.$$

К главе 36. ***Ферромагнетизм***

36.1. Токи, связанные с намагниченностью ($\mathbf{j}_{\text{маг}} = \nabla \times \mathbf{M}$), отличны от нуля только на поверхности шара. Именно эти токи создают магнитное поле вне и внутри шара. Из симметрии задачи ясно, что токи текут по окружностям, плоскости

которых перпендикулярны **M**. Проведем ось z через центр шара параллельно вектору **M**. Представим себе, что изменение **M** на поверхности происходит не скачком, а непрерывно в некотором слое толщиной d, и вычислим j в этом слое

$$(j_{маг})_x = \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$(j_{маг})_y = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Так как ось y направлена по касательной к поверхности шара, то $\partial M/\partial y = 0$. Далее, $\Delta x = d/\sin\theta$; стало быть

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{M\sin\theta}{d} \quad \text{и} \quad j_{маг} = \frac{M\sin\theta}{d}.$$

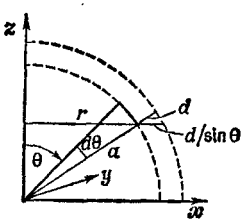
Плотность поверхностных токов равна

$$(i_{маг})_y = j_{маг} \cdot d = M\sin\theta.$$

Это соотношение можно также записать в виде $\mathbf{i} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности шара.

Вычисляя магнитный момент поверхностных токов, находим

$$m = \int \pi r^2(\theta)\, i dS = 2M\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3} a^3 M.$$



36.2. Из теоремы Стокса (в качестве контура выберем среднюю линию магнита) следует

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2},$$

где N — полное число витков обмотки; I — сила тока в обмотке. Разделяя контурный интеграл на две части, одна из которых отвечает зазору, а другая — контуру вне его, и предполагая, что поле H по всему периметру средней линии ярма однородно, в результате интегрирования находим

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2},$$

где H_1 — поле в зазоре; H_2 — поле в каркасе магнита; $l_1 = 1$ *см* — ширина зазора; $l_2 = 375$ *см* — периметр средней линии. Граничные условия в зазоре имеют вид $B_{1n} = B_{2n}$, причем $B_{1n} = H_1$. Выражая H_1 через B_{2n}, находим уравнение

$$B_{2n} = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} H_2.$$

Построив эту прямую на графике $B_{2n} = f(H_2)$ (см. стр. 386), можно найти H_2 и B_{2n}. Тогда поле в зазоре равно $H_1 = B_{2n}$ (для указанных параметров магнита эта линейная зависимость имеет вид $B_{2n} = 1{,}35$ *вебер/м*$^2 - 375 H_2$). Согласно графику, $H_1 = B_{2n} = 1{,}17$ *вебер/м*^{2}.

36.3. Обозначим через B_1 и B_2 напряженности магнитного поля в постоянном магните и зазоре. Так как зазор узок, то, пренебрегая краевыми эффектами в зазоре и на углах, напишем условие постоянства магнитного потока

$$B_1 A_1 = B_2 A_2;$$

здесь $A_1 = 100$ *см*^{2} — площадь поперечного сечения магнита; $A_2 = 20$ *см*^{2} — площадь зазора. Отсюда $B_2 = 5B_1$. После выключения тока циркуляция магнитной индукции H по средней линии системы будет равна нулю. Считая поле магнитной индукции в магните однородным и учитывая, что магнитная восприимчивость мягкого железа бесконечна, т. е. в мягком железе $H = 0$, запишем

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

где $l_1 = 20$ *см* — длина постоянного магнита; $l_2 = 1$ *см* — ширина зазора. Так как в зазоре $H_2 = B_2 = 5B_1$, из последнего уравнения находим

$$4H_1 + B_1 = 0,$$

или, учитывая, что $H_1 = B_1 - M/\varepsilon_0 c^2$,

$$\frac{M}{\varepsilon_0 c^2} = -5H_1.$$

Если эту прямую линию построить на приведенной в условии задачи кривой $M - H$ (стр. 387), то она пересекает ее в двух точках, отвечающих $H_1 = \pm 0{,}04$ *вебер/м*^{2}. Так как при уменьшении тока система окажется на верхней части кривой $M - H$, то $H_1 = -0{,}04$ *вебер/м*^{2}. Тогда $B_1 = -4H_1 = 0{,}16$ *вебер/м*^{2} и искомая напряженность магнитного поля, т. е. $B_2 = 5B_1 = 0{,}8$ *вебер/м*^{2}.

36.4. Магнитное поле такого стержня создается токами намагничивания, текущими по его поверхности (см. «Лекции», вып. 7, гл. 36, § 1). При этом поверхностная плотность токов $i_{\text{маг}} = M$. Величина B находится так же, как для соленоида:

$$B = \frac{i}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{M}{\varepsilon_0 c^2}.$$

Направление поля $\mathbf{H}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{B}$. Так как $H=B-M/\varepsilon_0 c^2$, то внутри стержня $H=0$.

Если вырезать игольчатую полость вдоль оси цилиндра, то поле внутри этой полости будет создаваться как уже рассмотренными токами, текущими по поверхности цилиндра, так и токами, текущими по поверхности полости. Плотность этих токов равна M, а направление их противоположно направлению внешних токов (в одном случае величина M увеличивается при удалении от оси цилиндра, в другом — уменьшается, поэтому направление вектора $\mathbf{j}=\operatorname{rot}\mathbf{M}$ различно). Таким образом, поле внутри полости — это поле, которое на своей оси создают два коаксиальных соленоида с противоположно направленными и равными по величине токами. Поле это равно нулю.

К главе 38. **Упругость**

38.1. Воспользуемся формулой (38.42) «Лекций» (вып. 7, стр. 205) для отклонения конца стержня длиной L, жестко заделанного другим концом в стенку:

$$x(L)=\frac{FL^3}{3YI},$$

где Y — модуль Юнга, I — момент инерции сечения стержня. По определению, жесткость равна отношению $F/x(L)=3YI/L^3$. По условию задачи алюминиевый и стальной стержни обладают одинаковой жесткостью и имеют одинаковую длину. Следовательно, $Y_{\text{Al}}I_{\text{Al}}=Y_{\text{сталь}}I_{\text{сталь}}$. Так как момент инерции круглого сечения стержня равен $I=\pi R^4/4$, где R — радиус поперечного сечения, то ($Y_{\text{сталь}}=21\cdot10^{11}$ *дин/см*^{2}, $Y_{\text{Al}}=7\cdot10^{11}$ *дин/см*^{2}).

а) $R_{\text{Al}}/R_{\text{сталь}}=(Y_{\text{сталь}}/Y_{\text{Al}})^{1/4}=1{,}32$.

б) Если ρ — плотность вещества, то ($\rho_{\text{Al}}=2{,}7$ *г/см*^{3}, $\rho_{\text{сталь}}=7{,}8$ *г/см*^{3})

$$\frac{m_{\text{Al}}}{m_{\text{сталь}}}=\frac{\rho_{\text{Al}}R_{\text{Al}}^2}{\rho_{\text{сталь}}R_{\text{сталь}}^2}=\frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{сталь}}}\sqrt{\frac{Y_{\text{сталь}}}{Y_{\text{Al}}}}\approx 0{,}6.$$

38.2. На тело m действуют две силы: вес тела $\mathbf{P}$ и упругая сила $\mathbf{F}$ со стороны стержня, действующая в вертикальном направлении. Поэтому уравнение движения этого тела запишется в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{P}+\mathbf{F}.$$

Спроектируем это уравнение на вертикальную ось (ось y): $m\ddot{y}=F_y-P$. Согласно формуле для отклонения конца стержня, жестко заделанного в стенку, сила, с которой неза-

крепленный конец стержня действует на тело m, равна

$$F_y = -\frac{3YIy}{L^3},$$

где y — вертикальное смещение массы m; Y — модуль Юнга; I — главный момент инерции сечения стержня: $I = a^4/12$. Подставляя это выражение для силы F_y в уравнение движения, получаем

$$m\ddot{y} = -P - \frac{3YI}{L^2}y.$$

Отсюда находим собственную частоту колебания массы m:

$$\omega = \left(\frac{3YI}{L^3 m}\right)^{1/2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{Y}{L^3 m}\right)^{1/2}.$$

38.3. Рассмотрим массивное тело, поперечные размеры которого много больше длины волны звука. Ударяя по такому телу, можно обнаружить, что оно не раздается во все стороны, а сжимается только в направлении удара. В таком теле побежит продольная волна, в которой частицы тела движутся только в направлении распространения волны. Чтобы найти уравнения, описывающие распространение такого продольного звука, мы фактически можем рассмотреть стержень, который закреплен так, что при сжатии и растяжении его боковые размеры не сокращаются. Пусть площадь поперечного сечения такого стержня равна A, а длина L. Рассмотрим элемент стержня длиной Δz, расположенный на расстоянии z от его конца. Обозначим через $u(z, t)$ смещение этого элемента в волне в момент времени t. При статическом растяжении (или сжатии) внутреннее напряжение F/A на всем протяжении стержня одно и то же и пропорционально u/L, где u — удлинение стержня. В упругой волне важна местная деформация в точке z, т. е. $\partial u(z, t)/\partial z$. Для стержня без бокового смещения (см. «Лекции», вып. 7, стр. 196) было найдено

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)Y}\frac{F(z)}{A},$$

где $F(z)$ — сила, действующая в поперечном сечении на расстоянии z от начала координат. На одном конце элемента Δz действует $F(z)$, а на другом $F(z+\Delta z)$. Полная сила, действующая на элемент Δz, очевидно, равна

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \frac{dF(z)}{dz}\Delta z = \Delta z \cdot A \frac{(1-\sigma)Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Согласно закону Ньютона, эта сила равна произведению массы элемента $\rho \Delta z \cdot A$ (ρ — плотность тела) на его ускорение $\partial^2 u(z, t)/\partial t^2$:

$$\rho \Delta z \cdot A \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \Delta z \cdot A \frac{(1-\sigma)Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}.$$

Сокращая обе части получившегося уравнения на $\Delta z \cdot A$, получаем

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - v^2_{\text{прод}} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0,$$

где

$$v^2_{\text{прод}} = \frac{(1-\sigma) Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)\rho}$$

— квадрат фазовой скорости распространения продольных волн в твердом теле.

38.4. Так как расстояние между планками слабо отличается от L, то изгиб можно считать слабым. Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, учет веса линейки (около 0,3 *г*) несущественно меняет величину действующей вдоль стержня силы внутренних напряжений. Если отклонение линейки от прямой линии между концами обозначить через $y(x)$, где x — расстояние от левого конца линейки, а через F обозначить горизонтальную составляющую силы, с которой упоры изгибают линейку, то форма изогнутой линейки будет описываться уравнением (38.45) «Лекций» (вып. 7, стр. 206):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{YI} y,$$

где Y — модуль Юнга; I — момент инерции поперечного сечения линейки. Из этого уравнения следует:

а) Форма изогнутой линейки описывается синусоидой

$$y(x) = K \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Постоянную K можно определить из условия нормировки на длину линейки

$$L = \int_0^l \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\, dx =$$

$$= \int_0^l \sqrt{1 + K^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}}\, dx.$$

Учитывая тот факт, что прогиб линейки слабый, т. е. что $K/l \ll 1$, вычислим интеграл, разложив подынтегральное выражение в ряд

$$L = \int_0^l \left(1 + \frac{K^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}\right) dx = l + \frac{K^2 \pi^2}{4l}.$$

Отсюда $K = (2/\pi) \sqrt{(L-l)\, l} = 34{,}2$ *мм*.

б) Сила, с которой линейка упирается в планки, равна $F=\pi^2 YI/l^2$, где $I=ab^3/12$. Если принять для стали $Y=2\cdot 10^{12}$ *дин/см*^{2}, то $F=1{,}47$ *кГ*.

38.5. Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости xy. Ось x параллельна силе P. Введем θ—угол между касательной к линии стержня и осью x и s—расстояние вдоль кривой. Тогда $dx/ds=\cos\theta$ и $dy/ds=\sin\theta$. При этом кривизна стержня $1/R$ будет определяться выражением $1/R=d\theta/ds$. С другой стороны, кривизну стержня можно связать с изгибающим моментом силы P:

$$\frac{1}{R}=\frac{P}{YI}(\delta-y).$$

Следовательно,

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{P}{YI}(\delta-y).$$

Дифференцируя последнее уравнение по s, получаем исходное уравнение

$$IY\frac{d^2\theta}{ds^2}+P\sin\theta=0.$$

Так как угол θ мал, то, полагая $\sin\theta=\theta$, получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{P}{IY}\theta=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta(s)=A\sin\sqrt{\frac{P}{IY}}s+B\cos\sqrt{\frac{P}{IY}}s,$$

где A и B—константы. Из граничного условия $\theta(0)=0$ (нижний конец стержня жестко заделан) находим $B=0$. Из условия равенства нулю момента сил внутренних напряжений у свободного конца, т. е. из граничного условия $\theta'(L)=0$, находим

$$\cos\sqrt{\frac{P}{IY}}L=0,$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{P}{IY}}L=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $P=\pi^2 IY/4L^2$. Учитывая, что $I=wt^3/12$, окончательно находим искомую силу

$$P=\frac{\pi^2 IYwt^3}{48L^2}.$$

К главе 40. Течение «сухой» воды

40.1. а) Согласно гл. 31 «Лекций» (вып. 7), в произвольной точке жидкости i-я компонента силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную оси j, определяется тензором внутренних напряжений S_{ij}. Так как в невязкой жидкости нет сдвиговых напряжений, то недиагональные элементы тензора S_{ij} должны быть равны нулю. В этом можно убедиться, построив в этой точке три единичные площадки, перпендикулярные осям x, y и z соответственно. Следовательно, если около этой точки построить элементарную площадку da с вектором нормали $\mathbf{n}$, то сила, действующая на эту площадку, будет иметь компоненты

$$dF_x = S_{xx} n_x\, da,$$
$$dF_y = S_{yy} n_y\, da,$$
$$dF_z = S_{zz} n_z\, da.$$

Поскольку проекция силы dF на площадку da должна быть равна нулю (отсутствуют касательные напряжения), то это означает, что вектор $d\mathbf{F}$ должен быть направлен вдоль $\mathbf{n}$. Это может быть только при условии, что диагональные элементы тензора S_{ij} равны друг другу, т. е. если $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = p$. Отсюда

$$d\mathbf{F} = p\mathbf{n}\, da.$$

Следовательно, какое бы направление вектора $\mathbf{n}$ мы ни выбрали, всегда сила, действующая на единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, нормальна к площадке и равна численно одному и тому же значению p (давление).

б) Это тождество следует как частный случай из доказанного в задаче **27.1** (см. решение к этой задаче, стр. 481) общего соотношения

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}),$$

если положить в нем $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$.

40.2. Направим ось z вдоль цилиндра, а начало координат выберем в наинизшей точке воронки. Введем вектор угловой скорости вращения жидкости $\boldsymbol{\omega}$, который, очевидно, направлен вдоль оси z. Тогда вектор скорости частицы жидкости, находящейся на расстоянии r от оси, можно записать в виде $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы. При этом $v_x = -\omega\cdot y$, $v_y = \omega\cdot x$, $v_z = 0$. Вычислим вектор $\boldsymbol{\Omega} = \nabla\times\mathbf{v}$. Находим

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$
$$\Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega,$$

или в векторном виде $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}$. Отсюда ясно, что в данной задаче $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -2\omega^2 \mathbf{r}$. Так как можно представить $\mathbf{r} = \nabla (r^2/2)$, то во всех точках жидкости выполняется уравнение

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varphi - \omega^2 r^2 = \text{const}.$$

Так как на поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному, то имеем ($\varphi = gz$)

$$\frac{v^2}{2} - gz = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = \text{const}.$$

В нашей системе координат, очевидно, const $= 0$. Поэтому уравнение поверхности жидкости имеет вид

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2),$$

т. е. поверхность является параболоидом вращения.

40.3. В § 5 гл. 12, вып. 5 «Лекций» решалась задача об обтекании шара «сухой» водой. Скорость «сухой» воды была найдена равной

$$\mathbf{v} = \nabla v_0 \cos\theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) = v_0 \nabla z \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right),$$

где v_0 — скорость воды на бесконечном расстоянии от шара, θ — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}_0$ (ось z выбрана вдоль вектора $\mathbf{v}_0$). В настоящей задаче мы можем воспользоваться этим решением, если перейдем к системе координат, в которой жидкость вдалеке от шара покоится. Результат можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{a^3}{2r^5}[3\mathbf{r}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v}_0 r^2].$$

Кинетическая энергия жидкости $T_ж$ равна интегралу от квадрата этой скорости, умноженному на плотность жидкости, по всему пространству вне шара. Математически, как мы видим, задача аналогична задаче 27.2, где определялась энергия магнитного поля Земли. Воспользовавшись найденным в этой задаче результатом, получим

$$T_ж = M \frac{v_0^2}{4},$$

где M — масса жидкости в объеме шара. Добавляя к $T_ж$ кинетическую энергию шара, находим полную энергию

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right) v_0^2.$$

Полный импульс системы вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}=m\mathbf{v}_0+\rho\int \mathbf{v}\,dV.$$

Подставляя в нее приведенное выше поле скоростей $\mathbf{v}$ и выполняя несложное интегрирование, получаем $\int \rho\mathbf{v}\,dV=0$; следовательно, $\mathbf{P}=m\mathbf{v}_0$.

К главе 41. ***Течение «мокрой» воды***

41.1. К параметрам, определяющим силу сопротивления, относятся: a—радиус шара, v—скорость движения шара относительно жидкости, η—коэффициент вязкости. Размерность этих величин такова:

$$[a]=\text{Длина};\quad [v]=\text{Длина/Время};$$
$$[\eta]=\text{Масса/Время}\times\text{Длина}.$$

Будем искать из соображений размерности выражение для силы в виде $F=a^\alpha v^\beta\eta^\gamma$. Запишем условие совпадения размерностей левой и правой частей этого соотношения:

$$[F]=[a^\alpha v^\beta\eta^\gamma],$$
$$[\text{Масса}]\times[\text{Длина}]\times[\text{Время}]^{-2}=$$
$$=[\text{Масса}]^\gamma\times[\text{Длина}]^{\alpha+\beta-\gamma}\times[\text{Время}]^{-\beta-\gamma}.$$

Отсюда $\gamma=1$, $\alpha+\beta-\gamma=1$, $\beta+\gamma=2$, или $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$. В результате находим

$$F\sim\eta av.$$

То, что параметры входят в выражение для F так, как было найдено выше, а не иначе, ясно из следующих качественных соображений. В «Лекциях» (вып. 7, стр. 260) указывалось, что вязкая сила $f_{\text{вязк}}$, действующая на единицу объема жидкости, пропорциональна коэффициенту вязкости η и вторым производным скорости по координатам. Так как в задаче о движении шара в вязкой жидкости характерным размером, на котором существенно меняется скорость, являются размеры порядка размеров шара, то вторые производные по порядку величины равны v/a^2. Умножая $f_{\text{вязк}}$ на объем, где силы вязкости отличны от нуля, т. е. на объем порядка a^3, находим $F\sim\eta av$. Заметим, что сила трения, действующая на гармонический осциллятор, также пропорциональна скорости осциллятора.

41.2. Направим ось z вдоль оси трубы в направлении потока жидкости. Предполагая жидкость несжимаемой, напишем уравнение движения в стационарном случае

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\eta}{\rho}\,\nabla^2\mathbf{v}.$$

Так как в данной задаче отлична от нуля лишь z-компонента скорости — v_z, причем v_z зависит только от r — расстояния от оси трубы, то $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=0$. Записав $\nabla p=-\Delta p/L$, где $\Delta p=p_1-p_2$ — разность давлений на концах трубы, получим

$$\nabla^2 v_z=-\frac{\Delta p}{\eta L}.$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением Пуассона для потенциала равномерно заряженного бесконечного цилиндра $\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$. Потенциал φ легко найти, если воспользоваться теоремой Гаусса, найти напряженность электрического поля, а затем проинтегрировать соотношение $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$. В результате $\varphi=\varphi_0-\rho r^2/4\varepsilon_0$, где φ_0 — постоянная интегрирования. Заменяя φ на v_z и ρ/ε_0 на $\Delta p/\eta L$, получаем

$$v_z(r)=v_0-\frac{\Delta p}{4L\eta}r^2.$$

Неизвестную константу v_0 легко найти, если вспомнить, что на стенке трубы скорость жидкости равна нулю. Окончательно:

$$v_z(r)=\frac{\Delta p}{4L\eta}(a^2-r^2).$$

Поток массы жидкости плотности ρ через поперечное сечение (расход) трубки равен

$$Q=\rho\int v_z(r)\,dS=\frac{a^4\pi}{8\eta}\rho\frac{\Delta p}{L}.$$

Если провести аналогию между разностью потенциалов и разностью давлений, а также расходом жидкости и электрическим током, то под сопротивлением трубы надо понимать величину

$$R=\frac{\Delta p}{Q}=\frac{8\eta L}{\pi a^4\rho}.$$

Аналогом конденсатора являются два сообщающихся сосуда, снизу соединенные трубкой, которую можно перекрывать краном так, что уровень воды в сосудах может быть разным.

41.3. а) Определим сначала распределение скоростей в жидкости вдали от краев доски. Для этого выберем систему координат, плоскость xz которой совпадает с дном бассейна, а ось z направлена вдоль скорости доски. Тогда из уравнения Навье—Стокса для стационарного течения следует $d^2v/dy^2=0$. Из этого уравнения находим $v=C_1y+C_2$. Учитывая граничные условия $v(0)=0$ и $v(d)=u$, определим постоянные интегрирования C_1 и C_2. Окончательно:

$$v=\frac{u}{d}y.$$

б) Силу трения, действующую на единицу поверхности доски, найдем, исходя из формулы $S_{xz}=\eta\,(dv/dy)=\eta u/d$, где η — коэффициент вязкости. При этом работа на преодоление силы трения, совершаемая в единицу времени и отнесенная к единице площади поверхности доски, равна

$$S_{xz}u=\frac{\eta u^2}{d}\,.$$

Искомая же скорость диссипации энергии в единице объема оказывается равной

$$\frac{S_{xz}\cdot u}{d}=\frac{\eta u^2}{d^2}\,.$$

8. Квантовая механика (I)

Том III

9. Квантовая механика (II)

Настоящая часть сборника задач относится к тому III «Фейнмановских лекций по физике». Как и те задачи, которые собраны к тому II, они включают домашние задания и экзаменационные задачи, использованные в КАЛТЕХе в 1963/64 учебном году. Я снова попытался поместить их в порядке возрастания трудности внутри каждой главы.

Эту часть сборника еще меньше, чем предыдущую, можно считать окончательным вариантом. По мере развития и усовершенствования курса она будет расти. В первом варианте эти задачи были напечатаны на машинке еще до выхода тома III в его окончательном виде. Я надеюсь, что некоторые терминологические разночтения, которые могут возникнуть в связи с этим обстоятельством, будут рассматриваться как лишнее доказательство незаконченности всего сборника.

Большинство задач составлено М. Сэндсом, Р. Фейнманом, Дж. Пайном и мной. Идею примерно для трех четвертей всех задач дал Р. Фейнман. Первый вариант задач редактировали К. Уилтс и я.

Г. Нойгебауер

8

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (I)

К главе 1. ***Амплитуды вероятности***

1. 1. В этой главе описан мысленный эксперимент по интерференции электронов на двойной щели. По интерференционной картине, приведенной на фиг. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11), можно оценить длину волны λ, связанную с амплитудными функциями φ_1 и φ_2. Обозначим расстояние между центрами щелей буквой a.

а) Чему равна λ?

б) Используя кривые для P_1 и P_2, рассчитайте ожидаемую величину P_{12} в центре полосы, в первом боковом максимуме и первых двух минимумах интерференционной картины. Сравните полученные результаты с кривой P_{12}.

1. 2. Рассмотрите эксперимент по интерференции электронов на двойной щели, описанный в предыдущей задаче, предположив, что расстояния от электронной пушки до щели и от щелей до экрана очень велики по сравнению с промежутком между щелями, а ширина щелей много меньше этого промежутка. Дайте ответ (по возможности количественный) на следующие вопросы:

а) Что произойдет с интерференционной картиной P_{12}, если электронную пушку сдвинуть вверх на расстояние D?

б) Как изменится интерференционная картина, если расстояние между щелями удвоить?

в) Что случится, если первую щель сделать вдвое шире второй?

1. 3. Монохроматический свет, поляризованный в вертикальной плоскости, падает на пленку — поляроид,

«ось пропускания» которой образует с вертикалью угол θ.

Чему будет равно отношение интенсивности света, прошедшего через пленку, к интенсивности падающего света? А что сделает поляроид с единичным падающим фотоном?

1. 4. Пучок электронов с энергией 20 *кэв* проходит через тонкую поликристаллическую золотую фольгу, а затем попадает на фотопластинку. Области почернения на пластинке имеют форму концентрических колец с центрами на оси пучка. Почему? Рассчитайте диаметр колец, если расстояние от фольги до пластинки равно 10 *см*.

1. 5. Вернемся к обычному интерференционному опыту с двойной щелью (см. фиг. 1.1 «Лекций», вып. 8, стр. 11). Если a_1 и a_2 — два комплексных числа, равные амплитудам вероятности нахождения электронов соответственно в щелях *1* и *2*, то как выглядит формула для относительной интенсивности распределения электронов на экране в зависимости от x — расстояния от центральной точки? Считайте x приближенно малой величиной; ответ должен выражаться через расстояния между щелями и от щелей до экрана.

1. 6. В дифракционном опыте (схема которого приведена на рисунке) частицы, испускаемые источником, имеют импульс p_0, массу M и скорость $\mathbf{v}$.

а) Чему равно расстояние a между центральным максимумом и его ближайшим соседом? Считайте

$$L \gg d, \qquad L \gg a.$$

б) Внешнее воздействие меняет фазу для верхнего пути на $\delta\varphi_1$, а для нижнего пути на $\delta\varphi_2$. Покажите, что центральный максимум смещается при этом на расстояние S, определяемое выражением

$$S = +(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)\frac{L}{d}\frac{\hbar}{p_0}.$$

Таким образом, если величина $(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)$ для всех путей одинакова, то на расстояние S сме-

щается вся дифракционная картина и мы можем сказать, что на расстояние S отклоняются все частицы.

в) Предположим, что в области A частицы обладают небольшой потенциальной энергией, которая зависит только от вертикальной координаты. Тогда импульс частиц на высоте x над центральной линией [обозначим его $p(x)$] будет несколько отличаться от $p(0)$ — своего значения на центральной линии. Покажите, что

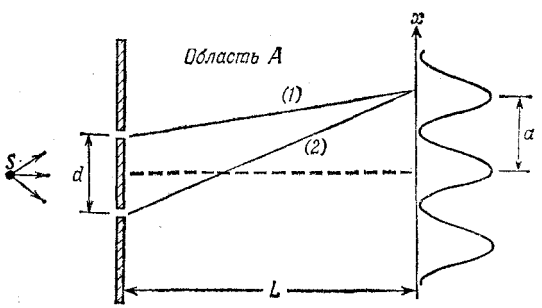
$$p(x) = p(0) + \frac{M}{p(0)}(V(0) - V(x)),$$

или, когда $V(x)$ меняется с расстоянием медленно, $p(x) = p(0) + Fx/v$, где $F = -dV/dx$.

г) При условиях, описанных в пункте (в), импульсы при движении по прямым (*1*) и (*2*) будут отличаться друг от друга (как и длины волн). Покажите, что разность фаз для верхнего и нижнего путей равна

$$(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) = \frac{d}{2v}\frac{F}{\hbar}L.$$

(Заметим, что среднее вертикальное расстояние между двумя этими прямыми равно $d/2$.) Покажите, что интерференционные полосы смещаются вверх на величину $^1/_2T^2(F/M)$, где $T = L/v$ — время пролета (в классическом смысле) от щели до экрана. Поясните смысл результата.

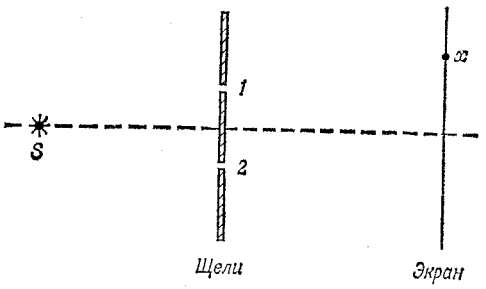


1. 7. Электроны со спином $^1/_2$ испускаются источником S, помещенным перед экраном с двумя щелями, как показано на рисунке. Предположим, что электрон, достигший щели, проходит через нее с амплитудой α, если его спин направлен вверх, и с амплитудой β, если его спин направлен вниз. Предположим далее, что различить, через какую щель электрон прошел, невозможно.

а) Если все электроны испускаются «спином вверх», рассчитайте распределение интенсивностей на экране в точке x, выразив ее через α, β и амплитуды $\langle x|s\rangle$ (см. вып. 8, стр. 12, 13).

б) Как отличается это распределение от того случая, когда все электроны испускаются «спином вниз», при прочих равных условиях?

в) Если направление спинов случайно, а все остальные условия опыта сохраняются, то чем будет отличаться интерференционная картина от случая (а)?

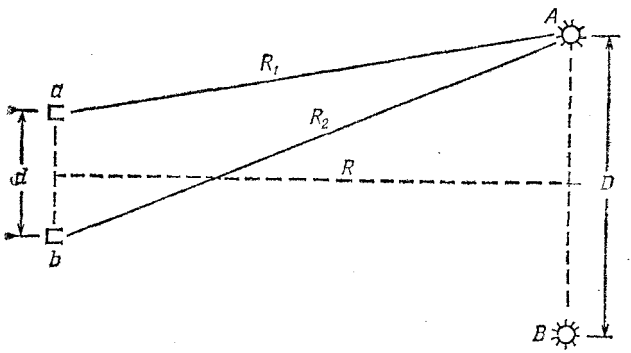


1. 8. Сколь это ни удивительно, но большие интерференционные эффекты можно наблюдать даже в том случае, если одна из «интерферирующих возможностей» имеет не очень большую вероятность. Покажите, что в эксперименте по дифракции на двух отверстиях, даже когда вероятность проникнуть через одно из них в 100 раз меньше, чем через другое, дифракционный максимум все еще на 50% выше минимума.

1. 9. Диаметр ближайших к Земле звезд слишком мал, и его нельзя определить даже при помощи лучших современных телескопов, поскольку их угловое разрешение больше «углового диаметра» звезд. Диаметр звезд впервые определил Майкельсон, используя оптический интерферометр. Но точности этого метода едва хватает для самых близких звезд. В 1956 г. Браун и Твисс предложили новый метод для таких измерений, названный ими «методом корреляции интенсивностей» [Nature, 178, 1046 (1956)]. Они опробовали его на звезде Сириус. Для этого они взяли два параболических рефлектора (авторы использовали зеркала от старых прожекторов), в фокусе каждого из которых был установлен фотоумножитель. Выходы умножителей соединялись коаксиальным кабелем с электронной схемой, которая регистрировала среднее значение от *произведения* токов в обоих умножителях (так называемую «корреляционную функцию»). По поведению этого произведения в зависимости от расстояния между зеркалами определялся угловой диаметр звезды. В то время многие физики утверждали, что этот метод не годится, поскольку свет — это фотоны, а каждый фотон попадает либо на одно зеркало, либо на другое, и никакой корреляции двух токов, следовательно, наблюдаться не может. Вы можете опровергнуть этот аргумент, рассматривая следующий идеализированный эксперимент. Два небольших источника света, скажем две лампочки A и B, помещаются на больших расстояниях от фотоумножителей a и b. Геометрические условия опыта показаны на рисунке. С детекторами a и b соединены счетчики, сосчитывающие числа фотонов p_1 и p_2, регистрируемых в секунду каждым счетчиком. Счетчики a и b включены, кроме того, еще в «схему совпадений», которая регистрирует p_{12}— количество случаев в единицу времени, когда фотоэлектроны появляются *одновременно* (т. е. в течение одного малого промежутка времени τ) в обоих умножителях. Пусть $\langle a|A\rangle$ — амплитуда появления фотона, испущенного источником A, в детекторе a в течение

данного промежутка времени, определяемого разрешающей способностью схемы. Тогда $\langle a|A\rangle = ce^{i\alpha_1}$, где c — комплексная постоянная, а $\alpha_1 = kR_1$ (R_1 — расстояние от A до a, k — постоянная). Аналогично, $\langle b|A\rangle = ce^{i\alpha_2}$, где $\alpha_2 = kR_2$, а R_2 — расстояние от A до b. Покажите, что скорость счета совпадений пропорциональна $2+\cos 2k(R_2 - R_1)$.

Как использовать этот результат для определения D, если R известно? Пренебрегайте тем фактом, что реальный процесс есть «наложение» таких простых модельных процессов, поскольку свет приходит из всех областей поверхности звезды, а не только из крайних, диаметрально противоположных точек.



К главе 2. ***Тождественные частицы***

2. 1. Радиопередатчик излучает мощность 1000 *квт* на частоте 1 *Мгц*.

а) Какова энергия (в *эв*) каждого излученного кванта?

б) Сколько квантов излучается за каждый период колебаний электромагнитного поля? (Высокая степень когерентности этих квантов возможна, поскольку они являются бозе-частицами.)

2. 2. Внутри полости в абсолютно черном теле величина $I(\omega)\Delta\omega$ — интенсивность излучения в интервале

частот от ω до $\omega+\Delta\omega$ на единицу объема — дается формулой Планка.

а) Как ведет себя $I(\omega)$ при малых ω? При больших ω?

б) При какой частоте на единичный интервал приходится максимальная энергия?

в) При какой длине волны на единичный интервал длин волн приходится максимальная энергия?

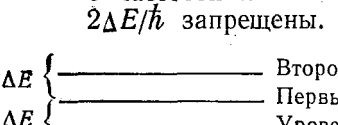
г) Оцените температуру на поверхности Солнца, предполагая, что максимум интенсивности его излучения приходится на середину видимого спектра.

2. 3. Оцените напряженность магнитного поля, которая потребуется для того, чтобы выстроить спины обоих электронов в атоме гелия в одном направлении. (Приближенно рассматривайте атом гелия как гармонический осциллятор с основной частотой, соответствующей видимому свету. У атома гелия «в основном состоянии» оба электрона находятся на самом нижнем уровне и их спины направлены в противоположные стороны. Согласно принципу запрета Паули, для того чтобы направления спинов электронов совпали, одному из них придется перейти на следующий уровень.)

2. 4. До открытия нейтронов предполагалось, что ядра состоят из протонов и электронов. Покажите, что в таком случае атом (атом азота, масса ядра которого примерно в 14 раз больше массы протона) был бы бозе-частицей. Опытные факты (спектр молекулы) показывают, что этот атом есть ферми-частица. Это было первое свидетельство в пользу существования новой ядерной частицы. Покажите, как нейтронная гипотеза решает эту задачу.

2. 5. Предположим, что в некоторой системе могут наблюдаться «переходы» между определенными энергетическими уровнями, т. е. заселенность уровней, или число атомов на каждом уровне, меняется, и это сопровождается излучением или поглощением квантов.

Два возбужденных состояния и основное состояние находятся в тепловом равновесии между собой, тогда как вся система находится в поле излучения с частотой $\hbar\omega = \Delta E$. Прямые переходы с частотой $2\Delta E/\hbar$ запрещены.



а) Выразите отношения N_1/N_0 и N_2/N_1 через число фотонов $n(\omega)$.

б) Получите простое выражение для числа фотонов $n(\omega)$, учитывая, что фотоны являются бозонами. Искомое выражение должно содержать только $\Delta E/kT$.

в) Найдите приближенные выражения для $n(\omega)$ в двух предельных случаях:

$$\hbar\omega \gg kT,$$
$$\hbar\omega \ll kT.$$

2. 6. В лазере большое число атомов одновременно переводится в возбужденное состояние. Потом появление небольшого количества света определенного типа индуцирует лавинообразное излучение, в которое дают вклад все возбужденные атомы, что приводит к образованию очень большого числа фотонов с совершенно одинаковой длиной волны, испускаемых строго в одном направлении. Можно ли надеяться, что в один прекрасный день кто-нибудь создаст подобное же устройство, излучающее нейтрино (частица с массой, равной нулю, и спином $^1/_2$)?

2. 7. Покажите, что для двух неодинаковых невзаимодействующих частиц вероятность того, что одна переместится из a в b, в то время как другая переместится из c в d, есть произведение двух сомножителей P_{ab} и P_{cd}, где P_{ab} — вероятность, что первая частица в отсутствие второй частицы переместится из a в b, а P_{cd} — вероятность, что вторая частица в отсутствие первой переместится из c в d. Является ли неодинаковость частиц существенным обстоятельством?

2. 8. Дейтрон является бозе-частицей со спином единица; таким образом, пучок дейтронов может находиться в одном из трех состояний с проекциями спина $+1$, 0, -1. Производится опыт, в котором дейтроны рассеиваются на дейтронах. Как зависит вероятность регистрации дейтронов от угла рассеяния θ (угол между направлениями движения дейтрона до и после столкновения в системе центра масс)? Предположим, что направление спина в процессе рассеяния не меняется, а $f(\theta)$ — это амплитуда отклонения на угол θ.

2. 9. Пусть $f_1(\theta)$ — амплитуда рассеяния π-мезона на протоне, а $f_2(\theta)$ — на нейтроне. Как выразить *вероятность* того, что π-мезон рассеется на ядре гелия на угол θ через P_1 и P_2 — вероятности рассеяния на протоне и на нейтроне?

Рассмотрите два случая:

а) отдача протона или нейтрона после рассеяния разрушает ядро;

б) отдача настолько слаба, что ядро остается «неповрежденным».

Можете ли вы сказать, в каком случае рассеяние сильнее? Ваши ответы должны зависеть от предположений, сделанных при описании процесса (а).

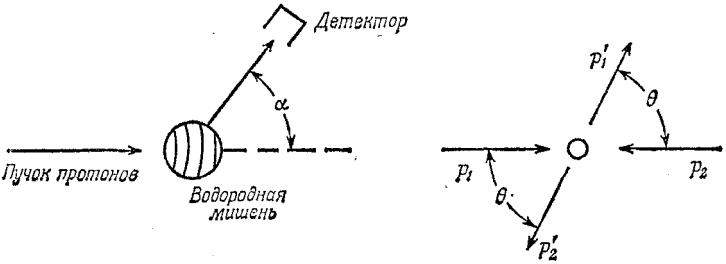
2.10. Предположим, что в эксперименте по рассеянию пучок нейтронов падает на нейтронную мишень. Детектор установлен с таким расчетом, чтобы он регистрировал нейтроны, рассеявшиеся на угол θ в системе центра масс; f — амплитуда рассеяния частицы на этот угол без изменения спинового состояния; g — амплитуда рассеяния на тот же угол с «переворотом» спина (за счет обмена направлениями спинов с частицей мишени). Если предположить, что f и g не зависят от θ, то какова будет вероятность, что детектор зарегистрирует нейтрон, если:

а) спины обоих нейтронов (и рассеиваемого и рассеивающего) направлены вдоль оси $+z$;

б) спины нейтронов пучка выстроены вдоль положительного направления оси z, а нейтроны мишени — вдоль отрицательного;

в) падающий пучок не поляризован, а мишень поляризована в направлении $+z$;
г) и пучок и мишень не поляризованы;
д) как изменится ответ на вопрос (а), если мишень будет состоять из поляризованных протонов при равенстве амплитуд нейтрон-нейтронного и нейтрон-протонного рассеяния?
Считайте, что детектор одинаково эффективно регистрирует и нейтроны и протоны.

2.11. Пучок нерелятивистских протонов проходит через тонкую мишень из жидкого водорода, а потом, как показано на рисунке, рассеянные протоны регистрируются под некоторым углом α к падающему пучку. Процесс рассеяния можно анализировать в системе центра масс, как показано на рисунке.



Два протона (p_1 и p_2) движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями; после соударения два протона (p_1' и p_2') разлетаются вдоль прямой, которая составляет угол θ с первоначальным направлением. Если мы выберем в качестве оси z направление, перпендикулярное к плоскости рассеяния, то каждый протон может иметь значение J_z (проекции спинового момента на эту ось), равное $\pm\hbar/2$. Мы будем говорить про это, что спин может быть направлен «вверх» или «вниз». Предположим, что спин обоих протонов направлен вверх и что $f(\theta)$ есть амплитуда рассеяния протона p_1 на угол θ с попаданием в детектор. Поскольку мы не можем сказать, *какой* протон зарегистрирован счетчиком, то амплитуда того, что *какой-то* протон вылетит

под углом θ, равна $f(\theta)-f(\pi-\theta)$. Знак *минус* появляется потому, что протоны — ферми-частицы. Поэтому мы можем сказать, что вероятность зарегистрировать протон под углом θ равна

$$|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2.$$

Предположим теперь, что спин протона p_1 направлен вверх, а спин p_2 — вниз, амплитуда рассеяния частицы p_1 в направлении детектора *без переворота* спина равна $f'(\theta)$, а *с переворотом* спина $g(\theta)$; амплитуда рассеяния зависит от относительной ориентации спинов.

В этом случае амплитуду появления в детекторе протона со спином, направленным вверх, можно записать в виде $f'(\theta)+g(\pi-\theta)$.

а) Какова связь между θ и α?

б) Какова амплитуда появления в детекторе протона со спином вниз, если до рассеяния спины сталкивающихся протонов были направлены в разные стороны?

в) Предположим, что «обычный» пучок неполяризованных протонов рассеивается на обычной неполяризованной мишени и что детектор не реагирует на поляризацию. Чему равна *вероятность* рассеяния на угол θ.

г) Покажите, что при $f'=f$ и $g=0$ рассеяние протонов с хаотически ориентированными спинами представляет собой смесь «чисто фермионного рассеяния» с амплитудой $f(\theta)-f(\pi-\theta)$ и «чисто бозонного» рассеяния, амплитуда которого равна $f(\theta)+f(\pi-\theta)$, т. е. что

$$P=A|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2+B|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2.$$

Вычислите A и B.

2.12. Предположим, что N электронов находятся в очень большом ящике объема V в состоянии с наименьшей возможной энергией. Покажите, что в пренебрежении взаимодействием между электронами каждый уровень в ящике занят двумя электронами, причем импульс, соответствующий каждому уровню, $\hbar k=p$,

меньше величины $p_{\text{макс}}$, определяемой соотношением

$$N = \int_0^{p_{\text{макс}}} V \cdot 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Чему равна энергия U всех электронов? Свяжите эту внутреннюю энергию U с объемом ящика и найдите таким образом давление этого так называемого «вырожденного электронного» газа. Покажите, что объем и давление связаны соотношением $PV^\gamma = \text{const}$, и найдите γ.

2.13. Материя в звездах, известных под названием «белые карлики», сжата так сильно, что к ней применима теория, рассмотренная в последней задаче. Если ρ — плотность вещества звезды, то $\rho/2M_p$ — число протонов в 1 $м^3$ этого вещества (M_p — масса протона; кроме того, мы предполагаем, что ядра содержат примерно столько же протонов, сколько нейтронов). В уравнении к задаче **2.12** положим $N/V = \rho/2M_p$. Уравнения равновесия звезды из такого вещества, равновесия, поддерживаемого гравитационным притяжением, можно найти в книгах по астрофизике, и они записываются следующим образом:

$$P = A\rho^{5/3},$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2},$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2.$$

Можете ли вы объяснить вид этих уравнений и вывести формулу или указать численное значение для A? Считайте, что все давление создается вырожденным электронным газом, а присутствие нуклонов практически не сказывается (кстати, почему?).

К главе 3. ***Спин единица***

3. 1. Докажите высказанное в гл. 3 «Лекций» (вып. 8) утверждение, что если прибор C можно разделить

на две части A и B, то

$$\langle\chi|C|\varphi\rangle=\sum_k\langle\chi|B|k\rangle\langle k|A|\varphi\rangle.$$

3. 2. Три «усовершенствованных» прибора Штерна — Герлаха, описанные в гл. 3, которые разделяют пучок на компоненты, соответствующие различным значениям проекции спина (но без *пространственного* разделения пучка), устанавливаются последовательно друг за другом, и через них пропускается пучок частиц со спином единица. Первая и третья установки ориентированы в одном и том же направлении, а средняя устанавливается под произвольным углом. В обозначениях, которые использовались в гл. 3, это будет выглядеть так:

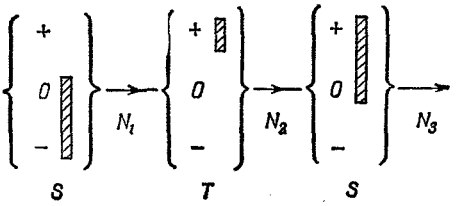
$$\left\{\begin{matrix}+\\0\\-\end{matrix}\right\}_S\quad\left\{\begin{matrix}+\\0\\-\end{matrix}\right\}_T\quad\left\{\begin{matrix}+\\0\\-\end{matrix}\right\}_S$$

а) В установке T открыта одна щель. Будет ли распределение пучка по трем состояниям в конечном состоянии S зависеть от входного состояния, т. е. от пропорций, в которых смешаны состояния $+S$, $0\ S$ и $-S$ в начальном пучке. Почему?

б) А если две щели в установке T открыты?

в) А если все три щели в T открыты?

3. 3. Тройной «усовершенствованный» эксперимент Штерна — Герлаха проводится с частицами со спином 1 по следующей схеме:



Все три прибора расположены на одной прямой, но средний прибор T повернут на 90° относительно двух других. Пучок частиц со спином 1 падает слева. Пучок, который выходит из первого прибора S, имеет интенсивность N_1 частиц в секунду.

а) Чему равна N_2— интенсивность пучка на выходе из прибора T?

б) Какова интенсивность пучка N_3 на выходе из последнего прибора S?

в) Каковы будут значения N_2 и N_3, если заслонку из прибора T удалить?

3. **4.** Рассмотрим последовательность «усовершенствованных» приборов Штерна — Герлаха S, T и S', через которые проходит пучок частиц со спином 1. (Прибор T повернут вокруг оси x на 90° по отношению к S и S'.)

а) Если из прибора S выходит N_0 частиц, найдите, какое число частиц следует ожидать на выходе прибора S' в состояниях $|+\ S'\rangle$ и $|0\ S'\rangle$. (Обозначим соответствующие значения $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$.)

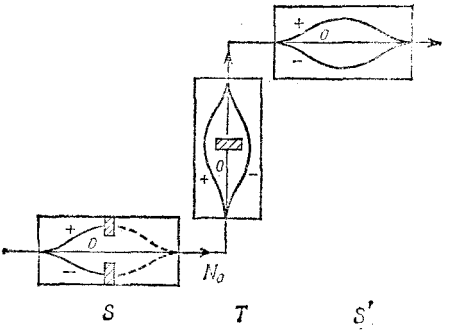
б) Предположим, что мы имеем «прозрачные детекторы», которые можно помещать в пучки + и — прибора T. Свойство этих детекторов состоит в том, что при прохождении частицы через такой детектор он сигнализирует об этом, не меняя спинового состояния частицы. Кроме того, импульс частицы не изменяется сколько-нибудь заметно в том смысле, что ее траектория внутри установки одинакова как при наличии детектора, так и без него.
Если детекторы установлены в позициях + и — прибора T (позиция 0 блокирована), каковы будут ожидаемые числа отсчетов N_{+T}, N_{-T}, $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$, если из прибора S вылетает N_0 частиц?

в) Как изменится результат для $N_{+S'}$ в описанном эксперименте, если после его проведения обнаружится, что числа отсчетов N_{+T} и N_{-T} не регистрировались?

г) Если эффективность каждого детектора равна 50% (т. е. в половине случаев пролетающая через

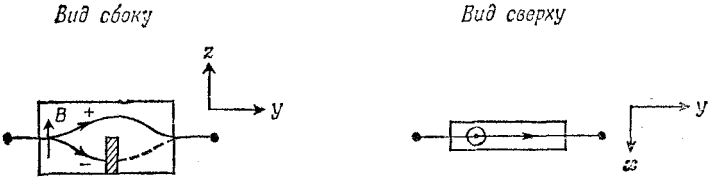
детектор частица не взаимодействует с ним), чему будут тогда равны значения $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$?

д) Чему будут равны $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$, если блокировки состояний $+S$ и $-S$ удалены и N_0 частиц выходит из S (детекторы из прибора T удалены)? Считайте пучок неполяризованным.



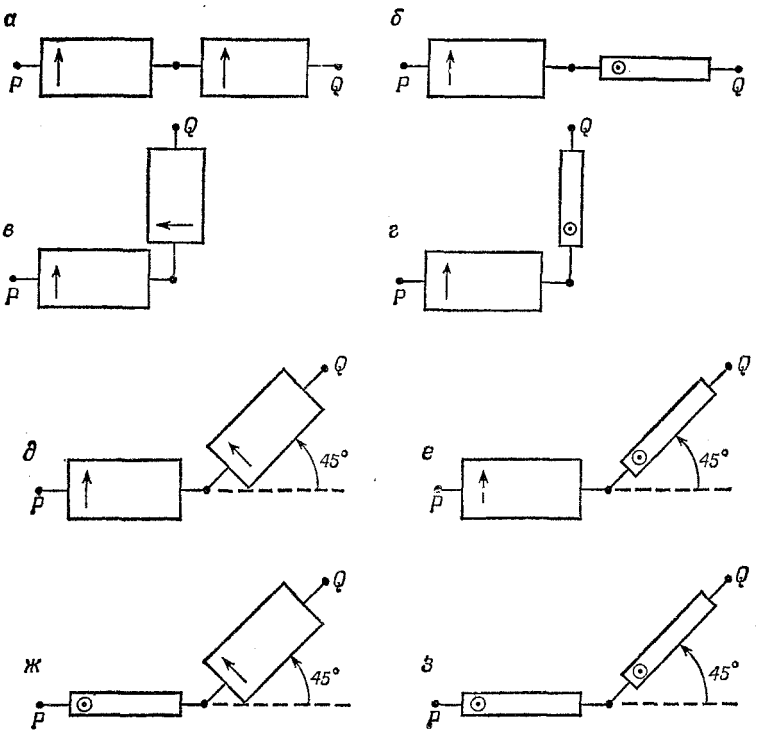
К главе 4. ***Спин одна вторая***

4. 1. Представьте себе, что пучок атомов со спином $^1/_2$ фильтруется двумя «усовершенствованными» приборами Штерна — Герлаха, установленными один за другим. Предполагается, что каждый прибор пропускает только один пучок, как изображено на фиг. 1.



Фиг. 1.

На фиг. 2 приведено несколько вариантов относительного расположения приборов. Пусть в прибор P попадает N неполяризованных атомов. Сколько атомов должно появиться в точке Q?



Фиг. 2.

4. 2. В некий прибор попадает N частиц со спином $^1/_2$, причем амплитуды для направления спина вверх и вниз вдоль оси равны соответственно a и b. Покажите, что вероятность обнаружения этой частицы в любой точке внутри прибора равна $|aX+bY|^2$, где X и Y — некоторые комплексные постоянные, характеризующие прибор. Как будет выражаться эта вероятность через X и Y, если:

1) спин влетевшей частицы направлен вверх? вниз?
2) спин направлен вдоль оси $+x$? $-x$?
3) спин направлен вдоль оси, направление которой определяется полярными углами θ и φ?

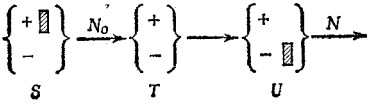
Представить себе, что спиновое состояние падающих частиц определяется «волей случая», можно несколькими способами:

а) для решения вопроса о том, в положительную или отрицательную сторону оси z будет направлен спин данного электрона, каждый раз бросается монета;
б) делается то же самое, но вдоль оси x;
в) спин каждого электрона ориентируется в некотором направлении θ, φ, но это направление каждый раз выбирается случайно, так что потом приходится все усреднять по телесному углу $\sin\theta\, d\theta d\varphi/4\pi$.

Покажите, что вероятность обнаружения частицы одна и та же для всех трех видов определения понятия «случайная ориентация».

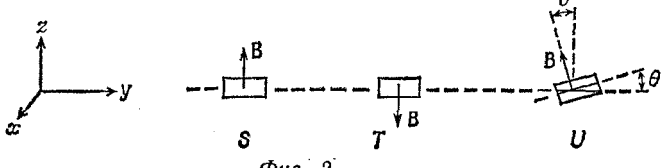
Предположим, что частицы со спином $^1/_2$ вылетают из отверстия в стенке, а перед этим направление их спина определяется одним из трех указанных способов. Можете ли вы придумать какой-нибудь способ, при помощи которого, находясь по «эту» сторону стенки, возможно определить, какой все-таки из трех методов в действительности использовался?

4. 3. Три прибора Штерна — Герлаха установлены друг за другом в последовательности, показанной на фиг. 1.



Фиг. 1.

Выразите N, число атомов со спином $^1/_2$, выходящих из прибора U, через N_0, а число атомов, выходящих из S,— через величины типа $\langle +T|+U\rangle$ и т. д.



Фиг. 2.

Затем рассмотрите ту же самую последовательность приборов, но для случая, когда поля B ориентированы согласно схеме, приведенной на фиг. 2. В частности,

I) поле B прибора T повернуто антипараллельно полю B прибора S;

II) поле B прибора U образует угол θ с осью z.

а) Получите явные выражения для $\langle +T|-S\rangle$ и $\langle -T|-S\rangle$.

б) Найдите явный вид $\langle +U|-S\rangle$, используя для упражнения *только* таблицы преобразований при вращениях вокруг осей z и y.

в) Рассмотрите результат случая (б) для предельных значений

$$\theta = 0,$$

$$\theta = \pi.$$

Объясните ответ при $\theta=\pi$, сравнивая его с $\langle +T|-S\rangle$ для случая (а).

4. 4. Призма из кальцита расщепляет пучок света, направленный вдоль оси z, на два пучка x и y. Отдельный фотон, падающий на эту призму, характеризуется определенной амплитудой попадания в один из этих пучков x, y. Такой же образец кальцита, но перевернутый, можно использовать для соединения этих лучей снова в один и т. д., аналогично тому, как это делается с частицами в приборе Штерна — Герлаха. Ось другой призмы T можно располагать под углом θ в плоскости $x-y$, переводя пучок в состояния x', y' или xT, yT. Получите амплитуды $\langle xT|xS\rangle$, $\langle yT|yS\rangle$ и т. д., используя свои знания классической теории поляризации света, считая, что при большом числе фотонов в пучке интенсивность будет хорошо описываться этими классическими результатами. Рассматривайте повороты только вокруг оси z, поскольку свет нельзя «остановить». (Повороты вокруг других осей можно описывать скорее по их действию на направление распространения света, а не на поляризацию; в этом смысле свет, хотя он и является системой с двумя

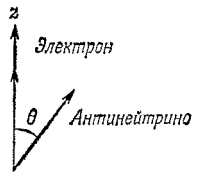
состояниями, очень сильно отличается от электрона, который тоже представляет собой систему с двумя состояниями.)

4. 5. Найдите все четыре элемента матрицы $\langle j|A|i\rangle$, где индексы i и j могут принимать значения x и y, для следующих приборов, через которые пропускается свет:

а) x, y — анализатор из кальцита и такой же синтезатор, причем луч y блокирован;
б) тот же прибор, повернутый на угол θ;
в) поляроид, ось которого направлена по оси x;
г) поляроид, ось которого образует с осью x угол θ;
д) анализатор и синтезатор из кальцита, между которыми имеется слой стекла, сдвигающий фазу луча x на угол φ;
е) анализатор и синтезатор из кальцита, причем оба луча проходят через одно и то же стекло;
ж) анализатор и синтезатор, повернутые на 45°, а также слой стекла в луче x, увеличивающий фазу на 90°;
з) пластинка толщиной $\lambda/4$;
и) пластинка из двоякопреломляющего вещества, причем оптическая ось параллельна оси x (получите общую формулу для произвольной толщины слоя этого вещества);
к) раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации вправо на угол θ;
л) устройство, которое расщепляет исходный луч на x и y, приводит луч x в плоскость y (пропуская его через раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации на 90°) и снова соединяет оба луча в один.
м) Покажите, что с помощью прибора, описанного в пункте (л), можно устроить вечный двигатель.

4. 6. Согласно теории бета-распада, в одном из частных случаев этого ядерного превращения (в том, который называется «разрешенный ферми-переход» и происходит без изменения момента количества движения и четности ядра) электрон, движущийся вдоль оси z со скоростью v, испускается со

спином вдоль оси z с амплитудой $A\sqrt{1-v/c}\sin\theta/2$ и со спином против оси z с амплитудой $A\sqrt{1+v/c}\cos\theta/2$. (Здесь A — некоторая константа, θ — угол, образуемый с осью z направлением испускания нейтрино. Так уж случилось, что спин антинейтрино всегда ориентирован вдоль направления его движения.)



а) Чему равна вероятность того, что спин направлен вверх по оси z? А вниз?
б) Рассчитайте вероятность того, что спин направлен вдоль оси $+x$ (нейтрино вылетает в плоскости xz)? Вдоль направления оси $-x$?
в) Вдоль направлений $\pm y$? (Строго говоря, это относится к системе координат, движущейся вместе с электроном.)
г) Если антинейтрино, как обычно, не регистрируется (т. е. по всем направлениям его испускания производится усреднение), каков будет ответ на вопрос (а)?

К главе 5. ***Зависимость амплитуд от времени***

5. 1. Частица со спином 1 и магнитным моментом μ в магнитном поле, направленном по оси z, может находиться в состояниях $+$, 0 и $-$, энергии которых равны $+\mu B$, 0 и $-\mu B$ соответственно. Покажите методами квантовой механики, что в неоднородном магнитном поле пучок таких частиц расщепится на три, и найдите законы, по которым эти пучки отклоняются, полагая отклонение малым. Ответ должен выражаться через протяженность области, в которой действует поле, начальный импульс ча-

стицы и т. д. Затем покажите, что такая частица будет «прецессировать» (в квантовомеханическом смысле), используя при этом коэффициенты, приведенные в § 7 гл. 3 (вып. 8), и рассуждения гл. 5 (вып. 8). Предложите по крайней мере два независимых способа экспериментального определения величины μ.

К главе 6. ***Гамильтонова матрица***

6. 1. Пучок частиц со спином $^1/_2$ и магнитным моментом μ проходит через фильтр Штерна — Герлаха, пропускающий лишь частицы в состоянии $|+\rangle$ со спином, направленным вдоль положительного направления оси z. Затем частицы проводят время T в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$, параллельном оси x. Покинув это поле, они попадают во второй фильтр Штерна — Герлаха, который пропускает лишь частицы в состоянии $|-\rangle$ (спином вниз) по отношению к оси z. Считайте, что $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{J}$ параллельны.

а) Каково минимальное значение $\mathbf{B}_0$, при котором все частицы пройдут через второй фильтр?

б) Если частицы находятся в магнитном поле только половину времени, чему равна вероятность того, что они пройдут через второй фильтр?

6. 2. Пучок частиц со спином $^1/_2$ и магнитным моментом μ проходит через прибор Штерна — Герлаха, пропускающий только частицы в состоянии $|+\rangle$ со спином, направленным вдоль положительного направления оси z. Затем пучок попадает в магнитное поле, направленное под углом 45° к оси z в плоскости x—z.

Какова вероятность того, что по истечении времени T эти частицы будут обнаружены в состояниях с $J_x=\hbar/2$ или $J_y=\hbar/2$? Векторы $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{J}$ снова считайте параллельными.

6. 3. В момент времени $t=0$ спин частицы направлен вдоль оси $+z$ (величина спина $^1/_2$). Частица помещена внутрь прибора, который задает постоянную амплитуду переворота спина частицы в единицу

времени, равную $iA/\hbar$, т. е. $H_{12}=H_{21}=-A$, где A — положительная константа. Кроме того, $H_{11}=H_{22}$ и их можно положить равными нулю.

а) Чему равна вероятность обнаружить частицу в момент времени T в состоянии $+z$?

б) Найдите две линейные комбинации амплитуд состояний $+$ и $-$, которые соответствовали бы стационарным состояниям. Чему равны энергии этих стационарных состояний?

в) В любой момент времени T существует направление, вдоль которого спин направлен вверх с вероятностью единица. Найдите это направление.

г) Можете ли вы придумать физический прибор для реализации рассмотренного эффекта.

К главе 7. ***Аммиачный мазер***

7. 1. В гл. 7 «Лекций» (вып. 8) рассчитывалась вероятность перевода молекулы аммиака из состояния $|II\rangle$ в состояние $|I\rangle$ при помощи облучения ее радиоволнами с очень короткой длиной волны; состояние $|II\rangle$ имеет меньшую энергию, чем состояние $|I\rangle$, поэтому такой переход соответствует поглощению энергии излучения.

Попробуйте развить эти идеи и применить их к вычислению вероятности индуцировать излучение молекулы аммиака. Как относится вероятность излучения к вероятности поглощения? Как эта вероятность связана с коэффициентами Эйнштейна A_{mn} и B_{mn}, которые были определены в вып. 4, стр. 79? Найдите интенсивность спонтанного излучения молекулы аммиака.

7. 2. Протоны с магнитным моментом μ, находящиеся в водном образце, помещены в однородное магнитное поле. Амплитуда поля постоянна, а направление изменяется со временем (проводится эксперимент по ядерному магнитному резонансу — ЯМР):

$$B_x = B\sin\theta\cos\omega t,$$
$$B_y = -B\sin\theta\sin\omega t,$$
$$B_z = B\cos\theta.$$

В начальный момент $t=0$ спины всех протонов направлены вдоль магнитного поля (находятся в состоянии $+{}^1/_2$). Предположим, что θ, полярный угол в сферических координатах, *очень мал*. Каково должно быть значение ω, чтобы наблюдался резонанс? Какова вероятность того, что частица имеет спин, направленный *вниз* в момент времени t, если частота ω имеет резонансное значение?

К главе 8. ***Другие системы с двумя состояниями***

8. 1. Частица со спином ${}^1/_2$ помещена в сильное магнитное поле $\mathbf{B}_0$. В направлении, перпендикулярном $\mathbf{B}_0$, приложено осциллирующее магнитное поле $2B_n\cos\omega t$, причем $B_n \ll B_0$. Если спин частицы первоначально был ориентирован антипараллельно вектору $\mathbf{B}_0$, какова вероятность того, что в момент времени T спин будет направлен параллельно этому вектору?

К главе 9. ***Еще системы с двумя состояниями***

9. 1. Покажите, что спиновые матрицы Паули можно рассматривать как компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$, для которого справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma} = 2i\boldsymbol{\sigma},$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите произведение $\sigma_x\sigma_y\sigma_z$.

9. 2. Молекула двуокиси углерода имеет линейную структуру (OCO) и с легкостью присоединяет лишний электрон, превращаясь тем самым в отрицательный ион. Предположим, что этот электрон будет иметь энергию E_O, если присоединится к атому кислорода, и энергию E_C, если к атому углерода. Ни одна из этих энергий, однако, не будет соответствовать стационарному состоянию, поскольку всегда существует небольшая вероятность перехода лишнего электрона с кислорода на углерод и обратно. (Мы будем считать вероятность того, что электрон «пере-

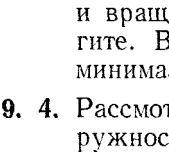
прыгнет» непосредственно с одного атома кислорода на другой, пренебрежимо малой.)

а) Получите значения энергии уровней иона CO_2, выразив их через E_O, E_C и еще один параметр.

б) Дайте физическое описание каждого стационарного состояния для случая, если значения энергий E_O и E_C совпадают.

9. 3. В молекуле метана CH_4 атомы водорода располагаются в вершинах тетраэдра, а единственный атом углерода — в центре тетраэдра. В ионе метана не хватает электрона на одной из этих четырех связей, а вместо него остается «дырка», которая может «перескакивать» с одной связи на другую. Это пример системы с четырьмя состояниями. Опираясь на соображения симметрии, сведите к минимуму число различных матричных элементов гамильтониана и предскажите число различных энергетических уровней, которые должны наблюдаться у электронной оболочки иона метана. Колебательным и вращательным взаимодействием атомов пренебрегите. Выразите расстояние между уровнями через минимально возможное число матричных элементов.

9. 4. Рассмотрим шесть атомов, расположенных по окружности на равных расстояниях друг от друга. Добавим лишний электрон и обозначим базисные состояния символами $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., $|6\rangle$, где $|1\rangle$ обозначает, что этот добавочный электрон находится в атоме 1, и т. д. Предположим далее, что этот электрон может перескакивать со «своего» атома лишь на один из двух соседних, но не дальше.



Покажите, что $|I\rangle$ — это стационарное состояние, если амплитуды $C_i = \langle i|I\rangle$ (где $|i\rangle$ — i-е базисное состояние) все равны $(1/\sqrt{6})\exp(-iE_I t/\hbar)$. Найдите E_I. Сколько еще существует стационарных состояний у такой системы?

Можно показать, что если ψ — стационарное состояние, то амплитуды $C_i = \langle i|\psi\rangle$ связаны между собой следующим образом (при надлежащем выборе

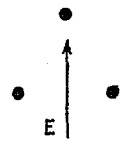
постоянной δ):

$$C_2 = C_1 e^{i\delta}, \qquad C_5 = C_4 e^{i\delta},$$
$$C_3 = C_2 e^{i\delta}, \qquad C_6 = C_5 e^{i\delta}.$$
$$C_4 = C_3 e^{i\delta},$$

Чему равны эти «надлежащим образом» выбранные значения δ? Постройте диаграмму уровней рассматриваемой системы и найдите расстояния между уровнями.

9. 5. Молекула состоит из трех одинаковых атомов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. В отрицательном ионе такой молекулы есть дополнительный электрон, способный перескакивать с каждого из трех атомов на любой другой.

а) Пусть матричный элемент такого перехода равен $-A$. Рассчитайте расстояние между уровнями молекулярного иона.



б) Ион помещен в электрическое поле, направление которого совпадает с плоскостью иона, а по отношению к его вершинам поле направлено так, как показано на рисунке. Если напряженность поля такова, что потенциальная энергия электрона, расположенного «в вершине» треугольника, на $\varepsilon A = 0{,}01A$ больше, чем в двух других вершинах, как изменятся расстояния между уровнями?

К главе 10. ***Сверхтонкое расщепление в водороде***

10. 1. Рассчитайте величины расщеплений уровня атома водорода с $j=1$, помещенного в межзвездное пространство, где напряженность магнитного поля составляет 10^{-5} *гс*, на поверхности Земли (примерно 0,5 *гс*) и в самом сильном магнитном поле, которое можно получить в лабораторных условиях (порядка 100 000 *гс*). Ответ выразите через частоту и через длину волны.

9

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (II)

К главе 11. ***Распространение в кристаллической решетке***

11. 1. Рассмотрим бесконечную цепочку атомов, расположенных друг от друга на равных расстояниях b (координата атома n равна $x=bn$), и предположим, что электрон может находиться в каждом из атомов в двух состояниях i и j с различными энергиями E_i и E_j, т. е. набор базисных состояний можно записать следующим образом:

$|$электрон на атоме x_n в состоянии $i\rangle = |x_n, i\rangle$,

$|$электрон на атоме x_n в состоянии $j\rangle = |x_n, j\rangle$.

Предположим далее, что электрон может перескакивать со своего атома на ближайший соседний с амплитудами:

$-\frac{A_{ii}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, i\rangle$ на $|x_{n+1}, i\rangle$ или $|x_{n-1}, i\rangle$,

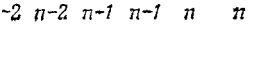
$-\frac{A_{jj}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, j\rangle$ на $|x_{n+1}, j\rangle$ или $|x_{n-1}, j\rangle$,

$-\frac{A_{ji}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, i\rangle$ на $|x_{n+1}, j\rangle$ или $|x_{n-1}, j\rangle$,

$-\frac{A_{ij}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, j\rangle$ на $|x_{n+1}, i\rangle$ или $|x_{n-1}, i\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $A_{ij}=A_{ji}=B$ и $A_{jj}=A_{ii}=A$. С помощью процедуры, описанной в гл. 11 «Лекций», найдите допустимые значения энергии такой системы. Опишите зонную структуру в предельных случаях $|E_i-E_j| \ll 2B$ и $|E_i-E_j| \gg 2B$. Сравните свой ответ с решением, найденным в гл. 11.

11. 2. Рассмотрим бесконечную цепочку, состоящую из атомов двух типов a и b:



Пусть амплитуда обнаружения электрона на n-м атоме типа a будет C_n^a, а на n-м атоме типа b — будет C_n^b. Предположим, что энергия электрона в атоме a равна $E_0+\Delta E$, а в атоме b равна $E_0-\Delta E$; допустим еще, что матричный элемент гамильтониана для перехода между ближайшими соседями равен $-A$. Расстояние между атомами равно c. Рассчитайте и приближенно начертите график зависимости энергии стационарного состояния от волнового числа k. (*Для каждого заданного значения k получатся два значения энергии.*) Какие ограничения следует наложить на значения k, чтобы учесть каждое состояние ровно один раз?

11. 3. Рассмотрим рассеяние на примеси (см. пример, приведенный в гл. 11, вып. 9). Пусть атом под номером $n=0$ отличается от всех остальных. Положим $H_{00}=E_0$, $H_{01}=H_{10}=H_{0(-1)}=H_{(-1)0}=-B$, где $B\neq A$. Найдите β и γ и убедитесь в том, что $|\beta|^2+|\gamma|^2=1$.

11. 4. В предыдущей задаче, как и в примере, приведенном в гл. 11 (вып. 9), $\beta=\gamma-1$. Легко проверить также, что в любом более общем случае, являющемся комбинацией этих двух, равенство $\beta=\gamma-1$ также справедливо.

Следовательно, в общем случае одномерного рассеяния существует «закон сохранения числа частиц»

$$|\beta|^2+|1+\beta|^2=1.$$

а) Покажите, что для его выполнения необходимо, чтобы

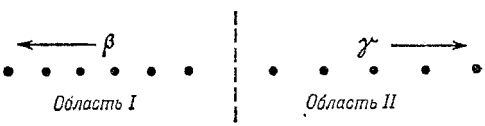
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)=0.$$

б) Покажите, что β можно записать следующим образом:

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta,$$

где η — вещественное число. Величина η называется «сдвигом фазы при рассеянии» и содержит информацию как о фазе, так и об амплитуде рассеянной волны. (Это утверждение в трехмерном случае справедливо так же, как и в одномерном.)

11. 5. Рассмотрим одномерный аналог поверхности раздела, где бесконечный кристалл претерпевает изменение своих свойств. Пусть частица падает слева, как в гл. 11. Пусть в области I значения параметров равны E_0, $-A$, b, а в области II равны E_0', $-A'$, b'. Аналог амплитуд A и A' для атомов, расположенных по обе стороны линии раздела, обозначим буквой B. Предположим, что A, A' и B — вещественные числа.



а) Покажите, что $\gamma = \frac{B}{A'}(1+\beta)$ в разрыве между атомами $n=0$ и $n=+1$.

б) Выразите β через A, A', B, kb, $k'b'$. Покажите, что $|\beta|=1$ при мнимом $(k'b')$. Каков физический смысл этого результата? При каких значениях $(E-E_0')$ получается полное отражение?

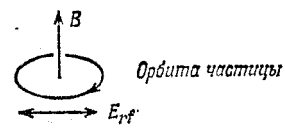
в) Проверьте закон сохранения числа частиц, показав, что

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v_g'/b'}{v_g/b} = 1,$$

где v_g и v_g' — групповые скорости в разных областях. Как вы объясните появление множителя при $|\gamma|^2$?

К главе 12. ***Полупроводники***

12. 1. Ниже приведена обычная схема проведения экспериментов по циклотронному резонансу.



$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$ — статическое магнитное поле, направленное по оси z. Переменное электрическое поле $E=E_0\cos\omega t$ направлено по оси x.
Частота циклотронного резонанса ω_c определяется по максимуму поглощаемой мощности поля E. Элементарное решение задачи о движении частицы в однородном магнитном поле дает

$$\omega_c=\frac{qB_0}{m^*},$$

где m^* — эффективная масса. Предположим, что эффективная масса не зависит от направления, по которому движется частица.
Уравнение движения электрона (или дырки) в полупроводнике имеет вид

$$m^*\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{\mathbf{v}}{\tau}\right)=q\,(\mathbf{E}+(\mathbf{v}\times\mathbf{B})),$$

где τ — среднее время между столкновениями (см. «Лекции», вып. 7, гл. 32).
Пусть $v_x=v_0e^{i\omega t}$, а $E_x=E_0e^{i\omega t}$. Покажите, что

$$\frac{v_x}{E_x}=\frac{q\tau}{m^*}\left[\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega_c^2-\omega^2)\,\tau^2+2i\omega\tau}\right].$$

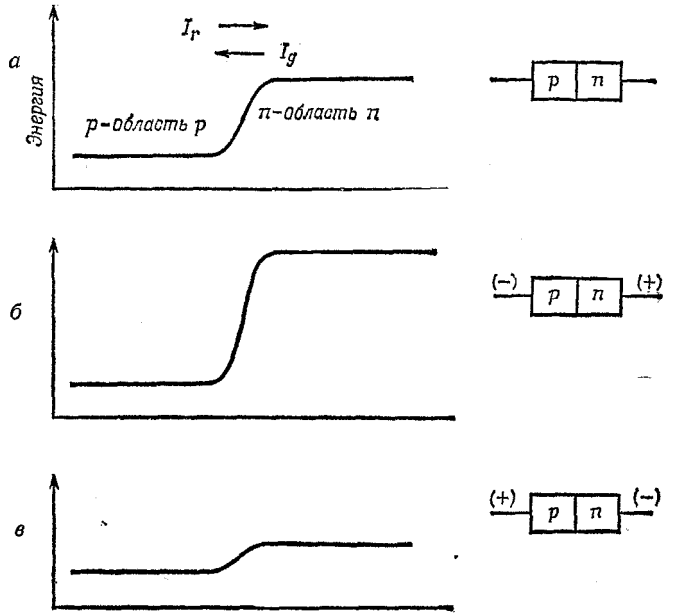
Поглощаемая мощность пропорциональна $\mathrm{Re}\,[v_x/E_x]$. Почему? Как получить сразу обе величины τ и m^* из данных по циклотронному резонансу? Обратите внимание на то, что для наблюдения резонанса необходимо, чтобы $\omega_c\tau>1$. Что это означает физически?

12. 2. На рисунке (стр. 542) показана типичная энергетическая диаграмма для дырок в p — n-переходе

(например, в полупроводниковом диоде) в отсутствие внешнего напряжения. В равновесном состоянии в этом случае имеется ток «тепловых дырок» I_g. Эти дырки диффундируют из области n в область p, и «ток рождения» в точности равен «току рекомбинации дырок» I_r, который течет из области p в область n. Если приложить «обратное напряжение» или «прямое напряжение» к p — n-переходу, то энергетическая диаграмма изменится (см. фиг. *б* и *в*). Рассмотрите эти три случая и покажите, что выражение для результирующего дырочного тока имеет вид

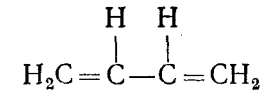
$$I\,(\text{дырка}) = I_g\,(e^{qV/kT} - 1).$$

А какое выражение получится для полного тока? (V — напряжение, приложенное к p — n-переходу.)



К главе 13. ***Приближение независимых частиц***

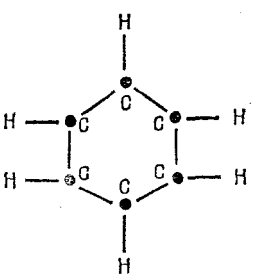
13. 1. Структуру молекулы бутадиена можно изобразить следующим образом:



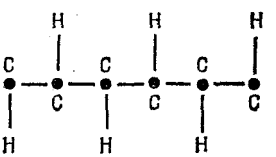
Мысленно удалим четыре электрона, осуществляющие двойные связи, а затем будем добавлять их по одному. Такую задачу можно рассматривать с помощью модели независимых частиц.

В частности, эту систему можно рассматривать как совокупность четырех потенциальных ям с энергиями E_0 и матричными элементами гамильтониана — A. Чему равна длина волны излучения, испускаемого молекулами бутадиена при переходе с первого возбужденного уровня на основной? Считайте, что $A=1$ *эв*. В однократно ионизованной молекуле бутадиена имеется только три электрона из двойных связей. Что вы можете сказать о распределении этих электронов в молекуле?

13. 2. Нужно оценить энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, и рассчитать разность энергий двух конфигураций, показанных на рисунке. Используйте для этой оценки теорию молекулярных орбит в приближении независимых частиц. Ответ выразите в *эв* на молекулу, используя тот факт, что



а



б

при переходе с первого возбужденного состояния на основное молекулы бензола испускают излучение с длиной волны 2000 Å.

13. 3. К ферромагнитному веществу при очень низких температурах применимы те рассуждения о спиновых волнах, которые приведены в гл. 13 «Лекций» (вып. 9). В частности, для любого состояния K с энергией $E_K \approx K^2b^2A$ существует определенная вероятность (ее можно найти из термодинамических соображений) обнаружить несколько атомов в состояниях «спином вниз», если при нулевой температуре все атомы находились в состояниях «спином вверх». Покажите, что среднее число атомов со спинами, направленными вниз, пропорционально $1/e^{E_K/kT} - 1$. Если распространить эти рассуждения на трехмерный случай, то $E_K \approx Ab^2(K_x^2+K_y^2+K_z^2)$ и полное число атомов «спином вниз» в единице объема определяется выражением

$$\frac{\text{Число атомов спином вниз}}{\text{Объем}} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT}-1}.$$

Докажите это. В пределе при $T \to 0$ намагниченность выходит на насыщение и принимает значение $M_{\text{насыщ}}$. Покажите, что при низких температурах справедлив закон

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - \text{const}\, T^{3/2} = 1 - 2\left(\frac{kT}{4\pi A}\right)^{3/2}\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^2}-1}\right].$$

Вычислите интеграл, разложив подынтегральное выражение в ряд.

К главе 14. ***Зависимость амплитуд от места***

14. 1. Рассмотрим одномерное движение частицы с массой m в прямоугольной потенциальной яме. Для простоты предположим, что $V_0 \to \infty$.

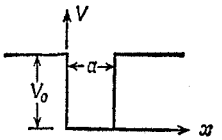
а) В стационарном состоянии с наименьшей энергией E_0: $\psi_0(x,\ t) = u_0(x)\,e^{-iE_0t/\hbar}$.

Мы должны считать, что $u_0(x)=0$ во всех точках вне ямы (т. е. уже при $x=-\varepsilon$ или $x=a+\varepsilon$). Почему?

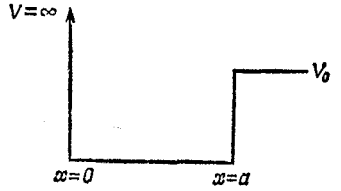
б) Решите уравнение Шредингера внутри ямы, используя граничное условие, приведенное в пункте (а). Найдите E_0 и изобразите зависимость $u_0(x)$. Нормировать $u_0(x)$ не нужно.

в) Найдите разность энергий первого возбужденного и основного состояний.

г) Для самого нижнего состояния изобразите грубо вероятность обнаружить у частицы значение импульса в интервале от p до $p+dp$. Точного интегрирования не требуется, о нормировке тоже не беспокойтесь. Но масштаб по оси импульсов укажите.



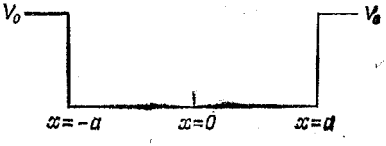
14. 2. Рассмотрим движение частицы с массой m в одномерной потенциальной яме, которая изображена на фиг. 1.



Фиг. 1.

а) Найдите такое значение V_0, при котором энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при $V_0\to\infty$.

б) Пусть V_0 — значение, найденное в пункте (а).



Фиг. 2.

Не пускаясь в длинные вычисления, найдите энергию первого возбужденного состояния в яме, изображенной на фиг. 2 и определяемой следующими условиями:

$$V = V_0 \qquad x < -a,$$
$$V = 0, \qquad -a < x < +a,$$
$$V = V_0, \qquad x > a.$$

14. 3. Рассмотрим следующую одномерную задачу. Частица массы m находится в прямоугольной потенциальной яме:

$$V = V_0, \qquad |x| > a,$$
$$V = 0, \qquad |x| < a.$$

Ниже приведены два равенства. Покажите, что их можно получить, потребовав, чтобы волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера, удовлетворяли необходимым граничным условиям. Речь идет о таких равенствах:

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$$

или

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = +\beta,$$

где

$$\alpha = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}, \qquad \beta = +\left[\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\right]^{1/2}.$$

Если $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$, оцените значения энергии основного и первого возбужденного состояний. Нанесите на график волновые функции этих состояний. Сколько всего существует связанных состояний, если $V_0 a^2 < (\pi^2\hbar^2/8m)$?

14. 4. В гл. 14 «Лекций» (вып. 9) был найден разброс по импульсам для случая, когда волновая функция имеет гауссову форму. В общем случае, однако, пространственная протяженность волнового пакета не останется постоянной, а будет увеличиваться:

$$\varphi(x, t) = Ke^{-[a(t)x^2 + c(t)]}.$$

Используя уравнение Шредингера, покажите, что

для свободной частицы

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m} t.$$

Чему равно $c(t)$? Если волновая функция описывает электрон, первоначально находившийся внутри области шириной 1 Å, то какова будет ширина этой «области локализации» через 1 *сек*? Преобразуем волновую функцию в импульсное представление, т. е. найдем вероятность обнаружения частицы с заданным значением импульса p. Как изменяется со временем ширина распределения вероятностей для импульсов? Покажите, что найденный таким образом «разброс по импульсам» согласуется с «разбросом по скоростям», который можно непосредственно получить из временно́й зависимости координатной волновой функции.

К главе 16. ***Момент количества движения***

16. 1. Некоторое возбужденное состояние атома имеет спин 1 и может «разрядиться», испустив фотон и перейдя в состояние со спином, равным нулю. Рассмотрим возбужденный атом, у которого проекция момента на ось z равна нулю. Пусть $A(\theta)$ — амплитуда испускания фотона с правой круговой поляризацией в малый интервал телесных углов $\Delta\Omega$ в направлении, образующем с осью z угол θ. Как $A(\theta)$ зависит от θ?

16. 2. Частица X, имеющая спин $^1/_2$, распадается по схеме

$$X \to Y + \gamma,$$

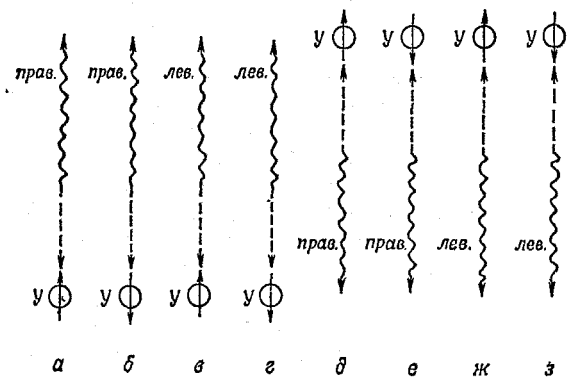
где частица Y имеет спин $^1/_2$ и положительную четность. Если спин частицы X направлен вдоль оси z, то продукты распада, движущиеся вдоль оси z, могут получаться в восьми состояниях, представленных на рисунке (стр. 548). Волнистая и штрихованная линии со стрелками указывают соответственно направление движения фотона и частицы Y, а стрелка у Y — направление спина этой частицы.

а) Какие амплитуды конечных состояний обязательно равны нулю?

б) Рассчитайте угловое распределение частиц Y, поляризованных вдоль направления своего движения, если распадающиеся частицы X поляризованы вдоль оси z.

в) Рассчитайте угловое распределение всех частиц Y независимо от их поляризации.

г) Тщательные эксперименты не обнаружили в этом распаде каких-либо отклонений от изотропного углового распределения. Какой физической причиной это можно объяснить?



16. 3. На синхротроне исследуется реакция

$$\gamma + p \to p^* \to p + \pi^0.$$

Значком p^* обозначено возбужденное состояние протона, которое распадается на протон и π^0-мезон. Известно, что в определенном интервале энергий фотона состояние p^* имеет полный момент $^3/_2$. Предположим, что пучок фотонов, обладающих правой круговой поляризацией и энергией, лежащей в упомянутом интервале, падает вдоль оси z на мишень, состоящую из неполяризованных протонов. Угловое распределение этой реакции можно анализировать, рассуждая следующим образом. Фотон и протон образуют p^* в состоянии $|j=^3/_2, m=+^1/_2\rangle$ с амплитудой a и в состоянии $|^3/_2, +^3/_2\rangle$ — с ам-

плитудой b. Возбужденное состояние распадается на π^0-мезон с нулевым спином и протон, движущиеся в противоположных направлениях. Пусть f — амплитуда вылета протона вдоль оси z со спином, направленным вверх, а g — со спином, направленным вниз.

Объясните, почему для состояния p^* разрешенными являются только значения $m=+{}^3/_2$ и $m=+{}^1/_2$, а для конечного состояния — только значения $m'=+{}^1/_2$ и $m'=-{}^1/_2$ (m' обозначает проекцию на направление испускания). Выразите угловое распределение π^0-мезонов через a, b и θ. Полагайте $f=g$.

16. 4. Рассмотрим упругое рассеяние π^+-мезонов на неполяризованной протонной мишени. Мезоны имеют спин 0; четность сохраняется. Предполагается, что в рассеянии доминирует процесс, при котором протон переходит в возбужденное состояние с $j={}^3/_2$, поглощая мезон. (Момент $j={}^3/_2$ получается за счет сложения спина протона и орбитального момента.) Затем мезон испускается снова, а протон переходит в основное состояние. Покажите, что из такого предположения следует угловое распределение рассеянных мезонов, пропорциональное $(1+3\cos^2\theta)$.

16. 5. Основное состояние атома имеет спин, равный нулю, и положительную четность. Спин первого возбужденного состояния равен единице, а четность неизвестна. Пусть некоторое количество атомов находится в первом возбужденном состоянии, и все они имеют проекцию момента $m=1$ на ось z. Рассмотрим фотоны, которые испускаются этими атомами при переходе в основное состояние.

а) Можно ли определить четность возбужденного состояния, если измерять угловое распределение испускаемых фотонов, не обращая внимания на их поляризацию?

б) Покажите, что эту неизвестную четность можно определить, измеряя угловые распределения фотонов, поляризованных вдоль направлений x' и y'. (Ось z' выбирается в направлении движения фотона и располагается в плоскости $x-z$.)

Решения и ответы

8

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

К главе 1. ***Амплитуды вероятности***

1.1. Вероятность того, что частица достигнет экрана в точке x, если открыта щель *1*, равна

$$P_1 = |\langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle|^2,$$

если открыта щель *2*, то

$$P_2 = |\langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2,$$

а при обеих открытых щелях

$$P_{12} = |\langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2.$$

Учитывая симметричное расположение щелей и предполагая, что источник испускает частицы изотропно, можно записать

$$\langle 1|s\rangle = \langle 2|s\rangle = c.$$

Считая щели бесконечно узкими, можно воспользоваться формулой (1.7) «Лекций» (вып. 8, стр. 14). Тогда с точностью до несущественного численного множителя

$$\langle x|1\rangle = \frac{e^{ikl_1}}{l_1}, \quad \langle x|2\rangle = \frac{e^{ikl_2}}{l_2},$$

где l_1 и l_2 — расстояния от щелей *1* и *2* до точки x, а $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Таким образом,

$$P_1 = \frac{|c|^2}{l_1^2}, \quad P_2 = \frac{|c|^2}{l_2^2}, \quad P_{12} = |c|^2\left|\frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2}\right|^2.$$

Обозначим расстояние от щелей до экрана через l, тогда

$$l_1 = \left[l^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad l_2 = \left[l^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Задача нахождения максимума P_{12} как функции x приводит к трансцендентному уравнению, получающемуся из условия $dP_{12}(x)/dx = 0$. Для простоты будем предполагать $l \gg a$, $l \gg x$. При этом величины l_1 и l_2 в знаменателе P_{12} можно принять равными,

$$l_1 \approx l_2 \approx l,$$

тогда как в фазовых множителях необходимо учитывать разность хода лучей,

$$l_2-l_1=\sqrt{l^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{l^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\approx\frac{ax}{l}.$$

Тогда, вынося за скобки в P_{12} первую экспоненту, получаем выражение

$$P_{12}=\frac{|c|^2}{l^2}\left|1+e^{ikax/l}\right|^2,$$

которое нетрудно преобразовать к виду

$$P_{12}=\frac{2|c|^2}{l^2}\left(1+\cos\frac{kax}{l}\right).$$

Максимумы этого выражения, очевидно, определяются условием

$$\frac{kax_n}{l}=2\pi n,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\ .$$

Пусть расстояние между центральным ($n=0$) и первым боковым ($n=1$) максимумами равно b, тогда

$$\lambda\approx\frac{ab}{l}\approx 0{,}25\ см.$$

В рассматриваемом приближении величины P_1 и P_2 одинаковы и не зависят от x. Фактически, однако, из-за конечной ширины щели, а также зависимости l_1 и l_2 от x, эти величины будут плавно зависеть от x. При этом положение максимумов и минимумов P_{12} будет определяться практически прежним условием. Если фазы двух волн совпадают (максимум), то, очевидно,

$$P_{12}=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2,$$

а если они отличаются на π (минимум), то

$$P_{12}=(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2})^2.$$

Для центрального максимума из рис. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11) найдем $P_1=P_2=0{,}5$, $P_{12}=1{,}9$ (в произвольных единицах). Расчет дает

$$P_{12}=(\sqrt{0{,}5}+\sqrt{0{,}5})^2=2{,}0.$$

Для первого бокового максимума, согласно рисунку, $P_1=0{,}3$, $P_2=0{,}65$, $P_{12}=1{,}3$, тогда как расчетное значение $P_{12}=1{,}8$. Для первого минимума $P_1=0{,}4$, $P_2=0{,}6$, $P_{12}=0{,}1$ и

$$P_{12\ \text{расчетное}}=0{,}02.$$

Для второго минимума $P_1=0{,}2$, $P_2=0{,}63$, $P_{12}=0{,}1$ и

$$P_{12\ \text{расчетное}}=0{,}15.$$

1.2. а) Если источник сдвинуть вверх на расстояние D, то разность фаз двух лучей, приходящих в точку x, очевидно, составит $\Delta\varphi = k(L_2 - L_1 + l_2 - l_1)$, где

$$L_1 = \sqrt{L^2 + \left(D - \frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{и} \quad L_2 = \sqrt{L^2 + \left(D + \frac{a}{2}\right)^2}$$

— расстояния от источника до щелей *1* и *2* соответственно; L — расстояние от источника до преграды, в которой прорезаны щели. Величины l_1, l_2, a и k те же, что в предыдущей задаче. Принимая $a \ll L$ и $x \ll l$, получаем $\Delta\varphi \approx (ka/l)(x + Dl/L)$. Таким образом, разность фаз для точки x в рассматриваемом случае совпадает с разностью фаз для точки $x' = x + Dl/L$ в случае, когда источник находится на осевой линии. Следовательно, вся интерференционная картина сместится вниз на расстояние Dl/L по сравнению с рассмотренной в предыдущей задаче.

б) Согласно результатам предыдущей задачи, расстояние между двумя соседними максимумами определяется формулой

$$b = \frac{\lambda l}{a} \qquad (a \ll l, \quad b \ll l).$$

Следовательно, если увеличить вдвое расстояние a между щелями, то расстояние между максимумами уменьшается вдвое. Вся интерференционная картина «сожмется» по оси x в масштабе 1:2.

в) Поскольку ширина щели считается бесконечно малой (т. е. разность хода лучей, проведенных через разные точки щели, равна нулю), то изменение ширины щели *1* вдвое приведет лишь к увеличению вдвое амплитуды волны в точке *1*, т. е.

$$\langle 1 \mid s \rangle = 2 \langle 2 \mid s \rangle = 2c.$$

Тогда

$$\langle x \mid s \rangle = \langle x \mid 1 \rangle \langle 1 \mid s \rangle + \langle x \mid 2 \rangle \langle 2 \mid s \rangle = c\left(2\frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2}\right).$$

В тех же приближениях, что и раньше, получаем

$$P_{12} = \frac{|c|^2}{l^2}\left(5 + 4\cos\frac{kax}{l}\right).$$

Сравнивая это выражение с результатом задачи **1.1**, убеждаемся, что при увеличении ширины одной из щелей вдвое максимумы интенсивности увеличатся в 9/4 раза, а в минимумах она не обращается в нуль, а составляет 1/4 интенсивности в прежних максимумах.

1.8. Интенсивность прошедшего света будет в $\cos^2\theta$ раз слабее, чем падающего. Единичный фотон может либо пройти, либо не пройти через поляроид. Вероятность прохождения фотона, поляризованного в вертикальной плоскости, равна $\cos^2\theta$, причем прошедший фотон будет поляризован вдоль «оси пропускания».

1.4. Электроны, проходя через кристалл, испытывают дифракцию так же, как, например, рентгеновские лучи. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке обсуждалась в гл. 38 вып. 3. Там отмечалось, что для рассмотрения такой дифракции удобно ввести представление об интерференции лучей, отраженных от системы параллельных атомных плоскостей. При этом условие максимума

$$n\lambda = 2d\sin\theta \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

здесь d — расстояние между соседними атомными плоскостями; λ — длина волны; 2θ — угол между падающим лучом и направлением на дифракционный максимум. В кристалле можно выделить много систем таких плоскостей, характеризующихся различными значениями d. Отметим, что для решетки золота (кубической гранецентрированной) максимальное d равно постоянной кристаллической решетки $a \approx 2{,}88\cdot 10^{-10}$ *м*, следующее за ним равно $a/\sqrt{2}$, и т. п.

Рассмотрим теперь, к чему приведет хаотическая ориентация отдельных кристаллов в поликристаллической фольге. Если $\lambda < 2d$, то среди кристалликов фольги обязательно найдутся такие, для которых условие максимума выполнено. Далее, поскольку кристаллики имеют всевозможные ориентации, то дифракционная картина будет симметрична относительно направления пучка. В результате на фотопластинке области почернения будут иметь форму концентрических колец с центром на оси пучка и с радиусом

$$R_n = L\,\mathrm{tg}\,2\theta \approx \frac{n\lambda L}{d};$$

здесь L — расстояние от фольги до фотопластинки. Первому кольцу соответствует $n = 1$ и максимальное значение d. Вычислим теперь радиусы первых колец. Длина волны для электронов с кинетической энергией W равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}} \approx 9\cdot 10^{-10}\ \text{см},$$

так что радиус первого кольца

$$R_1 = \frac{\lambda L}{a} = \frac{2\pi\hbar L}{a\sqrt{2mW}} \approx 0{,}3\ \text{см}.$$

Второму кольцу соответствует $n = 1$ и $d = a/\sqrt{2}$, так что

$$R_2 = R_1\sqrt{2} \approx 0{,}4\ \text{см}.$$

При вычислении следующих радиусов нужно учитывать, что новые максимумы соответствуют не только новым значениям d, но и значениям $n > 1$.

1.5. Пусть l_1 и l_2 — расстояния от щелей *1* и *2* до точки x на экране. Тогда суммарная амплитуда появления электрона в точке x будет пропорциональна

$$A(x) = a_1 \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + a_2 \frac{e^{ikl_2}}{l_2}.$$

Величины l_1 и l_2 выражаются через l, a и x так же, как в задаче **1.1**. При малых a ($a \ll l$) и x ($x \ll l$) имеем

$$A(x) \approx \frac{1}{l}\left(a_1 e^{-ikxa/2l} + a_2 e^{ikxa/2l}\right) e^{ikl}.$$

Введем фазы и абсолютные значения амплитуд:

$$a_1 = |a_1| e^{i\delta_1}, \quad a_2 = |a_2| e^{i\delta_2}.$$

Тогда

$$|A(x)|^2 = \frac{1}{l^2}\left[|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos\left(kx\frac{a}{l} + \delta_2 - \delta_1\right)\right].$$

1.6. а) Амплитуду попадания частицы в точку x запишем в виде

$$A(x) = c\left(\frac{e^{ikL_1}}{L_1} + \frac{e^{ikL_2}}{L_2}\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda = p_0/\hbar$ — волновое число;

$$L_1 = \left\{L^2 + [(d/2) - x]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad L_2 = \left\{L^2 + [(d/2) + x]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

— расстояния от щелей *1* и *2* до точки x. При $L \gg d$ и $L \gg x$ имеем

$$|A(x)|^2 = \frac{4|c|^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right),$$

где $\varphi_2 - \varphi_1 = kxd/L$. Для первого бокового максимума $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, $x = a$. Таким образом, $a = 2\pi\hbar L/p_0 d$.

б) Если внешнее воздействие меняет фазы первого и второго лучей соответственно на величины $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{kxd}{L} + \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1.$$

Центральный максимум будет расположен в точке $x_0 = S$, для которой $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Следовательно,

$$S = (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)\frac{\hbar L}{p_0 d}.$$

в) В силу закона сохранения энергии

$$\frac{p^2(x)}{2m}+V(x)=\frac{p^2(0)}{2m}+V(0),$$

откуда

$$p(x)=p(0)\sqrt{1+\frac{2m}{p^2(0)}[V(0)-V(x)]}.$$

Так как потенциальная энергия невелика, то можно записать

$$p(x)\approx p(0)+\frac{m}{p(0)}[V(0)-V(x)].$$

Если $V(x)$ медленно меняется с расстоянием, то

$$V(x)\approx V(0)-Fx$$

и соответственно

$$p(x)=p(0)+\frac{Fx}{v}.$$

Здесь $F=-(dV/dx)_{x=0}$, $v=p(0)/m$ — начальная скорость частицы.

г) Среднее изменение разности фаз двух лучей выразим через среднюю разность импульсов Δp:

$$\delta\varphi_1-\delta\varphi_2=\frac{1}{\hbar}L\Delta p.$$

Поскольку среднее вертикальное расстояние между двумя путями равно $d/2$, то $\Delta p=Fd/2v$. Тем самым приведенное в условии задачи выражение для $(\delta\varphi_1-\delta\varphi_2)$ доказано.

Используя результат, полученный в пункте (б), находим величину сдвига интерференционной картины:

$$S=\frac{FLd}{2\hbar v}\frac{\hbar L}{p_0 d}=\frac{1}{2}aT^2.$$

Величины $a=F/m$ и $T=L/v$ совпадают с классическими значениями ускорения и времени пролета частицы. Сдвиг интерференционной картины отвечает, таким образом, величине отклонения классической частицы под действием постоянной силы F за время $T=L/v$.

1.7. а) Поскольку источником испускаются только электроны со спином «вверх», то амплитуда попадания электрона в точку x

$$\langle x\,|\,s\rangle=\langle x\,|\,1\rangle\,\alpha\,\langle 1\,|\,s\rangle+\langle x\,|\,2\rangle\,\alpha\,\langle 2\,|\,s\rangle.$$

Следовательно,

$$P_+=|\alpha|^2\,|\langle x\,|\,1\rangle\langle 1\,|\,s\rangle+\langle x\,|\,2\rangle\langle 2\,|\,s\rangle|^2,$$

т. е. картина распределения интенсивностей такая же,

как и без учета спина, изменятся лишь абсолютные значения интенсивности.

б) Если спины электронов, вылетающих из источника, направлены вниз, имеем

$$P_- = |\beta|^2 |\langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle|^2,$$
$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \text{const}.$$

в) Если направление спинов случайно, то вероятности иметь спин «вверх» и «вниз» равны, так что

$$P_0(x) = \frac{1}{2} P_+(x) + \frac{1}{2} P_-(x)$$

и

$$\frac{P_+(x)}{P_0(x)} = \frac{2|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \text{const}.$$

1.8. Пусть α — амплитуда прохождения первой щели, тогда амплитуда прохождения второй щели равна $0{,}1\alpha e^{i\varphi}$, где φ — — произвольная фаза. Полная амплитуда для максимума в картине интенсивности будет пропорциональна $(\alpha + 0{,}1\alpha)$ (фаза φ скомпенсируется разностью хода двух лучей). Для минимума соответственно амплитуда пропорциональна $(\alpha - 0{,}1\alpha)$. Следовательно, отношение интенсивностей в максимуме и минимуме равно

$$\frac{|\alpha + 0{,}1\alpha|^2}{|\alpha - 0{,}1\alpha|^2} = \frac{1{,}21}{0{,}81} \approx 1{,}5.$$

1.9. Поскольку попадания фотонов, испущенных источниками A и B в детектор a, — события принципиально различимые, то скорость счета первого счетчика

$$P_1 = [|\langle a|A\rangle|^2 + |\langle a|B\rangle|^2]\, N = 2|c|^2 N,$$

где N — число фотонов, испускаемых каждым источником в единицу времени. Аналогично

$$P_2 = [|\langle b|A\rangle|^2 + |\langle b|B\rangle|^2]\, N = 2|c|^2 N = P_1.$$

Одновременное попадание фотонов в детекторы a и b может произойти несколькими способами:

1) фотон, испущенный источником A, попадает в детектор a, а фотон из источника B попадает в детектор b;

2) фотон из источника B попадает в детектор a, а фотон из источника A попадает в детектор b;

3) в оба детектора попадают фотоны из источника A (это не значит, конечно, что в детекторы a и b попадает один и тот же фотон — ведь имеется непрерывный поток фотонов);

4) в оба детектора попадают фотоны из источника B.

Способы 1 и 2 неразличимы, так что соответствующие амплитуды должны складываться (при этом предполагается,

что фотоны из источников A и B имеют одинаковую энергию). Но способы 3 и 4 в принципе можно отличать как один от другого, так и от первых двух способов (представьте, что один из источников «выключен»!). Поэтому здесь уже будут складываться только вероятности, но не амплитуды. Таким образом, можно записать

$$P_{12}=[|\langle a\,|\,A\rangle\langle b\,|\,B\rangle+\langle a\,|\,B\rangle\langle b\,|\,A\rangle|^2+ \\ +|\langle a\,|\,A\rangle\langle b\,|\,A\rangle|^2+|\langle a\,|\,B\rangle\langle b\,|\,B\rangle|^2]\,N.$$

Подставляя сюда выражения для амплитуд

$$\langle a\,|\,A\rangle=\langle b\,|\,B\rangle=ce^{ikR_1},$$
$$\langle b\,|\,A\rangle=\langle a\,|\,B\rangle=ce^{ikR_2}$$

и выполняя необходимые преобразования, получаем

$$P_{12}=2\,|\,c\,|^4\,[2+\cos 2k\,(R_2-R_1)]\,N.$$

Расстояния до источников

$$R_1=\left[R^2+\frac{1}{4}(D-d)^2\right]^{1/2},$$
$$R_2=\left[R^2+\frac{1}{4}(D+d)^2\right]^{1/2}.$$

При $R\gg D$ и $R\gg d$ имеем

$$R_2-R_1\approx\frac{Dd}{2R},$$

так что аргумент косинуса $2k\,(R_2-R_1)\approx 2\pi Dd/R\lambda$. Ясно, что если изменять d (расстояние между детекторами), то скорость счета совпадений будет периодически меняться. Оценим порядок величины периода Δd.

Примем $\lambda=5\cdot10^{-7}$ *м*, $R=10^{17}$ *м* (расстояние до ближних звезд), $D=10^{11}$ *м* (диаметр звезды может быть сравним с расстоянием от Солнца до планет). Тогда $\Delta d=R\lambda/D=0{,}5$ *м*, т. е. эту величину нетрудно измерить. Таким образом, «диаметр звезды» D можно определить из соотношения

$$D=\frac{R\lambda}{d_2-d_1},$$

где d_1 и d_2—два ближайших значения d, при которых скорость счета совпадений одинакова, например максимальна.

К главе 2. ***Тождественные частицы***

2.1. а) Энергия кванта связана с частотой отношением $\varepsilon=h\nu$. Подставляя сюда $h=6{,}626\cdot10^{-34}$ *дж·сек*, $\nu=10^6$ *сек*$^{-1}$, получаем

$$\varepsilon=6{,}626\cdot10^{-28}\ дж=4{,}14\cdot10^{-9}\ эв.$$

б) При мощности радиопередатчика 10^6 *вт* за каждый период колебаний $T=10^{-6}$ *сек* излучается энергия $E=10^3$ *квт*$\times$ $\times 10^{-6}$ *сек* $=1$ *дж*. Следовательно, за период будет испущено

$$N=\frac{E}{\varepsilon}\approx 1{,}509\cdot 10^{27} \text{ квантов.}$$

2.2. Формула Планка для спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$\frac{dE}{d\omega}=\frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}.$$

Здесь V — объем полости, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Будем рассматривать величину

$$I(\omega)=\frac{dE}{d\omega}\frac{c}{V}.$$

а) При малых ω ($\hbar\omega\ll kT$) получаем

$$I(\omega)=\frac{kT}{\pi^2c^2}\omega^2 \quad \text{(формула Рэлея — Джинса),}$$

а при больших ω ($\hbar\omega\gg kT$) получаем

$$I(\omega)=\frac{\hbar}{\pi^2c^2}\omega^3e^{-\hbar\omega/kT} \quad \text{(формула Вина).}$$

б) Максимум спектра $I(\omega)$ определим, приравнивая нулю производную функции $f(x)=x^3/(e^x-1)$, где $x=\hbar\omega/kT$. Это условие приводит к трансцендентному уравнению

$$x=3(1-e^{-x}).$$

Его удобно решать графически или последовательными итерациями. В качестве первой итерации можно взять $x^{(1)}=3$, а каждое следующее приближение определится соотношением

$$x^{(n+1)}=3-3\exp[-x^{(n)}].$$

В результате получим

$$x\approx 2{,}822.$$

Таким образом, максимум спектра $I(\omega)$ приходится на частоту

$$\omega_m\approx 2{,}822\frac{kT}{\hbar}.$$

в) Распределение энергии по длинам волн ($\lambda=2\pi c/\omega$) можно получить, преобразуя формулу Планка:

$$I(\lambda)=\frac{dE}{d\lambda}=\frac{dE}{d\omega}\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right|=16\pi^2\hbar c^2\frac{\lambda^{-5}}{e^{2\pi\hbar c/\lambda kT}-1}.$$

Максимум функции $f(x)=x^5/(e^x-1)$, где $x=2\pi\hbar c/\lambda kT$, определится трансцендентным уравнением

$$x=5\,(1-e^{-x}),$$

единственное решение которого $x\approx 4{,}965$.

Следовательно, максимум плотности распределения энергии по длинам волн отвечает величине

$$\lambda_m \approx \frac{2\pi\hbar c}{4{,}965kT}.$$

г) Полагая $\lambda_m=5\cdot 10^{-7}$ *м* и учитывая, что $\hbar=1{,}054\cdot 10^{-34}$ *дж·сек*, $c=3\cdot 10^8$ *м/сек*, $k=1{,}38\cdot 10^{-23}$ *дж/град*, получаем оценку для температуры на поверхности Солнца:

$$T=\frac{2\pi\hbar c}{4{,}965k\lambda_m}\approx 0{,}58\cdot 10^4\ \textit{град}.$$

2.3. Чтобы выстроить спины обоих электронов атома гелия в одном направлении, нужно вследствие принципа запрета перевести один из электронов на возбужденный уровень и сообщить при этом атому энергию $\Delta E=\hbar\omega$, где ω — частота (видимого) света, испускаемого при переходе электрона с верхнего уровня на нижний. Эта энергия может быть сообщена атому внешним магнитным полем, взаимодействующим с собственным магнитным моментом электрона. При изменении направления спина в магнитном поле энергия электрона изменится на величину $2\mu_0 B$, где

$$\mu_0=\frac{q_e\hbar}{2mc}=0{,}927\cdot 10^{-23}\ a\cdot м^2$$

(q_e и m — заряд и масса электрона). Следовательно, магнитное поле, необходимое для «переворачивания» спина одного из электронов в атоме гелия, должно быть больше (или равно) величины

$$B=\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}=\frac{\pi\hbar c}{\mu_0\lambda}.$$

Принимая $\lambda=5\cdot 10^{-7}$, получаем $B\approx 2\cdot 10^4$ *вебер/м*^{2}.

2.4. Если бы ядра состояли из протонов и электронов, то в ядре атома азота содержалось бы 14 протонов и 7 электронов, поскольку заряд ядра азота равен $+7q_e$. Кроме того, в электронной оболочке атома должно быть еще 7 электронов. Следовательно, всего в атоме азота содержалось бы 28 фермичастиц. Суммарный собственный момент количества движения (спин) такой системы должен быть целым, поэтому атом азота в целом вел бы себя как бозе-частица. Такое противоречие с экспериментом, известное в истории ядерной физики как «азотная катастрофа», легко снимается, если предположить существование электрически нейтральной ядерной частицы (нейтрона) с массой, близкой к массе протона, и с полуцелым

спином. Тогда ядра состоят из протонов и нейтронов, так что атом азота содержит 7 протонов и 7 нейтронов в ядре и 7 электронов в электронной оболочке. Спин такой системы будет полуцелым и атом азота, следовательно, должен быть ферми-частицей.

2.5. а) Амплитуды вероятности испускания фотона возбужденным атомом при наличии n других точно таких же фотонов равны

$$\langle n+1,\ 0 \mid n,\ 1\rangle = \sqrt{n+1}\,a,$$
$$\langle n+1,\ 1 \mid n,\ 2\rangle = \sqrt{n+1}\,b,$$

а амплитуды перехода атома на более высокий уровень (амплитуды вероятности поглощения фотона)

$$\langle n-1,\ 1 \mid n,\ 0\rangle = \sqrt{n}\,a^*,$$
$$\langle n-1,\ 2 \mid n,\ 1\rangle = \sqrt{n}\,b^*.$$

Здесь индексы **0**, **1**, **2** указывают номера атомных состояний до и после испускания или поглощения фотона. Наличие двух констант (a и b) связано с возможными различиями амплитуд переходов между разными парами уровней. При тепловом равновесии число атомов в каждом из состояний должно оставаться неизменным, так что скорости перехода в данное состояние и выхода из него должны быть одинаковы, т. е.

$$N_0 n \mid a \mid^2 = N_1 (n+1) \mid a \mid^2,$$
$$N_1 (n+1) \mid a \mid^2 + N_1 n \mid b \mid^2 = N_0 n \mid a \mid^2 + (n+1) \mid b \mid^2 N_2,$$
$$N_1 n \mid b \mid^2 = N_2 (n+1) \mid b \mid^2.$$

Из первого и третьего уравнений получаем

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{n}{n+1}.$$

Второе уравнение при этом удовлетворяется тождественно. С другой стороны, из статистической механики известно $N(E)/N(E_0) = \exp[(E_0 - E)/kT]$. Подставляя сюда $E_0 = 0$, $E_1 = \Delta E$, $E_2 = 2\Delta E$, получаем

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_1} = e^{-\Delta E/kT} = \frac{n}{n+1}.$$

б) Отсюда среднее число фотонов с частотой ω

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \qquad \hbar\omega = \Delta E.$$

в) При малых частотах ($\hbar\omega \ll kT$) получим $n(\omega) = kT/\hbar\omega$. Таким образом, число низкочастотных фотонов велико. Поскольку энергия одного фотона равна $\hbar\omega$, то полная энергия всех фотонов с данной частотой равна kT, что

отвечает средней тепловой энергии классического гармонического осциллятора. При высоких частотах ($\hbar\omega \gg kT$) имеем $n(\omega) = \exp(-\hbar\omega/kT)$, т. е. число низкочастотных фотонов весьма мало.

2.6. Нейтрино является фермионом, поэтому в одном и том же состоянии, согласно принципу запрета, может находиться не больше одной частицы. Следовательно, нельзя получить поток нейтрино с высокой степенью когерентности; «нейтринный лазер» невозможно создать принципиально.

2.7. Обозначим амплитуду перехода первой частицы из a в b (в отсутствие другой частицы) через $\langle b \mid a\rangle$, а амплитуду перехода второй частицы из c в d — через $\langle d \mid c\rangle$. Тогда соответствующие вероятности $P_{ab} = |\langle b \mid a\rangle|^2$, $P_{cd} = |\langle d \mid c\rangle|^2$. Если частицы не взаимодействуют, то амплитуда одновременного перехода первой частицы из a в b и второй частицы из c в d в случае нетождественных частиц равна произведению амплитуд переходов каждой из частиц:

$$\langle bd \mid ac\rangle = \langle b \mid a\rangle \langle d \mid c\rangle,$$

а вероятность такого перехода

$$P(ac \to bd) = |\langle bd \mid ac\rangle|^2 = P_{ab}P_{cd}.$$

Если частицы тождественны, то рассмотренный переход невозможно отличить от одновременного перехода первой частицы из a в d и второй частицы из c в b. Тогда вероятность перехода $(a, b) \to (c, d)$ равна

$$|\langle b \mid a\rangle \langle d \mid c\rangle + \langle d \mid a\rangle \langle b \mid c\rangle|^2,$$

что отличается от простого произведения вероятностей P_{ab} и P_{cd}.

2.8. Система двух дейтронов может находиться в девяти различных спиновых состояниях (3 состояния дейтрона — мишени $\times$ 3 состояния падающего дейтрона). Если дейтроны и в мишени и в пучке неполяризованы, то вероятность каждого из таких состояний равна $1/9$. Если оба дейтрона имеют одинаковые проекции спинов, то вероятность рассеяния равна

$$|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2,$$

а поскольку возможны три таких состояния, то вклад в полную вероятность рассеяния от состояний с одинаковыми проекциями спинов равен

$$3 \cdot \frac{1}{9} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Если проекции спинов дейтронов различны, то случай рассеяния одного из дейтронов на угол θ и соответственно второго на угол $(\pi - \theta)$ в принципе можно отличить от случая рассеяния первого дейтрона на угол $(\pi - \theta)$, а второго на угол θ. Тогда должны складываться не амплитуды, а вероятности:

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2.$$

У системы двух дейтронов может быть 6 различных состояний, в каждом из которых проекции спинов дейтронов не совпадают (три проекции спина мишени, и для каждой из этих проекций две отличные от нее проекции спина пучка). Поэтому вклад в полную вероятность рассеяния от таких состояний равен

$$\frac{1}{9}\cdot 6\left\{|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2\right\}.$$

Следовательно, полная вероятность равна

$$\sigma(\theta)=\frac{1}{3}|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2+\frac{2}{3}|f(\theta)|^2+\frac{2}{3}|f(\pi-\theta)|^2=$$

$$=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2+\frac{2}{3}\operatorname{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)].$$

2.9. а) Будем считать, что при достаточно большой отдаче (отвечающей большим углам рассеяния) протон или нейтрон, на котором произошло рассеяние, обязательно вылетает из ядра. Кроме того, не будем учитывать возможности вторичного рассеяния π-мезона и протона (нейтрона). Тогда случаи рассеяния π-мезона на каждом из протонов и нейтронов можно различить, так что полная вероятность рассеяния на угол θ получается суммированием вероятностей рассеяния на каждой из частиц ядра

$$P_a(\theta)=2P_1+2P_2,$$

где

$$P_1=|f_1(\theta)|^2,\quad P_2=|f_2(\theta)|^2.$$

б) Если отдача настолько слаба (т. е. угол рассеяния достаточно мал), что ядро после рассеяния остается со 100%-ной вероятностью «неповрежденным», то невозможно определить, на какой из частиц ядра произошло рассеяние. В этом случае складываются амплитуды, так что вероятность рассеяния π-мезона на ядре гелия

$$P_b(\theta)=|f_1(\theta)+f_1(0)+f_2(\theta)+f_2(\theta)|^2$$
$$=4|f_1(\theta)+f_2(\theta)|^2.$$

Представим амплитуды рассеяния π-мезона на протоне и нейтроне в виде

$$f_1(\theta)=\sqrt{P_1}\,e^{i\varphi_1},\quad f_2(\theta)=\sqrt{P_2}\,e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$P_b(\theta)=4\left\{P_1+P_2+2\sqrt{P_1P_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\}.$$

Для сравнения величин P_a и P_b будем считать, помимо сделанных выше предположений, что разность фаз $(\varphi_1-\varphi_2)$ близка к нулю. (Эксперименты по рассеянию мезонов подтверждают это для широкой области энергий мезонов и углов рассеяния.) Тогда, очевидно, P_b значи-

тельно больше, чем P_a, если только величины P_1 и P_2 не слишком сильно меняются при переходе от малых θ (при которых рассматривается P_b) к большим (таким, чтобы отдача была велика).

Интересно отметить, что если $f_1 \approx f_2$, то вероятность неупругого рассеяния P_a пропорциональна числу частиц в ядре, тогда как вероятность упругого рассеяния P_b пропорциональна квадрату числа частиц в ядре (эффект когерентности).

2.10. а) Вероятность регистрации нейтрона детектором равна

$$|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2=|f-f|^2=0.$$

б) В этом случае спин нейтрона, попавшего в счетчик, может быть направлен как вверх, так и вниз. Нейтрон со спином «вверх» может оказаться в счетчике двумя способами: либо нейтрон пучка рассеется на угол θ без поворота спина, либо он рассеется на угол $(\pi-\theta)$ с «переворотом» спина (в счетчик при этом попадет нейтрон отдачи). Эти два способа неразличимы, поэтому вероятность попадания в счетчик нейтрона со спином «вверх» равна

$$|f(\theta)+g(\pi-\theta)|^2=|f+g|^2.$$

Аналогично, если регистрируемый нейтрон имеет спин, направленный вниз, получим

$$|g(\theta)+f(\pi-\theta)|^2=|f+g|^2.$$

Полная вероятность, таким образом, равна $2|f+g|^2$.

в) В этом случае равновероятны два начальных состояния:
1) нейтроны пучка и мишени поляризованы вдоль оси $+z$;
2) у нейтронов пучка спин направлен вниз, а у нейтронов мишени — вверх.

В первом из этих состояний вероятность рассеяния равна нулю [см. пункт (а)], а во втором $2|f+g|^2$, в полной аналогии с пунктом (б). Поэтому полная вероятность равна $|f+g|^2$.

г) Имеется четыре возможных начальных состояния: два с параллельными спинами (оба «вверх» или оба «вниз», причем вероятность рассеяния здесь равна нулю) и два с антипараллельными спинами. Вероятность рассеяния в состоянии с антипараллельными спинами равна $2|f+g|^2$. Учитывая, что вероятность иметь любое из начальных состояний равна $1/4$, получаем полную вероятность регистрации нейтрона

$$2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2|f+g|^2=|f+g|^2.$$

д) Хотя в данном случае детектор одинаково реагирует на протоны и нейтроны, в принципе их можно различить.

Поэтому вероятность регистрации рассеянной частицы под углом θ равна

$$|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2=2|f|^2.$$

2.11. а) Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе центра масс абсолютные значения импульсов обоих протонов до и после столкновения равны между собой:

$$p_1=p_2=p_1'=p_2'=p.$$

Скорость системы центра масс относительно лабораторной системы координат равна скорости протона мишени в системе центра масс: $V=p/m$ и совпадает с направлением импульса $\mathbf{p}_1$. Импульс рассеянного протона в лабораторной системе координат будет равен

$$\mathbf{p}'_{1л}=\mathbf{p}'_1+m\mathbf{V}.$$

Отсюда

$$p'_{1л}\cos\alpha=p'_1\cos\theta+mV,$$
$$p'_{1л}\sin\alpha=p'_1\sin\theta.$$

Учитывая, что $p'_1=mV=p$, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$.

б) В детекторе может появиться протон со спином «вниз» либо в результате рассеяния первого протона на угол θ с «переворотом» спина, либо в результате рассеяния без «переворота» спина на угол $(\pi-\theta)$, так что будет зарегистрирован второй протон. Общая амплитуда вероятности в этом случае равна

$$f'(\pi-\theta)+g(\theta).$$

в) Возможны 4 комбинации направлений спинов налетающих протонов и протонов мишени. Две из них соответствуют параллельным, а две — антипараллельным спинам. В каждом из последних двух случаев имеется по два конечных состояния:

1) направление спина регистрируемого протона совпадает с первоначальным [амплитуда $f'(\theta)+g(\pi-\theta)$];

2) спин регистрируемого протона «перевернут» по сравнению с направлением спина падающего протона [амплитуда $f'(\pi-\theta)+g(\theta)$].

Полная вероятность регистрации протона в направлении θ будет равна сумме вероятностей каждого из указанных процессов, взятых с весом $^1/_4$. В результате

получаем

$$P=\frac{1}{2}[\,|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2+|f'(\theta)+g(\pi-\theta)|^2+$$
$$+|f'(\pi-\theta)+g(\theta)|^2].$$

г) Если $f'(\theta)=f(\theta)$ и $g(\theta)=0$, то из предыдущей формулы получим

$$P=|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2-\mathrm{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)].$$

Это выражение можно записать в виде

$$P=\frac{3}{4}|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2+\frac{1}{4}|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2.$$

Таким образом, $A=3/4$, $B=1/4$. Первое слагаемое в этой формуле отвечает рассеянию протонов в состоянии с суммарным спином 1, а второе слагаемое отвечает рассеянию в состоянии с суммарным спином 0.

2.12. Согласно принципу запрета, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона, поэтому энергия системы будет иметь наименьшее возможное значение, если электроны заполнят все состояния с энергиями от наименьшей ($\varepsilon_{\text{мин}}=0$) до наибольшей $\varepsilon_{\text{макс}}=p^2_{\text{макс}}/2m$, величина которой определяется числом электронов в объеме V. Количество квантовых состояний (мод) поступательного движения электрона с волновым числом $k=p/\hbar$ в интервале от k до $k+dk$ равно $V\cdot 4\pi k^2dk/(2\pi)^3$. Умножая эту величину на 2, что отвечает двум возможным проекциям спина электрона, и интегрируя по импульсам электронов от 0 до $p_{\text{макс}}$, получаем полное число N электронов в объеме V в состоянии с наименьшей возможной энергией:

$$N=\int_0^{p_{\text{макс}}} V\cdot 2\cdot 4\pi\frac{p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{Vp^3_{\text{макс}}}{3\pi^2\hbar^3},$$

откуда находим

$$p_{\text{макс}}=(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\hbar.$$

Полная энергия U складывается из энергий электронов, находящихся в различных квантовых состояниях:

$$U=\int_0^{p_{\text{макс}}}\frac{p^2}{2m}\cdot V\cdot 2\cdot\frac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{Vp^5_{\text{макс}}}{10\pi^2\hbar^3m}.$$

Подставляя сюда значение $p_{\text{макс}}$, находим энергию газа

$$U=\frac{3}{10}(3\pi^2)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}N.$$

Давление этого «вырожденного электронного» газа легко найти, если воспользоваться соотношением

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V}.$$

Получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\frac{\hbar^2}{m}$$

и, следовательно, давление и объем связаны соотношением

$$PV^\gamma = \text{const}, \text{ где } \gamma = 5/3.$$

2.13. Подставляя в формулу для давления из предыдущей задачи значение $N/V = \rho/2M_p$, получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\rho}{2M_p}\right)^{5/3},$$

или

$$P = A\rho^{5/3},$$

$$A = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{2}\pi^2\right)^{2/3}\frac{1}{M_p^{5/3}}\frac{\hbar^2}{m}.$$

Отсюда видно, в частности, что вклад в давление от частиц данного сорта обратно пропорционален их массе, поэтому можно считать, что все давление создается «вырожденным электронным» газом, так как масса ядра много больше массы электрона.

Второе из уравнений, приведенных в условии задачи, можно получить, рассматривая условие равновесия элемента массы под действием сил гравитации и давления. На элемент вещества звезды, занимающий единичный объем и находящийся на расстоянии r от центра звезды, действует гравитационная сила $G\rho M(r)/r^2$ [$M(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r] и сила давления, равная $-dP/dr$, так что в условиях равновесия

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2}.$$

Третье уравнение

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2$$

означает просто, что шаровой слой радиусом r и толщиной dr имеет объем $dV = 4\pi r^2 dr$ и, следовательно, содержит массу

$$dM = 4\pi\rho r^2 dr.$$

К главе 3. ***Спин единица***

3.1. Воспользуемся имеющейся в «Лекциях» подсказкой: представим, что между A и B стоит прибор T, в котором открыты все три «пути». Наличие этого прибора ничего не

меняет, но позволяет говорить, что частица, входя в прибор A в состоянии φ, попадает в прибор B в одном из трех возможных состояний $+T$, $0T$ или $-T$.

Амплитуда того, что частица, войдя в прибор A в состоянии φ, выйдет из него в состоянии k ($k=+T, 0T, -T$), в этом же состоянии войдет в прибор B и выйдет в состоянии χ, равна

$$\langle\chi|B|k\rangle\langle k|A|\varphi\rangle,$$

а полная амплитуда равна сумме таких амплитуд:

$$\langle\chi|C|\varphi\rangle=\sum_k\langle\chi|B|k\rangle\langle k|A|\varphi\rangle.$$

3.2. Распределение пучка по трем состояниям ($j=+S, 0S, -S$) после прохождения системы STS будет определяться амплитудами

$$\langle jS|STS|\varphi\rangle=\sum_{i,\ k}\langle jS|kT\rangle\langle kT|iS\rangle\langle iS|\varphi\rangle,$$

где φ — произвольное начальное состояние, а j — любое из трех конечных состояний.

Если в приборе T открыта лишь одна щель, то относительное распределение в конечном состоянии не зависит от того, с какой амплитудой ($\langle iS|\varphi\rangle$) было представлено каждое из состояний в начальном пучке. Действительно, в этом случае из суммы по k остается один член

$$\langle jS|STS|\varphi\rangle=\langle jS|kT\rangle\sum_i\langle kT|iS\rangle\langle iS|\varphi\rangle,$$

так что отношение вероятностей найти частицу в состояниях j и j' не зависит от величин $\langle iS|\varphi\rangle$

$$\frac{W_j}{W_{j'}}=\frac{|\langle jS|STS|\varphi\rangle|^2}{|\langle j'S|STS|\varphi\rangle|^2}=\frac{|\langle jS|kT\rangle|^2}{|\langle j'S|kT\rangle|^2}.$$

Если же в приборе T открыты две или три щели, то величины $\langle jS|\varphi\rangle$ не сокращаются, т. е. отношение вероятностей зависит от начального состояния.

3.3. а) Вычислим сначала амплитуды

$$\langle iT|TS|\varphi\rangle=\langle iT|+S\rangle\langle+S|\varphi\rangle,$$

где φ — начальное состояние. По условию задачи $|\langle+S|\varphi\rangle|^2=N_1/N$ (N — интенсивность пучка частиц, входящих в первый прибор S). Поскольку в приборе T открыты щели 0 T и $-T$, то iT может принимать значения $0T$ и $-T$. Амплитуды $\langle iT|+S\rangle$ найдем по формулам (3.38) («Лекции», вып. 8, стр. 80) ($\alpha=\pi/2$):

$$\langle 0T|+S\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad\langle -T|+S\rangle=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$N_2 = N \sum_{iT=0T,\,-T} |\langle iT \mid +S\rangle\langle +S \mid \varphi\rangle|^2 = \frac{3}{4} N_1.$$

б) Интенсивность N_3 пучка, прошедшего последний прибор S, определяется квадратом модуля амплитуды

$$\langle -S \mid STS \mid \varphi\rangle = \sum_{iT=0T,\,-T} \langle -S \mid iT\rangle\langle iT \mid +S\rangle\langle +S \mid \varphi\rangle.$$

Величины $\langle -S \mid iT\rangle$ можно найти, воспользовавшись той же формулой (3.38) и соотношением $\langle jS \mid iT\rangle = \langle iT \mid jS\rangle^*$. В результате получим

$$\langle -S \mid 0T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \langle -S \mid -T\rangle = \frac{1}{2}.$$

Окончательно найдем

$$N_3 = |\langle -S \mid STS \mid \varphi\rangle|^2 = \frac{1}{16} N_1.$$

в) Если все щели в приборе T открыты, то он фактически не влияет на прохождение частиц, так что, очевидно, $N_2 = N_1$, $N_3 = 0$.

3.4. Найдем прежде всего амплитуды $\langle jT \mid iS\rangle$. Прибор T повернут относительно S на угол $\pi/2$ вокруг оси x. Этот поворот можно представить как три последовательных поворота: на угол $-\pi/2$ вокруг оси z, на угол $\pi/2$ вокруг новой оси y' и на угол $\pi/2$ вокруг новой оси z''. Поэтому

$$\langle jT \mid iS\rangle = \sum_{k,\,l} \langle jT \mid T''k\rangle\langle kT'' \mid T'l\rangle\langle lT' \mid iS\rangle,$$

где T' и T'' относятся к промежуточным системам координат. Величины, входящие в правую часть этой формулы, можно определить по формулам (3.38) и (3.39) «Лекций» (вып. 8, стр. 80). Выполняя соответствующие выкладки (их удобно делать в матричной форме), найдем матрицу амплитуд $\langle jT \mid iS\rangle$:

jT \ iS	$+S$	$0S$	$-S$
$+T$	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$0T$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$
$-T$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

а) Если никаких детекторов в приборе T нет, то число частиц, выходящих из S' в состоянии $|jS'\rangle$, определится квадратом модуля амплитуды

$$\langle jS' \mid S'TS \mid \varphi\rangle = \sum_{k=\pm T} \langle jS' \mid kT\rangle\langle kT \mid 0S\rangle\langle 0S \mid \varphi\rangle.$$

Функции преобразования $\langle kT \mid 0S\rangle$ имеются в только что составленной таблице, а $\langle jS' \mid kT\rangle$ также можно получить из этой таблицы, учитывая, что

$$\langle jS' \mid kT\rangle = \langle kT \mid jS'\rangle^*,$$

и тот факт, что приборы S и S' ориентированы одинаково, так что

$$\langle kT \mid jS'\rangle = \langle kT \mid jS\rangle.$$

Выбирая нормировку $|\langle 0S \mid \varphi\rangle|^2 = N_0$, находим величины $N_{jS'} = N_0 \left| \sum_{kT=\pm T} \langle jS' \mid kT\rangle\langle kT \mid 0S\rangle \right|^2$:

$$N_{0S'} = N_0, \qquad N_{+S'} = N_{-S'} = 0.$$

б) Если же в приборе T установлены «прозрачные детекторы», регистрирующие прохождение частиц в состояниях $+T$ и $-T$, то число частиц, выходящих из прибора S' в состоянии jS', будет равно сумме чисел частиц в этом состоянии, находившихся в промежуточных состояниях $+T$ и $-T$, поскольку регистрация промежуточных состояний устраняет интерференцию соответствующих амплитуд. (Чтобы лучше это понять, полезно вспомнить § 2 гл. 1, вып. 8 «Лекций».) Таким образом,

$$N_{jS'} = |\langle jS' \mid +T\rangle\langle +T \mid 0S\rangle\langle 0S \mid \varphi\rangle|^2 + |\langle jS' \mid -T\rangle\langle -T \mid 0S\rangle\langle 0S \mid \varphi\rangle|^2,$$

так что

$$N_{+S'} = N_{-S'} = \frac{1}{4} N_0, \qquad N_{0S'} = \frac{1}{2} N_0.$$

Значения N_{kT} определяются выражением

$$N_{kT} = |\langle kT \mid 0S\rangle\langle 0S \mid \varphi\rangle|^2,$$

из которого получим

$$N_{+T} = N_{-T} = \frac{1}{2} N_0, \qquad N_{0T} = 0.$$

в) Если числа отсчетов N_{+T}, N_{-T} не регистрируются (но сами «прозрачные детекторы» срабатывают), то это, естественно, не влияет на значения $N_{\pm S'}$, $N_{0S'}$.

г) Если половина частиц, пролетающих через детекторы в приборе T, не взаимодействует с ними, то полное число частиц в состоянии jS' будет полусуммой числа частиц, которые были бы при стопроцентной эффективности счет-

чиков и в случае, когда счетчики отсутствуют. Тогда

$$N_{+S'}=\frac{1}{8}N_0, \quad N_{0S'}=\frac{3}{4}N_0, \quad N_{S'}=\frac{1}{8}N_0.$$

д) Рассмотрим теперь случай, когда все перегородки из прибора S и счетчики из прибора T удалены и в прибор S поступает N_0 частиц в единицу времени. Тогда наличие прибора S никак не влияет на результат. Если падающий пучок не поляризован, то можно считать, что в прибор T поступает по $N_0/3$ частиц в состояниях $+T$, $0T$ и $-T$, причем между соответствующими амплитудами интерференция отсутствует. Учитывая, что пучок частиц в состоянии $0T$ блокирован, находим

$$N_{jS'}=\frac{N_0}{3}\sum_{k=\pm 1}|\langle jS'\,|\,kT\rangle|^2.$$

Отсюда, используя таблицу $\langle kT\,|\,jS\rangle$, получаем

$$N_{+S'}=N_{-S'}=\frac{N_0}{6}, \qquad N_{0S'}=\frac{N_0}{3}.$$

К главе 4. ***Спин одна вторая***

4.1. Амплитуду вероятности появления атома в точке Q можно записать в виде произведения

$$\langle Q\,|\,P\rangle=\sum_{iS}\sum_{jT}\langle Q\,|\,jT\rangle\langle jT\,|\,iS\rangle\langle iS\,|\,P\rangle.$$

Здесь $\langle iS\,|\,P\rangle$—амплитуда вероятности иметь на выходе первого прибора частицу в состоянии iS. Поскольку пучок атомов неполяризован и прибор пропускает лишь атомы в состоянии $+S$, то

$$|\langle iS\,|\,P\rangle|^2=\frac{1}{2}N\delta_{iS,\,+S}.$$

Далее второй прибор пропускает только атомы, находящиеся в состоянии $+T$, поэтому $\langle Q\,|\,jT\rangle=\delta_{jT,\,+T}$. Таким образом, число атомов, попадающих в точку Q, равно

$$N_Q=|\langle Q\,|\,P\rangle|^2=\frac{N}{2}\,|\langle +T\,|\,+S\rangle|^2.$$

Величина $\langle +T\,|\,+S\rangle$ представляет собой амплитуду вероятности того, что частица со спином «вверх» в системе координат S, характеризующей первый прибор, будет иметь спин «вверх» в системе координат T, связанной со вторым прибором. Положение повернутой системы координат будем характе-

ризовать углами Эйлера. Тогда, согласно табл. 4.1 (см. «Лекции», вып. 8, стр. 105), имеем

$$\langle +T \mid +S\rangle = \cos\frac{\alpha}{2}\, e^{i(\beta+\gamma)/2}.$$

При этом величина N_Q не зависит от углов β и γ:

$$N_Q = \frac{N}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Угол α есть угол между осями z и z' в исходной (S) и повернутой (T) системах координат. Теперь рассмотрение частных случаев не представляет труда:

а) $\alpha = 0$, $N_Q = \frac{N}{2}$;

б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N_Q = \frac{N}{4}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N_Q = \frac{N}{4}$;

г) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N_Q = \frac{N}{4}$;

д) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $N_Q = \frac{N}{2}\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{N}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{N}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

е) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N_Q = \frac{N}{4}$;

ж) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N_Q = \frac{N}{4}$;

з) $\alpha = 0$, $N_Q = \frac{N}{2}$.

4.2. Пусть прибор регистрирует частицы в том случае, если они находятся в некотором состоянии спина φ. Тогда амплитуда вероятности зарегистрировать частицу в состоянии ψ равна

$$\langle\varphi \mid \psi\rangle = \langle\varphi \mid +z\rangle\langle +z \mid \psi\rangle + \langle\varphi \mid -z\rangle\langle -z \mid \psi\rangle.$$

Обозначая $\langle +z \mid \psi\rangle$ и $\langle -z \mid \psi\rangle$ (амплитуда вероятностей иметь в состоянии ψ направление спина «вверх» и «вниз») соответственно через a и b, а $\langle\varphi \mid +z\rangle$ и $\langle\varphi \mid -z\rangle$ через X и Y (амплитуды вероятности регистрации частицы, имеющей направление спина «вверх» и «вниз» соответственно), получаем

$$|\langle\varphi \mid \psi\rangle|^2 = |aX + bY|^2.$$

1) Если спин частицы направлен вверх (или, что то же самое, вдоль оси $+z$), то $a=1$, $b=0$ и, следовательно,

$$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2=|X|^2.$$

Аналогично, если спин направлен вниз, то

$$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2=|Y|^2.$$

2) Если спин направлен вдоль оси с полярными углами θ и φ, то, согласно формуле (4.36) (вып. 8, стр. 106),

$$a=\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2},\qquad b=\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}.$$

Тогда

$$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2=\left|\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}X+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}Y\right|^2.$$

3) Если спин направлен вдоль оси $+x$ ($\theta=\pi/2$, $\varphi=0$), то

$$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

так что

$$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2=\frac{1}{2}|X+Y|^2.$$

Если же спин направлен вдоль $-x$ ($\theta=\pi/2$, $\varphi=\pi$), то

$$a=-\frac{i}{\sqrt{2}},\quad b=\frac{i}{\sqrt{2}}$$

и

$$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2=\frac{1}{2}|X-Y|^2.$$

4) Пусть теперь частицы неполяризованы, причем «случайность» определяется разными способами. Вероятность зарегистрировать частицу, если направление ее спина выбирается способом 1, равна

$$P=\frac{1}{2}|X|^2+\frac{1}{2}|Y|^2=\frac{1}{2}(|X|^2+|Y|^2).$$

Для способа 2 имеем

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|X+Y|^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|X-Y|^2=\frac{1}{2}(|X|^2+|Y|^2).$$

Наконец, для способа 3 получим

$$P=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}X+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}Y\right|^2\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{|X|^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta+\right.$$

$$+|Y|^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=$$

$$\left.=2\mathrm{Re}\left[X^*Y\int_0^{2\pi}e^{i\varphi}\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta\right]\right\}.$$

Вычисляя интегралы

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i\varphi}\,d\varphi\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=0,$$

получаем

$$P=\frac{1}{2}(|X|^2+|Y|^2).$$

Таким образом, для всех трех способов вероятность обнаружения частицы одна и та же. Не существует метода, которым можно было бы отличить один способ случайной ориентации спина от другого.

4.3. Выходящая из прибора S частица находится в состоянии $-S$. Амплитуда вероятности прохождения этой частицы через приборы T и U равна

$$\sum_l \langle +U\,|\,jT\rangle\,\langle jT\,|-S\rangle.$$

Соответственно,

$$N=N_0\,|\sum_l \langle +U\,|\,jT\rangle\,\langle jT\,|-S\rangle|^2.$$

Величины $\langle +U\,|\,jT\rangle$, $\langle jT\,|-S\rangle$ определяются относительной ориентацией приборов U и T, T и S.

Рассмотрим случай, изображенный на фиг. 2 «Лекций» (вып. 8, стр. 185).

а) Прибор T повернут относительно прибора S на угол $\varphi=\pi$ вокруг оси y. Из табл. 4.2 (см. вып. 8, стр. 105)

для $R_y(\varphi)$ получаем

$$\langle +T\,|-S\rangle = 1, \qquad \langle -T\,|-S\rangle = 0.$$

б) Перейдем от системы S к системе T, используя только повороты вокруг осей y и z. Можно, например, сначала повернуть систему S вокруг оси y на угол $\varphi_1 = \pi/2$, затем новую систему S' повернуть на угол $\varphi_2 = \theta$ вокруг оси z', а полученную таким путем систему S'' повернуть на угол $\varphi_3 = -\pi/2$ вокруг оси y''. Соответственно

$$\langle +U\,|-S\rangle = \sum_{k,\ j} \langle +U\,|\,kS''\rangle\,\langle kS''\,|\,jS'\rangle\,\langle jS'\,|-S\rangle.$$

Из табл. 4.2 для R_z и R_y получим

$$\langle +S'\,|-S\rangle = \langle -S'\,|-S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle -S''\,|+S'\rangle = \langle +S''\,|-S'\rangle = 0,$$

$$\langle +S''\,|+S'\rangle = e^{i\theta/2}, \quad \langle -S''\,|-S'\rangle = e^{i\theta/2},$$

$$\langle +U\,|+S''\rangle = -\langle +U\,|-S''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\langle +U\,|-S\rangle = i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Точно такой же результат получается, если рассматривать переход от S к T как поворот вокруг оси x на угол θ.

в) При $\theta = 0$ $\langle +U\,|-S\rangle = 0$, при $\theta = \pi$ $\langle +U\,|-S\rangle = i$. В последнем случае оси z систем S и U направлены в противоположные стороны, поэтому $|\langle +U\,|-S\rangle|^2 = 1$. По той же причине в случае (а) $|\langle +T\,|-S\rangle|^2 = 1$. Но системы T и U отличаются одна от другой поворотом на угол π вокруг оси z, поэтому величины $\langle +T\,|-S\rangle$ и $\langle +U\,|-S\rangle$ отличаются на фазовый множитель $e^{i\pi/2} = i$.

4.4. Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси z. Тогда в «S-представлении» (т. е. в системе координат S) вектор ее электрического поля имеет компоненты $(E_x,\ E_y,\ 0)$, а в «T-представлении» (т. е. в системе координат T, повернутой относительно S на угол θ вокруг оси z) тот же вектор равен $(E_{x'},\ E_{y'},\ 0)$. Согласно закону преобразования вектора при поворотах системы координат:

$$E_{x'} = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta,$$
$$E_{y'} = -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta,$$

поэтому

$$\langle xT\,|\,xS\rangle = \cos\theta, \qquad \langle xT\,|\,yS\rangle = \sin\theta,$$
$$\langle yT\,|\,xS\rangle = -\sin\theta, \qquad \langle yT\,|\,yS\rangle = \cos\theta.$$

4.5. Пусть $\mathbf{E}=(E_x, E_y, 0)$ — вектор напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны на входе в прибор, а $\mathbf{E}'=(E'_x, E'_y, 0)$ — соответствующая величина на выходе из прибора.

Тогда матрица $\langle j \mid A \mid i\rangle$ должна переводить одну величину в другую:

$$E'_x=\langle x \mid A \mid x\rangle E_x+\langle x \mid A \mid y\rangle E_y,$$
$$E'_y=\langle y \mid A \mid x\rangle E_x+\langle y \mid A \mid y\rangle E_y.$$

Используя классические представления о поляризации света, можно связать $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}$ и найти тем самым элементы матрицы $\langle j \mid A \mid i\rangle$.

а) Из-за наличия блокировки луча y $E'_y=0$, тогда как $E'_x=E_x$. Следовательно, единственный отличный от нуля элемент матрицы $\langle x \mid A \mid x\rangle=1$.

б) В системе координат x', y', повернутой вместе с прибором, компоненты вектора $\mathbf{E}$ можно записать следующим образом:

$$E_{x'}=E_x\cos\theta+E_y\sin\theta,$$
$$E_{y'}=-E_x\sin\theta+E_y\cos\theta.$$

После прохождения прибора $E'_{x'}=E_{x'}$, $E'_{y'}=0$.

Возвращаясь в исходную систему координат, получаем

$$E'_x=E'_{x'}\cos\theta=\cos^2\theta E_x+\sin\theta\cos\theta E_y,$$
$$E'_y=E'_{y'}\sin\theta=\sin\theta\cos\theta E_x+\sin^2\theta E_y.$$

Таким образом,

$$\langle x \mid A \mid x\rangle=\cos^2\theta, \qquad \langle y \mid A \mid y\rangle=\sin^2\theta,$$
$$\langle x \mid A \mid y\rangle=\langle y \mid A \mid x\rangle=\sin\theta\cos\theta.$$

в) После прохождения прибора $E'_x=E_x$, $E'_y=0$, так что матрица $\langle j \mid A \mid i\rangle$ будет такой же, как в случае (а).

г) Поляроид эквивалентен системе «анализатор — блокировка одного из лучей — синтезатор». Матрица $\langle j \mid A \mid i\rangle$ совпадает с полученной в случае (б).

д) В этом случае, очевидно,

$$E'_x=E_xe^{i\varphi}, \qquad E'_y=E_y,$$

так что

$$\langle x \mid A \mid x\rangle=e^{i\varphi}, \qquad \langle y \mid A \mid y\rangle=1,$$
$$\langle x \mid A \mid y\rangle=\langle y \mid A \mid x\rangle=0.$$

е) Аналогично предыдущему пункту имеем

$$\langle x \mid A \mid x\rangle=\langle y \mid A \mid y\rangle=e^{i\varphi},$$
$$\langle x \mid A \mid y\rangle=\langle y \mid A \mid x\rangle=0.$$

Заметим, что одинаковое изменение фазы обеих компонент вектора не влияет на поляризацию.

ж) В системе координат, повернутой вместе с прибором на угол 45°, вектор $\mathbf{E}$ имеет компоненты

$$E_{x'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x+E_y),$$
$$E_{y'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-E_x+E_y).$$

После прохождения прибора $E_{x'}=iE_{x'}$, $E'_{y'}=E_{y'}$.
Тогда в исходной системе координат компоненты вектора $\mathbf{E}'$:

$$E'_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E'_{x'}-E'_{y'}\right)=\frac{i+1}{2}E_x+\frac{i-1}{2}E_y,$$
$$E'_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E'_{x'}+E'_{y'}\right)=\frac{i-1}{2}E_x+\frac{i+1}{2}E_y.$$

Отсюда получаем

$$\langle x\mid A\mid x\rangle=\langle y\mid A\mid y\rangle=\frac{i+1}{2},$$
$$\langle x\mid A\mid y\rangle=\langle y\mid A\mid x\rangle=\frac{i-1}{2}.$$

з) При прохождении через четвертьволновую пластинку разность фаз лучей x и y изменяется на $\pi/2$, так что можно считать

$$E'_x=iE_x,\qquad E'_y=E_y.$$

Соответственно

$$\langle x\mid A\mid x\rangle=i,\qquad \langle y\mid A\mid y\rangle=1,$$
$$\langle x\mid A\mid y\rangle=\langle y\mid A\mid x\rangle=0.$$

и) Монохроматическая волна с циклической частотой ω при прохождении пластинки толщиной d приобретает дополнительную фазу

$$kd=\frac{\omega d}{v}=\frac{\omega dn}{c}.$$

Здесь k и v — волновое число и скорость света в среде; n — показатель преломления среды. Учитывая, что в двоякопреломляющей среде показатель преломления различен для света с поляризациями по оси x и y, получаем изменение фаз x- и y-лучей после прохождения пластинки толщиной d:

$$\varphi_x=\frac{\omega d}{c}n_x,\qquad \varphi_y=\frac{\omega d}{c}n_y.$$

Соответственно можно записать

$$E'_x=E_xe^{i\varphi_x},\qquad E'_y=E_ye^{i\varphi_y}.$$

Тогда

$$\langle x \mid A \mid x\rangle = e^{i\omega dn_x/c},$$
$$\langle y \mid A \mid y\rangle = e^{i\omega dn_y/c},$$
$$\langle x \mid A \mid y\rangle = \langle y \mid A \mid x\rangle = 0.$$

к) После прохождения раствора вектор $\mathbf{E}'$ в системе координат, повернутой на угол θ, будет, очевидно, иметь компоненты $E'_{x'} = E_x$, $E'_{y'} = E_y$. Тогда в исходной системе координат

$$E'_x = E_x \cos\theta - E_y \sin\theta,$$
$$E'_y = E_x \sin\theta + E_y \cos\theta.$$

Следовательно,

$$\langle x \mid A \mid x\rangle = \langle y \mid A \mid y\rangle = \cos\theta,$$
$$\langle y \mid A \mid x\rangle = -\langle x \mid A \mid y\rangle = \sin\theta.$$

л) После прохождения такого прибора компонента E'_x будет равна нулю, тогда как $E'_y = E_y + E_x e^{i\alpha}$, где α — изменение фазы луча x при прохождении через раствор сахара. Тогда

$$\langle x \mid A \mid x\rangle = \langle x \mid A \mid y\rangle = 0,$$
$$\langle y \mid A \mid y\rangle = 1, \qquad \langle y \mid A \mid x\rangle = e^{i\alpha}.$$

м) Средняя по времени интенсивность плоской монохроматической волны, входящей в прибор, пропорциональна ($|E_x|^2 + |E_y|^2$), а выходящей

$$|E_y + E_x e^{i\alpha}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + 2|E_x||E_y|\cos(\alpha+\beta).$$

где β — разность фаз комплексных величин E_x и E_y. Если $\cos(\alpha+\beta) > 0$, то интенсивность выходящей волны больше, чем входящей, что означает «бесплатное» увеличение энергии, т. е. возможность построения вечного двигателя.

Разумеется, этот вывод неверен. Дело в том, что в рассматриваемом приборе лучи x и y должны быть пространственно разделены и, стало быть, ограничены в пространстве (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). Но это означает, что волны нельзя считать плоскими. Тогда после соединения пучков возникает типичная интерференционная картина: усиление интенсивности в одном месте «экрана» будет сопровождаться ослаблением в другом, так что полная интенсивность в пучке на выходе из прибора будет равна (или меньше, при наличии поглощения) интенсивности пучка на входе в прибор.

4.6. а) Обозначим через $f_{+z}(\theta)$ и $f_{-z}(\theta)$ амплитуды вероятностей того, что электрон испускается со спином вдоль оси z и

против оси z:

$$f_{+z}(\theta) = A\sqrt{1-\frac{v}{c}}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$f_{-z}(\theta) = A\sqrt{1+\frac{v}{c}}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Тогда относительная вероятность испускания электрона со спином по оси z равна

$$w_{+z}(\theta) = \frac{|f_{+z}(\theta)|^2}{|f_{+z}(\theta)|^2+|f_{-z}(\theta)|^2} = \frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta},$$

а против оси z соответственно

$$w_{-z}(\theta) = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}.$$

б) Амплитуды вероятностей того, что спин направлен вдоль оси $+x$ или $-x$, можно записать в виде

$$f_{+x} = <+x|+z> f_{+z} + <+x|-z> f_{-z},$$
$$f_{-x} = <-x|+z> f_{+z} + <-x|-z> f_{-z}.$$

Здесь $<+x|+z>$ — амплитуда вероятности того, что у электрона со спином вдоль оси $+z$ спин окажется направленным вдоль оси $+x$.

Из табл. 4.2 «Лекций» (вып. 8, стр. 105) имеем

$$<+x|+z> = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$<+x|-z> = <-x|-z> = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$<-x|+z> = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$f_{+x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{+z}+f_{-z}),$$

$$f_{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f_{+z}+f_{-z}).$$

Соответствующие вероятности равны

$$w_{+x}(\theta) = \frac{|f_{+x}|^2}{|f_{+x}|^2+|f_{-x}|^2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}\right],$$

$$w_{-x}(\theta)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}\right].$$

в) Аналогично предыдущему имеем

$$f_{+y}=<+y|+z>f_{+z}+<+y|-z>f_{-z},$$
$$f_{-y}=<-y|+z>f_{+z}+<-y|-z>f_{-z},$$

где

$$<+y|+z>=<-y|-z>=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$<-y|+z>=<+y|-z>=-\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

При вычислении этих величин следует иметь в виду, что переход от оси z к оси y осуществляется поворотом вокруг оси x на угол $-\pi/2$.

Используя явный вид амплитуд f_{+z} и f_{-z}, находим

$$w_{+y}(\theta)=w_{-y}(\theta)=\frac{1}{2}.$$

Различные результаты для осей x и y получаются всегда в тех случаях, когда складываются амплитуды f_{+z} и f_{-z}, т. е. состояния со спином вдоль оси z и против оси z интерферируют.

г) Если антинейтрино не регистрируется, то абсолютные вероятности следует проинтегрировать по всем возможным направлениям вылета антинейтрино.

Из соображений симметрии ясно, что вероятность вылета электрона с тем или иным спином не зависит от полярного угла φ (от него зависят лишь фазы соответствующих амплитуд). Поэтому, воспользовавшись результатами пункта (а), для относительных вероятностей того или иного направления спина получим

$$W_{\pm z}=\frac{\int|f_{\pm z}(\theta)|^2\,d\Omega}{\int[|f_{+z}(\theta)|^2+|f_{-z}(\theta)|^2]\,d\Omega}.$$

Вычисляя интегралы

$$\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\Omega=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\,d\theta=2\pi,$$
$$\int\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\Omega=2\pi,$$
$$\int\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right)d\Omega=4\pi,$$

получаем

$$W_{+z}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right),$$
$$W_{-z}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

К главе 5. ***Зависимость амплитуд от времени***

5.1. Изменение направления фронта волны, описывающей частицу с массой M и импульсом P, при прохождении расстояния w в области неоднородного потенциала, согласно формуле (5.33) «Лекций» (вып. 8, стр. 124), равно

$$\delta\theta=-\frac{M}{p^2}\frac{\partial V}{\partial y}w.$$

Здесь считается, что ось y совпадает с направлением изменения потенциала V, причем это изменение медленное, а первоначальное направление движения частицы перпендикулярно оси y. Если частица имеет спин 1 и магнитный момент μ, то энергия ее взаимодействия с магнитным полем может быть равна μB, 0, $-\mu B$ соответственно для проекций спина $+1$, 0, -1 на направление магнитного поля. Следовательно, при прохождении неоднородного магнитного поля направление движения частицы будет меняться, причем различным образом для состояний $+1$, 0, -1, т. е. пучок частиц будет разделяться на три пучка с отклонением от первоначального направления на углы

$$\delta\theta\,(+1)=-\frac{\mu M w}{p^2}\frac{\partial B}{\partial y},$$
$$\delta\theta\,(0)=0,$$
$$\delta\theta\,(-1)=\frac{\mu M w}{p^2}\frac{\partial B}{\partial y}.$$

Покажем теперь, что спин 1 прецессирует в магнитном поле. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси $+z$, а спин в момент времени $t=0$ — вдоль оси $+x$. Последнее утверждение означает, что

$$C_{+x}(0)=1,\quad C_{0x}(0)=0,\quad C_{-x}(0)=0.$$

Тогда

$$C_{+x}(0)=\sum_{i=0,\pm 1}<jz\,|\,ix>C_{ix}(0)=<jz\,|+x>\ (j=\pm 1,\ 0).$$

Из формул (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80) при $\alpha=-\pi/2$ получим

$$<+z\,|+x>=<-z\,|+x>=\frac{1}{2},\quad <0z\,|+x>=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Согласно §5 гл. 5 «Лекций» (вып. 8, стр. 124), с течением времени амплитуды C_{jz} меняются по закону

$$C_{jz}(t) = e^{i\omega_p t} C_{jz}(0),$$

где $\omega_p = \mu B/\hbar$. Подставив сюда величины $C_{jz}(0)$, получим

$$C_{+z}(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_p t},$$

$$C_{0z}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_{-z}(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_p t}.$$

Убедимся, что имеет место вращение спина в плоскости xy с циклической частотой ω_p. Вычислим амплитуду вероятности проекции спина $+1$ на ось L, лежащую в плоскости xy и составляющую в момент времени t угол $\beta = -\omega_p t$ с осью x. Для этого повернем систему координат вокруг оси z на угол β, а затем вокруг оси y на угол $\alpha = \pi/2$. Используя формулы (3.39) и (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80), получаем

$$C_{+L}(t) = 1.$$

Это означает, что спин направлен по оси L и, следовательно, вместе с ней вращается в плоскости xy с угловой скоростью ω_p в направлении по часовой стрелке.

Оба явления, рассмотренные в настоящей задаче, — расщепление пучка частиц в неоднородном магнитном поле и прецессия спина в магнитном поле — зависят от величины магнитного момента и, следовательно, могут быть использованы для его измерения. В первом случае это будет эксперимент типа опытов Штерна и Герлаха, во втором, например, парамагнитный резонанс — частица, обладающая магнитным моментом и находящаяся в магнитном поле, резонансно поглощает внешнее радиоизлучение с частотой $\omega = \omega_p$ (см. «Лекции», вып. 7, гл. 35).

К главе 6. ***Гамильтонова матрица***

6.1. Составим прежде всего гамильтонову матрицу для частицы со спином $^1/_2$ в магнитном поле. Это удобно сделать, выбирая состояния с определенной проекцией спина на направление магнитного поля, т. е. состояния $|+x>$ и $|-x>$, в качестве базисных. Тогда

$$<+x|H|+x> = -\mu B_0, \qquad <-x|H|-x> = \mu B_0,$$
$$<+x|H|-x> = <+x|H|-x> = 0.$$

Теперь нетрудно получить эту матрицу и для базисных

состояний $|+z>$, $|-z>$, используя преобразование типа (6.28) (см. «Лекции», вып. 8, стр. 140)

$$<iz|H|jz> = \sum_{k,l} <iz|kx><kx|H|lx><lx|jz>.$$

Величины $\langle lx|jz\rangle$ уже получены при решении задачи **4.6**, а величины $\langle iz|kx\rangle$ можно получить из соотношения

$$\langle iz|kx\rangle = \langle kx|iz\rangle^*.$$

Тогда

$$\langle +z|H|+z\rangle = \langle -z|H|-z\rangle = 0,$$
$$\langle +z|H|-z\rangle = \langle -z|H|+z\rangle = -\mu B_0.$$

В начальный момент времени после прохождения первого фильтра частица находится в состоянии $|+z\rangle$, так что $C_{+z}(0) \equiv C_1(0) = 1$, $C_{-z}(0) \equiv C_2(0) = 0$. Изменение этих амплитуд со временем определится системой уравнений:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -\mu B_0 C_2$$

и

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\mu B_0 C_1.$$

Складывая и вычитая почленно эти два уравнения, получаем уравнения для (C_1+C_2) и (C_1-C_2), которые легко интегрируются. После несложных математических операций получим решение с учетом начальных условий

$$C_1(t) = \cos \omega t,$$
$$C_2(t) = i \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \frac{\mu B_0}{\hbar}.$$

Из найденного решения видно, что спин частицы будет направлен вниз в моменты T_n, определяемые соотношением

$$\frac{\mu B_0 T_n}{\hbar} = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Чтобы все частицы прошли через второй фильтр, необходимо, чтобы одно из значений T_n совпало со временем пролета T. Минимальное значение поля B_0, при котором это условие будет выполнено, определится соотношением

$$B_0 = \frac{\pi\hbar}{2\mu T}. \tag{1}$$

Вероятность пройти второй фильтр равна $W = \sin^2 \omega T'$. В частности, если $T' = T/2$, а поле B_0 удовлетворяет условию (1), то $W = 1/2$.

6.2. Обозначим состояния частицы с направлением спина вдоль магнитного поля и против него соответственно через $|+B\rangle$ и $|-B\rangle$ и запишем в этом базисе энергетическую матрицу:

$$\langle +B|H|+B\rangle = -\langle -B|H|-B\rangle = -\mu B,$$
$$\langle +B|H|-B\rangle = \langle -B|H|+B\rangle = 0.$$

Преобразуем ее теперь к базису $|+z\rangle$, $|-z\rangle$. Необходимые для этого величины находим из табл. 4.2 (см. «Лекции», вып. 8, стр. 105):

$$\langle +B|+z\rangle = \langle -B|-z\rangle = \langle +z|+B\rangle = \langle -z|-B\rangle = \cos\frac{\pi}{8},$$

$$\langle +B|-z\rangle = -\langle -B|+z\rangle = -\langle +z|-B\rangle = \langle -z|+B\rangle = \sin\frac{\pi}{8}.$$

Тогда

$$\langle +z|H|+z\rangle = \langle +z|H|-z\rangle = \langle -z|H|+z\rangle = -\langle -z|H|-z\rangle = -\frac{\mu B}{\sqrt{2}}.$$

В начальный момент времени амплитуда для направления спина вдоль оси z $C_1(0)=1$, а против оси z $C_2(0)=0$. Изменение этих амплитуд со временем определится системой уравнений

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt} = -\frac{\mu B}{\sqrt{2}}(C_1+C_2)$$

и

$$i\hbar\frac{dC_2}{dt} = -\frac{\mu B}{\sqrt{2}}(C_1-C_2).$$

Решение с учетом начальных условий имеет вид

$$C_1(t) = \cos\omega t + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\omega t,$$

$$C_2(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\omega t,$$

где $\omega = \mu B/\hbar$.

Найдем теперь амплитуду вероятности нахождения частицы в состоянии с $J_x = \hbar/2$:

$$C_{+x}(t) = \langle +x|+z\rangle C_1(t) + \langle +x|-z\rangle C_2(t) = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{2}} + i\sin\omega t.$$

Искомая вероятность обнаружения частицы в состоянии $J_x=\hbar/2$ тогда равна

$$w_{+x}(t)=|C_{+x}(t)|^2=\frac{1}{2}(1+\sin^2\omega t).$$

Аналогично для состояния с $J_y=\hbar/2$ получим

$$C_{+y}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\omega t+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right),$$
$$w_{+y}(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\omega t\right).$$

6.3. а) Гамильтонова матрица системы совпадает с полученной при решении задачи **6.1** (в базисе $|+z\rangle$, $|-z\rangle$) с точностью до замены μB_0 на A. Начальные условия также совпадают, поэтому можно сразу записать выражения для амплитуд

$$C_+(t)=\cos\omega t,$$
$$C_-(t)=i\sin\omega t,$$

где $\omega=A/\hbar$. Вероятность обнаружить частицу в момент времени T в состоянии $+z$ равна $\cos^2\omega t$.

б) В стационарном состоянии вероятность найти частицу в каждом из базисных состояний не должна меняться со временем, поэтому решение системы

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt}=-AC_2,$$
$$i\hbar\frac{dC_2}{dt}=-AC_1$$

должно иметь вид

$$C_1(t)=e^{-iEt/\hbar}a,$$
$$C_2(t)=e^{-iEt/\hbar}b.$$

Для не зависящих от времени величин a и b получаем

$$\begin{cases} Ea=-Ab, \\ Eb=-Aa. \end{cases}$$

Эта система имеет два нетривиальных решения:

1) при $E_1=-A$ $\quad a_1=b_1=1/\sqrt{2}$,

2) при $E_2=+A$ $\quad a_2=-b_2=1/\sqrt{2}$.

Значение $1/\sqrt{2}$ выбирается из условия нормировки $|a|^2+|b|^2=1$.

Таким образом, стационарным состояниям отвечают следующие комбинации найденных в пункте (а) амплитуд:

$$C_1^{(1)}(t)=C_2^{(1)}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[C_+(t)+C_-(t)]=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t},$$

$$C_1^{(2)}(t)=C_2^{(2)}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[C_+(t)-C_-(t)]=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t},$$

причем энергии соответствующих состояний равны

$$E_1=-A, \qquad E_2=+A.$$

в) Рассмотрим амплитуды $C_{+\xi}(t)$ и $C_{-\xi}(t)$ для направления спина по и против некоторой оси ξ, лежащей в плоскости yz и образующей угол φ с осью z. Имеем

$$C_{+\xi}(t)=\langle+\xi|+z\rangle C_+(t)+\langle+\xi|-z\rangle C_-(t)=$$
$$=\cos\left(\omega t-\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$C_{-\xi}(t)=i\sin\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Спин будет направлен вдоль оси ξ, если

$$\varphi=-2\omega t+2\pi n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Оси, отвечающие разным значениям n, физически неразличимы, так что можно принять $\varphi=-2\omega t$.

Таким образом, во все моменты времени с вероятностью единица спин будет направлен вдоль оси, вращающейся в плоскости yz с угловой скоростью 2ω в направлении от оси y к z.

г) Частицу со спином $^1/_2$ нужно поместить в магнитное поле, параллельное оси x. Из решения задачи **6.1** ясно, что такая система будет обладать требуемыми свойствами.

К главе 7. ***Аммиачный лазер***

7.1. Рассмотрение, проведенное в гл. 7 «Лекций» (вып. 8), показывает, что вероятность *вынужденного* перехода из состояния $|\mathrm{I}\rangle$ в состояние $|\mathrm{II}\rangle$

$$P(\mathrm{I}\longrightarrow\mathrm{II})=4\pi^2\frac{\mu^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2c}I(\omega_0)T$$

не зависит от того, сопровождается ли этот переход испусканием или поглощением света. Отсюда следует, что $P(\mathrm{I}\longrightarrow\mathrm{II})=P(\mathrm{II}\longrightarrow\mathrm{I})$. Тогда, используя определение коэффициентов Эйнштейна, получаем

$$B_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=\frac{P(\mathrm{I}\longrightarrow\mathrm{II})}{I(\omega_0)T}=\frac{\pi\mu^2}{\varepsilon_0\hbar^2c}, \quad B_{\mathrm{II},\,\mathrm{I}}=B_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}.$$

Попробуем теперь найти с помощью квантовой механики коэффициенты Эйнштейна $A_{II,\,I}$. Для этого будем рассматривать системы «молекула в состоянии I и единичный фотон» и «молекула в состоянии II» как два состояния одной и той же системы. Тогда, согласно гл. 6 «Лекций» (вып. 8), амплитуды перехода в единицу времени из начального состояния в конечное и обратно связаны между собой:

$$\langle \text{II} \mid \text{I, фотон}\rangle = \langle \text{I, фотон} \mid \text{II}\rangle^* = M.$$

Фактически такое соотношение для испускания и поглощения фотонов уже использовалось в § 4 гл. 2 (вып. 8, стр. 41). Пусть в объеме V имеется молекула в состоянии I и единичный фотон. Тогда вероятность перехода из I в II в единицу времени равна $|M|^2$. С другой стороны, вероятность перехода в данном случае совпадает с «числом» переходов в единицу времени, которое, согласно гл. 42 «Лекций» (вып. 4), равно $B_{I,\,II}I$. Интенсивность I одного фотона, очевидно, равна $\hbar\omega c/V$, так что

$$|M|^2 = B_{I,\,II}\cdot\hbar\omega\frac{c}{V}.$$

Вероятность обратного перехода (из II в I с испусканием фотона) в единицу времени, приходящаяся на интервал частот $\Delta\omega$, получается из $|M|^2$ умножением на число возможных состояний фотона $V\omega^2\Delta\omega/\pi^2c^2$ [см. формулу (2.42) «Лекций», вып. 8, стр. 49]. Но по определению коэффициента Эйнштейна $A_{II,\,I}$ эта вероятность равна $A_{II,\,I}\Delta\omega$, так что

$$|M|^2\frac{V\omega^2\Delta\omega}{\pi^2c^2} = A_{II,\,I}\Delta\omega.$$

Сравнивая найденные соотношения, получаем связь между коэффициентами Эйнштейна

$$A_{II,\,I} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2}B_{I,\,II},$$

установленную в гл. 42 (вып. 4) косвенным путем.

Интенсивность спонтанного излучения на интервале частот $\Delta\omega$ будет, очевидно, равна интенсивности для одного фотона, умноженной на число переходов в единицу времени:

$$\Delta I_c = \hbar\omega\frac{c}{V}\cdot A_{II,\,I}\Delta\omega = \frac{\mu^2\omega^4\Delta\omega}{\pi\varepsilon_0c^2V}.$$

7.2. Запишем систему уравнений для амплитуд вероятности иметь спин «вверх» и «вниз»:

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1 + H_{12}C_2,$$

$$i\hbar\frac{dC_2}{dt} = H_{21}C_1 + H_{22}C_2.$$

Элементы энергетической матрицы можно определить, переходя в систему координат с осью z', направленной вдоль поля **B**:

$$H_{11}=\langle +z|+z'\rangle(-\mu B)\langle +z'|+z\rangle+ \\ +\langle +z|-z'\rangle(+\mu B)\langle -z'|+z\rangle,$$

$$H_{22}=\langle -z|+z'\rangle(-\mu B)\langle +z'|-z\rangle+ \\ +\langle -z|-z'\rangle\mu B\langle -z'|-z\rangle,$$

$$H_{12}=\langle +z|+z'\rangle(-\mu B)\langle +z'|-z\rangle+ \\ +\langle +z|-z'\rangle\mu B\langle -z'|-z\rangle,$$

$$H_{21}=\langle -z|+z'\rangle(-\mu B)\langle +z'|+z\rangle+ \\ +\langle -z|-z'\rangle\mu B\langle -z'|+z\rangle=H_{12}^{*}.$$

Здесь использован уже известный результат

$$\langle +z'|H|+z'\rangle=-\langle -z'|H|-z'\rangle=-\mu B,$$
$$\langle +z'|H|-z'\rangle=\langle -z'|H|+z'\rangle=0.$$

Остается найти амплитуды $\langle jz'|iz\rangle$. Для этого заметим, что ось z' (вместе с полем **B**) определяется полярными углами θ, $\varphi=-\omega t$. Переход от системы координат x, y, z к системе x', y', z' можно осуществить поворотом, заданным углами Эйлера $\beta=\varphi-\pi/2$, $\alpha=-\theta$, $\gamma=0$. С помощью табл. 4.1 (вып. 8, стр. 80) находим

$$\langle +z'|+z\rangle=\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\langle -z'|+z\rangle=-i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\langle +z'|-z\rangle=-i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\langle -z'|-z\rangle=\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Используя эти выражения и соотношение

$$\langle jz'|iz\rangle=\langle iz|jz'\rangle^{*},$$

получаем

$$H_{11}=-H_{22}=-\mu B\cos\theta,$$
$$H_{12}=H_{21}^{*}=\mu B\sin\theta e^{+i\omega t}.$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{dC_1}{dt}=\frac{i\omega_0}{2}(\cos\theta\cdot C_1+\sin\theta\, e^{i\omega t}C_2),$$

$$\frac{dC_2}{dt}=\frac{i\omega_0}{2}(\sin\theta\, e^{-i\omega t}C_1-\cos\theta\, C_2),\quad \omega_0=\frac{2\mu B}{\hbar}$$

с начальными условиями

$$C_1(0)=1, \qquad C_2(0)=0.$$

При малых θ в этих уравнениях можно вначале пренебречь членами $\sim \sin\theta \approx \theta \ll 1$, а затем учесть их, действуя точно так же, как решается аналогичная задача в гл. 7 «Лекций» (вып. 8).

Однако написанные уравнения можно решить точно при произвольном θ. Для этого удобно сделать замену $C_1(t)\,e^{i\omega t/2}\,b_1(t)$, $C_2(t)=e^{-i\omega t/2}\,b_2(t)$, так что коэффициенты в уравнениях не будут зависеть от времени:

$$\frac{db_1}{dt}=\frac{i}{2}\left[(\omega_0\cos\theta-\omega)\,b_1+\omega_0\sin\theta\cdot b_2\right],$$

$$\frac{db_2}{dt}=\frac{i}{2}\left[\omega_0\sin\theta\cdot b_1-(\omega_0\cos\theta-\omega)\,b_2\right].$$

Начальные условия:

$$b_1(0)=1, \qquad b_2(0)=0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$b_1(t)=a_1e^{i\alpha t}, \qquad b_2(t)=a_2e^{i\alpha t},$$

что дает

$$(\omega_0\cos\theta-\omega-2\alpha)\,a_1+\omega_0\sin\theta\,a_2=0,$$
$$\omega_0\sin\theta\cdot a_1-(\omega_0\cos\theta-\omega+2\alpha)\,a_2=0.$$

Эта система алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения лишь при

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0\cos\theta-\omega)^2+(\omega_0\sin\theta)^2}.$$

Теперь можно записать общее решение исходных уравнений

$$C_1(t)=e^{i\omega t/2}\left(a_1^{(1)}e^{i\gamma t}+a_1^{(2)}e^{-i\gamma t}\right),$$
$$C_2(t)=e^{-i\omega t/2}\left(a_2^{(1)}e^{i\gamma t}+a_2^{(2)}e^{-i\gamma t}\right),$$

где

$$\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+\omega_0^2-2\omega\omega_0\cos\theta}=\alpha_1.$$

Коэффициенты a_1 и a_2 связаны условием

$$a_2^{(i)}=\frac{\omega_0\sin\theta}{(\omega_0\cos\theta-\omega)\pm 2\gamma}\,a_1^{(i)},$$

где знак плюс относится к $i=1$, а знак минус — к $i=2$. Вместе с начальным условием это дает

$$C_1(t)=e^{i\omega t/2}\left(\cos\gamma t+i\,\frac{\omega_0\cos\theta-\omega}{2\gamma}\sin\gamma t\right),$$

$$C_2(t)=e^{-i\omega t/2}\,i\,\frac{\omega_0\sin\theta}{2\gamma}\sin\gamma t,$$

откуда получаем вероятности для направления спина «вверх» и «вниз» в произвольный момент времени:

$$P_+(t)=\cos^2\gamma t+\left(\frac{\omega_0\cos\theta-\omega}{2\gamma}\right)^2\sin^2\gamma t,$$

$$P_-(t)=\left(\frac{\omega_0\sin\theta}{2\gamma}\right)^2\sin^2\gamma t.$$

Очевидно, резонанс наступает при частоте

$$\omega=\omega_0\cos\theta=\frac{2\mu B}{\hbar}\cos\theta.$$

В этом случае $\gamma={}^1/_2\,\omega_0\sin\theta$, так что

$$P_+(t)=\cos^2\gamma t,\qquad P_-(t)=\sin^2\gamma t.$$

Это означает, что спин периодически переворачивается вверх и вниз.

К главе 8. ***Другие системы с двумя состояниями***

8.1. Направим ось z противоположно магнитному полю B_0, а ось x — вдоль поля B_n, т. е. $B_x=2B_n\cos\omega t$, $B_z=-B_0$, $B_y=0$. Тогда уравнения для спиновых состояний [см. «Лекции», вып. 8, стр. 199, уравнения (8.23)] примут вид

$$i\hbar\frac{dC_1}{dt}=\mu B_0C_1-\mu B_xC_2,\qquad i\hbar\frac{dC_2}{dt}=-\mu B_0C_2-\mu B_xC_1.$$

Начальное условие: $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$. Эти уравнения такие же, как уравнения (7.38) и (7.39) «Лекций» (вып. 8, гл. 7, стр. 164) для молекулы аммиака. Будем решать их аналогично. Полагая

$$C_1(t)=\gamma_1(t)\,e^{-i\mu B_0t/\hbar},\qquad C_2(t)=\gamma_2(t)\,e^{i\mu B_0t/\hbar},$$

для γ_1 и γ_2 получим уравнения

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=i\,\frac{2\mu B_n}{\hbar}\cos\omega t e^{i\omega_0t}\,\gamma_2,\qquad \frac{d\gamma_2}{dt}=i\,\frac{2\mu B_n}{\hbar}\cos\omega t e^{-i\omega_0t}\,\gamma_1,$$

в которых $\omega_0=2\mu B_0/\hbar$.

Частоту ω считаем близкой к ω_0 и по тем же соображениям, что и в гл. 7 (вып. 8), оставляем в уравнениях только члены с $\exp[i(\omega-\omega_0)t]$. Наша система приобретает вид

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=i\,\frac{\mu B_n}{\hbar}\,e^{i(\omega_0-\omega)t}\,\gamma_2, \tag{1}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt}=i\,\frac{\mu B_n}{\hbar}\,e^{i(\omega-\omega_0)t}\,\gamma_1. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) по t и выражая $d\gamma_1/dt$ и γ_1 соответственно из уравнений (1) и (2), получаем

$$\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}+i(\omega_0-\omega)\frac{d\gamma_2}{dt}+\left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2\gamma_2=0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения мы научились решать, изучая колебания. Ищем решение в виде $\gamma_2=ae^{i\alpha t}$. Тогда для определения α получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2+(\omega_0-\omega)\alpha-\left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2=0,$$

из которого находим

$$\alpha_{1,2}=\frac{\omega-\omega_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)^2+\left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2}.$$

Следовательно, общий вид решения

$$\gamma_2(t)=e^{i\frac{\omega-\omega_0}{2}t}(ae^{irt}+be^{-irt}),$$

где

$$r=\sqrt{\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)^2+\left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2}.$$

Для определения постоянных a и b нужно иметь два начальных условия. Одно из них $\gamma_2(0)=0$ следует из условия $C_2(0)=0$ и приводит к соотношению $b=-a$. Тогда

$$\gamma_2(t)=2iae^{i\frac{\omega-\omega_0}{2}t}\sin rt.$$

Из условия $C_1(0)=1$ следует $\gamma_1(0)=1$. Учитывая уравнение (2), при $t=0$ имеем $(d\gamma_2/dt)(t=0)=i(\mu B_n/\hbar)$. Подставляя сюда явное выражение для γ_2, находим

$$a=\frac{1}{2}\frac{\mu B_n/\hbar}{r}.$$

Окончательно, вероятность того, что в момент времени T спин частицы будет направлен против оси z, т. е. вдоль вектора $\mathbf{B}_0$, равна

$$P_2=|\gamma_2|^2=\left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2\frac{\sin^2 rT}{r^2}.$$

В частности, при резонансе ($\omega=\omega_0$)

$$P_2=\sin^2\left(\frac{\mu B_n T}{\hbar}\right),$$

а вдали от резонанса $\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)^2 \gg \left(\frac{\mu B_n}{\hbar}\right)^2$

$$P_2 = \left(\frac{\mu B_n T}{\hbar}\right)^2 \frac{[\sin^2(\omega-\omega_0)T/2]}{[(\omega-\omega_0)T/2]^2}.$$

Обратим внимание на сходство этих результатов с формулами (7.50) и (7.52) (вып. 8, стр. 167 и 170).

К главе 9. ***Еще системы с двумя состояниями***

9.1. Пусть в некоторой системе координат гамильтониан записан в виде (9.4) (вып. 8, стр. 206), т. е.

$$H_{ij} = -\mu\left[\sigma_{ij}^x B_x + \sigma_{ij}^y B_y + \sigma_{ij}^z B_z\right],$$

причем величины σ_{ij}^x, σ_{ij}^y, σ_{ij}^z в соответствии с § 1 гл. 9 образуют матрицы Паули. Иначе говоря, это означает, что в качестве базисных состояний выбраны состояния со спином по и против оси z. Перейдем теперь к другой системе координат, *оставив неизменными базисные состояния* $|i>$, $|j>$. При этом матричные элементы гамильтониана не изменятся (ср. «Лекции», § 6 гл. 8, вып. 8, стр. 196, где меняются как раз базисные состояния), и в новой системе координат

$$H_{ij} = -\mu\left[\sigma_{ij}^{x'} B_{x'} + \sigma_{ij}^{y'} B_{y'} + \sigma_{ij}^{z'} B_{z'}\right].$$

Выражая $B_{\alpha'}$ ($\alpha' = x', y', z'$) через B_α ($\alpha = x, y, z$),

$$B_{\alpha'} = \sum_\alpha C_{\alpha'\alpha} B_\alpha,$$

находим связь между σ_{ij}^α и $\sigma_{ij}^{\alpha'}$, т. е. закон преобразования элементов матриц Паули при поворотах системы координат:

$$\sigma_{ij}^\alpha = \sum_{\alpha'} \sigma_{ij}^{\alpha'} C_{\alpha'\alpha}.$$

Учитывая, что величины $C_{\alpha'\alpha}$ образуют ортогональную матрицу, т. е.

$$\sum_\alpha C_{\alpha'\alpha} C_{\beta'\alpha} = \delta_{\alpha'\beta'},$$

получаем

$$\sigma_{ij}^{\alpha'} = \sum_\alpha C_{\alpha'\alpha} \sigma_{ij}^\alpha.$$

Но это как раз закон преобразования вектора. Переходя от матричных элементов к матрицам Паули, т. е. опуская индексы i и j, приходим к выводу, что матрицы σ_x, σ_y, σ_z преобразуются друг через друга при поворотах системы координат как компоненты вектора.

Соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma}=2i\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

легко проверить непосредственным перемножением матриц Паули. Например,

$$(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma})_x=\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y=$$
$$=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},$$
$$=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}=2i\sigma_x.$$

Аналогично получим соотношения

$$\sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_z=2i\sigma_y,$$
$$\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2i\sigma_z,$$
$$\sigma_x\sigma_x+\sigma_y\sigma_y+\sigma_z\sigma_z=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Найдем также произведение трех матриц Паули:

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=i\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

9.2. а) Для нахождения уровней энергии электрона, присоединенного к молекуле CO_2, воспользуемся уравнением (9.62) («Лекции», вып. 8, стр. 239): $\mathrm{Det}\,(H_{ij}-\delta_{ij}E)=0$ и будем считать, что в качестве состояний $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ выбраны состояния, описывающие электрон, принадлежащий соответственно первому атому кислорода, атому углерода и второму атому кислорода. Энергии электрона в этих состояниях $H_{11}=H_{33}=E_O$, $H_{22}=E_C$. Поскольку прямые переходы электрона от одного атома кислорода к другому не учитываются, то $H_{13}=H_{31}=0$. Из соображений симметрии матричные элементы H_{12} и H_{32}, учитывающие переходы электрона от атома углерода к атомам кислорода, равны. Обозначим их через $v=H_{12}=H_{32}$. Далее, $H_{21}=H_{12}^*=v^*$, $H_{23}=H_{32}^*=v^*$. Таким образом, нахождение уровней энергии рассматриваемой системы сводится к решению уравнения

$$\begin{vmatrix}E_O-E&v&0\\v^*&E_C-E&v^*\\0&v&E_O-E\end{vmatrix}=0.$$

Расписывая детерминант, нетрудно найти корни этого уравнения:

$$E_{1,2}=\frac{E_O+E_C}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{E-E_C}{2}\right)^2+2|v|^2}, \qquad E_3=E_O.$$

б) Коэффициенты a_i разложения

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}\sum_i a_i |i\rangle$$

стационарного состояния по базисным состояниям определяются системой уравнений

$$\sum_i (H_{ij} - \delta_{ij}E)\, a_j = 0.$$

При $E_O = E_C = E_0$ эта система запишется так:

$$\begin{cases} (E_0 - E)\, a_1 + v a_2 + 0 \cdot a_3 = 0, \\ v^* a_1 + (E_0 - E)\, a_2 + v^* a_3 = 0, \\ 0 \cdot a_1 + v a_2 + (E_0 - E)\, a_3 = 0. \end{cases}$$

Если подставить значения энергии $E_{1,2} = E_0 \pm |v|\sqrt{2}$, $E_3 = E_0$ и решить систему относительно a_1, a_2, a_3 $\left(\text{с учетом условия нормировки } \sum_{i=1}^{3} |a_i|^2 = 1\right)$, то получим

1) для $E_1 = E_0 + |v|\sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha}$$

(здесь α — фаза матричного элемента: $v = |v| e^{i\alpha}$);

2) для $E_2 = E_0 - |v|\sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha},$$

3) для $E_3 = E_0$

$$a_1 = -a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = 0.$$

Эти решения показывают, что в первом и втором состояниях электрон с вероятностью $^1/_2$ «принадлежит» атому углерода, и с вероятностью по $^1/_4$ — каждому из атомов кислорода, тогда как в третьем состоянии он с равными вероятностями (по $^1/_2$) находится возле атомов кислорода, а вероятность «принадлежать» атому углерода равна нулю.

Следует иметь в виду, что полная система уровней молекулы CO_2 гораздо сложнее полученной здесь. Это и понятно, так как при решении задачи не учитывались внутренние и вращательные степени свободы молекулы CO_2.

9.3. Поскольку молекула CH_4 образует правильный тетраэдр, любой атом водорода расположен одинаковым образом по отношению ко всем остальным атомам водорода. Поэтому зна-

чения амплитуды перехода «дырки» от каждого атома водорода к любому другому одинаковы, так что все недиагональные матричные элементы гамильтониана совпадают:

$$H_{12}=H_{21}=H_{13}=H_{31}=\ldots=v,$$

причем $v=v^*$. Аналогично, из соображений симметрии

$$H_{11}=H_{22}=H_{33}=H_{44}=E_0.$$

Задача, таким образом, свелась к нахождению корней уравнения

$$\begin{vmatrix} E_0-E & v & v & v \\ v & E_0-E & v & v \\ v & v & E_0-E & v \\ v & v & v & E_0-E \end{vmatrix}=0.$$

Проще всего решить это уравнение, воспользовавшись общими свойствами определителей. Значение определителя не меняется, если любую строку (столбец) определителя, умноженную на произвольное постоянное число, прибавить к любой другой строке (столбцу). Прибавим к первому столбцу все остальные, а затем вычтем первую строку из всех остальных. Тогда получим

$$\begin{vmatrix} E_0+3v-E & v & v & v \\ 0 & E_0-v-E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0-v-E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_0-v-E \end{vmatrix}=$$
$$=(E_0+3v-E)\,(E_0-v-E)^3=0.$$

Таким образом, три уровня имеют одинаковую энергию

$$E_1=E_2=E_3=E_0-v,$$

а четвертый имеет энергию

$$E_4=E_0+3v$$

и отделен интервалом $4|v|$ от первых трех.

9.4. Матрица H_{ij} в рассматриваемом случае имеет вид

$$(H_{ij})=\begin{pmatrix} E_0 & -A & 0 & 0 & 0 & -A \\ -A & E_0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & E_0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & E_0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & E_0 & -A \\ -A & 0 & 0 & 0 & -A & E_0 \end{pmatrix}.$$

Она записана с учетом того, что все диагональные матричные элементы в силу симметрии системы равны между собой:

$$H_{11}=H_{22}=\ldots=H_{66}=E_0,$$

а среди недиагональных матричных элементов отличны от нуля лишь соответствующие переходам между соседними атомами, причем все эти ненулевые матричные элементы совпадают (из соображений симметрии) и равны $-A$.

Система уравнений

$$\begin{aligned}
&(E_0-E)\,a_1-Aa_2-Aa_6=0,\\
&-Aa_1+(E_0-E)\,a_2-Aa_5=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&-Aa_1-Aa_5+(E_0-E)\,a_6=0,
\end{aligned}\tag{1}$$

составленная с помощью этой матрицы, очевидно, удовлетворяется при одинаковых коэффициентах a_i [$C_i=a_i\exp(-iEt/\hbar)$], если $E=E_0-2A$. Прежде чем находить значения энергий остальных пяти состояний, определим величину δ. Как видно из условия, при переходе к соседнему атому (по часовой стрелке) амплитуда пребывания электрона на соответствующем атоме умножается на $e^{i\delta}$. Используя симметрию системы, можно в дополнение к соотношениям, приведенным в условии, написать $C_1=C_6e^{i\delta}$, или $a_1=a_6e^{i\delta}$. С другой стороны, из условия имеем $a_6=a_1e^{i5\delta}$. Следовательно, $e^{6i\delta}=1$ и допустимые значения

$$\delta_k=\frac{2\pi}{6}(k-1)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

Из условия нормировки $\sum_i|a_i|^2=1$ можно определить величину $a_1=1/\sqrt{6}$. Значения энергии, соответствующие найденным коэффициентам $a_j^{(k)}$, можно получить, подставляя $a_j^{(k)}=(1/\sqrt{6})\exp[i\delta_k(j-1)]$ в систему (1). Из первого уравнения этой системы найдем

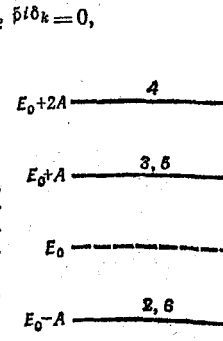
$$(E_0-E)\frac{1}{\sqrt{6}}-A\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\delta_k}-A\frac{1}{\sqrt{6}}e^{5i\delta_k}=0,$$

откуда

$$E_k=E_0-2A\cos\frac{\pi}{3}(k-1)$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

или $E_1=E_0-2A$, $E_2=E_6=E_0-A$, $E_3=E_5=E_0+A$, $E_4=E_0+2A$. Все остальные уравнения системы (1) при этом удовлетворяются тождественно, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.



Коэффициенты C_j получаются из a_j умножением на временной множитель

$$C_j^{(k)}=a_j^{(k)}e^{-iE_kt/\hbar}.$$

Диаграмма уровней рассматриваемой системы изображена на рисунке.

9.5. а) Уровни энергии определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} E_0-E & -A & -A \\ -A & E_0-E & -A \\ -A & -A & E_0-E \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$E_{1,2}=E_0+A, \qquad E_3=E_0-2A,$$

так что два уровня рассматриваемого молекулярного иона имеют равную энергию, а третий отделен от них интервалом

$$|E_{1,2}-E_3|=3|A|.$$

б) Пусть энергия двух базисных состояний изменилась на величину Δ, а третьего — на величину $(\Delta+\varepsilon A)$. Тогда уровни энергии системы определятся уравнением

$$\begin{vmatrix} E_0+\Delta-E & -A & -A \\ -A & E_0+\Delta-E & -A \\ -A & -A & E_0+\Delta+\varepsilon A-E \end{vmatrix}=0.$$

Замечая, что этот определитель можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} E_0+\Delta-E & -A & -A \\ -A & E_0+\Delta-E & -A \\ -A & -A & E_0+\Delta-E \end{vmatrix}+\varepsilon A\begin{vmatrix} E_0+\Delta-E & -A \\ -A & E_0+\Delta-E \end{vmatrix}=$$

$$=(E_0+\Delta-2A-E)(E_0+\Delta+A-E)^2+$$
$$+\varepsilon A[(E_0+\Delta-E)^2-A^2]=$$
$$=(E_0+\Delta+A-E)[(E_0+\Delta-2A-E)(E_0+\Delta+A-E)+$$
$$+\varepsilon A(E_0+\Delta-E-A)],$$

находим $E_1=E_0+\Delta+A$.

Остальные два значения энергии найдем, приравняв нулю квадратную скобку в написанном выше выражении. Решая получающееся квадратное уравнение и пренебрегая членами второго порядка по ε, получаем

$$E_2=E_0+\Delta+A+\frac{1}{3}\varepsilon A, \qquad E_3=E_0+\Delta-2A+\frac{2}{3}\varepsilon A.$$

Таким образом, если до наложения электрического поля два уровня иона имели одинаковую энергию, то теперь они расщепились на величину $^1/_3|\varepsilon A|=A/300$, а интервал между первым и третьим уровнями изменился незначительно и стал равным $|3A-{}^2/_3\varepsilon A|\approx 2{,}993|A|$.

К главе 10. ***Сверхтонкое расщепление в водороде***

10.1. Энергии уровней сверхтонкой структуры атома водорода в основном состоянии при наличии магнитного поля выражаются формулами (см. «Лекции», вып. 8, гл. 10):

$$E_{\mathrm{I}}=A+\mu B, \qquad \mu=-(\mu_e+\mu_p),$$
$$E_{\mathrm{II}}=A-\mu B,$$
$$E_{\mathrm{III}}=A\left\{-1+2\sqrt{1+\left(\frac{\mu' B}{2A}\right)^2}\right\}, \qquad \mu'=-(\mu_e-\mu_p),$$
$$E_{\mathrm{IV}}=-A\left\{1+2\sqrt{1+\left(\frac{\mu' B}{2A}\right)^2}\right\}.$$

Если магнитное поле мало ($\mu B \ll 2A$), то первые три из этих значений энергии относятся к состояниям с полным спином $j=1$ и его проекцией соответственно $m=+1$, 0, -1, а четвертое значение энергии — к состоянию с полным спином $j=0$. Пренебрегая квадратичными по B членами, запишем частоты переходов из первых трех состояний в низшее, четвертое состояние

$$f_1=\frac{E_{\mathrm{I}}-E_{\mathrm{IV}}}{2\pi\hbar}=f_0+\frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \qquad f_2=f_0-\frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \qquad f_3=f_0,$$

где f_0 — частота излучения при переходе между уровнями сверхтонкой структуры свободного атома водорода в основном состоянии ($\sim$1420 *Мгц*). Расщепление линии

$$\Delta f=\frac{\mu B}{2\pi\hbar}$$

оказывается равным в межзвездном пространстве $\sim$14,0 *гц*, в магнитном поле Земли $\sim$0,70 *Мгц*. (При $B=1$ *гс* $\mu B/2\pi\hbar=1{,}397048013\cdot 10^7$ *гц*). Изменения длины волны соответственно равны $\sim 2\cdot 10^{-7}$ и $1\cdot 10^{-2}$ *см*.

При больших полях, когда выполнено условие $\mu' B \gg A$, уровни сверхтонкой структуры уже нельзя характеризовать значением полного спина, а энергии уровней можно записать в виде

$$E_{\mathrm{I}}=A+\mu B, \qquad E_{\mathrm{II}}=A-\mu B,$$
$$E_{\mathrm{III}}=-A+\mu' B, \qquad E_{\mathrm{IV}}=-A-\mu' B.$$

Тогда частоты переходов из состояний I, II, III в низшее состояние IV запишутся следующим образом:

$$f_1=\frac{1}{2}f_0+\frac{|\mu_e|B}{\pi\hbar}, \qquad f_2=\frac{1}{2}f_0+\frac{\mu_p B}{\pi\hbar}, \qquad f_3=\frac{\mu' B}{\pi\hbar}.$$

При $B=10^5$ *гс*

$$f_1=0{,}28064114\cdot 10^{12}\ \text{гц}, \qquad f_2=0{,}11359225\cdot 10^{10}\ \text{гц},$$
$$f_3=0{,}280356521\cdot 10^{12}\ \text{гц}.$$

Соответствующие длины волн равны

$$\lambda_1=0{,}10689\ \text{см}, \qquad \lambda_2=26{,}41062\ \text{см}, \qquad \lambda_3=0{,}10701\ \text{см}.$$

9

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

К главе 11. ***Распространение в кристаллической решетке***

11.1. Обозначим амплитуду пребывания электрона у n-го атома в состоянии i через C_n^i, а в состоянии j—через C_n^j. Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$i\hbar \frac{dC_n^i}{dt} = E_i C_n^i - B\,(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i) - A\,(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i), \qquad (1)$$

$$i\hbar \frac{dC_n^j}{dt} = E_j C_n^j - B\,(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i) - A\,(C_{n-1}^j + C_{n+1}^j).$$

Для стационарных состояний зависимость амплитуд от времени известна

$$C_n^i = a_n^i\, e^{-iEt/\hbar}, \quad C_n^j = a_n^j\, e^{-iEt/\hbar}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем систему уравнений для коэффициентов a_n:

$$(E_i - E)\, a_n^i - A\,(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) - B\,(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) = 0,$$
$$(E_j - E)\, a_n^j - A\,(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) - B\,(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) = 0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$a_n^i = \alpha_i e^{ikx_n},$$
$$a_n^j = \alpha_j e^{ikx_n},$$

где $x_n = bn$. Тогда α_i и α_j удовлетворяют системе уравнений

$$(E_i - 2A\cos kb - E)\,\alpha_i - (2B\cos kb)\,\alpha_j = 0,$$
$$-(2B\cos kb)\,\alpha_i + (E_j - 2A\cos kb - E)\,\alpha_j = 0,$$

условием разрешимости которой является обращение в нуль определителя:

$$\begin{vmatrix} E_i - 2A\cos kb - E & -2B\cos kb \\ -2B\cos kb & E_j - 2A\cos kb - E \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно E, получаем

две полосы допустимых значений энергии:

$$E_1=\frac{1}{2}\left\{E_i+E_j+\sqrt{(E_i-E_j)^2+16B^2\cos^2 kb}\right\}-2A\cos kb,$$

$$E_2=\frac{1}{2}\left\{E_i+E_j-\sqrt{(E_i-E_j)^2+16B^2\cos^2 kb}\right\}-2A\cos kb.$$

В предельном случае $|E_i-E_j|\gg 2B$ получаем просто две независимые полосы, лежащие вокруг энергий E_i и E_j:

$$E_1=E_i-2A\cos kb,$$
$$E_2=E_j-2A\cos kb.$$

Этот результат совершенно аналогичен полученному в § 1 гл. 11 «Лекций» (вып. 9), когда учитывается лишь одно состояние электрона в атоме. Это и понятно: ведь условие $|E_i-E_j|\gg 2B$ фактически означает, что полосы можно рассматривать независимо друг от друга.

В другом случае $|E_i-E_j|\ll 2B$ получаем

$$E_1=\frac{E_i+E_j}{2}-2(A-B)\cos kb,$$

$$E_2=\frac{E_i+E_j}{2}-2(A+B)\cos kb.$$

Здесь обе полосы расположены вокруг общего «центра тяжести» $(E_i+E_j)/2$, причем одна полоса лежит внутри другой.

11.2. Записываем систему уравнений для амплитуд

$$i\hbar\frac{dC_n^a}{dt}=(E_0+\Delta E)\,C_n^a-A\,(C_{n-1}^b+C_n^b),$$

$$i\hbar\frac{dC_n^b}{dt}=(E_0-\Delta E)\,C_n^b-A\,(C_n^a+C_{n+1}^a)$$

и ищем решение в виде

$$C_n^a=\alpha\exp\left[i\left(kx_n^a-\frac{Et}{\hbar}\right)\right],$$

$$C_n^b=\beta\exp\left[i\left(kx_n^b-\frac{Et}{\hbar}\right)\right].$$

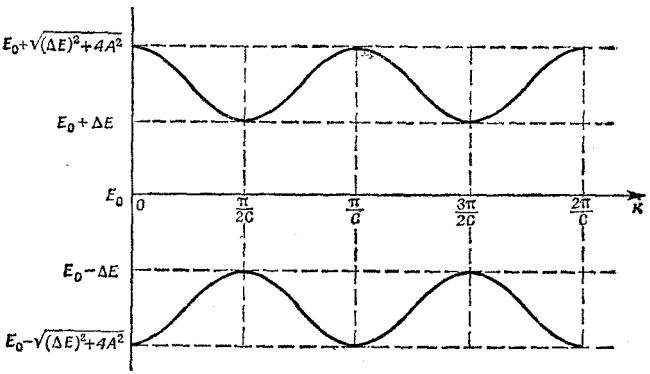
Координата n-го атома типа a равна $x_n^a=2nc$; типа b соответственно равна $x_n^b=(2n+1)\,c$. Тогда для величин α и β получаем систему алгебраических уравнений:

$$(E_0+\Delta E-E)\,\alpha-(2A\cos kc)\,\beta=0,$$
$$-(2A\cos kc)\,\alpha+(E_0-\Delta E-E)\,\beta=0.$$

Требование обращения в нуль определителя этой системы дает

$$E=E_0\pm\sqrt{(\Delta E)^2+(2A\cos kc)^2}.$$

Примерная зависимость энергии E от волнового числа k показана на рисунке.
Из рисунка, как и из формулы для E, видно, что если k меняется от нуля до $\pi/2c$, то энергия принимает все свои допустимые значения: в верхней полосе от $E_0+\sqrt{(\Delta E)^2+4A^2}$ до $E_0+\Delta E$, а в нижней полосе от $E_0-\Delta E$ до $E_0-\sqrt{(\Delta E)^2+4A^2}$.



11.3. Будем исходить из уравнений для не зависящих от времени амплитуд a_n [таких, что $C_n(t)=a_n\exp(-iEt/\hbar)$]. Имеем

$$\begin{aligned}
Ea_n &= E_0a_n - Aa_{n+1} - Aa_{n-1} \qquad (n\leqslant -2);\\
Ea_{-1} &= E_0a_{-1} - Ba_0 - Aa_{-2},\\
Ea_0 &= E_0a_0 - Ba_{+1} - Ba_{-1},\\
Ea_{+1} &= E_0a_1 - Aa_2 - Ba_0,\\
Ea_n &= E_0a_n - Aa_{n-1} - Aa_{n+1} \qquad (n\geqslant 2).
\end{aligned}$$

Решения ищем в виде

$$\begin{aligned}
a_n &= e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n} \quad \text{для всех} \quad n<0,\\
a_n &= \gamma e^{ikx_n} \quad \text{для всех} \quad n>0,
\end{aligned}$$

причем $x_n=bn$.

Из уравнений для $n\geqslant 2$ можно сразу же получить допустимые значения энергии

$$E=E_0-2A\cos kb.$$

Осталось три уравнения

$$\begin{aligned}
&(E_0-E)(e^{-ikb}+\beta e^{ikb}) - Ba_0 - A(e^{-2ikb}+\beta e^{2ikb}) = 0,\\
&(E_0-E)a_0 - B(e^{-ikb}+\beta e^{ikb}) - B\gamma e^{ikb} = 0,\\
&(E_0-E)\gamma e^{ikb} - Ba_0 - A\gamma e^{2ikb} = 0.
\end{aligned}$$

Из первого и третьего уравнений с учетом соотношения $E_0 - E = A\,(e^{ikb} + e^{-ikb})$ получим соответственно

$$\beta = \frac{B}{A}\,a_0 - 1$$

и

$$\gamma = \frac{B}{A}\,a_0 = \beta + 1.$$

Подставив теперь эти выражения во второе уравнение, найдем

$$a_0 = \frac{iAB \sin kb}{(B^2 - A^2)\cos kb + iB^2 \sin kb}.$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{iB^2 \sin kb}{(B^2 - A^2)\cos kb + iB^2 \sin kb},$$

$$\beta = \gamma - 1 = \frac{(A^2 - B^2)\cos kb}{(B^2 - A^2)\cos kb + iB^2 \sin kb}.$$

Как и должно быть, найденные величины, «амплитуда прохождения» γ и «амплитуда отражения» β, удовлетворяют условию $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

11.4. а) Из соотношения $|\beta|^2 + |1+\beta|^2 = 1$ следует

$$2\beta\beta^* + \beta + \beta^* = 0,$$

или

$$\beta(\beta^* + 1) + \beta^*(\beta + 1) = 0.$$

Поделив это соотношение на величину $(\beta+1)(\beta^*+1)$, получим

$$\frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\beta^*}{\beta^*+1} = 2\mathrm{Re}\,\frac{\beta}{\beta+1} = 0.$$

б) Представим β в виде $|\beta|\,e^{i(\eta+\pi/2)}$ и воспользуемся соотношением $|\beta|^2 + \mathrm{Re}\,\beta = 0$. Тогда $|\beta|^2 + |\beta| \cos\left(\eta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, откуда $|\beta| = \sin\eta$.
Следовательно, $\beta = ie^{i\eta}\sin\eta$.

11.5. Если крайний атом левого кристалла считать нулевым, то система уравнений для амплитуд a_n имеет вид

$$(E_0 - E)\,a_n - A\,(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \qquad (n \leqslant -1),$$
$$(E_0 - E)\,a_0 - Aa_{-1} - Ba_1 = 0,$$
$$(E_0' - E)\,a_1 - Ba_0 - A'a_2 = 0,$$
$$(E_0' - E)\,a_n - A'(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Решение для области *I* ищем в виде суммы падающей и от-

раженной волн

$$a_n\,(n \leqslant 0) = e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n}, \qquad x_n = bn,$$

а для области II — в виде прошедшей волны

$$a_n\,(n \geqslant 1) = \gamma e^{ik'x'_n}, \qquad x'_n = b'n.$$

Тогда из уравнений для $n \leqslant -1$ получим допустимые значения энергии

$$E = E_0 - 2A\cos kb.$$

С другой стороны, та же энергия E (из уравнений для $n \geqslant 2$) равна

$$E = E'_0 - 2A'\cos k'b'.$$

Это означает, что волновые числа в областях I и II связаны соотношением

$$E_0 - 2A\cos kb = E'_0 - 2A'\cos k'b'.$$

а) Обратимся теперь к оставшимся второму и третьему уравнениям. Подставим в них явный вид амплитуд a_{-1}, a_0, a_1, a_2 и воспользуемся соотношениями

$$E_0 - E = A\,(e^{ikb} + e^{-ikb}),$$
$$E'_0 - E = A'\,(e^{ik'b'} + e^{-ik'b'}).$$

Тогда второе уравнение преобразуется к виду

$$Ae^{-ikb}\beta + Ae^{ikb} - Be^{ik'b'}\gamma = 0,$$

а третье уравнение сразу дает искомое соотношение

$$\gamma = \frac{B}{A'}\,(1+\beta).$$

б) Подставив это выражение для γ в предыдущее уравнение, находим

$$\beta = -\frac{AA'e^{ikb} - B^2e^{ik'b'}}{AA'e^{-ikb} - B^2e^{ik'b'}}.$$

Если k' — мнимое, $k' = i\varkappa$, то $e^{ik'b'} = e^{-\varkappa b'}$. Поскольку A, A' и B — вещественные числа (как и kb), то числитель и знаменатель являются комплексно-сопряженными друг по отношению к другу. Следовательно, $|\beta| = 1$. Но величина $|\beta|^2$ есть доля отраженных частиц. Следовательно, все частицы, доходящие до поверхности раздела, должны отражаться от нее. Этот результат легко понять: мнимость волнового числа k' означает отсутствие потока частиц в области II, или, проще говоря, означает, что частица не может свободно распространяться в этой области (хотя и может «забежать» в нее с краю). Это случится, если энергия частицы, налетающей слева на границу раздела,

не попадает в область энергий, допустимых для свободного распространения в правом кристалле, т. е.

$$|E_0 - E_0'| \geqslant 2|A| + 2|A'|.$$

в) Для проверки закона сохранения числа частиц найдем прежде всего групповые скорости

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} = \frac{b}{\hbar} 2A \sin kb,$$

$$v_g' = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk'} = \frac{b'}{\hbar} 2A' \sin k'b'.$$

Заметим, что

$$\frac{v_g'/b'}{v_g/b} = \frac{A' \sin k'b'}{A \sin kb}.$$

Дальше, используя связь между β и γ, а также явный вид β, найдем

$$\gamma = \frac{B}{A'}(1+\beta) = -\frac{2iAB \sin kb}{AA'e^{-ikb} - B^2 e^{ik'b'}}.$$

Тогда

$$|\gamma|^2 = \frac{4A^2B^2 \sin^2 kb}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Из явного вида β получаем

$$|\beta|^2 = \frac{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb - k'b')}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

В числителе этого выражения добавим и вычтем величину $2AA'B^2 \cos(kb + k'b')$. Тогда

$$|\beta|^2 = 1 + \frac{2AA'B^2[\cos(kb + k'b') - \cos(kb - k'b')]}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Преобразуя разность косинусов, получаем

$$|\beta|^2 = 1 - \frac{4AA'B^2 \sin kb \sin k'b'}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Но дробь в первой части этого равенства как раз равна $|\gamma|^2 \frac{v_g'/b'}{v_g/b}$. Таким образом, получаем закон сохранения числа частиц

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v_g'/b'}{v_g/b} = 1.$$

Появление множителя при $|\gamma|^2$ можно пояснить следующим образом. Закон сохранения числа частиц означает физически, что поток частиц, приходящих слева, равен сумме потоков

частиц, прошедших границу и отраженных от нее. Величины $|\beta|^2$ и $|\gamma|^2$ пропорциональны вероятности для частицы находиться вблизи данного атома, т. е. плотности числа частиц в том или другом потоке. А для того, чтобы получить величину потока, нужно умножить плотность частиц на их скорость. При этом нужна скорость, измеряемая количеством атомов, проходимых частицей в единицу времени, для этого и приходится поделить v_g на b.

Полезно заметить, что полученное выше соотношение несправедливо при мнимом k'. Для этого случая поток в области *II* отсутствует, и закон сохранения числа частиц принимает вид $|\beta|^2=1$.

К главе 12. Полупроводники

12.1. Распишем уравнения движения электрона в полупроводнике по компонентам:

$$\frac{dv_x}{dt}+\frac{1}{\tau}v_x=\frac{q}{m^*}E_x+\omega_c v_y,$$

$$\frac{dv_y}{dt}+\frac{1}{\tau}v_y=-\omega_c v_x,$$

$$\frac{dv_z}{dt}+\frac{1}{\tau}v_z=0.$$

Уравнение для z-компоненты скорости решается элементарно ($v_z=v_{0z}e^{-t/\tau}$), и для наших целей не представляет интереса. Для решения первых двух уравнений удобно заменить

$$E_x=E_0\cos\omega t=\mathrm{Re}\,(E_0e^{i\omega t})$$

комплексной величиной $E_x=E_0e^{i\omega t}$.

Решение уравнений ищем в виде

$$v_x=ae^{i\omega t},$$
$$v_y=be^{i\omega t},$$

где a и b — комплексные постоянные величины, для которых получаем систему алгебраических уравнений

$$\left(i\omega+\frac{1}{\tau}\right)a-\omega_c b=\frac{qF_0}{m^*},$$
$$\omega_c a+\left(i\omega+\frac{1}{\tau}\right)b=0.$$

Решая их, получаем

$$v_x=\frac{1+i\omega\tau}{(1+i\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2}\,\frac{q\tau E_0}{m^*}\,e^{i\omega t}.$$

Следовательно, искомое соотношение

$$\frac{v_x}{E_x}=\frac{q\tau}{m^*}\,\frac{1+i\omega\tau}{1+(\omega_c^2-\omega^2)\,\tau^2+2i\omega\tau}$$

получено.

Мощность, поглощаемая электроном от поля, находится по формуле

$$P=q\,\mathrm{Re}\,v_x\,\mathrm{Re}\,E_x.$$

Но $\mathrm{Re}\,E_x=E_0\cos\omega t$, а величину $\mathrm{Re}\,v_x$ запишем следующим образом:

$$\mathrm{Re}\,v_x=\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}E_x\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)\mathrm{Re}\,E_x-\mathrm{Im}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)\mathrm{Im}\,E_x.$$

Тогда поглощаемая мощность равна

$$P(t)=qE_0^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)\cos^2\omega t-qE_0^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)\cos\omega t\sin\omega t.$$

При усреднении по периоду $T=2\pi/\omega$ второе слагаемое обратится в нуль, поскольку отношение v_x/E_x не зависит от времени, а интеграл $\int\limits_0^T\cos\omega t\sin\omega t\,dt$ равен нулю. Таким образом, средняя за период поглощенная мощность будет пропорциональна $\mathrm{Re}\,(v_x/E_x)$:

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\,qE_0^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right).$$

Проанализируем частотную зависимость поглощаемой мощности. Имеем

$$\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)=\frac{1+(\omega_c^2+\omega^2)\,\tau^2}{[1+(\omega_c^2-\omega^2)\tau^2]^2+4\omega^2\tau^2}\,\frac{q\tau}{m^*}.$$

При $\omega_c\tau\gg 1$ это выражение существенно упрощается. Введем обозначение $\Delta\omega=\omega-\omega_c$ и будем считать, что $|\Delta\omega|\ll\omega_c$. Тогда получим

$$\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right)=\frac{1}{1+(\Delta\omega)^2\tau^2}\,\frac{q\tau}{2m^*}.$$

Это означает, что поглощаемая мощность максимальна при $\omega=\omega_c$ ($\Delta\omega=0$), причем ширина максимума (определяемая по частоте, при которой поглощаемая мощность вдвое меньше максимальной) равна $1/\tau$. Измеряя частоту, отвечающую максимуму поглощения, и ширину этого максимума, можно получить m^* и τ.

Предположим теперь, что $\omega_c\tau$ уменьшается. Когда эта величина приближается к единице, полученная выше упрощенная формула становится неприменимой. Чтобы понять, что происходит с зависимостью поглощенной мощности от

частоты, исследуем случай $\omega_c\tau \ll 1$, иначе говоря, положим $\omega_c = 0$. Тогда

$$\mathrm{Re}\left(\frac{v_x}{E_x}\right) = \frac{q\tau}{m^*}\,\frac{1}{1+\omega^2\tau^2},$$

т. е. частотная зависимость этой величины не содержит максимума при отличных от нуля частотах, т. е. резонанс не наблюдается. Переход между двумя предельными формами частотной зависимости происходит где-то в области $\omega_c\tau \sim 1$. Условие $\omega_c\tau > 1$ означает, что время между столкновениями τ больше, чем период обращения электрона. Ясно, что только в этом случае движение электрона будет периодическим (по крайней мере между столкновениями) и, стало быть, наблюдение резонанса будет возможно.

12.2. «Ток тепловых дырок» I_r, текущий из области p в область n, будет пропорционален концентрации таких дырок в p-области, энергия которых достаточна для преодоления барьера:

$$I_r \sim N_p(p)\, e^{-q(V_0+V)/kT}.$$

Здесь через V_0 обозначена разность потенциалов между n- и p-областями в условиях равновесия; V — дополнительная разность потенциалов, приложенная извне; $N_p(p)$ — полная концентрация дырок в p-области.

Если же дырки переходят из n- в p-область, то им не нужно преодолевать барьер, так что создаваемый ими ток I_g будет пропорционален всей концентрации дырок в n-области:

$$I_g \sim N_p(n).$$

Результирующий дырочный ток I_p равен разности этих двух токов:

$$I_p = I_g - I_r = I_r\left(\frac{I_g}{I_r} - 1\right) =$$

$$= I_r\left[\frac{N_p(n)}{N_p(p)}\, e^{q(V_0+V)/kT} - 1\right].$$

В условиях равновесия (при $V=0$) результирующий ток должен быть равен нулю. Из этого условия получаем отношение концентраций дырок в n- и p-областях:

$$\frac{N_p(n)}{N_p(p)} = e^{-qV_0/kT}.$$

Тогда при отличном от нуля внешнем потенциале V имеем

$$I_p = I_r\,(e^{qV/kT} - 1).$$

Точно такой же вид будет иметь ток отрицательных носителей (электронов), поэтому полный ток в $p-n$-переходе равен

$$I = (I_r + I_e)\,(e^{qV/kT} - 1).$$

Здесь I_e — ток электронов из области n в область p при равновесных условиях.

Величину $(I_r + I_e)$ можно интерпретировать как максимальный ток, который может течь при отрицательной внешней разности потенциалов.

К главе 13. ***Приближение независимых частиц***

13.1. В приближении независимых частиц энергия рассматриваемой системы равна сумме энергий каждого из электронов, осуществляющих двойные связи. Такой электрон может «принадлежать» одному из четырех атомов углерода и иметь энергию E_0. Однако наличие переходов электрона от одного атома к соседнему делает такие состояния нестационарными. Матричный элемент перехода равен $-A$, так что, согласно § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 69), энергия стационарного состояния электрона может принимать значения

$$E_s = E_0 - 2A\cos\frac{\pi}{5}s \qquad (s = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Тот же результат можно получить, приравнивая нулю детерминант, составленный с помощью энергетической матрицы H_{ij}. Тогда значения энергии определяются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} E_0-E & -A & 0 & 0 \\ -A & E_0-E & -A & 0 \\ 0 & -A & E_0-E & -A \\ 0 & 0 & -A & E_0-E \end{vmatrix} = 0,$$

Расписывая определитель, получим биквадратное уравнение

$$(E-E_0)^4 - 3A^2(E-E_0)^2 + A^4 = 0,$$

корнями которого являются величины

$$E_1 = E_0 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}A \approx E_0 - 1{,}618A,$$

$$E_2 = E_0 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}A \approx E_0 - 0{,}618A,$$

$$E_3 = E_0 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}A \approx E_0 + 0{,}618A,$$

$$E_4 = E_0 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}A \approx E_0 + 1{,}618A.$$

Любопытно, что, сравнив эти выражения с написанным выше

E_s, мы можем получить

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},\quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},$$

хотя не занимались здесь никакой тригонометрией.

В основном состоянии молекулы бутадиена два электрона из двойных связей имеют энергию E_1 (один со спином «вверх», другой со спином «вниз»), а два других электрона — энергию E_2. Если же молекула бутадиена находится на первом возбужденном уровне, то один из электронов, имевших энергию E_2 в основном состоянии, будет иметь энергию E_3. Таким образом, энергия излучения, испускаемого молекулой бутадиена при переходе с первого возбужденного на основной уровень, равна

$$\hbar\omega=E_3-E_2=\sqrt{2(3-\sqrt{5})}\,A\approx 1{,}236A.$$

Найти длину волны этого излучения теперь не представляет труда:

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}=\frac{2\pi\hbar c}{1{,}236A}.$$

При $A=1$ *эв* получаем $\lambda=1{,}00\cdot10^{-4}$ *см*.

Займемся теперь вопросом распределения электронов в молекуле. Если электрон имеет энергию E_s, то, как следует из § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9), амплитуда вероятности нахождения этого электрона возле n-го атома равна

$$a_n^{(s)}=D_s\sin\frac{\pi s}{5}\,n.$$

Нормировочный множитель D_s выберем так, чтобы выполнялось условие нормировки $\sum_{n=1}^{4}|a_n^{(s)}|^2=1$.

Тогда для состояния электрона с энергией E_1 ($s=1$) получим

$$a_1^{(1)}=a_4^{(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(1)}=a_3^{(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Аналогично для $s=2$ имеем

$$a_1^{(2)}=-a_4^{(2)}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(2)}=-a_3^{(2)}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

В однократно ионизованной молекуле бутадиена два электрона находятся в состоянии с энергией E_1 и один электрон — в состоянии с энергией E_2. Тогда вероятность обнаружить какой-либо электрон возле n-го атома можно записать следующим образом:

$$p_n = 2\,|\,a_n^{(1)}\,|^2 + 1\cdot|\,a_n^{(2)}\,|^2.$$

Подставляя сюда величины $a_n^{(s)}$, получаем

$$p_1 = p_4 = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}6382,$$

$$p_2 = p_3 = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}8618.$$

Этот результат позволяет сказать, что возле крайних атомов углерода находится примерно по 0,64 электрона, а возле средних — по 0,86 электрона.

13.2. Чтобы найти энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, необходимо знать энергии конфигураций *а* и *б*, показанных на рисунке в условии задачи. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 62) энергия основного состояния конфигурации *а* в приближении независимых частиц была найдена:

$$E_a = 6E_0 - 8A.$$

Энергию конфигурации *б* найдем по методу, изложенному в той же главе в § 5. Конфигурация *б* представляет собой линию из шести атомов углерода, причем энергия электрона из двойной связи, принадлежащего какому-либо из этих атомов, равна E_0, а матричный элемент перехода электрона к соседнему атому равен $-A$. Тогда одночастичная энергия электрона в стационарном состоянии равна $E = E_0 - 2A\cos kb$. Величина kb определяется условием, что амплитуда вероятности пребывания электрона у n-го атома, равная $\sin kbn$, обращается в нуль при $n = 7$, т. е. для отсутствующего седьмого (как и нулевого) атома. Следовательно, $kb = \frac{\pi}{7}s$, где $s = 1, 2, \ldots, 6$.

В основном состоянии конфигурации *б* на низших одночастичных уровнях

$$E_1 = E_0 - 2A\cos\frac{\pi}{7},$$

$$E_2 = E_0 - 2A\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$E_3 = E_0 - 2A\cos\frac{3\pi}{7}$$

будет находиться по два электрона. Поэтому полная энергия

основного состояния конфигурации $б$ равна

$$E_б = 6E_0 - 4A\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right).$$

Таким образом, необходимая для разрыва бензольного кольца энергия равна

$$E_б - E_а = 4A\left(2 - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right).$$

Величину A найдем по известной длине волны излучения, которое испускается при переходе молекулы бензола из первого возбужденного состояния в основное. Для этого замечаем, что изменение энергии молекулы при таком переходе равно $2A$, и, с другой стороны, эта же величина равна $\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$. Тогда можно записать

$$E_б - E_а = \frac{4\pi\hbar c}{\lambda}\left(2 - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right).$$

Подставляя сюда $\lambda = 2000$ Å, значения косинусов и другие известные константы, получаем

$$E_б - E_а = 3{,}1 \text{ эв}.$$

13.3. Будем рассматривать спиновую волну как «частицу» с массой $m_{эфф}$ и энергией E_K. Наличие в системе такой частицы, магнона, означает, что спин одного из атомов направлен вниз, тогда как спины всех других атомов смотрят вверх. Поэтому спин всей системы при наличии магнона отличается от спина основного состояния (когда нет магнонов) на единицу. Следовательно, магноны имеют целый спин и подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Тогда среднее число магнонов в состоянии с энергией E_K при температуре системы T равно

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Эта формула была получена в § 5 гл. 2 (вып. 8, стр. 44) для фотонов, но из ее вывода ясно, что она применима и для других бозонов. Но число магнонов в системе как раз и равно числу атомов, спин которых «перевернут» по сравнению с его направлением в основном состоянии.

Подсчитаем теперь полное число магнонов в системе. Для этого вспомним (см. указанный параграф «Лекций»), что в ящике объемом V число типов колебаний, приходящееся на интервал волновых чисел от K до $K + dK$, равно

$$\Delta\mathfrak{N}(K) = V\frac{d^3K}{(2\pi)^3}.$$

Следовательно, полное число магнонов в системе равно

$$N_{\downarrow} = V \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Тогда число атомов со спином «вниз» в единице объема равно

$$\frac{N_{\downarrow}}{V} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Намагниченность материала определяется как магнитный момент, приходящийся на единицу объема. Обозначим магнитный момент атома через μ. Магнитный момент атома направлен в ту же сторону, что и его спин (или в противоположную, если μ отрицателен), поэтому магнитный момент единицы объема можно выразить через число атомов со спином «вверх» $\frac{N_{\uparrow}}{V}$ и «вниз» $\frac{N_{\downarrow}}{V}$:

$$M = \mu \frac{N_{\uparrow}}{V} - \mu \frac{N_{\downarrow}}{V} = \mu \left(\frac{N}{V} - 2\frac{N_{\downarrow}}{V} \right).$$

Вспоминая, что расстояние между атомами решетки равно b, получаем полное число атомов в единице объема:

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{b^3}.$$

Следовательно, намагниченность равна

$$M = \frac{\mu}{b^3} \left(1 - 2b^3 \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1} \right).$$

Основной вклад в интеграл, очевидно, дадут энергии E_K, удовлетворяющие условию $E_K < kT$. При низких температурах этому условию удовлетворяют лишь самые малые значения E_K, для которых можно приближенно записать $E_K \approx Ab^2K^2$. При этом формально интеграл по K можно вычислять от нуля до бесконечности, поскольку большие значения K все равно не дадут существенного вклада. Выполняя интегрирование по угловым переменным $\left(\int d\Omega = 4\pi\right)$ и переходя к безразмерной переменной $x = (A/kT)^{1/2} bK$, получаем

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - 2\left(\frac{kT}{4\pi A}\right)^{3/2} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{e^{x^2} - 1} \right].$$

Здесь $M_{\text{насыщ}} = \mu/b^3$ — предельное значение намагниченности при $T \to 0$.

Стоящий в квадратных скобках интеграл можно вычислить следующим образом:

$$I=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^2}-1}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}\,dx}{1-e^{-x^2}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\sum_{n=1}^\infty e^{-(n-1)x^2}\,dx.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$I=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty x^2e^{-nx^2}\,dx.$$

После замены переменных $x=t/\sqrt{n}$ и интегрирования по частям получим интеграл ошибок, так что

$$I=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд такого типа называют ζ-функцией Римана

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}.$$

При $z=3/2$ имеем * $\zeta(3/2)\approx 2{,}612$. Таким образом, окончательно можно записать

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}}=1-\text{const}\cdot T^{3/2},$$

$$\text{const}=5{,}224\left(\frac{k}{4\pi A}\right)^{3/2}.$$

К главе 14. Зависимость амплитуд от места

14.1. а) В стационарном состоянии с энергией E волновая функция одномерного движения записывается в виде

$$\Psi(x,\,t)=u(x)\,e^{-iEt/\hbar},$$

причем $u(x)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2}+V(x)\,u=Eu.$$

Для прямоугольной потенциальной ямы с бесконечными

* См., например, Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.

стенками граничные условия можно получить из самого уравнения Шредингера. Действительно, пусть $V(x) \to \infty$ во внешней области ($x < 0$ и $x > a$). Чтобы при этом уравнение Шредингера удовлетворялось, нужно положить либо $u(x) = 0$, либо $d^2u/dx^2 \to \infty$ всюду во внешней области. Но в последнем случае и сама функция $u(x)$ должна обращаться в бесконечность во всей внешней области, что не имеет физического смысла. Таким образом, остается принять $u(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > a$. Физически это означает, что частица не может находиться в области, где потенциальная энергия бесконечно велика.

б) Во внутренней области $V(x) = 0$, так что уравнение принимает вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0,$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В общем случае решение этого уравнения хорошо известно:

$$u(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Из граничного условия $u(0) = 0$ получаем $B = 0$. Тогда другое граничное условие $u(a) = 0$ дает

$$A \sin ka = 0.$$

Поскольку A не может равняться нулю (иначе волновая функция всюду обратится в нуль), получаем условие

$$ka = \pi(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

так что допустимые значения энергии равны

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n+1)^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

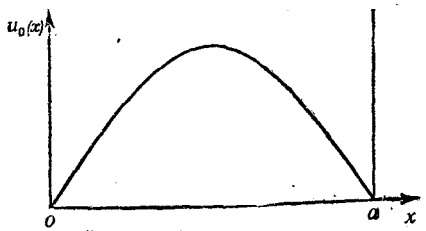
Наименьшее значение энергии получается при $n = 0$

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

Волновая функция состояния с этой энергией равна

$$u_0(x) = \begin{cases} A \sin \dfrac{\pi x}{a} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ и } x > a. \end{cases}$$

Ее график показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

в) Первому возбужденному состоянию отвечает $n=1$, так что

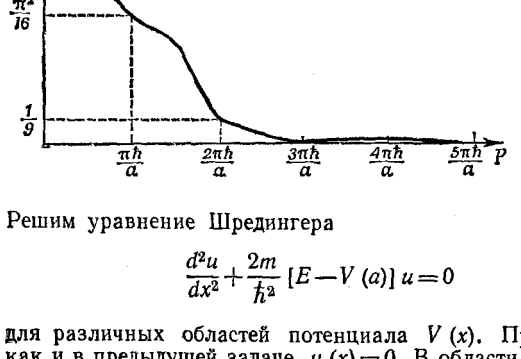
$$E_1-E_0=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}.$$

г) Попытаемся сначала качественно рассмотреть распределение частицы по импульсам. Из соображений симметрии ясно, что частица с равной вероятностью может иметь импульсы p и $-p$, так что среднее значение импульса равно нулю. Далее, неопределенность координаты частицы $\Delta x=a$, поэтому неопределенность локализации импульса $\Delta p\geqslant\hbar/2a$. Эти качественные выводы можно сравнить с точной функцией распределения по импульсам

$$\frac{dw(p)}{dp}=\frac{1}{2\pi\hbar}\left|\int_0^a u_0(x)\,e^{ipx/\hbar}\,dx\right|^2=$$

$$=2A^2a^2\pi\hbar^3\left[\frac{\cos\dfrac{pa}{2\hbar}}{(\pi\hbar)^2-(pa)^2}\right]^2.$$

Примерный график этой функции показан на фиг. 2. Масштаб по оси ординат произвольный.



Фиг. 2.

14.2. а) Решим уравнение Шредингера

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(a)]\,u=0$$

для различных областей потенциала $V(x)$. При $x\leqslant 0$, как и в предыдущей задаче, $u(x)=0$. В области $0<x<a$ получаем $u(x)=A\sin kx$, где $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$. В области $x>a$ общее решение имеет вид

$$u(x)=Ce^{-\varkappa x}+De^{\varkappa x},$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}.$$

В основном состоянии энергия частицы $E < V_0$, поэтому постоянную D следует положить равной нулю, иначе волновая функция будет возрастать до бесконечности при $x \to \infty$. Теперь следует потребовать, чтобы волновая функция и ее первая производная были непрерывны в точке $x = a$, где потенциал меняется скачком. Эти два условия приводят к непрерывности логарифмической производной волновой функции, т. е. величины $(du/dx)/u(x)$. Вычисляя это выражение с волновой функцией в областях $0 < x < a$ и $x > a$ и полагая $x = a$, получаем

$$k \operatorname{ctg} ka = -\varkappa.$$

Это трансцендентное уравнение определяет допустимые значения энергии частицы в рассматриваемой потенциальной яме. Если энергия известна, то это уравнение позволяет определить глубину потенциальной ямы:

$$V_0 = \frac{2E}{1 - \cos 2ka}.$$

Если энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при $V_0 \to \infty$, то $E_0 = (\pi^2\hbar^2/2ma^2)(1 + 0{,}1)$. Тогда

$$\cos 2ka = \cos 2\pi \sqrt{1 + 0{,}1} \approx \cos \frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2.$$

Следовательно,

$$V_0 \approx 400 \frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

б) В первом возбужденном состоянии волновая функция должна иметь один нуль внутри ямы. Поскольку яма симметрична относительно точки $x = 0$, то нуль волновой функции должен приходиться как раз на эту точку. При $x > 0$ волновая функция нашей задачи удовлетворяет такому же уравнению, как и в задаче пункта (а). Граничное условие предыдущей задачи $u(0) = 0$ также выполнено, поэтому энергия первого возбужденного состояния частицы в потенциале, изображенном на фиг. 2, совпадает с энергией основного состояния частицы в потенциале, изображенном на фиг. 1, т. е.

$$E_1 = 1{,}1 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

14.3. Потенциал $V(x)$ обладает симметрией относительно замены x на $-x$, поэтому существуют два типа решений уравнения Шредингера: четные, т. е. такие, что $u(-x) = u(x)$, и нечет-

ные, $u(-x) = -u(x)$. Для первого типа решений во внутренней области $|x| < a$ имеем $u(x) = B\cos\alpha x$ $(\alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2})$, а во внешней области $u(x) = Ce^{-\beta|x|}$ $(\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2})$. Условие непрерывности логарифмической производной функции $u(x)$ при $x = \pm a$ дает трансцендентное уравнение для определения уровней энергии четных состояний

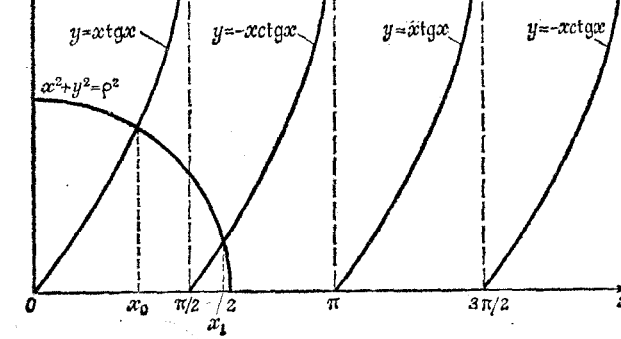
$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = \beta.$$

Решения второго типа во внутренней области имеют вид $u(x) = A\sin\alpha x$, во внешней области $u(x) = De^{-\beta x}$ при $x > a$ и $u(x) = -De^{\beta x}$ при $x < -a$. Приравнивая при $x = \pm a$ логарифмические производные решений во внутренней и внешней областях, получаем $\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$.

Полученные уравнения можно решить графическим методом. Введем для этого величины $x = \alpha a$ и $y = \beta a$ и нарисуем окружность $x^2 + y^2 = \rho^2 = 2mV_0a^2/\hbar^2$.

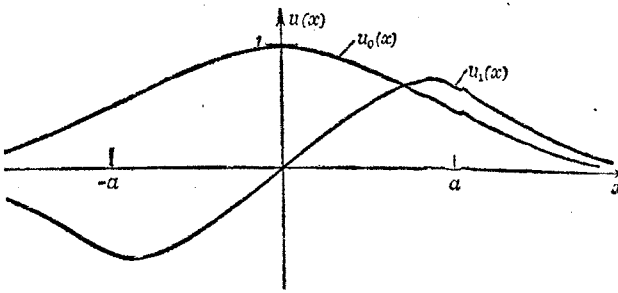
Тогда энергии четных состояний определятся пересечением этой окружности с кривой $y = x\operatorname{tg} x$, а энергия нечетных состояний — пересечением с кривой $y = -x\operatorname{ctg} x$ при положительных значениях x и y в обоих случаях.

При $V_0a^2 = 4\hbar^2/2m$ радиус окружности $\rho = 2$. Из фиг. 1 видно, что в этом случае имеется по одному пересечению окружности с каждой из кривых, соответственно в точках $x_0 \approx \pi/3$ и $x_1 \approx 1{,}9$. Тогда энергия основного состояния $E_0 = (\pi/3)^2\,(\hbar^2/2ma^2)$, а первого возбужденного $E_1 = 3{,}6\,(\hbar^2/2ma^2)$. На фиг. 2 показана качественно зависимость волновых функций этих состояний от координаты.



Фиг. 1.

Если $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/8m$, то $\rho < \pi/2$, так что будет существовать лишь одно связанное состояние.



Фиг. 2.

14.4. Волновая функция $\varphi(x, t) = K \exp\{-[a(t)x^2 + c(t)]\}$ должна удовлетворять уравнению Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

Выполняя дифференцирование и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\hbar}{im}a^2, \qquad \frac{dc}{dt} = \frac{i\hbar}{m}a.$$

Интегрирование первого уравнения дает искомое выражение

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m}t.$$

Если подставить теперь значение $a(t)$ во второе уравнение и проинтегрировать его с начальным условием $c(0) = 0$, то

$$c = \frac{1}{4}\ln\left[1 + \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m}\right)^2\right] + \frac{i}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\hbar a_0 t}{m}\right).$$

Тогда волновую функцию можно записать следующим образом:

$$\varphi(x, t) = \text{const}\cdot e^{i\alpha(x, t)}(2\pi\sigma^2)^{-1/4}e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Здесь

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{4a_0}\left[1 + \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m}\right)^2\right],$$

$$\alpha(x, t) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\hbar a_0 t}{m}\right) + \frac{\hbar a_0 t}{2m}\cdot\frac{x^2}{4\sigma^2}.$$

Постоянный множитель $\text{const} = K(2\pi/4a_0)^{1/4}$ удобно выбирать равным единице. Отметим, что нормировка найденной волновой функции не зависит от времени. Ширина «области локализации» частицы меняется с течением времени и характеризуется величиной

$$2\sigma = 2\sigma_0\left[1+\left(\frac{2\hbar a_0 t}{m}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Если волновая функция описывает электрон, находившийся в начальный момент времени внутри области шириной 1 Å, т. е. $2\sigma_0 = 1$ Å, то $a_0 = (2\sigma_0)^{-2} = 10^{16}$ *см*$^{-2}$. Через 1 *сек* волновой пакет «расползется» по области шириной $2\sigma = 2{,}3\cdot 10^8$ *см* $= 2300$ *км* (!)

Преобразуем волновую функцию в импульсное представление

$$\varphi(p,\ t) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ t)\,e^{-ipx/\hbar}\,dx = $$

$$= K(2\hbar a)^{-1/2}e^{-p^2/4\hbar^2 a - c}.$$

Если подставить сюда явный вид $1/a(t)$ и $c(t)$ и проделать несложные преобразования с комплексными числами, то можно привести волновую функцию к виду

$$\varphi(p,\ t) = \text{const}\, e^{-i\beta(p,\ t)}(2\pi\eta)^{-1/4}e^{-p^2/4\eta^2},$$

где

$$\eta = \hbar\sqrt{a_0},\quad \beta(p,\ t) = \frac{p^2}{2m}\frac{t}{\hbar}.$$

Как видно отсюда, «разброс по импульсам» остается постоянным во все моменты времени.

Чтобы оценить разброс по скоростям, запишем полуширину «области локализации» частицы следующим образом:

$$\sigma^2(t) = [\sigma_0^2 + (ut)^2],$$

где величина $u = \hbar\sqrt{a_0}/m$ характеризует скорость расплывания пакета. Эту скорость можно принять в качестве меры «разброса по скоростям», причем $u = \eta/m$.

Более строго этот вопрос можно проанализировать, используя введенное в гл. 18, вып. 9 «Лекций» понятие оператора скорости:

$$\hat{v} = -\frac{i\hbar}{m}\frac{d}{dx}.$$

С помощью волновой функции в координатном представлении можно найти среднеквадратичное отклонение скорости частицы от среднего значения, т. е. величину

$$\langle(\hat{v} - \langle\hat{v}\rangle)^2\rangle = \langle\hat{v}^2\rangle - \langle\hat{v}\rangle^2.$$

Вычислив соответствующие интегралы, найдем, что среднее значение скорости оказывается равным нулю, $\langle v\rangle = 0$, а среднее значение квадрата скорости в точности соответствует ширине «разброса по импульсам»

$$\langle v^2\rangle = \frac{\hbar^2 a_0}{m^2} = \frac{\eta^2}{m^2}.$$

К главе 16. *Момент количества движения*

16.1. В начальном состоянии атома со спином 1 и равной нулю проекцией спина на ось z содержатся состояния со всеми тремя возможными проекциями спина ($m = 0, \pm 1$) на ось z', амплитудой испускания вдоль которой мы интересуемся. Однако из этих трех состояний в силу закона сохранения проекции момента количества движения лишь состояние $m = +1$ может испустить правополяризованный фотон. Поэтому интересующая нас величина $A(\theta)$ будет пропорциональна амплитуде того, что в состоянии атома со спином 1 и проекцией спина на ось z, равной нулю, содержится состояние с проекцией спина $+1$ на ось z', направление которой задано полярными углами θ, φ. Тогда

$$A(\theta) = \text{const}\,\langle +1 \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid 0\rangle =$$
$$= \text{const}\,\langle +1 \mid R_y(\theta) \mid 0\rangle = \text{const}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

16.2. а) Перенумеруем изображенные на рисунке, приведенном в условии, стр. 547, конечные состояния цифрами от единицы до восьми слева направо.

В начальном состоянии проекция спина на ось z равна $+1/2$, поэтому в результате распада могут реализоваться лишь такие конечные состояния, в которых проекция полного момента количества движения на ось z равна $+1/2$. Этому условию удовлетворяют лишь состояния 2 и 8. Амплитуды всех остальных состояний должны быть равны нулю.

б) Пусть поляризованная вдоль оси z частица X распадается, а частица Y движется вдоль оси z', заданной полярными углами (θ, φ). Относительно этой оси проекция спина частицы X могла быть равна $+1/2$ с амплитудой

$$\left\langle +\frac{1}{2} \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid +\frac{1}{2}\right\rangle = e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2},$$

или $-1/2$ с амплитудой

$$\left\langle -\frac{1}{2} \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid +\frac{1}{2}\right\rangle = -e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

В первом случае сохранение проекции момента количества движения приводит к тому, что фотон, движущийся про-

тив оси z', будет левополяризованным, а проекция спина частицы Y будет равна $-1/2$. Во втором случае фотон оказывается правополяризованным, а проекция спина частицы Y равна $+1/2$. Обозначим амплитуду первого процесса через a, второго — через b. Тогда угловое распределение частиц Y, поляризованных вдоль направления своего движения, определяется формулой

$$W_+(\theta) = \left| b \left\langle -\frac{1}{2} \right| R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} |b|^2 (1 - \cos\theta).$$

Для частиц, поляризованных против направления своего движения, имеем

$$W_-(\theta) = \frac{1}{2} |a|^2 (1 + \cos\theta).$$

в) Угловое распределение всех частиц получается суммированием по поляризации:

$$W(\theta) = W_-(\theta) + W_-(\theta) = \frac{1}{2} [(|a|^2 + |b|^2) + (|a|^2 - |b|^2)\cos\theta].$$

г) Если угловое распределение изотропно, то $|a| = |b|$. Процессы, описывающиеся амплитудами a и b, получаются один из другого зеркальным отражением в плоскости xy и поворотом вокруг оси y на 180°. Поэтому изотропное угловое распределение, т. е. равенство $|a| = |b|$, означает сохранение четности при испускании фотона.

16.3. Проекция момента количества движения на ось z у правополяризованного фотона равна $+1$, а у протона — либо $+1/2$, либо $-1/2$, так что проекция полного момента количества движения системы p^* может принимать значения $m = +3/2$ и $+1/2$. В конечном состоянии проекция момента количества движения на ось z', направленную вдоль импульса протона отдачи, обусловлена только спином протона, поэтому $m' = \pm 1/2$.

Пусть протон до столкновения был поляризован вдоль оси z. Тогда система p^* может образоваться лишь в состоянии $|j = 3/2,\ m = +3/2\rangle$ с амплитудой a. Распад на π^0-мезон и протон, движущийся в направлении оси z' с полярными углами (θ, φ), может произойти из состояний $|j = 3/2,\ m' = +1/2\rangle$ и $|j = 3/2,\ m' = -1/2\rangle$. Амплитуды вероятности того, что эти состояния имеются в состоянии $|j = 3/2,\ m = +3/2\rangle$, определяются матрицей поворота для спина $3/2$. С помощью формулы (16.25) и табл. 16.2 «Лекций»

(вып. 9, стр. 148 и 152) получаем

$$\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = -\sqrt{3} \sin\frac{\theta}{2} \cos^3\frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2},$$

$$\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \cos\frac{\theta}{2} \sin^2\frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

Если состояние $|j=3/2,\ m'=+1/2\rangle$ распадется и протон полетит вдоль оси z', а мезон — в противоположном направлении, то спин протона обязательно должен быть направлен вдоль оси z'. Если $m'=-1/2$, то спин протона после распада направлен против оси z'. Амплитуды распадов в этих двух случаях равны соответственно f и g. Теперь мы можем записать полные амплитуды процесса фоторождения π-мезона на протоне:

$$\left\langle \mu'=+\frac{1}{2} \mid F \mid \mu=+\frac{1}{2} \right\rangle =$$

$$= f\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle a =$$

$$= -af\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

$$\left\langle \mu'=-\frac{1}{2} \mid F \mid \mu=+\frac{1}{2} \right\rangle = ga\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta \sin\frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

Индекс μ означает проекцию спина протона на ось z до столкновения, а индекс μ' — проекцию спина протона на направление его импульса после столкновения. Другие квантовые числа опущены. Совершенно аналогично можно получить амплитуды для случая $\mu=-1/2$:

$$\left\langle \mu'=+\frac{1}{2} \mid F \mid \mu=-\frac{1}{2} \right\rangle = fb\frac{1}{2}(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2},$$

$$\left\langle \mu'=-\frac{1}{2} \mid F \mid \mu=-\frac{1}{2} \right\rangle = -gb\frac{1}{2}(3\cos\theta+1)\sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}.$$

Возводя найденные амплитуды по модулю в квадрат, усредняя по начальным значениям проекций спина протона и суммируя по конечным, получаем угловое распределение протонов:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1/2} \sum_{\mu'=\pm 1/2} |\langle \mu' \mid F \mid \mu \rangle|^2.$$

При вычислении этого выражения учтем равенство $f=g$, следующее из закона сохранения четности. В результате получим

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{8} |f|^2 [3|a|^2 \sin^2\theta + |b|^2 (3\cos^2\theta+1)].$$

Угловое распределение мезонов получится отсюда заменой $\theta \to \pi - \theta$, ибо мезон и протон движутся в противоположных направлениях. Это не меняет полученного выражения.

16.4. Пусть π-мезон падает на мишень вдоль оси z, а проекция спина протона на эту ось равна μ. Рассмотрим такой процесс, когда после рассеяния π-мезон движется вдоль оси z' с полярными углами (θ, φ), а проекция спина протона на ось z' равна μ'. При образовании промежуточного состояния $|j=3/2,\ m\rangle$ проекция момента количества движения системы должна сохраниться, так что $m=\mu$. Точно так же при распаде состояния $|3/2,\ m'\rangle$ с испусканием мезона вдоль оси z' должно выполняться равенство $m'=\mu'$. Тогда амплитуду рассматриваемого процесса можно записать как произведение амплитуды f_μ образования состояния $|3/2,\ \mu\rangle$, амплитуды обнаружения в этом состоянии другого состояния $|3/2,\ \mu'\rangle$ с проекцией спина μ' на новую ось z', и амплитуды $g_{\mu'}$ распада такого состояния с испусканием мезона вдоль оси z'. Вторая из этих амплитуд равна матрице поворота для спина $3/2$

$$\left\langle \frac{3}{2}\,\mu' \mid R_y(\theta)\, R_z(\varphi) \mid \frac{3}{2}\,\mu \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}\,\mu' \mid R_y(\theta) \mid \frac{3}{2}\,\mu \right\rangle e^{i\mu\varphi}.$$

Допустимые значения μ и μ' в нашем случае равны $\pm 1/2$. Из табл. 16.2 «Лекций» (вып. 9, стр. 152) получаем

$$\left\langle \frac{3}{2},\ +\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2},\ +\frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}(3\cos\theta - 1)\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\left\langle \frac{3}{2},\ +\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2} \right\rangle = -\left\langle \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2} \mid R_y \mid \frac{3}{2},\ +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}(3\cos\theta + 1)\sin\frac{\theta}{2}.$$

Угловое распределение π-мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах получается с помощью введенных амплитуд усреднением по начальным и суммированием по конечным поляризациям протона:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1/2} \sum_{\mu'=\pm 1/2} \left| g_{\mu'} \left\langle \frac{3}{2}\,\mu' \mid R_y(\theta) \mid \frac{3}{2}\,\mu \right\rangle f_\mu \right|^2.$$

Сравним теперь образование промежуточного состояния с $j=3/2$, когда протон поляризован по оси z и против оси z. Если повернуть систему координат на 180° вокруг оси y и затем выполнить операцию зеркального отражения относительно плоскости xy, то направление спина изменится на противоположное, а импульсы сталкивающихся частиц не изменятся. Поэтому в силу сохранения четности амплитуды $f_{+1/2}$ и $f_{-1/2}$ могут отличаться самое большее несуществен-

ным фазовым множителем, так что $|f_{+1/2}|=|f_{-1/2}|=f$. Подобное соотношение справедливо и для амплитуд распада

$$|g_{+1/2}|=|g_{-1/2}|=g.$$

Тогда угловое распределение π-мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах принимает простой вид

$$\sigma(\theta)=\text{const}\sum_{\mu,\,\mu'=\pm 1/2}\left|\left\langle\frac{3}{2}\mu'\,|\,R_y(\theta)\,|\,\frac{3}{2}\mu\right\rangle\right|^2=$$
$$=\text{const}\,(3\cos^2\theta+1).$$

16.5. Определим угловую зависимость амплитуд испускания право- и левополяризованного фотонов:

$$\langle 0^+, R, \theta\varphi\,|\,F\,|\,1^\pi, m=1\rangle=a_R^\pi\langle 1,+1\,|\,R_y(\theta)\,R_z(\varphi)\,|1,+1\rangle=$$
$$=a_R^\pi e^{i\varphi}\frac{1+\cos\theta}{2},$$
$$\langle 0^+, L, \theta\varphi\,|\,F\,|\,1^\pi, m=1\rangle=a_L^\pi\langle 1,-1\,|\,R_y(\theta)\,R_z(\varphi)\,|\,1,+1\rangle=$$
$$=a_L^\pi e^{i\varphi}\frac{1-\cos\theta}{2}.$$

Здесь индекс π указывает четность возбужденного состояния и принимает значение $+$ или $-$, так что 1^+, например, означает, что полный спин системы равен единице, а четность положительна; величины a_R^π и a_L^π представляют собой амплитуды испускания вдоль оси z' фотона с правой и левой круговыми поляризациями, если возбужденный атом находится соответственно в состояниях $|1^\pi, m'=+1\rangle$ и $|1^\pi, m'=-1\rangle$. Для данного значения четности возбужденного состояния π эти амплитуды равны по абсолютной величине, но их относительный знак (см. § 1 гл. 16 «Лекций», вып. 9, стр. 131) зависит от значения π: $a_R^\pi=\pi a_L^\pi$.

Если поляризация фотонов не регистрируется, то угловое распределение не зависит от четности возбужденного состояния:

$$W(\theta)=|\langle 0^+, R, \theta\varphi\,|\,F\,|\,1^\pi, m=1\rangle|^2+$$
$$+|\langle 0^+, L, \theta\varphi\,|\,F\,|\,1^\pi_\pi\, m=1\rangle|^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left|a_R^\pi\right|^2(1+\cos^2\theta).$$

Угловое распределение фотонов с круговой поляризацией тоже, очевидно, не зависит от π:

$$W_L(\theta)=\frac{1}{4}\left|a_R^\pi\right|^2(1-\cos\theta)^2;\quad W_R(0)=\frac{1}{4}\left|a_R^\pi\right|^2(1+\cos\theta)^2.$$

Найдем теперь угловые распределения линейно поляризованных фотонов. Амплитуда испускания фотона с поляризацией вдоль оси x' или y' выражается через амплитуды испускания фотонов с круговой поляризацией

$$\langle x' \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle = \langle x' \mid R\rangle\langle R \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle + \\ + \langle x' \mid L\rangle\langle L \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle$$

$$\langle y' \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle = \langle y' \mid R\rangle\langle R \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle + \\ + \langle y' \mid L\rangle\langle L \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle.$$

Из соотношений

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x'\rangle + i\,|y'\rangle], \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x'\rangle - i\,|y'\rangle]$$

находим

$$\langle x' \mid R\rangle = \langle x' \mid L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle y' \mid R\rangle = -\langle y' \mid L\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Тогда амплитуды испускания линейно поляризованных фотонов равны

$$\langle 0^+,\ x,\ \theta\varphi \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle = \frac{e^{i\varphi}a_R^\pi}{2\sqrt{2}}[(1+\cos\theta)+\pi(1-\cos\theta)],$$

$$\langle 0^+,\ y,\ \theta\varphi \mid F \mid 1^\pi,\ m=1\rangle = \frac{ie^{i\varphi}a_R^\pi}{2\sqrt{2}}[(1+\cos\theta)-\pi(1-\cos\theta)].$$

Квадраты модулей этих амплитуд дают угловые распределения фотонов, поляризованных соответственно вдоль осей x' и y'. В случае положительной четности возбужденного состояния получаем

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2}\left|a_R^+\right|^2, \qquad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2}\left|a_R^+\right|^2\cos^2\theta.$$

Если же четность отрицательна, то угловые распределения оказываются иными:

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2}\left|a_R^-\right|^2\cos^2\theta, \qquad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2}\left|a_R^-\right|^2.$$

Если вспомнить, каким образом мы переходили от оси z к оси z', то легко убедиться, что ось x' лежит в плоскости, проведенной через направление ориентации спина возбужденного состояния и направление излучения фотона, а ось y' перпендикулярна к этой плоскости.

Таким образом, по угловому распределению линейно поляризованных фотонов можно определить четность возбужденного состояния.