МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Задачи по теории групп. Часть II

Практикум

Рекомендован методической комиссией механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 01.03.01 „Математика“, по направлению 02.03.01 „Математика и компьютерные науки“

Нижний Новгород
2015

УДК 512.54
ББК 22.144
З-15

З-15. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ II. Составители: Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 36с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **М.Е. Елисеев**

Практикум содержит задачи и все необходимые сведения для решения задач по теории групп (части курсов "Алгебра"и "Фундаментальная и компьютерная алгебра") по темам: действие группы на множестве, силовские подгруппы, разрешимые группы, прямое произведение групп и задание группы образующими и соотношениями. Приводятся подробные решения типовых задач. Практикум предназначен для студентов-математиков второго курса механико-математического факультета.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А.Денисова**

УДК 512.54
ББК 22.144

Содержание

1 Действие группы на множестве

Определение. Пусть $(G, \cdot)$ – группа, M – произвольное множество. Группа G **действует на** M, если задано отображение $G \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ такое, что

1) $a\,(bx) = (a \cdot b)\,x$ для любых $a, b \in G$, $x \in M$;

2) $ex = x$ для любого $x \in M$.

Отметим, что группа G действует на множестве M тогда и только тогда, когда задан гомоморфизм групп $G \to S(M)$, где $S(M)$ – группа биективных отображений на M.

Примеры.

1) Группа $G = \mathrm{GL}(V)$ – невырожденных линейных операторов естественно действует на векторном пространстве V над полем P:

$(f, v) \mapsto f(v)$ – образ вектора v при операторе $f \in \mathrm{GL}(V)$.

Если V пространство размерности n, то мы получим действие группы невырожденных n-мерных матриц на V. А именно, координаты образа вектора $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ определяются по формуле $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $A \in \mathrm{GL}_n(P)$, $e_1, ..., e_n$ – базис в V.

2) Пусть H – подгруппа в G, тогда H действует на G по правилу $(h, g) \mapsto h \cdot g$.

3) Пусть $G = S_n$ и $M = \{1, \ldots, n\}$. Имеем естественное действие симметрической группы на множестве M: если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{pmatrix} \in S_n$, то $(\alpha, i) \mapsto \alpha(i) = \alpha_i \in M$.

4) Отображение, которое каждой паре $\alpha \in \mathbb{R}, v \in E^2$ ставит вектор, полученный из v поворотом на угол α, задает действие группы вещественных чисел по сложению на E^2 – множестве векторов на плоскости.

5) Отображение, которое каждой паре $\alpha \in \mathbb{R}^*, v \in E^2$ ставит вектор αv, задает действие группы $\mathbb{R}^*$ – ненулевых вещественных чисел на множестве E^2.

6) Пусть $G = S_4$, $f_1 = T_1T_2 + T_3T_4$, $f_2 = T_1T_3 + T_2T_4$, $f_3 = T_1T_4 + T_2T_3$ – многочлены от 4-х переменных T_1, T_2, T_3, T_4, $M = \{f_1, f_2, f_3\}$. Группа S_4 действует на M по правилу $(\alpha, f\,(T_1, \ldots, T_4)) \mapsto f\left(T_{\alpha(1)}, \ldots, T_{\alpha(4)}\right)$. Напри-

мер, паре $(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, T_1T_3 + T_2T_4)$ соответствует $T_2T_4 + T_3T_1 = f_2$.

M имеет 3 элемента, следовательно, действие задает гомоморфизм $F : S_4 \to S_3$. Подстановки, которые оставляют на месте каждый многочлен f_1, f_2, f_3, это $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V_4$, т.е. $Kerf = V_4$. По основной теореме о гомоморфизмах $S_4/V_4 \cong Imf \subseteq S_3$. Так как $|S_4/V_4| = |S_4|/|V_4| = \dfrac{24}{4} = 6 = |S_3|$, то $Imf = S_3$. Получаем, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

Действие группы G на множестве M определяет отношение эквивалентности на M: $x \sim y \ \Leftrightarrow \ \exists a \in G,\ ax = y$. Следовательно, множество M разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий $x \in M$, обозначается $G(x)$ и называется **орбитой** элемента x. По определению

$G(x) = \{y \in M | y \sim x\} = \{y \in M | \exists a \in G, y = ax\} = \{ax | a \in G\}$.

Орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Мощность орбиты называется длиной орбиты.

Стабилизатор элемента x – это множество $St(x) = \{a \in G | ax = x\}$. Т.е. стабилизатор точки x состоит из тех элементов группы G, которые оставляют x неподвижным. Множество $St(x)$ является подгруппой в G.

Примеры. (Нумерация соответствует примерам в начале параграфа)

1) При действии $\mathrm{GL}\,(n, P)$ на n-мерном пространстве V будет всего две различные орбиты: все ненулевые векторы (орбита любого ненулевого вектора) и ноль (орбита нуля).

Очевидно, что умножение любой матрицы на нулевой столбец даст нулевой столбец. Поэтому, $G(0) = G(0e_1 + \cdots + 0e_n) = \{0\}$.

Пусть

$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \neq 0$, т.е. $\exists i : \ x_i \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(A) = (-1)^{i+n} x_i \neq 0$. Очевидно, что

$A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$. Следовательно, любой ненулевой вектор x лежит в орбите вектора $0e_1 + \cdots + 0e_{n-1} + 1e_n = e_n$. Таким образом, все ненулевые векторы лежат в одной орбите: $G(e_n)$.

2) При действии подгруппы H на группе G орбита x совпадает с правым смежным классом Hx и $St(x) = \{e\}$.

3) При естественном действии $G = S_n$ на $M = \{1, \ldots, n\}$ есть всего она орбита (в этом случае говорят, что G действует транзитивно на M). Действительно, для любого $i \in M$ транспозиция $(1\ i)$ переводит 1 в i, следовательно, $G(1) = M$.

4) Орбита нулевого вектора содержит только нулевой вектор, орбита любого ненулевого вектора v это множество векторов, концы которых лежат на окружности радиуса $|v|$.

5) Орбита нулевого вектора содержит только нулевой вектор, орбита любого ненулевого вектора v это множество векторов, лежащих на прямой, проходящей через вектор v, без нуля.

Предложение. Существует биекция между элементами орбиты $G(x)$ и множеством левых смежных классов группы G по подгруппе $St(x)$. $\square$

Следствие 1. (формула длины орбиты)

$|G(x)| = (G : St(x))$ $\square$

Следствие 2. Если G конечная группа, то длина орбиты является делителем порядка группы. $\square$

Пусть группа G действует на конечном множестве M. Тогда орбит также конечное число и пусть $G(x_1), ..., G(x_k)$ – все различные орбиты. Получаем, что $M = G(x_1) \cup ... \cup G(x_k)$ – объединение непересекающихся множеств. Следовательно, $|M| = |G(x_1)| + ... + |G(x_k)|$. Тогда из формулы длины орбиты следует:

$|M| = \sum\limits_{i=1}^{k}(G : St(x_i))$ – **формула разложения на орбиты.**

Рассмотрим подробнее действие группы G на себе сопряжениями. Для любого $a \in G$ определим автоморфизм $I_a : G \to G$ по правилу: $I_a(x) = axa^{-1}$, $x \in G$.

Автоморфизм I_a называется внутренним. Множество всех внутренних автоморфизмов группы G обозначается $\mathrm{Int}(G)$.

Так как $I_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = I_a(I_b(x))$, то отображение $I : G \to S(G)$, $I(a) = I_a$ является гомоморфизмом групп. $KerI = \{a \in$

$G|I_a = id\} = \{a \in G|axa^{-1} = x \ \forall x \in G\} = \{a \in G|ax = xa \ \forall x \in G\}$. Эта подгруппа называется **центром** группы G и обозначается $Z(G)$.

$Z(G)= \{a \in G|ax = xa \ \forall x \in G\}$.

По основной теореме о гомоморфизмах $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.
Гомоморфизм $I : G \to S(G)$ определяет действие группы G на себе сопряжениями $((a, x) \mapsto axa^{-1})$. Орбиты относительно данного действия называются **классами сопряженности**, а стабилизаторы называются **централизаторами**.

Определение. Пусть G – группа $x \in G$. **Централизатор** x – это множество $C(x) = \{a \in G|ax = xa\}$. **Класс сопряженных элементов, содержащий** x – это множество $G(x) = \left\{axa^{-1}|a \in G\right\}$. Элементы из одного класса называются сопряженными и если $axa^{-1} = y$, то a называется сопрягающим элементом для x и y.

Свойства.

1) Любая подгруппа, содержащаяся в центре группы, является нормальной абелевой подгруппой. В частности, $Z(G)$ – нормальная абелева подгруппа в G.

2) G абелева тогда и только тогда, когда $Z(G) = G$.

3) $z \in Z(G) \ \Leftrightarrow \ C(z) = G \Leftrightarrow$ класс сопряженных элементов, содержащий z, состоит из одного элемента z.

Пусть G конечная группа, $G(x_1), ..., G(x_k)$ все различные классы сопряженных элементов, причем расположим их так, что $G(x_1), ..., G(x_q)$ одноэлементные, т.е. $\{x_1, ..., x_q\} = Z(G)$. Переписывая формулу разложения на орбиты в новых обозначениях, получим

$|G| = \sum\limits_{i=1}^{k}(G : C(x_i)) = |Z(G)| + \sum\limits_{i=q+1}^{k}(G : C(x_i))$ – **формула классов.**

Из формулы классов легко получается следующее утверждение

Теорема (о центре p-группы).

Если $|G| = p^n$ для некоторого простого числа p и $n > 0$, то G имеет нетривиальный центр. $\square$

Примеры.

1) Пусть P – поле. Покажем, что $Z(\mathrm{GL}_n(P)) = \{\lambda E|\lambda \in P^*\}$.

Если $A \in Z(\mathrm{GL}_n(P))$, то $(E + E_{ij})A = A(E + E_{ij}) \ \ \forall i, j$ (здесь E_{ij} – матрица, у которой и на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны нулю). Рассмотрим равенство: $A + E_{ij}A = A+AE_{ij}$. Матрица в левой части равенства на месте (ij) имеет элемент a_{jj}, а в правой части a_{ii}, следовательно, $a_{jj} = a_{ii}$. На месте (sj) при $s \neq i$ матрица в левой части равенства имеет 0, а в правой части a_{si}, следовательно, a_{si} при $s \neq i$. Т.к. это верно для любых i, j, то матрица A диагональная и по диагонали стоят одинаковые числа, т.е. $A = \lambda E$.

2) $Z\left(SL\left(n,k\right)\right) = \{\lambda E | \lambda^n = 1\}$.

3) $Z\left(S_n\right) = \{id\}$ при $n \geq 3$.

Разложим подстановку $\sigma \in S_n$ в произведение независимых циклов:

$\sigma = \left(i_1 \ldots i_k\right)\left(j_1 \ldots j_m\right) \ldots,$

а) Пусть в этом разложении есть хотя бы два цикла. Возьмем подстановку $\pi = \left(i_1 j_1\right)$, тогда

$\pi\sigma\pi^{-1} = \left(j_1 i_2 \ldots i_k\right)\left(i_1 j_2 \ldots j_m\right) \ldots \Rightarrow \pi\sigma\pi^{-1} \neq \sigma.$

б) Пусть $\sigma = \left(i_1 \ldots i_k\right)$, $k \geq 3$ – цикл длины не меньше 3. Возьмем подстановку $\pi = \left(i_1 i_2\right)$, тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \left(i_2 i_1 i_3 \ldots i_k\right) \neq \sigma$.

в) Пусть $\sigma = \left(i_1 i_2\right)$. Т.к. $n \geq 3$, то найдется $i_3 \notin \{i_1, i_2\}$. Возьмем подстановку $\pi = \left(i_1 i_3\right)$, тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \left(i_3 i_2\right) \neq \sigma$.

Оставшийся случай – ни одного цикла – это и будет единичная подстановка. Следовательно, неподвижной может быть только единичная подстановка.

1.1 Классы сопряженных элементов в S_n и A_n

Найдем класс сопряженных элементов любого цикла из S_n.

Пусть $\left(i_1 \ldots i_k\right)$ произвольный цикл длины k, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \pi_1 & \ldots & \pi_n \end{pmatrix}$ подстановка из S_n.

$$\pi\left(i_1 \ldots i_k\right)\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \pi_1 & \ldots & \pi_n \end{pmatrix}\left(i_1 \ldots i_k\right)\begin{pmatrix} \pi_1 & \ldots & \pi_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} = \left(\pi_{i_1} \ldots \pi_{i_k}\right).$$

Если j не встречается среди символов $\left(i_1 \ldots i_k\right)$, то π_j переходит в j, j переходит в j, j переходит в π_j, итого π_j переходит в π_j, т.е. остается неподвижным; π_{i_t} переходит в i_t, i_t переходит в i_{t+1}, i_{t+1} переходит в $\pi_{i_{t+1}}$, итого π_{i_t} переходит в $\pi_{i_{t+1}}$ для любого t. Видим, что $\pi\left(i_1 \ldots i_k\right)\pi^{-1} = \left(\pi_{i_1} \ldots \pi_{i_k}\right)$ также является циклом длины k.

Пусть $\left(i_1 \ldots i_k\right)$ и $\left(j_1 \ldots j_k\right)$ циклы одинаковой длины из S_n. Рассмотрим подстановку $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & \cdots & \cdots \\ j_1 & \cdots & j_k & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, где в первой строке после $i_1, ..., i_k$ идут символы из $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$ в произвольном порядке, во второй строке после $j_1, ..., j_k$ идут символы из $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_k\}$ в произвольном порядке. Тогда $\pi\left(i_1 \ldots i_k\right)\pi^{-1} = \left(\pi_{i_1} \ldots \pi_{i_k}\right) = \left(j_1 \ldots j_k\right)$.

Например, сопрягающей подстановкой для циклов $(2, 3, 7, 6)$ и $(5, 6, 3, 4)$ в S_7 будет $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Получаем, что все циклы одинаковой длины сопряжены.

Теорема (о классах сопряженных в S_n).

Две подстановки из S_n сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое цикловое строение, т.е. наборы длин циклов у них одинаковые.

Доказательство. Пусть $\sigma = (i_1 \dots i_k)\,(j_1 \dots j_m) \cdots\cdots$ – разложение σ в произведение независимых циклов, тогда для любой подстановки π

$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi\,(i_1 \dots i_k)\,\pi^{-1})(\pi\,(j_1 \dots j_m)\,\pi^{-1}) \cdots\cdots$

$= (\pi_{i_1} \dots \pi_{i_k})\,(\pi_{j_1} \dots \pi_{j_m}) \cdots\cdots$. Если $i_s \neq j_r$, то и $\pi\,(i_s) \neq \pi\,(j_r)$, следовательно, эти циклы независимые и мы получили такое же цикловое строение.

Пусть $\sigma = (i_1 \dots i_k)\,(j_1 \dots j_m) \cdots\cdots$,

$\rho = (t_1 \dots t_k)\,(s_1 \dots s_m) \cdots\cdots$ – две подстановки, имеющие одинаковую цикловую структуру. Рассмотрим подстановку

$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_k & \cdots & \cdots \\ t_1 & \cdots & t_k & s_1 & \cdots & s_k & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$. Тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \rho$. $\square$

Покажем на примере, как по данным двум подстановкам найти сопрягающую подстановку. Пусть $\sigma = (12)\,(456) \in S_6$ и $\rho = (132)\,(45) \in S_6$, тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \pi\,(12)\,\pi^{-1}\pi\,(456)\,\pi^{-1} = (\pi_1\pi_2)\,(\pi_4\pi_5\pi_6) = \rho = (45)\,(132)$, следовательно, можно взять $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Следствие. Число классов сопряженных элементов в S_n равно количеству разбиений числа $n = m_1 + \cdots + m_r$ в сумму натуральных чисел, где $m_1 \geq \cdots \geq m_r$.

Следующее утверждение позволяет находить классы сопряженных элементов в A_n.

Предложение. Пусть G конечная группа, H – подгруппа индекса 2 и C – класс сопряженных в G элементов, такой что $C \subset H$. Тогда C является либо классом сопряженных в H элементов, либо объединением двух классов сопряженных в H элементов, состоящих из одинакового числа элементов.

Доказательство. По определению индекса число правых смежных классов равно числу левых смежных классов G по H и равно 2. Одним из правых (левых) смежных классов должна быть подгруппа H, другим все элементы из G, не принадлежащие H. Видим, что правые и левые смежные классы совпадают и, следовательно, H - нормальная подгруппа.

Пусть $G = H \bigcup Hg, \;\; g \notin H$ – объединение правых смежных классов, $C = G(x)$. Так как $C \subset H$, то $x \in H$.

По определению

$C = G(x) = \{axa^{-1} | a \in G\} = \{axa^{-1} | a \in H\} \bigcup \{agxg^{-1}a^{-1} | a \in H\} =$

$= H(x) \bigcup H(gxg^{-1}) = C_1 \bigcup C_2.$

Так как $Hg = gH$, то для любого $a \in H$ существует единственный $a_1 \in H$ такой, что $ga = a_1g$ (если $a_2g = a_1g$, то $a_2 = a_1$). Определим отображение $C_1 \to C_2$ по правилу $axa^{-1} \mapsto a_1gxg^{-1}a_1^{-1}$, где $a_1 \in H$ такой, что $ga = a_1g$. Так как $axa^{-1} = bxb^{-1} \Leftrightarrow gaxa^{-1}g^{-1} = gbxb^{-1}g^{-1} \Leftrightarrow a_1gxg^{-1}a_1^{-1} = b_1gxg^{-1}b_1^{-1}$ (здесь $ga = a_1g$, $gb = b_1g$), то различным элементам в C_1 отвечают различные элементы в C_2 и наоборот. Поэтому, определенное выше отображение является биекцией и $|C_1| = |C_2|$.

Таким образом, $C = C_1 \bigcup C_2$, где C_1, C_2 - классы сопряженных в H и $|C_1| = |C_2|$. Классы либо не пересекаются либо совпадают, причем совпадают тогда и только тогда, когда существует $a \in H$ такой, что $x = agxg^{-1}a^{-1}$ (т.е. $ag \in C_G(x)$ - централизатору). $\square$

В доказательстве мы получили также следующий критерий:

класс сопряженных с x в G является классом сопряженных в $H \Leftrightarrow$ существует $t \notin H$ такой, что $tx = xt$ ($t = ag$ из доказательства).

Примеры.

1) Классы сопряженных в S_4 и A_4.

Пусть $G = S_4$. Разбиения 4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1 дают цикловые структуры в S_4: тождественная подстановка, циклы длины 2, 3, 4 и произведения двух независимых циклов длины 2.

Найдем классы сопряженных в $G = S_4$.

$K_1 = G((1234)) = \{(1234), (1243), (1324), (1432), (1423), (1342)\}$.

Если нужна только мощность класса, то ее нетрудно найти, не перечисляя элементы: всего перестановок чисел 1, 2, 3, 4 ровно $4! = 24$, но циклические перестановки символов (их 4) определяют одинаковые подстановки, поэтому различных циклов длины 4 ровно $\dfrac{24}{4} = 6$.

$K_2 = G((123)) = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$, $|K_2|$ равна количеству циклов длины 3, т.е. $C_4^3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$.

$K_3 = G((12)(34)) = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

$K_4 = G((12)) = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$, $|K_4| = C_4^2 = 6$.

$K_5 = \{id\}$.

K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 – классы сопряженных в S_4.

Классы K_2, K_3, K_5 лежат в $H = A_4$ и $K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_5 = A_4$.

Так как $|K_3|$=3, то K_3 нельзя разбить на два подмножества одинаковой мощности. Следовательно, $K_3 = H((12)(34)) = C_1$.

Так как $|K_2|$=8 не делит $|A_4| = 12$, то K_2 не может быть классом сопряженных в A_4, следовательно, K_2 разбивается на два класса мощности 4 сопряженных в A_4.

Рассмотрим подстановки, сопрягающие (123) с остальными циклами длины 3 в S_4: (строим их так же как в доказательстве теоремы)

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\pi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Подстановки π_3, π_4, π_7 четные, следовательно, (123), (142), (134), (243) сопряжены в A_4. Так как класс должен состоять из 4 элементов, то

$C_2 = H((123))$ ={(123), (142), (134), (243)},

$C_3 = H((132))$ ={(132), (124), (143), (234)}.

$C_4 = \{id\}$.

C_1, C_2, C_3, C_4 все классы сопряженных в A_4.

2) Разбиение на классы сопряженных позволяет найти все нормальные подгруппы.

Действительно, пусть $H \lhd G$. Если $x \in H$, то по определению нормальной подгруппы $axa^{-1} \in H$ для любого $a \in G$, а, следовательно, $G(x) \subset H$. Т.е. вместе с любым элементом H содержит класс сопряженных. Следовательно, H есть объединение классов сопряженных в G элементов.

Найдем нормальные подгруппы в S_4 и A_4.

Пусть H нормальна в A_4. Тогда H является объединением некоторых из C_1, C_2, C_3, C_4. Следовательно, $|H| = \varepsilon_1|C_1| + \varepsilon_2|C_2| + \varepsilon_3|C_3| + 1$, где $\varepsilon_i = \begin{cases} 0, C_i \subseteq H \\ 1, C_i \nsubseteq H \end{cases}$. Так как id содержится в любой подгруппе, то $C_4 \subset H$.

По теореме Лагранжа $|H|$ делит порядок A_4, т.е. 12.

Получаем следующие варианты:

а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ и $H = \{id\}$,

б) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ и $H = A_4$,

в) $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ и
$H = \{id\} \bigcup C_1 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V_4$ – четверная группа Клейна.

Вывод: нормальными подгруппами в A_4 являются $\{id\}$, A_4 и V_4.

Аналогично, предположим, что $H \lhd S_4$, тогда

$|H| = \varepsilon_1|K_1| + \varepsilon_2|K_2| + \varepsilon_3|K_3| + \varepsilon_4|K_4| + 1| = \varepsilon_1 6 + \varepsilon_2 8 + \varepsilon_3 3 + \varepsilon_4 6 + 1$.

Так как $|H|$ делит порядок S_4, т.е. 24, то получаем следующие варианты:

а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ и $H = \{id\}$,

б) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ и $H = S_4$, в) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_3 = 1$ и $H = \{id\} \bigcup K_3 = V_4$,

г) $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ и $H = \{id\} \bigcup K_2 \bigcup K_3 = A_4$.

Таким образом, нормальными подгруппами в S_4 являются $\{id\}$, S_4, V_4 и A_4.

1.2 Действие группы на множествах подгрупп

Пусть G – группа, M – множество всех подгрупп в G. Для любого $a \in G$, любой подгруппы H образ подгруппы при автоморфизме: $I_a(H) = aHa^{-1} = \{aha^{-1} | h \in H\}$ является подгруппой в G и называется подгруппой, сопряженной с H.

Так как I_a биективно, то $|H| = |I_a(H)|$.

Определим действие G сопряжениями на множестве подгрупп: $(a, H) \mapsto aHa^{-1}$.

Орбиты относительно данного действия являются множествами сопряженных подгрупп: $G(H) = \{aHa^{-1} | a \in G\}$. Стабилизатор H: $St(H) = \{a \in G | aHa^{-1} = H\}$ обозначается $N_G H$ и называется **нормализатором** подгруппы H в G. Так как стабилизаторы являются подгруппами, то $N_G H$ – подгруппа в G.

Отметим, что $aHa^{-1} = H \Leftrightarrow aHa^{-1} \subseteq H$.

Свойства.

1) Если группа G конечна, то число подгрупп сопряженных с H в G равно $(G : N_G H)$.

2) H нормальная подгруппа в $N_G H$.

1.3 Упражнения

1.3.1. Найти все орбиты и стабилизаторы группы G, порожденной подстановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

и действующей на множестве $M = \{1, 2, ..., 10\}$.

1.3.2. Найти все орбиты группы G невырожденных линейных операторов, действующих на n-мерном евклидовом пространстве V, если

а) G – группа всех невырожденных линейных операторов ($G = \mathrm{GL}(V)$);

б) G – группа ортогональных линейных операторов ($G = O(V)$);

в) G – группа операторов, матрицы которых в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ диагональны;

г) G – группа операторов, матрицы которых в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ верхние треугольные.

1.3.3. Найти стабилизатор вектора $v = e_1+e_2+...+e_n$, если G – группа из задачи 1.3.1. в) и 1.3.1 г).

1.3.4. Найти централизатор: а) подстановки $(12)(34)$ в S_4; б) подстановки $(12...n)$ в S_n.

1.3.5. В группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ найти централизатор матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.6. Какие из следующих матриц сопряжены между собой в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

1.3.7. В группе S_4 найти классы сопряженности:

1) перестановки $(12)(34)$;

2) перестановки (124).

1.3.8. Определить число классов сопряженности в группах S_5 и S_6.

1.3.9. Найти разбиение на классы сопряженности группы: а) S_3; б) A_4; в) A_5 (Указание: циклы длины 3 лежат в одном классе сопряженности, так как для нечетной подстановки $(4,5)$ имеем $(4,5)(1,2,3) = (1,2,3)(4,5)$).

1.3.10. Найти нормализатор $N(H)$ подгруппы H в группе G, если

а) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$;

б) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$;

в) $G = S_4, H = \langle (1234) \rangle$.

1.3.11. Найти центр группы: а) A_n; б) $SL_n(\mathbb{C})$.

1.3.12. Пусть H подгруппа в G. Доказать, что H нормальна в G тогда и только тогда, когда H является объединением некоторого множества сопряженных классов группы G.

1.3.13. Найти все нормальные подгруппы в группах: а) S_3; б) A_4; в) S_4; г) A_5.

1.3.14. На примере группы A_4 показать, что нормальная подгруппа K нормальной подгруппы H группы G не обязана быть нормальной в G.

1.3.15. Доказать, что факторгруппа неабелевой группы по ее центру не может быть циклической.

1.3.16. Доказать, что группа порядка p^2, где p – простое число, абелева.

1.3.17. Найти число классов сопряженности и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка p, где p — простое число.

1.3.18. Доказать, что если G — неабелева, то $\mathrm{Aut}(G)$ — нециклическая.

1.3.19. Доказать, что для любой группы G множество всех внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(G)$ является нормальной подгруппой в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов группы G.

* * *

1.3.20. Доказать, что группа S_4 действует сопряжениями на множестве $M = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Таким образом, определен гомоморфизм $\Phi : S_4 \to S_3$. Найти $Ker\Phi$ и $Im\Phi$.

1.3.21. Пусть абелева группа G действует на множестве M. Доказать, что если для некоторых $g \in G$ и $m_0 \in M$ имеем $gm_0 = m_0$, то $gm = m$ для всех $m \in G(m_0)$, где $G(m_0)$— орбита точки m.

1.3.22. Найти все конечные группы, число классов сопряженности которых равно а) 1; б) 2; в) 3.

1.3.23. Доказать, что

а) если H, K - сопряженные подгруппы конечной группы G и $K \subseteq H$, то $K = H$;

б) подгруппы $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$ и $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$ сопряжены в $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ и $K \subsetneqq H$.

1.3.24. Доказать, что

а) $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$, причем все автоморфизмы — внутренние;

б) $\mathrm{Aut}(V_4) \cong S_3$, причем внутренним является лишь тождественный автоморфизм.

2 Группы малых порядков. Силовские подгруппы

По теореме Лагранжа порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы. Обратное, вообще говоря, неверно. Но для любого делителя вида p^s порядка группы G, где p – простое число, $s \in \mathbb{N}$, всегда существует подгруппа в G, порядок которой равен p^s. Этот факт был доказан норвежским математиком Л. Силовым.

Первая теорема Силова. Пусть G – конечная группа порядка $n = p^t m$, p – простое число, $(p, m) = 1$. Тогда

(1) для любого $s \leq t$ существует подгруппа в G порядка p^s;

(2) если $s+1 \leq t$, то любая подгруппа порядка p^s содержится в некоторой погрупппе порядка p^{s+1}. $\square$

В обозначениях теоремы подгруппа в G порядка p^t называется **силовской p-подгруппой.**

Вторая теорема Силова. Все силовские p-подгруппы в группе G сопряжены. $\square$

Третья теорема Силова. Количество силовских p-подгрупп в группе G делит порядок G и сравнимо с 1 по модулю p. $\square$

Следствие. Силовская p-подгруппа P группы G нормальна в G тогда и только тогда, когда она единственна.

Примеры.

1) Рассмотрим силовские p-подгруппы в группе S_3. Поскольку порядок S_3 равен $6 = 2 \cdot 3$, в группе S_3 имеются силовские 2-подгруппы и силовские 3-подгруппы. Силовские 2-подгруппы имеют порядок 2. По третьей теореме Силова число различных силовских 2-подгрупп делит $|S_3| = 6$ и сравнимо с 1 по модулю 2. Значит, в S_3 либо одна, либо три силовских 2-подгруппы. Заметим, что в S_3 ровно три элемента второго порядка – это транспозиции $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$. Следовательно, в S_3 три силовских 2-подгруппы, которые порождаются транспозициями.

Силовские 3-подгруппы имеют порядок 3. По третьей теореме Силова число различных силовских 3-подгрупп делит $|S_3| = 6$ и сравнимо с 1 по модулю 3. Значит, в S_3 только одна силовская 3-подгруппа – это A_3. Заметим, что она нормальна и порождается циклом длины 3.

2) В группе A_4 имеются силовские 2-подгруппы и силовские 3-подгруппы, так как $|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$. Силовская 2-подгруппа единственная, поскольку A_4 имеет только одну собственную нормальную подгруппу – четверную группу Клейна V_4. Ее порядок равен 4.

По третьей теореме Силова число различных силовских 3-подгрупп делит $|A_4| = 12$ и сравнимо с 1 по модулю 3. Следовательно, в группе A_4 имеется четыре силовских 3-подгруппы. Они порождаются циклами длины 3 и имеют порядок 3.

Задача. Доказать, что любая группа G порядка 35 циклическая.

Так как $|G| = 35 = 5 \cdot 7$, то элементы группы могут иметь порядок 1, 5, 7 или 35. В группе G имеются силовские 5-подгруппы порядка 5 и силовские 7-подгруппы порядка 7. По третьей теореме Силова число силовских 5-подгрупп делит $|G| = 35$ и сравнимо с 1 по модулю 5. Значит, силовская 5-подгруппа единственна. Обозначим ее $S_1 = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4\}$. Отметим, что $ord\ a = ord\ a^2 = ord\ a^3 = ord\ a^4 = 5$.

Покажем, что в группе G содержится ровно 4 элемента пятого порядка. В самом деле, предположим, что в группе G существует отличный от $a,\ a^2,\ a^3,\ a^4$ элемент b пятого порядка, то есть $b^5 = e$. Тогда рассмотрим $B = \{e,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4\}$. Ясно, что B является подгруппой в G пятого порядка, следовательно, B – это силовская 5-подгруппа в G. Поскольку силовская 5-подгруппа единственна в G, то $B = S_1$. Значит, b совпадает либо с a, либо с a^2, либо с a^3, либо с a^4. Противоречие.

Аналогично, рассмотрим силовские 7-подгруппы. По третьей теореме Силова число силовских 7-подгрупп делит $|G| = 35$ и сравнимо с 1 по модулю 7. Значит, силовская 7-подгруппа единственна. Обозначим ее $S_2 = \{e,\ c,\ c^2,\ c^3,\ c^4,\ c^5,\ c^6\}, ord\ c = ord\ c^2 = ord\ c^3 = ord\ c^4 = ord\ c^5 = ord\ c^6 = 7$.

Покажем, что в группе G содержится ровно 6 элементов седьмого порядка. В самом деле, предположим, что в группе G существует отличный от ненулевых степеней c элемент d седьмого порядка, то есть $d^7 = e$. Тогда рассмотрим $D = \{e,\ d,\ d^2,\ d^3,\ d^4,\ d^5,\ d^6\}$. Ясно, что D является подгруппой в G седьмого порядка. По определению D – это силовская 7-подгруппа в G. Следовательно, в силу единственности $D = S_2$. Значит, d совпадает с ненулевой степенью c.

Итак, в группе G содержится 4 элемента пятого порядка, 6 элементов седьмого порядка, 1 элемент первого порядка (это нейтральный элемент e). Следовательно, существуют элементы, порядок которых равен 35. Их ровно $24 = 35 - 4 - 6 - 1$. Значит, группа G порядка 35 циклическая.

2.1 Простые группы

Определение. Группа G называется **простой**, если G не имеет нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и G.

Примеры.

1) Если G абелева простая группа, то поскольку любая подгруппа в абелевой группе является нормальной, то G не имеет подгрупп, отличных от $\{e\}$ и G. В частности, циклическая подгруппа, натянутая на любой неединичный элемент, совпадает с G. Т.е. G циклическая группа. Так как для любого делителя d порядка циклической группы найдется подгруппа порядка d, то $|G|$ является простым числом. Таким образом, если G абелева простая группа, то G циклическая простого порядка.

2) Группа A_5 простая (упражнение 1.3.13 г)).

Теорема (Галуа)

A_n простая группа при $n \geq 5$. $\square$

Задача. Доказать, что не существует простых групп порядка 56.

Пусть G – простая группа порядка 56. Так как $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$, то G имеет силовские 2-подгруппы и силовские 7-подгруппы. Порядок силовской 2-подгруппы равен 8, а порядок силовской 7-подгруппы равен 7. По третьей теореме Силова число силовских 7-подгрупп делит $|G| = 56$ и сравнимо с 1 по модулю 7 и, следовательно, может быть равно 1 или 8. Если силовская 7-подгруппа единственна, то по следствию 1 она нормальна, значит, G не является простой. Значит, существует 8 различных силовских 7-подгрупп. Покажем, что их попарные пересечения тривиальны, то есть они пересекаются по нейтральному элементу e. Действительно, пусть S_1, S_2 – различные силовские 7-подгруппы. Тогда $S_1 \cap S_2$ – подгруппа в S_1. Так как по теореме Лагранжа порядок подгруппы делит порядок группы, а порядок силовской 7-подгруппы равен 7, то порядок $S_1 \cap S_2$ равен либо 1, либо 7. Если $|S_1 \cap S_2| = 7 = |S_1|$, то $S_2 \subset S_1$. Так как $|S_1| = |S_2| = 7$, то $S_1 = S_2$. Получаем противоречие. Следовательно, $|S_1 \cap S_2| = 1$, то есть $S_1 \cap S_2 = \{e\}$.

Отметим, что поскольку порядок силовской 7-подгруппы равен 7, ее элементы могут быть только первого или седьмого порядка, причем существует только один элемент первого порядка – это нейтральный элемент e. Следовательно, в каждой силовской 7-подгруппе ровно 6 элементов седьмого порядка. Теперь так как в G ровно 8 силовских 7-подгрупп, и они пересекаются по нейтральному элементу e, то в G ровно $8 \cdot 6 = 48$ элементов седьмого порядка. Посчитаем теперь сколько элементов, порядки которых отличны от 1 и 7. Так как в группе только один элемент первого порядка (это нейтральный элемент e), то элементов, порядки которых отличны от 1 и 7, ровно $56 - 48 - 1 = 7$. Но мы знаем, что G имеет также силовские 2-подгруппы порядка 8. Элементы силовской 2-подгруппы могут иметь порядки, являющиеся степенями 2, то есть не равные 7. Поэтому те 7 элементов, порядки которых отличны от 1 и 7, вместе с нейтральным элементом e могут образовывать лишь одну силовскую 2-подгруппу порядка 8, которая по следствию из третьей теоремы Силова нормальна. Отсюда получаем, что G не является простой.

2.2 Упражнения

2.2.1. Найти порядок групп: а) $GL_2(\mathbb{Z}_p)$; б) $SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

2.2.2. Изоморфны ли группы S_4 и $SL_2(\mathbb{Z}_3)$?

2.2.3. Найти все силовские 2-подгрупны и 3-подгруппы в группе S_4.

2.2.4. Указать сопрягающие элементы для силовских 2-подгрупп и силовских 3-подгрупп в группах а) S_3; б) A_4.

2.2.5. В каких силовских 2-подгруппах группы S_4 содержатся подстановки

а) (1234); б) (13); в) (12)(34).

2.2.6. Доказать, что силовская 2-подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ нормальна и абелева.

2.2.7. Сколько различных силовских p-подгрупп в группе A_5, где а) $p = 2$; б) $p = 3$; в) $p = 5$.

2.2.8. Найти порядок силовской р-подгруппы в группе S_n.

2.2.9. Сколько различных силовских р-подгрупп в группе S_p.

2.2.10. Доказать, что силовская p-подгруппа в группе G единственна тогда и только тогда, когда она нормальна.

2.2.11. Пусть $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Z}_p, (p - \text{простое}) \right\} \subset SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

а) Доказать, что S – силовская p-подгруппа в $SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

б) Найти нормализатор S в $SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

в) Найти число силовских p-подгрупп в $SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

г) Доказать утверждения а), б), в) для $GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

2.2.12. Доказать, что образ силовской p-подгруппы конечной группы G при эпиморфизме G на группу H является силовской подгруппой в H.

2.2.13. Доказать, что все силовские подгруппы группы порядка 100 абелевы.

2.2.14. Доказать, что любая группа порядка а) 15; б) 185 циклическая.

2.1.15. Сколько различных силовских 2-подгрупп и силовских 5-подгрупп в неабелевой группе $|G| = 20$?

2.2.16. Доказать, что не существует простых групп порядка: а) 50; б) 80.

2.2.17. Пусть S - силовская p-подгруппа конечной группы G и H - нормальная подгруппа в G.

а) Доказать, что $S \cap H$ - силовская p-подгруппа в H.

б) Привести пример, противоречащий а), когда H не является нормальной в G.

2.2.18. Пусть p и q - простые числа, $p < q$. Доказать, что

а) если $p \nmid q - 1$, то любая группа G, порядка $|G| = pq$, коммутативна;

б) если $p | q - 1$, то в группе имеется некоммутативная подгруппа порядка pq.

* * *

2.2.19. Доказать, что не существует простых групп порядка 36.

3 Разрешимые группы

Пусть G группа, $a, b \in G$. Элемент $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ назовем **коммутатором** a и b.

Нетрудно видеть, что $ab = [b, a]ba$, $[a, a] = e$ и $[a, b]^{-1} = [b, a]$.

3.1 Коммутант группы

Рассмотрим подгруппу $G^{(1)}$ в G, которая состоит из произведений конечного числа всевозможных коммутаторов элементов из группы G:

$G^{(1)} = \{[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \dots \cdot [a_k, b_k] | k \in \mathbb{N}, a_i \in G, b_i \in G\}$.

Подгруппа $G^{(1)}$ называется **коммутантом** группы G.

Очевидно, что $G^{(1)} = \{e\} \Leftrightarrow G$ коммутативна.

Примеры.

1) Покажем, что коммутант S_n равен A_n.

Подстановка $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ всегда четная ($\varepsilon_{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}} = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_{\alpha^{-1}} \cdot \varepsilon_{\beta^{-1}} = 1$, так как $\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_{\alpha^{-1}} = 1$), поэтому $S_n^{(1)} \subset A_n$.

Любую подстановку можно разложить в произведение транспозиций, причем четные подстановки обязаны в разложении содержать четное количество транспозиций.

Пусть $\alpha \in A_n$, $\alpha = (i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_{2k-1}, j_{2k-1})(i_{2k}, j_{2k})$. Разобьем данное произведение на пары и покажем, что произведение любой пары есть произведение циклов длины 3:

$(i, j)(i, j) = id = (ijk)(ikj)$;

$(ij)(ik) = (ikj)$;

$(ij)(km) = (ij)(jk)(jk)(km) = (jki)(kmj)$ (различными буквами обозначены различные символы).

Таким образом, произведение двух транспозиций всегда представимо в виде произведения циклов длины 3. Следовательно, в таком виде представима и α.

Любой цикл длины 3 можно представить как коммутатор транспозиций: $(ij)(ik)(ij)(ik) = (ijk)$, т.е. $(ijk) = [(ij), (ik)] \in S_n^{(1)}$. Следовательно, произведение циклов длины 3 есть произведение коммутаторов, т.е. принадлежит коммутанту.

Получили, что $A_n \subset S_n^{(1)}$ и, следовательно, $S_n^{(1)} = A_n$.

2) Рассмотрим группу $A_n,\ n \geq 5$.

Так как для любых различных i, j, k, m, t (для любых i, j, k обязательно найдутся m, t отличные от них, поскольку $n \geq 5$) выполняется

$[(ijm), (ikt)] = (ijm)(ikt)(mji)(tki) = (ijk)$, то любой цикл длины 3 содержится в коммутанте группы A_n. Так как любая четная подстановка при $n \geq 3$ является произведением циклов длины 3 (см. пример 1), то $A_n \subseteq A_n^{(1)}$.

Таким образом, $A_n^{(1)} = A_n,\ n \geq 5$.

3) Пусть $G = T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$ – группа невы-

рожденных верхнетреугольных матриц.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in G$, тогда

$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-cb' - ba' + ab' + bc'}{cc'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Видим, что $G^{(1)} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\} = U_2(\mathbb{R})$. А так как

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

то $G^{(1)} = U_2(\mathbb{R})$.

Нетрудно проверить, что группа $U_2(\mathbb{R})$ коммутативна, а, следовательно, ее коммутант состоит только из единичной матрицы.

Свойства коммутанта.

1) $G^{(1)} \lhd G$.

2) Если $f : G \to K$ гомоморфизм групп, то $f(G^{(1)}) = f(K)^{(1)}$.

3) Если H подгруппа и $H \supseteq G^{(1)}$, то $H \lhd G$.

4) Если H нормальная подгруппа, то G/H абелева тогда и только тогда, когда $H \supseteq G^{(1)}$.

5) Если G конечная группа, то $G/G^{(1)}$ имеет максимальный порядок среди всех абелевых факторгрупп группы G. $\Box$

Пусть $H = G^{(1)}$ коммутант группы G. Рассмотрим коммутант группы H.

Определение. Подгруппа $G^{(2)} = \left(G^{(1)}\right)^{(1)}$ называется **вторым коммутантом** группы G. По индукции можно определить **k-ый коммутант** группы G: $G^{(k)} = \left(G^{(k-1)}\right)^{(1)}$.

Из свойств коммутанта $G^{(k)} \lhd G^{(k-1)}$ и факторгруппа $G^{(k-1)}/G^{(k)}$ абелева. Получаем следующий ряд:

$\ldots\ldots \lhd G^{(k)} \lhd G^{(k-1)} \lhd \cdots \lhd G^{(2)} \lhd G^{(1)} \lhd G = G^{(0)}$. Каждый фактор в этом ряду абелева группа.

Определение. Группа G называется **разрешимой**, если существует такое натуральное k, что $G^{(k)} = e$. Наименьшее среди таких $k > 0$ называется ступенью разрешимости. Если $G^{(k)} \neq e$ для любого k, то G называется **неразрешимой**.

Замечание: если $G \neq e$ и $G^{(1)} = G$, то $G^{(k)} = G$ для любого k и, следовательно, группа G неразрешима.

Примеры.

1) Любая абелева группа разрешима.

2) Так как $S_3^{(1)} = A_3$, $A_3^{(1)} = \{id\}$ (A_3 абелева), то $S_3^{(2)} = \{id\}$ и, следовательно, S_3 разрешимая группа, ступень разрешимости равна 2.

3) $S_4^{(1)} = A_4$. Найдем второй коммутант S_4. Группа A_4 содержит нормальную подгруппу $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Факторгруппа A_4/V_4 имеет порядок $\dfrac{|A_4|}{|V_4|} = \dfrac{12}{4} = 3$ – простое. По следствию теоремы Лагранжа A_4/V_4 является циклической, т.е. коммутативной группой. Из свойства 4) коммутанта получаем, что $V_4 \supset A_4^{(1)}$.

Так как $A_4^{(1)} \neq \{id\}$ (например, $[(123), (124)] = (12)(34) \neq id$) и A_4 не имеет нормальных подгрупп, отличных от $\{id\}, V_4, A_4$, то $A_4^{(1)} = V_4$.

В свою очередь, $V_4^{(1)} = \{id\}$ (т.к. V_4 абелева).

Таким образом, $S_4^{(3)} = \{id\}$, следовательно, S_4 разрешимая группа, ступень разрешимости равна 3.

4) Так как $S_n^{(1)} = A_n$ и $A_n^{(1)} = A_n$ при $n \geq 5$, то A_n неразрешима при $n \geq 5$, а, следовательно, S_n неразрешима при $n \geq 5$.

5) Так как $(T_2(\mathbb{R}))^{(1)} = U_2(\mathbb{R})$ и $(U_2(\mathbb{R}))^{(1)} = \{E\}$, то $T_2(\mathbb{R})$ разрешимая группа, ступень разрешимости равна 2.

Свойства разрешимых групп.

1) Подгруппа разрешимой группы разрешима.

2) Образ разрешимой группы при гомоморфизме разрешимая группа, т.е. если $f : G \to K$ эпиморфизм и G разрешима, то K разрешима.

3) Пусть H нормальная подгруппа в G. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда H и G/H разрешимы.

Теорема. Любая p-группа разрешима. $\square$

Теорема. Группа порядка p^2, где p простое число, абелева. $\square$

Теорема. (Фейт, Томпсон) Группа нечетного порядка разрешима. $\square$

Если G неабелева простая, то $G^{(1)} \neq e$ и, следовательно, $G^{(1)} = G$. Последнее равенство влечет неразрешимость группы G. Следовательно, разрешимыми простыми группами являются только циклические простого порядка.

3.2 Упражнения

3.2.1. Доказать, что коммутатор $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ элементов x, y группы G обладает свойствами: а) $[x, y]^{-1} = [y, x]$; б) $[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z]$; в) $[z, xy] = [z, x]x[z, y]x^{-1}$.

3.2.2. Если x имеет конечный порядок и $[x, y]$ перестановочен с x, то порядок $[x, y]$ делит порядок x.

3.2.3. Доказать, что в S_3 выполняется тождество $[x^2, y^2] = 1$.

3.2.4. В группе S_n найти

а) коммутатор двух транспозиций;

б) коммутаторы циклов:

1) $[(ijk), (ijl)]$; 2) $[(ijk), (ilj)]$; 3) $[(ijk), (ilm)]$.

3.2.5. Показать, что цикл (1 2 3 4 5) является коммутатором двух четных подстановок.

3.2.6. Найти коммутатор невырожденных матриц:

$$\text{а)}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б)}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

3.2.7. Доказать, что $GL_n(\mathbb{R})^{(1)} \subset SL_n(\mathbb{R})$.

3.2.8. Найти $GL_2(\mathbb{R})^{(1)}$.

3.2.9. Найти коммутанты и порядки факторгрупп по коммутантам для групп: а) S_3; б) Q_8; в) $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

3.2.10. Доказать, что если H нормальна в G, то $H^{(1)}$ также нормальна в G. В частности, $G^{(1)}$ нормальна в G.

3.2.11. Пусть G конечная группа, $|G^{(1)}| = 2$. Доказать, что $G^{(1)} \subseteq Z(G)$.

3.2.12. Доказать разрешимость групп: а) S_3; б) Q_8; в) $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

3.2.13. Определим на множестве $\mathbb{Z}$ новую групповую операцию

$$m * n = \begin{cases} m{+}n, \text{ если } m \text{ четное;} \\ m{-}n, \text{ если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Найти коммутатор любых двух элементов и доказать разрешимость полученной группы.

3.2.14. Доказать, что группа порядка pq, где p, q – различные простые числа, разрешима.

3.2.15. Доказать разрешимость групп порядка: а) 20; б) 275; в) p^2q, где p, q – различные простые числа; г) 42; д) 100.

3.2.16. Доказать, что для трансвекций – квадратных матриц вида $t_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$ (матрица E_{ij} состоит из нулевых элементов, кроме элемента в i-й строке и j-м столбце, который равен 1) – справедливо $[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$ при различных i, j, k.

* * *

3.2.17. Доказать, что $SL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})^{(1)}$ и $SL_n(\mathbb{R})$ неразрешима при $n > 1$.

3.2.18. Доказать, что конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда в ней имеется ряд $G = H_0 \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_k = e$ нормальных делителей, такой что H_m/H_{m+1} циклические группы простого порядка.

4 Прямое произведение групп

Пусть G_1, G_2 – группы. Зададим структуру группы на декартовом произведении $G_1 \times G_2$:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a',\ b \cdot b').$$

Определенная таким образом группа называется **внешним прямым произведением** групп G_1 и G_2 и обозначается $G_1 \times G_2$. Единицей группы $G_1 \times G_2$ является пара (e, e) (первый элемент – единица в G_1, второй – единица в G_2). Обратным к паре (a, b) является пара (a^{-1}, b^{-1}).

Аналогично определяется прямое произведение $G_1 \times \dots \times G_n$.

Если $G_1, \dots, G_n$ конечные группы, то $|G_1 \times \dots \times G_n| = |G_1| \cdot \dots \cdot |G_n|$.

Свойства.

(1) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

(2) $(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$.

(3) $G \times \{e\} \cong G$.

(4) Если $\varphi_1 : G_1 \to K_1$, $\varphi_2 : G_2 \to K_2$ – изоморфизмы, то $\varphi : G_1 \times G_2 \to K_1 \times K_2$, $\varphi(a, b) = (\varphi_1(a), \varphi_2(b))$ является изоморфизмом.

Пусть $G = G_1 \times G_2$ прямое произведение групп G_1 и G_2. Рассмотрим подмножества $H_1 = \{(a, e) |\ a \in G_1\}$ и $H_2 = \{(e, b) |\ b \in G_2\}$. Так как $(a, e)(a', e) = (aa', e)$ и $(a, e)^{-1} = (a^{-1}, e)$, то H_1 является подгруппой. Аналогично, H_2 является подгруппой. Более того, $(a', b')(a, e)(a'^{-1}, b'^{-1}) = (a'aa'^{-1}, b'eb'^{-1}) = (a'aa'^{-1}, e) \in H_1$ для любой пары $(a', b') \in G_1 \times G_2$. Следовательно, H_1 является нормальной подгруппой в $G = G_1 \times G_2$. Аналогично, H_2 является нормальной подгруппой в G.

Любой элемент $(a, b) \in G$ можно представить в виде $(a, b) = (a, e)(e, b)$, т.е. $G = H_1 \cdot H_2$. Так как $(a', e)(e, b') = (a', b')$, то представление (a, b) в виде произведения двух элементов, первый из которых лежит в H_1, а второй в H_2, единственно. Отметим, что $H_1 \cap H_2 = \{(e, e)\}$.

Определение. Группа G называется **(внутренним) прямым произведением** своих нормальных подгрупп H и T, если любой элемент $a \in G$ однозначно представляется в виде $a = ht$, где $h \in H$, $t \in T$.

Выше показано, что внешнее прямое произведение $G = G_1 \times G_2$ является прямым произведением нормальных подгрупп $H_1 = \{(a, e) | a \in G_1\}$ и $H_2 = \{(e, b) | b \in G_2\}$. Причем, $H_1 \cong G_1$ и $H_2 \cong G_2$.

Группа G является прямым произведением своих нормальных подгрупп H и T тогда и только тогда, когда $G = H \cdot T$ и $H \cap T = \{e\}$.

Если G прямое произведение нормальных подгрупп H и T, то $ht = th$ для любых $h \in H$, $t \in T$.

Замечание. Если G прямое произведение нормальных подгрупп H и T, $a = ht$, $b = h't'$, где $h, h' \in H$, $t, t' \in T$, то $ab = (hh')(tt')$ - представление ab в виде произведения элемента из H на элемент из T.

Аналогично определяется прямое произведение нормальных подгрупп $H_1, \ldots, H_n$.

Определение. Группа G называется прямым произведением своих нормальных делителей $H_1, \ldots, H_n$, если любой элемент из G однозначно представляется в виде $a = h_1 h_2 \cdots h_n$, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, ..., $h_n \in H_n$.

Предложение. Группа G является прямым произведением своих нормальных подгрупп $H_1, \ldots, H_n$ тогда и только тогда, когда $G = H_1 \cdots H_n$ и $H_i \cap H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n = \{e\}$ для любого $i = 1..n$. $\Box$

Если группа G является прямым произведением своих нормальных подгрупп $H_1, \ldots, H_n$, то $h_i h_j = h_j h_i$ для любых $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$, $i \neq j$.

Примеры.

1) Пусть $G = \{e, a, b, c\}$ - четверная группа Клейна, $H = \{e, a\}$, $T = \{e, b\}$. Четверная группа Клейна абелева, следовательно, H и T нормальные подгруппы. Так как $ab = c$, то $H \cdot T = G$. Очевидно, $H \cap T = \{e\}$. Таким образом, $G = H \times T$ – прямое произведение нормальных делителей.

2) Рассмотрим в $\mathbb{C}^*$ подгруппу $K = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \in \mathbb{Q}\}$. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in K$ дает представление z в виде произведения двух чисел: $r \in \mathbb{Q}^+$ и $(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in T^1$. Очевидно, $\mathbb{Q}^+ \bigcap T^1 = 0$. Следовательно, K является прямым произведением нормальных подгрупп $\mathbb{Q}^+$ и T^1.

Пусть группа G является внутренним прямым произведением своих нормальных подгрупп H и T. Рассмотрим внешнее прямое произведение $H \times T$ групп H и T и отображение $\varphi\ :\ G \to H \times T$, $\varphi(a) = (h, t)$, где $a = ht$, $h \in H$, $t \in T$.

Пусть $a = ht$, $b = h't'$, где $h, h' \in H$, $t, t' \in T$, тогда $ab = (hh')(tt')$. Имеем $\varphi(ab) = (hh', tt') = (h, t) \cdot (h', t') = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Следовательно, φ гомоморфизм.

Аналогично, отображение $(h, t) \mapsto ht$ является гомоморфизмом из $H \times T$ в G и является обратным к φ.

Таким образом, φ изоморфизм и внутреннее прямое произведение нормальных подгрупп H и T изоморфно внешнему прямому произведению $H \times T$.

Если операция в группах $G_1, \ldots, G_n$ сложение: "$+$", то вместо термина прямое произведение используют термин **внешняя прямая сумма** групп. Обозначение: $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$. Аналогично, используется термин прямая сумма (нормальных) подгрупп (как правило, в абелевых группах).

Пример. Пусть $G = \{e, a, b, c\}$ – четверная группа Клейна, $H = \{e, a\}$, $T = \{e, b\}$. Группы H и T имеют порядок 2, следовательно, они изоморфны Z_2. Поэтому $G \cong H \times T \cong Z_2 \oplus Z_2$ (свойство 4).

Теорема (о порядке произведения). Пусть $G = H_1 \times \cdots \times H_n$ прямое произведение нормальных делителей, $a = h_1 h_2 \cdots h_n$, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, …, $h_n \in H_n$. Порядок a конечный тогда и только тогда, когда конечны порядки h_1, h_2, …, h_n. При этом $ord(a) = [ord(h_1), ord(h_2), \dots, ord(h_n)]$ (наименьшее общее кратное). $\square$

Следствие 1. Пусть $G_1 \times \cdots \times G_n$ внешнее прямое произведение, $a = (a_1, \dots, a_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$. Порядок a конечный тогда и только тогда, когда конечны порядки a_1, …, a_n. При этом $ord(a) = [ord(a_1), \dots, ord(a_n)]$.

Следствие 2. Если m и n взаимно простые натуральные числа, то $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

4.1 Разложимые группы

Определение. Группа G называется **разложимой,** если G есть прямое произведение некоторых собственных нормальных подгрупп $H \neq \{e\}$ и $T \neq \{e\}$.

В определении использовано понятие внутреннего прямого произведения, но если G есть прямое произведение нормальных подгрупп H и T, то $G \cong H \times T$ – внешнее прямое произведение. И наоборот, если $G \cong G_1 \times G_2$, где $G_1 \neq \{e\}$ и $G_2 \neq \{e\}$, то G есть прямое произведение нормальных подгрупп $H \cong G_1$ и $T \cong G_2$, а, следовательно, $H \neq \{e\}$ и $T \neq \{e\}$.

Примеры.

1) По следствию 2 группа $\mathbb{Z}_{mn}$ разложима при взаимно простых m и n.

2) Любая подгруппа в $\mathbb{Z}$ имеет вид $m\mathbb{Z}$ для некоторого целого m. Пересечение подгрупп $m\mathbb{Z}$ и $n\mathbb{Z}$ равно $[m, n]\mathbb{Z}$, следовательно, пересечение ненулевых подгрупп $m\mathbb{Z}$ и $n\mathbb{Z}$ всегда ненулевое. Поэтому $\mathbb{Z}$ нельзя представить в виде прямой суммы нормальных подгрупп (пересечение должно содержать только 0). Таким образом, $\mathbb{Z}$ – неразложима.

3) Пусть H произвольная ненулевая подгруппа в $\mathbb{Q}$ (группе рациональных чисел по сложению), $\frac{r}{q} \in H$, $r \neq 0$. Тогда $q\frac{r}{q} = r$ также принадлежит подгруппе H, а, следовательно, $r\mathbb{Z} \subset H$. Аналогично, любая другая ненулевая подгруппа содержит $r'\mathbb{Z}$ для некоторого $r' \neq 0$. Тогда пересечение подгрупп содержит $rr'\mathbb{Z}$, а, следовательно, ненулевое. Поэтому $\mathbb{Q}$ неразложима.

4) Нормальные делители S_4 это $\{id\}$, V_4, A_4 и S_4. Но $V_4 \cap A_4 = V_4 \neq \{id\}$. Следовательно, S_4 неразложима.

Теорема (критерий разложимости циклической группы)

Циклическая группа порядка n разложима тогда и только тогда, когда n делится на два различных простых числа. $\Box$

Теорема (о факторгруппе произведения). Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ – прямое произведение групп, H_1 нормальная подгруппа в G_1, ..., H_n нормальная подгруппа в G_n. Тогда $H_1 \times \cdots \times H_n$ нормальная подгруппа в $G_1 \times \ldots \times G_n$ и

$$(G_1 \times \ldots \times G_n)/(H_1 \times \cdots \times H_n) \cong (G_1/H_1) \times \cdots \times (G_n/H_n). \Box$$

4.2 Упражнения

4.2.1. Доказать, что если A, B абелевы, то $A \times B$ тоже абелева.

4.2.2. Доказать, что группа $2\mathbb{Z}$ неразложима.

4.2.3. Чему равен порядок:

а) $(\bar{2}, \bar{5}, \bar{4})$ в группе $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{18}$;

б) $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{4})$ в группе $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_8$.

4.2.4. Сколько элементов

а) порядка 2,4, 5 и 6 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$;

б) порядка 2,4, 5 и 10 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$.

4.2.5. Разложимы ли следующие группы: а) $\mathbb{Z}_{12}$; б) $\mathbb{Z}_{16}$; в)S_3; г)A_4; д) Q_8?

4.2.6. Разложить в прямую сумму группы: а) $\mathbb{Z}_6$; б)$\mathbb{Z}_{12}$; в) $\mathbb{Z}_{60}$.

4.2.7. Доказать, что $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_d$, где $k = [m, n]$, $d = (m, n)$.

4.2.8. Найти максимальный порядок элементов в $S_3 \times S_8$.

4.2.9. Доказать, что $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^1$ и $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \times \{1, -1\}$.

4.2.10. Найти все прямые разложения группы $G = \{\pm 2^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

4.2.11. Пусть p и q различные простые числа. Доказать, что группа G порядка pq разложима тогда и только тогда, когда G коммутативна.

4.2.12. Доказать, что если в абелевой группе подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют конечные попарно взаимно простые порядки, то их сумма является прямой.

4.2.13. Найти классы сопряженности группы $A \times B$, если известны классы сопряженности групп A и B.

4.2.14. Доказать, что центр $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$.

4.2.15. Доказать, что если A и B – разрешимы, то $A \times B$ – разрешима.

4.2.16. Доказать, что любая силовская p-подгруппа прямого произведения конечных групп A и B является прямым произведением силовских p-подгрупп сомножителей A и B.

4.2.17. Пусть G разложима в прямые произведения $G = A \times B$ и $G = A \times C$. Доказать, что подгруппа C изоморфна B.

4.2.18. Пусть $\varphi_1 : A_1 \to B$, $\varphi_1 : A_1 \to B$ – гомоморфизмы групп A_1 и A_2 в абелеву группу B. Доказать, что существует единственный гомоморфизм $\varphi : A_1 \times A_2 \to B$, такой что $\varphi|_{A_i} = \varphi_i$, $i = 1, 2$.

* * *

4.2.19. Доказать, что если A - абелева группа и A/B – бесконечная циклическая группа, то подгруппа B выделяется в A прямым слагаемым, т.е. существует подгруппа C в A, такая что $A = B \oplus C$.

4.2.20. Доказать, что подгруппа B абелевой группы A выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм $f : A \to B$, такой что $f^2 = f$.

4.2.21. Доказать, что группа $U(\mathbb{Z}_{2^n})$ – обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{2^n}$ является прямым произведением группы $\{1, -1\}$ и циклической группы порядка 2^{n-2}. (Указание: $U(\mathbb{Z}_{2^n}) = \langle\overline{-1}\rangle \times \langle\overline{5}\rangle$).

5 Свободная группа. Задание групп образующими и определяющими соотношениями

Пусть G – группа, S – подмножество в множестве G. Пересечение всех подгрупп в G, содержащих S, является наименьшей подгруппой, содержащей S. Она обозначается через $< S >$ и называется **подгруппой, порожденной множеством** S. Из определения следует, что $< \emptyset >= \{e\}$. Элементами группы $< S >$ являются единица и всевозможные произведения $s_1 \ldots s_n$, $n \geq 1$, где $s_i \in S$ или $s_i^{-1} \in S$. Количество сомножителей в самом коротком таком представлении для $g \in < S >$ будем называть длиной элемента g и обозначать через $\ell(g)$. Очевидно, $\ell(g) = 0$ тогда и только тогда, когда $g = e$ и $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$.

Примеры.

1) Пусть G – группа, $S = \{g\}$ – множество из одного элемента $g \in G$. Тогда подгруппа $< g >$ – циклическая подгруппа с образующим элементом g.

2) Любая подстановка n-й степени является произведением транспозиций. Следовательно, транспозиции составляют множество образующих группы S_n.

3) Индукцией по $n \geq 2$ покажем, что группа S_n порождается транспозициями

$$(1, 2),\ (2, 3),\ \ldots,\ (n-1, n).$$

Для $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что группа S_{n-1} порождается транспозициями

$$(1,2),\ (2,3),\ \ldots,\ (n-2,n-1).$$

В частности, все транспозиции (i,j), такие, что $i < n,\ j < n$, можно записать в виде произведения транспозиций $(k-1,k),\ k \leq n-1$. Таким образом, достаточно доказать, что транспозиции $(i,n),\ i < n-1$, можно записать в виде произведения транспозиций $(i,j),\ i,\ j < n$, и транспозиции $(n-1,n)$. Это можно сделать так:

$$(i,n) = (i,n-1)(n-1,n)(i,n-1).$$

Следовательно, утверждение справедливо для n. Согласно принципу математической индукции утверждение справедливо для всех $n \geq 2$.

4) Пусть $G = SL_2(F),\ F$ – поле. Матрицы $x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ y(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix},\ \alpha,\ \beta \in F$, называются **трансвекциями.** Покажем, что группа G порождается трансвекциями.

Очевидно, $x(\alpha)^{-1} = x(-\alpha)$ и аналогично для $y(\beta)$. Напомним, что трансвекции соответствуют элементарным преобразованиям над матрицами, например, матрица $x(\alpha)A$ получается из матрицы 2-го порядка A прибавлением к 1-й строке 2-й строки, умноженной на α. Умножение матрицы A справа на матрицу $x(\alpha)$ или $y(\beta)$ равносильно выполнению элементарного преобразования над столбцами матрицы A. Как известно, любую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к диагональному виду. Пусть $A \in G$. Существуют трансвекции $T_1, \ldots, T_s,\ R_1, \ldots, R_k$, такие что

$$T_1 \ldots T_s A R_1 \ldots R_k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где $a,\ b \in F,\ ab = 1$ (так как все сомножители имеют определитель, равный 1). Таким образом, достаточно показать, что любая диагональная матрица из группы G является произведением трансвекций. Это действительно так (проверить!):

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.1 Свободная группа

Пусть X – множество. Назовем **словом над** X формальное выражение $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X,\ i = 1,\dots,n, \varepsilon_i = \pm 1$. Пустое слово обозначается символом e. Слово называется **несократимым**, если в нем не встречаются рядом два символа x^ε и $x^{-\varepsilon}$. Любое слово можно привести (редуцировать) к несократимому слову, если сократить (убрать) все стоящие рядом символы x^ε и $x^{-\varepsilon}$ (этот процесс может состоять из нескольких шагов). Обозначим через $F(X)$ множество, состоящее из e и всех несократимых слов. На множестве $F(X)$ вводится операция умножения: чтобы перемножить два несократимых слова a и b, припишем к слову a слово b и редуцируем получившееся слово (т.е. в получившемся слове произведем сокращения). В результате получим несократимое слово ab, которое называется произведением слов a и b. В результате $F(X)$ превращается в группу с единичным элементом e. Обратным для элемента $a = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ является элемент $a^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n}x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}}\dots x_1^{-\varepsilon_1}$. Группа $F(X)$ называется *свободной группой с множеством свободных порождающих X,* $|S|$ называется *рангом* свободной группы $F(S)$.

Пример. Если $X = \{x\}$ – множество из одного элемента, то $F(X)$ – бесконечная циклическая группа с образующим элементом x.

Теорема. (Универсальное свойство свободной группы.) Пусть G – группа, порожденная множеством образующих S, X – некоторое множество, $F(X)$ – свободная группа над X, $\varphi : X \longrightarrow S$ – отображение. Существует единственный гомоморфизм $\Phi : F(X) \longrightarrow G$, такой что $\Phi(x) = \varphi(x)$ для любого $x \in X$. Если φ сюръективно, то Φ также сюръективно. $\square$

Пример. Пусть $F(x,\ y)$ – свободная группа ранга 2 с образующими $x,\ y$. Покажем, что свободная группа со счетным множеством образующих $S = \{s_0,\ s_1,\ s_2,\dots\}$, вкладывается в качестве подгруппы в $F(x,\ y)$.

Согласно теореме, чтобы задать какой-либо гоморфизм φ группы $F(S)$ в $F(x,\ y)$, достаточно задать образы элементов множества S, причем в качестве $\varphi(s_i)$ можно выбрать любые элементы группы $F(x,\ y)$. Положим $\varphi(s_i) = z_i = x^i y x^i,\ i = 0,\ 1,\ 2,\dots$. Тем самым определен единственный гомоморфизм

$$\varphi : F(S) \longrightarrow F(x,\ y),\ s_{j_1}^{\varepsilon_1}\dots s_{j_k}^{\varepsilon_k} \mapsto z_{j_1}^{\varepsilon_1}\dots z_{j_k}^{\varepsilon_k} \in F(x,\ y).$$

Пусть $w = s_{j_1}^{\varepsilon_1}\dots s_{j_k}^{\varepsilon_k} \neq e$ – непустое редуцированное слово, т.е рядом не встречаются символы $s^\varepsilon,\ s^{-\varepsilon}$. Если все $j_1 = \dots = j_k = 0$, то $w = s_0^{\epsilon k}$ и $\varphi(w) = y^{\epsilon k} \neq e$. Аналогично, если в слове w встречаются стоящие рядом символы $s_0^\varepsilon,\ s_0^{\varepsilon'}$, то $\varepsilon = \varepsilon'$. Найдем $\varphi(w)$,

$$\varphi(w) = z_{j_1}^{\varepsilon_1} \ldots z_{j_k}^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_1 j_1} y^{\varepsilon_1} x^{\varepsilon_1 j_1})(x^{\varepsilon_2 j_2} y^{\varepsilon_2} x^{\varepsilon_2 j_2}) \cdots (x^{\varepsilon_k j_k} y^{\varepsilon_k} x^{\varepsilon_k j_k}).$$

Раскрывая скобки, соберем стоящие рядом множители x (частичная редукция по x). Получим

$$\varphi(w) = x^{\varepsilon_1 j_1} y^{\varepsilon_1} x^{\varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2} y^{\varepsilon_2} x^{\varepsilon_2 j_2 + \varepsilon_3 j_3} y^{\varepsilon_3} \cdot \ldots \cdot x^{\varepsilon_{k-1} j_{k-1} + \varepsilon_k j_k} y^{\varepsilon_k} x^{\varepsilon_k j_k}.$$

Дальнейшее редуцирование $\varphi(w)$ возможно, только когда некоторая степень x, стоящая между множителями y равна нулю, т.е. $\varepsilon_{t-1} j_{t-1} + \varepsilon_t j_t = 0$ для некоторого t. Тогда либо $j_{t-1} = j_t = 0$ (как отмечалось выше, в этом случае рядом стоят символы y в одинаковых степенях), либо $j_{t-1} = j_t$, $\varepsilon_{t-1} = -\varepsilon_t$ и, значит, в слове w стоят рядом символы $s_t^{\varepsilon_t},\ s_t^{-\varepsilon_t}$, что противоречит неприводимости слова w. Таким образом, дальнейшее редуцирование слова $\varphi(w)$ в $F(x,\ y)$ невозможно и редуцирование закончено, т.е. мы получили редуцированную запись слова $\varphi(w)$. Мы видим, что редуцированное слово $\varphi(w)$ содержит k символов y^ε, поэтому $\varphi(w) \neq 0$. Следовательно, $\ker\varphi = \{e\}$, т.е. φ – инъективный гомоморфизм.

Таким образом, свободная группа с двумя свободными образующими содержит подгруппы, которые являются свободными группами с любым конечным или даже счетным множеством свободных образующих.

5.2 Копредставление группы

Пусть $G =< S >$ – группа с множеством образующих S. Согласно универсальному свойству свободной группы существует единственный сюръективный гомоморфизм Φ свободной группы $F(S)$ на группу G, соответствующий тождественному отображению φ множества S на себя. Применение Φ к формальному слову из $F(S)$ заключается в вычислении этого слова в группе G. Обозначим через H ядро гомоморфизма Φ, H состоит их всех несократимых слов в алфавите S, которые равны e группе G. Пусть L – такое множество соотношений из H (т.е. несократимых слов в алфавите X, лежащих в H), что H – наименьшая нормальная подгруппа в $F(X)$, содержащая L. Подгруппа H однозначно определяется множеством L: H состоит из всевозможных произведений элементов, сопряженных элементам из L или обратным элементам к элементам из L, т.е. множество элементов вида $ul^\varepsilon u^{-1},\ l \in L,\ u \in F(X),\ \varepsilon = \pm 1$, является множеством образующих подгруппы H. Множество L называется системой **определяющих соотношений** группы G над S. По теореме о гомоморфизмах $F(S)/H \cong G$, поэтому задание множества S и множества слов L определяет группу G с точностью до изоморфизма.Такое описание группы G называется **заданием группы образующими и определяющими соотношениями,** или, более кратко, **копредставлением** группы G. Иногда копредставление записывается так: $G = (S||L)$. Определяющие соотношения часто записываются в виде $f = e$, где $f \in L$, а также в виде равенства двух слов $f = g$ в группе G. Последнее означает, что один из элементов $fg^{-1}, \ gf^{-1}$ содержится в L. Группы, допускающие копредставление с конечным множеством определяющих соотношений L, называются **конечно определенными.**

Пример. Пусть $G = (S||L)$, где $S = \{a, b\}, \ L = \{a^2, \ b^2, \ (ab)^2\}$. Покажем, что группа G изоморфна четверной группе Клейна B_4. Напомним, что группа B_4 состоит из элементов $\{e, \ a, \ b, \ c\}$ с таблицей умножения $a^2 = b^2 = c^2 = e, \ ab = c, \ ac = b, \ bc = a$, группа B_4 коммутативна (так как $x^2 = e$ для любого $x \in B_4$). Элементы $a, \ b$ порождают группу B_4. Применим универсальное свойство свободной группы для тождественного отображения $\varphi : S \longrightarrow S$. Пусть $H_1 = ker\Phi$. Для соответствующего сюръективного гомоморфизма $\Phi : F(S) \longrightarrow B_4$ $\Phi(a) = a, \ \Phi(b) = b, \ \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) = ab = c$. Пусть $H_1 = ker\Phi$. Обозначим через H наименьшую нормальную подгруппу в $F(S)$, содержащую множество L. Надо показать, что $H_1 = H$. Это будет означать, что L – множество определяющих соотношений для B_4. Так как в группе B_4 $\Phi(a^2) = a^2 = e, \ \Phi(b^2) = b^2 = e, \ \Phi((ab)^2) = (\Phi(ab))^2 = c^2 = e$, то $a^2, \ b^2, \ (ab)^2 \in H_1$. Поскольку H – наименьший нормальный делитель, содержащий L, то $H \subset H_1$. Обратно, $(\bar{a})^2 = (\bar{b})^2, (\bar{a}\bar{b})^2 = e$ в факторгруппе $G = F(S)/H$. Поэтому $\bar{a} = \bar{a}^{-1}, \ \bar{b} = \bar{b}^{-1}, \ \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$, следовательно, G – абелева группа. Отсюда следует, что смежный класс по подгруппе H любого слова из $F(S)$ совпадает с одним из смежных классов $e, \ \bar{a}, \ \bar{b}, \ \bar{a}\bar{b}$. Таким образом, $|G| \leq 4$. С другой стороны, $|G| = |F(S)/H| = |(F(S)/H_1)/(H_1/H)| = |B_4|/|H_1/H| = 4|H_1/H|$. Отсюда получаем, что $|H_1/H| = 1$, т.е. $H_1 = H$.

Замечание. Приведенное рассуждение часто применяется для нахождения определяющих соотношений. Предположим, что в группе G с множеством образующих S выполняются соотношения $L, \ L \subset F(S)$. Пусть H – наименьшая нормальная подгруппа свободной группы $F(S)$, содержащая L. Пусть $\Phi : F(S) \longrightarrow G$ - эпиморфизм, как в теореме 1. Очевидно, $H \subset Ker \ \Phi$. По основной теореме о гомоморфизмах Φ индуцирует эпиморфизм $\Phi^* : F(S)/H \longrightarrow G$. Следовательно, если $|G| = n$ и $|F(S)/H| \leq n$, то $G \cong F(S)/H$ и, значит, $G = (S||L)$, т. е. L – множество определяющих соотношений группы G над S.

Примеры.

1) Покажем, что группу S_3 можно задать образующими $a,\ b$ и определяющими соотношениями $a^2=e,\ b^2=e,\ (ab)^3=e$, т.е. множество определяющих соотношений $L=\{a^2,\ b^2,\ (ab)^3\}$. Действительно, обозначим через $a,\ b$ транспозиции $(1,2),\ (1,3)$. Так как $(1,2),\ (1,3),\ (2,3)$ – образующие группы S_3 и $(2,3)=bab$, то $S=\{a,\ b\}$ – система образующих группы S_3. Легко проверить, что в S_3 $a^2=e,\ b^2=e, (ab)^3=e$. Пусть H – наименьшая нормальная подгруппа $F(S)$, содержащая $L,\ G=(S||L)$. Группа G имеет две образующие a и b. Покажем, что $|G|\le 6$. Любой элемент $g\in G$ имеет вид $g=a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k},\ n_i,\ m_i\in\mathbb{Z}$. Так как $a^2=b^2=e$, то $a=a^{-1},\ b=b^{-1}$, поэтому можно считать, что $0\le n_i,\ m_i\le 1$. Таким образом, в группе G есть элементы $e,\ a,\ b,\ ab,\ ba$. Элементов длины 3 может быть не больше одного: $aba=a(ab)^{-1}=a(ab)^2=a(ab)(ab)=bab$. Покажем, что новых элементов длины 4 нет. Действительно, элементы длины 4 могут иметь вид $abab$ или $baba$, но $abab=(ab)^2=(ab)^{-1}=ba$ и $baba=(ba)^2=(ba)^{-1}=ab$, т. е. они имеют длину 2. Так как в G нет элементов длины 4, то нет элементов и большей длины. Таким образом, $|G|\le 6$. Итак, S_3 порождается элементами $a,\ b$, в S_3 выполняются соотношения L, группа $G=(a,\ b||a^2,\ b^2,\ (ab)^3)$ имеет не более 6 элементов. Применяя замечание, получаем, что $S_3=(a,\ b||a^2,\ b^2,\ (ab)^3$.

2) Может оказаться, что определяющие соотношения таковы, что единственная группа, в которой они выполняются, состоит только из единичного элемента. Рассмотрим пример. Пусть группа G задается образующими $x,\ y$ и определяющими соотношениями $x^4=e,\ yx^3=x^2y,\ xy^5=y^6x$. Из второго соотношения получаем $yx^3y^{-1}=x^2$. Возведем в квадрат, $yx^6y^{-1}=x^4=e$. Отсюда $x^6=e$, но по условию $x^4=e$, следовательно, $x^2=e$. Теперь из второго соотношения получаем $yx^3=y$. Откуда $x^3=e$. Так как $x^2=e$, то $x=e$ Теперь из третьего определяющего соотношения получаем $y^5=y^6$, т.е. $y=e$. Итак, $x=y=e$, следовательно, $G=\{e\}$.

3) Если в некоторой группе K, порожденной множеством S, выполняются соотношения $L\subset F(S)$, $F(S)$ – свободная группа, то гомоморфизм $\varphi: F(S)\longrightarrow K$, тождественный на S, индуцирует сюръективеый гомоморфизм $\varphi^*: G=(S||L)\longrightarrow K$. Покажем, как это может быть использовано. Пусть $G=(x,\ y\ ||\ x^2=y^2=e)$.

a) Будет ли группа G коммутативной? Рассмотрим группу S_3. Эта группа порождается транспозициями $x=(1,\ 2),\ y=(2,\ 3)$ (см. пример 1). Так как $x^2=y^2=e$ в S_3, то существует сюръективный гомоморфизм G на S_3. Поскольку S_3 неабелева, то и G – неабелева группа.

b) Будет ли группа G бесконечной? Рассмотрим группу D, порожденную двумя отражениями $\sigma_a,\ \sigma_b$ относительно двух прямых a и b на плоскости, пересекающихся в точке O. Выберем прямые так, чтобы угол α между ними не был рациональным кратным числа π, например, $\alpha = \pi\sqrt{2}$. Произведение отражений $\sigma_a\sigma_b$ является поворотом плоскости на угол 2α вокруг точки пересечения прямых. В силу выбора α $(\sigma_a\sigma_b)^n \neq 1$ для любого целого числа n. Следовательно, группа D бесконечна. Так как группа D порождается элементами $\sigma_a,\ \sigma_b$ и $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = 1$, то существует сюръективный гомоморфизм $\varphi : G \longrightarrow D,\ \varphi(x) = \sigma_a,\ \varphi(y) = \sigma_b$. Так как группа D бесконечна, то и G бесконечна.

4) *Группа кос* $B_n,\ n > 1$ задается образующими $\sigma_1, \ldots,\ \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, когда $|i-j| > 1$, и $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ (группа B_2 – свободная группа с одним свободным образующим элементом, т.е. бесконечная циклическая группа). Группа S_n порождается транспозициями $\tau_i = (i,\ i{+}1),\ i = 1, \ldots, n{-}1$. Легко проверить, что τ_i удовлетворяют всем определяющим соотношениям для σ_i в B_n (проверьте!). Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм $\varphi : B_n \longrightarrow S_n,\ \varphi(\sigma_i) = \tau_i$. Можно показать, что, добавляя к определяющим соотношениям группы B_n соотношение $\sigma_1^2 = 1$, получим определяющие соотношения группы S_n.

Группа кос была введена Э. Артином. Она играет важную роль в топологии "малой размерности"(low-dimensional topology) и, в частности, в теории узлов. Вообще, теория групп, заданных образующими и определяющими соотношениями, возникла в связи с проблемами топологии, и топологические методы играют в ней ключевую роль.

5.3 Упражнения

5.3.1. Доказать, что
a) группа S_n порождается транспозициями $(1,2),\ (1,3), \ldots, (1,n)$;
b) группа S_n порождается транспозицией $(1,2)$ и циклом $(1,2,\ldots,n)$;
c) группа A_n порождается циклами длины 3.

5.3.2. Доказать, что группа $SL_n(F),\ F$ – поле, порождается трансвекциями $E + \alpha E_{ij}, \alpha \in F$ (см. пример).

5.3.3. Доказать, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $E + \alpha E_{ij}, \alpha = \pm 1$. (Отсюда следует, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$ конечно порождена.

5.3.4. Пусть $G = GL_2(\mathbb{C}),\ S = \{a,\ b\}$, где $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Подгруппа Q в G, порожденная множеством S называется *группой ква-*

терционов.
Доказать, что
a) Q – неабелева группа порядка 8;
b) каждая подгруппа в Q нормальна.
c) показать, что группы Q задается образующими $x,\ y,\ z,\ t$ и опеделяющими соотношениями $t^2 = 1,\ x^2 = y^2 = z^2 = t,\ xy = z,\ yz = x,\ zx = y.$

5.3.5. *Группой диэдра* D_n называется подгруппа группы ортогональных преобразований плоскости, порожденная отражениями относительно двух прямых, расположенных под углам π/n. Доказать, что
a) D_n имеет порядок $2n$;
b) группа симметрий правильного n-угольника изоморфна группе D_n.

5.3.6. Показать, что группа диэдра D_n задается образующими $a,\ b$ и определяющими соотношениями $L = \{a^2,\ b^2,\ (ab)^n\}$.

5.3.7. Доказать, что группа S_3 имеет копредставление $(a,\ b||a^2,\ b^3,\ (ab)^2)$.

5.3.8. Показать, что знакопеременная группа A_4 задается образующими $a = (2\ 3\ 4), b = (1\ 2)(3\ 4)$ и определяющими соотношениями $L = \{a^3,\ b^2, (ab)^3\}$.

5.3.9. Доказать, что для группы $B_4 = (a,\ b||a^2,\ b^2, (ab)^2)$ разрешима проблема слов. (Указание: описать алгоритм редукции смежного класса слова g по наименьшей нормальной подгруппе H свободной группы $F(a,\ b)$, содержащей слова $a^2,\ b^2,\ (ab)^2$, к нормальному виду $e,\ \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}\bar{b}$. Два слова определяют один элемент группы B_4 тогда и только тогда, когда их смежные классы приводятся к одному каноническому виду.)

5.3.10. Доказать, что для группы D_3 разрешима проблема слов. (Указание: найти канонический вид смежных классов слов свободной группы $F(a,\ b)$ по наименьшей нормальной подгруппе H, содержащей определяющие соотношения $a^2,\ b^2, (ab)^3$ и описать алгоритм приведения к каноническому виду.)

Список литературы

[1] Сборник задач по алгебре. Семестр 3./ Сост. С.А. Кириллов. - Н.Новгород: ННГУ, 1997.-34 с.

[2] Сборник задач по алгебре./Под ред. А.И. Кострикина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 464 с.

[3] Кострикин А. И. Введение в алгебру. - М.: Наука, 1977. - 496 с.

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ II

Составители:
Михаил Иванович **Кузнецов**
Ольга Александровна **Муляр**
Наталья Георгиевна **Чебочко**

Практикум

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л.
Заказ № . Тираж 50 экз.
Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01