Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехник, М.К.Потапов

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

В книге собрано более 1700 задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах на 13 факультетах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в 1984-1989 и в 1992-1994 годах.

Многие задачи сопровождаются подробными решениями, остальные снабжены ответами.

Эта книга является непосредственным продолжением книги под тем же названием, изданной издательством "Наука" в 1986 году и содержащей задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в МГУ в 1977-1983 годах.

Для преподавателей и учащихся старших классов средней школы, для руководителей и участников математических кружков.

Содержание

Факультет	Задачи	Ответы и решения
§ 1. Механико-математический факультет	3	197
§ 2. Факультет вычислительной математики и кибернетики	21	240
§ 3. Физический факультет	38	290
§ 4. Химический факультет	54	327
§ 5. Биологический факультет	69	359
§ 6. Факультет почвоведения	83	388
§ 7. Географический факультет	96	410
§ 8. Геологический факультет (отделение геофизики)	111	436
§ 9. Геологический факультет (отделение общей геологии)	128	470
§ 10. Экономический факультет (отделение политической экономии)	135	487
§ 11. Экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики)	151	518
§ 12. Факультет психологии	166	545
§ 13. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики)	180	571
Дополнение. Варианты заданий, предлагавшиеся в 1992-1994 годах	592	623

Часть I

Задачи

Введение

В книге содержатся задачи, предлагавшиеся в 1984–1989 и в 1992–1994 годах на вступительных экзаменах в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Книга состоит из двух частей. В первой из них собрано более 1700 задач. Они сгруппированы по факультетам, годам и вариантам так, как предлагались во время вступительных экзаменов. В рамках каждого варианта задачи, как правило, расположены по возрастанию трудности.

Вторая часть книги содержит решение задач по одному варианту на каждый факультет и год. Кроме того, там содержатся ответы к задачам остальных вариантов. В начале второй части книги содержатся очень краткие замечания теоретического характера.

Мы считаем необходимым отметить, что все предлагавшиеся задачи являются продуктом коллективного труда многих сотрудников МГУ, и мы ни в коей мере не претендуем на их авторство. В условия некоторых задач мы внесли незначительные поправки.

В книге используются обычные обозначения, подчеркнем лишь два очень часто употребляемых в рукописи обозначения.

1) Знак $\perp$ обозначает перпендикулярность либо прямых, либо плоскостей, либо прямой и плоскости.

2) Знак $\parallel$ обозначает параллельность либо прямых, либо плоскостей, либо прямой и плоскости.

Авторы.

§1. Механико-математический факультет

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

3. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нем отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найти площадь треугольника ABC. Представить приближенное значение этой площади в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x + 1}. \end{cases}$$

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC, длина которой равна 9 см, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что длина отрезка AE меньше длины отрезка EC. Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D'. Получившийся многогранник $ABCDA'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, длина стороны которого равна 2 см. Найти площадь треугольника ABD, если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD'.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$|2x + 5| = |x| + 2.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\sin 3\pi x}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \pi x} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{7}$ на числовой прямой.

3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Прямая, проведенная из точки D перпендикулярно к биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC, пересекает прямую AC в точке K, а прямая, проведенная из точки D перпендикулярно биссектрисе угла B треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E. Найти длину отрезка AD, если длина отрезка AE равна 2 см, а длина отрезка AK равна 8 см.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_6(3+2x)\cdot\log_6(6-y) = 1+\log_6(4x+y), \\ \sqrt{x^2+3y} = x+y. \end{cases}$$

5. В основании призмы лежит четырехугольник $ABCD$, диагональ которого является его осью симметрии. AA', BB', CC', DD' — боковые ребра призмы. Длины отрезков AC, BD и AA' соответственно равны 26 см, 14 см и 13 см. Некоторая плоскость пересекает ребра BB' и DD', и в сечении этой плоскостью призмы получается правильный шестиугольник. Найти объем призмы.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$x^2 - 4x = |x-4|.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 3\pi x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\pi x} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{8}$ на числовой прямой.

3. Из середины M гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и не пересекающий ни одного из катетов. На нем отложен отрезок MK, длина которого равна половине длины отрезка AC. Длина отрезка KB равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найти площадь треугольника ABC. Представить приближенное значение этой площади в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 3^{1-y} - 3^{5-x} = 3^{2y-x+3}, \\ \sqrt{2y^2+6-xy} = \sqrt{6-3y}. \end{cases}$$

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC, длина другой диа-

гонали BD основания равна 5 см, а точка E пересечения этих диагоналей делит отрезок AC так, что отношение длины отрезка AE к длине отрезка EC равно 3. Через некоторую точку бокового ребра $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающая боковые ребра SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D'. Получившийся многогранник $ABCDA'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику. Найти площадь этого шестиугольника, если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD'.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$|x| = |7 - 2x| + 3.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\sin 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{11}$ на числовой прямой.

3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Прямая, проведенная из точки D перпендикулярно к биссектрисе внешнего угла B треугольника ABC, пересекает прямую AB в точке M, а прямая, проведенная из точки D перпендикулярно к биссектрисе угла C треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K. Найти длину отрезка AK, если длина отрезка AM равна 16 см, а длина отрезка AD равна 8 см.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5(5 + 2x) \cdot \log_5(1 + 4y) - \log_5(3x - 2y + 7) = 3, \\ \sqrt{y^2 - 2x} = y - x. \end{cases}$$

5. В основании призмы лежит четырехугольник $ABCD$, диагональ BD которого является его осью симметрии. AA', BB', CC', DD' — боковые ребра призмы. Длины отрезков DB, AC и DD' соответственно равны 14 см, 10 см и 7 см. Некоторая плоскость пересекает ребра AA' и CC', и в сечении этой плоскостью призмы получается правильный шестиугольник. Найти площадь четырехугольника $DD'B'B$.

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$6 \sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34 \sin x - \frac{35}{36}}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{|x|-1}\geqslant\frac{2}{x-1}.$$

3. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из точки A, если длины сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

4. Из трех значений a: $-1{,}2$; $-0{,}67$; $-0{,}66$ найти все те значения, при каждом из которых уравнение

$$(2^{a+4}+15(x+a))\left(1+2\cos\left(\pi\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0\leqslant x\leqslant 1$.

5. На плоскости α, проходящей через центр шара радиуса R, задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1, расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A, принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R. Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью радиуса r_2, плоскость которой образует угол φ с плоскостью α. Найти расстояние между точками A и O_1.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$6\cos x-\frac{1}{3}=\sqrt{32\cos x-\frac{17}{9}}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1}\geqslant\frac{1}{|x|-1}.$$

3. Окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E. Точка A лежит между точками B и D, а точка C — между точками B и E. Найти площадь треугольника ABC, если длины сторон AB и AC соответственно равны 13 и 1, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

4. Из трех значений p: $0{,}24\pi$; $0{,}26\pi$; $0{,}6\pi$ найти все те значения, при каждом из которых уравнение

$$\left(\frac{p-5x}{\pi}+\log_3\frac{3p}{\pi}\right)(6\sin(p-x)-\sqrt{18})=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<x<\frac{\pi}{3}$.

5. На плоскости α, проходящей через центр шара радиуса R, задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1, расположенная

внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A, принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R. Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью с центром O_2 и радиусом r_2. Найти расстояние от точки O_2 до плоскости α, если расстояние между точками A и O_1 равно a.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\cos(\sqrt{x}+\pi)+1=0.$$

2. Окружность радиуса 1 см касается окружности радиуса 3 см в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса в точке B. Найти длину отрезка AC, если длина отрезка AB равна $2\sqrt{5}$ см.

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а автомобилист — в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 15 минут, автомобилист приехал в город в 11 часов, а мотоциклист приехал в село в 12 часов 15 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 часов 15 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

5. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx-y-az^2=0, \\ (b-6)x+2by-4z=4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x,y,z).

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, длина стороны AB равна 4 см, длина стороны BC равна 8 см, а величина угла ABC равна 60°. Длина ребра SB равна $8\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые AD и BC можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием

пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin\left(\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}=0.$$

2. Окружность радиуса 2 см касается окружности радиуса 4 см в точке B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса в точке C. Найти длину отрезка BC, если длина отрезка AC равна $3\sqrt{2}$ см.

3. Решить неравенство

$$3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x}\leqslant\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}\log_3 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее чем по грунтовой дороге в $1\frac{1}{2}$ раза, а мотоциклист — в $1\frac{2}{3}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

5. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x-by+az^2=0, \\ 2bx+(b-6)y-8z=8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x,y,z).

6. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QR и ST параллельны, длина стороны QR равна 6 см, длина стороны QT равна 4 см, а величина угла RQT равна $120°$. Длина ребра PQ равна $2\sqrt{14}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos(\sqrt{x}-\pi)+1=0.$$

2. Окружность радиуса 3 см касается окружности радиуса 5 см в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность большего радиуса в точке B, а меньшего радиуса в точке C. Найти длину отрезка AB, если длина отрезка BC равна $2\sqrt{5}$ см.

3. Решить неравенство

$$7^{\frac{1}{4}\log_7^2 x} \leqslant \frac{1}{7}x^{\frac{2}{7}\log_7 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 8 часов утра выехал мотоциклист, и одновременно с ним из города в село выехал автомобилист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее чем по грунтовой дороге в $1\frac{2}{3}$ раза, а мотоциклист — в $1\frac{1}{2}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 9 часов 30 минут, мотоциклист приехал в село в 10 часов 40 минут. Определить, сможет ли мотоциклист приехать в город до 10 часов 50 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

5. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} 2bx + y = a, \\ (1-b)x + by - z - z^2 = 0 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AB и CD параллельны, длина стороны AD равна 6 см, длина стороны CD равна 8 см, а величина угла ADC равна $120°$. Длина ребра SD равна $5\sqrt{7}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые AB и CD можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin\left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} = 0.$$

2. Окружность радиуса 4 см касается окружности радиуса 6 см в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность большего радиуса в точке B, а меньшего радиуса в точке A. Найти длину отрезка BC, если длина отрезка AB равна $3\sqrt{2}$ см.

3. Решить неравенство

$$5^{\frac{1}{4}\log_5^2 x} \geqslant 5x^{\frac{1}{5}\log_5 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 6 часов утра выехал мотоциклист, и одновременно с ним из города в село выехал автомобилист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее чем по грунтовой дороге в $1\frac{1}{2}$ раза, а автомобилист — в $1\frac{2}{3}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 10 часов 30 минут, мотоциклист приехал в город в 14 часов, а автомобилист приехал в село в 16 часов 30 минут. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 30 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

5. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x - by = 2a, \\ bx - (b+2)y + 2z + z^2 = 0 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

6. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QT и RS параллельны, длина стороны ST равна 4 см, длина стороны RS равна 2 см, а величина угла RST равна $60°$. Длина ребра PS равна $4\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды, если известно, что через прямые QT и RS можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4 см, причем $AC = BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 см и 3 см соответственно. Найти косинус угла DBC.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой — на

20 км/час, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

5. Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

6. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найти длину отрезка KL, если $MN = 7$ см, $NK = 5$ см, $LN = 2\sqrt{29}$ см и $KL = LM$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{1}{2\cos x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2 + 2x + 16 - 2\sqrt{55}) < 2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник PQR окружности равен 5 см, причем $RP = RQ$. На прямой PQ взята точка A, удаленная от прямых PR и QR на расстояния 12 см и 2 см соответственно. Найти косинус угла AQR.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/час, а другой — на 9 км/час, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа позже. Найти скорости поездов.

5. Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

6. Сфера касается ребер AS, CS, AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках P, Q, R и T соответственно. Найти длину отрезка QT, если $PQ = PR = 8$ см, $PT = \sqrt{82}$ см и QT на 7 см больше, чем RT.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{1}{2\sin x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{8}-\sqrt{3}}(x^2 - 4x + 14 - 4\sqrt{6}) < 2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4 см, причем $AB = BC$. На прямой AC взята точка P, удаленная от прямых AB и CB на расстояния 9 см и 1 см соответственно. Найти косинус угла PCB.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой — на 20 км/час, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 4 часа раньше. Найти скорости поездов.

5. Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x-ay) + 2(x+y) = 2(x-ay+2), \\ x^2 + y^2 - bxy - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

6. Сфера касается ребер BS, CS, CA и AB треугольной пирамиды $SABC$ в точках D, E, G и H соответственно. Найти длину отрезка EH, если $DE = EG = 8$ см, $GH = 6$ см, и $HD = 4$ см.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{15}-\sqrt{8}}(x^2 - 2x + 23 - 4\sqrt{30}) < 2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник PQR окружности равен 5 см, причем $PQ = QR$. На прямой PR взята точка T, удаленная от прямых PQ и QR на расстояния 13 см и 3 см соответственно. Найти косинус угла TRQ.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/час, а другой — на 9 км/час, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 1 час позже. Найти скорости поездов.

5. Найти все пары значений параметров a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2y)^2 + a(x-2y) = x - 2y + a, \\ x^2 + 4y^2 - bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

6. Сфера касается ребер AS, CS, AB и BC треугольной пирамиды $SABC$ в точках D, E, F и G соответственно. Найти длину отрезка FG, если $DE = DF = 8$ см, $DG = 3\sqrt{11}$ см и FG на 2 см больше, чем GE.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$$

3. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, равного $80°$, пересекает сторону RS в точке L. Найти радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $PQ = 7$.

4. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos\dfrac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD. Найти угол ACB, если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

5. Два мотоциклиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

6. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{z^2}, \\ \cos x \cdot \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sin 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{8x-12x^2} 8^{-x} > 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла при вершине B, равного $160°$, пересекает сторону CD в точке E. Найти радиус окружности, касающейся отрезка AB и лучей AD и BE, если известно, что $AB = 5$.

4. Угол между скрещивающимися прямыми KL и MN равен $\arccos\frac{3}{4}$. Точки P и Q являются серединами отрезков KL и MN соответственно, а прямая PQ перпендикулярна прямым KL и MN. Найти угол KNL, если известно, что $KL = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $MN = 2\sqrt{3}$ и $PQ = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Два велосипедиста стартовали раздельно в одной точке стадиона в гонке на 20 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел треть круга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда велосипедисты были рядом. Когда через 2 минуты он вернулся, велосипедисты снова были рядом. Если бы первый велосипедист после $8\frac{2}{3}$ кругов увеличил скорость в 2 раза, а второй после 9 кругов — в 1,5 раза, то они финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали велосипедисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 4 кругов.

6. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{(z-1)^2}, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{(x-y)^2}{a^2}, \\ \sin(x+y) = \dfrac{2(x-y)}{a(z-1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x} + \sin 2x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{-3x-2x^2} 2^x > 0.$$

3. В параллелограмме $KLMN$ угол при вершине K равен $70°$, а биссектриса угла при вершине L пересекает сторону MN

в точке E. Найти радиус окружности, касающейся отрезка KL и лучей KN и LE, если известно, что $KL = 6$.

4. Точки R и S являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая RS перпендикулярна прямым AB и CD. Найти угол между скрещивающимися прямыми AB и CD, если известно, что угол ACB равен $\arccos\frac{19}{35}$, $AB = 6$, $CD = 10$ и $RS = \sqrt{3}$.

5. Два бегуна стартовали раздельно в одной точке стадиона в беге на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел четверть круга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда бегуны были рядом. Когда через 18 минут он вернулся, бегуны снова были рядом. Если бы первый бегун после девятого круга увеличил скорость в 2 раза, а второй после восемнадцатого круга — в 4 раза, то оба бегуна закончили бы бег одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали бегуны, если пришедший вторым пробегал за минуту менее круга.

6. Найти все значения b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{(z+1)^2}, \\ \cos y \cdot \sin x = \dfrac{4(x+y)^2}{b^2}, \\ \cos(x-y) = \dfrac{4(x+y)}{b(z+1)} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos 2x} + \sin 2x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{-5x^2-6x} 6^x > 0.$$

3. В параллелограмме $PQRS$ угол при вершине Q равен $110°$, а биссектриса угла при вершине P пересекает сторону RS в точке L. Найти радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $PQ = 9$.

4. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найти угол между скрещивающимися прямыми AB и CD, если известно, что угол ACB равен $\arccos\frac{5}{7}$.

5. Два бегуна стартовали раздельно в одной точке стадиона в беге на 25 кругов, причем второй начал движение, когда

первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда бегуны были рядом. Когда через 13 минут он вернулся, бегуны снова были рядом. Если бы первый бегун после третьего круга увеличил скорость в 2 раза, а второй бегун после десятого круга — в три раза, то оба бегуна финишировали бы одновременно. Определить, с какой разницей во времени финишировали бегуны, если закончивший бег вторым пробегал за минуту менее круга.

6. Найти все значения b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{z^2}, \\ \cos y \cdot \sin x = \dfrac{4(x-y)^2}{(b+\pi)^2}, \\ \cos(x+y) = \dfrac{4(x-y)}{(b+\pi)z} \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

1989

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{\log_3\left(\frac{5}{2} - x\right) + \log_3 2} \leqslant 0.$$

3. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$, а угол M равен $120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найти площадь треугольника KLN.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

5. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найти объем этого шара.

6. Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4|\sin x| - 4\cos 2x + 3 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x - \frac{1}{2} - \sqrt{1 + 2x - x^2}}{\lg(3x+1) - \lg\frac{5}{2}} \geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ длины сторон AD и CD равны соответственно 8 и 5. Прямая BC касается окружности, описанной около треугольника ABD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y - 2\log_y x = -1, \\ 3x^2y^2 + 2 = 5x^2. \end{cases}$$

5. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 3$, $BC = 5$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE, BE, CF, DF, EF касаются некоторого шара. Найти площадь поверхности этого шара.

6. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz + yz = 3.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{5}{2}\sin^2 x - 2 = |\cos x|.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{7 - 2x - x^2} + x}{\log_2\left(\frac{3}{2} - x\right) + \log_2\frac{2}{3}} \leqslant 0.$$

3. В трапеции $KLMN$ стороны KN и LM параллельны, а угол L равен $90°$. Прямая LM касается окружности, описанной около треугольника KMN. Найти площадь трапеции $KLMN$, если $MN = 1$, $KN = \sqrt{3}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = -\dfrac{5}{2}, \\ 3 - \sqrt{xy} = 2\sqrt{y}. \end{cases}$$

5. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $PQ = 6$, $KL = 4$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, MQ, NQ, PQ касаются некоторого шара. Найти площадь поверхности этого шара.

6. Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy - xz + yz = 2.$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x - 1 - \sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2}}{\lg(4x+1) - \lg 5} \geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD равна 2, угол C равен $45°$, причем прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$

5. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 2$, $AB = 4$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE, BE, CF, DF, EF касаются некоторого шара. Найти объем этого шара.

6. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

§2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

1984

Вариант 1

1. Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b(a^2 b)$.

2. Решить уравнение

$$9\cos 3x \cdot \cos 5x + 7 = 9\cos 3x \cdot \cos x + 12\cos 4x.$$

3. В трапеции $ABCE$ длина основания AE равна 16, а длина боковой стороны CE равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C, пересекает прямую AE в точке H. Величина угла AHB равна $60°$. Найти длину отрезка BH.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4.$$

5. Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z+30 = 0, \\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)+y+z-3yz-2 = 0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[4; 7]$.

6. Многогранник имеет 6 граней $ABCK$, $EMPH$, $ABME$, $BCPM$, $CKHP$, $AKHE$. Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCK$ и $EMPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно 2. Известно, что $AB : CK = EM : PH \neq 1$, площадь грани $EMPH$ равна 5, а объем многогранника равен $\frac{98}{15}$. Найти длину ребра BM.

Вариант 2

1. Известно, что $\log_b a = 6$. Найти $\log_a(b^3 a)$.

2. Решить уравнение

$$6\cos 5x \cos 7x + \frac{1}{3} = \cos 2x(8\cos 4x - 1) + 2\cos 6x.$$

3. В трапеции $KPMH$ длина боковой стороны MH равна $7\sqrt{2}$. Окружность, проходящая через точки K, P, M, пересекает прямую KH в точке E. Длина отрезка PE равна 14, а величина угла PEK равна $45°$. Найти длину основания KH.

4. Решить неравенство

$$-3 + \log_2 x^6 < \sqrt{7 + \log_2 x^2}.$$

5. Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^3+x^2(24-2y-2z)+x(80-yz-10y-10z)+65-9y-9z-4yz=0, \\ 2x^3+x^2(14-2y-2z)-x(4+yz)-30+5y+5z+yz = 0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[3; 5]$.

6. В многограннике 6 граней $ABCE$, $HKMP$, $ABKH$, $BCMK$, $CEPM$, $AEPH$. Грани $ABCE$ и $HKMP$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми 6. Все вершины многогранника лежат на сфере радиуса $\sqrt{68}$. Найти длину ребра AH, если известно, что $AB : CE = HK : MP \neq 1$, площадь грани $ABCE$ равна 4, а объем многогранника равен $\frac{21}{2}$.

Вариант 3

1. Известно, что $\log_a b = 5$. Найти $\log_b(ab^2)$.

2. Решить уравнение

$$5\cos 16x \cos 8x = 13\cos 12x + 5\sin 10x \sin 2x - 7.$$

3. В трапеции $ABCH$ длина боковой стороны AB равна $5\sqrt{2}$, а длина основания AH равна 10. Окружность, проходящая через точки B, C, H, пересекает прямую AH в точке K. Величина угла CKH равна $45°$. Найти длину отрезка CK.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{6 - 10\log_3 x^2} + \log_3(3x^{10}) > 0.$$

5. Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(10-y-z)+x(4y+4z-2yz-49)+7yz-10y-10z+68=0, \\ x^3+x^2(14-y-z)-x(5+2yz)-yz+2y+2z-12=0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[6; 8]$.

6. В многограннике 6 граней $ABCM$, $EKPH$, $ABKE$, $BCPK$, $CMHP$, $AMHE$. Грани $ABCM$ и $EKPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми 1. Все вершины многогранника лежат на сфере радиуса $\sqrt{41}$. Известно, что $AB : CM = EK : PH \neq 1$, объем многогранника равен $\frac{61}{3}$, а площадь грани $ABCM$ равна 25. Найти длину ребра BK.

Вариант 4

1. Известно, что $\log_b a = 4$. Найти $\log_a a^2b^2$.

2. Решить уравнение

$$8\sin x \sin 5x + 6(\cos 4x + \cos 7x \cos x) + \cos 6x + \frac{17}{3} = 0.$$

3. В трапеции $PEKH$ длина боковой стороны KH равна $6\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки P, E, K, пересекает прямую PH в точке M. Длина отрезка ME равна 12, а величина угла PME равна $60°$. Найти длину основания PH.

4. Решить неравенство

$$2\log_3 x^2 < 6 + \sqrt{22 + \log_3 x^{12}}.$$

5. Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^3-x^2(2y+2z-18)-x(yz+6y+6z-38)-y-z-3yz+7=0, \\ 2x^3-x^2(2y+2z-8)+x(4y+4z-yz-26)+2yz+3y+3z-14=0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[3; 6]$.

6. В многограннике 6 граней $ABCH$, $EKMP$, $ABKE$, $BCMK$, $CHPM$, $AHPE$. Все вершины многогранника лежат на сфере радиуса $\sqrt{53}$. Грани $ABCH$ и $EKMP$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми 5. Найти длину ребра AE, если известно, что $AB : CH = EK : MP \neq 1$, объем многогранника равен $\frac{335}{21}$, а площадь грани $EKMP$ равна 7.

1985

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 6^x\cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

2. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30°. Вычислить, что больше: длина основания QR или длина стороны RS.

3. Решить уравнение

$$4 - \cos[2\pi(13x+9)^2] = 5\sin[\pi(13x+9)^2].$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2\log_{1-3|x|}(42x^2-14|x|+1)}{\log_{1-3|x|}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2} \leqslant 1.$$

5. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17} + \\ + \sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4} = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 15, а длина отрезка MD равна 10. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7\cdot 2^x - 5^y = 7, \\ 2^x\cdot 5^y = 14. \end{cases}$$

2. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 10, длина основания AD равна 13, а величина угла ABC равна 135°. Выяснить, что больше: длина стороны AB или длина диагонали BD.

3. Решить уравнение

$$3\cos[2\pi(5x+3)^2] - 7 = 4\cdot\cos[\pi(5x+3)^2].$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 2.$$

5. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4} + \\ + \sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1} = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 12, а длина отрезка MD равна 8. Известно, что радиус шара, описанного около тетраэдра $ABCD$, равен $6\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $192\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x - 3\cdot 5^y = 3, \\ 9^x\cdot 5^y = 18. \end{cases}$$

2. В трапеции $PQRS$ длина основания PS равна 8, длина диагонали PR равна 5, а величина угла PRQ равна 45°. Выяснить, что больше: длина стороны RS или длина диагонали PR.

3. Решить уравнение

$$11 - 14\sin[\pi(6x-5)^2] = 3\cos[2\pi(6x-5)^2].$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1-2|x|}(28x^2-12|x|+1)}{\log_{1-2|x|}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

5. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{3x^2 - 2z^2 + 2y^2 + 2z - 6y + \frac{\sqrt{2}}{4}x - 41 + \sqrt{2x^2 - 4\sqrt{2}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 16}} = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что длина отрезка LC равна 9, а длина отрезка MD равна 6. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{3}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $81\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x \cdot 3^y = 15. \end{cases}$$

2. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 8, длина основания AD равна 5, а величина угла ABC равна $150°$. Выяснить, что больше: длина основания AD или длина диагонали BD.

3. Решить уравнение

$$3 + \cos[\pi(17x - 8)^2] = 2\cos[2\pi(17x - 8)^2].$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\log_{1-9x^2}(|x| - 2)^2}{2\log_{1-9x^2}\left(14x^2 + 4x + \frac{1}{4}\right)} \leqslant 1.$$

5. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{2x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 11\sqrt{6}x + 2y + 6z + \sqrt{2\sqrt{6}x^2 + 3\sqrt{6} - 12x\cos \pi y \cos \pi z}} = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L, M так, что длина отрезка LC равна 6, а длина отрезка MD равна 4. Известно, что радиус шара, описанного около тетраэдра $ABCD$, равен $3\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $24\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

1986

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_3(x+2)+\log_3(x-4)-1\leqslant 0.$$

2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x-5y=17$ и наименее удаленной от начала координат.

3. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

4. В окружности радиуса $R=4$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

5. Решить уравнение

$$\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x.$$

6. Найти все значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x)=\left|4\cdot\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}+(c+2d)\cdot 2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+2c+d\right|$$

на отрезке $[-1;1]$ является наименьшим.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_5[(x+1)(x+3)]\leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $-4x-3y=25$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

4. В окружности радиуса $R=\sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP. В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом в $60°$. Найти длину медианы QD треугольника MQN.

5. Решить уравнение

$$2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6.$$

6. Найти все значения a и b, при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left|\frac{9}{4}\cdot\frac{5^x + 5^{-x} - 2}{5^x + 5^{-x} + 2} + (a-b)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5^x - 1}{5^x + 1} + 2a + b\right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_2(x+5) \leqslant 1 - \log_2(x-3).$$

2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $7x + 5y = 37$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Завод, выпускающий ЭВМ трех типов, перевыполнил план, который составлял 130 ЭВМ. ЭВМ первого типа было изготовлено в два раза больше, чем ЭВМ третьего типа, а количество произведенных ЭВМ второго типа кратно числу ЭВМ третьего типа. При увеличении производства ЭВМ второго типа в три раза их число превосходило бы количество произведенных ЭВМ первого типа на 34. Сколько ЭВМ сверх плана выпустил завод?

4. В окружности радиуса $R = 2\sqrt{3}$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{12}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

5. Решить уравнение

$$3 + \sin\frac{15x}{4}\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos 3x.$$

6. Найти все значения a и b, при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left|\frac{25}{9}\cdot\frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + (a-2b)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 2a - b\right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_6[(x-1)(x-5)] \leqslant 1.$$

2. Найти координаты точки, лежащей на прямой $-2x + 5y = 29$ и наименее удаленной от начала координат.

3. В классе выписывают три журнала, причем общее количество выписываемых экземпляров меньше 30. Число подписчиков

на "Квант" кратно числу подписчиков на "Советское фото", которых, в свою очередь, в пять раз меньше, чем подписчиков на журнал "Ровесник". Если число выписываемых "Квантов" увеличится в четыре раза, то их станет на 21 больше, чем количество выписываемых "Ровесников". Сколько учеников в классе выписывают журнал "Квант"?

4. В окружности радиуса $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ проведены хорда MN и диаметр MP. В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом в 45°. Найти длину медианы QD треугольника MQN.

5. Решить уравнение

$$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \cdot \sin x.$$

6. Найти все значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left|\frac{16}{9}\cdot\frac{7^x + 7^{-x} - 2}{7^x + 7^{-x} + 2} + (c-d)\frac{4}{3}\cdot\frac{7^x - 1}{7^x + 1} + 2c - 3d\right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

1987

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geqslant 9\frac{1}{4}.$$

4. Решить уравнение

$$(2 + 3\cos 2x)(\sqrt{2\cos 2x + 3\sin x + 3} - 2\sin x + 1) = 0.$$

5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC; O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4 \cdot OL = 3 \cdot OK, \quad 25 \cdot ON = 24 \cdot OM,$$

$$DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + y = 1, \\ 4x - 15 = 2y\sqrt{x}. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$\sqrt{6} \cdot a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = -2a?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_9(x-2) + \log_{(x-2)^2}\sqrt{3} \geqslant 1\frac{3}{10}.$$

4. Решить уравнение

$$(4\sin x + 1 + \sqrt{3 + 5\cos 2x - 16\sin x})(1 + 3\cos 2x) = 0.$$

5. Из пункта A в пункт B по железной дороге нужно перевезти 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого их которых 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона — 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

6. В пирамиде $KNLM$ проведено сечение $ABCD$ так, что точка A лежит на ребре KN, точка B — на ребре LN, точка C — на ребре LM, точка D — на ребре MK. Сечение $ABCD$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$3 \cdot BN = 4 \cdot BL, \quad 3 \cdot MC = 2 \cdot CL,$$

$$3 \cdot DK \cdot AK - 2 \cdot AN \cdot DM = DM \cdot AK.$$

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2y = 5, \\ y(3 + \sqrt{x}) = 2(x + 2). \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2 + 6a + \sqrt{2} = 2\sqrt{3}a?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+2)^3} 4 + 2\log_8(x+2) \geqslant 2\frac{5}{6}.$$

4. Решить уравнение

$$(3 + 5\cos 2x)(2 - 4\sin x + \sqrt{3 - 2\cos 2x + 5\sin x}) = 0.$$

5. С одного берега реки на другой нужно переправить паромом 18 комбайнов и 120 машин. Вес машины 2,8 тонны, комбайна — 14 тонн, грузоподъемность парома 56 тонн. На пароме можно разместить 24 машины; комбайн занимает место 9 машин. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех комбайнов и машин.

6. В пирамиде $KNLM$ проведено сечение $ABCD$ так, что точка A лежит на ребре KN, точка B — на ребре NL, точка C — на ребре ML, точка D — на ребре KM; Q — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Сечение $ABCD$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$2{\cdot}AQ = 3{\cdot}QC, \quad BQ = 2{\cdot}QD,$$

$$NB{\cdot}LC - BL{\cdot}MC = BL{\cdot}CL.$$

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 8 - 3y, \\ y(\sqrt{x} - 2) = x - 2y - 4. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2 - 2\sqrt{5}a + \sqrt{3} = -2a?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решить неравенство

$$\log_{27}(x-1) + \frac{1}{2}\log_{(x-1)^3} 9 \geqslant 2\frac{8}{21}.$$

4. Решить уравнение

$$(\sqrt{5 - 3\cos 2x - 8\sin x} + 4\sin x + 1)(1 + 4\cos 2x) = 0.$$

5. С завода нужно вывезти на железнодорожных платформах 18 больших и 270 малых станков. Вес большого станка 15 тонн, малого — 1,5 тонны, грузоподъемность платформы — 54 тонны.

На платформе помещается 40 малых станков; большой станок занимает место 15 малых. Найти минимальное число платформ, достаточное для вывоза всех станков.

6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка L — на ребре BC, точка N — на ребре AB. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$5 \cdot KD = 6 \cdot AK, \quad 5 \cdot BN = 3 \cdot NA,$$

$$4 \cdot LC \cdot MC - 3 \cdot BL \cdot DM = 2 \cdot BL \cdot MC.$$

1988

Вариант 1

1. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

2. Решить уравнение

$$\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1).$$

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет 75°. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$8^x \geqslant 6 \cdot 9^{|x-1|}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2+x)\lg a\right)\lg\left(\frac{36a - 9a^2}{35}\right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит (-1).

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью P. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости P и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью P равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\frac{4}{5}$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O

равно 15. Найти расстояние от точки O до плоскости P, если известно, что оно больше 14.

Вариант 2

1. Найти сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого, пятого, седьмого и шестнадцатого членов этой прогрессии равна 32.

2. Решить уравнение

$$\cos 5x - \cos x = \sin 3x(2\cos 4x + 1).$$

3. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найти острые углы треугольника KMP.

4. Решить неравенство

$$25^{x+1} \geqslant 10\cdot 32^{|x-1|+1}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left((4x-a)\sqrt{11a-a^2-18}+(x^2-x)\lg(3a-1)\right)\lg\left(\frac{36a-4a^2}{65}\right)=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой больше либо равен единице.

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью P. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий большего радиуса. Каждый шар касается двух других шаров, плоскости P и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью P равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\frac{2}{3}$. Расстояния от центров меньших шаров до точки O равны 16. Найти расстояние от точки O до плоскости P, если известно, что оно больше 15.

Вариант 3

1. Найти сумму первых восемнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма пятого, седьмого, одиннадцатого и пятнадцатого членов этой прогрессии равна 20.

2. Решить уравнение

$$\sin 8x - \sin 4x = \sin 2x(2\cos 3x + 1).$$

3. Точка H является серединой хорды AB окружности с центром O. На диаметре окружности, который параллелен хорде AB, выбрана точка C так, что угол ACB равен 90°. Известно,

что $AB = 4\sqrt{5}$, а угол CHO равен $60°$. Найти радиус окружности.

4. Решить неравенство

$$5^{3x} \geqslant 50 \cdot 2^{7|x-1|}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left((3x-a)\sqrt{10a-a^2-21}+(x^2-2x)\lg(2a-1)\right)\lg\left(\frac{28a-4a^2}{45}\right)=0.$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой больше либо равен двум.

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью P. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости P и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью P равен $\frac{1}{4}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\frac{5}{6}$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 18. Найти расстояние от точки O до плоскости P, если известно, что оно больше 20.

Вариант 4

1. Найти сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого, седьмого, девятого и четырнадцатого членов этой прогрессии равна 40.

2. Решить уравнение

$$\sin 9x + \sin x = 3\sin 5x(2\cos 2x - 1).$$

3. В окружности радиуса $3\sqrt{7}$ проведена хорда $KM = 12$. На диаметре окружности, который параллелен хорде KM, выбрана точка P так, что угол KPM равен $90°$. Найти острые углы треугольника KPM.

4. Решить неравенство

$$25^{x+1} \geqslant 15 \cdot 27^{|x-1|+1}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left((x+a)\sqrt{6a-a^2-5}-(x^2+2x)\lg(4a-1)\right)\lg\left(\frac{20a-4a^2}{21}\right)=0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит (-2).

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью P. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий большего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости P и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью P равен $\frac{\sqrt{10}}{20}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\frac{2}{3}$. Расстояния от центров меньших шаров до точки O равны 18. Найти расстояние от точки O до плоскости P, если известно, что оно больше 20.

1989

Вариант 1

1. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиуса $\sqrt[4]{10}$?

2. Решить уравнение

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33.$$

3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

4. Решить неравенство

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}\right)-$$
$$-\sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB.

Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше 30°, а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Вариант 2

1. Можно ли разместить круг радиуса $\sqrt[3]{17}$ внутри правильного треугольника со стороной $2\sqrt[6]{11}$?

2. Решить уравнение

$$6\sqrt{81x^2 + 54x + 45} + 6x + 9x^2 = 35.$$

3. Для вспашки трех совершенно одинаковых полей выделено три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на $\frac{1}{2}$ часа раньше второго, а третий — на $\frac{1}{3}$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьего трактора оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы второго трактора закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?

4. Решить неравенство

$$1 \leqslant |\sin x|^{\sqrt{1-2x}\cdot \log_{|\sin x|}\left(\frac{(3+|\operatorname{tg} x|)\cos^2 x}{8\cos^2 x - 2}\right)}.$$

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)} + \\ + \log_\pi\left(\frac{\pi^2+p^2+4}{2(p-\pi)|x+2| - x^2 - 4x + 2\pi p}\right) = 0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SKLM$ основание H высоты SH находится на медиане LO основания KLM. Точка E на ребре SK и точка F на ребре SM расположены так, что $LE \perp SK$, $LF \perp SM$. Известно, что $SO = 5\sqrt{21}$, $KM = 15$, $EF = \frac{63}{\sqrt{37}}$, тангенс угла SOL равен $\sqrt{3}$, а расстояние от точки O до середины ребра SL не превосходит $35\sqrt{\frac{3}{16}}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SKLM$.

Вариант 3

1. Можно ли разместить круг радиуса $\sqrt[3]{5}$ внутри правильного треугольника со стороной 6?

2. Решить уравнение

$$7\sqrt{16x^2+16x+20}+4x+4x^2=27.$$

3. Вниз по реке от пристани A к пристани B отплыл плот. Вслед за ним через $\frac{1}{2}$ часа от пристани A отплыла лодка, а еще через 1 час — катер. Плот, лодка и катер двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после отплытия катера оказалось, что к этому моменту все они преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше плота прибыл к пристани B катер, если плот прибыл к пристани B на 15 минут позже лодки?

4. Решить неравенство

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x+3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2|\cos x|}{8\sin^2 x-4}\right)}.$$

5. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{\pi^2+b^2+4}{2x\pi-x^2+2(2-b)|x-\pi|+4b}\right)-$$
$$-\sqrt{(x-3b+10-3\pi)(|x-5|-b+\pi-3)}=0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SKLM$ основание H высоты SH лежит на медиане MN основания KLM. Точка O на высоте SH, точка P на ребре SK и точка T на ребре SL расположены так, что $OS=OH=OP=OT=7\sqrt{2}$. Известно, что $PT=\frac{28}{\sqrt{5}}$, $KL=56$, косинус угла MNS не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а расстояние между серединами сторон KL и SM равно $7\sqrt{26}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SKLM$.

Вариант 4

1. Можно ли разместить прямоугольный треугольник с углом 30° и прилежащим катетом $\sqrt{6}$ внутри круга радиуса $\sqrt[4]{5}$?

2. Решить уравнение

$$5\sqrt{27+54x-81x^2}+6x-9x^2=31.$$

3. Для уборки зерна на трех совершенно одинаковых полях выделено три комбайна различной производительности. Каждое поле убирается одним комбайном. Первый комбайн начал работу на $\frac{3}{4}$ часа раньше второго и на $\frac{5}{4}$ часа раньше третьего. Уборка полей велась комбайнами равномерно и без остановок. Через

некоторое время после начала работы третьего комбайна оказалось, что к этому моменту каждый из комбайнов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы третьего комбайна закончил работу второй, если первый всю работу выполнил на 24 минуты позже второго?

4. Решить неравенство

$$1 \leqslant |\sin x|^{\sqrt{1-x}\cdot\log_{|\sin x|}\left(\frac{(1+|\operatorname{ctg} x|)\sin^2 x}{4\sin^2 x-1}\right)}.$$

5. Найти все значения параметра q, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{(|x+2|+q-2\pi+2)(x-3q+20)}+$$
$$+\log_\pi\left(\frac{2\pi^2+q^2}{2(q-\pi)|x+\pi|-x^2-2\pi x+2\pi q}\right)=0$$

имеет целочисленное решение.

6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH находится на медиане BM основания ABC. Точка P на ребре SC и точка Q на ребре SA расположены так, что $BP \perp SC$, $BQ \perp SA$. Известно, что $SM = 10\sqrt{\frac{7}{3}}$, $AC = 10$, $PQ = \frac{42}{\sqrt{37}}$, угол SMB равен $60°$, а расстояние от точки M до середины ребра SB не превосходит $\frac{35}{\sqrt{12}}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

§3. Физический факультет

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0.$$

2. Решить уравнение

$$4 \log_{25} 5x = 5 - \log_5^2 x.$$

3. Решить неравенство

$$2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leqslant 16 - 2x^3.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0$$

принадлежат отрезку $[0; 4]$.

5. Куб целиком находится в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S так, что одна грань куба принадлежит основанию пирамиды, одно ребро куба целиком принадлежит грани SBC, а грани SAB и SAC содержат по одной вершине куба. Известно, что длина ребра AB в k раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и куба.

6. Две окружности радиусов r и R $(r < R)$ внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найти длину отрезка CD.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{2 \sin x}{3 + 2 \cos x} = \operatorname{ctg} x.$$

2. Решить уравнение

$$(3 \log_{27} 27x) \log_3 x = 2(\log_3 x + 1).$$

3. Решить неравенство

$$x^4 + 3^{x+4} \geqslant x^4 \cdot 3^x + 81.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$3|x + 2a| - 3a + x - 15 = 0$$

принадлежат отрезку $[4; 9]$.

5. Правильная треугольная призма целиком находится в правильной четырехугольной пирамиде так, что нижнее основание призмы принадлежит основанию пирамиды, а две вершины верхнего основания призмы находятся на апофемах пирамиды. Известно, что длины всех ребер призмы равны, а длина стороны основания пирамиды в m раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и призмы.

6. В полукруг помещены две окружности диаметров d и D ($d < D$) так, что любая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через центры окружностей проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке M. Из точки M проведена касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найти длину отрезка MN.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{3+\sin x} - \operatorname{tg} x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$2\log_7 49x + 4\log_{49}^2 x = 19.$$

3. Решить неравенство

$$27 + x^3 \cdot 3^x \geqslant 3^{x+3} + x^3.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$4|x-3a| + 6a - 24 + x = 0$$

принадлежат отрезку $[6; 12]$.

5. Прямоугольный параллелепипед целиком находится в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S так, что его нижнее основание принадлежит основанию пирамиды, одно ребро параллелепипеда целиком принадлежит грани SBC, а апофемы граней SAB и SAC содержат по одной вершине параллелепипеда. Известно, что длина высоты параллелепипеда равна длине меньшего ребра его основания, а длина ребра AB в n раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и параллелепипеда.

6. Две окружности радиусов r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) с центрами L и M внешним образом касаются друг друга и изнутри в точках A и B касаются третьей окружности. Прямые AB и LM пересекаются в точке K. Из точки K проведена касательная к третьей окружности (P — точка касания). Найти длину отрезка KP.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\frac{3\sin x}{3\cos x - 4} - \operatorname{ctg} x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$(2\log_{49} x)\log_7 7x = 3 - \log_7 x.$$

3. Решить неравенство

$$2^{x+2} + 2x^2 \leqslant x^2 \cdot 2^x + 8.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$2|2x - a| + a + 2x - 8 = 0$$

принадлежат отрезку $[1; 4]$.

5. Правильная треугольная призма целиком находится в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S так, что нижнее основание призмы принадлежит основанию пирамиды, одна вершина верхнего основания призмы принадлежит ребру SA, а другие вершины верхнего основания призмы находятся на гранях SBC и SCD. Известно, что длины всех ребер призмы равны, а длина ребра AB в k раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и призмы.

6. В полукруг помещены две окружности радиусов r и R $(r < R)$ так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через точки касания окружностей с дугой полукруга проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке K. Из точки K проведена касательная к дуге полукруга (L — точка касания). Найти длину отрезка KL.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\cos x}{3 + 2\sin x}.$$

2. Решить уравнение

$$(6\log_8 x - 1)\log_2 x = 6 + \log_2^2 x.$$

3. Решить неравенство

$$x^3 \cdot 2^x - 64 \geqslant (2x)^3 - 2^{x+3}.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$6|x + a| - 3a - 30 + 2x = 0$$

принадлежат отрезку $[5; 9]$.

5. Куб целиком находится в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S так, что одна грань куба принадлежит основанию пирамиды, одна вершина куба находится на апофеме

грани SBC, а грани SAC и SAB содержат по одной вершине куба. Известно, что длина ребра BC в m раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и куба.

6. Две окружности диаметров d и D $(d < D)$ с центрами B и C внешним образом касаются друг друга, а в точках A и M они касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AM и BC пересекаются в точке E. Из точки E проведена касательная к третьей окружности (F — точка касания). Найти длину отрезка EF.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{3 - \cos x} + \operatorname{ctg} x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$(\log_5 5x) \log_{25} x = 5 - \log_5 x.$$

3. Решить неравенство

$$49 + x^2 \cdot 7^x \leqslant x^2 + 7^{x+2}.$$

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$4|x + 3a| - 6a + x - 24 = 0$$

принадлежат отрезку $[7; 12]$.

5. Прямая треугольная призма целиком находится в правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S так, что нижнее основание призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания призмы находятся на ребре SA и апофемах граней SBC и SCD. Известно, что длина высоты призмы равна длине меньшей стороны основания призмы, а длина ребра CD в n раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объемов пирамиды и призмы.

6. В полукруг помещены две окружности радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$ с центрами A и B так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через точки касания окружностей с дугой полукруга проведена прямая, пересекающая прямую AB в точке C. Из точки C проведена касательная к дуге полукруга (D — точка касания). Найти длину отрезка CD.

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos 2x.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 9x < 3.$$

4. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0.$$

5. Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Найти величину угла ASB и указать все значения параметра a, при каждом из которых задача имеет решение.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты AM и CN, точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что величина угла ABC равна β, а площадь четырехугольника $NOMB$ равна S. Найти длину стороны AC.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4\sin^2 x + \cos 4x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$x + \sqrt{x^4 - 2} = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_5 \frac{x}{5} + \log_{\frac{1}{25}} x < 1.$$

4. При каждом значении параметра b решить уравнение

$$25^x + b^2(b-1)5^x - b^5 = 0.$$

5. Окружность, вписанная в правильный треугольник LMN, является сечением сферы, центр которой находится в точке O. Отношение площади полной поверхности пирамиды $OLMN$ к площади поверхности сферы равно k. Найти величину угла OLM и указать все значения параметра k, при каждом из которых задача имеет решение.

6. В остроугольном треугольнике PQR ($PQ > QR$) проведены высоты PT и RS; QN — диаметр окружности, описанной около треугольника PQR. Известно, что величина острого угла между высотами PT и RS равна α, $PR = a$. Найти площадь четырехугольника $NSQT$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$6\cos^2\frac{x}{4} = \cos x + 5.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x - 16} = 2 - x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{8}} x + \log_2 4x < 4.$$

4. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$9^x + 9a(1-a)3^{x-2} - a^3 = 0.$$

5. Окружность, описанная около квадрата $PQRT$, является сечением сферы, центр которой находится в точке S. Отношение площади полной поверхности пирамиды $SPQRT$ к площади поверхности сферы равно m. Найти величину угла PSQ и указать все значения параметра m, при каждом из которых задача имеет решение.

6. В остроугольном треугольнике KLM $(KL > LM)$ проведены высоты KB и MA, точка O — центр описанной около треугольника KLM окружности. Известно, что величина угла KLM равна α, а площадь четырехугольника $OALB$ равна S. Найти радиус окружности, описанной около треугольника KLM.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos 4x + 6\sin^2 x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$2x + \sqrt{12 - x^4} = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_3\frac{x}{9} - \log_{\frac{1}{27}} x < 2.$$

4. При каждом значении параметра b решить уравнение

$$49^x - b^2(b+1)7^x + b^5 = 0.$$

5. Сфера с центром в вершине O правильной пирамиды $OKLM$ касается сторон основания KLM. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно b. Найти величину угла OKL и указать все значения параметра b, при каждом из которых задача имеет решение.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты HK и CM; BD — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Известно, что величина острого угла между высотами AK и CM равна β, $BD = \alpha$. Найти площадь четырехугольника $DMBK$.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x.$$

2. Решить неравенство

$$x - 1 > \frac{4x}{3-x}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$x\log_2(x^2) + 1 = 2x + 2\log_4 x.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3:5$, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. В треугольнике ABC проведены высота AH длины h, медиана AM длины l и биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найти расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x}\cdot 8^{-4}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x+4}{x+1} > 2 - x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \sin 2x - 2 = 0, \\ 2^y = x. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$3x\log_3 x + 2 = \log_{27}(x^3) + 6x.$$

5. На ребре LM треугольной пирамиды $SKLM$ взята точка A, делящая отрезок LM в отношении $7:3$, считая от точки L. Плоскость проходит через точки A и S параллельно медиане MC треугольника SMK. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. Из вершины M треугольника KLM проведены высота MH длины h, медиана MP и биссектриса MN. Точка N — середина отрезка PH. Расстояние от вершины M до точки пересечения высот треугольника KLM равно m. Найти длину биссектрисы MN.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4x^2}{3}} = 81^x \cdot 3^{-8}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{9-2x}{2-x} < x + 4.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 + \sin 2x - 2\sin^2 x = 0, \\ 5^y = x. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$7 + 3x\log_7 x = 14\log_{49}(x^3) + x.$$

5. На ребре FD треугольной пирамиды $SDEF$ взята точка Q, делящая отрезок FD в отношении $4:3$, считая от точки F. Плоскость проходит через точки S и Q параллельно медиане DM треугольника SDE. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. Из вершины F треугольника DEF проведены высота FH длины h, медиана FM и биссектриса FN. Точка N — середина отрезка MH. Расстояние от вершины F до точки пересечения высот треугольника DEF равно b. Найти длину медианы FM.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7-x^2}{2}} = 27^{2x}.$$

2. Решить неравенство

$$3 - x < \frac{5x}{x-2}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^y = x, \\ 2\sin x - \sin 2x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$3\log_5(x^2) + 3 = 4x\log_{25} x + x.$$

5. В треугольной пирамиде $SPQR$ на ребре SR взята точка M, делящая отрезок SR в отношении $3:2$, считая от точки S. Через точки M и Q параллельно медиане RN треугольника PQR проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. В треугольнике PQR проведены высота PH длины h, биссектриса PL длины d и медиана PM. Точка L — середина отрезка MH. Найти расстояние от вершины P до точки пересечения высот треугольника PQR.

1987

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{2x} \geqslant \frac{1}{1-x}.$$

2. Решить уравнение

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$$

3. Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

4. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 2x)}.$$

5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найти длину отрезка BD.

6. Шар радиуса 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиуса 1 касается

первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{81}{x} \geqslant x^3.$$

2. Решить уравнение

$$4^{2-\cos x} - 5\cdot 2^{1-\cos x} + 1 = 0.$$

3. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

4. Найти область определения функции

$$y = \log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - \frac{3x}{2}\right)\right).$$

5. Вне прямоугольного треугольника BCD (угол C — прямой) взята точка E так, что отрезок BE пересекает отрезок CD. Площадь каждого из треугольников BCE и CED в пять раз меньше площади треугольника BCD. Длины отрезков BE и ED равны соответственно b и d. Найти длину отрезка CE.

6. Шар радиуса 3 вписан в правильную треугольную пирамиду $SBCD$ с вершиной S. Второй шар радиуса 2 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-x} \geqslant \frac{1}{x}.$$

2. Решить уравнение

$$9^{\sin x} + 3\cdot 9^{2-\sin x} = 84.$$

3. Известно, что $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

4. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \log_4(x^2 - 3x)}.$$

5. Внутри прямоугольного треугольника CDE (угол D — прямой) взята точка F так, что площади треугольников CDF и DEF соответственно в четыре и в пять раз меньше площади треугольника CDE. Длины отрезков FC и FD равны соответственно c и d. Найти длину отрезка FE.

6. В правильную четырехугольную пирамиду $SBCDE$ с вершиной S вписан шар. Второй шар радиуса 6 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней DSE и ESB. Величина двугранного угла при ребре BE равна $\frac{\pi}{3}$. Найти радиус первого шара и объем пирамиды.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{16}{x^3} \leqslant x.$$

2. Решить уравнение

$$3^{\cos x - 1} + 3^{2 - \cos x} - 4 = 0.$$

3. Известно, что $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\frac{4\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$.

4. Найти область определения функции

$$y = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + \frac{2x}{3}\right) - 1\right).$$

5. Вне прямоугольного треугольника DEF (угол E — прямой) взята точка A так, что отрезок AF пересекает отрезок DE. Площадь каждого из треугольников AED и AEF в четыре раза меньше площади треугольника DEF. Длины отрезков AD и AF равны соответственно m и n. Найти длину отрезка AE.

6. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S вписан шар. Второй шар радиуса 12 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSA. Величина двугранного угла при ребре AC равна $\frac{\pi}{3}$. Найти радиус первого шара и объем пирамиды.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 8\sin x = 3.$$

2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найти длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M, такой, что $\frac{DM}{MC} = 2$. Известно, что величина угла CAM равна α. Найти величину угла BAD.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол ACB — прямой, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC. В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $\frac{8\pi}{3}$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + 4\cos x = \cos 2x.$$

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота CD. Величина угла BAC равна α. Радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, равен R. Найти площадь треугольника ABC.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{-x^2 - 6x + 8} - x = 6.$$

4. В параллелограмме $PQRS$ величина угла QPS равна α. Биссектриса угла QPS пересекает сторону QR в точке A, такой, что $QA/AR = 3$. Найти величину угла между биссектрисой PA и диагональю PR.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0, \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Боковые грани треугольной пирамиды $SKLM$ (S — вершина) образуют равные двугранные углы с основанием KLM. Известно, что $KL = LM = 5$, $KM = 6$, $SL = \frac{\sqrt{41}}{2}$. В пирамиду вписан цилиндр так, что нижнее основание цилиндра находится

в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $\frac{4\pi}{3}$. Найти объем цилиндра.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$4\sin x + \cos 2x + 3 = 0.$$

2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, проходящей через середины катетов и вершину прямого угла, равен R. Найти площадь треугольника.

3. Решить уравнение

$$x + 5 = \sqrt{-x^2 - 8x + 9}.$$

4. В параллелограмме $KLMN$ биссектриса угла MNK пересекает сторону KL в точке Q, такой, что $\frac{LQ}{QK} = \frac{1}{3}$. Известно, что величина угла LNQ равна α. Найти величину угла LKN.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(xy - x - y + 1) + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ xy + y - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. В треугольной пирамиде $SPQR$ (S — вершина) угол PRQ — прямой, $PR = 3$, $PQ = 5$, $SR = \sqrt{27}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию PQR. В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $\frac{12\pi}{5}$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найти объем цилиндра.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$8\cos x = 5 + \cos 2x.$$

2. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL = LM$) проведена высота KN. Величина угла LKM равна α. Радиус окружности, проходящей через точки K, L и N, равен R. Найти площадь треугольника KLM.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{-x^2 - 4x + 30} - x = 4.$$

4. В параллелограмме $BCDE$ величина угла BCD равна α. Биссектриса угла BCD пересекает сторону BE в точке F, такой, что $\frac{BF}{FE} = \frac{3}{2}$. Найти величину угла между биссектрисой CF и диагональю CE.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y - x + xy = 0, \\ (x + 2a - 4)y - ax + 5 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Боковые грани треугольной пирамиды $SDEF$ (S — вершина) образуют равные двугранные углы с основанием DEF. Известно, что $DE=FE=5$, $DF=6$, $SE=\frac{\sqrt{61}}{2}$. В пирамиду вписан цилиндр так, что нижнее основание цилиндра находится на основании пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $\frac{20}{9}\pi$. Найти высоту цилиндра.

1989

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 5x - \sin x = \sqrt{8}\cos 3x.$$

2. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найти длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

3. Решить уравнение

$$\log_2(x + 4) + 2\log_2\sqrt{x} = 5.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

5. Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение

$$(2x)^2 - 4x(m\cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

6. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D; N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найти:

а) радиус окружности, описанной около треугольника ACD;

б) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \sqrt{7}\sin 2x.$$

2. В треугольнике известна длина a одной из сторон и величины α и β прилежащих к ней углов. Найти площадь треугольника.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x-6) = 4.$$

4. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$4(x - \sqrt{p\cdot 4^p})x + 4(4^p - 1) + p = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях p.

6. Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей радиусов R и r пересекает их общую касательную в точке C (A между B и C, M и N — точки касания). Найти:

а) радиус окружности, проходящей через точки A, M и N;

б) отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin x = \sqrt{6}\cos x.$$

2. В остроугольном треугольнике известны величины α и β двух углов A и B и длина h высоты, опущенной из вершины B. Найти площадь треугольника.

3. Решить уравнение

$$2\log_3\sqrt{x} + \log_3(x+6) = 3.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение высоты пирамиды к стороне основания равно 2. Найти отношение радиуса описанного около пирамиды шара к апофеме пирамиды.

5. Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение

$$(2x)^2 - 4x(m\cdot 5^m)^{\frac{1}{2}} + 5^{m+1} + m - 5 = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

6. Общая касательная к двум пересекающимся окружностям радиусов R и r (A и B — точки касания) пересекает продолжение их общей хорды MN в точке D (N между D и M). Найти:

а) радиус окружности, описанной около треугольника AMB;

б) отношение высот треугольников AMD и DMB, опущенных из вершины D.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos 5x + \cos x = \sqrt{5}\cos 2x.$$

2. В треугольнике известны величины α и β углов A и B и длина a стороны, противолежащей углу A. Найти площадь треугольника.

3. Решить уравнение

$$\log_3(x-8) + \frac{1}{2}\log_3 x^2 = 2.$$

4. В правильной треугольной пирамиде отношение апофемы пирамиды к стороне основания равно 2. Найти отношение радиуса описанного около пирамиды шара к стороне основания пирамиды.

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$4(x - \sqrt{p\cdot 7^p})x + p + 7(7^p - 1) = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях p.

6. Через точки C и D проходят две окружности радиусов R и r. Прямая CD пересекает их общую касательную в точке M (K и L — точки касания, D — между M и C). Найти:

а) радиус окружности, проходящей через точки K, D и L;

б) отношение расстояний от точки M до прямых KD и DL.

§4. Химический факультет

1984

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geqslant 0.$$

2. Из пункта A в пункт B выходит поезд. В момент прибытия этого поезда в B оттуда выходит другой поезд, который следует в A. Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, в $4\frac{1}{6}$ раза превышает время, которое затратили бы поезда до момента встречи, если бы вышли одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорости обоих поездов постоянны, причем скорость второго поезда на 20 км/час превышает скорость первого поезда. Чему равна скорость каждого поезда?

3. Найти все точки максимума функции

$$f(x) = x^2(6\sin 2x - 8\cos 2x) + x(6\cos 2x + 8\sin 2x) + \\ + 3\sin 2x - 4\cos 2x.$$

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S, у которой длина бокового ребра в $\sqrt{2}$ раз меньше длины ребра основания, вписана правильная треугольная пирамида $S'A'B'C'$, у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости ABC, а вершины A', B', C' лежат на трех апофемах боковых граней пирамиды $SABC$. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения медиан треугольника ABC, и найти отношение площадей полных поверхностей этих пирамид.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2||x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)\cdot|x-2| + \frac{1}{2}|a-2||x-a| \leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\log_2^2 x}{x^2-2} \geqslant 0.$$

2. Насос наполнял бак водой с постоянной производительностью. После того, как бак был наполнен, первый насос от-

ключили, и второй насос стал выкачивать из него воду также с постоянной производительностью. Время, прошедшее с начала работы первого насоса до момента, когда второй насос полностью опорожнил бак, в $4\frac{1}{12}$ раза превышает время, которое потребовалось бы этим насосам, чтобы наполнить бак, если бы они оба накачивали бы его с той же производительностью, что и раньше. Суммарная производительность насосов составляет 35 л/мин, причем производительность второго выше производительности первого. Найти производительность каждого насоса.

3. Найти все точки минимума функции

$$f(x) = x^2(45\sin 3x - 9\cos 3x) + x(30\cos 3x + 6\sin 3x) + \\ + (80\sin 3x - 16\cos 3x).$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S, у которой длины всех ребер равны между собой, вписана правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S', у которой длины всех ребер также равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$, а вершины A', B', C', D' лежат соответственно на ребрах SA, SB, SC и SD. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, и найти отношение объемов этих пирамид.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+3||x+a+6| + \left(|a+3| - \frac{a^2+6a+8}{|a+3|}\right)|x+3| - \\ - \frac{1}{2}|a+3||x-a| \geqslant -2$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-3x-1}}{\log_2 x^2} \geqslant 0.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. В момент прибытия его в B оттуда выехал велосипедист, который направился в A. Время, которое прошло от выезда из A мотоциклиста до прибытия туда велосипедиста, в 4,9 раза превышает время, которое затратили бы мотоциклист и велосипедист до момента встречи, если бы они выехали одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны, причем скорость мотоциклиста на 15 км/час превышает

скорость велосипедиста. Чему равны скорости мотоциклиста и велосипедиста?

3. Найти все точки максимума функции

$$f(x) = x^2(2\sin 2x - 4\cos 2x) + x(4\sin 2x + 2\cos 2x) + \\ + 9\sin 2x - 18\cos 2x.$$

4. В правильную пирамиду $SABC$, у которой длины всех ребер равны 3, вписана правильная треугольная пирамида $S'A'B'C'$ с вершиной S', у которой длина бокового ребра в $\sqrt{3}$ раз больше длины ребра основания. При этом вершина S' лежит в плоскости ABC, а вершины A', B', C' лежат соответственно на ребрах AS, BS и CS, и ни одна из них не совпадает с вершиной S. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения высот треугольника ABC, и найти площадь боковой поверхности пирамиды $S'A'B'C'$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-3||x+a-6| + \left(\frac{a^2-6a+8}{|a-3|} - |a-3|\right)|x-3| + \frac{1}{2}|a-3||x-a| \leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{\log_3^2(1-x)}{x^2-3} \geqslant 0.$$

2. Экскаватор роет котлован с постоянной производительностью. После того, как он закончил работу, второй экскаватор стал рыть такой же котлован также с постоянной производительностью. Время, которое затратили оба экскаватора на рытье двух котлованов, в $4\frac{1}{12}$ раза превышает время, которое затратили бы оба экскаватора, вырыв совместно один котлован. Первый экскаватор работает с большей производительностью, а суммарная производительность обоих экскаваторов составляет 70 м^3/час. Чему равна производительность каждого экскаватора?

3. Найти все точки минимума функции

$$f(x) = x^2(18\sin 3x - 45\cos 3x) + x(12\cos 3x + 30\sin 3x) + \\ + 68\sin 3x - 170\cos 3x.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S, у которой длина ребра основания равна 2, а длина бокового ребра равна $\sqrt{3}$, вписана правильная четырехугольная

пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S', у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$, а вершины A', B', C', D' лежат на четырех апофемах боковых граней пирамиды $SABCD$. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, и найти объем пирамиды $S'A'B'C'D'$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+2||x+a+4|+\left(|a+2|-\frac{a^2+4a+3}{|a+2|}\right)|x+2|-$$
$$-\frac{1}{2}|a+2|\cdot|x-a|\geqslant -2$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4(\sin 4x-\sin 2x)=\sin x(4\cos^2 3x+3).$$

2. Решить неравенство

$$7^{x-\frac{1}{8}x^2}<7^{1-x}(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6.$$

3. На координатной плоскости XOY рассматривается прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB лежит на оси ординат, вершина C лежит на параболе $y=x^2-4x+3$, вершина D лежит на параболе $y=-x^2+2x-2$, а абсцисса вершины D принадлежит отрезку $\left[\frac{4}{5};\frac{3}{2}\right]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наибольшей?

4. Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна 2 см, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{4}$. Шар, радиус которого равен $\sqrt{2}$ см, касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем пирамиды.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x-y|-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0,\\ (x-y)^2-6(x-y)\log_2(|x|+y+1)+5\log_2^2(|x|+y+1)=0.\end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4(\sin 6x + \sin 4x) = \cos x(4\sin^2 5x - 5).$$

2. Решить неравенство

$$5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x}\cdot(\sqrt[3]{5})^{x^2} + 24.$$

3. На координатной плоскости XOY рассматривается треугольник ABC, у которого вершина A совпадает с началом координат, вершина B лежит на параболе $y = 3x^2 - 10x + 2$, вершина C лежит на параболе $y = -2x^2 + 5x - 10$, сторона BC параллельна оси ординат, а абсцисса вершины B принадлежит отрезку $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{2}\right]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

4. Высота пирамиды равна 2 см, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна 8 см^2, а величина острого угла пирамиды равна $\frac{\pi}{6}$. Шар касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем шара.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |2x+y| + \log_3^2(|y|-2x+5) - 20 = 0, \\ (2x+y)^2 - 7(2x+y)\log_3(|y|-2x+5) - 8\log_3^2(|y|-2x+5) = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$4(\cos 5x + \cos 3x) = \cos x(4\cos^2 4x + 3).$$

2. Решить неравенство

$$2^{4x-\frac{1}{2}x^2} < 2^{2-4x}\cdot(\sqrt{2})^{x^2} + 3.$$

3. На координатной плоскости XOY рассматривается прямоугольник $ABCD$, у которого сторона AB лежит на оси ординат, вершина C лежит на параболе $y = 2x^2 - 3x + 5$, вершина D лежит на параболе $y = x^2 + 3x - 6$, а абсцисса вершины C принадлежит отрезку $\left[\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины C, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наибольшей?

4. Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна 4 см, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{3}$. Шар, радиус которого равен 3 см, касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем пирамиды.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12 - |x+y| - \log_2^2(|x| - y + 5) = 0, \\ (x+y)^2 - 5(x+y)\log_2(|x| - y + 5) + 4\log_2^2(|x| - y + 5) = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$4(\cos 5x - \cos 7x) = \sin x(4\sin^2 6x - 5).$$

2. Решить неравенство

$$3^{4x - \frac{2}{3}x^2} < 3^{2-4x}(\sqrt[3]{3})^{2x^2} + 8.$$

3. На координатной плоскости XOY рассматривается треугольник ABC, у которого вершина A совпадает с началом координат, вершина B лежит на параболе $y = 2x^2 - 5x + 6$, вершина C лежит на параболе $y = x^2 + 4x - 20$, сторона BC параллельна оси ординат, а абсцисса вершины C принадлежит отрезку $\left[\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

4. Высота пирамиды равна 1 см, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна $16\sqrt{2}$ см^2, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{4}$. Шар касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем шара.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 30 - \log_3^2(2|y| - x + 8) - |x + 2y| = 0, \\ (x+2y)^2 - 6(x+2y)\log_3(2|y| - x + 8) - 7\log_3^2(2|y| - x + 8) = 0. \end{cases}$$

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_2(x-3) = 1 - \log_2(x-2).$$

2. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

3. Найти все значения x из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, при каждом из которых производная функции

$$f(x) = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x\right]$$

обращается в нуль.

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC — точка D так, что длина отрезка AE равна 2, а длина отрезка CD равна 1. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если длина каждой из сторон AB и BC равна 8, а длина стороны AC равна 6.

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_3(x-8) = 2 - \log_3 x.$$

2. Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем два из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов: За какое время два комбайна могут убрать первое поле?

3. Найти все значения x из интервала $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, при каждом из которых производная функции

$$f(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x\right] \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

обращается в нуль.

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне AC — точка E так, что длина отрезка AE равна длине отрезка BD и равна 2. Прямые BE и CD пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника BOC, если длина каждой из сторон AB и BC равна 5, а длина стороны AC равна 6.

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2.$$

2. Четыре одинаковых экскаватора, работая вместе, вырыли первый котлован, а затем три из них вырыли второй котлован (другого объема). Вся работа заняла 17 часов. Если бы три экскаватора вырыли треть первого котлована, а затем два из них завершили всю работу, то оба котлована были бы вырыты за 28 часов. За сколько часов четыре экскаватора, работая вместе, могут вырыть оба котлована?

3. Найти все значения x из интервала $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, при каждом из которых производная функции

$$f(x) = (\cos x + \sin x)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

обращается в нуль.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D, а на стороне AC — точка E так, что длина отрезка BD равна 2, а длина отрезка AE равна 3. Прямые BE и AD пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $CDOE$, если длина каждой из сторон BC и AC равна 9, а длина стороны AB равна 8.

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|y-7|} = \sqrt{3|x|}, \\ 9x^2 + y^2 = 14y - 49 - 2a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 1.$$

2. Для наполнения двух бассейнов разного объема было выделено три одинаковых насоса. Сначала один насос наполнил первый бассейн, а затем все три насоса, работая вместе, наполнили второй бассейн. Вся работа заняла 16 часов. Если бы половину первого бассейна наполнили два насоса, а затем один насос завершил всю работу, то оба бассейна были бы наполнены

за 30 часов. За сколько часов наполнят второй бассейн все три насоса, работая вместе?

3. Найти все значения x из интервала $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, при каждом из которых производная функции

$$f(x) = (\cos x - \sin x)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

обращается в нуль.

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка D, а на стороне BC — точка F так, что длина отрезка AD равна 3, а длина отрезка BF равна 1. Прямые BD и AF пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника AOB, если длина каждой из сторон AB и AC равна 5, а длина стороны BC равна 6.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|x+5|} = 1 - \sqrt{7|y|}, \\ 8a - 25 - 10x = 49y^2 + x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(1 + 2\sin x)\sin x = \sin 2x + \cos x.$$

2. Решить неравенство

$$4\log_2 x + \log_2\left(\frac{x^2}{8(x-1)}\right) \leqslant 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x.$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = x^2 + 2x + 1$ в точке, абсцисса которой a удовлетворяет условию $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$. Найти значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E, такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO : OC = \gamma$. Найти разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что $\angle ADF = 90°$, а $AB = a$.

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + (1 + 2\cos x)\cdot\cos x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(2x^2 - x) - 1 \leqslant \log_3(6x - 3) - \log_3^2 x.$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = -x^2 + 6x - 9$ в точке, абсцисса которой b удовлетворяет условию $0 \leqslant b \leqslant \frac{5}{2}$. Найти значение b, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На ребре AS взята точка D, такая, что отрезок DB перпендикулярен ребру AS. Проекция O точки D на основание пирамиды лежит на отрезке AB и делит его в отношении $BO : OA = \lambda$. Найти разность объемов пирамид $SABC$ и $DABC$, если известно, что $\angle ACS = 90^\circ$, а $AD = b$.

5. Найти все значения параметра q, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(q - x^2)(q + 2x - 8) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(2\sin x - \sqrt{3})\sin x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(x - 2) - \log_3^2 x \geqslant 2\log_3(3x) + \log_3\left(\frac{x-2}{x}\right) - 8.$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 4$ в точке, абсцисса которой a удовлетворяет условию $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Найти значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием четырехугольной пирамиды $HABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре BH взята точка N так, что отрезок ND перпендикулярен ребру BH. Проекция O точки N на основание пирамиды лежит на отрезке BD и делит его в отношении $BO : OD = \gamma$. Найти разность объемов пирамид $HABCD$ и $NABC$, если известно, что $\angle BAH = 90^\circ$, а $NO = a$.

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(x^2 - p)(p - x - 2) > 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$(2\cos x - \sqrt{3})\cos x + \sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(4x - 20) + 10 \geqslant \log_2^2 x + \log_2(x^2 - 5x).$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y = -x^2 + 8x - 16$ в точке, абсцисса которой b удовлетворяет условию $0 \leqslant b \leqslant 2$. Найти значение b, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием треугольной пирамиды $FABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC. На ребре BF взята точка M, такая, что отрезок MC перпендикулярен ребру BF. Проекция O точки M на основание пирамиды лежит на отрезке BC и делит его в отношении $BO : OC = \lambda$. Найти разность объемов пирамид $FABC$ и $MABC$, если известно, что $\angle BAF = 90°$, а $MC = b$.

5. Найти все значения параметра q, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_5(x - 8)^2 = 2 + 2\log_5(x - 2).$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} + \sin x = 0.$$

3. Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к точке $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC равной 9 вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что длина отрезка AD равна длине отрезка DC и косинус угла BCA равен $\frac{2}{3}$. Найти длину стороны AC.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos x = \sqrt{-3\sqrt{3}\sin x - 4}.$$

3. Найти точку графика функции $y = 1 - 2x^2$, ближайшую к точке $\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC равной 11 вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Известно, что длина отрезка AC равна длине отрезка CD и косинус угла BAC равен $\frac{1}{6}$. Найти длину стороны AC.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a + 4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_3(x-7)^2 - 2 = 2\log_3(x-3).$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{5 + 7\cos x} = \sqrt{2}\sin x.$$

3. Найти точку графика функции $y = x^2 - \frac{3}{2}$, ближайшую к точке $(2; -1)$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC равной 11 вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Извест-

но, что длина отрезка AD равна длине отрезка DC и косинус угла BAC равен $\frac{3}{4}$. Найти длину стороны AC.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = 5a, \\ x + 2y = 2a + 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 + y^4 - 6x + 5 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - (3a^2 - 4a + 2)x + 2a + 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\log_2(x-7) + 2 = \log_2(x-13)^2.$$

2. Решить уравнение

$$2\cos x + \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \frac{1}{2}} = 0.$$

3. Найти точку графика функции $y = 2 - x^2$, ближайшую к точке $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC равной 6 вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что длина отрезка AD равна длине отрезка AC и косинус угла BCA равен $\frac{1}{5}$. Найти длину стороны AC.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 4y = 4a^2 + a, \\ x + ay = a + 4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 3y^4 - 8x + 15 = 0, \\ x^2 + y^2 + (a^2 - a - 10)x + 5a + 20 = 0. \end{cases}$$

1989

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{3x}{x-1} > 2.$$

2. Последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

3. Решить уравнение

$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0.$$

4. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A, точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Угол между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равен $45°$. Площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$ м^2. Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$.

5. Решить уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0.$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{3x+2}{x-1} < 2.$$

2. Последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$ является геометрической прогрессией. Известно, что $b_2 \cdot b_{10} = 16$. Найти $b_4 \cdot b_6 \cdot b_8$.

3. Решить уравнение

$$\log_3(2\cos x - \sin x) + \log_3 \sin x + \log_3 2 = 0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке T. Точка T' симметрична точке T относительно стороны CD. Отрезок AT' перпендикулярен BD. Площадь пятиугольника $ABCT'D$ равна $\sqrt{3}$ м^2. Найти диагонали прямоугольника $ABCD$ и угол между ними.

5. Решить уравнение

$$(4x+1)(1+\sqrt{(4x+1)^2+7}) + 3x(1+\sqrt{9x^2+7}) = 0.$$

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{x+3} > 1.$$

2. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_{10} + a_{12} = 6$. Найти $a_3 + a_{13} + a_{17}$.

3. Решить уравнение

$$\log_3(2\sin x - \cos x) + \log_3 \cos x + \log_3 2 = 0.$$

4. Параллелограммы $PQAB$ и $PQCD$ расположены симметрично относительно прямой PQ, отрезок PQ — их общая сто-

рона (точка C симметрична точке A, точка D симметрична точке B). Сторона QD второго параллелограмма является продолжением диагонали AQ первого параллелограмма. Угол DPB равен 30°, площадь пятиугольника $APCDB$ равна $5\sqrt{3}$ м^2. Найти длины диагоналей параллелограмма $PQAB$.

5. Решить уравнение

$$(4x+1)(2+\sqrt{(4x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0.$$

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{2x}{x+1}<1.$$

2. Последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$ является геометрической прогрессией. Известно, что $b_1 \cdot b_3 \cdot b_{11}=8$. Найти $b_2 \cdot b_3$.

3. Решить уравнение

$$\log_2(3\cos x-\sin x)+\log_2 \sin x=0.$$

4. В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O. Треугольники MON и $MO'N$ симметричны относительно общей стороны MN. Угол MON в два раза больше, чем угол $LO'K$. Найти стороны прямоугольника $LMNK$, если известно, что площадь пятиугольника $LMO'NK$ равна $5\sqrt{3}$ м^2.

5. Решить уравнение

$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7})+x(1+\sqrt{x^2+7})=0.$$

§5. Биологический факультет

1984

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{x}{1-x} < x - 6.$$

2. Решить уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x + 7 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + 2\log_2\left[1 - \frac{8x}{(2x+1)^2}\right]} = \log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) + 2\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, длина стороны которого равна a. Длина диагонали AC ромба в 1,5 раза больше длины его стороны. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, и ее длина в 1,5 раза больше длины AC. Через точку A и середину ребра CS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна 45°. Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью, и сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{x(x-6)+13}\cdot\cos\left[\pi\left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\right] + \\ \qquad + \sin[\pi(2y^2 - x)] = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{2x^2 - 7}{x - 2} < 4.$$

2. Решить уравнение

$$11 + 12\sin x + 4\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_4\left[8\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2\right] = \sqrt{2 - \log_4\left(\frac{x}{x+1}\right)} - \log_4\frac{1}{2}.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер, пересекающихся с ребром BC, равны между собой и в 2,5 раза больше длины этого ребра, равной b. Высота пирамиды, опущенная из вершины S на основание ABC, находится внутри пирамиды, и квадрат ее длины в 4,5 раза больше квадрата длины BC. Точка M делит пополам высоту грани SBC, проведенную из вершины S к ребру BC. Через точки A и M проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна 30°. Какова площадь полной поверхности части пирамиды, отсекаемой этой плоскостью и содержащей вершину S, и сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + 8x^3 - 16xy - 4y^2 + 8y + 16x - 4 = 0, \\ \sin[\pi(2x^2 - y)] - 2^{y^2-6y+10} \cdot \sin[\pi(x^2 - 2y + 1)] - \\ \qquad - \sin(3\pi y) = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-8}{3-x} > 5 - x.$$

2. Решить уравнение

$$\cos 2x + 20\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) = 3.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3 - 2\log_8\left(\frac{2x}{x+2}\right)} - \log_8 16 = \log_8\left[4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^3\right].$$

4. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит квадрат $KLMN$. Ребро KS перпендикулярно основанию пирамиды. Длина ребра LS в 5 раз больше длины ребра MN, равной a. Через точку M и середину ребра KS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна 60°. Каков периметр сечения пирамиды этой плоскостью, и сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 + 3y^2 + 4xy - x^2 - 6y + 4 = 0, \\ \cos(3\pi x) + \sqrt{8 + x(x-4)}\cos[\pi(y^2 - x + 1)] + \cos[\pi(x + 2y^2)] = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{4-2x}{x-4} > x.$$

2. Решить уравнение

$$15\sin x + 13\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) = 2\cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_4\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{x-1}\right) - \log_4 2 = \sqrt{4 + \log_4\left[\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^4\right]}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина высоты пирамиды, опущенной из вершины S, в четыре раза больше длины стороны основания, равной b. Через точку A и точку пересечения медиан грани SBC проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна $60°$. Какова площадь полной поверхности части пирамиды, отсекаемой этой плоскостью и содержащей вершину S, и сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8x^4 + 4x^3 - 4x^2y - 18x^2 - 2xy - 9x - 36 = 0, \\ \sin(3\pi y) + 2^{y^2 - y + \frac{5}{4}} \cdot \cos\left[\pi\left(2x^2 - y + \frac{1}{2}\right)\right] - \\ \qquad - \sin[\pi(4x^2 + y)] = 0. \end{cases}$$

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$$

2. Найти все корни уравнения

$$5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Решить неравенство

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) + 6.$$

4. На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C — между точками A и D. Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD, а также перпендикулярны прямые CM и MB. Найти площадь треугольника CMD, если известно, что

величина угла CMD равна α, а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

5. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{1-x}{(2-x)(x-3)} + 1 = \frac{1}{2-x}.$$

2. Найти все корни уравнения

$$3\cos 2x - 5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4 - \log_5(3-2x)} < 0.$$

4. На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N. На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P, а угол NKP прямой. Найти площадь треугольника NKM, если известно, что площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно, а величина угла LKP равна φ.

5. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{22-4x}{(x-1)(x-3)} + 3 = \frac{5}{x-3}.$$

2. Найти все корни уравнения

$$7\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 + 5\cos 2x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Решить неравенство

$$2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < \log^2_{\frac{1}{3}}(2x+5).$$

4. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, которая перпендикулярна отрезку AC и пересекает прямую BC в точке D. Через ту же вершину A проведена еще

одна прямая, которая перпендикулярна отрезку AB и пересекает прямую BC в точке F. Найти площадь треугольника FAD, если известно, что величина угла CAB равна β, а площади треугольников FAB и CAD равны p и q соответственно.

5. Сколько корней на отрезке $[-1;0]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x+3}+\frac{x+4}{(x+3)(x+2)}+1=0.$$

2. Найти все корни уравнения

$$5\cos x+3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)+1=0,$$

принадлежащие отрезку $[\pi;2\pi]$.

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-\log_7(5-4x)}-\frac{1}{\log_7(5-4x)}>0.$$

4. В треугольнике KLM угол L прямой. На прямой KM взяты точки P и Q так, что точка P лежит между точками K и M, точка M — между точками P и Q, а угол PLQ прямой. Найти площадь треугольника PLM, если известно, что площади треугольников KLM и PLQ равны m и n соответственно, а величина угла KLQ равна γ.

5. Сколько корней на отрезке $[-1;0]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

1986

Вариант 1

1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0.$$

2. Решить неравенство

$$3^x<1+12\cdot 3^{-x}.$$

3. Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист

со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, длина стороны BC равна $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причем прямые MO и AC параллельны. Отрезок BM в 1,5 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны AC.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

2. Решить неравенство

$$2^x - 1 < 6 \cdot 2^{-x}.$$

3. Два лыжника вышли с линии старта одновременно с постоянными скоростями по одному и тому же маршруту, причем скорость первого лыжника составила $\frac{7}{6}$ скорости второго. Вслед за ними через 20 минут отправился третий лыжник, который, двигаясь со скоростью 18 км/час, догнал второго лыжника на 30 минут раньше, чем первого. Какова скорость первого лыжника?

4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $\sqrt{13}$. Точка M лежит на стороне AC, точка N лежит на стороне BC, причем прямые MN и AB параллельны. Отрезок MC в 2 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке R, лежащей между точками M и N, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMR, равен $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$. Найти длину стороны AB.

5. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 3

1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}=0.$$

2. Решить неравенство

$$7^x+5<14\cdot 7^{-x}.$$

3. От пристани по водохранилищу со скоростью 10 км/час начала двигаться яхта. Спустя полтора часа от той же пристани с постоянными скоростями за яхтой последовали два катера, причем скорость первого катера составила $\frac{4}{3}$ скорости второго. Найти скорость первого катера, если известно, что он догнал яхту на 15 минут раньше, чем второй.

4. В треугольнике PQR длина стороны PR равна 12, длина стороны QR равна $2\sqrt{21}$. Точка B лежит на стороне PR, точка C лежит на стороне QR, причем прямые BC и PQ параллельны. Отрезок BR в 3 раза длиннее отрезка PB. Биссектриса угла QPR пересекает прямую BC в точке A, причем точка C лежит между точками A и B, а радиус окружности, описанной около треугольника ABP, равен $\sqrt{18+9\sqrt{3}}$. Найти длину стороны PQ.

5. Найти все значения параметра d, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2=d^4+10d^3+25d^2-202+\sqrt{68}, \\ x^2-2xy-y^2=8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 4

1. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

2. Решить неравенство

$$5^x+3<10\cdot 5^{-x}.$$

3. Из пункта A со скоростью 12 км/час выехал велосипедист. Спустя 40 минут вслед за ним из того же пункта с постоянными скоростями выехали второй и третий велосипедисты, причем скорость второго велосипедиста в полтора раза больше скорости третьего. Найти скорость второго велосипедиста, если известно, что он догнал первого велосипедиста на 80 минут раньше, чем третий велосипедист.

4. В треугольнике MNQ длина стороны MN равна $3\sqrt{8}$, длина стороны NQ равна $3\sqrt{5}$. Точка A лежит на стороне MN, точ-

ка C лежит на стороне NQ, причем прямые AC и MQ параллельны. Отрезок NA в 2 раза длиннее отрезка AM. Биссектриса угла NMQ пересекает прямую AC в точке B, лежащей между точками A и C, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMB, равен $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны MQ.

5. Найти все значения параметра c, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2xy-y^2=4, \\ x^2-2xy+8y^2=c^4+4c^3+4c^2-234+\sqrt{137} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$7\sin\left(2x-\frac{5}{2}\pi\right)+9\cos x+1=0.$$

2. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

3. Решить неравенство

$$\frac{3\log_{0,5}x}{2-\log_{0,5}x}\geqslant 2\log_{0,5}x+1.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD=3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ, если $AD=2BC$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+a^2-2a+3=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3\sin\left(2x+\frac{3}{2}\pi\right)-5\sin x-1=0.$$

2. Из пункта A по реке отправляется плот. Через час из пункта A вниз по течению отправляется катер. Найти, сколько времени потребуется катеру, чтобы догнать плот и возвратиться в пункт A, если скорость катера в стоячей воде вдвое больше скорости реки.

3. Решить неравенство

$$\frac{4\log_{0,3} x + 1}{\log_{0,3} x + 1} \leqslant \log_{0,3} x + 1.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 23. Точка M на боковой стороне AB выбрана так, что $2MB = MA$. Точка N на боковой стороне CD выбрана так, что $3DN = CD$. Точка L — пересечение прямых DM и AN. Найти площадь треугольника ALD, если $AD = 3BC$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$5\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) + 17\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 11 = 0.$$

2. Из пункта A отправились одновременно плот вниз по течению реки и катер против течения. Дойдя до пункта B, катер сразу повернул обратно и догнал плот в пункте C. Найти, во сколько раз расстояние от A до C меньше расстояния от A до B, если скорость катера в стоячей воде в пять раз больше скорости реки.

3. Решить неравенство

$$\frac{3 - \log_{0,9} x}{\log_{0,9} x - 1} \geqslant \log_{0,9} x - 1.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 35. Точка T на боковой стороне AB выбрана так, что $3TB = 2AB$. Точка E на боковой стороне CD выбрана так, что $CE = ED$. Прямые AE и TD пересекаются в точке R. Найти площадь треугольника RED, если $AD = 1,5BC$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2 + 12xy + 4y^2 + 11y - 11x - 1 = 0, \\ 10x^2 + 6xy + 13y^2 - 4x - 10y - 2ax + 6ay + a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$5\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+9\sin x+2=0.$$

2. Из пункта A вниз по реке одновременно отправились катер и плот. Катер дошел до пункта B, сразу повернул и пошел обратно вверх по реке. Найти, какую часть пути от A до B прошел плот к моменту встречи с катером, если скорость катера в стоячей воде втрое больше скорости реки.

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_{0,7}x+2}{\log_{0,7}x+1}\leqslant\log_{0,7}x+2.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 46. Точка F на боковой стороне AB выбрана так, что $BF=3AF$. Точка K на стороне CD выбрана так, что $KC=2KD$. Точка Q — пересечение прямых CF и BK. Найти площадь треугольника BCQ, если $AD=2BC$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16x+3y+8=0,\\ 5x^2-8xy+13y^2-2x-18y-4ax+6ay+a^2-2a+7=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1988

Вариант 1

1. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$8\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4}-6\cos x+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$3\log_{\sqrt{5}}2+\log_{\sqrt{5}}\left(2^{x^2-1}-\frac{1}{8}\right)<\log_{\sqrt{5}}7.$$

3. Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями мотоциклист и велосипедист. Они встретились через 45 минут после начала движения. Определить, сколько времени затратит на путь между исходными пунктами мотоциклист, если известно, что ему для этого потребуется на 2 часа меньше, чем велосипедисту.

4. Треугольник ABC вписан в окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}-1$. Угол BAC этого треугольника равен 60°, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен 1. Найти углы ABC и ACB данного треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6}\right)(\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3)=0, \\ 3\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi(2x-y)}{6}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi(2x-y)}{6}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$4\sin 3x\sin x+2\cos 2x+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$2\log_{\sqrt{2}}2+\log_{\sqrt{2}}\left(2^{x^2-1}-\frac{1}{4}\right)<\log_{\sqrt{2}}31.$$

3. Для наполнения бассейна были одновременно включены две трубы с постоянной интенсивностью подачи воды. Они наполнили бассейн за 1 час 12 минут. В одиночку одна из труб наполняет бассейн на 1 час быстрее другой. Найти время, за которое наполнила бы бассейн каждая из труб в одиночку.

4. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}-3$, а угол BAC равен $60°$. Радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC равен 1. Найти углы ABC и ACB данного треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(2\cos\dfrac{\pi y}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi(x-2y-1)}{3}\right)(\log_2\sqrt{3-x^2-y^2+2y}-\sqrt{2})=0, \\ \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi y}{2}+\sin\dfrac{\pi(x-2y)}{3}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi(x-2y)}{3}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$8\cos 6x\cos 2x+4\sin^2 4x-3=0.$$

2. Решить неравенство

$$2\log_{\sqrt{3}}3+\log_{\sqrt{3}}\left(3^{x^2-1}-\frac{2}{9}\right)<\log_{\sqrt{3}}79.$$

3. Из двух пунктов, расположенных на реке, одновременно отправились навстречу друг другу с постоянными скоростями катер по течению реки и пароход против течения. Они встретились через 1 час 20 минут. Все расстояние между исходными пунктами катер прошел на 2 часа быстрее, чем пароход. Определить время, за которое пароход прошел расстояние между двумя пунктами.

4. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3}-1$. Угол BAC этого треугольника равен $60°$, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3}+1$. Найти углы ABC и ACB данного треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\cos\dfrac{\pi y}{4}-\sin\dfrac{\pi(y-2x)}{12}\right)\left(\sqrt{11-x^2-y^2+2x+4y}-5\right)=0, \\ \cos^2\dfrac{\pi y}{8}+\sin\dfrac{\pi y}{12}\cos\dfrac{\pi x}{6}=\cos\dfrac{\pi y}{12}\sin\dfrac{\pi x}{6}+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$6\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$2\log_{\sqrt{2}}3+\log_{\sqrt{2}}\left(3^{x^2-1}-\frac{1}{9}\right)<\log_{\sqrt{2}}26.$$

3. Два экскаватора различной мощности, работая с постоянной производительностью, вырыли котлован заданного объема за 2 часа 24 минуты. Первый экскаватор, работая в одиночку, завершил бы эту работу на 2 часа быстрее, чем второй. Найти время, за которое вырыл бы котлован второй экскаватор, работая в одиночку.

4. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}-3$, а угол BAC равен $60°$. Радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC, равен $\sqrt{3}$. Найти углы ABC и BCA данного треугольника.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{4}+\sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12}\right)\left(\sqrt{11-x^2-y^2-4x-2y}-6\right)=0, \\ \dfrac{1}{2}+2\sin\dfrac{\pi x}{12}\cos\dfrac{\pi y}{6}=2\cos\dfrac{\pi x}{12}\sin\dfrac{\pi y}{6}+\sin^2\dfrac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

1989

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_{49}(2x^2+x-5)+\log_{\frac{1}{7}}(1+x)=0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2x^3-9x^2+12x+1}$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 3$.

3. Решить уравнение

$$\sin x(3\sin 2x\sin^3 x + 12\sin 2x\sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0.$$

4. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH — тупой. Найти угол HKF.

5. Числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$2x + y - z?$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_9(2x^2 + 9x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) = 0.$$

2. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$$

на отрезке $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

3. Решить уравнение

$$3\cos 4x + 2\cos 2x(10\cos^4 x + 3\cos^2 x + \sin^2 x) + 3 = 0.$$

4. Около квадрата $BEFC$ описана окружность радиуса $2\sqrt{2}$. Из точки P, лежащей на продолжении стороны BC так, что $PC < PB$ и $PC = \sqrt{28} - 2$, проведена секущая PA, пересекающая окружность в точках D и A. Известно, что внешняя часть секущей PD равна 4 ($PD = 4$), а угол BAC — тупой. Найти угол BPA.

5. Числа a, b, c таковы, что

$$2a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$a - 2b + c?$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_{16}(2x^2 - x - 11) + \log_{\frac{1}{4}}(1 - x) = 0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 9x + 20}$$

на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

3. Решить уравнение

$$4\sin x(3\sin 2x\sin^3 x + 2\cos x) = 3\sin 4x + 10\sin^2 x\sin 2x.$$

4. В окружность радиуса 1 вписан правильный шестиугольник $KLMNPQ$. Из точки T, лежащей на продолжении стороны KQ так, что $TK < TQ$ и $TK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, проведена секущая TS, пересекающая окружность в точках R и S. Известно, что внешняя часть секущей TR равна $\frac{1}{2}$ ($TR = \frac{1}{2}$), а угол RQS — тупой. Найти угол STQ.

5. Числа p, q, r таковы, что

$$3p^2 + q^2 + r^2 = 4.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$p + q - 2r?$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_{25}(2x^2 - 7x - 6) + \log_{\frac{1}{5}}(2 - x) = 0.$$

2. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{-2x^3 + 15x^2 - 36x + 34}$$

на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 4$.

3. Решить уравнение

$$\cos 2x(18\cos^4 x + 7\cos^2 x) = \cos 4x + 3\cos 2x + 1.$$

4. Около квадрата $LPQM$ описана окружность радиуса $\sqrt{2}$. Из точки R, лежащей на продолжении стороны LM так, что $RM < RL$ и $RM = \sqrt{3} - 1$, проведена секущая RK, пересекающая окружность в точках N и K. Известно, что внешняя часть секущей RN равна 1 ($RN = 1$), а угол LKM — тупой. Найти угол LRK.

5. Числа u, v, w таковы, что

$$u^2 + v^2 + 2w^2 = 5.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$v - 2w - u?$$

§6. Факультет почвоведения

1984

Вариант 1

1. Площади трех участков земли относятся как 4 : 3 : 5. Средняя урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 ц с гектара. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трех участков.

2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2 \left|1 + \frac{1}{x}\right| > 1.$$

4. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $75°$, длина стороны AB равна c, длина стороны AC равна b. На стороне BC выбрана точка M так, что величина угла BAM равна $30°$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найти длину отрезка AN.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

имеет решение.

Вариант 2

1. Объемы трех сосудов относятся как 7 : 2 : 3. Сосуды полностью заполнены газом, плотность которого 1,25 кг в кубическом метре. Известно, что масса газа в первом сосуде на 0,75 кг больше, чем масса газа, содержащегося во втором и третьем сосудах вместе. Определить объемы сосудов.

2. Решить уравнение

$$4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2} - 4\sin 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_3 \left|1 - \frac{1}{x-1}\right| < 1.$$

4. В треугольнике ABC величина угла при вершине A равна $30°$, длина стороны AC равна b, длина стороны AB равна c, причем $b \geqslant c$. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка E так, что величина угла CAE равна $45°$. Прямая AE

пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точке F, расположенной между A и E. Найти длину отрезка AF.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$$

имеет решение.

Вариант 3

1. В трех сосудах находится жидкость плотности 1600 кг на м^3. Объемы жидкостей в сосудах относятся как 4 : 3 : 2. Масса жидкости во втором сосуде на 4,8 кг меньше массы жидкости, содержащейся в первом и третьем сосудах вместе. Найти объемы жидкости в каждом из сосудов.

2. Решить уравнение

$$4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{3} + 4\sin 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2\left|4 + \frac{3}{x}\right| > 1.$$

4. В треугольнике ABC величина угла BAC равна 105°, длина стороны AB равна c, длина стороны AC равна b. На стороне BC выбрана точка M так, что величина угла BAM равна 45°. Продолжение прямой AM за точку M пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точке N. Найти длину отрезка AN.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 + a + \sqrt{a + 2\cos^2 x}} = \cos 2x$$

имеет решение.

Вариант 4

1. Производительности трех насосов относятся как 5 : 4 : 2. За 7 часов первый насос перекачал на 6 м^3 воды больше, чем третий. Определить производительность каждого из трех насосов.

2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x = 1 + \sqrt{2} - \cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2\left|1 + \frac{9}{x^2}\right| < 1.$$

4. В треугольнике ABC величина угла при вершине A равна 45°, длина стороны AB равна c, длина стороны AC равна b,

причем $b \geqslant c$. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка M так, что величина угла BAM равна $75°$. Прямая AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точке N, расположенной между A и M. Найти длину отрезка AN.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0$$

имеет решение.

1985

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3,5 \cdot 2^{y+1} = 146. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\lg(x+4) = -2\lg\frac{1}{2-x}.$$

3. Найти все корни уравнения

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

4. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найти длину отрезка BC, если длина каждой из хорд AC и DC равна 1.

5. Пусть x_0 — больший из корней уравнения

$$x^2 + 2(a - b - 3)x + a - b - 13 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geqslant 2$, $b \leqslant 1$.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\lg(9 - x) = -2\lg\left(\frac{1}{x+3}\right).$$

3. Найти все корни уравнения

$$\cos x + (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

4. Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E. Найти длину отрезка AC, если длина хорды CE равна 3 и длины отрезков DE и DC равны.

5. Пусть x_0 — больший из корней уравнения

$$x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a - 17 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2^{-y} = -1, \\ -10x + 2^{-y+1} = 146. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\lg(2 + x) = -\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1}{4 - x}\right).$$

3. Найти все корни уравнения

$$\sin x + (\sin x - 1)\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

4. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найти длину отрезка DC, если величины углов ABC и DAC равны, а длина отрезка BC равна 8.

5. Пусть x_0 — больший из корней уравнения

$$x^2 + (6a - 3b - 1)x + 4a - 2b + 14 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geqslant -1$, $b \leqslant 0$.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 2\cdot 3^{y+1} = -2, \\ -6x + 5\cdot 3^{y} = 93. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\lg(3 - x) = -\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1}{x + 9}\right).$$

3. Найти все корни уравнения

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

4. Через середину хорды AB некоторой окружности проведена хорда CD так, что величины углов DCB и BAC равны. Найти длину хорды AB, если длина хорды BD равна 5.

5. Пусть x_0 — больший из корней уравнения

$$x^2 + 2(ab - a - 1)x + 3ab - 3a - 14 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geqslant 1$, $b \geqslant 3$.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(1 - 2x) \geqslant \log_3(5x - 2).$$

3. Два трактора разной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 часа 40 минут. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в два раза, а второй — в полтора раза, то поле было бы вспахано за 1 час 36 минут. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

4. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными, проведенными из точки $A(-1; 0)$ к графику функции $y = x^2 + 4x + 7$.

5. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причем длина отрезка BE в три раза меньше длины стороны BC. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти длину стороны AB, если длина отрезка AE равна 5, длина отрезка OC равна 4, а величина угла AOC равна $120°$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Решить неравенство

$$\log_5(1 - x) < \log_5(x + 3).$$

3. При одинаковой работе двух насосов разной мощности бассейн наполнялся водой за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 часов. За какое время будет наполняться бассейн одним первым насосом после ремонта?

4. Найти площадь треугольника, образованного осью абсцисс и двумя касательными, проведенными из точки $A(0; 3)$ к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$.

5. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC пополам, а точка K лежит на стороне AC, причем длина отрезка AK в 4 раза меньше длины стороны AC. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Длина отрезка AM равна 5, длина отрезка BK равна 10. Найти длину отрезка MK, если величина угла AOB равна $135°$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\lg(7x-3)\geqslant\lg(1-2x).$$

3. В первый день, работая одновременно, два звена школьников разной численности затратили на прополку 1 гектара свеклы 2 часа. Во второй день скорость прополки в первом звене возросла в 1,4 раза, а во втором — в 1,3 раза. После чего на прополку 1 гектара оба звена, работая одновременно, затратили 1,5 часа. Какое время затратило на прополку 1 гектара одно второе звено в первый день работы?

4. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными, проведенными из точки $A(2;0)$ к графику функции $y=\frac{1}{4}x^2-2x+7$.

5. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC пополам, а точка E лежит на стороне AC, причем длина отрезка AE в 2 раза меньше длины стороны EC. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O. Найти длину стороны AC, если длина отрезка OD равна 3, длина отрезка OB равна 4, а величина угла AOB равна $120°$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(3x+1)<\log_2(2-x).$$

3. Сталь разливается из печи через два разных отверстия. Если открыты оба отверстия, то на разливку всей стали уходит 2 минуты 24 секунды. После переделки сливных отверстий пропускная способность первого отверстия увеличилась в 3 раза, а второго — в 4 раза. В результате на разливку всей стали из печи при условии, что оба отверстия открыты, стало требоваться 40 секунд. Сколько времени займет слив всей стали из печи через одно второе отверстие после переделки?

4. Найти площадь треугольника, образованного осью абсцисс и двумя касательными, проведенными из точки $A(0;6)$ к графику функции $y = -x^2 + 2x + 2$.

5. В треугольнике ABC точка M делит сторону AC пополам, а точка K лежит на стороне BC, причем длина отрезка BK в 3 раза меньше длины отрезка KC. Отрезки BM и AK пересекаются в точке O. Известно, что длина отрезка BO равна 2, длина отрезка AK равна 5, а величина угла AOB равна 135°. Найти длину отрезка KM.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$5\sin 2x = \sin 9x - \sin 5x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+3} \geqslant x.$$

3. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

4. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найти радиус второй окружности, если длина отрезка AB равна 4.

5. Найти такое значение x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 2$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3\sin 5x = \cos 7x - \cos 3x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+6} \geqslant x.$$

3. Бак объемом 36 м^3 заполняется одним насосом на 8 минут дольше, чем другим. Если бы первый насос накачивал в минуту воды вдвое больше, чем раньше, а второй накачивал бы в минуту на 3 м^3 воды меньше, чем раньше, то первый насос заполнял бы

бак за то же время, что и второй. Какой объем воды в минуту накачивает первый насос?

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найти расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

5. Найти такое значение x из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 3$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{12 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наибольшее расстояние от начала координат.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$9\cos 7x = \sin 8x - \sin 6x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{3x + 10} \geqslant x.$$

3. Расстояние 10 км один турист преодолевает на 1 час 40 минут быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на $\frac{1}{3}$ ее первоначальной величины, а второй увеличил бы свою скорость на 1 км/ч, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

4. Окружность радиуса 9 касается внешним образом другой окружности в точке M. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку M, пересекается с другой их общей касательной в точке N. Найти радиус второй окружности, если длина отрезка MN равна 6.

5. Найти такое значение x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 1$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{9 + 3x + x^2 + \frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$7\sin 4x = \cos 9x - \cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4x + 5} \geqslant x.$$

3. Бак объемом 40 м^3 заполняется одним насосом на 12 минут дольше, чем другим. Если бы первый насос накачивал в минуту

воды вдвое больше, чем раньше, а второй накачивал бы в минуту на 1 м^3 воды меньше, чем раньше, то первый насос заполнял бы бак за то же время, что и второй. Какой объем воды в минуту накачивает первый насос?

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K. Радиусы окружностей равны 2 и 6. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку K, пересекается с другой их общей касательной в точке S. Найти расстояние от центра большей окружности до точки S.

5. Найти такое значение x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 0$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{5 - 6x - \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наибольшее расстояние от начала координат.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3\cos x + 2\operatorname{tg} x = 0.$$

2. Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую под углом к AC в 7°, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что длина DC равна 3 см, а угол DAC равен 30°. Найти диаметр окружности.

3. Решить уравнение

$$3{\cdot}4^x - 7{\cdot}10^x + 2{\cdot}25^x = 0.$$

4. Два вида удобрений A и $Б$ отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении A азота содержится в 3 раза, а фосфора в 2 раза больше по весу, чем калия. В удобрении $Б$ соответственно азота в $\frac{5}{3}$ раз больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений A и $Б$ приготовить удобрение в котором азота в 2, а фосфора в 3 раза больше, чем калия?

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$5\sin x - 4\operatorname{ctg} x = 0.$$

2. В окружности диаметра 4 см проведены диаметр AB и хорда CD, пересекающиеся в точке E. Известно, что углы ABC и BCE равны соответственно $60°$ и $8°$. Найти длину CE.

3. Решить уравнение

$$3\cdot 4^x - 8\cdot 14^x + 4\cdot 49^x = 0.$$

4. Два вида корма для животных A и $Б$ отличаются весовым содержанием белков, жиров и углеводов. В корме A белков и углеводов в $\frac{7}{3}$ раз меньше по весу, чем жиров. В корме $Б$ соответственно белков в 4 раза, а углеводов в 5 раз больше, чем жиров. Можно ли за счет смешивания кормов A и $Б$ приготовить корм, в котором белков в 2 раза, а углеводов в 4 раза больше, чем жиров?

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 + 2p + 4 \leqslant 4\sin y + 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$5\cos x + 4\operatorname{tg} x = 0.$$

2. Из точки P, лежащей вне окружности диаметра 4 см, провели к ней две секущие. Первая секущая пересекает окружность в точках N и M, считая от точки P и проходит через центр. Вторая секущая пересекает окружность в точках Q и R, считая от точки P. Известно, что углы MPQ и QMP равны соответственно $11°$ и $30°$. Найти длину PQ.

3. Решить уравнение

$$4\cdot 9^x - 9\cdot 15^x + 2\cdot 25^x = 0.$$

4. Два вида удобрений A и $Б$ отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении A азота содержится в 1,5 раза, а фосфора в 2,5 раза больше по весу, чем калия. В удобрении $Б$ соответственно азота и фосфора в $\frac{7}{2}$ раз меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений A и $Б$ приготовить удобрение, в котором азота содержится в $\frac{4}{3}$ раз больше, а фосфора в $\frac{3}{2}$ раз меньше, чем калия?

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 - 5p + 2 \leqslant 3\sin y + 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$3\sin x - 2\operatorname{ctg} x = 0.$$

2. На диаметре MN окружности отмечена точка R и через нее проведена хорда PQ. Известно, что углы MNP и NPR равны соответственно $60°$ и $13°$, а длина PR равна 3 см. Найти диаметр окружности.

3. Решить уравнение

$$5\cdot 4^x - 11\cdot 6^x + 2\cdot 9^x = 0.$$

4. Два вида корма для животных A и $Б$ отличаются весовым содержанием белков, жиров и углеводов. В корме A белков в $\frac{5}{3}$ раз больше, а углеводов в 1,5 раза меньше по весу, чем жиров. В корме $Б$ соответственно белков и углеводов в $\frac{7}{2}$ раз меньше, чем жиров. Можно ли за счет смешивания кормов A и $Б$ приготовить корм, в котором белков в 1,5 раза, а углеводов в 5 раз больше, чем жиров?

5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \leqslant 4\sin y - 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

1989

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 2x\cdot\cos 2x - \sin x\cdot\cos x = 0.$$

2. Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населенных пунктов — со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе — 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B?

3. Решить неравенство

$$\log_{x+2}(2x^2 + x) \leqslant 2.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ADC и в треугольник ABD.

5. Решить неравенство

$$(x^2-4x+3)\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\geqslant 2.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}\sin^2 x=0.$$

2. Автобус проехал первую часть пути из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 370 км, со скоростью 80 км/ч, а на второй части пути вынужден был снизить скорость до 40 км/ч из-за ремонта дороги. На обратном пути из B в A скорость на ремонтируемом участке дороги составляла 30 км/ч, а на остальной части пути — 90 км/ч. Известно, что обратный путь из B в A автобус проехал на 25 минут быстрее, чем из A в B. Найти время движения по маршруту из A в B.

3. Решить неравенство

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+1)\leqslant 2.$$

4. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а длина стороны AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Найти отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED, к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC.

5. Решить неравенство

$$\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+3\cos^2\pi x)\geqslant -2.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin 2x\cos 2x=0.$$

2. Из пункта A в пункт B велосипедист доехал за 2 часа, двигаясь по грунтовой дороге со скоростью 20 км/ч, а по шоссе — со скоростью 30 км/ч. Обратный путь из B в A велосипедист проехал за 1 час 24 минуты. При этом по грунтовой дороге он двигался со скоростью 30 км/ч, а по шоссе — со скоростью 40 км/ч. Определить расстояние между пунктами A и B?

3. Решить неравенство

$$\log_{x+\frac{3}{2}}(2x^2-x)\leqslant 2.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 6, а длина катета BC равна 8. Точка D делит гипотенузу AC пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ABD и в треугольник BCD.

5. Решить неравенство

$$\left(x^2 - 3x + \frac{5}{4}\right) \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2\cos^2 x - \cos 2x + 2\sin^2 \pi x) \geqslant 2.$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x - 2\sin 2x \cos 2x - \sin^2 x = 0.$$

2. Часть пути между пунктами A и B, расстояние между которыми 70 км, турист проехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а вторую часть прошел пешком со скоростью 6 км/ч. На обратном пути пешеходную часть маршрута он прошел со скоростью 5 км/ч, а на велосипеде ехал со скоростью 20 км/ч. Известно, что обратный путь из B в A занял у туриста на 40 минут меньше времени, чем путь из A в B. Найти время движения по маршруту из A в B.

3. Решить неравенство

$$\log_{x+\frac{5}{2}}(2x^2 + 3x + 1) \leqslant 2.$$

4. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 9, а длина стороны BC равна 12. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Найти отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC, к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник BCE.

5. Решить неравенство

$$(6x - 10 - x^2) \log_{\sqrt{2}}\left(1 + \cos^2 x + \sin^2 \pi x + 4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\right) \geqslant -2.$$

§7. Географический факультет

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 2x = \sin\frac{x}{2}.$$

2. В ромбе $ABCD$, длина стороны которого равна 6, а величина угла BAD равна $\frac{\pi}{3}$, на стороне BC взята точка E на расстоянии, равном 2 от точки C. Найти расстояние от точки E до центра ромба.

3Н. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x + \ln\frac{1}{x-2}$$

на промежутке $2 < x < +\infty$.

4. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равна $\frac{\pi}{3}$.

5. Найти все значения параметра α, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(\alpha x + 1) + 13x - \alpha(1 + y) = 0, \\ x - xy + |2 + y| = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

3С. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4) < 0.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\cos\frac{x}{2}\sin 3x = \cos\frac{x}{2}.$$

2. В правильном шестиугольнике, длина стороны которого равна 5, на одной из сторон взята точка A на расстоянии 1 от ближайшей вершины шестиугольника. Найти расстояние от точки A до центра шестиугольника.

3Н. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = e^{2x} - 2x.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде с боковым ребром, длина которого равна 20, величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равна $\frac{\pi}{3}$. Через точку, лежащую на одном из боковых ребер, проведена прямая, перпендикулярная этому ребру и пересекающая высоту пирамиды. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если точка пересечения этой прямой с высотой делит высоту на две части в отношении $3:7$, считая от вершины.

5. Найти все значения параметра α, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(\alpha x+3)+x-\alpha(y+1)=0, \\ |x+4|+y=xy \end{cases}$$

имеет решения.

3С. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+18)-2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)<0.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos 5x\sin\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{4}.$$

2. В параллелограмме $ABCD$, у которого длина стороны AB равна 2, длина стороны BC равна 3 и величина угла ABC равна $\frac{2\pi}{3}$, на стороне BC на расстоянии 1 от точки C взята точка E. Найти расстояние от точки E до точки K, принадлежащей отрезку AD, если длины отрезков AK и KD равны.

3Н. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\ln(3-5x)+5x$$

на промежутке $-\infty<x<\frac{5}{3}$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде, длина стороны основания которой равна 6, а величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равна $\frac{\pi}{3}$, проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру и делящее высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найти периметр сечения.

5. Найти все значения параметра α, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(2x+1)+x-\alpha|y+1|=0, \\ x+y+2=xy \end{cases}$$

имеет решения.

3С. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4) < 0.$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin\frac{x}{4}\cos 3x = \cos 3x.$$

2. В правильном треугольнике, длина стороны которого равна 6, на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найти расстояние от этой точки до центра треугольника.

3Н. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = 6x + e^{-6x}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равна $\frac{\pi}{3}$. Через точку, лежащую на одном из боковых ребер, проведена прямая, перпендикулярная этому ребру и пересекающая высоту в середине. Известно, что длина отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, равна 6. Найти длину бокового ребра пирамиды.

5. Найти все значения параметра α, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(\alpha x - 1) = 2|x + 1| + 2xy, \\ yx + 1 = x - y \end{cases}$$

имеет решения.

3С. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4) < 0.$$

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3\cos x - \cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{3x-1} 2x > 1.$$

3. Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом, величина которого равна 60°, одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростями 40 км/ч и

60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 час раньше грузовика. Найти время движения автобуса.

4. Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{7}$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D. Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найти ее разность.

5. Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для каждого из которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4\sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_x(3 - x) > 1.$$

3. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол, величина которого равна 60°. От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 км/ч и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 часа, а лодка — через 4 часа. Найти скорость течения рек.

4. Величины углов P, Q и R треугольника PQR составляют арифметическую прогрессию с разностью $\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке S. Точки P', Q' и R' находятся на отрезках SP, SQ, SR соответственно на одинаковом расстоянии от точки S. Доказать, что величины углов P', Q', R' треугольника $P'Q'R'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найти ее разность.

5. Найти все значения параметра b, удовлетворяющие условию $-1 \leqslant b \leqslant 1$, для каждого из которых выражение

$$1 - 2\sqrt{4x^2 + 4bxy + y^2 + 8y + 18}$$

принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$5\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{5x-4} 3x > 1.$$

3. Пункты A и B, отстоящие друг от друга на расстоянии 240 км, связаны с пунктом C прямолинейными дорогами, которые составляют между собой угол, величина которого равна 60°. Из пункта C выехали одновременно автобус и такси соответственно в пункты A и B. Автобус находился в пути 4 часа, а такси — 3 часа. Найти скорость автобуса, если известно, что она на 20 км/ч меньше скорости такси.

4. Величины углов Q, R и S треугольника QRS образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{8}$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке P. Точки Q', R' и S' находятся на продолжениях отрезков PQ, PR, PS за точки Q, R, S соответственно на одинаковом расстоянии от точки P. Доказать, что величины углов Q', R', S' треугольника $Q'R'S'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найти ее разность.

5. Найти все значения параметра c, удовлетворяющие условию $-1 \leqslant c \leqslant 1$, для каждого из которых выражение

$$\sqrt{x^2 + 4cxy + 4y^2 - 2y + 1} + 2$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$3\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{2x}(10 - 3x) > 1.$$

3. По двум прямолинейным каналам, впадающим в водохранилище в одном и том же месте и образующими друг с другом угол, величина которого равна 60°, плывут лодка и байдарка. Первоначальное расстояние между ними составляло 20 км. Лодка и байдарка достигли водохранилища соответственно за 4 часа и 2 часа. Пренебрегая течением воды в каналах, найти скорость лодки, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости байдарки.

4. Величины углов A, B и C треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию с разностью $\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке F. Точки A', B' и C' находятся на отрезках FA, FB, FC соответственно на одинаковом расстоянии от точки F. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найти ее разность.

5. Найти все значения параметра d, удовлетворяющие условию $-1 < d < 1$, для каждого из которых выражение

$$2 - \sqrt{x^2 + 2dxy + y^2 + 4y + 5}$$

принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

1986

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{x^2+2x-5} > \frac{1}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt{3} - \log_{x^2} 27 = \frac{1}{2}.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 100 литров воды в минуту, во вторую 60 и в третью 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

4. Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина отрезка AK равна 1, длина отрезка KC равна $\sqrt{3}$, а величины углов AKC, ABK и KBC равны $120°$, $15°$ и $15°$ соответственно. Найти длину отрезка BK.

5. Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найти наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x+y)$$

при условии $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right) = 1$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{x^2+6x-4} > \frac{1}{6}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2}\sqrt{5}+\log_x\frac{1}{125}=\frac{11}{8}.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 120 литров воды в минуту, а во вторую — 40. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, а объем воды в третьей цистерне в два раза меньше, чем во второй, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает за одну минуту в третью цистерну?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величина углов ABC, BKA и BKC равны $120°$, $30°$ и $60°$ соответственно. Найти длину стороны BK.

5. Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0<a<1$, найти наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)-a(x-y)$$

при условии $\sin(\pi xy)=0$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{x^2+8x-1}>\frac{1}{4}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_x\sqrt{7}+2\log_{x^2}\frac{1}{49}=3.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну за одну минуту поступает в два раза больше воды, чем во вторую. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, во второй — 300 литров воды, в третьей — 400 литров, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды, поступающей за одну минуту в первую цистерну, больше количества воды, поступающего за одну минуту в третью цистерну?

4. Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов ABC, AKB и CKB равны $30°$, $120°$ и $120°$ соответственно. Найти длину отрезка BK.

5. Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 1$, найти наименьшее значение выражения

$$8x^2 + 2y^2 - 4a(2x - y)$$

при условии $\operatorname{tg}(2\pi xy) = 0$.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{x^2+6x-2} > \frac{1}{6}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2}\sqrt{2} + \log_x \frac{1}{16} = \frac{15}{2}.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем во вторую цистерну поступает воды в два раза больше, а в первую в три раза больше, чем в третью. Известно, что в начальный момент первая цистерна была пуста, во второй 300 литров воды, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды содержалось первоначально в третьей цистерне?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCK$ длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов ABC, BKC и AKB равны по 30° каждый. Найти длину диагонали BK.

5. Для каждого значения параметра a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найти наименьшее значение выражения

$$2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - a(2x + y)$$

при условии $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}xy\right) = 0$.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$7^x - 14\cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3.$$

2. Решить неравенство

$$y^2 + 3|y| < 10.$$

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$ см, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ см и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B

проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $BF = 2$ см.

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \cos(x+y) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-2\pi \leqslant y \leqslant -\pi$.

5. Найти все натуральные значения параметра b, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для каждой пары чисел $(x; y)$, где $x < 0$ и $y < 0$, для которой выражение $\lg(xy - b)$ также имеет смысл.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$5^x - 15 \cdot 5^{-x} = 3^{\log_3 5} - 3.$$

2. Решить неравенство

$$y^2 + 2|y| < 35.$$

3. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность радиуса $3\sqrt{7}$ см, отсекающая от прямой AB отрезок BE длиной $6\sqrt{7}$ см и касающаяся прямой AC в точке C. Из точки B проведен перпендикуляр к прямой AC до пересечения с нею в точке D. Найти площадь треугольника ACE, если $BD = 3$ см.

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x-y) = 0, \\ \cos(y-x) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

5. Найти все натуральные значения параметра b, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{x+y-3}$ имеет смысл для каждой пары чисел $(x; y)$, где $x > 0$ и $y > 0$, для которой выражение $\lg(xy - b)$ также имеет смысл.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_3 x + \log_3(x+4) = \frac{1}{\log_5 3}.$$

2. Решить неравенство

$$y^2 - 4|y| < 12.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) сторона $AC = 10$ см. В угол ABC вписана окружность, диаметр которой

равен 15 см, так, что она касается стороны AC в ее середине. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-2y)=0, \\ \cos(x-y)=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$.

5. Найти все отрицательные целые значения параметра b, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{-x+y+3}$ имеет смысл для каждой пары чисел $(x;y)$, где $x>0$ и $y>0$, для которой выражение $\lg(b-xy)$ также имеет смысл.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_2(x-1)+\log_2 x=\frac{1}{\log_6 2}.$$

2. Решить неравенство

$$y^2-4|y|<5.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) длина катета BC равна 2 см. В угол ABC вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{2}$ см, так, что она касается прямой BC в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+2y)=0, \\ \cos(x+y)=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

5. Найти все отрицательные целые значения параметра a, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{y-x-3}$ имеет смысл для каждой пары чисел $(x;y)$, где $x<0$ и $y>0$, для которой выражение $\lg(a-xy)$ также имеет смысл.

1988

Вариант 1

1. Найти область определения функции

$$y=\log_x(x^2+3x+2).$$

2. Решить неравенство

$$3^x-3^{\frac{1}{2}-x}>\sqrt{3}-1.$$

3. Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом.

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC и длина отрезка EF равна 1 см. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC, которые равны соответственно 4 см и 2 см. Найти периметр четырехугольника $EFGH$.

5. Доказать, что при каждом $x > 0$ выполнено неравенство

$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \cdot \sin x > 0.$$

Вариант 2

1. Найти область определения функции

$$y = \log_{-x}(x^2 + x - 2).$$

2. Решить неравенство

$$2^{3x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} > 1 + 2^{-3x}.$$

3. Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 80 км от A, выехал мотоциклист. Навстречу ему и одновременно с ним из пункта B, находящегося между A и C на расстоянии 5 км от C, выехал велосипедист, а из пункта C — автомобиль. Через какое время встретились мотоциклист и велосипедист, если известно, что это произошло через 20 минут после того, как автомобиль догнал велосипедиста, а мотоциклист до встречи с автомобилем провел в пути вдвое больше времени, чем велосипедист до того, как его догнал автомобиль.

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC. Отношение длин сторон EF и EH равно 3. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC, отношение длин которых равно $\frac{1}{3}$. Найти отношение, в котором точка E делит ребро AB.

5. Доказать, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство

$$x^2 + \pi \cdot x + 4\pi \cdot \cos x > 0.$$

Вариант 3

1. Найти область определения функции

$$y = \log_x(x^2 + 6x + 5).$$

2. Решить неравенство

$$3^{\frac{x}{2}} + \sqrt{3} < 3^{\frac{1-x}{2}} + 1.$$

3. Из пункта A в пункт C, удаленный от A на 9 км, выехал автомобиль. Одновременно с ним в том же направлении из пункта C вышел пешеход, а из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 5 км от C, выехал велосипедист. Найти время,через которое велосипедист догнал пешехода, если известно, что произошло это через полчаса после того, как велосипедиста догнал автомобиль, и что пешеход до встречи с автомобилем провел в пути вдвое больше времени, чем велосипедист до встречи с автомобилем.

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC и E делит AB пополам. Отношение длины стороны EH к длине стороны EF равно 2. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC и что длина AD равна 8 см. Найти длину ребра BC.

5. Доказать, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство

$$x^2 + 2\pi x + \frac{21}{2}\pi \sin x > 0.$$

Вариант 4

1. Найти область определения функции

$$y = \log_{-x}(x^2 + 2x - 3).$$

2. Решить неравенство

$$2^{\frac{x}{3}} - 2^{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}} < \sqrt{2} - 1.$$

3. Из пункта A в направлении пункта C, удаленного от A на 28 км, выехал автобус. Одновременно навстречу ему из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 8 км от A, вышел пешеход и из пункта C выехал мотоциклист. Через 45 минут после встречи автобуса и мотоциклиста, последний догнал пешехода. Сколько времени провел в пути мотоциклист до встречи с пешеходом, если до встречи с автобусом он провел в пути втрое больше времени, чем пешеход до встречи с автобусом.

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC. Известно, что плоскость P параллельна ребрам AD и BC, отношение длины отрезка EA к длине отрезка EB равно 2, ребра AD и BC равны. Найти отношение длин сторон $EF : EH$.

5. Доказать, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство

$$x^2 + 2\pi x + 6\pi \cos x > 0.$$

1989

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от пункта A, по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B. Найти скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.

3. Решить неравенство

$$\log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x - x^2\right) < 1.$$

4. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A и прямых BC и CD в точке C. Найти площадь сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

2. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 16 км от A, по горной дороге со скоростью 4 км/час поднимается в гору турист. Одновременно с ним из пункта A

в пункт B выехал мотоциклист. Доехав до пункта B менее чем за один час, мотоциклист поехал обратно навстречу туристу и встретил его через 15 минут после начала движения из пункта B. Найти скорость движения мотоциклиста на подъеме, если известно, что она на 20 км/час меньше его скорости на спуске.

3. Решить неравенство

$$\log_{4-x}(x^2-10)<2.$$

4. Сфера радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке O касается всех сторон треугольника ABC. Точка касания N делит сторону AB пополам. Точка касания M делит сторону AC так, что $AM=\frac{1}{2}MC$. Найти объем пирамиды $OABC$, если известно, что $AN=NB=1$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, $AD=7$, $BC=3$, $\angle ACD=60^\circ$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности, и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD, делит угол BAD пополам. Найти длину диагонали AC.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Из пункта M в пункт N, находящийся ниже по течению реки в 3 км от M, стартовали одновременно два пловца. Один из них, доплыв до пункта N не менее чем за один час, повернул обратно навстречу второму и встретил его через 20 минут после начала движения из пункта N. Найти скорость первого пловца по течению реки, если известно, что она в три раза больше его скорости против течения, а скорость второго пловца по течению реки равна 2 км/час.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{10}{3}x-x^2}(11-x^2)>1.$$

4. Даны четыре точки K, L, M, N, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается плоскостей KLM и KLN в точках M и N соответственно. Найти площадь сферы, если известно, что $ML=1$, $KM=2$, $\angle MNL=60^\circ$, $\angle KML=90^\circ$.

5. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведены диагонали KM и LN. Известно, что $\angle KLN=\angle KMN=60^\circ$, $LM=\sqrt{3}$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника KLN и точкой пересечения биссектрис треугольника KMN равно 1. Найти длину стороны KN.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

2. Из пункта M в пункт N, находящийся на расстоянии 10 км от M, по течению реки со скоростью 5 км/час отправилась лодка. Одновременно с ней из пункта M в пункт N выехал катер. Доехав до пункта N, катер поехал обратно навстречу лодке и встретил ее через 45 минут после начала движения из пункта N. Найти скорость катера по течению реки, если известно, что она на 15 км/час больше его скорости против течения.

3. Решить неравенство

$$\log_{5-x}(x^2-17)>2.$$

4. Сфера радиуса $\frac{3}{2}$ имеет центр в точке N. Из точки K, находящейся на расстоянии $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ от центра сферы, проведены две прямые KL и KM, касающиеся сферы в точках L и M соответственно. Найти объем пирамиды $KLMN$, если известно, что $ML=2$.

5. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведена диагональ KM, $MN=1$, $KL=\sqrt{7}$, $\angle KML=60°$. Известно, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности, и перпендикуляр, проведенный из точки K к стороне LM, делит угол NKL пополам. Найти длину стороны LM.

§8. Геологический факультет (отделение геофизики)

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3\cdot 9^{x+1} - 6\cdot 3^x - 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2.$$

3. Найти $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{1}{3}$.

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4 см, сумма длин других сторон равна 6 см. Найти площадь треугольника ABC, если косинус угла ACB равен $\frac{5}{12}$.

5. Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 копеек. Когда третьему мальчику добавили денег в размере в два раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 копеек. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 копеек больше, чем у первого?

6. У пирамиды $SABC$ длины ребер AB и AC равны 1, длина ребра BC равна $\sqrt{3}$, а длина высоты SH равна 2. Основание H высоты находится на расстоянии 1 от вершины C, и $AH \perp AB$. Найти отношение площадей поверхностей вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\cdot 4^{x+2} + 4\cdot 2^x - 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 16} < x + 4.$$

3. Найти $\sin 2\alpha$, если $\cos 2\alpha \geqslant -\frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$.

4. В треугольнике EFG длина стороны FG равна 10 см, а разность длин сторон EF и EG равна 1 ($EF - EG = 1$). Найти площадь треугольника EFG, если косинус угла EFG равен $\frac{4}{5}$.

5. Бригада из трех человек сажала деревья. За день было посажено меньше половины запланированного числа деревьев. Если бы первый рабочий работал в три раза производительней, то оставалось бы посадить 30 деревьев. Если бы второй рабочий работал вдвое быстрее, то после первого дня работы осталось бы посадить 23 дерева. Сколько деревьев должна была посадить бригада, если известно, что второй рабочий, работая еще два дня, посадил на 8 деревьев больше оставшегося числа?

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер AB и AC равны $\sqrt{3}$, длина ребра BC равна 3, длина высоты SH равна 1. Отрезок, соединяющий основание H высоты с вершиной A, пересекается с ребром BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$ и $CH \perp BC$. Найти отношение радиусов вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$5 \cdot 25^{x+1} - 20 \cdot 5^x - 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{16 - 4x^2} < x + 4.$$

3. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant \dfrac{8}{17}$ и $\operatorname{ctg} \alpha \leqslant \dfrac{1}{4}$.

4. В треугольнике ABC косинусы углов ABC и ACB соответственно равны $\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{7}{25}$. Найти площадь треугольника ABC, если периметр треугольника равен $\dfrac{40}{3}$ см.

5. Машины трех марок должны были перевезти некоторое четное число панелей. Если бы работали по одной машине каждой марки, то они за два дня не перевезли бы всех панелей. Если бы работали две машины первой марки, а двух других по одной, то после одного дня работы осталось бы 29 панелей. Если бы в первый день работали по одной машине всех трех марок, а во второй день две машины третьей марки, то они перевезли бы все панели. Сколько панелей должны были перевезти машины, если за день машина второй марки перевозит на 6 панелей больше, чем машина первой марки?

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер AB и AC равны 1, длина ребра BC равна $\sqrt{3}$, а длина высоты SH равна $\sqrt{3}$. Отрезок, соединяющий основание H высоты с вершиной A, пересекается с ребром BC в точке D так, что $BC : BD = 2 : 1$ и $BD = DH$. Найти отношение площадей поверхностей вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\cdot 4^{x+2} + 14\cdot 2^x - 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{36 - 6x - 6x^2} < x + 6.$$

3. Найти $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\cos 2\alpha \geqslant -\dfrac{12}{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant -5$.

4. В треугольнике KLM длина стороны ML равна $\sqrt{20}$ см, разность длин сторон KL и KM равна 3 см ($KL - KM = 3$ см), косинус угла KML равен $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Найти площадь треугольника KLM.

5. Сумма трех натуральных чисел меньше половины четвертого натурально числа. Если к сумме первых трех чисел прибавить первое, то полученная сумма была бы меньше четвертого на 32. Если второе число взять вдвое больше, то сумма трех чисел стала бы меньше четвертого на 23. Найти четвертое число, если известно, что оно четное и равно сумме первого, второго и утроенного третьего чисел.

6. В пирамиде $SABC$ длина ребра AB равна $\sqrt{3}$, длина ребра BC равна 3, а длина высоты SH равна 2. Отрезок, соединяющий основание H высоты с вершиной A, пересекается с ребром BC в точке D так, что $AD = CD$ и $CH \perp BC$. Найти отношение радиусов вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров, если площадь основания ABC равна $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

1985

Вариант 1

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2} \quad \text{или} \quad 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}.$$

Результат обосновать.

2. Решить неравенство

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geqslant 1.$$

3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?

4. Решить уравнение

$$3\sin x + 5\cos x = \sqrt{17}.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

6. Прямой круговой конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найти площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.

Вариант 2

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$2^{\log_7 3}+\sqrt[5]{6} \quad \text{или} \quad 3^{\log_7 2}+6^{\frac{1}{3}\log_6 3}.$$

Результат обосновать.

2. Решить неравенство

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1}\geqslant 1.$$

3. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 120 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Если первый поезд выйдет из A на два часа раньше, чем второй выйдет из B, то они встретятся на середине пути. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B, если через час после встречи расстояние между поездами будет равно 80 км?

4. Решить уравнение

$$2\sin x+7\cos x=\frac{\sqrt{53}}{2}.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

6. Прямой круговой конус с образующей длины 3 вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной высоте и проходящей через вершину. Площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, равна 6π. Найти угол наклона образующей конуса к его основанию.

Вариант 3

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$7^{\log_5 2}+6^{\frac{1}{3}\log_6 15} \quad \text{или} \quad 2^{\log_5 7}+\sqrt{6}.$$

Результат обосновать.

2. Решить неравенство

$$\frac{|x+2|}{|x+1|-1}\geqslant 1.$$

3. Расстояние между пунктами A и B, равное 80 км, второй грузовик проезжает на два часа быстрее первого. За сколько часов первый грузовик проедет путь из A в B и обратно, если за один час, двигаясь навстречу друг другу они вместе проедут $\frac{3}{4}$ пути от A до B?

4. Решить уравнение

$$7\sin x - 3\cos x = \sqrt{29}.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x-2} - \sqrt{x^2-1} = \sqrt{3x^2+8x+4} - \sqrt{x^2-3x-10}.$$

6. Дан прямой круговой конус, радиус основания которого равен 3, а угол наклона образующей к плоскости основания равен $\frac{\pi}{4}$. Конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной высоте конуса и проходящей через его вершину. Найти площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения.

Вариант 4

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$5^{\log_3 7} + \sqrt{7} \quad \text{или} \quad 7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}.$$

Результат обосновать.

2. Решить неравенство

$$\frac{|x+3|}{|x+2|-1} \geqslant 1.$$

3. Мотоциклист проходит дистанцию длиной 30 км на два часа быстрее велосипедиста. За какое время велосипедист проедет половину дистанции, если за $\frac{1}{2}$ часа, двигаясь навстречу друг другу, они вместе проходят $\frac{2}{3}$ дистанции?

4. Решить уравнение

$$5\sin x - 2\cos x = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+3x-1}.$$

6. Дан прямой круговой конус, у которого угол наклона образующей к плоскости основания равен $\frac{\pi}{6}$. Конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через его вершину. Площадь сечения полученного тела вращения

плоскостью, проходящей через ось вращения, равна 24π. Найти высоту конуса.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x.$$

2. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC, опущенной на сторону BC из вершины A, к радиусу вписанной окружности.

3. Решить уравнение

$$\frac{2\cdot 6^x-4^x-15}{6^x-9^x-5}=3.$$

4. Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон трибуны, а с двух других сторон — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равны соответственно 7 руб. и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найти длины сторон спортплощадки.

5. Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right|.$$

6. При каждом значении параметра $p\leqslant 9$ найти все решения уравнения

$$3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x-\frac{3\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x+\frac{3\pi}{14}\right)+$$
$$+\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}-\frac{\pi}{7}\cos(2x)\right)=6\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{15}\sin x+\frac{2\pi}{5}\right)-p$$

на отрезке $[0;2\pi]$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos x.$$

2. Длины сторон AB, BC и AC прямоугольного треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что сторона AB короче стороны AC на 2 см.

3. Решить уравнение

$$\frac{15^x + 9^x + 6}{2\cdot 15^x + 25^x + 3} = 2.$$

4. Мелиораторы проводили работы по осушению заболоченного прямоугольного участка площадью 2,7 га. Нужно было по двум более коротким сторонам прокопать траншеи, а по двум другим каналы. Сечение канала составляло 4 кв. м, траншеи — 2 кв. м. Определить длины сторон участка, если за время работ было вынуто 2760 куб. м грунта.

5. Для каждой пары положительных чисел c и d найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{c^2}} > \frac{1}{x} + \frac{1}{d}.$$

6. При каждом значении параметра $p \geqslant 5$ найти все решения уравнения

$$54\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{8}\cos(2x) + \frac{7\pi}{24}\right) + p = 8\sin^2\left(\frac{13\pi}{60} - \frac{\pi}{20}\sin x\right) + \\ + 42\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sin^2 x - \frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\sin x + \frac{47\pi}{60}\right)$$

на отрезке $[-2\pi; 0]$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

2. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти знаменатель прогрессии, если известно, что отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A на сторону BC, к радиусу вписанной окружности равно 3.

3. Решить уравнение

$$\frac{3\cdot 10^x - 25^x + 20}{10^x - 4^x + 4} = 5.$$

4. В колхозе под рожь занято три поля. С первого поля, которое на 5 га меньше, чем второе, собрано 300 центнеров ржи, со второго — 320 центнеров ржи. С третьего поля площадью 15 га, урожайность ржи на котором равна полусумме урожайностей ржи на первом и втором полях, собрали 270 центнеров ржи. Какова урожайность ржи на первом и втором полях?

5. Для каждой пары положительных чисел a и c найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{c}.$$

6. При каждом значении параметра $p \geqslant 18$ найти все решения уравнения

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{11\pi}{42}-\frac{\pi}{14}\cos(2x)\right)+p=24\cos^2\left(\frac{\pi}{13}\sin x+\frac{16\pi}{39}\right)+$$
$$+10\sin\left(\frac{62\pi}{39}-\frac{\pi}{13}\sin x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7}\cos^2 x-\frac{\pi}{3}\right)$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=\operatorname{ctg} x.$$

2. Длины сторон AB, BC и AC прямоугольного треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что длина стороны BC равна 1.

3. Решить уравнение

$$\frac{21^x+49^x-12}{3\cdot 21^x+9^x-3}=4.$$

4. Турист проехал на машине 120 км и прошел пешком 30 км. При этом на пеший путь было затрачено на 2 часа больше, чем на путь на машине. Если бы турист проделал путь в 230 км со скоростью, равной сумме скоростей движения на машине и пешком, то ему потребовалось бы 5 часов. Какова скорость движения на машине и скорость движения пешком?

5. Для каждой пары положительных чисел b и d найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{b^2}}>\frac{1}{|x|}-\frac{1}{d}.$$

6. При каждом значении параметра $p \geqslant 24$ найти все решения уравнения

$$11\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\sin x-\frac{31\pi}{36}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\sin^2 x+\frac{3\pi}{44}\right)+$$
$$+30\sin^2\left(\frac{7\pi}{44}-\frac{\pi}{11}\cos(2x)\right)=p+2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{9}\sin x+\frac{5\pi}{36}\right)$$

на отрезке $[\pi;3\pi]$.

1987

Вариант 1

1. Найти площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 см и 12 см.

2. Решить уравнение

$$4\sin^2 x + 4\cos x = 1.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{1-x} \geqslant -3.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$$

5. В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 час. 50 мин., а вторая — не ранее 10 час. 40 мин. того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки — 2 км/час, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75% от скорости первой лодки в стоячей воде?

6. На продолжении ребра SK правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно 24 см. Найти длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}$ см, $MN = 16$ см.

Вариант 2

1. Найти диагональ ромба, если его сторона равна стороне равностороннего треугольника с площадью $25\sqrt{3}$ см^2, а другая диагональ равна 16 см.

2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 3\cos x = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1} \geqslant -2.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 y + \log_3 x = 3. \end{cases}$$

5. Двое рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей. Первые 30 деталей каждый из них делал с постоянной произво-

дительностью, которая у второго рабочего была на 20% выше. Затем первый рабочий стал делать больше на 2 детали в час, а второй — на три детали в час. Первый рабочий затратил на выполнение всего задания не менее 5 часов 30 минут, а второй — не более 4 часов 30 минут. Сколько деталей в час делал второй рабочий при выполнении первой половины задания?

6. На продолжении ребра ST правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ с вершиной S взята точка B так, что расстояние от этой точки до плоскости SPQ равно $\frac{9\sqrt{7}}{2}$ см. Найти длину отрезка BT, если $QR = 12$ см, а $SR = 10$ см.

Вариант 3

1. Найти диагональ квадрата, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 24 см и 10 см.

2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2+x} \leqslant 3.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3, \\ 2x + 5y = 52. \end{cases}$$

5. Из пунктов M и K, расстояние между которыми 240 км, в 6 часов утра вышли навстречу друг другу пассажирский и скорый поезда. Первую половину пути каждый из поездов шел с постоянной скоростью, причем скорость скорого поезда была на 25% больше. На второй половине пути каждый поезд увеличил свою скорость на 20 км/час. Пассажирский поезд прибыл в пункт K не ранее 8 час. 42 мин., а скорый поезд прибыл в пункт M не позднее 8 час. 12 мин. того же дня. С какой скоростью прошел первую половину пути пассажирский поезд?

6. На продолжении ребра SE правильной четырехугольной пирамиды $SEFGH$ с вершиной S взята точка Q так, что $EQ = 5$ см. Найти расстояние от точки Q до плоскости SFG, если $GH = 20$ см, $SH = 15$ см.

Вариант 4

1. Найти сторону ромба, если его диагональ равна 14 см, а другая диагональ равна диагонали квадрата, площадь которого равна 50 см^2.

2. Решить уравнение

$$8\cos^2 x = 6\sin x + 3.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2-x} \leqslant 1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2, \\ x + 2y = 51. \end{cases}$$

5. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 20 км, в 8 часов вышли навстречу друг другу два геолога. Первую половину пути каждый из них шел с постоянной скоростью, а на второй половине оба увеличили ее на 1 км/час. Первый геолог пришел в B не ранее 12 час. 30 мин., а второй — в пункт A не позднее 11 час. 40 мин. того же дня. С какой скоростью вышел из A первый геолог, если она была в $\frac{5}{4}$ раза меньше скорости, с которой второй геолог вышел из B?

6. На продолжении ребра SD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S взята точка N так, что $DN = 11$ см. Найти расстояние от точки N до плоскости SAB, если $AB = 6$ см, $SB = 5$ см.

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(x-2)\left(|x| + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

2. Решить неравенство

$$(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0.$$

4. Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в O проведена окружность радиуса 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB.

5. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пу-

ти автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т. е. менее 168 часов). За время, которое он был при этом в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, средней арифметической между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найти скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$(x+1)\left(|x| + 2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{5}\right) = 0.$$

2. Решить неравенство

$$(x^2 - 18x + 77)\sqrt{10 - x} \geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$(x^2 - 7x + 10)(\log_{\frac{x}{2}}(8x) + 3) = 0.$$

4. Точка O делит отрезок AB так, что $OA = 6$ и $OB = 4$. С центром в O проведена окружность, из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найти радиус окружности, если $OM = 12$.

5. Четыре цеха изготавливают детали прессованием. В двух из них установлены прессы нового типа, а в двух — старого. Всего прессов каждого типа имеется не менее 5. Количество прессов во всех цехах одинаково. Изготовление 400 деталей на новом прессе занимает на 3 часа меньше времени, чем 420 деталей — на старом. На новых прессах изготовили по 200 деталей, а на старых — по 300. Если сложить время работы всех прессов, то окажется, что за получившееся суммарное время цех, оборудованный тремя новыми и двумя старыми прессами, работающими одновременно, может изготовить 17640 деталей. Найти производительность каждого пресса.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых область значений функции

$$y = \frac{a - \cos x}{2a + \sin^2 x - 1}$$

содержит отрезок $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(3 - x)\left(|x| + 1 + \frac{7}{8}\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) = 0.$$

2. Решить неравенство

$$(x^2 - 3x - 40)\sqrt{2x - 3} \geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$(x^2 - 4x + 3)(\log_{\frac{x}{3}}(12x) - 3) = 0.$$

4. Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 15$, $OB = 10$. С центром в O проведена окружность радиуса 6. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причем точки касания лежат по разные стороны от прямой AB. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB.

5. Группа туристов совершает комбинированный поход. 60 км они проехали на велосипедах, затем пересели в байдарки (одна одиночка и не более 30 двухместных; свободных мест при этом не осталось) и прошли 80 км по озеру. Все туристы движутся с одинаковой скоростью, причем 21 км на велосипеде турист проходит на 18 минут быстрее, чем 10 км на байдарке. Моторная лодка за час проходит такое же расстояние, какое преодолел бы турист, двигаясь 20 минут на велосипеде, а затем 30 минут на байдарке. Если время, затраченное на поход умножить на число его участников, то получится время, за которое моторная лодка могла бы пройти 450 км. Найти скорость движения туриста на велосипеде и на байдарке.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых область значений функции

$$y = \frac{a - \sin x}{a + \cos^2 x - 1}$$

содержит отрезок $[2; 4]$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$(x+2)\left(|x|+\frac{7}{6}\sqrt{2}+1-\sqrt{7}\right)=0.$$

2. Решить неравенство

$$(18-7x-x^2)\cdot\sqrt{5-3x}\leqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$(x^2-7x+6)\left(\log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{4}{9}x^2\right)+2\right)=0.$$

4. Точка O делит отрезок AB так, что $OA=8$ и $OB=6$. С центром в O проведена окружность. Отрезки AM и BM касаются ее в точках, лежащих по разные стороны от прямой AB. Найти радиус окружности, если $OM=24$.

5. На пути из A в B пешеход проходит первые 10 км по дороге, а оставшиеся 7 км — по полю, причем 6 км по дороге он проходит на 20 мин. быстрее, чем 4 км по полю. Путь из A в B он прошел несколько раз (число этих переходов нечетно и больше пяти), каждый раз возвращаясь обратно автобусом. Если бы он изменил скорость и за час проходил столько же, сколько он проходит, двигаясь 30 мин. по дороге, а затем 20 мин. по полю, то за то время, которое он провел в пути в своих пеших переходах из A в B, он прошел бы 112 км. С какой скоростью он двигался по дороге и по полю?

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых область значений функции

$$y=\frac{a+2\cos x}{a-\sin^2 x+1}$$

содержит отрезок $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.

1989

Вариант 1

1. Определить, какое из чисел больше:

$$2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}\quad\text{или}\quad 3\log_8 26.$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x\leqslant\frac{2}{x-1}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7:5$. Найти AD, если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.

5. В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + \\ + (12a - 18 - 2a^2)\cdot(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

Вариант 2

1. Определить, какое из чисел больше:

$$2\log_3 4 \quad \text{или} \quad 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}.$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x \geqslant \frac{6 - x}{x - 2}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = \sin 2x - 1$$

на отрезке $[0; \pi]$.

4. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, CD — биссектриса, величина угла BDC равна $75°$. Найти BD, если известно, что $AC = \sqrt{3}$.

5. В расплаве массой 500 кг содержится медь и олово. Из этой смеси отлили часть, по массе превышающую на 100 кг массу меди в расплаве, и добавили количество олова, равное по массе отлитой части расплава. После этого

отлили столько же получившейся смеси. В результате последней операции количество меди в расплаве уменьшилось в $\frac{25}{4}$ раз по сравнению с ее содержанием в исходном расплаве. Определить процентное содержание олова в исходном расплаве.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых уравнение

$$(a^2-4a+4)(4+4\sin^2 x+8\sin x)+$$
$$+2(16a-16-4a^2)\cdot(\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x)-8a+28=0$$

имеет по крайней мере одно решение.

Вариант 3

1. Определить, какое из чисел больше:

$$2\log_2 5 \quad \text{или} \quad 3\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{23}.$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x \leqslant \frac{2}{x+1}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{|\cos x|}{\cos x}=\cos 2x-1$$

на отрезке $[\pi;2\pi]$.

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, CD — биссектриса, $AD=2\sqrt{3}$. Найти BC, если известно, что $DM=\sqrt{3}$, где DM — высота треугольника ADC.

5. В сосуде находилось 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в $\frac{9}{4}$ раз по сравнению с исходным количеством. Определить первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых уравнение

$$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-\sin^2 x)+$$
$$+(32+2a^2+16a)(\cos x-1)+3a+10=0$$

не имеет решения.

Вариант 4

1. Определить, какое из чисел больше:

$$2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4} \quad \text{или} \quad 3\log_{27}15.$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x \leqslant \frac{4x+3}{x+2}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin x}{|\sin x|} = \sin 2x - 1$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, $CD=\sqrt{6}$, величина угла ABC равна $60°$. Найти AC, если величина угла ADC равна $105°$.

5. Из бака, содержащего 30 литров раствора красителя, отлили часть раствора и добавили равное по объему отлитой части количество воды, после чего вылили столько же литров нового раствора. В результате последней операции количество красителя в баке уменьшилось в 9 раз по сравнению с его содержанием в исходном растворе. Определить первоначальное количество воды в растворе, если известно, что объем добавленной в раствор воды на 5 литров меньше первоначального количества красителя, содержащегося в растворе.

6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых уравнение

$$(4a^2-8a+4)(1-\sin^2 x)^2 + 2(4a-2-2a^2)\cos^2 x + 4a + 6 = 0$$

имеет по крайней мере одно решение.

§9. Геологический факультет (отделение общей геологии)

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4^x - 8\cdot 2^x - 128 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant 3x - 3.$$

3. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leqslant -\frac{7}{8}$ и $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.

4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5 см, сумма длин двух других сторон равна 7 см, косинус угла BAC равен $\frac{4}{5}$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В саду приготовили N ям для посадки деревьев. После того, как посадили имеющиеся яблони, груши и сливы, оказалось, что было использовано менее трети ям, при этом груш было посажено на 6 штук больше, чем яблонь. Если бы яблонь посадили в три раза больше, то остались бы неиспользованными 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено, если известно, что на оставшиеся места посадили персиковые деревья и их оказалось в три раза больше, чем слив?

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобочная трапеция $ABCD$, у которой величины углов при основании AD равны $\frac{3\pi}{8}$, а длины оснований равны $1+\sqrt{2}$ и 1. Основание H высоты SH пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$ и удалено на расстояние 1 от вершины A. Найти радиус описанного около пирамиды шара, если известно, что длина высоты SH равна $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$, а $BH \perp AD$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$9^x - 6\cdot 3^x - 27 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \leqslant 2x + 2.$$

3. Найти $\sin 2\alpha$, если $\cos 2\alpha \geqslant \frac{7}{25}$ и $\sin\alpha \geqslant \frac{3}{5}$.

4. В треугольнике KMN длина стороны KM равна 6 см, разность длин сторон MN и KN $(MN - KN)$ равна 2 см, косинус угла KMN равен $\frac{3}{5}$. Найти площадь треугольника KMN.

5. В магазине имеется три вида наборов игрушек: металлических, пластмассовых и мягких. Детский сад купил по одному набору металлических и пластмассовых игрушек и 4 набора мягких, при этом количество игрушек совпало с числом детей в саду. Если бы было куплено 4 набора металлических и один набор мягких игрушек, то 57 детям игрушек бы не досталось. Количество игрушек, составляющих 4 набора пластмассовых и один мягких, на 41 меньше числа детей. Сколько детей было в детском саду, если, купив по три набора игрушек каждого вида, детский сад не обеспечил бы всех детей игрушками?

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которой величина угла при вершине A равна $\frac{\pi}{4}$, а ребра AC и AB имеют одинаковую длину $1+\sqrt{2}$. Основание H высоты SH пирамиды расположено так, что $CH \perp AB$, $BH \parallel AC$. Найти радиус описанного около пирамиды $SABC$ шара, если длина высоты SH равна $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$25^x - 20 \cdot 5^x - 125 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} \leqslant 2x + 4.$$

3. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{8}$ и $\cos\alpha \leqslant -\frac{3}{4}$.

4. В остроугольном треугольнике ABC длины сторон AB и CA равны соответственно 4 см и 3 см. Найти площадь треугольника, если синус разности углов ACB и ABC равен $\frac{7}{25}$.

5. Заданы четыре натуральных числа. Сумма первых трех чисел не превосходит трети четвертого числа. Сумма первого числа, умноженного на 7, и третьего числа на 58 меньше четвертого. Если к четвертому числу прибавить 11, то сумма будет равна сумме первого, второго и пяти третьих чисел. Найти четвертое число, если оно на 52 больше суммы первого, удвоенного второго и третьего.

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобочная трапеция $ABCD$, у которой величины углов при основании AB равны $\frac{5\pi}{8}$, а длины оснований равны $\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$. Основание H

высоты SH пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$ и удалено на расстояние $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ от вершины C. Известно, что $AH \perp DC$. Найти высоту SH пирамиды, если радиус описанного вокруг пирамиды шара равен $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$4^x - 4\cdot 2^x - 32 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 3x-6.$$

3. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos 2\alpha \geqslant -\dfrac{119}{169}$ и $\sin\alpha \leqslant -\dfrac{5}{13}$.

4. Найти площадь треугольника MNK, у которого длина стороны KN равна 2 см, разность длин сторон NM и MK составляет $2(\sqrt{5}-2)$ см, косинус угла NMK равен $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

5. Двум рабочим и ученику поручили изготовить некоторое количество деталей. За одну смену они выполнили меньше половины задания. Заканчивать работу пришлось второму рабочему, который затратил на это еще две смены. Если бы им помогал еще один рабочий с такой же производительностью, как у первого, то за смену они сделали бы на 23 детали меньше задания. Если бы производительность ученика была вдвое больше, то после одной смены работы им осталось бы сделать 32 детали. Сколько деталей надо было изготовить, если известно, что число деталей есть квадрат целого числа?

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого длины сторон AB и AC равны, а величина угла при вершине A равна $\dfrac{\pi}{4}$. Основание H высоты SH пирамиды расположено так, что $BH \parallel AC$, $CH \perp AB$. Найти площадь треугольника ABC, если длина высоты SH равна $2+\sqrt{2}$, а радиус описанного вокруг пирамиды шара равен $\sqrt{\dfrac{7+6\sqrt{2}}{2}}$.

1985

Вариант 1

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$2^{\log_3 5} - 0,1 \quad \text{или} \quad 5^{\log_3 2}.$$

Результат обосновать.

2. Решить уравнение

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$$

3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за один час 30 деталей?

4. Решить уравнение

$$5\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=4.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 4. На середине ребра BC взята точка M, а на ребре $A'D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N. Найти длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

Вариант 2

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$2^{\log_7 3}+0,1 \quad \text{или} \quad 3^{\log_7 2}.$$

Результат обосновать.

2. Решить уравнение

$$\frac{|x+2|}{|x+1|-1}=1.$$

3. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 120 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Если первый поезд выйдет из A на два часа раньше, чем второй выйдет из B, то они встретятся на середине пути. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B, если через час после встречи расстояние между поездами будет равно 80 км?

4. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+3\sin x\cos x-3\cos^2 x=1.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+5)(2x+4)}-2\sqrt{x+3}-2=2\sqrt{x+5}-\sqrt{(x+3)(2x+4)}.$$

6. На грани $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 6, задана точка P, удаленная от ребра BC на расстояние 1, а от ребра AB на расстояние 3. На грани $A'ADD'$ дана точка Q, удаленная от ребра $A'A$ на расстояние 1, а от ребра $A'D'$ — на 2. Найти длину кратчайшего пути между точками P и Q по поверхности куба.

Вариант 3

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$7^{\log_5 2} - 0,1 \quad \text{или} \quad 2^{\log_5 7}.$$

Результат обосновать.

2. Решить уравнение

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1.$$

3. Расстояние между пунктами A и B, равное 80 км, второй грузовик проезжает на два часа быстрее первого. За сколько часов первый грузовик проедет путь из A в B и обратно, если за один час, двигаясь навстречу друг другу, они вместе проедут $\frac{3}{4}$ пути от A до B?

4. Решить уравнение

$$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 3.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4}.$$

6. На ребре RS куба $PRSTP'R'S'T'$ на расстоянии 2 от вершины S взята точка A, а на ребре $P'T'$ на расстоянии 1 от вершины P' взята точка B. Найти длину кратчайшего пути между точками A и B по поверхности куба, если длина ребра куба равна 5.

Вариант 4

1. Определить, какое из двух чисел больше

$$5^{\log_3 7} + 0,1 \quad \text{или} \quad 7^{\log_3 5}.$$

Результат обосновать.

2. Решить уравнение

$$\frac{|x+3|}{|x+2|-1} = 1.$$

3. Мотоциклист проходит дистанцию длиной 30 км на два часа быстрее велосипедиста. За какое время велосипедист проедет половину дистанции, если за $\frac{1}{2}$ часа, двигаясь навстречу друг другу, они вместе проходят $\frac{2}{3}$ дистанции?

4. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x+2)} - 2\sqrt{x+2} - 2 = 2\sqrt{x+4} - \sqrt{(x+4)(2x+2)}.$$

6. Дан куб $PRSTP'R'S'T'$, длина ребра которого равна 10. На ребре RS взята точка A на расстоянии 4 от вершины S. На грани $P'PTT'$ взята точка B, удаленная от ребер $P'P$ и $P'T'$ на расстояние 2. Найти длину кратчайшего пути между точками A и B по поверхности куба.

1986

См. часть I, §8, 1986.

1987

См. часть I, §8, 1987.

1988

Вариант 1

1. Катеты прямоугольного треугольника ABC $AB = 1$ и $AC = 2$. На AB как на стороне построен квадрат $ABDE$. Определить, что больше: $AC + BC$ или $3 \cdot AD$.

2. Найти все значения α, удовлетворяющие равенству

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin(4\alpha + 60^\circ)} = 1.$$

3. В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон на отрезки длиной 12 и 3, меньшее основание равно 9. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство

$$-2\log_3\left(\frac{3x+2}{x}\right) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} x^2.$$

5. В пионерский лагерь отправилась автобусная колонна с 510 пионерами, состоящая из "Икарусов" и "Лиазов", причем количество тех и других нечетно. Число пионеров в каждом из "Лиазов" одинаково и кратно трем, а в каждом "Икарусе" — в 1,2 раза больше, чем в одном "Лиазе". Сколько всего автобусов в колонне?

6. Найти все пары значений параметров $(a; b)$, при каждой из которых уравнение

$$|x - \sin^2 a| + |x + \cos^2 4a - 2\sin a \cdot \cos^4 4a| = b\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 8$. Определить, что больше: $AC - AB$ или удвоенная сторона квадрата с диагональю 5.

2. Найти все значения φ, удовлетворяющие равенству

$$\frac{\cos 15^\circ}{\cos(3\varphi + 60^\circ)} = -1.$$

3. В трапецию, площадь которой равна 72, вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон на отрезки длиной 8 и 2. Найти основание трапеции.

4. Решить неравенство

$$-\log_7 x^2 \leqslant 2\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{4x+3}{x}\right).$$

5. 270 батареек для электронных часов упакованы в картонные и пластмассовые коробочки. Количество как тех, так и других коробочек нечетно. Известно, что число батареек в каждой из пластмассовых коробочек одинаково и в 2,8 раза больше числа батареек в любой картонной коробочке. Сколько батареек упаковано в пластмассовые коробочки?

6. Найти все пары значений параметров $(a; b)$, при каждой из которых уравнение

$$|x - \sin^2 6a| + |x - 2\sin 6a \cdot \cos^4 a + \cos^2 a| = b\left(a - \frac{5}{2}\pi\right)$$

имеет единственное решение.

1989

См. часть I, §8, 1989.

§10. Экономический факультет (отделение политической экономии)

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_2(x+2) = 7 - \log_2(5x+6).$$

2. Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x.$$

3. Решить неравенство

$$2|x-4| + |3x+5| \geqslant 16.$$

4. Пятьдесят два землекопа, работающие с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых вырыла по одинаковому котловану. Обе бригады работали с перерывами на отдых. Первая бригада, закончив работу на 1 час позже второй, отдыхала не менее полутора часов. Вторая бригада отдыхала не более 1 часа 20 минут. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая могла бы вырыть котлован в 1,5 раза больше, а вторая — в 1,4 раза больше. Определить число землекопов в каждой бригаде.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны. Сторона BC имеет длину, равную 4, величина угла ADC равна $\frac{\pi}{3}$, а величина угла BAD равна $\frac{\pi}{2}$. Найти длину стороны CD, если площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB{\cdot}CD + BC{\cdot}AD)$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3+a^2-a-1} - x^2\sqrt{a^3+a^2} + x\sqrt{a^4-a^2} - a^2 \leqslant 0$$

удовлетворяет условию $a \leqslant x \leqslant 2a+1$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_3(3x+6) = 4 - \log_3(5x-4).$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{2}{\sin 2x}.$$

3. Решить неравенство

$$|2x+3|+|x-2| \geqslant 4.$$

4. Две бригады токарей выточили по одинаковому количеству деталей. Вторая бригада закончила работу на 20 минут раньше первой. Если бы в первой бригаде было на два человека меньше, то ей пришлось бы работать на час дольше. Сколько токарей в каждой бригаде, если известно, что в первой их больше четырех и производительность всех токарей одинакова?

5. В трапеции $ABCD$ величина угла BCD равна $\frac{7\pi}{12}$, длина боковой стороны AB равна 7. Найти длину нижнего основания трапеции AD, если площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(AD{\cdot}BC + AB{\cdot}CD)$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{(a+2)(a^2-a-6)}-x^2\sqrt{a^4-a^3-6a^2}+x\sqrt{a^3+2a^2}-a^2 \leqslant 0$$

удовлетворяет условию $2 \leqslant x \leqslant 2a+6$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_2(4x-2) = 7 - \log_2(2x+5).$$

2. Решить уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}.$$

3. Решить неравенство

$$3|x-2| + |5x+4| \leqslant 10.$$

4. Сорок девять колхозников, работающие с одинаковой производительностью, были разбиты на две бригады, каждая из которых собрала одинаковое количество картофеля. Первая бригада закончила работу на 1 час позже второй. Обе бригады работали с перерывами на отдых, причем вторая бригада отдыхала не менее $\frac{8}{9}$ часа и не более $\frac{8}{6}$ часа. Если бы обе бригады работали без перерывов, то первая бригада могла бы собрать картофеля в $\frac{7}{4}$ раза больше, а вторая — в $\frac{5}{3}$ раза больше. Сколько колхозников в каждой бригаде?

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, длина стороны AB равна 3, величина угла ABC равна $\frac{\pi}{4}$, а величина угла BCD равна $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину сто-

роны AD, если известно, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB{\cdot}CD + BC{\cdot}AD)$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3 - 2a^2 - 4a + 8} - x^2\sqrt{a^3 - 2a^2} + x\sqrt{a^4 - 4a^2} - a^2 \leqslant 0$$

удовлетворяет условию $2a \leqslant x \leqslant \sqrt{13}a$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_3(x - 5) = 4 - \log_3(3x + 5).$$

2. Решить уравнение

$$\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 1.$$

3. Решить неравенство

$$7|x + 2| + |2x - 5| \leqslant 20.$$

4. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.

5. В трапеции $ABCD$ величина угла BAD равна $\frac{\pi}{3}$, а длина верхнего основания BC равна 5. Найти длину боковой стороны CD, если площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(AD{\cdot}BC + AB{\cdot}CD)$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{(a+3)(a^2+a-6)} - x^2\sqrt{a^4+a^3-6a^2} + x\sqrt{a^3+3a^2} - a^2 \leqslant 0.$$

удовлетворяет условию $1 \leqslant x \leqslant 4 + a$.

1985

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{4x - 1}{3x + 1} \geqslant 1.$$

2. Решить уравнение

$$2\sin x = 3\operatorname{ctg} x.$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел еще один пешеход. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, длина стороны AD равна 3. Найти длину стороны BC.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{5x + 2}{3 - x} \geqslant -7.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x = 2\operatorname{ctg} x.$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{3x^2 + 11x + 12}.$$

5. Бассейн наполняется двумя трубами. Сначала включили одну из труб, а затем, не ранее, чем через 4 часа, включили вторую трубу. После этого прошло еще не менее 2 часов, когда в результате их совместной работы бассейн был наполнен. Известно, что одна из труб наполняет бассейн вдвое быстрее, чем другая труба, но не быстрее, чем

на 5 часов. Узнать, за какое время наполняет бассейн каждая труба.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны между собой, диагональ AC является биссектрисой угла A, длина стороны AB равна 4. Найти длину стороны BC.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{4x-1}{2-3x} \geqslant -\frac{5}{8}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{6}\cos x = 5\operatorname{tg} x.$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = 4$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{-x^2+2x-1}{6x^2-7x+3}.$$

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 1 час 20 минут вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а второй достиг B не раньше, чем через 2 часа после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 40 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 2 раза больше скорости другого.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 7, а площадь всего четырехугольника не превосходит 28, длина стороны AD равна $\sqrt{5}$. Найти длину стороны BC.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{3x+4}{5-8x} \leqslant -3.$$

2. Решить уравнение

$$6\cos x = -5\operatorname{tg} x.$$

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2\log_3 x - \log_a x + 3\log_9 x = -3$$

имеет решения, и найти все эти решения.

4. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{5x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x + 1}.$$

5. Два экскаватора роют траншею. Сначала начал работать только один из них, а затем, не ранее, чем через 2 часа, присоединился второй. После этого прошло еще не менее часа, когда траншея была вырыта. Известно, что один из этих экскаваторов мог бы вырыть всю траншею вдвое быстрее другого, но не быстрее, чем на 2,5 часа. Узнать, за какое время мог бы вырыть траншею каждый из экскаваторов.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площади треугольников ABE и CDE равны, а площадь всего четырехугольника превосходит площадь треугольника ABE не больше, чем в 4 раза. Найти длину стороны CD, если длина стороны AB равна $\sqrt{7}$.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+4}(9x^2 + 21x + 10) = 0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$, в котором длина стороны AB равна 6, а длина стороны AD равна $3\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD. Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найти

площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

5. Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер SC, BC и AC равны соответственно $\frac{1}{6}\sqrt{93}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3^{2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+x}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + 2\cos y = -\frac{11}{2}, \\ 4x + 10\cos y = 7. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{5x+3}(5x^2 - x - 4) = 0.$$

4. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором длина стороны AB равна 10. Окружность радиуса $4 - 2\sqrt{2}$ с центром в точке K касается сторон AB и AD. Окружность радиуса $4 + 2\sqrt{2}$ с центром в точке L, лежащей на стороне CD, касается стороны AD и первой окружности. Найти площадь треугольника CLM, если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

5. Химический завод имеет цеха трех типов. В каждом цехе первого, второго и третьего типа работают соответственно 350, 80 и 30 рабочих, а также 91, 19 и 8 технологов. Всего в цехах завода работают 980 рабочих и 252 технологов. Найти число цехов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 15.

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер SC, AB и BC равны соответственно $\frac{\sqrt{33}}{2}$, 5 и 7. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{15}{\sqrt{11}}$. Найти угол между плоскостью основания ABC и плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$7^{x+3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3\sin y = \frac{17}{2}, \\ -3x + 2\sin y = -14. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{-2x+3}(3x^2 - 7x + 2) = 0.$$

4. В прямоугольнике $KLMN$, в котором длина стороны KL равна 7, а длина стороны LM равна $3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке A касается сторон KL и KN. Окружность радиуса 2 с центром в точке B касается стороны MN и первой окружности. Найти площадь треугольника BCN, если C — основание перпендикуляра, опущенного из вершины M на прямую, проходящую через точки A и B.

5. Радиозавод имеет сборочные линии трех типов. На каждой линии первого, второго и третьего типа ежедневно собирается соответственно 100, 400 и 30 приемников первого класса, а также 19, 69 и 5 приемников высшего класса. В сумме на всех линиях ежедневно собирается 1030 приемников первого класса и 181 приемник высшего класса. Найти число имеющихся линий каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 10.

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер AB, BC, CA и SC равны соответственно 4; 6; 8 и $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Известно, что ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC. Найти площадь сечения

пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$11^{x-1} = \left(\frac{1}{11}\right)^{2x-1}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \cos y = -7, \\ -4x - 6\cos y = 17. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{-2x-1}(4x^2 + 5x + 1) = 0.$$

4. Дан прямоугольник $KLMN$, в котором длина стороны KL равна 5. Окружность радиуса $2 - \sqrt{2}$ с центром в точке A касается сторон KL и KN. Окружность радиуса $2 + \sqrt{2}$ с центром в точке B, лежащей на стороне MN, касается стороны KN и первой окружности. Найти площадь треугольника BCN, если C — основание перпендикуляра, опущенного из вершины M на прямую, проходящую через точки A и B.

5. В городе есть гостиницы трех типов. В каждой гостинице первого, второго и третьего типа имеется соответственно 150, 310 и 40 обычных номеров, а также 17, 37 и 5 номеров высшего разряда. Всего в гостиницах города имеется 1040 обычных номеров и 123 номера высшего разряда. Найти число гостиниц каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 10.

6. В пирамиде $SABC$ длины ребер SC, AB и BC равны соответственно $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 6 и 7. Известно, что ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен $\frac{16}{\sqrt{15}}$. Найти угол между плоскостью основания ABC и плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

2. В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. Решить неравенство

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-4)>3.$$

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\frac{AK}{KB}=\frac{3}{2}$, а $\frac{AM}{MC}=\frac{4}{5}$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0.$$

2. Мясокомбинат производит за день 9 тонн колбасных изделий трех сортов по цене соответственно 2 руб., 3 руб. и 8 руб. за 1 кг на общую сумму 30 тыс. руб. Известно, что количества тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится комбинатом за день?

3. Решить неравенство

$$\frac{|4-x|-x}{|x-6|-2} > 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2+2x+1)+\log_{-x-1}(-x^2-5x-4) \leqslant 3.$$

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC, а точка L на стороне BC расположена так, что $\frac{BL}{LC}=\frac{2}{5}$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB, пересекает отрезок BM в точке O, причем $\frac{BO}{OM}=\frac{7}{4}$. Найти отношение, в котором точка M делит сторону AC.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

2. В магазине продано 6 тонн сыра трех сортов по цене соответственно 2 руб., 3 руб. и 4 руб. за 1 кг на общую сумму 19 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданного сыра соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн сыра каждого сорта продано в магазине?

3. Решить неравенство

$$\frac{|x+2|+x}{|x+3|-1} \leqslant 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10) > 3.$$

5. В треугольнике KLM точка N на стороне KM и точка P на стороне KL расположены так, что $\frac{KN}{NM}=\frac{3}{7}$, а $\frac{KP}{PL}=\frac{5}{2}$. Прямая, проходящая через точку P параллельно стороне LM, пересекает прямую LN в точке O. Найти отношение, в котором точка O делит отрезок LN.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0.$$

2. Кондитерская фабрика производит за неделю 12 тонн конфет трех сортов по цене соответственно 2 руб., 5 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 50 тыс. руб. Известно, что количества тонн производимых за неделю конфет соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн конфет каждого сорта производит фабрика за неделю?

3. Решить неравенство

$$\frac{|x+4|+x}{|x+6|-2} > 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+5}(x^2+4x+4)+\log_{-x-2}(-x^2-7x-10) \leqslant 3.$$

5. В треугольнике KLM точка N лежит на стороне KM, а точка P — на стороне LM, причем $\frac{LP}{PM}=\frac{1}{4}$. Прямая, проходя-

щая через точку P параллельно стороне KL, пересекает отрезок LN в точке O. Найти отношение, в котором точка N делит сторону KM, если известно, что $\dfrac{LO}{ON} = \dfrac{8}{5}$.

1988

Вариант 1

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \quad \text{или} \quad 3?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + x - 6} > -1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos 2x.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| \leqslant 2 + x.$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $\dfrac{13}{20}$, а сумма углов ABC и ADB равна π. Найти периметр треугольника ABC, если длина стороны BC равна 2.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|3\sin^2 x + 2a \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a| \leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

Вариант 2

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \quad \text{или} \quad 3?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$2 > x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right) = \cos 3x \cdot \cos 2x.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$2(2-x) \geqslant |y-x^2| + |y+x^2|.$$

5. В треугольнике PQR на стороне PR взята точка S так, что длина отрезка PS в три раза больше длины отрезка SR, а сумма углов QPR и QRP равна углу PSQ. Найти периметр треугольника PQS, если длина стороны PR равна 8, а косинус угла PQR равен $-\dfrac{23}{40}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|5\sin^2 x + 2a\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + a + 1| \leqslant 6$$

выполняется для любых значений x.

Вариант 3

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt{13} - \sqrt[3]{4} \quad \text{или} \quad 2?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$2 + \sqrt{x^2 - 2x - 24} > x.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 4x\cdot\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$|y-2x^2| + |y+2x^2| \leqslant 4(x+2).$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка H так, что длина отрезка BH равна 3, длина отрезка HC равна 2, а сумма углов ABC и AHB равна π. Найти периметр треугольника ABH, если косинус угла ACB равна $\dfrac{11}{16}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x - a + 1| \leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

Вариант 4

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} \quad \text{или} \quad 1?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить неравенство

$$x > -4 - \sqrt{x^2 + 6x - 16}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 6x \cdot \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$2(3 - 2x) \geqslant |y - x^2| + |y + x^2|.$$

5. В треугольнике PQR на стороне PR взята точка T так, что длина отрезка PT равна $\frac{16}{3}$, длина отрезка TQ равна 6, а сумма углов QPT и QRT равна углу PTQ. Найти периметр треугольника PQR, если косинус угла PQR равен $\frac{5}{9}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x + 2 - a| \leqslant 6$$

выполняется для любых значений x.

1989

Вариант 1

1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}.$$

2. Вычислить

$$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$$

3. Решить уравнение

$$\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найти величину угла CDB, если $AD = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4$, $BD : CE = 3 : 2$.

6. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

Вариант 2

1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 12}}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

2. Вычислить

$$\frac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \frac{\log_2 560}{\log_{35} 2}.$$

3. Решить уравнение

$$\big|x - 2 - |4 - x|\big| + x = 7.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{ctg}(3\cos x) = 1,$$

удовлетворяющие условию $\pi < x < 2\pi$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны DC за точку C в точке E. Найти величину угла BAD, если $AB = 2$, $BD = 2\sqrt{6}$, $CD = 5$, $BE : EC = 4 : 3$.

6. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$15x^2y^2 - 8yx^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0.$$

Вариант 3

1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}.$$

2. Вычислить

$$\frac{\log_3 42}{\log_{126} 3} - \frac{\log_3 378}{\log_{14} 3}.$$

3. Решить уравнение

$$\big|x + 1 + |-x - 3|\big| - 6 = x.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(3\sin x) = -1,$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найти величину угла ACB, если $CE = 1$, $BE = CD = 4$, $AD : BD = 4 : 1$.

6. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

Вариант 4

1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

2. Вычислить

$$\frac{\log_2 60}{\log_{60} 2} - \frac{\log_2 240}{\log_{15} 2}.$$

3. Решить уравнение

$$\big||-x-4| + x + 2\big| - 7 = x.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{ctg}(4\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

удовлетворяющие условию $\pi < x < 2\pi$.

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Сторона CB продолжена за точку B до точки E так, что $BE = 3$. Отрезок AE пересекает окружность в точке D и $DE = 2$. Найти величину угла ABC, если $AC = \sqrt{129}$, $AD : BC = 7 : 3$.

6. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$15x^2y^2 - 28x^2y - 8xy^2 + 5x^2 + y^2 + 38xy - 24x - 8y + 16 = 0.$$

§11. Экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики)

1984

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_8 \frac{6x-1}{2x^2+3} \geqslant 0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$y = 2|x-3| + |3x-2|.$$

3. Решить уравнение

$$3 - 12\sin^2 x - 2\cos 4x = -\frac{5}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, а длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти длину стороны AC.

5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12 квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16 квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

6. В основании пирамиды с вершиной S лежит прямоугольник, центр которого лежит на высоте пирамиды. Плоскость пересекает боковые ребра пирамиды в точках P, Q, M и N так, что P и M — противоположные вершины четырехугольника $PQMN$. Известно, что длина отрезка SP равна 7, длина отрезка SM равна $\frac{7}{6}$, сумма длин отрезков SQ и SN равна $\frac{25}{6}$, известно также, что длина отрезка SQ больше длины отрезка SN. Найти длины отрезков SQ и SN.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{6x+1}{5x^2+2} \leqslant 0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$y = |2x + 5| + 3|x - 1|.$$

3. Решить уравнение

$$28\sin^2 x + 3\cos 4x - 2 = 5\cos^2 x.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6, а длина стороны BC равна 16. Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найти длину стороны AC.

5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 6 квартирного дома необходимо 30 деталей первого и 40 деталей второго вида. Для сборки 10 квартирного дома требуется 40 и 60, а для дома на 14 квартир нужно 90 и 120 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго вида. Сколько и каких домов надо построить, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

6. Плоскость пересекает боковые ребра правильной шестиугольной пирамиды с вершиной S в точках A, B, C, D, E и F так, что вершины A, D и B, E являются противоположными в шестиугольнике $ABCDEF$. Известно, что длина отрезка SA равна $\frac{3}{2}$, длина отрезка SD равна 3, разность длин отрезков SC и SF равна $\frac{15}{4}$. Найти длины отрезков SC и SF.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{7 + 11x - 3x^2}{4 + x^2} \geqslant 0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$y = |4x + 6| + 3|x + 1|.$$

3. Решить уравнение

$$16\sin^2 x + 8\cos 4x + 1 = \frac{10}{\operatorname{tg}^2 x + 1}.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 9, а длина стороны AB равна 21. Кроме того известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти длину стороны AC.

5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 22 квартирного дома необходимо 60 деталей первого и 70 деталей второго вида. Для 25 квартирного

дома требуется 80 и 100, а для дома на 40 квартир нужно 120 и 150 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 1000 деталей первого и 1400 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее число квартир в них было наибольшим?

6. В основании пирамиды с вершиной S лежит прямоугольник, а длины всех боковых ребер равны между собой. Плоскость пересекает боковые ребра пирамиды в точках A, B, C и D, причем A и C — противоположные вершины четырехугольника $ABCD$. Известно, что длина отрезка SD равна $\frac{7}{4}$, длина отрезка SC равна $\frac{8}{5}$, произведение длин отрезков SB и SA равно $\frac{56}{9}$. Найти длины отрезков SA и SB.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+8}{x^2+2} \leqslant 0.$$

2. Найти наименьшее значение функции

$$y = |5x+2| + 2|2x-1|.$$

3. Решить уравнение

$$13\sin^2 x + \cos 4x - 2 = \cos 2x.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 3, а длина стороны AB равна 2. Кроме того известно, что центр окружности, проведенной через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найти длину стороны AC.

5. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 10 квартирного дома необходимо 50 деталей первого и 80 деталей второго вида. Для 14 квартирного дома требуется 80 и 120, а для дома на 19 квартир нужно 110 и 160 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 800 деталей первого и 1000 деталей второго вида. Сколько и каких домов надо собрать, чтобы общее число квартир в них было наибольшим?

6. Плоскость пересекает боковые ребра правильной шестиугольной пирамиды с вершиной S в точках P, Q, M, N, E и F (P и N, Q и E — противоположные вершины в шестиугольнике $PQMNEF$). Известно, что длина отрезка SQ равна $\frac{4}{3}$, длина отрезка SP равна 2, сумма длины отрезка SN с удвоенной длиной отрезка SE равна 10. Найти длины отрезков SE и SN.

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}.$$

2. Решить неравенство

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geqslant |x|.$$

3. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что длина отрезка AP меньше, чем длина отрезка AQ. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что длина отрезка PQ равна 3. Найти длину стороны AC.

4. В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

5. Среди всех решений (x, y, z, v) системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geqslant 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{-\cos x} = \sqrt{-1 + 2\sin^2 x}.$$

2. Решить неравенство

$$|x| \log_{\frac{1}{3}} \left(x + \frac{5}{9}\right) + x \geqslant 0.$$

3. В треугольнике ABC точки P и Q лежат на стороне AC, а прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что длина отрезка BP равна длине отрезка BQ, длина отрезка AB равна 9, длина отрезка BC равна 11. Найти длину стороны AC.

4. В полночь из пункта A в пункт B по течению реки отправился катер, а из B в A в тот же момент вышла лодка. Лодка была в пути не менее суток. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и возвратился в пункт A не позднее 10 часов 48 минут того же дня. Первая встреча катера и лодки состоялась в 4 часа утра. Узнать, когда катер прибыл в пункт B, если собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) втрое больше собственной скорости лодки.

5. Среди всех решений (a, b, c, d) системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geqslant 12 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $b + d$ принимает наименьшее значение.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}.$$

2. Решить неравенство

$$x \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2} - x\right) \geqslant |x|.$$

3. В треугольнике RPQ на основании PR расположены точки A и B, причем длина отрезка PA меньше длины отрезка PB. Прямые QA и QB делят медиану PM на три равные части. Известно, что длина отрезка PQ равна 6, а QA — высота. Найти длину стороны PR.

4. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позднее чем через 40 минут вслед за ним вышел второй. Известно, что в пункт B один из них пришел раньше другого не менее чем на час. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы прибыли в пункт B с интервалом не более чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

5. Среди всех решений (x, y, a, b) системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ a^2 + b^2 = 25, \\ xb + ya \geqslant 5\sqrt{3} \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x + a$ принимает наибольшее значение.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\sqrt{-\sin x} = \sqrt{-1 + 2\cos^2 x}.$$

2. Решить неравенство

$$|x| \log_{\frac{1}{5}} \left(x + \frac{4}{5}\right) \geqslant -x.$$

3. В треугольнике ABC высота BH и прямая BN делят медиану AM на три равные части. Точка N лежит на основании AC так, что длина отрезка AH меньше длины отрезка AN. Найти длину стороны AC, если длина отрезка AM равна 6, длина отрезка BN равна 9.

4. В 7 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились катер и лодка. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 13 часов, а прибыл в пункт A не ранее 17 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если собственная скорость (скорость в стоячей воде) катера в три раза больше собственной скорости лодки.

5. Среди всех решений (u, v, a, b) системы

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4, \\ a^2 + b^2 = 25, \\ ub + av \leqslant -10 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $v + b$ принимает наибольшее значение.

1986

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x + 7\log_y 3 = -10, \\ -5\sin x + 2\log_y 3 = 0,5. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geqslant 0.$$

4. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а величина угла BAD

равна $\frac{\pi}{3}$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P, такой, что $AP : PD = 1 : 3$. Найти площадь треугольника BPE.

5. В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \leqslant k \leqslant 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64 см^2, а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\frac{1}{4}$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на отрезках PQ, QR, RP, а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$5^{|2x+1|} = (\sqrt{5})^{-4x+3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cos x - 2\log_y 3 = -4, \\ -6\cos x + 7\log_y 3 = 2,5. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(3x^2 - 4x + 1)\sqrt{25x^2 - 20x + 3} \leqslant 0.$$

4. Около трапеции $KLMN$ описана окружность, причем основание KN является ее диаметром. Известно, что длина KN равна 4, а длина LM равна 2. Хорда MT пересекает диаметр KN в точке S, такой, что $KS : SN = 1 : 3$. Найти площадь треугольника STN.

5. В течение нескольких дней в города A и B завозили арбузы, причем ежедневные поставки арбузов в каждый город были постоянными и составляли целое число тонн. В итоге за все эти дни в город B было завезено на k тонн арбузов больше, чем в город A, где k удовлетворяет неравенствам $155 \leqslant k \leqslant 160$. Если бы ежедневные поставки в город A были

увеличены в 2 раза, то за то же число дней в A завезли бы на 91 тонну арбузов больше, чем в B. Сколько дней продолжался завоз арбузов? Каковы были ежедневные поставки в каждый город?

6. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ площадь боковой грани AA_1B_1B равна 16 см^2, а косинусы двугранных углов при ребрах AA_1 и BB_1 равны $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{8}$. В эту призму помещена треугольная призма $KLMK_1L_1M_1$ так, что вершины K, L, M лежат на отрезках AB, BC, CA, а вершины K_1, L_1, M_1 — на отрезках A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 соответственно. Известно, что призма $KLMK_1L_1M_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $KLMK_1L_1M_1$.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$3^{|1-x|} = (\sqrt{3})^{2x+3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7\sin x + 6\log_y 3 = -2,5, \\ 2\sin x - 5\log_y 3 = 6. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(8x^2 - 30x + 25)\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \geqslant 0.$$

4. В окружность радиуса 6 вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром. Из вершины B на основание AD опущена высота BF. Точка P делит AD в отношении $AP : PD = 1 : 3$ и лежит на хорде CE. Найти площадь треугольника BPE.

5. В течение нескольких дней в двух мебельных цехах изготовляли специальные шкафы, причем ежедневно в каждом цехе производилось постоянное число шкафов. В итоге за все эти дни во втором цехе было изготовлено на k шкафов больше, чем в первом, где k удовлетворяет неравенствам $120 \leqslant k \leqslant 125$. Если бы ежедневное производство шкафов в первом цехе увеличилось в 2 раза, то за то же число дней там было бы изготовлено на 77 шкафов больше, чем во втором цехе. Сколько дней изготовлялись шкафы? Сколько шкафов производилось в каждом цехе ежедневно?

6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площади боковых граней равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и 2. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F

лежат на отрезках PQ, QR, RP, а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$7^{|1-2x|} = (\sqrt{7})^{4x+3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos x - 7\log_y 3 = 5, \\ 4\cos x + 5\log_y 3 = -0,5. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$(3x^2 - 8x + 5)\sqrt{2x^2 - 7x + 6} \leqslant 0.$$

4. В окружность радиуса 4 вписана трапеция $KLMN$, причем ее основание KN является диаметром, а величина угла KLM равна $\frac{2}{3}\pi$. Хорда MT пересекает диаметр KN в точке Q, такой, что длина отрезка KQ равна 2. Найти площадь треугольника QTN.

5. В течение нескольких дней в двух металлургических цехах выплавлялась специальная сталь, причем ежедневное производство стали в каждом цехе было постоянным и составляло целое число тонн. В итоге, за все эти дни во втором цехе было выплавлено на k тонн стали больше, чем в первом, где k удовлетворяет неравенствам $113 \leqslant k \leqslant 118$. Если бы ежедневное производство стали в первом цехе увеличилось в 2 раза, то за то же число дней было бы выплавлено на 91 тонну стали больше, чем во втором цехе. Сколько дней выплавлялась специальная сталь? Сколько тонн стали производилось в каждом цехе ежедневно?

6. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ площади боковых граней AA_1C_1C и BB_1C_1C равна $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, а косинус двугранного угла при ребре CC_1 равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. В эту призму помещена треугольная призма $KLMK_1L_1M_1$ так, что вершины K, L, M лежат на отрезках AB, BC, CA, а вершины K_1, L_1, M_1 — на отрезках A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 соответственно. Известно, что призма $KLMK_1L_1M_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $KLMK_1L_1M_1$.

1987

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$

2. В магазине продано 10,5 тонны орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. Решить неравенство

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3.$$

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{4}{5}$. Найти отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$(1 + 2\cos x)\sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$

2. Мясокомбинат производит за день 3,5 тонны колбасных изделий трех сортов по цене соответственно 2 руб., 3 руб. и 4 руб. за 1 кг на общую сумму 9 тыс. руб. Известно, что количества тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится на комбинате за день?

3. Решить неравенство

$$\frac{|4-x|-x}{|x-6|-2} > 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2+2x+1)+\log_{-x-1}(-x^2-5x-4)\leqslant 3.$$

5. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, а точка O расположена на отрезке AD так, что $AO{:}OD{=}9{:}4$. Прямая, проходящая через вершину B и точку O, пересекает сторону AC в точке E, причем $BO : OE = 5 : 6$. Найти отношение, в котором точка E делит сторону AC.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{2}\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=0.$$

2. В магазине продано 10,5 тонны сыра трех сортов по цене соответственно 2 руб., 3 руб. и 4 руб. за 1 кг на общую сумму 24 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданного сыра соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн сыра каждого сорта продано в магазине?

3. Решить неравенство

$$\frac{|x+2|+x}{|x+3|-1}\leqslant 2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10)>3.$$

5. В треугольнике KLM точка P лежит на стороне KL, точка N — на стороне KM, а прямые PM и LN пересекаются в точке O. Найти отношение, в котором точка O делит отрезок LN, если известно, что $\dfrac{KP}{PL}=\dfrac{2}{5}$, а $\dfrac{KN}{NM}=\dfrac{3}{7}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+2|x|+3=5y+2x^2+2a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$(1+\sqrt{2}\cos x)\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=0.$$

2. Кондитерская фабрика производит за день 3,5 тонны конфет трех сортов по цене соответственно 4 руб., 5 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 16 тыс. руб. Известно, что количества тонн производимых за день конфет соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн конфет каждого сорта производит фабрика за день?

3. Решить неравенство

$$\frac{|x+4|+x}{|x+6|-2}>2.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+5}(x^2+4x+4)+\log_{-x-2}(-x^2-7x-10)\leqslant 3.$$

5. В треугольнике KLM точка P лежит на стороне LM, а точка N — на стороне KM. Прямые KP и LN пересекаются в точке O, причем $\frac{KO}{OP}=\frac{7}{4}$, а $\frac{LO}{ON}=\frac{5}{3}$. Найти отношение, в котором точка N делит сторону KM.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+2|x|-1=3y+2x^2-3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1988

Вариант 1

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} \quad \text{или} \quad 3?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x-1=2\cos x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5}>1.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|\leqslant 2+x.$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $\frac{13}{20}$, а сумма углов ABC и ADB равна π. Найти периметр треугольника ABC, если длина стороны BC равна 2.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$a(2a-1)\sin^3 x+3\cos^3 x-2a^2\sin x=0$$

является корнем уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg}x-1)-\log_2(3\operatorname{tg}x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5-\operatorname{tg}x)=1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 2

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\quad\text{или}\quad 3?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=2\sin x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x}>1.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$2(2-x)\geqslant|y-x^2|+|y+x^2|.$$

5. В треугольнике PQR на стороне PR взята точка S так, что длина отрезка PS в три раза больше длины отрезка SR, а сумма углов QPR и QRP равна углу PSQ. Найти периметр треугольника PQS, если длина стороны PR равна 8, а косинус угла PQR равен $-\frac{23}{40}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$3\sin^3 x+(a-2)(2a-5)\cos^3 x-2(a-2)^2\cos x=0$$

является корнем уравнения

$$\log_5(2\operatorname{ctg} x + 3) - \log_{\frac{1}{5}}(6 - \operatorname{ctg} x) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(3\operatorname{ctg} x + 2) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 3

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt{13} - \sqrt[3]{4} \quad \text{или} \quad 2?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить уравнение

$$2\cos x = 1 - 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 6} + 4x + 14}{x + 4} > 2.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$|y - 2x^2| + |y + 2x^2| \leqslant 4(x + 2).$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка H так, что длина отрезка BH равна 3, длина отрезка HC равна 2, а сумма углов ABC и AHB равна π. Найти периметр треугольника ABH, если косинус угла ACB равен $\frac{11}{16}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$(a - 2)\sin^3 x + 3a^2\cos^3 x + 2\sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$-\log_{\frac{1}{3}}(2 - \operatorname{tg} x) + \log_3(4 + \operatorname{tg} x) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(1 - 2\operatorname{tg} x) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 4

1. Какое из чисел больше

$$\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} \quad \text{или} \quad 1?$$

Ответ должен быть обоснован.

2. Решить уравнение

$$2\sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5x}-4x+26}{7-x}>2.$$

4. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$2(3-2x)\geqslant|y-x^2|+|y+x^2|.$$

5. В треугольнике PQR на стороне PR взята точка T так, что длина отрезка PT равна $\frac{16}{3}$, длина отрезка TQ равна 6, а сумма углов QPT и QRT равна углу PTQ. Найти периметр треугольника PQR, если косинус угла PQR равен $\frac{5}{9}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$3\sin^3 x-(a+2)(2a+5)\cos^3 x+2(a+2)^2\cos x=0$$

является корнем уравнения

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}(4-3\operatorname{ctg}x)-\log_{\frac{1}{7}}(8+\operatorname{ctg}x)-\log_7(3-4\operatorname{ctg}x)=1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

1989

См. часть I, §10, 1989.

§12. Факультет психологии

1984

Вариант 1

1. Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

2. Подъем в гору турист прошел за 2 часа. На спуск с горы, который на 18 км длиннее подъема, турист затратил вдвое больше времени, чем на подъем в гору. Найти общую длину пройденного туристом пути, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъеме.

3. Решить уравнение

$$2(\cos x-1)\sin 2x=3\sin x.$$

4. Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найти расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

5. Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое их которых обладает следующими двумя свойствами:

— первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр;

— разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

7. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leqslant 2,\\ x+3y\geqslant 2-\log_4 3.\end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{594\cdot 10^{-2}}{0,6}-0,9\right):\left(\frac{(27:1\frac{2}{7}+1,2:0,04):\frac{1}{70}}{(3\frac{1}{5}:4+1,5\cdot 0,4):0,02}\right)^{-1}.$$

2. Мастер и ученик, работая одновременно, каждый на своем станке, делают вместе 60 деталей за 4 часа. Если бы ученик

делал на 1 деталь в час больше, чем делает он сейчас, то тогда на изготовление каждой детали ученик затрачивал бы на 4 минуты больше, чем затрачивает на изготовление каждой детали мастер. Сколько деталей в час делает мастер?

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3}(\cos 2x + 1) = 2\cos x(2 - \cos 2x).$$

4. Две окружности радиусов 2 и 3 пересекаются в точках B и C. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; A_1 и A_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка A_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка A_1A_2 равна 9. Найти площадь выпуклого четырехугольника A_1BA_2C.

5. Первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой — натуральное число, равен 8, а разность между удвоенным вторым ее членом и половиной третьего ее члена больше 15. Найти знаменатель этой прогрессии.

6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое их которых обладает следующими двумя свойствами:

— первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

7. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1} + 2\cdot 3^{3y-1} \leqslant 2, \\ x + 5y \geqslant 2 - \log_3 2. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{5(1 - 3,75 : 8\frac{3}{4}) : 510}{(13 : 1\frac{2}{3} - 0,3 : \frac{1}{18}) : \frac{17}{25}}\right)^{-1} : \left(\frac{837\cdot 10^{-2}}{0,9} + 0,7\right).$$

2. Спортсмен плыл по озеру на лодке под парусом 6 часов. Затем ветер стих, а спортсмен пошел дальше на веслах и за втрое меньшее время преодолел на 20 км меньше, чем он прошел под парусом. Найти общую длину пройденного спортсменом пути, если каждый километр на веслах спортсмен проходил на 15 минут медленнее, чем под парусом.

3. Решить уравнение

$$\sin 2x(2\sin x + 4) + 3\cos x = 0.$$

4. Две окружности радиусов 7 и 5 пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с

окружностями, причем точка C_2 лежит на окружности с центром O_2, а длина отрезка C_1C_2 больше 17. Найти расстояние между точками O_1 и O_2, если сумма площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равна $6\sqrt{21}$.

5. Третий член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 5, а разность между квадратом второго ее члена и квадратом пятого ее члена больше 72. Найти первый член этой прогрессии.

6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое их которых обладает следующими двумя свойствами:

— вторая цифра числа в 5 раза меньше суммы двух других его цифр;

— разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой первой и последней его цифр, неотрицательна и делится на 72 без остатка.

7. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x-y} + 3\cdot 4^{2x-1} \leqslant 2, \\ 3x - y \geqslant 1 - \log_4 3. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Вычислить, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0,8} - 0,6\right) : \left(\frac{(42\cdot 3\frac{5}{6} + 3,3 : 0,03) : \frac{1}{15}}{(3\frac{3}{4} : 0,625 - 0,84 : 0,8) : 0,03}\right)^{-1}.$$

2. Два насоса за 4 часа совместной работы подают 96 кубометров воды. Если бы второй насос подавал в час на 6 кубометров больше, чем он подает сейчас, то тогда на накачивание каждого кубометра второй насос расходовал бы на 3 минуты больше, чем расходует на накачивание каждого кубометра первый насос. Сколько кубометров воды в час подает первый насос?

3. Решить уравнение

$$2\sin x(5 + \cos 2x) = 5\sqrt{2}\sin 2x.$$

4. Две окружности радиусов 4 и 5 пересекаются в точках B и C. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; A_1 и A_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка A_2 лежит на окружности с центром O_2, а длина отрезка A_1A_2 равна 15. Найти площадь выпуклого четырехугольника A_2BA_1C.

5. Первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой — натуральное число, равен 5, а разность между утроенным вторым ее членом и половиной третьего ее члена больше 20. Найти знаменатель этой прогрессии.

6. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое их которых обладает следующими двумя свойствами:

— вторая цифра числа в 2 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой первой и третьей его цифр, делится на 10 без остатка.

7. Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} + 4\cdot 3^{2x-1} \leqslant 2, \\ 4x + y \geqslant 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

1985

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x - \sin x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$4\cdot 4^x < 7\cdot 2^x + 2.$$

3. Алеша, Боря и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алеша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и 1 блокнот, Вася — 3 карандаша и 1 блокнот. Известно, что суммы денег, заплаченные Алешей, Борей и Васей, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько стоит блокнот?

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

5. Радиус окружности равен R. Отрезок AB является диаметром этой окружности. Длина хорды BC равна R. Хорда, длина которой равна длине хорды AC, пересекает отрезок AC в точке D, а отрезок AB в точке E. Величина угла ADE равна α. Найти площадь треугольника ADE.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} -15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7, \\ x < y, \\ 2a^2x + 3ay < 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3\sin x - 2\cos^2 x + 3 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$3 \cdot 9^x < 8 \cdot 3^x + 3.$$

3. Три столяра делают шкафы и полки. Все они затрачивают одинаковое время на изготовление 1 шкафа, а полку каждый из них делает за 5 часов. Первый столяр сделал 2 шкафа и 1 полку, второй — 1 шкаф и 2 полки, а третий — 1 шкаф. Известно, что количества времени, затраченные первым, вторым и третьим столярами, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько времени тратит столяр на изготовление 1 шкафа?

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$$

на отрезке $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.

5. Отрезок AB имеет длину $2R$ и является диаметром окружности. Длина хорды AC равна $R\sqrt{2}$, а другая хорда той же длины пересекает отрезок AC в точке D и отрезок AB в точке E. Величина угла BED равна α. Найти площадь треугольника ADE.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7, \\ x + y > 0, \\ 4a^2x - 3ay < 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3.$$

2. Решить неравенство

$$2 \cdot 4^x + 2^x < 1.$$

3. Три группы пассажиров садились в такси, вмещающие по 4 человека, и в одинаковые микроавтобусы. Первая группа заполнила 5 микроавтобусов и 5 такси, вторая — 3 микроавтобуса и 1 такси, третья — 1 микроавтобус и 2 такси. Известно, что количества людей в первой, второй и третьей группах пассажиров образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько пассажиров вмещает микроавтобус?

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x^2 + 3x + 2| + |x^2 - x|$$

на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

5. Радиус окружности равен R. Отрезок AB является диаметром этой окружности. Длина хорды BC равна $R\sqrt{3}$. Хорда, длина которой равна длине хорды AC, пересекает отрезок AC в точке D, а отрезок AB в точке E. Величина угла CDE равна α. Найти площадь треугольника ADE.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 2x^2 - 11xy + 15y^2 = 7, \\ x > y, \\ a^2x + 16ay < 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - \cos x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$3 \cdot 9^x < 1 - 2 \cdot 3^x.$$

3. Три грузовика перевозят железобетонные столбы весом по 300 кг и плиты. Первый грузовик нагрузили 3 плитами и 20 столбами, второй — 3 плитами и 10 столбами, третий — 1 плитой и 10 столбами. Известно, что веса грузов первого, второго и третьего грузовиков образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько весит 1 плита?

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x^2 - x| + |x^2 - 5x + 6|$$

на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

5. Отрезок AB имеет длину $2R$ и является диаметром окружности. Длина хорды AC равна $R\sqrt{2}$, а другая хорда той же длины пересекает отрезок AC в точке D и отрезок AB в точке E. Величина угла AED равна α. Найти площадь треугольника ADE.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7, \\ x > y, \\ 3a^2x - 4ay < 0. \end{cases}$$

1986

Вариант 1

1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{35-5x} = 9-2x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{6-\lg(x^4)}{3+2\lg(x^2)} < 2.$$

4. В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

5. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 см и 30 см, величина угла ABC равна α. Найти радиус окружности.

6. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2+xy+4y^2 \leqslant 3.$$

Вариант 2

1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\beta$, если $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-3} = 5-2x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\lg(x^2)-2}{4-3\lg(x^4)} > -\frac{1}{2}.$$

4. Имеется три слитка сплавов, содержащих золото. Вес каждого слитка — 1 кг. Если сплавить 500 г первого сплава и 200 г второго сплава, то в получившемся слитке будет содержаться столько золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава. Количества золота в данных слитках, взятые в порядке номеров сплавов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго сплава нужно взять, чтобы в них содержа-

лось столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава?

5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон трапеции AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E. Периметр треугольника DCE и длина основания трапеции AB равны соответственно 60 см и 20 см, величина угла ADC равна β. Найти радиус окружности.

6. Найти наименьшее из значений, которые принимает выражение $x + 5y$, если x и y положительны и удовлетворяют неравенству

$$x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leqslant 0.$$

Вариант 3

1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\beta$, если $\sin\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{15 - 3x} = 2x - 7.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2 - 3\lg(x^4)}{4 + 3\lg(x^2)} < \frac{1}{2}.$$

4. В три сосуда налито по 1 кг различных растворов сахара. Если смешать 300 г первого раствора и 200 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же сахара, сколько его содержится в 100 г третьего раствора. Количества сахара в трех растворах, взятые в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же сахара, сколько его содержится в 200 г третьего раствора?

5. Периметр треугольника ABC равен 20 см, а величина угла при его вершине B равна β. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает прямую AB в точке D, а прямую AC в точке E. Периметр треугольника ADE равен 30 см. Найти радиус окружности.

6. Найти наименьшее из значений, которые принимает выражение $x - 2y$, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2 + 2xy + 7y^2 \leqslant 6.$$

Вариант 4

1. Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{5}$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{5x + 5} = 2x - 3.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2\lg(x^2)+4}{\lg(x^4)-2} > -2.$$

4. Имеется три слитка сплавов, содержащих серебро. Вес каждого слитка — 1 кг. Если сплавить 300 г первого сплава и 100 г второго сплава, то в получившемся слитке будет содержаться столько же серебра, сколько его содержится в 200 г третьего сплава. Количества серебра в данных слитках, взятые в порядке номеров сплавов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго сплава нужно взять, чтобы в них содержалось столько же серебра, сколько его содержится в 500 г третьего сплава?

5. Через точку O проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности в точках A и B. Третья касательная пересекает лучи OA и OB в точках C и D, лежащих вне отрезков OA и OB. Длины отрезков OA и CD равны соответственно 5 см и 10 см, величина угла ODC равна β. Найти радиус окружности.

6. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+2y$, если x и y отрицательны и удовлетворяют неравенству

$$x^2-4xy+y^2+3 \leqslant 0.$$

1987

Вариант 1

1. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на $\frac{3}{2}$ больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

2. Решить уравнение

$$\log_2(x^2-2x-1)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)=1.$$

3. Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}.$$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20 м^2, 40 м^2, 60 м^2. Найти угол BAO, если известно, что $AB = 15$ м, $AO = 8$ м, а угол BOA больше 31°.

6. Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Вариант 2

1. Сумма третьего и пятого членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвертого членов равна $\frac{10}{3}$. Найти четвертый член прогрессии.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 + 2x - 1) - \log_{\sqrt{2}} x = 2.$$

3. Две бригады трактористов одновременно начали пахать два участка земли, причем участок второй бригады вдвое больше участка первой. Во второй бригаде было на 10 трактористов больше, чем в первой. Когда первая бригада еще работала, вторая уже вспахала свой участок. Какое наибольшее число трактористов могло быть в первой бригаде, если все трактористы работали с одинаковой производительностью?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}.$$

5. Прямая CE пересекает сторону AB треугольника ABC в точке E, а прямая BD пересекает сторону AC в точке D. Прямые CE и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников BOE, BOC, COD равны соответственно 15 м^2, 30 м^2, 24 м^2. Найти угол DOE, если известно, что $OE = 4$ м, $OD = 4\sqrt{3}$ м, а угол BOE — острый.

6. Доказать, что все решения неравенства

$$\log_2(x-1) + \log_3(x^2-1) > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$(\log_3(x^2-1))(\log_3 9(x^2-1)) > 2\log_2(x-1) - \log_2^2(x-1).$$

Вариант 3

1. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна квадрату знаменателя прогрессии, а сумма ее первых трех членов равна $\left(-\frac{7}{3}\right)$. Найти знаменатель прогрессии, если известно, что он положителен.

2. Решить уравнение

$$\log_5\left(x^2-\sqrt{5}x+\frac{1}{4}\right)-\log_5\left(\frac{5}{4}-x^2\right)=-1.$$

3. Два бассейна одновременно начали наполнять водой. Вода подавалась с помощью насосов одинаковой мощности. При этом число насосов, подававших воду в первый бассейн, было на 5 меньше числа насосов, подававших воду во второй бассейн. Емкость первого бассейна вдвое меньше емкости второго бассейна. Когда второй бассейн был полон, наполнение первого еще не закончилось. Какое наибольшее число насосов могло подавать воду в первый бассейн?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x\cdot\cos 2x-\frac{1}{3}}=\sqrt{-\cos x\cdot\sin 2x-\frac{1}{3}}.$$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD, AOB, BOC равны соответственно 20 м^2, 30 м^2, 15 м^2. Найти угол OCD, если известно, что $CD=4\sqrt{2}$ м, $OC=5$ м, а угол BOC — острый.

6. Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x^2+2x}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x^2+2\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}>2\sqrt[3]{x-1}-2x.$$

Вариант 4

1. Разность между третьим и пятым членами геометрической прогрессии равна $\frac{16}{81}$. Третий член равен $\frac{2}{9}$. Найти ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)=-1.$$

3. Две колонны грузовых автомобилей перевозили урожаи двух колхозов, причем урожай второго колхоза был в три раза меньше, чем урожай первого. В первой колонне было на 8 автомобилей больше, чем во второй колонне. Сделав каждый по одному

рейсу автомобили первой колонны перевезли весь урожай первого колхоза. Автомобили второй колонны, сделав каждый по одному рейсу, не смогли перевезти весь урожай второго колхоза. Какое наибольшее число автомобилей могло быть во второй колонне, если грузоподъемность всех автомобилей одинакова?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x \cdot \cos^2 x - \frac{1}{4}} = \sqrt{\sin^3 x - \frac{1}{4}}.$$

5. Прямая CD пересекает сторону AB треугольника ABC в точке D, прямая AE пересекает сторону BC треугольника ABC в точке E. Прямые CD и AE пересекаются в точке O. Площади треугольников COE, AOC, AOD равны соответственно 9 м^2, 27 м^2, 18 м^2. Найти угол DOE, если известно, что $OE = 2\sqrt{3}$ м, $OD = 4$ м, а угол AOD — тупой.

6. Доказать, что все решения неравенства

$$\log_3(x^2+1) + \log_2(x+1) > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$\log_3^2(x^2+1) + 2\log_3(x^2+1) > (\log_2(x+1))\left(\log_2\left(\frac{4}{x+1}\right)\right).$$

1988

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$1 - \sin\frac{x}{2} = \cos x.$$

2. Решить уравнение

$$32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}.$$

3. Решить неравенство

$$2x - 11 < 2\sqrt{36 - x^2}.$$

4. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановок, встретились через 24 часа после начала движения и продолжили свой путь, причем первый поезд прибыл в пункт B на 20 часов позднее, чем второй поезд прибыл в A. Сколько времени был в пути первый поезд?

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны соответственно точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 : AB = 1 : 3$ и $AC_1 : AC = 1 : 2$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность.

Через точку B_1 проведена прямая, пересекающая отрезок AC_1 в точке D, а окружность — в точке E. Найти площадь треугольника B_1C_1E, если $AC_1 = 4$, $AD = 1$, $DE = 2$, а площадь треугольника ABC равна 12.

6. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3} \cdot \left|\sin \frac{\pi}{2} x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0.$$

2. Решить уравнение

$$8^{4(x^3+8)} = 16^{7(x^2+2x)}.$$

3. Решить неравенство

$$2x - 17 < \sqrt{81 - x^2}.$$

4. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Они встретились через 4 часа после начала движения, продолжили свой путь, и легковой автомобиль прибыл в пункт B на 6 часов раньше, чем грузовой автомобиль прибыл в пункт A. Сколько часов был в пути грузовой автомобиль?

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $A_1B : AB = 1 : 2$ и $BC_1 : BC = 1 : 4$. Через точки A_1, B и C_1 проведена окружность. Через точку A_1 проведена прямая, пересекающая отрезок BC_1 в точке D, а окружность — в точке E. Найти площадь треугольника A_1C_1E, если известно, что $BC_1 = 6$, $BD = 2$, $DE = 3$, а площадь треугольника ABC равна 32.

6. Найти наибольшее значение параметра b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{b}}{8x - x^2 - 16} \geqslant -\frac{2}{3} b |\cos \pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

1989

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$x + 2 < \frac{1}{x + 4}.$$

2. Решить уравнение

$$\left|\cos^2\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\right|=5\cos x+1.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x 25+2y=2,\\ -(\log_x 0,2)^3+y=1.\end{cases}$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон AB, BC и CD, а другая — сторон AB, AD и CD. Прямая MN пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N и касается обеих окружностей. Найти расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p$, $BC=a$ и разность радиусов окружностей равна r.

5. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0.$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$x+3<\frac{1}{x+1}.$$

2. Решить уравнение

$$\left|\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right|=3\cos x+1.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2\log_x 8+3y=24,\\ -2(\log_x 0,5)^3+y=8.\end{cases}$$

4. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найти длину стороны MQ, если $NP=b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

5. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0.$$

§13. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики)

1984

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$8^x - 4^x = 2^x.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 3x \cdot \sin x + 1 = \cos 2x.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = -x^2 + 3|x - 1| + 2$$

на отрезке $[-2; 2]$.

4. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 см и 2 см соответственно. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне AC — точка N так, что длина отрезка AM равна 2, а длина отрезка AN равна 1,5 см. Найти площадь треугольника AMN, если длина стороны BC больше длины отрезка MN в $\frac{6}{\sqrt{17}}$ раз.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$27^x + 9^x = 3^{x+1}.$$

2. Решить уравнение

$$\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \cos x = 0,5.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 - 5|x + 1| - 2$$

на отрезке $[-3; 3]$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC с острым углом при вершине B взяты точки P и Q, причем P — середина стороны AB. Известно, что длины отрезков AB, BC и BQ равны соответственно 4 см, 5 см и 3 см. Найти длину отрезка PQ, если

площадь треугольника ABC на $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ см^2 больше, чем площадь треугольника PBQ.

5. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1985

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения

$$2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x,$$

удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.

2. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на две рыбы меньше, а Ваня — на двенадцать рыб меньше, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на восемнадцать рыб меньше Вани?

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1} - x) < 2.$$

4. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 3, длина медианы BM равна 5. На стороне BC взята точка Q так, что длины отрезков BQ и QC равны соответственно 1 и 5. Найти площадь S треугольника AQC, если известно, что $S > 3$.

5. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$4\cos x \cdot \sin a + 2\sin x \cdot \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}.$$

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2}\cos^2 x = \cos x,$$

удовлетворяющие условию $-6 < x < -4$.

2. Маша, Вера, Таня и Нина собирали грибы. Оказалось, что количества грибов, собранных каждой из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Таня нашла столько грибов, сколько Нина, а Нина нашла бы на двенадцать грибов больше, то количества грибов, собранных девочками, образовывали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько грибов нашла Вера?

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x+\sqrt{x-1}) > -1.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найти площадь S треугольника BPC, если известно, что $S > 3$.

5. Для каждого значения параметра b решить уравнение

$$3\cos x\cdot\sin b - \sin x\cdot\cos b - 4\cos b = 3\sqrt{3}.$$

1986

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$x - 3 + \frac{4}{x+1} > 0.$$

2. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = \cos x.$$

3. Из заготовки, имеющей форму круглого цилиндра с диаметром основания 20 см и высотой h см, вытачивается шар с диаметром h см. При каком значении h объем удаляемой части заготовки максимален?

4. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна стороне CD. Диагонали трапеции BD и AC пересекаются в точке O, причем треугольник BOC является равносторонним. Найти длину стороны CB, если длина стороны AB равна 5 см, а длина стороны CD равна 3 см.

5. Имеются два ящика с яблоками, причем в первом ящике 15 яблок, а во втором 16 яблок. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 1 их число во втором,

б) увеличить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 2 их число во втором,

в) уменьшить на 1 число яблок в первом ящике и одновременно увеличить на 2 их число во втором,

г) уменьшить на 2 число яблок в первом ящике и одновременно уменьшить на 1 их число во втором.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы одновременно в первом ящике оказалось 50 яблок, а во втором — 25 яблок. Ответ обосновать.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$x + 3 + \frac{4}{x-1} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$\cos^2 x - \cos 2x = \sin x.$$

3. Из заготовки, имеющей форму шара с диаметром 12 см, вытачивается прямой цилиндр с высотой h см. При каком значении h объем вытачиваемого цилиндра максимален?

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8 см, а величина угла ACB равна $60°$. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Длины отрезков BC и DC равны, а длина отрезка DE равна 3 см. Найти длину стороны BC.

5. В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и в любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых шаров,

б) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых шаров,

в) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых шаров,

г) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых шаров.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы в ящике оказалось 37 красных и 43 белых шаров? Ответ обосновать.

1987

1. Решить уравнение

$$2\cos 2x + 4\cos x = \sin^2 x.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{5-x^2}(2x^2 - 8x - 2) = 1 + \log_{5-x^2} 2.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 + 15x - 17} > x + 3.$$

4. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найти AB, если $BE = AM = 3$ см.

5. Решить неравенство

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

1988

Вариант 1

1. Вычислить

$$\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\sin 4x + 2\cos^2 x = 1,$$

каждое из которых удовлетворяет условию $|x| < 1$.

4. Окружность, проходящая через вершину D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и DC соответственно в точках M и N. Известно, что $AM : DM = 1 : 3$, $CN : DN = 4 : 3$. Найти длину основания BC, если $AB = 7$ и $AD = 6$.

5. Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на два автомобиля больше, чем вторая бригада. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

Вариант 2

1. Вычислить

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x-2| + 3|y+1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$2\sin^2 x + \cos 4x = 0,$$

каждое из которых удовлетворяет условию $|x| < 1$.

4. В параллелограмме $KLMN$ длина стороны KL равна 8. Окружность, касающаяся сторон NK и NM, проходит через

точку L и пересекает стороны KL и ML в точках C и D соответственно. Известно, что $KC : LC = 4 : 5$ и $LD : MD = 8 : 1$. Найти длину стороны KN.

5. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t.

1989

1. Решить уравнение

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 + x} > 1 + 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2.$$

4. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем угол CDA равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC = 2$ см, $OD = \sqrt{3}$ см.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам

$$x + y + z = x^2 + 4y^2$$

и

$$x + 2y + 3z = a.$$

Часть II

Ответы и решения

Введение

В дальнейшем при решении задач будут часто использоваться приводимые ниже определения и утверждения.

1. Уравнения с одним неизвестным. Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, и область M есть пересечение областей существования этих функций.

Если нужно найти все числа α из области M, для каждого из которых справедливо числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$, то говорят, что *нужно решить уравнение* $f(x) = g(x)$ или что *дано уравнение* $f(x) = g(x)$. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т. е. ОДЗ — множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (определены) и левая и правая части уравнения. Число α, принадлежащее ОДЗ уравнения, называется *корнем* или *решением* уравнения $f(x) = g(x)$, если при подстановке его вместо неизвестного x уравнение превращается в верное числовое равенство. *Решить уравнение* — это значит найти множество всех его корней. Отметим, что это множество может оказаться и пустым; в таких случаях обычно говорят, что *уравнение не имеет корней*.

Процесс решения уравнения обычно состоит из ряда шагов, на каждом из которых выполняются преобразования, имеющие целью заменить уравнение другим, более простым уравнением. Эту замену следует делать по определенным правилам так, чтобы следующее уравнение имело то же множество корней, что и предыдущее. Иногда используют преобразования, при которых множество решений следующего уравнения содержит все корни предыдущего уравнения. В связи с этом удобно ввести следующую терминологию.

Два уравнения называются *равносильными*, если совпадают множества их корней.

Два уравнения называются *равносильными на некоторой области M значений неизвестного x* (в частности, на ОДЗ),

если совпадают множества их корней, принадлежащих этой области.

Пусть даны два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Из определения равносильности уравнений следует, что вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение, ему равносильное. Если же заменить уравнение его следствием, то множество всех решений нового уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и помимо них может содержать еще некоторые числа, называемые *посторонними корнями* исходного уравнения. Поэтому если в процессе решения от уравнения перешли к его следствию, то в конце решения необходима проверка, т. е. необходимо каждый из найденных корней подставить в исходное уравнение и отобрать те из них, которые обращают исходное уравнение в верное числовое равенство; те из них, при которых исходное уравнение превращается в неверное числовое равенство, нужно отбросить. Разумеется, переходить от данного уравнения к уравнению, множество корней которого содержит не все корни данного уравнения, нежелательно, ибо при таком переходе возможна потеря корней данного уравнения, что недопустимо.

Приведем теперь некоторые утверждения о равносильности уравнений, а также утверждения о том, когда одно уравнение будет следствием другого.

Утверждения о равносильности уравнений.

1. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) - g(x) = 0$ равносильны.

2. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $\alpha f(x) = \alpha g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha \neq 0$.

4. Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны для любого фиксированного и не равного единице числа a.

5. Пусть n — натуральное число, и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^n(x) = g^n(x)$ равносильны.

6. Пусть фиксированное число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны; тогда на этом множестве уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны.

7. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$, функция $y = \varphi(x)$ определена и не обращается в

нуль ни в одной точке множества M. Тогда на множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны. Заметим, что множество M может совпадать с ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$.

В ряде случаев, когда равносильность преобразований уравнения (неравенства) не вызывает сомнений, в книге используется выражение "данное уравнение (неравенство) можно переписать в виде...".

Утверждения о том, когда одно уравнение является следствием другого.

1. Пусть n — натуральное число, тогда уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$.

2. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3. Уравнение $f(x) = g(x)\varphi(x)$ есть следствие уравнения

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x).$$

Эти утверждения часто формулируют иначе:

1. При возведении в натуральную степень обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (при этом не происходит потери корней).

2. При потенцировании обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

3. При освобождении уравнения от знаменателя можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

Следовательно, в случае применения этих преобразований необходима проверка.

Пусть даны уравнения

$$f_1(x) = g_1(x),\ f_2(x) = g_2(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x), \ldots,$$

причем уравнений или конечное число, или их бесконечно много.

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих уравнений. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений, то говорят, что дана *совокупность уравнений*

$$f_1(x) = g_1(x),\ f_2(x) = g_2(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x), \ldots,$$

и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой совокупности уравнений. При этом, если уравнений бесконечно много, то говорят, что дана *бесконечная совокупность*

уравнений. Число α из ОДЗ этой совокупности называется *корнем* или *решением* этой совокупности, если оно является корнем хотя бы одного уравнения совокупности. *Решить совокупность уравнений* — это значит найти множество всех ее корней. Если это множество окажется пустым, то говорят, что *совокупность уравнений не имеет корней*. Говорят, что уравнение $F(x) = G(x)$ *равносильно на области* M (в частности, на ОДЗ) совокупности уравнений

$$f_1(x) = g_1(x),\ f_2(x) = g_2(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x), \ldots,$$

если множество корней уравнения, принадлежащих области M, совпадает с множеством корней совокупности уравнений, принадлежащих множеству M.

Довольно часто встречаются уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = p(g(x))$ — сложная функция, являющаяся суперпозицией двух функций $g(x)$ и $p(g)$, где $p(g)$ — квадратный трехчлен: $ag^2 + bg + c$. В таких случаях уравнение $f(x) = 0$ записывают в виде $a(g(x))^2 + b(g(x)) + c$ и называют *квадратным уравнением относительно* $g(x)$. Для решения такого уравнения решают сначала квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (1)$$

В случае, если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ этого уравнения положителен, то уравнение (1) имеет два корня t_1 и t_2, и в этом случае уравнение $f(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$g(x) = t_1 \quad \text{и} \quad g(x) = t_2.$$

Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, и в этом случае уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$g(x) = -\frac{b}{2a}.$$

Если же $D < 0$, то уравнение (1), а значит, и уравнение $f(x) = 0$ не имеют корней.

Пусть дано уравнение, некоторые члены которого находятся под знаком абсолютной величины. Для решения таких уравнений обычно необходимо избавиться от знаков модуля. Так как по определению

$$|F(x)| = F(x) \quad \text{на множестве, где} \quad F(x) \geqslant 0,$$
$$|F(x)| = -F(x) \quad \text{на множестве, где} \quad F(x) < 0,$$

то для освобождения от знаков абсолютных величин надо найти все точки числовой оси, в каждой из которых меняет знак хотя бы одна из функций, находящихся под знаком абсолютной величины. Затем на числовой оси отмечаются все эти точки. Таким образом, числовая прямая разбивается на некоторое число промежутков. На каждом таком промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному уравнению на этом промежутке.

Каждое из полученных уравнений решается, и из полученного множества решений отбираются числа, лежащие на промежутке, соответствующие данному уравнению. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке. Наконец, для того чтобы выписать все корни исходного уравнения, собирают вместе (объединяют) все его корни, найденные на всех промежутках.

2. Неравенства с одним неизвестным. Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, и пусть область M есть пересечение областей существования этих функций. Если требуется найти все числа α из области M, для каждого из которых справедливо числовое неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$, то в таких случаях говорят, что *нужно решить неравенство* $f(x) > g(x)$, или что *дано неравенство* $f(x) > g(x)$. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) неравенства $f(x) > g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Число α, принадлежащее ОДЗ неравенства, называется *решением неравенства* $f(x) > g(x)$, если при подстановке его вместо неизвестного x неравенство превращается в верное числовое неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$. *Решить неравенство* — значит найти множество его решений. Отметим, что это множество может оказаться и пустым, в таких случаях обычно говорят, что *неравенство не имеет решений.*

Два неравенства называются *равносильными*, если совпадают множества их решений. Два неравенства называются *равносильными на некоторой области* M_1, если множество всех решений (принадлежащих этой области) первого неравенства совпадает с множеством всех решений (также принадлежащих этой области) второго неравенства.

При решении неравенств необходимо выполнять только равносильные преобразования.

Утверждения о равносильности неравенств.

1. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) - g(x) > 0$ равносильны.

2. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + \alpha > g(x) + \alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ равносильны для любого положительного числа α.

4. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) < \alpha g(x)$ равносильны для любого отрицательного числа α.

5. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(1; +\infty)$.

6. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(0; 1)$.

7. Пусть n — натуральное число, и на некотором множестве M_1 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^n > (g(x))^n$ равносильны.

8. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(1; +\infty)$, и на некотором множестве M_1 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x).$$

9. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(0; 1)$, и на некотором множестве M_1 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x)$$

равносильны.

10. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x) > g(x)$, функция $y = \varphi(x)$ положительна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x).$$

Пусть дано m неравенств

$$f_1(x) > g_1(x), \ldots, f_m(x) > g_m(x).$$

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих неравенств. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением каждого из этих неравенств, то говорят, что дана *система m неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ \vdots \\ f_m(x) > g_m(x), \end{cases}$$

и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой системы. Число α из ОДЗ системы неравенств называется *решением* этой системы, если оно является решением каждого из неравенств системы. *Решить систему неравенств* — это значит найти множество всех ее решений. Если это множество окажется пустым, то говорят, что *система неравенств не имеет решений.*

Пусть дано k систем неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ \vdots \\ h_1(x) > s_1(x), \end{cases} \dots \begin{cases} f_k(x) > g_k(x), \\ \vdots \\ h_k(x) > s_k(x). \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих систем. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением хотя бы одной из этих систем, то говорят, что дана *совокупность k систем неравенств*, и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой совокупности. Число α из ОДЗ совокупности систем неравенств (2) называется *решением* этой совокупности, если оно является решением хотя бы одной системы неравенств из совокупности (2). *Решить совокупность систем неравенств* (2) — это значит найти множество всех ее решений. Заметим, что если каждая из k систем совокупности (2) состоит только из одного неравенства, то говорят, что *дана совокупность k неравенств*. Говорят, что неравенство $f(x) > g(x)$ *равносильно на области* M_1 совокупности систем неравенств (2), если множество решений (принадлежащих этой области) неравенства $f(x) > g(x)$ совпадает с множеством решений (принадлежащих этой области) совокупности систем неравенств (2).

Пусть требуется решить неравенство

$$(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) > 0, \tag{3}$$

где a_1, a_2,..., a_n — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$.

Для решений таких неравенств применяется так называемый *метод интервалов*.

Суть этого метода состоит в следующем. На числовую прямую наносят числа a_1, a_2,..., a_n в порядке возрастания, В промежутке справа от наибольшего ставят плюс, в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак минус, затем знак плюс, затем знак минус и т. д. (рис. 1). Тогда решением нера-

венства (3) будет объединение всех тех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

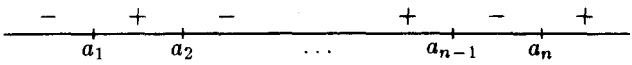


Рис. 1

Для того, чтобы с помощью метода интервалов решить неравенство

$$\frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)}{(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_m)} > 0, \tag{4}$$

где все числа α_i, β_j различны, нужно нанести на числовую прямую все точки α_i и β_j и расставить в получившихся промежутках знаки так, как указано выше. Множество решений неравенства (4) будет объединением тех интервалов, где стоят знаки плюс. Довольно часто встречаются неравенства $f(x) > 0$, где $f(x) = p(g(x))$ — сложная функция, составленная из двух функций $g(x)$ и $p(g)$, где $p(g)$ — квадратный трехчлен: $ag^2 + bg + c$. В таких случаях неравенство $f(x) > 0$ записывают в виде

$$a(g(x))^2 + b(g(x)) + c > 0 \tag{5}$$

и называют *квадратным неравенством относительно* $g(x)$. Неравенство (5) решают следующим образом. Сначала находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$. Возможны четыре случая:

1. Если $a < 0$ и $D \leqslant 0$, то неравенство (5) не имеет решений.
2. Если $a < 0$, $D > 0$, а t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 < t_2$, то неравенство (5) равносильно двойному неравенству

$$t_1 < g(x) < t_2.$$

3. Если $a > 0$, $D \geqslant 0$, а t_1 и t_2 — корни квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$, причем $t_1 < t_2$ (если $D = 0$, то $t_1 = t_2$), то неравенство (5) равносильно совокупности неравенств $g(x) < t_1$, $g(x) > t_2$.
4. Если $a > 0$ и $D < 0$, то множество решений неравенства (5) совпадает с областью определения функции $y = g(x)$.

Иногда в решениях задач используется термин дискриминант квадратного неравенства (уравнения) для обозначения дискриминанта соответствующего квадратного трехчлена.

Пусть дано неравенство, некоторые члены которого находятся под знаком абсолютной величины. Для решения таких не-

равенств освобождаются от знаков абсолютных величин. Это делается так же, как и для уравнений. Отметим, что поскольку множество решений неравенства $f(x) \geqslant g(x)$ есть объединение множеств решений неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$, то решение нестрогих неравенств $f(x) \geqslant g(x)$ сводится к решению строгого неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$.

3. Алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений. Пусть даны два многочлена $R(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно x и y. Говорят, что дано *алгебраическое уравнение*

$$R(x, y) = Q(x, y), \tag{6}$$

с двумя неизвестными x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), для каждой из которых справедливо числовое равенство $R(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0)$. Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется *решением уравнения* (6). *Решить уравнение* (6) — это значит найти множество всех его решений.

Пусть даны два алгебраических уравнения с двумя неизвестными

$$R(x, y) = Q(x, y) \quad \text{и} \quad T(x, y) = S(x, y).$$

Эти уравнения называются *равносильными*, если совпадают множества их решений.

Справедливы следующие утверждения:

1. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ равносильны.

2. Уравнения

$$R(x, y) = Q(x, y)$$

и

$$R(x, y) + P(x, y) = Q(x, y) + P(x, y),$$

где $P(x, y)$ — любой многочлен относительно x и y, равносильны.

3. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ равносильны для любого отличного от нуля числа α.

Из этих утверждений, в частности, вытекает, что каждое алгебраическое уравнение с двумя неизвестными x и y можно заменить равносильным ему уравнением

$$P(x, y) = 0, \tag{7}$$

где $P(x, y)$ — многочлен относительно x и y (иногда говорят "привести к виду (7)"). Говорят, что дана *совокупность m алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y*

$$P_1(x, y) = 0, \ P_2(x, y) = 0, \ldots, P_m(x, y) = 0, \tag{8}$$

где $P_1(x,y),\ldots,\ P_m(x,y)$ — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением хотя бы одного из уравнений (8). Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется ***решением*** совокупности уравнений (8). ***Решить совокупность уравнений*** (8) — это значит найти множество всех ее решений. Говорят, что ***уравнение*** (7) ***равносильно совокупности уравнений*** (8), если совпадают множества всех решений уравнения (7) и совокупности уравнений (8).

Пусть даны многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ относительно x и y. Говорят, что дана ***система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными*** x ***и*** y

$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением каждого из уравнений (9). Пара чисел (x_0, y_0) называется ***решением системы уравнений*** (9), если одновременно справедливы два числовых равенства $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$. ***Решить систему уравнений*** (9) — это значит найти множество всех ее решений.

Пусть дана еще одна система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} R(x,y) = 0, \\ S(x,y) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $R(x,y)$ и $S(x,y)$ — многочлены относительно x и y. Две системы алгебраических уравнений (9) и (10) называются ***равносильными***, если совпадают множества их решений. Говорят, что дана ***совокупность*** k ***систем двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными***

$$\begin{cases} P_1(x,y) = 0, \\ Q_1(x,y) = 0, \end{cases} \ldots, \begin{cases} P_k(x,y) = 0, \\ Q_k(x,y) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $P_i(x,y)$ и $Q_i(x,y)$ (i=1,2,...,k) — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел (x_0, y_0), каждая из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений (11). Каждая такая пара чисел (x_0, y_0) называется ***решением совокупности систем уравнений*** (11). ***Решить совокупность систем уравнений*** (11) — это значит найти множество всех ее решений. Система уравнений (9) ***равносильна*** сово-

купности систем уравнений (11), если совпадают множества их решений.

Утверждения о равносильности систем уравнений.

1. Если изменить порядок уравнений системы (9), то полученная система равносильна системе (9).

2. Если одно из уравнений системы (9) заменить на равносильное, то полученная система равносильна системе (9).

3. Если первое уравнение системы (9) заменить уравнением равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число α, и второго уравнения, умноженного на некоторое число β, то полученная система равносильна системе (9); другими словами, для любых чисел β и α ($\alpha \neq 0$) две следующие системы уравнений равносильны

$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha P(x,y) + \beta Q(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$$

4. Пусть в системе уравнений (9) одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например, x в первой степени, а в правой части — многочлен относительно y. Тогда говорят, что неизвестное x *выражено* через неизвестное y. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы (9), то, подставив во второе уравнение системы (9) вместо x этот многочлен от y, получим систему, равносильную системе (9); другими словами, равносильны следующие системы:

$$\begin{cases} x = R(y), \\ Q(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = R(y), \\ Q(R(y),y) = 0. \end{cases}$$

5. Если первое уравнение системы (9) равносильно совокупности k алгебраических уравнений

$$P_1(x,y) = 0, \ldots, P_k(x,y) = 0,$$

то система (9) равносильна следующей совокупности k систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P_1(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0, \end{cases} \ldots, \begin{cases} P_k(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$$

Отметим, что аналогичные определения и утверждения можно привести и для алгебраических уравнений с n неизвестными.

§1. Механико-математический факультет

1984

Решение варианта 1

1. Первое решение. Для освобождения от знака абсолютной величины разделим числовую ось на две области $x \geqslant -3$ и $x < -3$ и будем решать данное уравнение отдельно в каждой из этих областей.

а) Пусть $x \geqslant -3$, тогда $|x+3| = x+3$, и поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$x^2 + 3x + (x+3) = 0$$

или

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Оба корня этого уравнения: $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ удовлетворяют условию $x \geqslant -3$ и потому являются решениями исходного уравнения.

б) Пусть $x < -3$, тогда $|x+3| = -(x+3)$ и поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x_3 = 1$ и $x_4 = -3$, из которых ни один не удовлетворяет условию $x < -3$.

Следовательно, корни исходного уравнения есть $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Второе решение. Так как при любом x выполнено неравенство $|x+3| \geqslant 0$, то все решения исходного уравнения лежат в области, определяемой неравенством $x^2 + 3x \leqslant 0$, т. е. в промежутке $-3 \leqslant x \leqslant 0$. В каждой точке x множества $[-3; 0]$ выполнено неравенство $x + 3 \geqslant 0$ и, значит, $|x+3| = x+3$. Следовательно, на промежутке $[-3; 0]$ исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + 3x + x + 3 = 0$, т. е. уравнению $x^2 + 4x + 3 = 0$. Оба корня этого уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ принадлежат промежутку $[-3; 0]$. Таким образом, множество решений исходного уравнения состоит из двух чисел $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

2. Все решения исходного уравнения содержатся среди решений уравнения $\cos 2\pi x = 0$, т. е. среди чисел $x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2}$, $n \in Z$.

Если $n = 2m$, то $x = \frac{1}{4} + m$, $m \in Z$, и $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, и поэтому все числа $x = \frac{1}{4} + m$, $m \in Z$, являются решениями исходного уравнения. Если же $n = 2m - 1$, то $x = -\frac{1}{4} + m$, $m \in Z$, а $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, и поэтому ни одно из чисел $-\frac{1}{4} + m$, $m \in Z$, не входит в ОДЗ исходного уравнения. Итак, множество решений исходного уравнения состоит из чисел $\frac{1}{4} + m$, $m \in Z$.

Выберем теперь среди них число, ближайшее к $\sqrt{13}$. Так как очевидно, что справедливы неравенства

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} < 3,5 < \sqrt{13} < 4 < 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4},$$

то искомый корень есть либо $\frac{13}{4}$, либо $\frac{17}{4}$. Легко проверить, что справедливо неравенство $\sqrt{13} - \frac{13}{4} < \frac{17}{4} - \sqrt{13}$ (оно выполняется одновременно с неравенством $\sqrt{13} < \frac{15}{4}$, которое проверяется возведением в квадрат). Таким образом, $\frac{13}{4}$ есть ближайший к $\sqrt{13}$ корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{13}{4}$.

3. Если поменять местами буквы A и B, обозначающие вершины острых углов данного прямоугольного треугольника ABC, то, как легко видеть, условие задачи не изменится. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $AC < BC$ (рис. 2), и, следовательно, точка C лежит внутри прямого угла EDA. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC, лежит в середине гипотенузы. Отсюда, а также по условию, находим $AD = CD = ED = BD = R$, где R — радиус описанной окружности. Поскольку точка E лежит на дуге BC, то $EC < BC$, и согласно условию задачи находим, что $CA = EC = 1$. Так как в окружности равные хорды соответствуют равным центральным углам, то $\angle ADC = \angle CDE = \frac{1}{2}\angle ADE = \frac{\pi}{4}$.

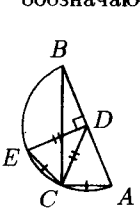


Рис. 2

Применяя к треугольнику ADC теорему косинусов, получаем

$$CA^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot CD \cos \frac{\pi}{4}$$

или

$$1 = 2R^2 - R^2\sqrt{2},$$

откуда

$$R^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Но тогда

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2R)^2 - AC^2} = \\ = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}.$$

Обозначив буквой S искомую площадь треугольника ABC, имеем

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{2} > 1{,}4$, то $S > \dfrac{1+1,4}{2} = 1,2$. Далее,

$$0 < S - 1,2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - 1,2 = \frac{5\sqrt{2}-7}{10} = \frac{50-49}{10(5\sqrt{2}+7)} < \\ < \frac{1}{10(7+7)} < \frac{1}{100}.$$

Итак, 1,2 — искомое приближенное значение.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$; 1,20.

4. Если (x_0, y_0) — какое-либо решение исходной системы уравнений, то $x_0 \geqslant -1$, и выполнено равенство

$$3x_0^2 + 1 + x_0 y_0 = x_0 + 1$$

или равенство

$$x_0(3x_0 + y_0 - 1) = 0. \qquad (1)$$

Если $x_0 = 0$, то из первого уравнения исходной системы следует, что

$$2 + 2^{y_0 - 2} = 3 \cdot 2^{y_0}$$

и $2^{y_0} = \dfrac{8}{11}$, т. е. $y_0 = \log_2 \dfrac{8}{11}$.

Если $x_0 \neq 0$, то из равенства (1) следует, что $y_0 = 1 - 3x_0$. Подставляя это выражение для y_0 в первое уравнение исходной системы, получим, что

$$2^{3x_0+1} + 2^{-1-3x_0} = 6. \qquad (2)$$

Обозначим $t = 2^{3x_0+1}$, тогда из равенства (2) следует, что $t^2 - 6t + 1 = 0$. Квадратное уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$ имеет два корня $t_1 = 3 + \sqrt{8}$ и $t_2 = 3 - \sqrt{8} = \dfrac{1}{3+\sqrt{8}}$.

Уравнения

$$2^{3x+1} = 3 + \sqrt{8} \quad \text{и} \quad 2^{3x+1} = \frac{1}{3+\sqrt{8}}$$

имеют своими корнями соответственно числа

$$x_0' = \frac{1}{3}[\log_2(3+\sqrt{8}) - 1] \quad \text{и} \quad x_0'' = -\frac{1}{3}[\log_2(3+\sqrt{8}) + 1].$$

Так как $3 + \sqrt{8} > 4$, то $\log_2(3+\sqrt{8}) > 2$ и

$$x_0'' + 1 = \frac{1}{3}(2 - \log_2(3+\sqrt{8})) < 0.$$

Значит, $x_0 \neq x_0''$.

Если $x_0 = x_0' = \dfrac{1}{3}(\log_2(3+\sqrt{8}) - 1)$, то

$$y_0 = 1 - 3x_0 = 2 - \log_2(3+\sqrt{8}) = \log_2 \frac{4}{3+\sqrt{8}}.$$

Итак, все решения исходной системы содержатся среди двух пар чисел

$$\left(0, \log_2 \frac{8}{11}\right), \quad \left(\frac{1}{3}\log_2 \frac{3+\sqrt{8}}{2}, \log_2 \frac{4}{3+\sqrt{8}}\right).$$

Проверкой легко убеждаемся, что эти пары чисел удовлетворяют исходной системе уравнений.

Ответ: $\left(0, \log_2 \dfrac{8}{11}\right), \left(\dfrac{1}{3}\log_2 \dfrac{3+\sqrt{8}}{2}, \log_2 \dfrac{4}{3+\sqrt{8}}\right)$.

5. Из условия задачи следует, что плоскость α должна пересечь все 6 граней многогранника $ABCDA'B'C'D'$, причем она не может быть параллельна ни одному из ребер этого многогранника. Следовательно, его противоположные грани $CDD'C'$ и $BAA'B'$ (рис. 3) пересекаются плоскостью по параллельным прямым, содержащим противоположные стороны правильного шестиугольника. Но тогда, как известно, плоскость α должна быть параллельна прямой, по которой пересекаются плоскости $CDD'C'$ и $BAA'B'$. Построим эту прямую. Пусть F

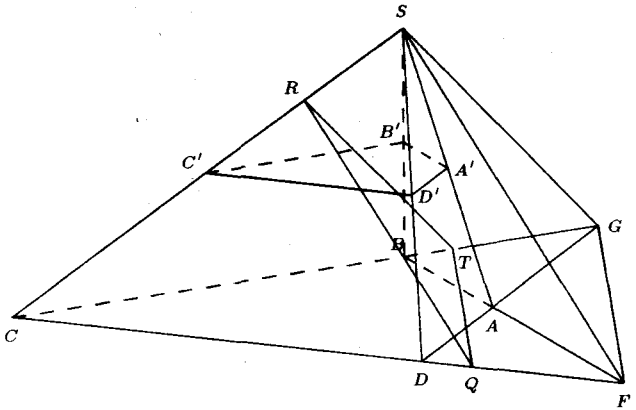


Рис. 3

и G — точки пересечения прямых CD и AB, CB и DA соответственно. Точки S и F принадлежат плоскостям $CDD'C'$ и $BAA'B'$. Поэтому SF есть прямая, по которой пересекаются эти плоскости, и, значит, плоскость α параллельна прямой SF. Аналогично доказывается, что плоскость α параллельна прямой SG.

Докажем, что плоскости α и SFG параллельны. Предположим, что они пересекаются по некоторой прямой l. Она лежит в плоскости SFG и не может быть параллельна двум пересекающимся прямым SF и SG. Значит, она пересекает одну из них, скажем, SF. Точка пересечения SF и l лежит на плоскости α и на прямой SF. Но это невозможно, так как $SF \parallel \alpha$. Полученное противоречие означает, что плоскости α и SFG параллельны.

Обозначим буквами Q, R и T точки, в которых плоскость α пересекает ребра CF, CS и CG соответственно трехгранного угла с вершиной C. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения с третьей плоскостью должны быть параллельны. Отсюда, поскольку $\alpha \parallel SFG$, следует, что $QR \parallel FS$, $RT \parallel SG$ и $TQ \parallel GF$.

По условию четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой AC. Значит, и точки G, F симметричны относительно AC. В частности, это означает, что $GF \perp AC$. В силу доказанной выше параллельности TQ и GF заключаем, что $TQ \perp AC$.

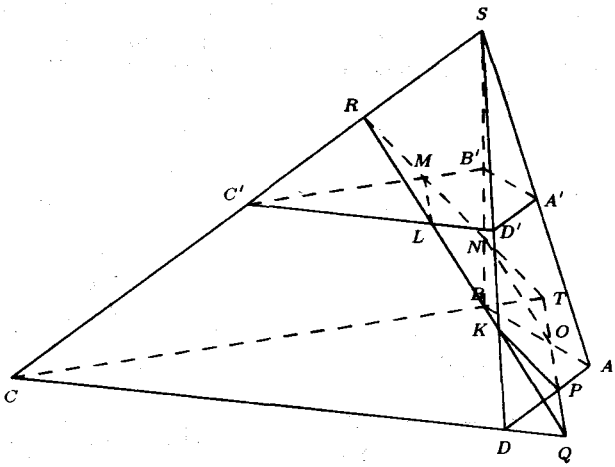


Рис. 4

Обозначим буквами K, L, M, N, O, P точки, в которых плоскость α пересекает отрезки DD', $C'D'$, $C'B'$, $B'B$, BA, AD соответственно (рис. 4). Согласно условию, $KLMNOP$ — правильный шестиугольник, причем $KL = LM = MN = NO = OP = KP = 2$. Поскольку внешний угол правильного шестиугольника равен $\frac{\pi}{3}$, находим (рис. 5), что $\angle RLM = \angle RML = \angle ONT = \angle NOT = \angle KPQ = \angle QKP = \frac{\pi}{3}$. Отсюда следует, что треугольники RLM, ONT, KPQ, QRT правильные и $KQ = QP = KP = 2$, $RL = RM = LM = 2$, $NT = OT = NO = 2$, $QR = RT = QT = 6$. Итак, точки, в которых пересекаются плоскость α и ребра многогранника $ABCDA'B'C'D'$ делят отрезки QR, RT, QT на три равные части.

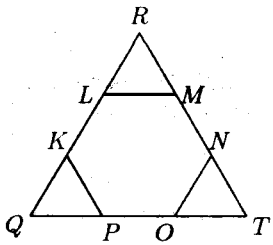


Рис. 5

Рассмотрим плоскость CDS (рис. 6) и вычислим отношение $\frac{CQ}{CD}$. Проведем для этого отрезок LG параллельный CS. Тогда $\frac{CQ}{CG} = \frac{RQ}{RL} = 3$, т. е. $CQ = 3CG$. В треугольниках $LD'K$ и KQD имеем $LK = KQ$, $\angle D'KL = \angle DKQ$, $\angle D'LK = \angle KQD$ (так как $C'D' \parallel CD$). Значит, эти треугольники равны и

$LD' = DQ$. Тогда $C'D' = C'L + LD' = CG + DQ$ и $CD = CQ - DQ = 3CG - DQ$. В треугольнике CSD отрезок $C'D'$ есть средняя линия, поэтому $CD = 2C'D'$, т. е. $3CG - DQ = 2(CG + DQ)$. Отсюда следует, что $CG = 3DQ$ и, значит, $CQ = 3CG = 9DQ$, $CD = CQ - DQ = 8DQ$. Таким образом, $\frac{CQ}{CD} = \frac{9}{8}$.

Рассмотрим теперь плоскость $ABCD$ (рис. 7). Поскольку

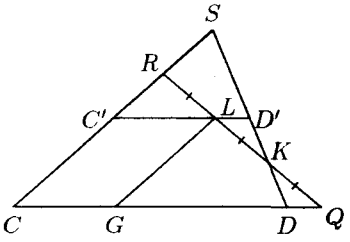


Рис. 6

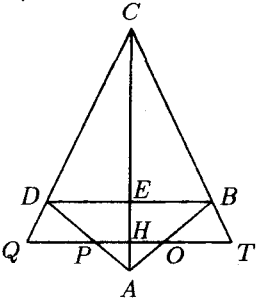


Рис. 7

$TQ \perp AC$ (это доказано ранее) и $BD \perp AC$ (точки B и D симметричны относительно прямой AC), то $TQ \parallel BD$ и, значит, треугольники TQC и BDC подобны. Отсюда следует, что $\frac{TQ}{BD} = \frac{CQ}{CD} = \frac{9}{8}$, т. е. $BD = \frac{8}{9}TQ = \frac{8}{9} \cdot 6 = \frac{16}{3}$. Найдем теперь длину высоты AE треугольника ABD. Обозначим для этого буквой H точку, в которой пересекаются отрезки AC и TQ. Из подобия треугольников TQC и BDC следует, что $\frac{CH}{CE} = \frac{CQ}{CD} = \frac{9}{8}$ и $\frac{EH}{CE} = \frac{CH}{CE} - 1 = \frac{1}{8}$, т. е. $CE = 8EH$. Далее, пользуясь тем, что $QP = OP = OT$ и подобием треугольников ABD и AOP, находим $\frac{AE}{AH} = \frac{BD}{OP} = 3 \cdot \frac{BD}{TQ} = 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{3}$. Поэтому $\frac{EH}{AH} = \frac{AE}{AH} - 1 = \frac{5}{3}$ и $EH = \frac{5}{3}AH$, $CE = 8EH = \frac{40}{3}AH$. Согласно условию, $AC = 9$ см. Следовательно,

$$9 = AC = CE + EH + AH = \left(\frac{40}{3} + \frac{5}{3} + 1\right) AH = 16AH.$$

Отсюда получаем, что $AH = \frac{9}{16}$ см, $EH = \frac{5}{3}AH = \frac{15}{16}$ см и

$$AE = EH + AH = \frac{15}{16} + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} \text{ см}.$$

Наконец,

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}BD{\cdot}AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{2} = 4.$$

Ответ: 4 см^2.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. -1; -7. 2. $\frac{7}{3}$. 3. 4.

4. $\left(\frac{3}{22};0\right)$, $\left(\frac{1}{2}\cdot 6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{3}{2}; 6 - 6^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$. 5. $1127\sqrt{3}$.

Вариант 3. 1. -1; 4. 2. $\frac{19}{6}$. 3. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,20$.

4. $(\log_3 18; 0)$, $\left(5 + 2\log_3\frac{5-\sqrt{21}}{2}; 1 + \log_3\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$. 5. $6\sqrt{3}$.

Вариант 4. 1. $\frac{10}{3}$; 4. 2. 4. 3. 4.

4. $\left(0; \frac{437}{127}\right)$, $\left(\frac{1}{2}(5^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} - 5); \frac{1}{4}(5^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} - 1)\right)$. 5. $55\sqrt{3}$.

1985

Решение варианта 1

1. Обозначив $\sin x$ через y, исходное уравнение можно переписать так:

$$6y - \frac{1}{6} = \sqrt{34y - \frac{35}{36}}. \qquad (1)$$

Все корни уравнения (1) удовлетворяют неравенствам $6y - \frac{1}{6} \geqslant 0$, $34y - \frac{35}{36} \geqslant 0$ и, следовательно, лежат в области $y \geqslant \frac{35}{34{\cdot}36} = \frac{35}{1224}$. На множестве $y \geqslant \frac{35}{1224}$ обе части уравнения (1) определены и неотрицательны. Значит, оно равносильно на этом множестве уравнению

$$\left(6y - \frac{1}{6}\right)^2 = 34y - \frac{35}{36}, \qquad (2)$$

т. е. уравнению $36y^2 - 36y + 1 = 0$.

Получившееся квадратное уравнение имеет корни $y_1 = \frac{3-\sqrt{8}}{6}$

и $y_2 = \dfrac{3+\sqrt{8}}{6}$. Так как $\sqrt{8} < 3$, то $y_2 < 1$. Кроме того, y_1 есть корень уравнения (2), поэтому $34y_1 - \dfrac{35}{36} \geqslant 0$, т. е. $y_1 \geqslant \dfrac{35}{1224}$. Итак,

$$1 > y_2 > y_1 \geqslant \frac{35}{1224}. \qquad (3)$$

Это означает, что оба корня уравнения (2) лежат в области $y \geqslant \dfrac{35}{1224}$, т. е. уравнение (1) имеет два корня y_1 и y_2, удовлетворяющие неравенствам (3). Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{3-\sqrt{8}}{6} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{3+\sqrt{8}}{6}.$$

Решение этих уравнений $x = (-1)^k \arcsin \dfrac{3-\sqrt{8}}{6} + \pi k$, $k \in Z$, и $x = (-1)^l \arcsin \dfrac{3+\sqrt{8}}{6} + \pi l$, $l \in Z$, составляют множество решений исходного уравнения.

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \dfrac{3-\sqrt{8}}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

$x = (-1)^l \arcsin \dfrac{3+\sqrt{8}}{6} + \pi l$, $l \in Z$.

2. Разобьем числовую ось на два множества $x \geqslant 0$ и $x < 0$ и будем решать данное неравенство на каждом из них отдельно.

а). Пусть $x \geqslant 0$, тогда $|x| = x$, и исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} \geqslant \frac{2}{x-1}. \qquad (4)$$

Число $x = 1$, очевидно, ему не удовлетворяет, если же $x \geqslant 0$ и $x \neq 1$, то для него справедливо неравенство $\dfrac{1}{x+1} \geqslant 0$ и, значит, неравенство (4). Итак, множество решений исходного неравенства в области $x \geqslant 0$ состоит из двух промежутков $0 \leqslant x < 1$ и $x > 1$.

б). Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$, и исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{-x-1} \geqslant \frac{2}{x-1}$$

или после упрощения

$$-\frac{1}{x+1} \geqslant \frac{2}{x-1}.$$

Перенося левую часть последнего неравенства направо, приводя получившиеся справа слагаемые к общему знаменателю и скла-

дывая их, получим, что исходное неравенство равносильно на множестве $x < 0$ неравенству

$$0 \geqslant \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}. \qquad (5)$$

С помощью метода интервалов находим, что множество решений неравенства (5) на всей числовой прямой состоит из двух промежутков: $x < -1$, $-\frac{1}{3} \leqslant x < 1$. Отсюда следует, что множество решений исходного неравенства в области $x < 0$ также состоит из двух промежутков $x < -1$ и $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$.

Объединяя множества решений, найденные в первом и втором случаях, находим множество решений исходного неравенства:

$$x < -1, \quad -\frac{1}{3} \leqslant x < 1, \quad x > 1.$$

Ответ: $x < -1$; $-\frac{1}{3} \leqslant x < 1$; $x > 1$.

3. Треугольник DBE (рис. 8) равнобедренный, так как $DB = BE$ по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно, $\angle BDE = \angle BED$. Так как четырехугольник $ADEC$ вписан в окружность, то $\angle ACB + \angle ADE = \pi$, откуда $\angle ACB = \angle BDE$. Аналогично показывается, что $\angle BAC = \angle DEB$. Отсюда заключаем, что треугольник ABC равнобедренный, и $BC = AB = 5$. Обозначим через h и H длины высот треугольника ABC, опущенных из точек A и B соответственно.

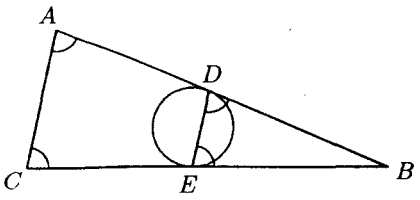


Рис. 8

По теореме Пифагора $H = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{24}$. Из формулы для площади треугольника ABC имеем $2S_{ABC} = BC \cdot h = AC \cdot H$, откуда $h = H \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

4. Пусть a — одно из трех данных чисел. Приведенное в условии задачи уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2^{a+4} + 15(x+a) = 0 \qquad (6)$$

и

$$1 + 2\cos\left(\pi\left(a + \frac{x}{2}\right)\right) = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (6) имеет единственный корень

$$x_0 = -a - \frac{2^{a+4}}{15}.$$

Множество решений уравнения (7) состоит, как легко проверить, из двух бесконечных серий

$$x = \frac{4}{3} - 2a + 4k,\ k \in Z,$$
$$x = -\frac{4}{3} - 2a + 4l,\ l \in Z.$$

Рассмотрим теперь последовательно все данные значения a. Пусть $a = -1,2$. Тогда $x_0 = 1,2 - \frac{2^{2,8}}{15} = \frac{18 - 2^{2,8}}{15}$. Так как $2 < 2,8 < 3$, то $4 < 2^{2,8} < 8$ и $x_0 > \frac{18-8}{15} \geqslant 0$, $x_0 < \frac{18-4}{15} < 1$. Следовательно, при $a = -1,2$ корень x_0 лежит на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $a = -0,67$. В серии $x = -\frac{4}{3} - 2a + 4k$, $k \in Z$, при $k = 0$ находим решение $x_1 = -\frac{4}{3} + 1,34$. Ясно, что $0 < 1,34 - \frac{4}{3} < \frac{2}{3} < 1$. Следовательно, при $a = -0,67$ данное уравнение также имеет решение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $a = -0,66$. Тогда $x_0 = 0,66 - \frac{2^{4-0,66}}{15}$. Поскольку

$$2^{4-0,66} > 2^{4-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{10}{3}} > 10 \quad (2^{10} = 1024 > 10^3),$$

то

$$x_0 < 0,66 - \frac{10}{15} = 0$$

и, значит, x_0 не лежит на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Рассмотрим серию решений $x = \frac{4}{3} - 2a + 4k$, $k \in Z$. Если $k \geqslant 0$, то $x = \frac{4}{3} + 1,32 + 4k > 1$. Если же $k \leqslant -1$, то $x = \frac{4}{3} + 1,32 + 4k \leqslant \frac{4}{3} + 1,32 - 4 < 0$. Итак, ни одно из чисел первой серии решений уравнения при $a = -0,66$ не лежит на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Рассмотрим серию решений $x = -\frac{4}{3} - 2a + 4k$, $k \in Z$. Если $k \geqslant 1$, то $x = -\frac{4}{3} + 1,32 + 4k \geqslant -\frac{4}{3} + 1,32 + 4 > 1$. Если же $k \leqslant 0$, то $x = -\frac{4}{3} + 1,32 + 4k \leqslant -\frac{4}{3} + 1,32 < 0$. Поэтому ни одно из чисел

второй серии решений при $a = -0,66$ не лежит на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Итак, при $a = -0,66$ исходное уравнение не имеет решений, принадлежащих промежутку $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ответ: $-1,2$; $-0,67$.

5. Обозначим буквой O центр данной сферы; окружность с центром в точке O_1 на плоскости α обозначим через γ_1; окружность радиуса r_2, образованную точками пересечения прямых, проходящих через A и точки γ_1, с данной сферой, обозначим через γ_2, ее центр — через O_2; плоскость, в которой лежит окружность γ_2, обозначим буквой β.

Докажем, что точки O, A, O_1, O_2 лежат в одной плоскости. Для этого укажем точку, в которой пересекаются прямые AO_1 и OO_2. Выберем на окружности γ_2 произвольную точку B и вынесем на рис. 9 сечение сферы плоскостью OO_2B. Так как O_2 есть проекция точки O на плоскость β, то $OO_2 \perp \beta$ и значит, $OO_2 \perp BO_2$. Проведем на рис. 9 из точки B касательную к окружности и точку ее пересечения с прямой OO_2 обозначим буквой C. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому $OB \perp BC$. Прямоугольные треугольники BCO и O_2OB имеют общий острый угол и поэтому подобны. Значит, $\dfrac{BO}{OC} = \dfrac{OO_2}{BO}$ и $OC = \dfrac{BO \cdot BO}{OO_2} = \dfrac{R^2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}$. Полученное выражение для OC означает, что положение точки C на прямой OO_2 не зависит от выбора точки B на окружности γ_2. В дальнейшем нам понадобится знать длину отрезка BC. Из прямоугольного треугольника BOC находим

$$BC^2 = OC^2 - OB^2 = \frac{R^4}{R^2 - r_2^2} - R^2 = \frac{R^2 r_2^2}{R^2 - r_2^2}$$

и

$$BC = \frac{Rr_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}.$$

Докажем теперь, что точка C лежит на прямой AO_1. Обозначим для этого буквами D и E точки, в которых прямые AC и AB соответственно пересекают плоскость α. Вынесем на рис. 10 сечение сферы плоскостью ABC. Эта плоскость пересечет сферу по окружности, центр ее обозначим через O'. Так как прямая AO перпендикулярна плоскости α, то $AO \perp ED$. Точка O' есть проекция O на плоскость ABC. По теореме о трех перпендикулярах находим, что $AO' \perp ED$. Проведем в точке A касательную к окружности до пересечения ее в точке F с прямой BC. Тогда $FA \parallel ED$. Кроме того, через точку C проведем прямую параллельную ED. Точку ее пересечения с прямой AB обозна-

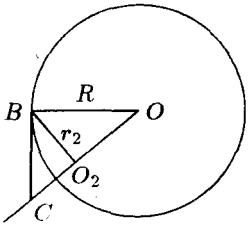


Рис. 9

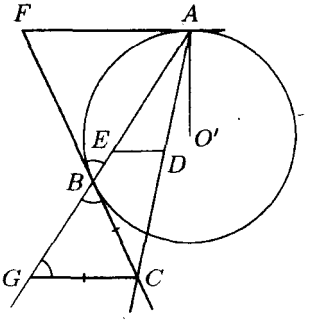


Рис. 10

чим буквой G. Так как $CG \parallel AF$, то $\angle BAF = \angle BGC$. Кроме того, равны вертикальные углы FBA и GBC. Касательные FA и FB к окружности, проведенные из точки F, равны. Поэтому треугольник ABF равнобедренный и, значит, $\angle FBA = \angle BAF$. Из равенств углов следует, что $\angle GBC = \angle BGC$, т. е. треугольник GBC равнобедренный, $GC = BC = \dfrac{Rr_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}$. Так как $ED \parallel GC$, то треугольники AED и AGC подобны. Поэтому имеет место равенство

$$\frac{ED}{GC} = \frac{AD}{AC}$$

или

$$ED = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{Rr_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}. \tag{8}$$

Точки C и D, а значит, и длины отрезков AC и AD не зависят от выбора точки B на окружности γ_2. Согласно условию задачи, когда точка B пробегает окружность γ_2, соответствующая ей точка E пробегает окружность γ_1. Полученное нами равенство (8) показывает теперь, что точка D равноудалена от всех точек окружности γ_1. Так как γ_1 и D лежат в плоскостях α, то заключаем, что D есть центр окружности γ_1, т. е. $D = O_1$.

Этим доказано, что прямые AO_1 и OO_2 пересекаются в точке C и потому лежат в одной плоскости. Кроме того, $ED = r_1$. Из равенства (8) следует теперь, что

$$AO_1 = ED \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{R^2 - r_2^2}}{Rr_2} = AC \cdot \frac{r_1\sqrt{R^2 - r_2^2}}{Rr_2}. \tag{9}$$

Для того чтобы найти интересующую нас длину отрезка AO_1, вычислим длину отрезка AC и воспользуемся формулой (9). Вынесем на рис. 11 сечение сферы плоскостью AO_1OO_2. Так как $AO \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$, то, согласно условию, угол между прямыми AO и OO_2 равен φ и, значит, $\angle AOC = \pi - \varphi$. Применяя к треугольнику AOC теорему косинусов, находим $AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cos(\angle AOC) = R^2 + \dfrac{R^4}{R^2 - r_2^2} + 2\dfrac{R^3 \cos\varphi}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}$, и с помощью формулы (9) получаем

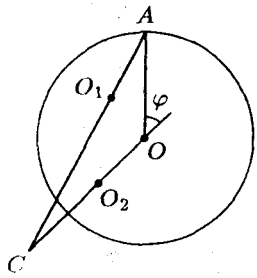


Рис. 11

$$AO_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - r_2^2}}{R} \cdot \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{R^2 - r_2^2} + \frac{2R^3 \cos\varphi}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\sqrt{2R^2 - r_2^2 + 2R\cos\varphi\sqrt{R^2 - r_2^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{r_1}{r_2}\sqrt{2R^2 - r_2^2 + 2R\cos\varphi\sqrt{R^2 - r_2^2}}$.

Ответы к варианту 2. 1. $\arccos\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $-\arccos\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. 2. $x > -1$; $x \leqslant -3$; $x \neq 1$. 3. $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$. 4. $0,26\pi$; $0,6\pi$. 5. $\dfrac{2R^2r_1^2 - a^2r_2^2 - r_1^2r_2^2}{2Rr_1^2}$.

1986

Решение варианта 1

1. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{x} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z, \quad \text{и} \quad \sqrt{x} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Уравнения первой из совокупностей имеют решение, если $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, и решение этой совокупности есть

$$x = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Уравнения второй совокупности имеют решение, если $m = 1,\ 2, \ldots$, и решение этой совокупности есть

$$x = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)^2,\ m = 1,\ 2, \ldots.$$

Заметим, что полученные две серии решений можно объединить в одну серию $x = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2 = \frac{\pi^2}{9}(1+6n)^2$, $n \in Z$, так как $x = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)^2 = \left(\frac{\pi}{3} - 2\pi m\right)^2 = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2$, $n = -m$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{9}(1+6n)^2$, $n \in Z$.

2. Возможны два случая расположения окружностей (рис. 12).

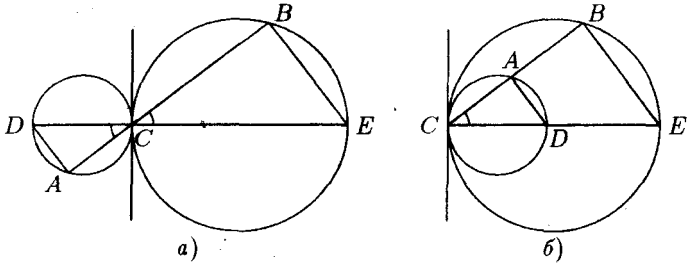


Рис. 12

Пусть DC и CE соответственно диаметры окружностей меньшего и большего радиусов. Так как обе прямые DC и CE должны быть перпендикулярны общей касательной к окружностям, проведенной в точке C, то прямые DC и CE совпадают, т. е. точки D, C и E лежат на одной прямой.

Обозначим буквой φ величину угла ACD. Легко видеть, что в обоих случаях $\angle BCE = \varphi$. Углы DAC и CBE опираются на диаметры соответствующих окружностей и потому равны $\frac{\pi}{2}$. Так как $DC = 2$ и $CE = 6$, то из прямоугольных треугольников ADC и BCE находим, что $AC = 2\cos\varphi$, $BC = 6\cos\varphi$.

В случае, изображенном на рис. 12 а), имеем

$$AB = AC + BC = 8\cos\varphi.$$

Из условия следует, что $8\cos\varphi = 2\sqrt{5}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$ и $AC = 2\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

В случае, изображенном на рис. 12 б), имеем

$$AB = BC - AC = 4\cos\varphi.$$

Должно выполняться равенство $4\cos\varphi = 2\sqrt{5}$ или $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Поскольку $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, то заключаем, что второй случай невозможен.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см.

3. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех положительных чисел. Обе части неравенства определены и положительны в ОДЗ. Поэтому, логарифмируя обе его части по основанию 2, получим неравенство

$$-2 + \frac{1}{2}\log_2^2 x \geqslant \frac{1}{4}\log_2^2 x,$$

равносильное исходному на ОДЗ. После упрощения оно может быть переписано так:

$$\log_2^2 x \geqslant 8. \qquad (1)$$

Множество решений неравенства $t^2 \geqslant 8$ состоит из двух промежутков $t \geqslant 2\sqrt{2}$ и $t \leqslant -2\sqrt{2}$. Поэтому неравенство (1) равносильно совокупности двух неравенств

$$\log_2 x \geqslant 2\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \log_2 x \leqslant -2\sqrt{2},$$

имеющих решениями соответственно промежутки $x \geqslant 2^{2\sqrt{2}}$ и $0 < x \leqslant 2^{-2\sqrt{2}}$. Все x из этих промежутков входят в ОДЗ исходного неравенства и потому являются его решениями.

Ответ: $0 < x \leqslant 2^{-2\sqrt{2}}$, $x \geqslant 2^{2\sqrt{2}}$.

4. Допустим, что если автомобилист будет ехать весь путь из села в город с первоначальной скоростью, то он сможет приехать в город до 11 часов 15 минут, т. е. затратит на весь путь менее $4\frac{1}{4}$ часов.

Обозначим через t час. время, которое потребуется автомобилисту, чтобы проехать грунтовой участок дороги. Весь путь из села в город автомобилист проехал за 4 часа, значит, на шоссейный участок он потратил $(4 - t)$ часов. Если бы автомобилист проехал шоссейный участок с первоначальной скоростью, т. е. согласно условию в $\frac{3}{2}$ раза медленнее, то времени он затратил бы в $\frac{3}{2}$ раза больше, т. е. $\frac{3}{2}(4 - t)$ часов. Весь путь занял бы тогда $t + \frac{3}{2}(4 - t) = \left(6 - \frac{1}{2}t\right)$ час. По предположению должно выполняться неравенство

$$6 - \frac{1}{2}t < 4\frac{1}{4},$$

т. е. $t > \frac{7}{2}$. Это означает, что автомобилист выехал на шоссейную дорогу не ранее, чем в 10 часов 30 минут и, следовательно, его встреча с мотоциклистом произошла на грунтовой дороге.

Обозначим через v км/час скорость автомобилиста на грунтовой дороге. На путь от села до точки встречи с мотоциклистом автомобилист потратил $9\frac{1}{4} - 7 = \frac{9}{4}$ час. Мотоциклист же этот участок согласно условию проехал за $12\frac{1}{4} - 9\frac{1}{4} = 3$ час. Следовательно, скорость мотоциклиста на грунтовой дороге равна $\frac{v \cdot \frac{9}{4}}{3} = \frac{3}{4}v$ км/час. Из условия теперь следует, что скорости мотоциклиста и автомобилиста на шоссе равны соответственно $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}v = \frac{5}{4}v$ км/час и $\frac{3}{2}v$ км/час.

Автомобилист проехал грунтовой участок дороги за t час. со скоростью v км/час и шоссейный участок за $4 - t$ час. со скоростью $\frac{3}{2}v$ км/час. Следовательно, длины грунтового и шоссейного участков равны $v \cdot t$ км и $\frac{3}{2}v(4-t)$ км соответственно. Мотоциклист тогда на грунтовой участок затратит $\frac{vt}{\frac{3}{4}v} = \frac{4}{3}t$ час., на шоссейный участок — $\frac{\frac{3}{2}v(4-t)}{\frac{5}{4}v} = \frac{6}{5}(4-t)$ час., а на весь путь $\frac{4}{3}t + \frac{6}{5}(4-t) = \frac{24}{5} + \frac{2}{15}t$ час. Согласно условию должно выполняться равенство $\frac{24}{5} + \frac{2}{15}t = 12\frac{1}{4} - 7$. Следовательно, $t = \frac{27}{8} < \frac{7}{2}$, вопреки установленному ранее неравенству. Следовательно, первоначальное предположение неверно, и автомобилист не сможет приехать в город до 11 часов 15 минут, если весь путь будет ехать с первоначальной скоростью.

Ответ: не сможет.

5. Пусть a и b — некоторые фиксированные числа. Подставляя выражение $y = bx - az^2$, найденное из первого уравнения, во второе, получим систему уравнений

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (2b^2 + b - 6)x - 2abz^2 - 4z = 4, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную исходной.

Если $2b^2 + b - 6 \neq 0$, т. е. $b \neq -2$ и $b \neq \frac{3}{2}$, то система (2) имеет, например, решение $x = \frac{4}{2b^2 + b - 6}$, $y = bx$, $z = 0$ при любом a.

Если $b = -2$, то система (2) может быть переписана так:

$$\begin{cases} y = -2x - az^2, \\ az^2 - z - 1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Эта система имеет решение (x, y, z) тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение

$$az^2 - z - 1 = 0. \tag{4}$$

Если $a = 0$, то уравнение (4) имеет решение $z = -1$. Если $a \neq 0$, то дискриминант квадратного уравнения (4) равен $D_1 = 1 + 4a$, и оно имеет решение, если $1 + 4a \geqslant 0$. Следовательно, система (3) имеет решение, если $1 + 4a \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Если $b = \frac{3}{2}$, то система (2) принимает вид

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - az^2, \\ 3az^2 + 4z + 4 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Если $a = 0$, то система (5) имеет решение. Если $a \neq 0$, то дискриминант квадратного трехчлена $3az^2 + 4z + 4$ равен $D_2 = 16 - 48a = 16(1 - 3a)$, и уравнение $3az^2 + 4z + 4 = 0$ имеет решение при $1 - 3a \geqslant 0$. Поэтому система (5) имеет решение, если $a \leqslant \frac{1}{3}$.

Таким образом, исходная система имеет решение при любом значении b, если выполнено условие $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$.

6. Пусть данные в условии задачи плоскости пересекают пирамиду по четырехугольникам $AB'C'D$ и $BA'D'C$ (рис. 13). Так как $AD \parallel BC$, то плоскости $AB'C'D$ и BCS пересекаются по прямой $B'C'$ параллельной AD. Аналогично доказывается, что $A'D' \parallel BC$. Итак, $BC \parallel AD \parallel A'D' \parallel B'C'$.

Предположим, что $AB' \parallel DC'$. Тогда четырехугольник $AB'C'D$ — параллелограмм. В силу условия задачи, $BA'C'D$ также параллелограмм, равный параллелограмму $AB'C'D$. Отсюда следует, что $BA' \parallel CD'$. Две пересекающиеся прямые AB' и BA' в плоскости ABS соответственно параллельны пересекающимся прямым DC' и CD' в плоскости CDS. Это означает, что плоскости ABS и CDS параллельны. Но эти плоскости имеют общую точку S. Полученное противоречие означает, что $AB' \nparallel DC'$ и, поскольку четырехугольники $BA'D'C$ и $AB'C'D$ равны, то $BA' \nparallel CD'$.

Так как справедливы неравенства $AD > A'D'$ и $BC > B'C'$, то из них, в силу доказанного выше, следует теперь,

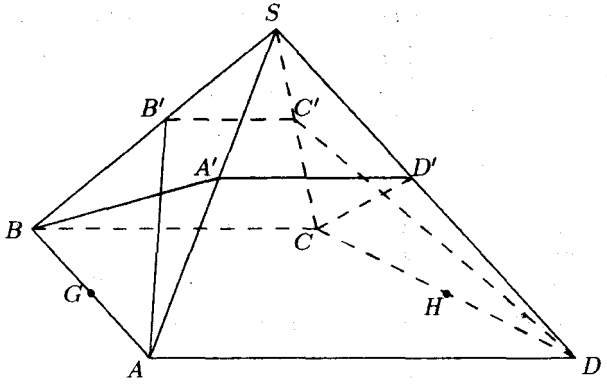


Рис. 13

что $BC = AD$ и $B'C' = A'D'$. Поскольку в четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ противоположные стороны (BC и AD, $B'C'$ и $A'D'$) параллельны и имеют равную длину, то эти четырехугольники параллелограммы.

Допустим, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются. Так как $CD \parallel AB$ и $C'D' \parallel A'B'$, отсюда следовало бы, что пересекаются прямые CD и $C'D'$ и что параллельны плоскости ABS и DCS. Но эти плоскости имеют общую точку. Противоречие означает, что прямые AB и $A'B'$ параллельны. Отсюда же следует и параллельность прямых CD и $C'D'$. Рассмотрим сначала первый случай, т. е. предположим, что $AB' = BA'$ и $CD' = DC'$. Вынесем на отдельный чертеж (рис. 14) плоскость ABS. Обозначим буквой F точку пересечения прямых AB' и BA', буквой G — точку, в которой пересекаются прямые SF и AB. Проведем из точки A' прямую параллельно AB' и точку пересечения ее с прямой AB обозначим буквой E. Так как $AE \parallel A'B'$ и $AB' \parallel EA'$, то четырехугольник $AB'A'E$ параллелограмм и, значит, $EA' = AB' = BA'$. Следовательно, треугольник $BA'E$ равнобедренный и $\angle A'BA = \angle A'EB = \angle B'AB$ (последнее равенство выполняется в силу параллельности прямых AB' и EA'). Теперь можно утверждать, что равны треугольники ABB' и ABA' (по двум сторонам и заключенному между ними углу) и, в частности, $\angle ABB' = \angle BAA'$. Из последнего равенства следует, что треугольник ABS равнобедренный. Из установленного выше равенства углов $\angle A'BA = \angle B'AB$ следует, что треугольник AFB равнобедренный и, значит, $AF = BF$. Треугольники AFS и BFS имеют соответственно равные стороны и потому равны. Из равенства этих треугольников заключаем, что

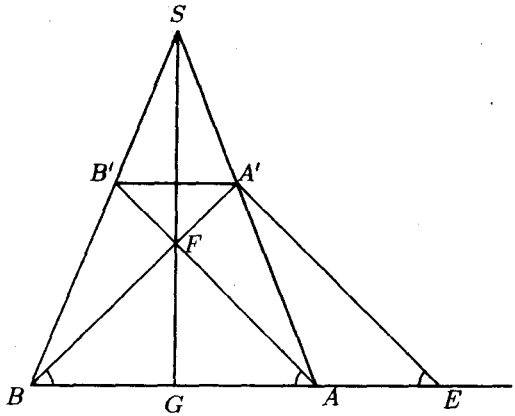


Рис. 14

$\angle BSC = \angle ASG$, т. е. что SG есть биссектриса угла ASB. Но в равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Поэтому G — середина отрезка AB и $SG \perp AB$. Аналогично доказывается, что если H — середина отрезка CD, то $SH \perp CD$.

Поскольку $AB \parallel CD$, то можно теперь утверждать, что $AB \perp SG$ и $AB \perp SH$. Отсюда следует, что прямая AB перпендикулярна плоскости GSH и, в частности, $AB \perp GH$. Поскольку G и H — середины противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 13), то $GH \parallel BC$, и, значит, $AB \perp BC$. Но прямые AB и BC согласно условию задачи образуют угол величиной в $60°$. Мы пришли к противоречию, означающему, что первый случай невозможен, и в действительности выполняются равенства $AB' = CD'$ и $BA' = DC'$.

Вынесем на отдельный чертеж (рис. 15) плоскости ABS и CDS. Как доказано выше, $AB \parallel A'B'$, $CD \parallel C'D'$. Проведем из точек A' и D' прямые, параллельные AB' и DC' соответственно. Точки их пересечения с прямыми AB и CD обозначим буквами E и K (рис. 15). Четырехугольники $AB'A'E$ и $DC'D'K$ — параллелограммы. Отсюда и из доказанных выше равенств следует, что $BE = BA + AE = BA + B'A' = CD + C'D' = CD + DK = CK$, $EA' = AB' = CD'$, $BA' = DC' = KD'$. Теперь можно утверждать, что треугольники $BA'E$ и $CD'K$ равны и, значит, $\angle DCD' = \angle BEA' = \angle BAB'$, $\angle ABA' = \angle CKD' = \angle CDC'$. Отсюда следуют равенства треугольников BAB' и DCD', ABA' и CDC' (по двум сторонам и заключенному между ними углу) и, в частности, равенства

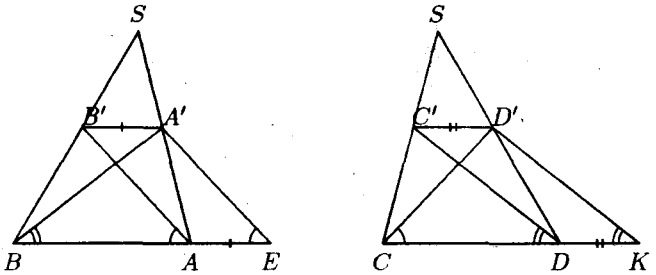


Рис. 15

углов: $\angle ABB' = \angle CDD'$, $\angle BAA' = \angle DCC'$. Из двух последних равенств, а также равенства $AB = CD$ следует, что равны треугольники ABS и CDS и, в частности, $AS = SC$, $BS = DS$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 16). Тогда SO есть медиана в равнобедренных

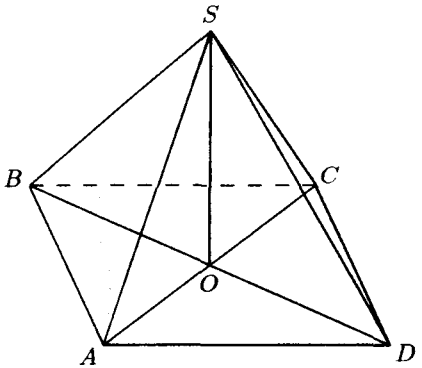


Рис. 16

треугольниках ASC и BSD. Следовательно, SO является в них же и высотой, т. е. $SO \perp AC$ и $SO \perp BD$. Но тогда прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$, и SO есть высота пирамиды $ABCDS$. Поскольку $ABCD$ —параллелограмм, то площадь основания пирамиды может быть вычислена следующим образом

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) = 4 \cdot 8 \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}.$$

Из треугольника ABD по теореме косинусов находим

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(\angle BAD) =$$
$$= 16 + 64 + 2 \cdot 4 \cdot 8 \cos 60^\circ = 112,$$

и, значит, $BO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{7}$. Из прямоугольного треугольника OBS по теореме Пифагора получаем

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{128 - 28} = 10$$

и, наконец, находим искомый объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 16\sqrt{3} = \frac{160\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{160\sqrt{3}}{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)^2$, $n \in Z$. 2. $2\sqrt{2}$.
3. $0 < x \leqslant 3^{-2\sqrt{3}}$; $3^{2\sqrt{3}} \leqslant x < +\infty$. 4. Нет. 5. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$.
6. $28\sqrt{3}$.

Вариант 3. 1. $x = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)^2$, $n \in Z$. 2. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.
3. $0 < x \leqslant 7^{-2\sqrt{7}}$; $7^{2\sqrt{7}} \leqslant x < +\infty$. 4. Нет. 5. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$.
6. $72\sqrt{6}$.

Вариант 4. 1. $x = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)^2$, $n \in Z$. 2. $\frac{9\sqrt{2}}{5}$.
3. $0 < x \leqslant 5^{-2\sqrt{5}}$; $5^{2\sqrt{5}} \leqslant x < +\infty$. 4. Нет. 5. $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$.
6. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

1987

Решение варианта 1

1. Пусть x_0 — решение исходного уравнения, тогда справедливо равенство

$$\cos\left(\frac{1}{\sin x_0}\right) = \frac{1}{2},$$

из которого следует, что $\frac{1}{\sin x_0} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Так как $|\sin x_0| \leqslant 1$, то $\left|\frac{1}{\sin x_0}\right| \geqslant 1$, а это означает, что k принимает такие целые значения, что $\left|\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right| \geqslant 1$. Последнему условию удовлетворяет любое целое значение k. Поэтому любое

решение исходного уравнения является решением совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{3}{\pm\pi + 6\pi k}, \ k \in Z. \qquad (1)$$

Легко видеть, что любое решение совокупности уравнений (1) является решением исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений (1). При любом фиксированном целом значении k соответствующее уравнение совокупности (1) имеет решения:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{3}{\pm\pi + 6\pi k}\right) + \pi n, \ n \in Z.$$

Объединение этих решений дает решения исходного уравнения. Следовательно, решениями исходного уравнения являются все числа

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{3}{\pi(\pm 1 + 6k)}\right) + \pi n; \ n, k \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{3}{\pi(\pm 1 + 6k)}\right) + \pi n$; $n \in Z$, $k \in Z$.

2. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих неравенству

$$x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3} > 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) можно переписать в виде

$$(x+2)^2 > 4\sqrt{3} - 7. \qquad (3)$$

Так как $(4\sqrt{3})^2 = 48 < 49$, то $4\sqrt{3} - 7 < 0$ и, следовательно, неравенство (3) выполняется при любом x, значит, ОДЗ состоит из всех действительных x.

Поскольку $\sqrt{6} < 2,5$ и $\sqrt{2} < 1,5$, то $\sqrt{6} + \sqrt{2} < 4$ и $\sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} > 1$. Следовательно, основание логарифма, находящегося в левой части исходного неравенства, больше 1, и поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3} < (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2 + 4x + 3 < 0. \qquad (4)$$

Решением неравенства (4), а значит, и исходного неравенства являются все x из промежутка $-3 < x < -1$.

Ответ: $-3 < x < -1$.

3. Поскольку не указано, где на прямой AB находится точка D, то возможны три случая расположения: а) D слева от A,

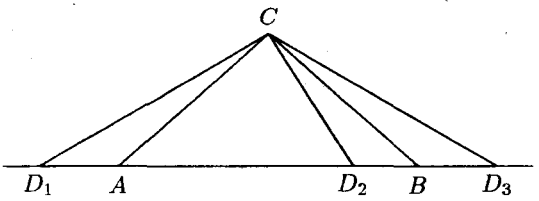


Рис. 17

б) D на стороне AB треугольника ABC, в) D справа от B (рис. 17).

При любом расположении точки D справедливы формулы

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2AC + AB), \quad S_{DBC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot AC,$$

$$S_{DAC} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot AC.$$

Если точка D лежит на стороне AB, то

$$S_{ABC} = S_{DBC} + S_{DAC} = 7AC,$$

и из соотношения $4AC + 2AB = 7AC$ имеем $AB = \frac{3}{2}AC$. Тогда $\cos(\angle DBC) = \frac{AB}{2} : AC = \frac{3}{4}$.

Если точка D лежит слева от точки A, то

$$S_{DBC} = S_{DAC} + S_{ABC},$$

что невозможно, так как

$$S_{DBC} = \frac{3AC}{2} < \frac{11AC}{2} = S_{DAC}.$$

Если точка D лежит справа от точки B, то

$$S_{DAC} = S_{ABC} + S_{CBD},$$

т. е. $\frac{11AC}{2} = 4AC + 2AB + \frac{3}{2}AC$, откуда $AB = 0$, что невозможно. Итак, возможен только случай: D принадлежит стороне AB, а тогда $\cos(\angle DBC) = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

4. Обозначим скорости поездов, вышедших из пункта A и из пункта B соответственно через u км/час и v км/час. Пусть время их движения до встречи равно t час. Ясно, что $u > v > 0$,

так как за время t первый поезд прошел на 60 км больше, чем второй. Тогда u, v и t удовлетворяют либо системе уравнений

$$\begin{cases} t(u-v)=60, \\ (t-2)((u+25)-(v+20))=60, \\ (t-2)(u+25)=tu, \end{cases} \qquad (5)$$

либо системе уравнений

$$\begin{cases} t(u-v)=60, \\ (t-2)((u+20)-(v+25))=60, \\ (t-2)(u+20)=tu. \end{cases} \qquad (6)$$

Однако легко видеть, что система (6) несовместна, так как из первого и второго ее уравнений следует, что $t^2-2t+24=0$ и нет действительных t, удовлетворяющих этому равенству.

Решим систему (5). Из третьего ее уравнения $t=\dfrac{2u+50}{25}$. Из первого уравнения $u-v=\dfrac{60}{t}=\dfrac{60\cdot 25}{2u+50}$. Подставляя во второе уравнение системы $\dfrac{2u+50}{25}$ вместо t и $\dfrac{60\cdot 25}{2u+50}$ вместо $u-v$, имеем уравнение

$$\left(\frac{2u+50}{25}-2\right)\left(\frac{60\cdot 25}{2u+50}+5\right)=60.$$

Так как $u>0$, то это уравнение равносильно уравнению

$$2u^2+50u-7500=0,$$

имеющему два корня $u_1=50$ и $u_2=75$. Условию задачи может удовлетворять только $u=50$. Тогда $t=6$ и $v=40$. Проверка показывает, что $u=50$, $v=40$ и $t=6$ действительно удовлетворяют условию задачи.

Итак, скорости поездов равны 50 км/час и 40 км/час.

Ответ: 50 км/час, 40 км/час.

5. Пусть a и b такие значения, что система имеет не менее 5 решений. Запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-y+a)(x+y-1)=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x-y+a=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0. \end{cases}$$

Выражая с помощью первых уравнений этих систем y через x и подставляя эти выражения вместо y во вторые уравнения, получим, что эта совокупность систем уравнений равносильна следующей совокупности систем

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ (2-b)x^2 + (b-2)x = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y = x + a, \\ (b+2)x^2 + a(b+2)x + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Первая система при $b = 2$ имеет бесконечно много решений, поэтому исходная система при $b = 2$ и любом a также имеет бесконечно много решений. Следовательно, $b = 2$ и любое a удовлетворяют условию задачи.

Первая система при $b \neq 2$ имеет два решения $(0;1)$ и $(1;0)$. Поэтому, чтобы исходная система уравнений имела не менее пяти решений, надо, чтобы вторая система имела не менее трех решений, что будет только в случае

$$b + 2 = a(b+2) = a^2 - 1 = 0,$$

т. е. при $b = -2$ и $a^2 = 1$.

Легко видеть, что при $b = -2$, $a = 1$ и при $b = -2$, $a = -1$ вторая система имеет бесконечно много решений. Поэтому при этих a и b исходная система также имеет бесконечно много решений. Следовательно, пары $b = -2$, $a = 1$ и $b = -2$, $a = -1$ также удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $(1;-2)$; $(-1;-2)$; $(p;2)$, $p \in R$.

6. Пусть $ABCS$ — данная пирамида (рис. 18). Докажем, что точки K, L, M и N лежат в одной плоскости. В самом деле, проведем через S плоскость α, параллельную плоскости LMN, и пусть эта плоскость пересекает плоскость ABC по прямой l, а прямые BC и AC соответственно в точках P и G.

Так как сфера касается ребер пирамиды в точках K, L, M и N, а касательные, проведенные к сфере из одной точки, равны, то $SK = SL$, $BL = BM$, $CM = CN$, $AK = AN$.

Параллельные плоскости LMN и α пересекают плоскость CBS по прямым LM и SP. Следовательно, $LM \parallel SP$, и значит, $\angle BLM = \angle BSP$ и $\angle BML = \angle BPS$. Но треугольник BLM равнобедренный, поэтому $\angle BLM = \angle BML$. Из указанных равенств углов следует, что треугольник BSP также равнобедренный, т. е. $BP = BS$, и значит,

$$SL = MP. \tag{7}$$

Аналогично доказывается, что прямые MN и l параллельны, а так как треугольник CMN равнобедренный, то $\angle CMN =$

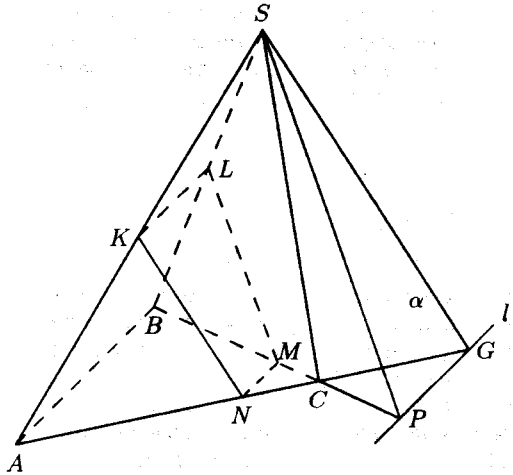


Рис. 18

$= \angle CNM$, и отсюда следует, что прямая l образует равные углы с прямыми CM и CN , так что $CP = CG$ и

$$MP = NG. \tag{8}$$

Из равенства $SK{=}SL$ и из (7), (8) следует, что $SK{=}NG$, а так как $AK = AN$, то заключаем, что $AS = AG$, т. е. треугольник ASG равнобедренный. В равнобедренных треугольниках AKN и ASG находим

$$\angle AKN = \angle ANK = \frac{1}{2}(\pi - \angle KAN),$$
$$\angle ASG = \angle AGS = \frac{1}{2}(\pi - \angle SAG).$$

Поскольку $\angle KAN = \angle SAG$, то из этих равенств получаем $\angle AKN = \angle ASG$, т. е. прямые KN и SG параллельны. Параллельные плоскости α и LMN пересекаются плоскостью ASG по параллельным прямым. Но так как через точку N можно провести только одну прямую, параллельную SG, то отсюда следует, что KN есть линия пересечения плоскостей LMN и α и, значит, точка K лежит в плоскости LMN. Итак, доказано, что все четыре точки касания K, L, M и N лежат в одной плоскости.

Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, высекаемую на сфере плоскостью $KLMN$ (рис. 19). Обозначим искомую длину отрезка KL буквой x. Тогда по условию $LM = x$. Обозначим буквой φ величину угла KNL. Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды, равны. Поэтому $\angle LNM = \varphi$. Применяя к треугольникам KLN и LMN теорему косинусов, находим

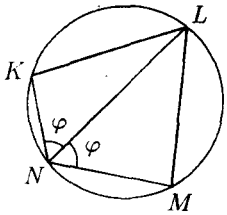


Рис. 19

$$KL^2 = KN^2 + LN^2 - 2KN \cdot LN \cos\varphi,$$
$$LM^2 = MN^2 + LN^2 - 2MN \cdot LN \cos\varphi.$$

Согласно условию задачи $MN = 7$, $KN = 5$, $LN = 2\sqrt{29}$, так что эти равенства можно переписать в виде

$$x^2 = 141 - 20 \cdot \sqrt{29} \cos\varphi,$$
$$x^2 = 165 - 28 \cdot \sqrt{29} \cos\varphi.$$

Умножая первое из них на 7, а второе на 5 и вычитая второй результат из первого, найдем $2x^2 = 162$, откуда $x = 9$.

Ответ: 9 см.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm \arccos\left(\dfrac{1}{(-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$, $k \in Z$. 2. $-2 < x < 0$.
3. $\cos(\angle AQR) = \dfrac{2}{5}$. 4. 60 км/час, 45 км/час. 5. $a = -4$, b — любое; $a=4$, $b = 2$. 6. $QT = 9$ см.

Вариант 3. 1. $x = (-1)^n \arcsin\left(\dfrac{2}{\pm\pi + 8\pi k}\right) + \pi n$, $n \in Z$, $k \in Z$.
2. $1 < x < 3$. 3. $\cos(\angle PCB) = \dfrac{1}{4}$. 4. 50 км/час, 40 км/час.
5. a — любое, $b = -2$; $a = 1$, $b = 2$. 6. 7 см.

Вариант 4. 1. $x = \pm \arccos\left(\dfrac{3}{(-1)^k \pi + 3\pi k}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$, $k \in Z$. 2. $0 < x < 2$. 3. $\cos(\angle TRQ) = \dfrac{7}{16}$.
4. 60 км/час, 45 км/час. 5. a — любое, $b = 4$. 6. 10 см.

1988

Решение варианта 1

1. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$1 - \cos 2x = \sin^2 2x, \qquad (1)$$

являющееся следствием исходного уравнения, т. е. все корни исходного уравнения будут корнями уравнения (1), однако, вообще говоря, не все корни уравнение (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) надо сделать проверку.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$1 - \cos 2x = 1 - \cos^2 2x$$

или в виде

$$\cos 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 2x = 1. \qquad (3)$$

Решения первого уравнения совокупности (3) есть $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Решения второго уравнения совокупности (3) есть $x = \pi m$, $m \in Z$.

Подставляя найденные решения уравнения (1) в исходное уравнение, находим, что его решениями являются $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$, и $x = \pi m$, $m \in Z$, а $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, решениями не являются.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \pi m$, $m \in Z$.

2. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < 5x - 4x^2 < 1, \\ 4^{-x} < 1 \end{cases} \qquad (4)$$

и

$$\begin{cases} 5x - 4x^2 > 1, \\ 4^{-x} > 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) решений не имеет, так как все решения ее второго неравенства составляют промежуток $-\infty < x < 0$, а для каждого из таких x имеем $5x - 4x^2 < 0$, т. е. ни одно из этих x не удовлетворяет ее первому неравенству.

Решим систему (4). Поскольку все решения неравенства $5x - 4x^2 > 0$ составляют промежуток $0 < x < \frac{5}{4}$, а множество решений неравенства $5x - 4x^2 - 1 < 0$ есть объединение двух промежутков $-\infty < x < \frac{1}{4}$ и $1 < x < +\infty$, то множество решений первого неравенства системы (4) есть объединение двух промежутков $0 < x < \frac{1}{4}$ и $1 < x < \frac{5}{4}$.

Решениями неравенства $4^{-x} < 1$ являются все x из промежутка $0 < x < +\infty$. Следовательно, решениями системы (4), а значит, и исходного неравенства являются все x из объединения двух промежутков $0 < x < \frac{1}{4}$ и $1 < x < \frac{5}{4}$.

Ответ: $0 < x < \frac{1}{4}$; $1 < x < \frac{5}{4}$.

3. Продолжим прямую PL до ее пересечения с прямой QR в точке T (рис. 20). Пусть O —центр данной окружности. Так как окружность вписана в треугольник PQT, то ее центр лежит на биссектрисах углов PQT и QPL. Так как $\angle SPT = \angle PTQ$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых, а $\angle QPT = \angle SPT$, поскольку PT — биссектриса угла QPS, то треугольник PQT равнобедренный. Значит, биссектриса QO есть и высота треугольника PQT. Пусть H — точка пересечения прямых QO и PT. Из прямоугольных треугольников PHQ и POH имеем

$$OH = PH \operatorname{tg}(\angle OPH) = PH \operatorname{tg} 20^\circ,$$

$$PH = PQ \cos(\angle QPH) = 7 \cos 40^\circ.$$

Так как OH есть радиус данной окружности, то он равен $7 \cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$.

Ответ: $7 \cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$.

4. Проведем через точку F прямую l, параллельную прямой AB (рис. 21). Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B

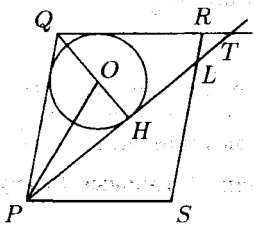


Рис. 20

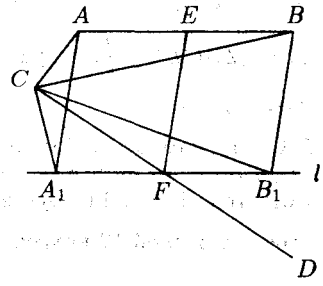


Рис. 21

на плоскость α, проведенную через прямые CD и l. Так как $AA_1 \perp l$, $AA_1 \parallel EF$ и $EF \perp CD$, то прямая AA_1 перпендикулярна плоскости α. Треугольник AA_1C прямоугольный, поэтому $AC^2 = {AA_1}^2 + {A_1C}^2$.

Так как прямая BB_1 перпендикулярна плоскости α, то треугольник BB_1C прямоугольный, поэтому

$$BC^2 = {CB_1}^2 + {BB_1}^2.$$

Прямая AB параллельна плоскости α, и прямые AA_1, EF и BB_1 перпендикулярны этой плоскости, поэтому $AA_1 = EF = BB_1$. Из треугольника ACB имеем

$$\cos(\angle ACB) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}.$$

Подставляя в эту формулу значения BC и AC, получаем, что

$$\cos(\angle ACB) = \frac{A_1C^2 + {CB_1}^2 + 2EF^2 - AB^2}{2\sqrt{A_1C^2 + EF^2} \cdot \sqrt{{CB_1}^2 + EF^2}}.$$

Поскольку в это выражение входят A_1C и CB_1 симметрично, то безразлично, что брать за угол между скрещивающимися прямыми AB и CD — угол A_1FC или угол B_1FC, ибо один из них острый, а другой тупой и в сумме они составляют $180°$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику CFA_1, считая, что $\angle A_1FC = \alpha = \arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$ (тогда $\angle CFB_1 = \pi - \alpha$), имеем

$$A_1C^2 = A_1F^2 + CF^2 - 2A_1F \cdot CF \cos\alpha,$$
$$CB_1{}^2 = CF^2 + FB_1{}^2 - 2CF \cdot FB_1 \cos(\pi - \alpha),$$

откуда

$$A_1C^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cos\alpha = 12 - 2 \cdot \frac{35}{10} = 5,$$
$$CB_1{}^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cos(\pi - \alpha) = 12 + 7 = 19,$$
$$A_1C^2 + CB_1{}^2 = 5 + 19 = 24,$$

тогда $\cos(\angle ACB) = \frac{5}{8}$, откуда $\angle ACB = \arccos \frac{5}{8}$.

Ответ: $\arccos \frac{5}{8}$.

5. Обозначим через S м длину одного круга, пусть v_1 м/мин. и v_2 м/мин. — скорости соответственно первого и второго мотоциклистов. Тогда 14 кругов первый мотоциклист проехал за $\frac{14S}{v_1}$ мин., а второй 12 кругов за $\frac{12S}{v_2}$ мин. Остальные 16 кругов первый мотоциклист проехал бы за $\frac{16S}{4v_1}$ мин., а второй оставшиеся 18 кругов за $\frac{18S}{2v_2}$ мин. Так как первый мотоциклист начал движение раньше и прошел на полкруга больше, то имеем уравнение

$$\frac{14S}{v_1} + \frac{16S}{4v_1} - \frac{\frac{S}{2}}{v_1} = \frac{12S}{v_2} + \frac{18S}{2v_2}.$$

Отсюда следует, что $v_2 = \frac{6}{5} v_1$.

Обозначим через n число кругов, на которое изменился разрыв между мотоциклистами, когда один из зрителей отсутствовал 4 минуты на стадионе. Так как $v_2 > v_1$, то

$$4(v_2 - v_1) = nS.$$

Поскольку $v_2 = \frac{6}{5}v_1$, то отсюда имеем

$$\frac{2}{3}v_2 = nS. \qquad (6)$$

Так как несмотря на первоначальный разрыв между мотоциклистами в $\frac{1}{2}$ круга, затем они были рядом, и так как $v_2 > v_1$, то первым окончил гонку второй мотоциклист. Мотоциклист, финишировавший первым, проезжал за минуту v_2 м. По условию он проезжал за минуту более 5 кругов, т. е. проезжал более $5S$ м. Поэтому

$$v_2 > 5S. \qquad (7)$$

Тогда из условий (6) и (7) имеем $n > \frac{10}{3}$.

С другой стороны, за 4 минуты второй мотоциклист проехал меньше, чем 30 кругов, поэтому

$$30 \cdot S > 4v_2. \qquad (8)$$

Из условий (7) и (8) имеем $n < 5$. Итак, имеем $\frac{10}{3} < n < 5$. Так как n — целое число, то $n = 4$. Тогда $v_2 = 6S$, $v_1 = 5S$, и разность времени финиша мотоциклистов равна

$$\frac{30S}{v_1} - \frac{30S}{v_2} - \frac{S}{2v_1} = \frac{9}{10}.$$

Ответ: 0,9 минут.

6. Пусть a — такое значение параметра a, при котором исходная система уравнений имеет единственное решение (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющее условиям $0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $z_0 > 0$. Тогда справедливы числовые равенства

$$\sin x_0 \cdot \sin y_0 = \frac{1}{z_0}, \qquad (9)$$

$$\cos x_0 \cdot \cos y_0 = -\left(\frac{x_0 + y_0}{a - \pi}\right)^2, \qquad (10)$$

$$\sin(x_0 - y_0) = \frac{2(x_0 + y_0)}{(a - \pi)z_0}. \qquad (11)$$

и числовые неравенства

$$0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad z_0 > 0. \tag{12}$$

Возводя равенство (11) в квадрат и учитывая равенства (9) и (10), получим, что справедливо равенство

$$\sin^2(x_0 - y_0) = -4 \sin x_0 \cdot \cos y_0 \cdot \sin y_0 \cdot \cos x_0. \tag{13}$$

Поскольку

$$\sin(x_0 - y_0) = \sin x_0 \cdot \cos y_0 - \cos x_0 \cdot \sin y_0,$$

то из равенства (13) следует справедливость равенства

$$(\sin x_0 \cdot \cos y_0 + \cos x_0 \cdot \sin y_0)^2 = 0$$

или, что все равно, справедливость равенства

$$\sin(x_0 + y_0) = 0. \tag{14}$$

Равенство (14) означает, что числа x_0 и y_0 связаны соотношением $x_0 + y_0 = k\pi$, при некотором $k \in Z$, но тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin x_0 &= \sin(k\pi - y_0) = (-1)^{k+1} \sin y_0, \\ \cos x_0 &= \cos(k\pi - y_0) = (-1)^k \cos y_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя эти значения x_0 и y_0 в равенства (9) и (10), получим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \sin^2 y_0 &= \frac{1}{z_0^2}, \\ (-1)^k \cos^2 y_0 &= -\left(\frac{x_0 + y_0}{a - \pi}\right)^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда следует, что k — нечетное число, т. е. $k = 2n + 1$, $n \in Z$, но тогда равенства (15) перепишутся в виде

$$\sin x_0 = \sin y_0, \quad \cos x_0 = -\cos y_0. \tag{17}$$

Так как $0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$\cos y_0 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sin y_0 \geqslant 0. \tag{18}$$

Поэтому, учитывая, что $z_0 > 0$ и $k = 2n + 1$, $n \in Z$, из равенства (16) получаем, что

$$\sin y_0 = \frac{1}{z_0}. \tag{19}$$

Подставляя это значение $\sin y_0$ в равенство (11) и учитывая равенства (17), получаем, что

$$\cos y_0 = \frac{x_0 + y_0}{a - \pi},$$

где $x_0 + y_0 = \pi(2n+1)$, $n \in Z$, т. е. что

$$\cos y_0 = \frac{\pi(2n+1)}{a-\pi}, \ n \in Z. \tag{20}$$

Отсюда следует, что $\cos y_0 \neq 1$. Поэтому из справедливости равенства (20) и неравенств (18) следует, что справедливы неравенства

$$0 \leqslant \frac{\pi(2n+1)}{a-\pi} < 1, \ n \in Z.$$

Итак, рассматриваемая тройка чисел (x_0, y_0, z_0) удовлетворяет равенствам

$$\sin y_0 = \frac{1}{z_0}, \quad \cos y_0 = \frac{\pi(2n+1)}{a-\pi}, \quad x_0 = \pi(2n+1) - y_0, \ n \in Z, \tag{21}$$

и неравенствам

$$0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad z_0 > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\pi(2n+1)}{a-\pi} < 1, \ n \in Z. \tag{22}$$

Ясно, что равенствам (21) удовлетворяет единственная тройка чисел (x_0, y_0, z_0) тогда и только тогда, когда неравенства (22) справедливы лишь для одного целого n.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют те и только те значения параметра a, при каждом из которых существует единственное целое число n, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leqslant \frac{\pi(2n+1)}{a-\pi} < 1. \tag{23}$$

Если $a > \pi$, то неравенства (23) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2} \leqslant n < \frac{a}{2\pi} - 1.$$

Ясно, что этим неравенствам удовлетворяет единственное $n = 0$ только тогда, когда

$$0 < \frac{a}{2\pi} - 1 \leqslant 1,$$

т. е. когда $2\pi < a \leqslant 4\pi$. Так как каждое из этих значений $a > \pi$, то каждое из них удовлетворяет условиям задачи.

Если $a < \pi$, то неравенства (23) можно переписать в виде

$$\frac{a}{2\pi} - 1 < n \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Ясно, что этим неравенствам удовлетворяет единственное $n = -1$ только тогда, когда

$$-2 \leqslant \frac{a}{2\pi} - 1 < -1,$$

т. е. когда $-2\pi \leqslant a < 0$. Так как каждое из этих значений $a < \pi$, то каждое из них удовлетворяет условиям задачи. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют те и только те a, каждое из которых удовлетворяет одному из следующих условий: $-2\pi \leqslant a < 0$ или $2\pi < a \leqslant 4\pi$.

Ответ: $-2\pi \leqslant a < 0$; $2\pi < a \leqslant 4\pi$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.
2. $0 < x < \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$. 3. $5 \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$. 4. $\arccos \frac{3}{7}$.
5. 0,8 минут. 6. $-\frac{3\pi}{2} \leqslant a < \frac{\pi}{2}$; $2\pi < a \leqslant 4\pi$.

Вариант 3. 1. $x = \pi m$, $m \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
2. $-\frac{3}{2} < x < -1$; $-\frac{1}{2} < x < 0$. 3. $6 \cos 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 27,5^\circ$.
4. $\arccos \frac{2\sqrt{3}}{5}$. 5. 0,6 минут. 6. $-2\pi \leqslant b < 0$; $2\pi < b \leqslant 4\pi$.

Вариант 4. 1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.
2. $-\frac{6}{5} < x < -1$; $-\frac{1}{5} < x < 0$. 3. $9 \cos 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 17,5^\circ$.
4. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 5. $\frac{26}{9}$ минут. 6. $-8\pi \leqslant b < -4\pi$; $0 < b \leqslant 4\pi$.

1989

Решение варианта 1

1. Поскольку $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то исходное уравнение перепишем в виде

$$4|\cos x| + 4\cos^2 x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Обозначив $|\cos x|$ через y, уравнение (1) запишем в виде

$$4y^2 + 4y - 1 = 0.$$

Поскольку это уравнение имеет два корня

$$y_1 = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

то уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$|\cos x| = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \quad \text{и} \quad |\cos x| = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет. Решения второго уравнения есть

$$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z.$

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$2 - x^2 + 2x \geqslant 0, \quad \frac{5}{2} - x > 0, \quad \frac{5}{2} - x \neq 1,$$

т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $1 - \sqrt{3} \leqslant x < 2$ и $2 < x < \frac{5}{2}$. Исходное неравенство на своей ОДЗ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2 \leqslant 0, \\ \log_3\left(\frac{5}{2} - x\right) + \log_3 2 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} \sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2 \geqslant 0, \\ \log_3\left(\frac{5}{2} - x\right) + \log_3 2 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решим систему (2) на ОДЗ исходного неравенства.

Перепишем первое неравенство системы (2) в виде

$$\sqrt{2 - x^2 + 2x} \leqslant 2 - x. \tag{4}$$

Для любого x из промежутка $2 < x < \frac{5}{2}$ левая часть неравенства (4) неотрицательна, а правая отрицательна, значит, на этом промежутке неравенство (4), а потому и система (2) решений не имеют.

Для любого x из промежутка $1 - \sqrt{3} \leqslant x < 2$ обе части неравенства (4) неотрицательны, и оно на этом промежутке равносильно неравенству

$$2 - x^2 + 2x \leqslant 4 - 4x + x^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2 - 3x + 1 \geqslant 0. \tag{5}$$

Решениями неравенства (5) являются все x из двух промежутков

$$-\infty < x \leqslant \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leqslant x < +\infty.$$

Из этих x условию $1-\sqrt{3} \leqslant x < 2$ удовлетворяют только x из промежутка $1-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Они и дают все решения неравенства (4), входящие в ОДЗ исходного неравенства.

Решениями второго неравенства системы (2) являются все $x < 2$. Из них в ОДЗ исходного неравенства входят все x из промежутка $1-\sqrt{3} \leqslant x < 2$. Следовательно, решениями системы (2), входящими в ОДЗ исходного неравенства, являются все x из промежутка $1-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Решим систему (3) на ОДЗ исходного неравенства. Все решения второго неравенства составляют промежуток $2<x<\dfrac{5}{2}$, входящий в ОДЗ исходного неравенства.

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{2-x^2+2x} \geqslant 2-x \qquad (6)$$

и рассмотрим его решение лишь на промежутке $2 < x < \dfrac{5}{2}$. Для любого x из этого промежутка левая часть неравенства (6) неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, все эти x являются его решениями. Следовательно, решениями системы (3), входящими в ОДЗ исходного неравенства, являются все x из промежутка $2 < x < \dfrac{5}{2}$.

Итак, решениями исходного неравенства являются все x из объединения двух промежутков $1-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $2<x<\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $1-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$; $2 < x < \dfrac{5}{2}$.

3. Обозначим через O центр окружности, описанной около треугольника KLN (рис. 22). Тогда прямые OL и LM, а также прямые ON и MN перпендикулярны, так как LM и MN — касательные к этой окружности, а OL и ON — ее радиусы. Значит, $\angle LON = 360° - \angle OLM - \angle ONM - \angle LMN = 60°$. Поскольку $LO = ON$ и $\angle LON = 60°$, то треугольник LON равносторонний. Так как $LM \parallel KN$, то прямые OL и KN перпендикулярны. Пусть D — точка их пересечения. Так как KN — хорда рассматриваемой окружности, а OL — перпендикулярный ей радиус, то $KD = DN = \dfrac{1}{2}KN = \dfrac{3}{2}$. Треугольник ODN прямоугольный. Поэтому $\angle DNO = 90° -$

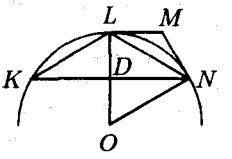


Рис. 22

$- \angle DON = 30°$. Так как $\angle LNO = 60°$, то $\angle LND = \angle LNO - \angle DNO = 30°$. В прямоугольном треугольнике LDN имеем $LD = DN \operatorname{tg}(\angle LND) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как LD — высота треугольника KLN, а KN — основание, то S — площадь треугольника — есть

$$S_{KNL} = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot DL = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Пусть пара чисел (x_0, y_0) является решением исходной системы уравнений, тогда справедливы равенства

$$\log_{x_0} y_0 + \log_{y_0} x_0 = \frac{5}{2} \tag{7}$$

и

$$\sqrt{x_0} - 3\sqrt{y_0} = 1. \tag{8}$$

Из равенства (7) следует, что

$$x_0 > 0, \quad x_0 \neq 1, \quad y_0 > 0, \quad y_0 \neq 1. \tag{9}$$

Поскольку для таких x_0 и y_0 справедливо равенство $\log_{y_0} x_0 = \frac{1}{\log_{x_0} y_0}$, то равенство (7) можно переписать в виде

$$\frac{(\log_{x_0} y_0)^2 - \frac{5}{2} \log_{x_0} y_0 + 1}{\log_{x_0} y_0} = 0$$

или в виде

$$\frac{(\log_{x_0} y_0 - 2)\left(\log_{x_0} y_0 - \frac{1}{2}\right)}{\log_{x_0} y_0} = 0,$$

откуда ясно, что либо $\log_{x_0} y_0 = 2$, либо $\log_{x_0} y_0 = \frac{1}{2}$, т. е. либо $y_0 = x_0^2$, либо $x_0 = y_0^2$.

Если $y_0 = x_0^2$, то из равенства (8), учитывая условие (9), следует, что справедливо равенство

$$4\sqrt{x_0} - 3x_0 = 1. \tag{10}$$

Перепишем равенство (10) в виде

$$(\sqrt{x_0} - 1)\left(\sqrt{x_0} - \frac{1}{3}\right) = 0. \tag{11}$$

Так как $x_0 \neq 1$, то равенству (11) удовлетворяет лишь $x_0 = \frac{1}{9}$. Но тогда $y_0 = \frac{1}{81}$.

Если $x_0 = y_0^2$, то из равенства (8), учитывая условия (9), следует, что справедливо равенство $4y_0 - 3\sqrt{y_0} = 1$. Перепишем это равенство в виде

$$(y_0 - 1)\left(y_0 + \frac{1}{4}\right) = 0. \qquad (12)$$

Ясно, что равенству (12) не удовлетворяет ни одно y_0, одновременно удовлетворяющее условиям (9).

Следовательно, решением исходной системы может быть лишь пара чисел $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$. Легко проверить, что она действительно ей удовлетворяет и потому является ее единственным решением.

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$.

5. Пусть PQ и $KLMN$ — заданные в условии задачи отрезок и прямоугольник (рис. 23).

По условию плоскость $KLMN$ высекает из шара круг, вписанный в четырехугольник $KLMN$. В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, т. е. $KL + MN = LM + KN$. Но $KLMN$ — прямоугольник, поэтому $MN = KL$ и $LM = KN$. Из этих равенств следует, что $KL = LM = MN = KN = 1$ и, значит, $KLMN$ есть квадрат. В частности, это означает, что шар касается отрезков KL, LM, MN и KN в их серединах (вписанная в квадрат окружность касается сторон квадрата в их серединах).

Пусть F, A и B — точки касания шара с ребрами NM, NQ и MQ (рис. 24). Касательные к шару, проведенные из одной

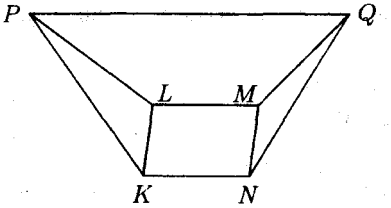


Рис. 23

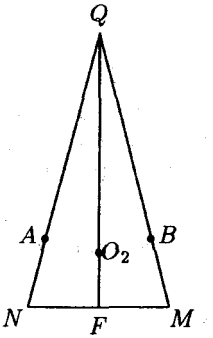


Рис. 24

точки, имеют равные длины. Поэтому $AQ = BQ$, $AN = NF$ и $BM = MF$. По доказанному ранее $NF = MF$. Следовательно,

$AN = BM$ и $NQ = MQ$. Итак, треугольник NQM равнобедренный.

Аналогично доказывается, что равнобедренным будет и треугольник KLP, а именно $KP = LP$.

Обозначим через P_1 и Q_1 проекции точек P и Q на плоскость $KLMN$ (рис. 25). По условию отрезок PQ параллелен плоско-

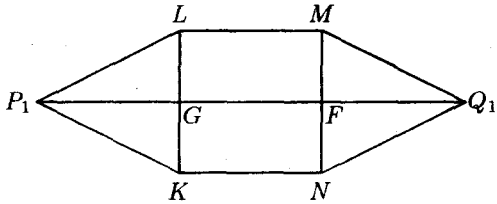


Рис. 25

сти $KLMN$, так что $P_1Q_1 \parallel PQ$. Отрезки MQ_1 и NQ_1 есть проекции на плоскость $KLMN$ равных наклонных MQ и NQ. Следовательно, $MQ_1 = NQ_1$ и, значит, точка Q_1 лежит на перпендикуляре к отрезку MN, проведенном через его середину F. Итак, Q_1 лежит на средней линии GF квадрата $KLMN$.

Аналогично доказывается, что точка P_1 лежит на средней линии GF. Но тогда $P_1Q_1 \parallel LM$, $P_1Q_1 \parallel KN$. Ранее доказано, что $P_1Q_1 \parallel PQ$, поэтому заключаем, что $P_1Q_1 \parallel KN$ и $P_1Q_1 \parallel LM$, т. е. четырехугольники $KPQN$ и $LPQM$ есть трапеции.

Согласно условию задачи в трапецию $KPQN$ можно вписать окружность. Пусть O_1 — ее центр и H, E, D — точки касания шара с ребрами KN, PQ, KP (рис. 26). Как доказано ранее, $KH = HN$. Радиус O_1H, проведенный в точку касания H, перпендикулярен касательной KN. Прямоугольные треугольники KHO_1 и NHO_1 равны, поэтому $\angle O_1KH = \angle O_1NH$. Точка O_1 равноудалена от прямых PK, KN и QN, поэтому KO_1 есть биссектриса угла PKN, а NO_1 — биссектриса угла QNH. Тогда $\angle PKH = 2\angle O_1KH = 2\angle O_1NH = \angle QNK$. Итак, $KPQN$ — равнобочная трапеция, т. е. $KP = NQ$. Ранее доказано, что $KP = LP$, $NQ = MQ$. Следовательно, $KP = LP = MQ = NQ$.

Так как касательные к шару, проведенные из одной точки, равны (рис. 26), то

$$PE = PD = KP - KD = KP - KH,$$
$$QE = QA = NQ - AN = NQ - HN.$$

Из этих равенств следует, что $PE = QE$, т. е. шар касается отрезка PQ в его середине. Но тогда $KP = PD + KD = PE +$

$+ KH = \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}KN = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 2$ и, следовательно, $LP = MQ = NQ = KP = 2$.

Из равнобедренного треугольника NQM находим

$$QF = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{1}{2}MN\right)^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Пусть O — центр данного в условии задачи шара, а O_2 — центр окружности, вписанной в квадрат $KLMN$. Тогда, как известно, O_2 лежит на средней линии GF квадрата, а точка O — на перпендикуляре к плоскости $KLMN$, проведенном через точку O_2. Прямые PQ и GF параллельны. Плоскость $PQFG$ содержит перпендикуляр PP_1 к плоскости $KLMN$. Следовательно, плоскости $PQFG$ и $KLMN$ перпендикулярны друг к другу. Но тогда перпендикуляр к плоскости $KLMN$, проведенный через точку O_2, лежит в плоскости $PQFG$ и, значит, точка O лежит в этой плоскости.

Точка O есть центр окружности, описанной вокруг треугольника EGF (рис. 27), поскольку шар касается отрезков PQ, KL

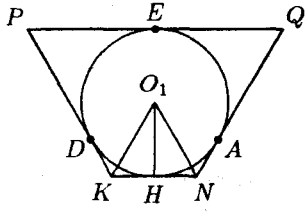


Рис. 26

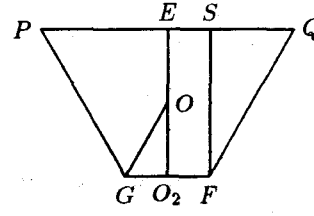


Рис. 27

и MN в точках E, G и F, принадлежащих плоскости $PQFG$. Кроме того, $OE \perp PQ$, так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Но тогда точки E, O и O_2 лежат на одной прямой. Опустим из точки F перпендикуляр FS на прямую PQ. Тогда

$$OS = EQ - O_2F = \frac{1}{2}(PQ - GE) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$$

и по теореме Пифагора

$$SF = \sqrt{QF^2 - SQ^2} = \sqrt{\frac{15}{4} - 1} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Пусть R — радиус шара. Тогда $EO = OG = R$,

$$OO_2 = EO_2 - EO = SF - R = \frac{\sqrt{11}}{2} - R.$$

По теореме Пифагора справедливо равенство

$$OG^2 = {OO_2}^2 + {GO_2}^2,$$

так что

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{11}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Из этого равенства находим $R = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$. Искомый объем шара равен $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{36}{11\sqrt{11}}\pi$.

Ответ: $\dfrac{36}{11\sqrt{11}}\pi$.

6. Первое решение. Пусть (x_0, y_0, z_0) — тройка чисел, удовлетворяющая условию задачи. Тогда справедливо числовое равенство

$$x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 + x_0y_0 - x_0z_0 - y_0z_0 - 1 = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$z_0^2 - (x_0 + y_0)z_0 - (1 - x_0^2 - 2y_0^2 - x_0y_0) = 0.$$

Обозначая $-(x_0 + y_0) = p$, $-(1 - x_0^2 - 2y_0^2 - x_0y_0) = q$, получаем, что z_0 является корнем квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Дискриминант этого уравнения равен

$$(x_0 + y_0)^2 + 4(1 - x_0^2 - 2y_0^2 - x_0y_0). \qquad (13)$$

Итак, задача свелась к нахождению наименьшего значения x_0, для которого выражение (13) неотрицательно, т. е. надо найти наименьшее значение x_0, для которого справедливо неравенство

$$4 - 3x_0^2 - 7y_0^2 - 2x_0y_0 \geqslant 0.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$7y_0^2 + 2x_0y_0 + 3x_0^2 - 4 \leqslant 0.$$

Обозначая $2x_0 = b$, $3x_0 - 4 = c$, получаем, что y_0 является решением неравенства

$$7y^2 + by + c \leqslant 0.$$

Но тогда дискриминант этого неравенства

$$4x_0^2 - 28(3x_0^2 - 4)$$

должен быть неотрицательным, т. е. x_0 должно удовлетворять условию $x_0^2 \leqslant \dfrac{7}{5}$, т. е. условию

$$-\sqrt{\frac{7}{5}} \leqslant x_0 \leqslant \sqrt{\frac{7}{5}}. \qquad (14)$$

Итак, при любом x_0, удовлетворяющем условию (14), и только для таких x_0 существуют числа y и z, удовлетворяющие уравнению, данному в условии задачи; наименьшим среди этих чисел является число $x_0 = -\sqrt{\frac{7}{5}}$. Легко видеть, что при этом значении x_0 числа $y_0 = -\frac{x_0}{7}$ и $z_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$, т. е. числа $y_0 = \sqrt{\frac{1}{35}}$ и $z_0 = \frac{3}{\sqrt{35}}$ действительно удовлетворяют исходному уравнению. Следовательно, это значение x_0 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Второе решение. Из тождества

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = \left(z - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y + \frac{1}{7}x\right)^2 + \frac{5}{7}x^2$$

следует, что заданное в условии задачи равенство может выполняться лишь при $\frac{5}{7}x^2 \leqslant 1$, т. е. при $-\sqrt{\frac{7}{5}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{7}{5}}$.

Наименьшему из значений $x_0 = -\sqrt{\frac{7}{5}}$ соответствует

$$y_0 = -\frac{1}{7}x_0 = \frac{1}{\sqrt{35}} \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{1}{2}(y_0 + x_0) = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{2}$. 3. 24. 4. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. 5. $\frac{180\pi}{7}$. 6. $z = \sqrt{7}$.

Вариант 3. 1. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{6}-1}{5} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $0 < x < \frac{3}{2}$, $-1 - 2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1-\sqrt{15}}{2}$. 3. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 4. $\left(16; \frac{1}{4}\right)$. 5. $\frac{144\pi}{5}$. 6. $x = -\sqrt{3}$.

Вариант 4. 1. $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $-\frac{1}{4} < x < 1$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 3. 4. 4. $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 5. $\frac{32\pi}{3}$. 6. $z = \sqrt{5}$.

§2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

1984

Решение варианта 1

1. Из условия следует, что $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Переходя в выражении $\log_b(a^2 b)$ к логарифму по основанию a, имеем

$$\log_b(a^2 b) = \frac{\log_a(a^2 b)}{\log_a b} = \frac{\log_a a^2 + \log_a b}{\log_a b} = \frac{2 + \log_a b}{\log_a b} = \frac{2+7}{7} = \frac{9}{7}.$$

Ответ: $\frac{9}{7}$.

2. Применяя формулу для произведения косинусов:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{9}{2}(\cos 8x + \cos 2x) + 7 = \frac{9}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 12\cos 4x$$

или в виде

$$9\cos 8x - 33\cos 4x + 14 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $\cos 8x = 2\cos^2 4x - 1$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$18\cos^2 4x - 33\cos 4x + 5 = 0.$$

Квадратное уравнение $18z^2 - 33z + 5 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{1}{6}$ и $z_2 = \frac{5}{3}$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos 4x = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \cos 4x = \frac{5}{3}.$$

Решение первого из этих уравнений есть $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Второе уравнение решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α.

Ответ: $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

3. Четырехугольник $ABCH$ согласно условию задачи есть трапеция, вписанная в окружность. Поэтому она равнобочная, и в каждом из случаев, изображенных на рис. 28, выполняется равенство $BH = AC$. Отметим, что пока точное положение точки E на прямой AH нам не известно. Важно лишь, что точка E находится на рис. 28 а) по одну сторону с точкой H от точки A, а на рис. 28 б) — по разные стороны.

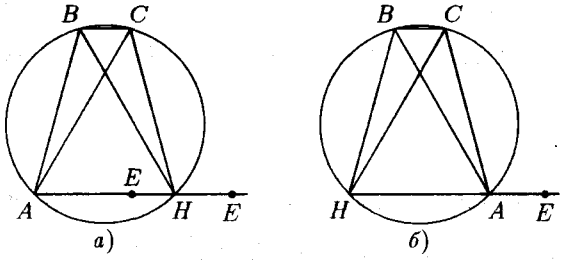


Рис. 28

Таким образом, для решения задачи достаточно найти длину отрезка AC. Углы ACB и AHB опираются на одну хорду AB. Поэтому они или равны, или составляют в сумме $180°$. В любом случае $\sin(\angle ACB) = \sin(\angle AHB) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как прямые BC и AE параллельны, а CE — боковая сторона трапеции $ABCE$, и AC — ее диагональ, то накрест лежащие углы ACB и CAE равны: $\angle ACB = \angle CAE$. Следовательно, $\sin(\angle CAE) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. В треугольнике ACE сторона CE не является наибольшей ($CE = 8\sqrt{3} < 16 = AE$). Поэтому угол CAE острый и, значит, $\angle CAE = 60°$. Но тогда $\angle ACB = \angle CAE = 60°$, т. е. имеет место случай, изображенный на рис. 28 а). Применяя к треугольнику ACE (рис. 29) теорему синусов, находим

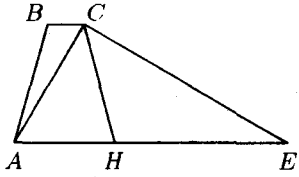


Рис. 29

$$\frac{AE}{\sin(\angle ACE)} = \frac{CE}{\sin(\angle CAE)},$$

откуда находим, что $\sin(\angle ACE) = \dfrac{AE}{CE}\sin(\angle CAE) = \dfrac{16}{8\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Таким образом, $\angle ACE = 90°$, т. е. треугольник ACE прямоугольный. Имеем: $AC = AE\cos(\angle CAE) = 16\cos 60° = 8$.

Ответ: 8.

4. Поскольку $\log_2 x^4 = 2\log_2 x^2$, то исходное неравенство запишем в виде

$$\sqrt{7 - \log_2 x^2} + 2\log_2 x^2 > 4. \qquad (2)$$

Обозначим $\log_2 x^2$ через t. Тогда неравенство (2) можно переписать так:

$$\sqrt{7-t}+2t>4$$

или так:

$$\sqrt{7-t}>4-2t. \qquad (3)$$

Область допустимых значений этого неравенства состоит из всех t, удовлетворяющих условию $7-t\geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-\infty<t\leqslant 7$.

Разобьем этот промежуток на два множества $-\infty<t\leqslant 2$ и $2<t\leqslant 7$.

Пусть $-\infty<t\leqslant 2$. Обе части неравенства (3) неотрицательны на этом множестве, и неравенство (3) равносильно на нем неравенству

$$7-t>16-16t+4t^2$$

или неравенству

$$4t^2-15t+9<0.$$

Множество решений последнего неравенства есть промежуток $\frac{3}{4}<t<3$. Из этих значений t в множестве $-\infty<t\leqslant 2$ содержатся только t из промежутка $\frac{3}{4}<t\leqslant 2$. Они и являются решениями неравенства (3) в области $-\infty<t\leqslant 2$.

Пусть $2<t\leqslant 7$. На этом промежутке левая часть неравенства (3) неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, все числа из промежутка $2<t\leqslant 7$ являются решениями неравенства (3).

Объединяя решения, найденные на множествах $-\infty<t\leqslant 2$ и $2<t\leqslant 7$, получаем, что множество решений неравенства (3) есть промежуток $\frac{3}{4}<t\leqslant 7$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$\frac{3}{4}<\log_2 x^2\leqslant 7,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$2^{\frac{3}{4}}<x^2\leqslant 2^7$$

Решения последнего неравенства, а значит, и исходного, образуют два промежутка $2^{\frac{3}{8}}<x\leqslant 2^{\frac{7}{2}}$ и $-2^{\frac{7}{2}}\leqslant x<-2^{\frac{3}{8}}$.

Ответ: $2^{\frac{3}{8}}<x\leqslant 2^{\frac{7}{2}}$; $-2^{\frac{7}{2}}\leqslant x<-2^{\frac{3}{8}}$.

5. Пусть (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы уравнений, причем x_0 лежит на отрезке $[4;7]$. Обозначим сумму y_0+z_0 буквой u, а произведение y_0z_0 — буквой v. После подстановки в

уравнения системы чисел x_0, y_0, z_0 вместо переменных x, y, z, получим числовые равенства, которые можно переписать так:

$$x_0^3 + x_0^2(13 - u) + x_0(2u - 2v - 26) + 5v - 7u + 30 = 0,$$
$$x_0^3 + x_0^2(17 - u) - x_0(2u + 2v - 26) + u - 3v - 2 = 0,$$

или, выделяя коэффициенты при u и v, так:

$$u(2x_0 - x_0^2 - 7) + v(5 - 2x_0) + x_0^3 + 13x_0^2 - 26x_0 + 30 = 0,$$
$$u(1 - 2x_0 - x_0^2) + v(-2x_0 - 3) + x_0^3 + 17x_0^2 + 26x_0 - 2 = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем равенство

$$u(4x_0 - 8) + 8v - 4x_0^2 - 52x_0 + 32 = 0,$$

откуда

$$v = \frac{1}{2}[u(2 - x_0) + x_0^2 + 13x_0 - 8]. \qquad (4)$$

Подставляя это значение v во второе равенство, получаем равенство

$$2u(2x_0 - x_0^2 - 7) + (5 - 2x_0)[4(2 - x_0) + x_0^2 + 13x_0 - 8] + \\ + 2[x_0^3 + 13x_0^2 - 26x_0 + 30] = 0,$$

которое после упрощений можно переписать так:

$$-u(5x_0 + 4) + 5x_0^2 + 29x_0 + 20 = 0. \qquad (5)$$

Поскольку $5x_0^2 + 29x_0 + 20 = (5x_0 + 4)(x_0 + 5)$ и так как x_0 принадлежит отрезку $[4; 7]$, т. е. $5x_0 + 4 \neq 0$, то из равенства (5) следует, что $u = x_0 + 5$. Подставляя это значение u в равенство (4), находим, что $v = 5x_0 + 1$.

Таким образом, выполнены равенства

$$y_0 + z_0 = x_0 + 5, \quad y_0 z_0 = 5x_0 + 1,$$

из которых согласно формулам Виета следует, что y_0 и z_0 есть корни квадратного уравнения

$$t^2 - (x_0 + 5)t + 5x_0 + 1 = 0. \qquad (6)$$

Его дискриминант $D = (x_0 + 5)^2 - 4(5x_0 + 1) = x_0^2 - 10x_0 + 21 = (x_0 - 3)(x_0 - 7)$ должен быть неотрицательным. Неравенство $(x_0 - 3)(x_0 - 7) \geqslant 0$ возможно только в случае $x_0 \leqslant 3$ или $x_0 \geqslant 7$. Учитывая неравенства $4 \leqslant x_0 \leqslant 7$, заключаем, что $x_0 = 7$.

Уравнение (6) теперь принимает вид

$$t^2 - 12t + 36 = 0. \qquad (7)$$

Это уравнение имеет единственный корень $t = 6$. Поскольку y_0 и z_0 есть корни уравнения (6), то получаем, что $y_0 = 6$ и $z_0 = 6$.

Таким образом, если какая-то тройка чисел (x_0, y_0, z_0) удовлетворяет условию задачи, то это может быть только набор чисел

$(7, 6, 6)$. Проверкой убеждаемся, что числа $x_0 = 7$, $y_0 = 6$, $z_0 = 6$ действительно удовлетворяют исходной системе уравнений.

Ответ: $x = 7$, $y = 6$, $z = 6$.

6. Если две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью, то, как известно, две прямые, образовавшиеся в пересечении, будут параллельными. В заданном многограннике (рис. 30) плоскости, содержащие грани $ABCK$ и $EMPH$, параллельны. Поэтому можно утверждать, что $AB \parallel EM$, $BC \parallel MP$, $CK \parallel PH$, $AK \parallel EH$, т. е. четырехугольники $ABME$, $BCPM$, $CKHP$ и $AKHE$ — трапеции. Каждая из них вписана в окружность, получающуюся в пересечении данной сферы с плоскостью, соответствующей грани. Поскольку трапеция, вписанная в окружность, должна быть равнобочной, отсюда следует, что все четыре отрезка AE, BM, CP и KH должны иметь равную длину, т. е. $AE = BM = CP = KH$.

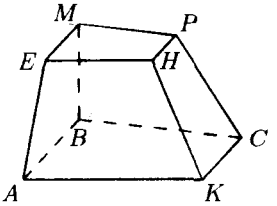


Рис. 30

Четырехугольник $ABCK$ также вписан в окружность. Если бы прямые AK и BC были параллельны, то, рассуждая как и выше, мы получили бы, что $AB = CK$, вопреки условию задачи. Значит, $AK \nparallel BC$.

Предположим, что прямые CP и KH параллельны. Тогда четырехугольник $CKHP$ — параллелограмм и, в частности, $CK = PH$. Из условия теперь следует, что $AB = EM$, и в четырехугольнике $ABME$ противоположные стороны попарно равны, т. е. $ABME$ — параллелограмм. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. В плоскости $BCPM$ лежат две прямые BM и CP, а в плоскости $AKHE$ — соответственно параллельные им прямые AE и KH. Если бы прямые BM и CP пересекались, а, значит, пересекались бы и прямые AE и KH, то, согласно приведенному выше утверждению, плоскости $BCPM$ и $AKHE$ должны были бы быть параллельны. Но это неверно, так как по доказанному выше лежащие в одной плоскости прямые AK и BC имеют общую точку. Итак, имеем $CP \parallel BM$ и, следовательно, $KH \parallel AE$. Отсюда следует, что все прямые AE, BM, CP и KH параллельны. Учитывая параллельность плоскостей $ABCK$ и $EMPH$, можно заключить, что данный многогранник должен быть призмой. Площадь основания этой призмы согласно условию равна 5, а высота равна 2. Значит, объем ее должен быть равен $5 \cdot 2 = 10$ вопреки условию задачи. Итак, предположение о параллельности прямых CP и KH привело нас к противоречию.

Значит, прямые CP и KH пересекаются. Аналогично доказывается, что пересекаются и прямые AE и BM.

Обозначим точки пересечения прямых AE и BM, CP и KH буквами D_1 и D_2 соответственно, а отношение $\frac{EM}{AB}$ буквой d. Согласно условию задачи имеем $\frac{PH}{CK} = \frac{EM}{AB} = d$. Вообще говоря, возможны два случая, изображенные на рис. 31: а) $d < 1$ и б) $d > 1$.

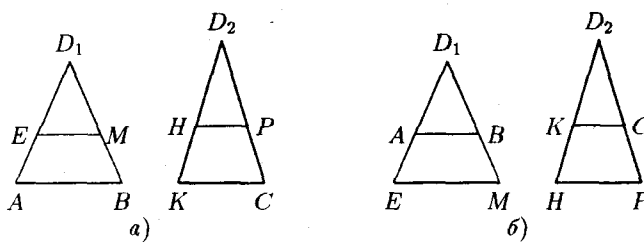


Рис. 31

Так как $EM \parallel AB$, то треугольники ABD_1 и EMD_1 подобны и $\frac{ED_1}{AD_1} = \frac{EM}{AB} = d$. В обоих случаях имеем $AE = |AD - ED_1| = |1 - d|AD_1$. Аналогично получаем $KH = |1 - d|KD_2$. По доказанному $AE = KH$ и $d \neq 1$ (иначе $EM = AB$, $ABME$ — параллелограмм, и прямые AE и BM параллельны, что, как доказано выше, неверно). Из полученных равенств следует, что $AD_1 = KD_2$.

Так как $ABME$ и $CKHP$ — равнобочные трапеции, то $\angle D_1AB = \angle D_1BA$ и $\angle D_2CK = \angle D_2KC$. Отсюда следует, что треугольники ABD_1 и KCD_2 равнобедренные, т. е. $AD_1 = BD_1$ и $KD_2 = CD_2$. Итак, все четыре отрезка AD_1, BD_1, KD_2 и CD_2 имеют равную длину.

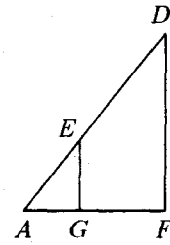


Рис. 32

Рассмотрим случай, изображенный на рис. 31 а). Пусть F и G — проекции точек D_1 и E соответственно на плоскость $ABCK$. Прямые D_1F и EG параллельны и потому лежат в одной плоскости. Вынесем ее на рис. 32. Из подобия треугольников AEG и AD_1F следует, что $\frac{D_1F}{EG} = \frac{AD_1}{AE}$. Учитывая, что EG есть расстояние между параллельными плоскостями $ABCK$ и $EMPH$, т. е. $EG = 2$, за-

ключаем, что для D_1F — расстояния от точки D_1 до плоскости $ABCK$ — справедливо равенство $D_1F = 2\dfrac{AD_1}{AE}$.

Точно так же доказывается, что расстояние от точки D_2 до плоскости $ABCK$ равно $2\dfrac{KD_2}{KH}$. Выше доказано, что $AD_1 = KD_2$ и $AE = KH$. Теперь можно утверждать, что точки D_1 и D_2 равноудалены от плоскости $ABCK$. Аналогично это утверждение доказывается и в случае, изображенном на рис. 31 б).

Предположим, что точки D_1 и D_2 различны. Тогда прямая D_1D_2 лежит в плоскости $AEHK$, и, так как $D_1D_2 \parallel ABCK$ (точки D_1 и D_2 равноудалены от плоскости $ABCK$ и лежат от нее по одну сторону), то линия пересечения плоскостей $AEHK$ и $ABCK$ должна быть параллельна D_1D_2, т. е. $AK \parallel D_1D_2$. Аналогично доказывается, что $BC \parallel D_1D_2$. Но тогда $AK \parallel BC$, что противоречит доказанному выше утверждению. Полученное противоречие означает, что точки D_1 и D_2 совпадают, т. е. данный многогранник является усеченной пирамидой. Будем в дальнейшем обозначать буквой D совпадающие точки D_1 и D_2.

Если S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, а h — высота, то объем ее находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2). \qquad (8)$$

Так как $AB = \dfrac{1}{d}EM$, то многоугольники $ABCK$ и $EMPH$ подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{d}$. Поэтому

$$S_{ABCK} = \frac{1}{d^2}S_{EMPH} = \frac{5}{d^2}.$$

Пользуясь теперь формулой (8), находим

$$\frac{98}{15} = V = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(\frac{5}{d^2} + \frac{5}{d} + 5\right).$$

Отсюда после преобразований получаем квадратное уравнение для d:

$$24d^2 - 25d - 25 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $d_1 = \dfrac{5}{3}$ и $d_2 = -\dfrac{5}{8}$. Учитывая, что $d > 0$, находим $d = \dfrac{5}{3}$. В частности, это означает, что имеет место случай, изображенный на рис. 31 б), т. е. данный многогранник имеет следующий вид (рис. 33).

Обозначим буквами O, O_1 и O_2 центр данной в условии задачи сферы и центры окружностей, описанных вокруг четырехугольников $ABCK$ и $EMPH$ соответственно. Так как точка D равноудалена от точек A, B, C, K, то проекция ее на плоскость $ABCK$ также будет равноудалена от этих точек. Следовательно, проекция D на плоскость $ABCK$ совпадает с точкой O_1. Точка O_1 есть проекция центра сферы O на плоскость $ABCK$. Поскольку $OO_1 \perp ABCK$ и $DO_1 \perp ABCK$, то точка O_1 лежит на прямой DO. Аналогично доказывается, что и точка O_2 лежит на прямой DO.

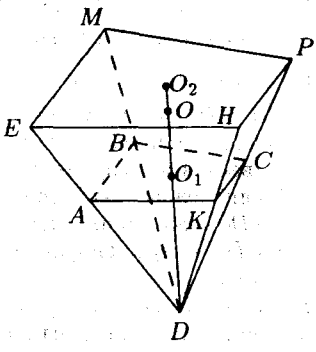


Рис. 33

Введем теперь на плоскости DOK систему координат (рис. 34), поместив ее начало в точку O_1, ось O_1X направив по лучу O_1K, а ось O_1Y — по лучу O_1O_2. Обозначим ординату точки O буквой y. Согласно условию длины отрезков OH и OK равны радиусу заданной сферы, т. е. $\sqrt{34}$. Поэтому $O_1K = \sqrt{34 - y^2}$. Точка O_2 имеет координаты $(0; 2)$. Поэтому $O_2H = \sqrt{34 - (2 - y)^2}$. Отношение радиусов окружностей, описанных вокруг подобных многоугольников, равно коэффициенту подобия. Поэтому получаем равенство

$$\sqrt{34 - (2 - y)^2} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34 - y^2}. \qquad (9)$$

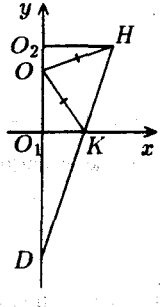


Рис. 34

Возводя получившееся уравнение в квадрат, после тождественных преобразований приходим к квадратному уравнению

$$4y^2 + 9y - 145 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $y_1 = 5$ и $y_2 = -7\frac{1}{4}$. Корень y_2 не удовлетворяет условию $y^2 \leqslant 34$. Подставляя $y_1 = 5$ в уравнение (9), убеждаемся, что y_1 ему удовлетворяет. Итак, $y = 5$. В частности, это означает, что точка O лежит на луче O_1O_2 выше точки O_2. Пользуясь установленными ранее формулами, находим $O_1K = \sqrt{34 - 25} = 3$, $O_2H = \sqrt{34 - 9} = 5$, т. е. точки K и H имеют координаты: $K(3; 0)$ и $H(5; 2)$.

Теперь находим расстояние между точками K и H:

$$KH = \sqrt{(3-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}.$$

Поскольку ребра BM и KH имеют равную длину, находим $BM = \sqrt{8}$.

Ответ: $\sqrt{8}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{3}{2}$. 2. $\pm\frac{1}{6}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. 3. $7\sqrt{2}$. 4. $-2 < x \leqslant -2^{-\frac{7}{2}}$; $2^{-\frac{7}{2}} \leqslant x < 2$. 5. (5;5;5). 6. $6\sqrt{2}$.

Вариант 3. 1. $\frac{11}{5}$. 2. $\pm\frac{1}{12}\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$. 3. $5\sqrt{2}$. 4. $-3^{\frac{3}{10}} \leqslant x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leqslant 3^{\frac{3}{10}}$. 5. (8;6;6). 6. $\sqrt{2}$.

Вариант 4. 1. $\frac{5}{2}$. 2. $\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 3. 6. 4. $-3^{\frac{7}{2}} < x \leqslant -3^{-\frac{11}{6}}$; $3^{-\frac{11}{6}} \leqslant x < 3^{\frac{7}{2}}$. 5. (6;5;5). 6. $5\sqrt{2}$.

1985

Решение варианта 1

1. Из первого уравнения исходной системы находим, что

$$6^x = 2 + 2\cdot 3^y. \qquad (1)$$

Подставляя $2 + 2\cdot 3^y$ вместо 6^x во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$3^y(2 + 2\cdot 3^y) = 12. \qquad (2)$$

Обозначая 3^y через t, получим, что уравнение (2) можно записать в виде

$$t^2 + t - 6 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = -3$. Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений

$$3^y = 2 \quad \text{и} \quad 3^y = -3.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $y = \log_3 2$, а второе уравнение решений не имеет, так как $3^y > 0$ для любого y. Итак, уравнение (2) имеет единственный корень $y_1 = \log_3 2$. Подставляя это значение y_1 в уравнение (1), находим, что $x_1 = 1$.

Следовательно, исходная система имеет единственное решение $(1; \log_3 2)$.

Ответ: $(1; \log_3 2)$.

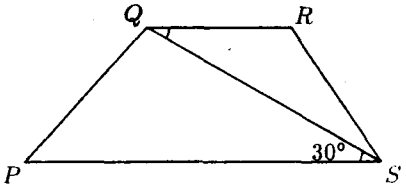


Рис. 35

2. Так как по условию задачи прямые PS и QR параллельны (рис. 35), то $\angle RQS = \angle PSQ = 30°$. Применяя теорему косинусов к треугольнику RQS, находим

$$RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2QR{\cdot}QS\cos(\angle RQS) =$$
$$= 100 + 361 - 2{\cdot}10{\cdot}19\cos 30° = 461 - 190\sqrt{3}.$$

Отсюда следует, что

$$RS^2 - QR^2 = 461 - 190\sqrt{3} - 100 = 19(19 - 10\sqrt{3}).$$

Разность в скобках положительна ($19^2 = 361 > 300 = (10\sqrt{3})^2$), поэтому $RS^2 > QR^2$ и, значит, $RS > QR$.

Ответ: $RS > QR$.

3. Так как

$$\cos[2\pi(13x+9)^2] = 1 - 2\sin^2[\pi(13x+9)^2],$$

то, обозначив $\sin[\pi(13x+9)^2]$ через y, получим, что исходное уравнение можно переписать так:

$$4 - (1 - 2y^2) = 5y$$

или после упрощений так:

$$2y^2 - 5y + 3 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $y_1 = \frac{3}{2}$ и $y_2 = 1$. Следовательно, данное в условии задачи уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin[\pi(13x+9)^2] = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \sin[\pi(13x+9)^2] = 1. \qquad (3)$$

Первое из уравнений совокупности (3) решений не имеет, так как $\frac{3}{2}$ не лежит в области значений функции $\sin t$. Второе из уравнений совокупности (3) равносильно совокупности уравнений

$$\pi(13x+9)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z. \qquad (4)$$

При отрицательных целых k уравнения (4) решений не имеют. Для каждого из значений $k = 0, 1, 2, \ldots$ уравнение (4) равносильно уравнению $(13x + 9)^2 = \frac{1}{2} + 2k$, имеющему два корня $x_1 = \frac{-18 + \sqrt{8k+2}}{26}$, $x_2 = \frac{-18 - \sqrt{8k+2}}{26}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ответ: $\frac{-18 + \sqrt{8k+2}}{26}$, $\frac{-18 - \sqrt{8k+2}}{26}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Все решения исходного неравенства должны удовлетворять условиям

$$1 - 3|x| > 0, \quad 1 - 3|x| \neq 1, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \neq 0, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \neq 1, \quad 42x^2 - 14|x| + 1 > 0. \tag{5}$$

Множество чисел, удовлетворяющих условиям (5), состоит из четырех промежутков:

$$\text{а) } -\frac{1}{3} < x < -\frac{7+\sqrt{7}}{42}; \quad \text{б) } -\frac{7-\sqrt{7}}{42} < x < 0; \quad \text{в) } 0 < x < \frac{7-\sqrt{7}}{42}; \quad \text{г) } \frac{7+\sqrt{7}}{42} < x < \frac{1}{3}. \tag{6}$$

На множестве чисел (6) имеем

$$\frac{5}{6} - x > 0, \quad \log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = 2\log_{1-3|x|}\left(\frac{5}{6} - x\right).$$

Переходя в исходном неравенстве в логарифмах к основанию $\frac{5}{6} - x$, получим, что на множестве (6) исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{5}{6}-x}(42x^2 - 14|x| + 1) \leqslant 1. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь решение неравенства (7) на каждом из множеств а), б), в), г).

На множестве чисел а) имеем $\frac{5}{6} - x > 1$, $|x| = -x$, поэтому на этом множестве неравенство (7) равносильно неравенству

$$42x^2 + 14x + 1 \leqslant \frac{5}{6} - x$$

или неравенству

$$42x^2 + 15x + \frac{1}{6} \leqslant 0,$$

множество решений которого есть промежуток

$$\frac{-15 - \sqrt{197}}{84} \leqslant x \leqslant \frac{-15 + \sqrt{197}}{84}.$$

Так как $\frac{-15-\sqrt{197}}{84} < -\frac{1}{3}$, а $\frac{-15+\sqrt{197}}{84} > -\frac{7+\sqrt{7}}{42}$, то получаем, что любое число из множества а) есть решение исходного неравенства.

На множестве чисел б) имеем $\frac{5}{6} - x < 1$, $|x| = -x$, поэтому на этом множестве неравенство (7) равносильно неравенству

$$42x^2 + 14x + 1 \geqslant \frac{5}{6} - x$$

или неравенству

$$42x^2 + 15x + \frac{1}{6} \geqslant 0,$$

множество решений которого состоит из двух промежутков

$$-\infty < x \leqslant -\frac{15+\sqrt{197}}{84} \quad \text{и} \quad \frac{-15+\sqrt{197}}{84} \leqslant x < +\infty.$$

Так как $-\frac{15+\sqrt{197}}{84} < -\frac{7-\sqrt{7}}{42}$, а $-\frac{7-\sqrt{7}}{42} < -\frac{15-\sqrt{197}}{84}$, то получаем, что на множестве б) решением исходного неравенства является промежуток $-\frac{15-\sqrt{197}}{84} \leqslant x < 0$.

На каждом из множеств в) и г) имеем $\frac{5}{6} - x < 1$ и $|x| = x$, поэтому на каждом из этих множеств неравенство (7) равносильно неравенству

$$42x^2 - 14x + 1 \geqslant \frac{5}{6} - x$$

или неравенству

$$42x^2 - 13x + \frac{1}{6} \geqslant 0,$$

множество решений которого состоит из двух промежутков

$$-\infty < x \leqslant \frac{13-\sqrt{141}}{84} \quad \text{и} \quad \frac{13+\sqrt{141}}{84} \leqslant x < +\infty.$$

Так как $0 < \frac{13-\sqrt{141}}{84} < \frac{7-\sqrt{7}}{42}$, а $\frac{7+\sqrt{7}}{42} < \frac{13+\sqrt{141}}{84} < \frac{1}{3}$, то получаем, что на множестве в) решением исходного неравенства является промежуток $0 < x \leqslant \frac{13-\sqrt{141}}{84}$, а на множестве г) — промежуток $\frac{13+\sqrt{141}}{84} \leqslant x < \frac{1}{3}$.

Объединяя множество решений, найденных в каждом из четырех случаев, получаем искомое множество решений данного неравенства.

Ответ: $-\frac{1}{3} < x < \frac{-7-\sqrt{7}}{42}, -\frac{-15+\sqrt{197}}{84} \leqslant x < 0,$

$0 < x \leqslant \frac{13-\sqrt{141}}{84}, \frac{13+\sqrt{141}}{84} \leqslant x < \frac{1}{3}.$

5. Так как функция $\sqrt{t}$ принимает только неотрицательные значения, то данное в условии задачи равенство может выполняться лишь в случае, когда числа x, y и z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Второе уравнение этой системы является квадратным относительно x, и оно будет разрешимо только при условии, что его дискриминант $D = 12(\cos\pi y + \cos\pi z)^2 - 48$ неотрицательный.

Неравенство $12(\cos\pi y + \cos\pi z)^2 - 48 \geqslant 0$ выполняется, только если $|\cos\pi y + \cos\pi z| = 2$, т. е. в одном из двух случаев

$$\begin{aligned} &1)\ \cos\pi y = \cos\pi z = 1; \\ &2)\ \cos\pi y = \cos\pi z = -1. \end{aligned} \qquad (8)$$

Итак, для любого решения (x, y, z) системы уравнений (7) выполняется одно из условий (8).

Рассмотрим сначала случай $\cos\pi y = \cos\pi z = 1$. В этом случае второе уравнение системы (7) выглядит так: $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Подставляя это значение x в первое уравнение системы (7), после упрощений приходим к уравнению

$$z^2 + 5z - y^2 + 3y = 7. \qquad (9)$$

Равенства $\cos\pi y = \cos\pi z = 1$ возможны, только если y и z — целые числа. Но тогда равенство (9) противоречиво, так как левая его часть есть четное число, а правая — нечетное число. Итак, система (7) не имеет решений, удовлетворяющих первому из условий (8).

В случае $\cos\pi y = \cos\pi z = -1$ второе уравнение системы (7) принимает вид $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Подставляя это значение x в первое уравнение системы (7), получаем после упрощений уравнение

$$z^2 + 5z - y^2 + 3y - 8 = 0$$

или уравнение

$$(z+y+1)(z-y+4)=12. \qquad (10)$$

Вспомним теперь, что y и z должны удовлетворять равенствам $\cos\pi y=-1$ и $\cos\pi z=-1$, т. е. должны быть нечетными целыми числами. Тогда $z+y+1$ — нечетное число. Из (10) следует, что $z+y+1$ есть нечетный делитель 12, т. е. одно из чисел 1; -1; 3; -3. Итак, для любого решения исходного уравнения должно быть $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, а y и z должны удовлетворять одной из систем уравнений

$$\begin{cases} z+y+1=1, \\ z-y+4=12; \end{cases} \quad \begin{cases} z+y+1=-1, \\ z-y+4=-12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z+y+1=3, \\ z-y+4=4; \end{cases} \quad \begin{cases} z+y+1=-3, \\ z-y+4=-4. \end{cases}$$

Решения этих систем соответственно таковы

$$\begin{cases} y_1=-4 \\ z_1=4, \end{cases} \begin{cases} y_2=7 \\ z_2=-9, \end{cases} \begin{cases} y_3=1 \\ z_3=1, \end{cases} \begin{cases} y_4=2 \\ z_4=-6. \end{cases}$$

Учитывая, что y и z должны быть нечетными целыми числами, заключаем, что решениями исходного уравнения могут быть только две тройки чисел $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};7;-9\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};1;1\right)$. Проверкой убеждаемся, что обе эти тройки действительно удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};7;-9\right)$; $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};1;1\right)$.

6. По условию, $ABCD$ — правильная пирамида. Найдем ее высоту и длину ребра. Обозначим буквой S площадь ее боковых граней, буквой H — высоту пирамиды, буквой O — центр шара, вписанного в пирамиду. Все четыре пирамиды $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$ (рис. 36) с вершинами в точке O имеют одинаковые площади оснований S и одинаковые высоты, равные радиусу шара, вписанного в пирамиду $ABCD$ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости). Их суммарный объем равен объему пирамиды $ABCD$. Учитывая, что радиус вписанного шара согласно условию равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, и пользуясь формулой для объема пирамиды, получаем равенство

$$4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{6}\cdot S=\frac{1}{3}H\cdot S.$$

Отсюда следует, что $H=10\sqrt{6}$.

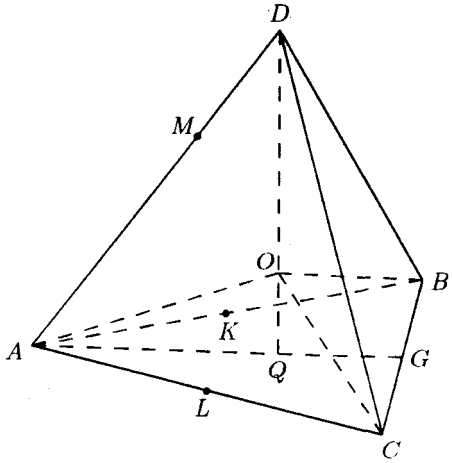


Рис. 36

Пусть a — длина ребра пирамиды $ABCD$. Поскольку эта пирамида правильная, то основание Q ее высоты, проведенной из точки D, есть центр треугольника ABC. Из равнобедренного треугольника AOB, в котором $AB = a$ и $\angle BAQ = 30°$, легко находим, что $AQ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Применяя к прямоугольному треугольнику ADQ теорему Пифагора, получаем

$$H = DQ = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

откуда следует, что $a = 30$.

Зная длину ребра пирамиды и длины отрезков KB и MD, находим $AM = AD - MD = 30 - 10 = 20$, $AK = AB - KB = 30 - 15 = 15$. Теперь можно вычислить площадь треугольника AKM.

$$S_{AKM} = \frac{1}{2}AK \cdot AM \sin(\angle MAK) = \\ = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \cdot \sin 60° = 75\sqrt{3}. \qquad (11)$$

Вычислим длину отрезка AL. Для этого сначала найдем расстояние h от точки L до плоскости ABD. Согласно условию задачи объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Поэтому

$$375\sqrt{2} = V_{AKLM} = \frac{1}{3}hS_{AKM} = \frac{1}{3}h \cdot 75\sqrt{3} = 25\sqrt{3}h$$

и, значит, $h = \dfrac{375\sqrt{2}}{25\sqrt{3}} = 5\sqrt{6}$. Итак, расстояние от точки L до плоскости ABD вдвое меньше, чем расстояние до этой же плоскости от точки C. Отсюда легко следует, что L есть середина отрезка AC, т. е. $AL = \dfrac{1}{2}AC = 15$.

Обозначим буквами R и r величины радиусов сфер, описанной и вписанной в пирамиду $AKLM$ соответственно, буквой E — центр описанной сферы и буквой F — его проекцию на плоскость AKL (рис. 37).

Точка E равноудалена от точек A, K, L. Равные наклонные AE, EK и EL имеют равные проекции на плоскость AKL. Поэтому точка F равноудалена от точек A, K и L, т. е. F есть центр окружности, описанной вокруг треугольника AKL. Ранее было установлено, что $AK = AL = 15$. Отсюда, так как $\angle KAL = 60^\circ$, следует, что треугольник AKL правильный и, значит, F — его центр.

Плоскость ADQ содержит перпендикуляр DQ к плоскости ABC и потому перпендикулярна к ABC. Точка F лежит на биссектрисе DQ угла BAC, а прямая EF перпендикулярна плоскости ABC. Отсюда следует, что прямая EF лежит в плоскости ADQ.

Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются прямые BC и AQ. Рассмотрим сечение пирамиды $AKLM$ плоскостью ADQ (рис. 38). Точки Q и F есть центры правильных

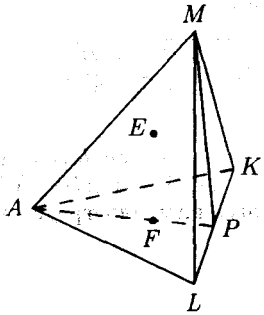


Рис. 37

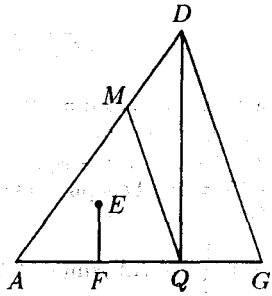


Рис. 38

подобных треугольников ABC и AKL. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\dfrac{1}{2}$, поэтому $AF = \dfrac{1}{2}AQ$. Таким образом, точка E лежит на перпендикуляре к AQ, проведенном через середину этого отрезка. Значит, E равноудалена от точек A и Q. В то же время $AE = ME = R$. Следовательно, E — центр окруж-

ности, описанной вокруг треугольника AMQ, и R — ее радиус. Из прямоугольного треугольника ADQ находим

$$\sin(\angle DAQ) = \frac{DQ}{AD} = \frac{10\sqrt{6}}{30} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Если для нахождения радиуса R воспользоваться равенством $\dfrac{MQ}{\sin(\angle MAQ)} = 2R$ (теорема синусов), то будем иметь

$$R = \frac{MQ}{2\sin(\angle DAQ)} = \frac{3}{2\sqrt{6}}MQ = \frac{\sqrt{6}}{4}MQ.$$

Так как $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{AQ}{AG} = \dfrac{2}{3}$ и треугольники AMQ, ADG имеют общий угол DAG, то они подобны. Поэтому $\dfrac{MQ}{DG} = \dfrac{2}{3}$ или $MQ = \dfrac{2}{3}DG$ и $R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}\cdot\dfrac{2}{3}DG = \dfrac{\sqrt{6}}{6}DG$. Отрезок AG есть медиана в равностороннем треугольнике ABC. Но тогда DG есть медиана, а значит, и высота в равностороннем треугольнике BCD. Следовательно, $DG = BD\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ и $R = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\cdot 15\sqrt{3} = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$. Для нахождения радиуса r сферы, вписанной в тетраэдр, воспользуемся формулой

$$V_{AKLM} = \frac{1}{3}r(S_{AKM} + S_{AKL} + S_{ALM} + S_{KLM}). \qquad (12)$$

Эта формула следует из того, что объем пирамиды $AKLM$ равен сумме объемов четырех пирамид с вершинами в центре вписанной сферы и основаниями — треугольниками AKM, AKL, ALM и KLM, если заметить, что высоты этих четырех пирамид равны радиусу сферы r.

Вычислим площади треугольников, стоящие в правой части равенства (12). Треугольники AKM и ALM равны (AM – общая, $AK = AL = 15$, $\angle KAM = \angle LAM = 60°$), поэтому (см. (11)) $S_{ALM} = S_{AKM} = 75\sqrt{3}$. Сторона равностороннего треугольника AKL равна 15, поэтому

$$S_{AKL} = \frac{1}{2}AK\cdot AL\cdot\sin 60° = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{225\sqrt{3}}{4}.$$

Пусть P — точка пересечения биссектрисы AG угла BAC с отрезком KL. Треугольник AKL правильный (рис. 37), поэтому AP есть его медиана, т. е. $LP = PK = \dfrac{15}{2}$. Из установленного выше равенства треугольников AKM и ALM следует, что

$ML = MK$, т. е. KLM — равнобедренный треугольник. Тогда MP — его высота и

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}KL\cdot MP = \frac{1}{2}KL\sqrt{ML^2 - LP^2} = \frac{15}{2}\sqrt{ML^2 - \frac{225}{4}}.$$

Из треугольника ALM по тереме косинусов находим

$$ML^2 = AM^2 + AL^2 - 2AM\cdot AL\cos(\angle MAL) =$$
$$= 400 + 225 - 2\cdot 20\cdot 15\cdot\frac{1}{2} = 325.$$

Итак,

$$S_{KLM} = \frac{15}{2}\sqrt{325 - \frac{225}{4}} = \frac{75}{4}\sqrt{43}.$$

Из формулы (12) получаем равенство

$$375\sqrt{2} = \frac{1}{3}r\left(75\sqrt{3} + \frac{225}{4}\sqrt{3} + 75\sqrt{3} + \frac{75}{4}\sqrt{43}\right),$$

откуда следует, что $r = \dfrac{60\sqrt{2}}{11\sqrt{3} + \sqrt{43}}$.

Складывая найденные значения радиусов, получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{60\sqrt{2}}{11\sqrt{3} + \sqrt{43}} + \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $(1; \log_5 7)$. 2. $AB > BD$.

3. $x = -\dfrac{3}{5} \pm \dfrac{1}{5}\sqrt{1 + 2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. 4. $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{-5 - \sqrt{5}}{20}$; $\dfrac{-5 + \sqrt{5}}{20} < x < 0$; $0 < x < \dfrac{-5 + \sqrt{45}}{20}$; $\dfrac{-3 + \sqrt{44}}{10} \leqslant x < \dfrac{1}{2}$.

5. $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}; 2; 0\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}; -1; 5\right)$. 6. $\dfrac{48\sqrt{2}}{11\sqrt{3} + \sqrt{43}} + 6\sqrt{2}$.

Вариант 3. 1. $(1; \log_5 2)$. 2. $RS > PR$.

3. $x = \dfrac{5}{6} \pm \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{1}{2} + 2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. $\dfrac{-13 - \sqrt{141}}{56} \leqslant x < \dfrac{-3 - \sqrt{2}}{14}$; $\dfrac{-13 + \sqrt{141}}{56} < x < 0$;

$0 < x \leqslant \dfrac{11 - \sqrt{93}}{56}$; $\dfrac{11 + \sqrt{93}}{56} \leqslant x < \dfrac{1}{2}$.

5. $(2\sqrt{2}; -4; -4)$, $(2\sqrt{2}; -2; 2)$. 6. $\dfrac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{3} + \sqrt{43}} + \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 4. 1. $(\log_7 5; 1)$. 2. $AD > BD$.

3. $x = \frac{8}{17} \pm \frac{1}{17}\sqrt{1+2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. 4. $-\frac{1}{3} < x < \frac{-4-\sqrt{2}}{28}$; $\frac{-4+\sqrt{2}}{28} < x < 0$; $0 < x < \frac{-4+\sqrt{58}}{28}$; $\frac{-5+\sqrt{123}}{28} \leqslant x < \frac{1}{3}$.

5. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; 9; 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -8; -9\right)$. 6. $\frac{24\sqrt{2}}{11\sqrt{3}+\sqrt{43}} + 3\sqrt{2}$.

1986

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного неравенства определяется условиями $x+2>0$ и $x-4>0$, т. е. ОДЗ состоит из всех чисел x, удовлетворяющих условию $x>4$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x+2)(x-4) \leqslant 3$$

или такому $x^2-2x-11 \leqslant 0$, решения которого составляют интервал $1-2\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 1+2\sqrt{3}$. Из этих значений x в ОДЗ входят только x из промежутка $4 < x \leqslant 1+2\sqrt{3}$, они и являются решениями исходного неравенства.

Ответ: $4 < x \leqslant 1+2\sqrt{3}$.

2. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка, лежащая на прямой $3x-5y=17$. Тогда ее расстояние от точки $O(0;0)$ находится по формуле

$$d(M,O) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Поскольку координаты точки M связаны соотношением $3x-5y=17$, то для расстояния d имеем

$$d(M,O) = d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3x-17}{5}\right)^2}.$$

Итак, задача сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $d(x)$ принимает наименьшее значение. Очевидно, что свои наименьшие значения функции $d(x)$ и $d^2(x) = f(x)$ принимают при одном и том же значении x. Так как

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{3x-17}{5}\right)^2 = \frac{34x^2-102x+289}{25} =$$
$$= \frac{34}{25}\left(x^2-3x+\frac{17}{2}\right) = \frac{34}{25}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}\right],$$

то наименьшее значение $f(x)$, а значит, и $d(x)$ принимается при $x = \frac{3}{2}$, а тогда из соотношения $3x - 5y = 17$ находим $y = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

3. Обозначим буквой n количество томов художественной литературы. Тогда согласно условию количество томов с письмами есть $2n - 14$, а число томов с публицистикой равно $3(2n - 14)$. В частности, это означает, что $2n - 14 \geqslant 0$. По условию число томов с художественными произведениями (n) делится на число томов с письмами $(2n - 14)$. Значит, $2n - 14 \neq 0$, и выполняется неравенство $2n - 14 > 0$, т. е. $n > 7$.

Собрание включает менее 20 томов. Поэтому справедливо неравенство

$$n + 2n - 14 + 3(2n - 14) < 20$$

или $9n - 76 < 0$, т. е. $n < 8\frac{4}{9}$. Учитывая, что n — целое число, находим, что $n = 8$. Тогда количество томов с письмами равно 2, а количество томов с публицистикой есть 6.

Ответ: 6.

4. Проведем через центр окружности — точку O — диаметр LN, перпендикулярный диаметру AK (рис. 39). Так как угол LAO равен $\frac{\pi}{4}$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{8}$, то точка B лежит на дуге LK. Соединим точку B с точкой O. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle ABO = \angle BAO = \frac{\pi}{8}$. Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\angle OBC = \frac{\pi}{2}$ и $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$. Вписанный угол ABK опирается на диаметр. Поэтому $\angle ABK = \frac{\pi}{2}$, и из прямоугольного треугольника ABK находим $AB = AK \cdot \cos(\angle BAK) = 8\cos\frac{\pi}{8}$.

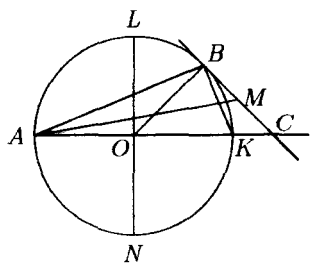


Рис. 39

Угол BOK является внешним для треугольника ABO. Следовательно, $\angle BOK = \angle BAO + \angle ABO = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Так как $OB \perp BC$, то $\angle OCB = \frac{\pi}{2} - \angle BOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \angle BOC$.

Это равенство означает, что треугольник OBC равнобедренный. Значит, $BC = OB = 4$ и $BM = \frac{1}{2}BC = 2$.

Применяя к треугольнику ABM теорему косинусов, получим $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos(\angle ABM) = 64\cos^2\frac{\pi}{8} + 4 - 32\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}$. Отсюда, так как $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8} = -2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, находим $AM^2 = 32\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4 + 8\sqrt{2} = 36 + 2\sqrt{2}$, т. е. $AM = \sqrt{36 + 24\sqrt{2}} = 2\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$.

Ответ: $2\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$.

5. Пусть a, b, x — произвольные числа, $a^2 + b^2 \neq 0$. Преобразуем выражение $a\cos x + b\sin x$ следующим образом

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\varphi + x),$$

где угол φ, $0 < \varphi < 2\pi$, определен равенствами:

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Из полученного соотношения следует справедливость неравенства

$$a\cos x + b\sin x \geqslant -\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Перепишем теперь заданное в условии задачи уравнение так:

$$\cos 3x + \sin 3x = 3\sqrt{2} + 2(\cos x + \sin 18x \sin x)$$

или так:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + \sqrt{2}(\cos x + \sin 18x \sin x). \tag{2}$$

Воспользовавшись теперь неравенством (1) при $a = 1$ и $b = \sin 18x$, а также неравенством $\sin^2 18x \leqslant 1$, получим

$$\cos x + \sin 18x \sin x \geqslant -\sqrt{1 + \sin^2 18x} \geqslant -\sqrt{2}. \tag{3}$$

Теперь из равенства (2) и неравенства (3) следует, что

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 3 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1,$$

и, значит, $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$. Таким образом (см. (2)), все решения исходного уравнения содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1, \\ \cos x+\sin 18x\sin x=-\sqrt{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Первому уравнению системы (4) удовлетворяют $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. Для этих значений x имеем

$$\sin 18x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+12\pi k\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

так что все решения исходного уравнения содержатся среди $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$ и среди решений уравнения

$$\cos x-\sin x=-\sqrt{2}. \tag{5}$$

Уравнение (5) может быть записано в виде $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$, и, значит, множество его решений имеет вид

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z. \tag{6}$$

Заметим, что для каждого из этих чисел выполняется равенство

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+6\pi n\right)=\sin\frac{5\pi}{2}=1.$$

Итак, все решения исходного уравнения содержатся среди чисел

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$$

Теперь, учитывая, что все числа (6) удовлетворяют уравнению (5), заключаем, что все числа (6) удовлетворяют уравнению (2), а, значит, и исходному уравнению. Итак, множество решений исходного уравнения имеет вид (6).

Ответ: $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

6. Поскольку

$$4\cdot\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}=\left(2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)^2,$$

то данное выражение можно переписать в виде

$$y(x)=\left|\left(2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)^2+(c+2d)\cdot 2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+2c+d\right|.$$

Обозначим $2\cdot\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$ через t, тогда имеем

$$y(t) = |t^2 + (c+2d)t + 2c + d|.$$

Поскольку

$$t = 2\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1} = 2\left(1 - \frac{2}{3^x+1}\right),$$

то $t(x)$ есть непрерывная и возрастающая функция на отрезке $[-1;1]$, причем $t(1)=1$ и $t(-1)=-1$. Итак, задача свелась к нахождению таких значений c и d, при которых наибольшее значение функции $y(t) = |t^2 + (c+2d)t + 2c + d|$ на отрезке $[-1;1]$ является наименьшим.

Обозначим $c+2d = p$, $2c+d = q$, $f(t) = t^2 + pt + q$ и наибольшее значение $|f(t)| = |t^2 + pt + q|$ на отрезке $[-1;1]$ буквой a.

Поскольку $f(-1) = 1 - p + q$, $f(1) = 1 + p + q$, $f(0) = q$ и кроме того

$$f(-1) \leqslant a,\ f(1) \leqslant a,\ f(0) \geqslant -a, \tag{7}$$

то имеем

$$2 = f(-1) + f(1) - 2f(0) \leqslant a + a + 2a = 4a, \tag{8}$$

т. е. $a \geqslant \dfrac{1}{2}$. Таким образом, при любых p и q наибольшее значение функции $|t^2 + pt + q|$ на отрезке $[-1;1]$ не меньше $\dfrac{1}{2}$.

Заметим, что наибольшее значение функции $\left|t^2 - \dfrac{1}{2}\right|$ на отрезке $[-1;1]$ равно $\dfrac{1}{2}$ (см. рис. 40), т. е. существуют такие значения p и q, при которых $a = \dfrac{1}{2}$.

Найдем теперь все пары p, q, при которых наибольшее значение функции $|t^2 + pt + q|$ на отрезке $[-1;1]$ равно $\dfrac{1}{2}$. Если $a = \dfrac{1}{2}$,

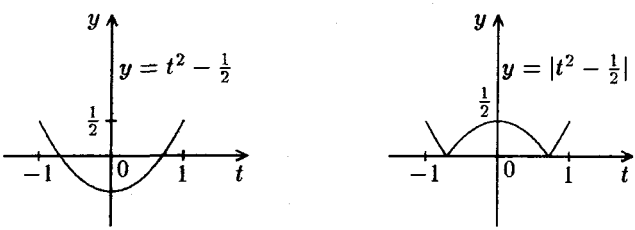


Рис. 40

то из неравенств (7) и (8) следует, что должны выполняться равенства

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - p + q = \dfrac{1}{2}, \\ f(1) = 1 + p + q = \dfrac{1}{2}, \\ f(0) = q = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Получившаяся система уравнений имеет единственное решение $p = 0$, $q = -\dfrac{1}{2}$ (рис. 40).

Из равенств $c + 2d = 0$, $2c + d = -\dfrac{1}{2}$ находим $c = -\dfrac{1}{3}$, $d = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: $c = -\dfrac{1}{3}$, $d = \dfrac{1}{6}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-2 - \sqrt{6} \leqslant x < -3$, $-1 < x \leqslant \sqrt{6} - 2$. 2. $(-4; -3)$. 3. 132. 4. $\sqrt{\dfrac{5}{2}(2 + \sqrt{3})}$, $\sqrt{\dfrac{5}{2}(2 - \sqrt{3})}$. 5. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 6. $a = -\dfrac{1}{6}$, $b = -\dfrac{1}{6}$.

Вариант 3. 1. $3 < x \leqslant -1 + 3\sqrt{2}$. 2. $\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$. 3. 6. 4. $\sqrt{25 + 14\sqrt{3}}$. 5. $x = \dfrac{2\pi}{3} + 8\pi k$, $k \in Z$. 6. $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$.

Вариант 4. 1. $3 - \sqrt{10} \leqslant x < 1$; $5 < x \leqslant 3 + \sqrt{10}$. 2. $(-2; 5)$. 3. 9. 4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$. 5. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 6. $c = \dfrac{1}{2}$, $d = \dfrac{1}{2}$.

1987

Решение варианта 1

1. Из первого уравнения находим, что

$$y = \frac{9 - \sqrt{x}}{3}. \qquad (1)$$

Подставляя $\dfrac{9 - \sqrt{x}}{3}$ вместо y во второе уравнение системы, получим уравнение

$$x - 1 = (\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{9 - \sqrt{x}}{3},$$

которое можно переписать в виде

$$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0. \qquad (2)$$

Поскольку квадратное уравнение $z^2 - 2z - 3 = 0$ имеет два корня $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$, то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{x} = 3 \quad \text{и} \quad \sqrt{x} = -1.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственное решение $x = 9$, а второе уравнение решений не имеет, так как $\sqrt{x}$ неотрицателен для любого действительного числа x. Следовательно, уравнение (2) имеет единственное решение $x = 9$. Подставляя это значение в (1), находим, что $y = 2$. Итак, исходная система имеет единственное решение $x = 9$, $y = 2$.

Ответ: $(9; 2)$.

2. Пусть существует такое a_0, для которого

$$a_0^2 - 4a_0 + \sqrt{3} = -a_0\sqrt{2}.$$

Это означает, что a_0 является корнем квадратного уравнения

$$z^2 - z\cdot(4 - \sqrt{2}) + \sqrt{3} = 0. \qquad (3)$$

Однако, поскольку дискриминант D этого уравнения удовлетворяет неравенству

$$D = 18 - 8\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 18 - 8\cdot 1,41 - 4\cdot 1,73 = 18 - 18,2 < 0,$$

то квадратное уравнение (3) корней не имеет. Полученное противоречие означает, что a, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Ответ: не существует.

3. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x + 1 > 0$, $(x + 1)^2 \neq 1$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-1 < x < 0$ и $0 < x < +\infty$.

Так как на ОДЗ имеем

$$\log_{(x+1)^2} 8 = \frac{3}{\log_2(x+1)^2} = \frac{3}{2\log_2(x+1)}$$

и

$$\log_4(x+1) = \frac{1}{2}\log_2(x+1),$$

то исходное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству

$$\frac{3}{2\log_2(x+1)} + \frac{3}{2}\log_2(x+1) - \frac{37}{4} \geqslant 0,$$

т. е. неравенству

$$\frac{6\log_2^2(x+1) - 37\log_2(x+1) + 6}{\log_2(x+1)} \geqslant 0. \qquad (4)$$

Обозначив $\log_2(x+1)$ через y, неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{6y^2 - 37y + 6}{y} \geqslant 0. \qquad (5)$$

Множество решений неравенства (5) есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{6y^2 - 37y + 6}{y} = 0 \qquad (6)$$

и неравенства

$$\frac{6y^2 - 37y + 6}{y} > 0. \qquad (7)$$

Уравнение (6) имеет решения $y_1 = \frac{1}{6}$ и $y_2 = 6$. Пользуясь методом интервалов, находим, что множеством решений неравенства (7) являются два промежутка $0 < y < \frac{1}{6}$ и $6 < y < +\infty$. Следовательно, множество решений неравенства (5) есть два промежутка $0 < y \leqslant \frac{1}{6}$ и $6 \leqslant y < +\infty$.

Таким образом, исходное неравенства равносильно на своей ОДЗ совокупности двух двойных неравенств

$$0 < \log_2(x+1) \leqslant \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad 6 \leqslant \log_2(x+1) < +\infty.$$

Множеством решений первого неравенства является промежуток $0 < x \leqslant \sqrt[6]{2} - 1$, множеством решений второго — промежуток $63 \leqslant x < +\infty$. Легко видеть, что все x из этих двух промежутков входят в ОДЗ исходного неравенства и, значит, являются его решениями.

Ответ: $0 < x \leqslant \sqrt[6]{2} - 1$; $63 \leqslant x < +\infty$.

4. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$(5 - 6\sin^2 x)(\sqrt{-4\sin^2 x + 3\sin x + 5} + 1 - 2\sin x) = 0. \qquad (8)$$

Обозначая $\sin x$ через y, уравнение (8) перепишем в виде

$$(5 - 6y^2)(\sqrt{-4y^2 + 3y + 5} + 1 - 2y) = 0. \qquad (9)$$

Область допустимых значений уравнения (9) состоит из всех y, удовлетворяющих условию $-4y^2 + 3y + 5 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток

$$\frac{3 - \sqrt{89}}{8} \leqslant y \leqslant \frac{3 + \sqrt{89}}{8}. \qquad (10)$$

На этой области уравнение (9) равносильно совокупности уравнений

$$5 - 6y^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{-4y^2 + 3y + 5} = 2y - 1. \qquad (11)$$

Первое уравнение этой совокупности имеет два корня $y_1 = \sqrt{\frac{5}{6}}$ и

$y_2 = -\sqrt{\frac{5}{6}}$. Ясно, что первый корень входит в промежуток (10). Покажем, что второй корень не входит в этот промежуток. Действительно, подставляя $y_2 = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ в квадратный трехчлен $-4y^2 + 3y + 5$, находим

$$-4\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2 - 3\cdot\sqrt{\frac{5}{6}} + 5 = \frac{5}{3} - 3\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{10 - 3\sqrt{30}}{6} < 0.$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что $\sqrt{30} > 5 > \frac{10}{3}$.

Второе уравнение совокупности (11) не имеет решений в области $y < \frac{1}{2}$. Следовательно, все его решения лежат в промежутке

$$\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3 + \sqrt{89}}{2}. \qquad (12)$$

На этой области второе уравнение совокупности (11) равносильно уравнению

$$-4y^2 + 3y + 5 = 4y^2 - 4y + 1$$

или уравнению

$$8y^2 - 7y - 4 = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) имеет два корня $y_3 = \frac{7+\sqrt{177}}{16}$ и $y_4 = \frac{7-\sqrt{177}}{16}$. Из неравенства $\frac{7 - \sqrt{177}}{16} < 0$ следует, что y_4 не принадлежит промежутку (12). В то же время

$$y_3 = \frac{7 + \sqrt{177}}{16} > 1 > \frac{1}{2} \qquad (14)$$

и

$$y_3 = \frac{7 + \sqrt{177}}{16} < \frac{24}{16} = \frac{3}{2} < \frac{3 + \sqrt{89}}{2},$$

так что y_3 лежит в промежутке (12), и, значит, второе уравнение (11) имеет единственное решение $y_3 = \frac{7 + \sqrt{177}}{16}$.

Итак, уравнение (9) имеет два корня $y_1 = \sqrt{\frac{5}{6}}$ и $y_3 = \frac{7 + \sqrt{177}}{16}$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{7 + \sqrt{177}}{16}.$$

По неравенству (14) имеем $y_3 > 1$, так что второе из уравнений этой совокупности решений не имеет.

Решения первого уравнения, а значит, и исходного есть

$$x = (-1)^n \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi n,\ n \in Z.$

5. Блоки можно перевозить, загружая машины одним из трех способов:

а) только маленькими блоками;

б) одним большим и 30 маленькими;

в) двумя большими и 14 маленькими.

Пусть n_1, n_2 и n_3 — количество рейсов, соответствующих способам загрузки а), б) и в). Тогда должны быть выполнены неравенства

$$\begin{cases} 44n_1 + 30n_2 + 14n_3 \geqslant 510, & (15) \\ n_2 + 2n_3 \geqslant 24. & (16) \end{cases}$$

Требуется найти такие числа n_1, n_2 и n_3, чтобы сумма $n_1 + n_2 + n_3$ была минимальной.

Пусть n_1, n_2, n_3 — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам (15) и (16). Умножив обе части неравенства (16) на 14 и прибавив результат к обеим частям неравенства (15), получим

$$44n_1 + 44n_2 + 42n_3 \geqslant 510 + 14{\cdot}24 = 846.$$

Поскольку $n_3 \geqslant 0$, то из этого неравенства следует, что

$$44(n_1 + n_2 + n_3) \geqslant 846$$

и, значит,

$$n_1 + n_2 + n_3 \geqslant \frac{846}{44} = 19,2.$$

Учитывая, что n_1, n_2, n_3 — целые числа, заключаем, что *для любого решения системы неравенств (15), (16) должно* быть $n_1 + n_2 + n_3 \geqslant 20$. Итак, возможное минимальное значение $n_1 + n_2 + n_3$ равно 20. Оно в действительности реализуется, если $n_1 = 0$, $n_2 = 16$ и $n_3 = 4$, так как тогда можно перевезти $16 + 2{\cdot}4 = 24$ больших и $30{\cdot}16 + 14{\cdot}4 = 536$ маленьких блоков, т. е. все блоки будут перевезены.

Ответ: 20 рейсов.

6. Пусть $ABCD$ — данная пирамида. Так как диагонали четырехугольника $KLMN$ не делятся точкой O пополам, то этот четырехугольник не является параллело-

граммом. Поэтому прямые KN и ML пересекаются (рис. 41). Если бы плоскость $KLMN$ была параллельна прямой BD, то плоскости DBC и DBA пересекали бы плоскость $KLMN$ по прямым ML и KN, параллельным BD, т. е. $ML \parallel BD$, $KN \parallel BD$. Но тогда $ML \parallel KN$, что неверно. Итак, плоскость $KLMN$ и прямая BD пересекаются. Обозначим точку их пересечения буквой P. Так как плоскости ABD и $KLMN$ пересекаются по прямой KN, то точка P лежит на KN. Аналогично, точка P лежит на прямой ML. Итак, P есть точка пересечения прямых KN и ML.

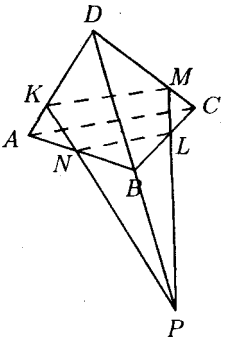


Рис. 41

Обозначим $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, угол между прямой BD и плоскостью ACD через γ, а угол между прямой BD и плоскостью ABC через δ. Так как площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}AD{\cdot}CD\sin\alpha$, а высота, опущенная из вершины B, равна $BD\sin\gamma$, то для V_{ABCD} — объема пирамиды $ABCD$ — имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AD{\cdot}CD{\cdot}BD\sin\alpha\sin\gamma. \tag{17}$$

Аналогично имеем

$$V_{KDMP} = \frac{1}{6}KD{\cdot}MD{\cdot}PD\sin\alpha\sin\gamma, \tag{18}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB{\cdot}CB{\cdot}DB\sin\beta\sin\delta, \tag{19}$$

$$V_{BNLP} = \frac{1}{6}NB{\cdot}LB{\cdot}PB\sin\beta\sin\delta. \tag{20}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$\frac{V_{KDMP}}{V_{ABCD}} = \frac{KD{\cdot}MD{\cdot}PD}{AD{\cdot}CD{\cdot}BD},$$

а из (19) и (20), что

$$\frac{V_{BNLP}}{V_{ABCD}} = \frac{NB{\cdot}LB{\cdot}PB}{AB{\cdot}CB{\cdot}DB}.$$

Обозначим V_1 и V_2 объемы тел, на которые плоскость $KLMN$ разбивает пирамиду $ABCD$. Причем будем считать, что V_1 —

объем той части, которая примыкает к ребру BD, а V_2 — объем части, примыкающей к AC. Тогда

$$\frac{V_1}{V_{ABCD}} = \frac{V_{KDMP} - V_{BNLP}}{V_{ABCD}} = \\ = \frac{KD}{AD}\cdot\frac{MD}{CD}\cdot\frac{PD}{BD} - \frac{NB}{AB}\cdot\frac{LB}{CB}\cdot\frac{PB}{BD}. \quad (21)$$

Вычислим теперь все отношения, входящие в формулу (21). Найдем отношения $\frac{LM}{PL}$ и $\frac{NK}{PN}$ из треугольника KMP. Для этого проведем через точки O и L прямые OS и LT параллельно PK (рис. 42). Так как тогда $\frac{ST}{KS} = \frac{OL}{OK} = \frac{3}{4}$, то $ST = \frac{3}{7}KT$ и

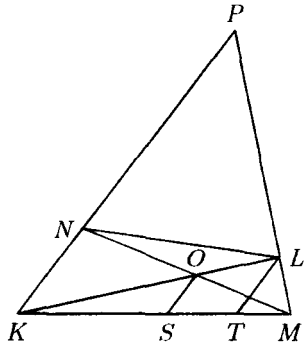


Рис. 42

$KS = \frac{4}{7}KT$. Обозначим $\frac{LM}{PL} = x$, тогда $\frac{MT}{KT} = x$ и $MT = xKT$, $MS = MT + ST = \left(x + \frac{3}{7}\right)KT = \frac{7}{4}\left(x + \frac{3}{7}\right)KS$. Итак,

$$\frac{7}{4}\left(x + \frac{3}{7}\right) = \frac{MS}{KS} = \frac{OM}{ON} = \frac{25}{24},$$

откуда следует, что $\frac{LM}{PL} = x = \frac{1}{6}$.

Аналогично, обозначив $y = \frac{NK}{PN}$, получим уравнение

$$\frac{49}{25}\left(y + \frac{24}{49}\right) = \frac{4}{3},$$

из которого находим, что $\frac{NK}{PN} = \frac{4}{21}$.

Проведем через точку K прямую KQ параллельно BD (рис. 43). Обозначим $z = \dfrac{BN}{NA}$. Из условия задачи следует, что $\dfrac{DK}{KA} - \dfrac{BN}{NA} = 1$, т. е. $\dfrac{DK}{KA} = z + 1$. Так как $\dfrac{QN}{BN} = \dfrac{NK}{PN} = \dfrac{4}{21}$, то $QN = \dfrac{4}{21}BN$ и $BQ = BN + QN = \dfrac{25}{21}BN$, $AQ = AN - QN = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{4}{21}\right)BN$. Теперь находим уравнение для z

$$1 + z = \frac{DK}{KA} = \frac{BQ}{AQ} = \frac{25}{21} : \left(\frac{1}{z} - \frac{4}{21}\right).$$

Это уравнение после преобразований можно переписать в виде

$$4z^2 + 8z - 21 = 0.$$

Оно имеет два корня $z_1 = -\dfrac{7}{2}$ и $z_2 = \dfrac{3}{2}$. Поскольку должно выполняться неравенство $z > 0$, то заключаем, что $z = \dfrac{3}{2}$.

Далее находим

$$\frac{AB}{NB} = 1 + \frac{NA}{NB} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{и} \quad \frac{NB}{AB} = \frac{3}{5}. \tag{22}$$

Поскольку $\dfrac{DK}{KA} = z + 1 = \dfrac{5}{2}$, то

$$\frac{AD}{KD} = 1 + \frac{KA}{DK} = \frac{7}{5} \quad \text{и} \quad \frac{KD}{AD} = \frac{5}{7}. \tag{23}$$

Кроме того, $\dfrac{BD}{KQ} = \dfrac{AD}{KA} = 1 + \dfrac{DK}{KA} = \dfrac{7}{2}$ и $\dfrac{PB}{KQ} = \dfrac{PN}{NK} = \dfrac{21}{4}$, так что

$$\frac{PB}{BD} = \frac{21}{4} : \frac{7}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{PD}{BD} = 1 + \frac{PB}{BD} = \frac{5}{2}. \tag{24}$$

Проведем теперь через точку M прямую MR параллельно DB (рис. 44). Так как $\dfrac{LM}{PL} = x = \dfrac{1}{6}$ и $\dfrac{PB}{BD} = \dfrac{3}{2}$, то имеем $\dfrac{CD}{CM} = \dfrac{BD}{RM} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{PB}{RM} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{PL}{LM} = 4$ и

$$\frac{MD}{CD} = 1 - \frac{CM}{CD} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \tag{25}$$

Так как $\dfrac{RL}{BL} = \dfrac{LM}{PL} = \dfrac{1}{6}$, то $RL = \dfrac{1}{6}BL$ и

$$CR = CL - RL = CL - \frac{1}{6}BL,$$

$$BR = BL + RL = BL + \frac{1}{6}BL = \frac{7}{6}BL.$$

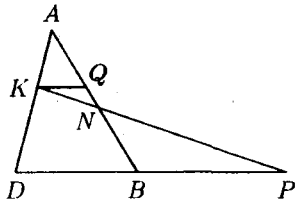


Рис. 43

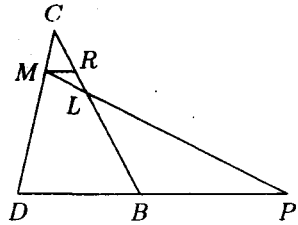


Рис. 44

В силу параллельности прямых MR и BD имеем

$$\frac{BR}{CR} = \frac{DM}{CM} = \frac{CD}{CM} - 1 = 3,$$

так что

$$\frac{7}{6}BL = 3\left(CL - \frac{1}{6}BL\right),$$

откуда

$$\frac{CL}{BL} = \frac{5}{9} \quad \text{и} \quad \frac{CB}{LB} = 1 + \frac{CL}{BL} = \frac{14}{9}. \tag{26}$$

Теперь из формулы (21) и равенств (22)–(26) находим

$$\frac{V_1}{V_{ABCD}} = \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{3}{2} = \frac{213}{280}.$$

Но тогда

$$\frac{V_2}{V_{ABCD}} = 1 - \frac{213}{280} = \frac{67}{280} \quad \text{и} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{213}{67}.$$

Ответ: $\dfrac{213}{67}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \dfrac{9}{4}$, $y = -2$. 2. Два значения.
3. $3 < x \leqslant 2 + \sqrt[5]{3}$; $245 \leqslant x < +\infty$.
4. $x = (-1)^{n+1}\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \pi n$, $n \in Z$. 5. 15. 6. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{18}{17}$.

Вариант 3. 1. $x = \dfrac{49}{25}$, $y = \dfrac{9}{5}$. 2. Два значения.
3. $-1 < x \leqslant \sqrt[4]{2} - 2$; $14 \leqslant x < +\infty$.
4. $x = (-1)^{n+1}\arcsin\sqrt{\dfrac{4}{5}} + \pi n$, $n \in Z$. 5. 10. 6. $\dfrac{185}{27}$.

Вариант 4. 1. $x = 9$, $y = \frac{5}{3}$. 2. Не существует.
3. $2 < x \leqslant 1 + \sqrt[7]{3}$; $1 + 3^7 \leqslant x < +\infty$.
4. $x = (-1)^{n+1} \arcsin \sqrt{\frac{5}{8}} + \pi n$, $n \in Z$. 5. 12. 6. $\frac{217}{39}$.

1988

Решение варианта 1

1. Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, а d — ее разность. Тогда в силу условия задачи имеем равенство

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 13d) + (a_1 + 17d) = 10,$$

которое можно переписать в виде

$$2a_1 + 19d = 5.$$

Сумма S первых двадцати членов арифметической прогрессии равна: $S = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$. Так как $a_{20} = a_1 + 19d$, то

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2a_1 + 19d) \cdot 10 = 50.$$

Ответ: 50.

2. Применяя формулу суммы косинусов $\cos 7x + \cos x = 2\cos 4x \cos 3x$, исходное уравнение перепишем в виде

$$2\cos 4x \cos 3x = 2\cos 3x \cdot (\sin 2x - 1).$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x = 0 \tag{1}$$

и

$$\cos 4x - \sin 2x + 1 = 0. \tag{2}$$

Решение первого из этих уравнений есть

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z.$$

Поскольку $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, то уравнение (2) перепишем в виде

$$2\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0. \tag{3}$$

Так как квадратное уравнение $2z^2 + z - 2 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ и $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$, то уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{и} \quad \sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}. \tag{4}$$

Решениями первого из уравнений этой совокупности являются

$$x = (-1)^m \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$$

Поскольку $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1$, то второе уравнение совокупности (4) решений не имеет. Итак, решениями исходного уравнения являются $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

$$x = (-1)^m \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

$$x = (-1)^m \cdot \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$$

3. Пусть O — центр окружности (рис. 45). Перпендикуляр OK, опущенный из точки O на хорду AB, делит эту хорду пополам, поэтому $OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 100$. В условии задачи сказано, что $AB \parallel OC$. Опустим из точки C перпендикуляр CP на гипотенузу AB. Тогда $OP \parallel OK$ и, следовательно, $OKPC$ — параллелограмм, так что $OK = CP$ и

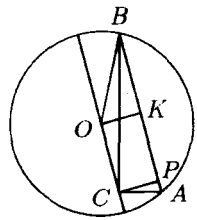


Рис. 45

$$CP^2 + \frac{1}{4}AB^2 = 100. \qquad (5)$$

Так как $\angle BCP = 90^\circ - \angle PCA = \angle PAC = 75^\circ$, то $\frac{PA}{CP} = \operatorname{ctg}(\angle PAC) = \operatorname{ctg} 75^\circ$, $\frac{BP}{CP} = \operatorname{tg}(\angle BCP) = \operatorname{tg} 75^\circ$ и $\frac{AB}{CP} = \frac{BP+PA}{CP} = \operatorname{ctg} 75^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} + \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{2}{\sin 150^\circ} = 4$. Следовательно, $CP = \frac{1}{4}AB$, и из равенства (5) находим $\frac{1}{16}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 = 100$ или $AB^2 = 320$. Площадь S треугольника ABC равна:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CP = \frac{AB^2}{8} = 40.$$

Ответ: 40.

4. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на два промежутка $-\infty < x \leqslant 1$ и $1 < x < +\infty$ и найдем решения неравенства на каждом из этих промежутков.

Пусть $-\infty < x \leqslant 1$. Тогда $|x-1| = 1-x$, и исходное неравенство запишется в виде

$$8^x \geqslant 6 \cdot 9^{1-x}. \qquad (6)$$

Умножая это неравенство на 9^x (положительное для любого действительного x), получаем равносильное ему неравенство

$$72^x \geqslant 54,$$

решениями которого являются все числа $x \geqslant \log_{72} 54$. Так как $\log_{72} 54 < 1$, то решениями неравенства (6), а значит, и исходного неравенства на промежутке $-\infty < x \leqslant 1$ будут все x из промежутка $\log_{72} 54 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $1 < x < +\infty$. Тогда $|x-1| = x-1$ и исходное неравенство запишется в виде

$$8^x \geqslant 6 \cdot 9^{x-1}. \qquad (7)$$

Деля это неравенство на 9^x (положительное для любого действительного x), получаем равносильное ему неравенство

$$\left(\frac{8}{9}\right)^x \geqslant \frac{6}{9},$$

решениями которого являются все $x \leqslant \log_{\frac{8}{9}} \frac{6}{9}$. Так как $\log_{\frac{8}{9}} \frac{6}{9} = \dfrac{\log_3 \frac{6}{9}}{\log_3 \frac{8}{9}} = \dfrac{\log_3 \frac{2}{3}}{\log_3 \frac{8}{9}}$ и $\frac{2}{3} < \frac{8}{9} < 1$, то $\dfrac{\log_3 \frac{2}{3}}{\log_3 \frac{8}{9}} > 1$ (здесь учтено, что $\log_3 \frac{8}{9} < 0$), и поэтому решениями неравенства (7), а значит, и исходного неравенства на промежутке $1 < x < +\infty$ будут все x из промежутка $1 < x \leqslant \dfrac{\log_3 \frac{2}{3}}{\log_3 \frac{8}{9}}$. Объединяя решения, полученные на обоих промежутках, находим все решения исходного неравенства. Ими являются все x из промежутка $\log_{72} 54 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}$.

Ответ: $\log_{72} 54 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}$.

5. Для того чтобы исходное уравнение имело корни, надо, чтобы имели смысл входящие в него выражения: $\lg a$, $\sqrt{22a - 4a^2 - 24}$ и $\lg \dfrac{36a - 9a^2}{35}$. Иными словами, исходное урав-

нение может иметь корни только для каждого из тех a, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a > 0, \\ 22a - 4a^2 - 24 \geqslant 0, \\ 36a - 9a^2 > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему неравенств, получим, что исходное уравнение может иметь корни только для тех a, которые принадлежат промежутку $\frac{3}{2} \leqslant a < 4$.

Найдем теперь те значения a, при каждом из которых

$$\lg \frac{36a - 9a^2}{35} = 0.$$

Это уравнение относительно a равносильно уравнению $36a - 9a^2 = 35$ и, значит, имеет корни $a = \frac{5}{3}$ и $a = \frac{7}{3}$. Оба эти значения a принадлежат промежутку $\frac{3}{2} \leqslant a < 4$.

Если $a = \frac{5}{3}$ или $a = \frac{7}{3}$, то любое действительное значение a удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, $a = \frac{5}{3}$ и $a = \frac{7}{3}$ удовлетворяют условию задачи.

Для любого $a \in \left[\frac{3}{2}; 4\right)$, такого, что $a \neq \frac{5}{3}$ и $a \neq \frac{7}{3}$, исходное уравнение можно переписать в виде следующего квадратного уравнения

$$(2\lg a)x^2 + (2\lg a - 2\sqrt{22a - 4a^2 - 24})x - a\sqrt{22a - 4a^2 - 24} = 0$$

с положительным коэффициентом при x^2. Теперь из рассматриваемых значений a надо выделить те, для которых это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, такие, что $x_1 \leqslant -1$ и $x_2 \geqslant 0$. Но это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда значения квадратного трехчлена, находящегося в левой части этого уравнения, будут неположительны в точках $x = -1$ и $x = 0$. Иными словами, искомыми значениями a из промежутков

$$\frac{3}{2} \leqslant a < \frac{5}{3}; \ \frac{5}{3} < a < \frac{7}{3}; \ \frac{7}{3} < a < 4 \qquad (8)$$

будут те a, каждое из которых удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} -a\sqrt{22a - 4a^2 - 24} \leqslant 0, \\ 2\lg a - (2\lg a - 2\sqrt{22a - 4a^2 - 24}) - a\sqrt{22a - 4a^2 - 24} \leqslant 0. \end{cases}$$

Для любого из рассматриваемых значений a первое из этих неравенств справедливо. Второе неравенство этой системы можно переписать в виде

$$(2-a)\sqrt{22a-4a^2-24} \leqslant 0.$$

Решения последнего неравенства есть $a = \frac{3}{2}$ и все a из промежутка $2 \leqslant a \leqslant 4$. Итак, искомыми значениями a из промежутков (8) будут $a = \frac{3}{2}$; $2 \leqslant a < \frac{7}{3}$; $\frac{7}{3} < a < 4$. Объединяя эти значения a с ранее найденными $a = \frac{7}{3}$ и $a = \frac{5}{3}$, получаем, что условию задачи удовлетворяют $a = \frac{3}{2}$, $a = \frac{5}{3}$ и все a из промежутка $2 \leqslant a < 4$.

Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $a = \frac{5}{3}$; $2 \leqslant a < 4$.

6. Обозначим центры двух больших шаров буквами O_1 и O_2, их точки касания с плоскостью P — буквами A и B соответственно, а радиус — через r_1. Пусть центр меньшего шара есть O_3, точка касания этого шара с плоскостью P есть C и радиус меньшего шара равен r. Так как все эти три шара попарно касаются, то их центры должны лежать по одну сторону от плоскости P (рис. 46).

Поскольку $O_1A \parallel O_2B$, $O_1A \perp AB$ и $O_1A = O_2B = r_1$, то четырехугольник AO_1O_2B есть прямоугольник. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме радиусов, поэтому $AB = O_1O_2 = 2r_1$. В плоскости AO_1O_3C (рис. 47) проведем отре-

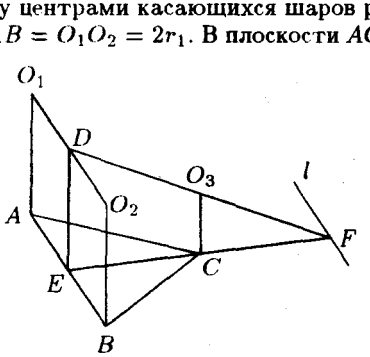


Рис. 46

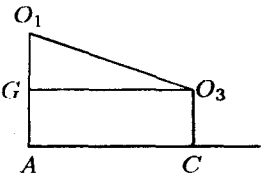


Рис. 47

зок O_3G параллельно AC. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому $O_1A \perp AC$, $O_3C \perp AC$ и, следовательно AGO_3C — прямоугольник. Так как $O_1O_3 = r_1 + r$ и $O_1G = r_1 - r$, то по теореме Пифагора находим $AC = O_3G = \sqrt{O_1O_3{}^2 - O_1G^2} = 2\sqrt{r_1 r}$.

Аналогично, $BC = 2\sqrt{r_1 r}$. Так как точка O_3 равноудалена от точек O_1 и O_2 (на расстояние $r_1 + r$), то она лежит в плоскости π, проходящей через середину D отрезка O_1O_2 перпендикулярно этому отрезку (рис. 46). Эта плоскость перпендикулярна отрезку AB (так как $AB \parallel O_1O_2$). Если E — точка пересечения плоскости π и прямой AB, то $AB \perp DE$ (прямая AB, перпендикулярная плоскости π, перпендикулярна любой прямой, лежащей в π). А так как AO_1O_2B — прямоугольник и D — середина отрезка O_1O_2, то E — середина отрезка AB. Плоскость π есть геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B. Но $AC = BC = 2\sqrt{r_1 r}$, следовательно, точка C лежит в плоскости π.

Если R — радиус сферы, то из условия задачи следует, что $OO_1 = R - r_1$ и $OO_2 = R - r_1$. Это значит, что точка O равноудалена от точек O_1, O_2 и, следовательно, также лежит в плоскости π.

Прямые O_1O_2 и AB параллельны, поэтому плоскости $O_1O_2O_3$ и ABC пересекаются по прямой l, параллельной O_1O_2 и AB. Пусть F — точка пересечения прямых DO_3 и EC, лежащих в плоскости π. Тогда точка F лежит на l. Так как DO_3 и EC есть медианы в равнобедренных треугольниках $O_1O_3O_2$ и ABC соответственно, то $DO_3 \perp O_1O_2$ и $EC \perp AB$. Поскольку $l \parallel O_1O_2$ и $l \parallel AB$, то отсюда следует, что $DF \perp l$ и $EF \perp l$, т. е. $\angle DFE$ есть линейный угол двугранного угла, образуемого плоскостью P и плоскостью, проходящей через центры шаров O_1, O_2 и O_3. Но тогда $\sin(\angle DFE) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Проведем в плоскости π прямую O_3H параллельно EF (рис. 48). Тогда $\angle DO_3H = \angle DFE$. В прямоугольном треугольнике AEC имеем $AE = r_1$ и $AC = 2\sqrt{r_1 r}$, так что $EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{4r_1 r - r_1^2}$.

Поскольку $DH = DE - O_3C = r_1 - r$ и $HO_3 = EC = \sqrt{4r_1 r - r_1^2}$, то $\operatorname{tg}(\angle DO_3H) = \dfrac{r_1 - r}{\sqrt{4r_1 r - r_1^2}}$. По условию

$$\sin(\angle DO_3H) = \sin(\angle DFE) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из тождества $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$ находим $\operatorname{tg}^2(\angle DO_3H) = \dfrac{1}{4}$ и, следовательно,

$$\frac{(r_1 - r)^2}{4r_1 r - r_1^2} = \frac{1}{4}.$$

Из этого уравнения, обозначив $\frac{r_1}{r} = x$, получим

$$5x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{5}$. Учитывая, что $x > 1$, заключаем, что $x = 2$, т. е. $r_1 = 2r$.

Точка касания сферы и шара с центром O_1 лежит на прямой OO_1 (рис. 49). Аналогично, точка касания сферы и шара с центром в точке O_3 лежит на прямой OO_3. Но тогда по условию задачи $\cos(\angle O_1OO_3) = \frac{4}{5}$. Кроме того, по условию $OO_3 = 15 = R - r$, так что $R = 15 + r$. По доказанному ранее $OO_1 = R - r_1 = (15 + r) - 2r = 15 - r$. Применяя теперь к треугольнику OO_1O_3 теорему косинусов и учитывая, что $O_1O_3 = r_1 + r = 3r$, получаем равенство

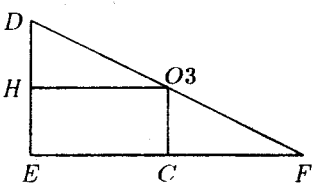


Рис. 48

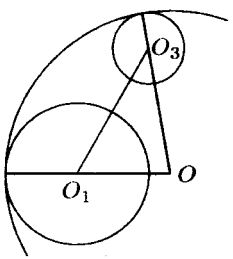


Рис. 49

$$9r^2 = (15 - r)^2 + 225 - 2\cdot 15\cdot(15 - r)\cdot\frac{4}{5}.$$

После упрощений приходим к квадратному уравнению

$$4r^2 + 3r - 45 = 0,$$

имеющему два корня $r = 3$ и $r = -\frac{15}{4}$. Итак, $r = 3$, $r_1 = 2r = 6$, $R = 15 + r = 18$.

Из прямоугольного треугольника O_1DO по теореме Пифагора находим

$$OD^2 = OO_1^2 - O_1D^2 = (R - r_1)^2 - r_1^2 = 144 - 36 = 108.$$

Введем теперь в плоскости π систему координат, поместив ее центр в точку E, ось абсцисс направив по лучу EF и ось ординат — по лучу ED (рис. 50). Тогда точка D имеет координаты $(0;6)$, а точка O_3 — координаты $(6;3)$. Здесь использовано то, что $EC = \sqrt{4r_1r - r_1^2} = 6$.

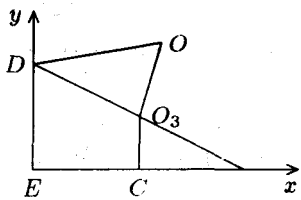


Рис. 50

Обозначим $(x;y)$ координаты точки O, лежащей в плоскости π. Так как плоскости π и P перпендикулярны, то $|y|$ есть искомое расстояние от точки O до плоскости π. По формуле для расстояния между двумя точками на плоскости имеем

$$\begin{aligned} OD^2 &= x^2 + (y-6)^2 = 108, \\ {OO_3}^2 &= (x-6)^2 + (y-3)^2 = 225. \end{aligned} \qquad (9)$$

Вычитая первое уравнение (9) из второго, после упрощений получаем равенство

$$x = \frac{1}{2}y - 9.$$

Подставляя $\frac{1}{2}y - 9$ вместо x в первое уравнение системы (9) и выполняя преобразования, приходим к квадратному уравнению

$$5y^2 - 84y + 36 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $y_1 = \frac{42 + 12\sqrt{11}}{5}$ и $y_2 = \frac{42 - 12\sqrt{11}}{5}$. Учитывая, что $3 < \sqrt{11} < 3,5$, получаем $y_2 < \frac{42 - 12\cdot 3}{5} = \frac{6}{5} < 14$, $y_2 > \frac{42 - 12\cdot 3,5}{5} = 0$ и $y_1 > \frac{42 + 12\cdot 3}{5} = \frac{78}{5} > 14$. С учетом условия задачи заключаем, что $y = \frac{42 + 12\sqrt{11}}{5}$.

Ответ: $\frac{42 + 12\sqrt{11}}{5}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 120. 2. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

$x = \frac{1}{2}(-1)^m \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. 3. 30° и 60°.

4. $\frac{11-a}{2a+5} \leqslant x \leqslant \frac{a-1}{5-2a}$, где $a = \log_2 5$. 5. $a = 2$, $a = \frac{5}{2}$, $4 \leqslant a < 9$. 6. $\frac{5+\sqrt{497}}{2}$.

Вариант 3. 1. 90. 2. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

$x = \pm\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $\sqrt{\frac{65}{3}}$.

4. $\frac{6+2a}{7+3a} \leqslant x \leqslant \frac{6-2a}{7-3a}$, где $a = \log_2 5$.

5. $a = 2$, $a = \frac{5}{3}$, $3 \leqslant a < 4$. 6. $\frac{57+4\sqrt{5}}{3}$.

Вариант 4. 1. 160. 2. $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$;

$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) + \pi m$, $m \in Z$.

3. 30° и 60°. 4. $\frac{7-a}{2a+3} \leqslant x \leqslant \frac{a-1}{3-2a}$, где $a = \log_3 5$. 5. $a = 3$, $a = \frac{5}{2}$, $4 \leqslant a < 5$. 6. $\frac{54+17\sqrt{7}}{4}$.

1989

Решение варианта 1

1. Найдем радиус r окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC со стороной 3 (рис. 51). Так как хорда, стягивающая концы вписанного угла α равна $2R\sin\alpha$, то имеем равенство $2R\sin 60° = 3$, откуда $R = \sqrt{3}$. Поскольку $10 > 9$, то $\sqrt[4]{10} > \sqrt{3} = R$. Следовательно, треугольник ABC со стороной 3 можно поместить внутрь окружности радиуса 3.

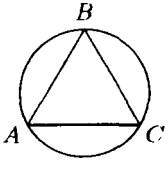


Рис. 51

Ответ: можно.

2. Обозначив $\sqrt{3+4x-4x^2}$ через y, перепишем исходное уравнение в виде

$$16y + y^2 - 36 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения есть $y_1 = 2$ и $y_2 = -18$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности

уравнений

$$\sqrt{3+4x-4x^2}=-18 \quad \text{и} \quad \sqrt{3+4x-4x^2}=2.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $\sqrt{3+4x-4x^2} \geqslant 0$ для любого действительного x из ОДЗ уравнения.

Второе уравнение равносильно уравнению

$$3+4x-4x^2=4,$$

имеющему единственный корень $x=\frac{1}{2}$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

3. Пусть C — точка между пунктами A и B, в которой одновременно оказались пешеход, велосипедист и мотоциклист. Обозначим через S_1 км и S_2 км соответственно расстояния AC и CB, через u км/час, v км/час, w км/час соответственно скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста, а через t час — искомое время.

Из условия задачи имеем систему уравнений

$$\frac{S_1}{u}=\frac{S_1}{v}+2, \tag{1}$$

$$\frac{S_1}{u}=\frac{S_1}{w}+\frac{5}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{S_1+S_2}{u}=\frac{S_1+S_2}{v}+t, \tag{3}$$

$$\frac{S_1+S_2}{u}=\frac{S_1+S_2}{w}+1. \tag{4}$$

Из уравнения (3) $t=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(S_1+S_2)$. Из уравнения (4) $S_1+S_2=\frac{1}{\frac{1}{u}-\frac{1}{w}}$, откуда

$$t=\frac{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{w}}. \tag{5}$$

Из уравнения (1) $S_1=\frac{2}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}$. Из уравнения (2) $S_1=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{w}}$, от-

куда $\dfrac{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{w}}=\dfrac{4}{5}$. Подставляя это значение в (5), находим, что $t=\dfrac{4}{5}$ часа.

Ответ: 48 минут.

4. ОДЗ исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $|\cos x|>0$, $|\cos x|\neq 1$, $2x-3\geqslant 0$, $1-2\cos^2 x>0$, т. е. ОДЗ состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x\geqslant\dfrac{3}{2}$ и $0<|\cos x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)\leqslant 0. \qquad (6)$$

Заметим, что $x=\dfrac{3}{2}$ входит в ОДЗ исходного неравенства и является решением неравенства (6), а следовательно, и решением исходного неравенства.

На множестве $x>\dfrac{3}{2}$; $0<|\cos x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ неравенство (6) равносильно неравенству

$$\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)\leqslant 0$$

или неравенству

$$\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\geqslant 1. \qquad (7)$$

Поскольку $1-2\cos^2 x>0$ для рассматриваемых x, то неравенство (7) равносильно неравенству

$$1+2\sqrt{3}|\sin x|\geqslant 8-16\cos^2 x,$$

которое можно переписать в виде

$$1+2\sqrt{3}|\sin x|\geqslant 16|\sin x|^2-8.$$

Так как корни квадратного трехчлена $16z^2-2\sqrt{3}z-9$ есть $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_2=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, то решениями неравенства $16z^2-2\sqrt{3}z-9\leqslant 0$

являются все z из промежутка $-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leqslant z \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, неравенство (7) равносильно двойному неравенству

$$-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leqslant |\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отметим на тригонометрическом круге точки x, для которых $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 52). Для всех углов x, принадлежащих

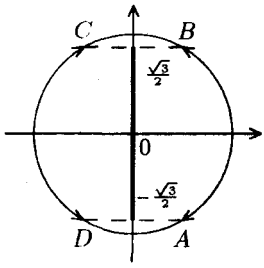


Рис. 52

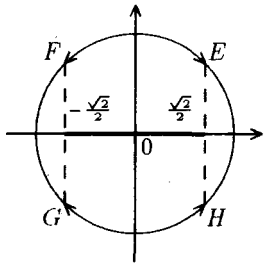


Рис. 53

дугам AB и CD, выполняется неравенство $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Точно так же, отмечая на круге точки x, в которых $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, найдем дуги EF и GH (рис. 53), для всех точек которых выполнено неравенство $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Совмещая рис. 52 и рис. 53, получаем, что оба неравенства $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $|\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ будут справедливы, если угол x принадлежит одной из четырех дуг EB, CF, GD или AH (рис. 54). Для всех этих x имеем также $\cos x \neq 0$. Дуга GD получается из дуги EB поворотом на угол π, и точно так же дуга AH — поворотом на угол π из дуги CF. Учитывая, что точки E, B, C и F соот-

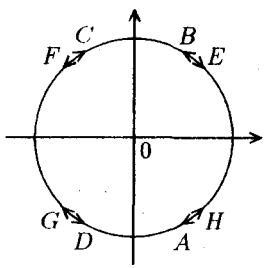


Рис. 54

ветствуют углам $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{4}$, находим множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 0 < |\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ |\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

в виде

$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \ \frac{2\pi}{3} + \pi l \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi l, l \in Z.$$

Исходные значения x должны, кроме того, удовлетворять неравенству $x > \frac{3}{2}$. Учитывая, что $\frac{\pi}{3} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, находим, что множество решений исходного неравенства, содержащихся в промежутке $\frac{3}{2} < x < +\infty$, имеет вид

$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\frac{2\pi}{3} + \pi l \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi l, \ l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Присоединяя к этим числам $x = \frac{3}{2}$, находим ответ.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $\frac{2\pi}{3} + \pi l \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Поскольку $A(a, x) = 4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a = -(x-2)^2 - 2(a-2\pi)|x-2| + 4\pi a + 4 = a^2 + 4\pi^2 + 4 - (|x-2| + a - 2\pi)^2$, то

$$A(a, x) \leqslant a^2 + 4\pi^2 + 4 \tag{8}$$

для любого действительного x.

Пусть a_0 — значение параметра a, при котором исходное уравнение имеет хотя бы одно решение $x = x_0$. Тогда, так как $a^2 + 4\pi^2 + 4 > 0$, то $0 < A(a_0, x_0)$ для этих значений a_0 и x_0. Учитывая, что $\frac{1}{\pi} < 1$ и (8), получаем, что для этих значений a_0 и x_0 справедливы одновременно неравенства

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \frac{a_0^2 + 4\pi^2 + 4}{A(a_0, x_0)} \leqslant 0$$

и

$$\sqrt{(x_0 - 5a_0 + 10\pi - 34)(|\pi - x_0| - a_0 + \pi + 2)} \geqslant 0.$$

Так как при этих значениях a_0 и x_0 исходное уравнение превращается в верное равенство, получаем, что a_0 и x_0 удовлетворяют двум равенствам

$$|x_0 - 2| + a_0 - 2\pi = 0$$

и

$$(x_0 - 5a_0 + 10\pi - 34)(|\pi - x_0| - a_0 + \pi + 2) = 0.$$

Очевидно, что если значения a_0 и x_0 удовлетворяют этим равенствам, то они удовлетворяют и исходному уравнению. Следовательно, каждое значение a, при котором исходное уравнение имеет решение, совпадает с тем значением a, при котором имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} |x - 2| = 2\pi - a, \\ (x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Итак, задача свелась к нахождению таких значений параметра a, при каждом из которых эта система имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Пусть a_0 — то значение параметра a, при котором система (9) имеет целочисленное решение x_0, тогда

$$a_0 = 2\pi - |x_0 - 2|. \tag{10}$$

Подставляя это значение a_0 во второе уравнение системы (9), получим, что число x_0 должно быть решением уравнения

$$(x - 34 + 5|x - 2|)(|\pi - x| - \pi + 2 + |x - 2|) = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) равносильно совокупности уравнений

$$x - 34 + 5|x - 2| = 0$$

и (12)

$$|\pi - x| + |x - 2| - \pi + 2 = 0.$$

Для решения этих уравнений разобьем числовую ось на три промежутка: 1) $-\infty < x \leqslant 2$, 2) $2 < x < \pi$, 3) $\pi \leqslant x < +\infty$.

Пусть $-\infty < x \leqslant 2$, тогда совокупность уравнений (12) перепишется в виде

$$x - 34 + 5(2 - x) = 0$$

и

$$\pi - x + (2 - x) - \pi + 2 = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет решение $x_1 = -6$, а второе имеет решение $x_2 = 2$. Так как $-6 < 2$ и $2 \leqslant 2$, то в этом случае уравнение (11) имеет два корня $x_1 = -6$ и $x_2 = 2$, и они оба целочисленные.

Пусть $2 < x < \pi$, тогда совокупность уравнений (12) перепишется в виде

$$x - 34 + 5(x - 2) = 0$$

и

$$(\pi - x) + (x - 2) - \pi + 2 = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение $x_3 = 7\frac{1}{3}$, а второе имеет решением любое действительное x. Корень x_3 не удовлетворяет условию $2 < x < \pi$. Следовательно, решением уравнения (11) является в этом случае любое число x из промежутка $2 < x < \pi$. В этом промежутке лежит только одно целое число $x = 3$.

Пусть $\pi \leqslant x < +\infty$, тогда совокупность уравнений (12) перепишется в виде

$$x - 34 + 5(x - 2) = 0$$

и

$$(x - \pi) + (x - 2) - \pi + 2 = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение $x_5 = 7\frac{1}{3}$, а второе имеет решение $x_6 = \pi$. Оба эти корня удовлетворяют условию $\pi \leqslant x < +\infty$. Следовательно, уравнение (11) имеет в этом случае два корня $x_5 = 7\frac{1}{3}$ и $x_6 = \pi$, но ни один из этих корней не является целым числом.

Итак, уравнение (11) имеет три целых корня:

$$x_1 = -6;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$$

Каждому из этих корней по формуле (10) соответствует

$$a_1 = 2\pi - 8;\ a_2 = 2\pi;\ a_3 = 2\pi - 1.$$

Именно эти a и дают ответ в задаче.

Ответ: $2\pi - 8$; 2π; $2\pi - 1$.

6. Пусть $ABCS$ — данная пирамида (рис. 55). Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью SCM (рис. 56). Обозначим через D середину ребра SC, тогда согласно условию $MD = 4\sqrt{13}$. Рассмотрим треугольники CMS и HMS. У них общая сторона SM и общий угол CMS, причем $CM \geqslant MH$. Докажем, что точки C и H совпадают. В противном случае DO — средняя

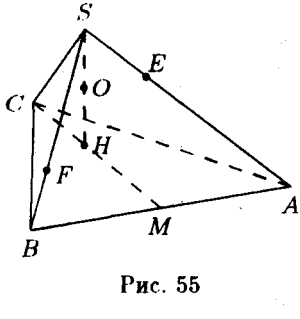


Рис. 55

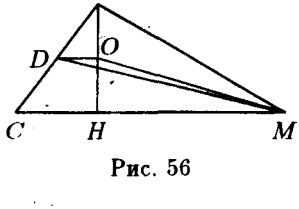


Рис. 56

линия треугольника CHS, и так как $SH \perp CM$, заключаем, что $\angle DOH = \frac{\pi}{2}$ и $\angle DOM > \frac{\pi}{2}$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, поэтому $OM < DM = 4\sqrt{13}$.

Теперь из прямоугольного треугольника OHM находим $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} < \sqrt{208 - 16} = 8\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}(\angle SMH) = \frac{SH}{HM} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\angle SMH > 30°$. Последнее неравенство противоречит условию задачи $\angle SMC \leqslant 30°$. Полученное противоречие означает, что точки C и H совпадают. Отсюда также следуют равенства $OM = DM = 4\sqrt{13}$, $CM = HM = 8\sqrt{3}$ и $\angle SMC = 30°$.

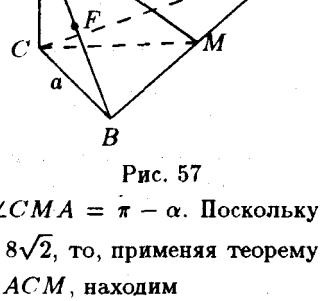


Рис. 57

Рассмотрим теперь пирамиду $SABC$ (рис. 57). Обозначим $CB = a$, $AC = b$, $\angle CMB = \alpha$. Тогда $\angle CMA = \pi - \alpha$. Поскольку $CM = 8\sqrt{3}$ и $BM = AM = \frac{1}{2}AB = 8\sqrt{2}$, то, применяя теорему косинусов к треугольникам BCM и ACM, находим

$$a^2 = (8\sqrt{3})^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2{\cdot}8\sqrt{3}{\cdot}8\sqrt{2}\cos\alpha,$$
$$b^2 = (8\sqrt{3})^2 + (8\sqrt{2})^2 + 2{\cdot}8\sqrt{3}{\cdot}8\sqrt{2}\cos\alpha.$$

Складывая эти равенства, получаем $a^2 + b^2 = 640$. Так как точка O одинаково удалена от точек S, F и C, т. е. через эти точки проходит окружность с центром O, то SFC — прямоугольный треугольник и $CF \perp SB$. Но тогда треугольники SCB и SFC подобны и $SF{\cdot}SB = SC^2$. Аналогично доказывается, что $SA{\cdot}SE = SC^2$.

Из этих равенств находим, что $SE : SB = SF : SA$, и, следовательно, треугольники SFE и SAB подобны, причем коэффи-

циент подобия согласно условию есть $\frac{EF}{AB} = \frac{8\sqrt{\frac{2}{5}}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников SBC и SAC находим

$$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 64},$$
$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + 64}.$$

Как доказано ранее,

$$\frac{SF}{SA} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

поэтому $SF = \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^2 + 64}$. Подставляя найденные выражения для SB и SF в равенство $SF \cdot SB = SC^2$ и, учитывая, что $SC = 8$, приходим к равенству $(a^2 + 64)(b^2 + 64) = 81920$.

Итак, a и b удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 640, \\ (a^2 + 64)(b^2 + 64) = 81920. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 8$, $b = 24$ или $a = 24$, $b = 8$. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = 8$, $b = 24$ (с точностью до обозначений).

Для нахождения радиуса r вписанного в пирамиду шара воспользуемся формулой $V = \frac{1}{3}r \cdot S$, где V — объем пирамиды и S — полная поверхность пирамиды.

Так как $AB = 16\sqrt{2}$, $AC = 24$ и $BC = 8$, то справедливо равенство $AB^2 + BC^2 = AC^2$, и, значит, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом CBA. Треугольник SBA также прямоугольный, поскольку $AB \perp CB$ и, значит, по теореме о трех перпендикулярах $SB \perp AB$. Теперь имеем

$$S = \frac{CB \cdot AB}{2} + \frac{SC \cdot CB}{2} + \frac{SC \cdot CA}{2} + \frac{SB \cdot AB}{2} =$$
$$= \frac{8 \cdot 16\sqrt{2}}{2} + \frac{8 \cdot 8}{2} + \frac{8 \cdot 24}{2} + \frac{16\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 256 + 64\sqrt{2};$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CB \cdot BA \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 16\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 512.$$

Значит, $r = \frac{\sqrt{2} \cdot 512}{256 + 64\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} = \frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: $\frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. Можно. 2. $x = -\frac{1}{3}$. 3. 18 мин.

4. $x = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n = -1, -2, \ldots$;

$\frac{2\pi}{3} + \pi k < x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k = -1, -2, \ldots$.

5. $p_1 = \pi$; $p_2 = \pi + 1$; $p_3 = \pi + 3$. 6. $\frac{15}{2}(3 - \sqrt{7})$.

Вариант 3. 1. Можно. 2. $x = -\frac{1}{2}$. 3. 45 мин.

4. $x = -\frac{3}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x < -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

$\frac{\pi}{4} + \pi n < x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. 5. $b_1 = \pi - 3$; $b_2 = 4 - \pi$;

$b_3 = \pi - 2$. 6. $8 - 2\sqrt{2}$.

Вариант 4. 1. Можно. 2. $x = \frac{1}{3}$. 3. 16 мин.

4. $x = 1$; $\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0, -1, -2, \ldots$;

$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k = 0, -1, -2, \ldots$.

5. $q_1 = 2\pi - 3$; $q_2 = 2\pi - 2$; $q_3 = 5$. 6. $5(3 - \sqrt{7})$.

§3. Физический факультет

1984

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x \cdot (2 - \sin x) + \cos^2 x = 0$$

или такому:

$$2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение $\sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ решений не имеет, так как $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, а для любого действительного числа α имеем $|\sin\alpha| \leqslant 1$. Решение второго уравнения есть

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, \ n \in Z.$$

Эти числа входят в ОДЗ исходного уравнения, поэтому и являются его решениями.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

2. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех положительных x. Так как

$$\log_{25} 5x = \frac{\log_5 5x}{\log_5 25} = \frac{\log_5 5x}{2} = \frac{1+\log_5 x}{2},$$

то на этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$4 \cdot \frac{1+\log_5 x}{2} = 5 - \log_5^2 x$$

или такому:

$$\log_5^2 x + 2\log_5 x - 3 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $z^2 + 2z - 3 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = -3$, то исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ совокупности уравнений

$$\log_5 x = 1 \quad \text{и} \quad \log_5 x = -3.$$

Первое из этих уравнений имеет решение $x_1 = 5$, второе уравнение имеет решение $x_2 = 5^{-3}$. Оба эти числа удовлетворяют условию $x > 0$, и поэтому являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 5$; $x_2 = 5^{-3}$.

3. Запишем исходное неравенство в виде

$$2^x(8-x^3) \leqslant 2(8-x^3)$$

или таким образом:

$$(8 - x^3)(2^x - 2) \leqslant 0.$$

Это неравенство, а значит и исходное неравенство, равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\text{I.} \begin{cases} 8 - x^3 \geqslant 0, \\ 2^x - 2 \leqslant 0, \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} 8 - x^3 \leqslant 0, \\ 2^x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим первую систему. Множество решений первого неравенства составляет промежуток $x \leqslant 2$, множество решений второго неравенства есть промежуток $x \leqslant 1$. Поэтому множество решений системы I имеет вид $x \leqslant 1$.

Решим вторую систему. Множество решений первого неравенства представляет собой промежуток $x \geqslant 2$, множество решений второго неравенства есть промежуток $x \geqslant 1$. Поэтому множество решений системы II имеет вид $x \geqslant 2$. Следовательно, множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$.

Ответ: $x \leqslant 1$; $x \geqslant 2$.

4. Найдем сначала при каждом значении a все решения исходного уравнения. Будем искать его решения сначала в области $x < a$, а потом в области $x \geqslant a$.

На множестве $x < a$ справедливо равенство $|x - a| = a - x$, и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$2(a - x) + a - 4 + x = 0,$$

откуда $x = 3a - 4$. Число $x = 3a - 4$ лежит в области $x < a$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $3a - 4 < a$, т. е. если $a < 2$.

На множестве $x \geqslant a$ справедливо равенство $|x - a| = x - a$, и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$2(x - a) + a - 4 + x = 0,$$

откуда $x = \frac{a+4}{3}$. Число $x = \frac{a+4}{3}$ лежит в области $x \geqslant a$ в случае, если $\frac{a+4}{3} \geqslant a$, т. е. если $a \leqslant 2$.

Итак, при $a < 2$ исходное уравнение имеет два решения $x_1 = 3a - 4$ и $x_2 = \frac{a+4}{3}$, при $a = 2$ — единственное решение $x = 2$ и при $a > 2$ решений не имеет.

Найдем теперь все значения $a < 2$, такие, что $3a - 4$ и $\frac{a+4}{3}$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant 3a - 4 \leqslant 4$ и $0 \leqslant \frac{a+4}{3} \leqslant 4$.

Решая неравенство $0 \leqslant 3a-4 \leqslant 4$, находим, что $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}$, решая второе неравенство $0 \leqslant \frac{a+4}{3} \leqslant 4$, находим, что $-4 \leqslant a \leqslant 8$.

Следовательно, при $\frac{4}{3} \leqslant a < 2$ оба корня исходного уравнения $x_1 = 3a - 4$ и $x_2 = \frac{a+4}{3}$ принадлежат отрезку $[0; 4]$. При $a = 2$ корень $x = 2$ также принадлежит отрезку $[0; 4]$.

Итак, условию задачи удовлетворяют все значения a из промежутка $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Ответ: $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant 2$.

5. Обозначим высоту пирамиды $SABC$ (рис. 58) буквой h. Со-

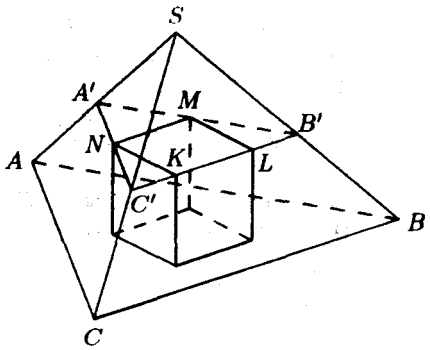


Рис. 58

гласно условию задачи в основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной, равной kh. Поэтому площадь S

основания пирамиды равна $\frac{(kh)^2\sqrt{3}}{4}$, а объем пирамиды V_n равен

$$V_n = \frac{1}{3}\cdot S\cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}k^2h^3. \qquad (1)$$

Вычислим теперь объем куба.

По условию одно из ребер куба лежит в боковой грани пирамиды SBC. Это ребро не может быть боковым. Иначе плоскость SBC содержала бы прямую, перпендикулярную плоскости ABC, а значит, была бы перпендикулярна плоскости ABC. В этом случае высота пирамиды лежала бы в плоскости SBC, и проекция точки S на плоскость ABC попала бы на прямую BC, вопреки тому, что пирамида $SABC$ правильная, и, значит, ее вершина — точка S — проектируется в центр основания ABC. Теперь ясно, что в грани SBC лежит ребро верхнего основания куба. Обозначим это ребро KL; вершины куба, лежащие в гранях SAB и SAC, обозначим буквами M и N соответственно. Точки, в которых плоскость $KLMN$ пересекает боковые ребра SA, SB и SC, обозначим буквами A', B' и C' соответственно.

Плоскости противоположных граней куба параллельны. Плоскость SBC должна пересечь эти параллельные плоскости по параллельным прямым, т. е. $BC \parallel B'C'$. Аналогично доказывается, что $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$. Отсюда следует, что все углы треугольника $A'B'C'$ равны соответствующим углам треугольника ABC, и, значит, треугольник $A'B'C'$ правильный.

Обозначим длину ребра куба буквой x. Тогда расстояние между плоскостями ABC и $A'B'C'$ равно x. Поэтому высота пирамиды $SA'B'C'$ равна $h - x$. Пусть O_1 — основание высоты пирамиды $SABC$ и O_2 — точка, в которой отрезок SO_1 пересекает плоскость $A'B'C'$. Так как плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны и прямая SO_1 перпендикулярна плоскости ABC, то $SO_1 \perp (A'B'C')$ и, значит, $SO_2 \perp O_2B'$, т. е. SO_2 — высота пирамиды $SA'B'C'$.

Вынесем на рис. 59 сечение пирамиды $SABC$ плоскостью SO_1B. Прямоугольные треугольники SO_2B' и SO_1B подобны, поэтому

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{h-x}{h}. \qquad (2)$$

Прямые $A'B'$ и AB параллельны, поэтому треугольники $SB'A'$ и SBA подобны. Отсюда и из (2) следует, что

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{h-x}{h}$$

и, значит,

$$A'B' = AB \cdot \frac{h-x}{h} = k(h-x). \qquad (3)$$

Вынесем теперь на рис. 60 сечение пирамиды $SABC$ плос-

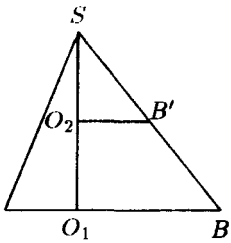


Рис. 59

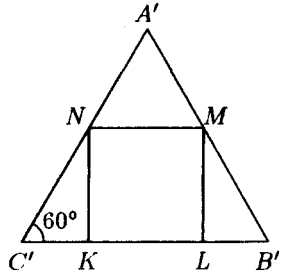


Рис. 60

костью $A'B'C'$. Так как прямые MN и LK параллельны, то NMA' — правильный треугольник и $NA' = NM = x$. Из прямоугольного треугольника $C'NK$ находим $C'N = \dfrac{NK}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x$. Следовательно,

$$C'A' = C'N + NA' = x\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right). \qquad (4)$$

Треугольник $A'B'C'$ — правильный, поэтому из (3) и (4) получаем уравнение

$$k(h-x) = x\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Решая это уравнение, имеем $x = \dfrac{kh}{1 + k + \frac{2}{\sqrt{3}}}$. Таким образом, объем куба V_k равен

$$V_k = x^3 = \left(\frac{kh}{1 + k + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^3. \qquad (5)$$

Из равенств (1) и (5) следует теперь, что искомое отношение объемов равно

$$\frac{V_n}{V_k} = \frac{\sqrt{3}}{12}k^2h^3 : \left(\frac{kh}{1 + k + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{12k}\left(1 + k + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12k}\left(1+k+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$.

6. Как известно, справедливо равенство

$$CD^2 = CA \cdot CB \tag{6}$$

(рис. 61). Поэтому для решения задачи достаточно вычислить произведение $CA \cdot CB$.

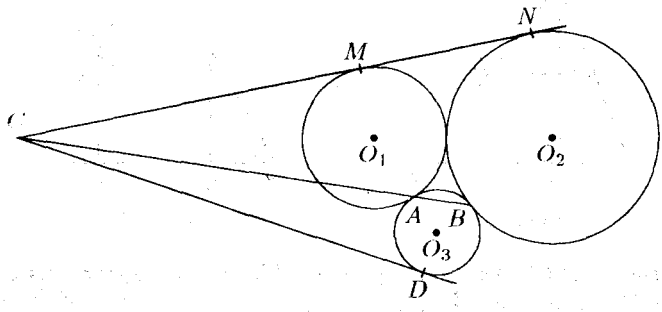


Рис. 61

Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей радиусов r и R, а также третьей заданной в условии окружности. Обозначим буквами A_1 и B_1 вторые точки пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2 с прямой AB (рис. 62). Так как A_1O_1A, AO_3B и

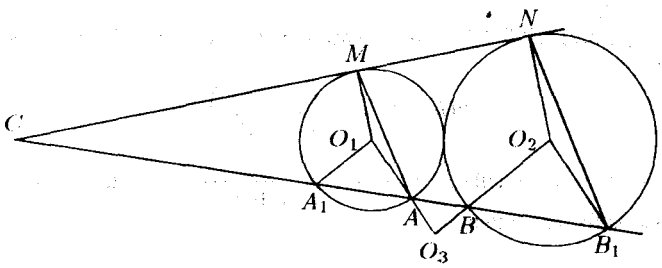


Рис. 62

BO_2B_1 — равнобедренные треугольники, то

$$\angle O_1A_1A = \angle O_1AA_1 = \angle O_3AB = \\ = \angle O_3BA = \angle O_2BB_1 = \angle O_2B_1B. \tag{7}$$

Из равенства $\angle O_1AA_1 = \angle O_2B_1B$ следует, что прямые O_1A и O_2B_1 параллельны. Поскольку к тому же $O_1M \perp MN$ и $O_2N \perp MN$, т. е. $O_1M \parallel O_2N$, то $\angle MO_1A = \angle NO_2B_1$. Треугольники MO_1A и NO_2B_1 равнобедренные. Поэтому из равенства

углов при их вершинах следует, что равны между собой и остальные углы этих треугольников и, следовательно, они подобны. Тогда

$$\frac{MA}{NB_1} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r}{R}.$$

В силу равенства $\angle O_1MA = \angle O_2NB_1$ и $\angle CMO_1 = \angle CNO_2 = \frac{\pi}{2}$ находим, что $\angle CMA = \angle CNB_1$ и, значит, $MA \parallel NB_1$. Но тогда треугольники CMA и CNB_1 подобны и

$$\frac{CM}{CN} = \frac{MA}{NB_1} = \frac{r}{R}. \qquad (8)$$

Обозначим буквой O точку пересечения прямых CO_1 и NO_2 (рис. 63). Так как $MO_1 \parallel NO_2$, то треугольники CMO_1 и CNO

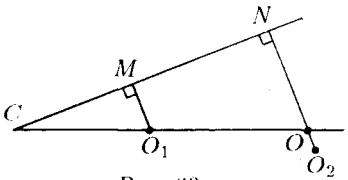


Рис. 63

подобны. Поэтому

$$\frac{O_1M}{ON} = \frac{CM}{CN} = \frac{r}{R}$$

и $ON = \frac{R}{r} \cdot O_1M = R$. Полученное равенство означает, что точка O_2 совпадает с точкой O, т. е. точки C, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Поскольку $O_1A \parallel O_2B_1$ (рис. 64), то треугольники CO_1A

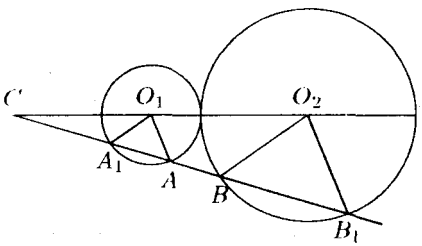


Рис. 64

и CO_2B_1 подобны и, значит,

$$\frac{CA}{CB_1} = \frac{O_1A}{O_2B_1} = \frac{r}{R}. \qquad (9)$$

Из равенства углов O_1A_1A и O_2BB_1 (рис. 64) следует, что прямые A_1O_1 и BO_2 параллельны. Поэтому треугольники CO_1A_1 и CO_2B подобны, а значит,

$$\frac{CB}{CA_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{R}{r}. \tag{10}$$

Перемножая равенства (9) и (10), получаем

$$\frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{CB}{CA_1} = 1$$

или

$$CA \cdot CA_1 = CB_1 \cdot CA_1. \tag{11}$$

Так как MN — касательная к окружностям с центрами O_1 и O_2, то $CM^2 = CA \cdot CA_1$, $CN^2 = CB \cdot CB_1$. Перемножая эти равенства и пользуясь (11), находим

$$CM^2 \cdot CN^2 = CA \cdot CA_1 \cdot CB \cdot CB_1 = (CA \cdot CB)^2$$

или

$$CM \cdot CN = CA \cdot CB. \tag{12}$$

Теперь из (6) следует, что

$$CD^2 = CM \cdot CN. \tag{13}$$

Проведем из точки O_1 перпендикуляр к отрезку NO_2 (рис. 65). Точку пересечения этого перпендикуляра и NO_2 обозначим бу-

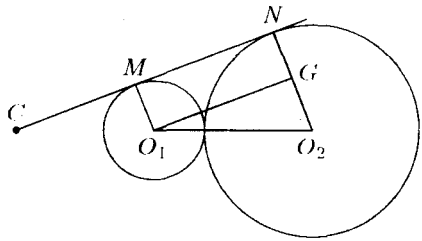


Рис. 65

квой G. Тогда $O_1O_2 = R + r$, $O_2G = O_2N - O_1M = R - r$. Из прямоугольного треугольника O_1GO_2 находим

$$O_1G = \sqrt{O_1O_2{}^2 - O_2G^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr},$$

и поскольку O_1GNM — прямоугольник, то

$$CN - CM = MN = O_1G = 2\sqrt{Rr}. \tag{14}$$

Решая систему уравнений (8) и (14) относительно CM и CN, получаем

$$CN = \frac{2R}{R-r}\sqrt{Rr}, \quad CM = \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}.$$

Подставляя эти значения в правую часть равенства (13), находим искомую длину отрезка CD: $CD = \dfrac{2Rr}{R-r}$.

Ответ: $\dfrac{2Rr}{R-r}$.

Заметим, что из равенства (12) следует подобие треугольников CAM и CBN (они имеют общий угол) и, следовательно, равенство $\angle CAM = \angle CNB$ или $\angle MAB + \angle MNB = \pi$. Последнее означает, что вокруг четырехугольника $AMNB$ описывается окружность. Этот факт может быть доказан непосредственно и использован для иного доказательства равенства (12) и того обстоятельства, что прямые MN, O_1O_2 и AB пересекаются в одной точке.

Ответы к вариантам 2–6.

Вариант 2. 1. $\pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. 2. $3;\ 3^{-2}$.

3. $x \leqslant -3;\ 0 \leqslant x \leqslant 3$. 4. $-3 \leqslant a \leqslant -\dfrac{23}{9}$. 5. $\dfrac{4}{3\sqrt{3}m}(m+\sqrt{2})^3$.

6. $\dfrac{Dd}{D-d}$.

Вариант 3. 1. $(-1)^k \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z$.

2. $7^3;\ 7^{-5}$. 3. $x \leqslant 0;\ x \geqslant 3$. 4. $\dfrac{7}{3} \leqslant a \leqslant \dfrac{8}{3}$.

5. $\dfrac{1}{8n}\left(n + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3$. 6. $\dfrac{2r_1r_2}{r_2-r_1}$.

Вариант 4. 1. $\pm\arccos\left(\dfrac{2-\sqrt{22}}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$.

2. $7;\ 7^{-3}$. 3. $-2 \leqslant x \leqslant 1;\ x \geqslant 2$. 4. $\dfrac{10}{3} \leqslant a \leqslant 4$.

5. $\dfrac{4}{3\sqrt{3}k}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + k\right)^3$. 6. $\dfrac{2Rr}{R-r}$.

Вариант 5. 1. $(-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)+\pi k,\ k\in Z.$

2. $2^3;\ 2^{-2}.$ 3. $x\leqslant -2;\ x\geqslant 3.$ 4. $-6\leqslant a\leqslant -\frac{50}{9}.$

5. $\frac{\sqrt{3}}{12m}\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}+m\right)^3.$ 6. $\frac{Dd}{D-d}.$

Вариант 6. 1. $\pm\arccos\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)+2\pi k,\ k\in Z.$ 2. $5^2;\ 5^{-5}.$

3. $x\leqslant -7;\ 0\leqslant x\leqslant 7.$ 4. $-\frac{8}{3}\leqslant a\leqslant -\frac{5}{2}.$ 5. $\frac{4}{9n}(n+\sqrt{2})^3.$

6. $\frac{2R_1R_2}{R_2-R_1}.$

1985

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,$$

исходное уравнение перепишем в виде

$$\cos x=2\cos^2 x-1$$

или в виде

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2-z-1=0$ имеет корни $z_1=1$ и $z_2=-\frac{1}{2}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x=1 \quad \text{и} \quad \cos x=-\frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений имеет решения $x=2\pi k,\ k\in Z$. Решения второго уравнения есть $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in Z$.

Следовательно, решения исходного уравнения есть

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l \quad \text{и} \quad x=2\pi k;\ k\in Z,\ l\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ x=2\pi k;\ k\in Z,\ l\in Z.$

2. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$x^4-2x-5=1-2x+x^2. \qquad (1)$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Биквадратное уравнение $x^4 - x^2 - 6 = 0$, получившееся после упрощения уравнения (1), имеет два корня $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. При $x = \sqrt{3}$ выражение $1 - x$ принимает отрицательное значение $1 - \sqrt{3}$, поэтому x_1 не является корнем исходного уравнения. При $x = -\sqrt{3}$ имеем

$$\sqrt{(-\sqrt{3})^4 - 2(-\sqrt{3}) - 5} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1,$$

т. е. $x = -\sqrt{3}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = -\sqrt{3}$.

3. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из положительных x.

Поскольку $\log_3 9x = 2 + \log_3 x$ и $\log_{\frac{1}{9}} x = \dfrac{\log_3 x}{-2}$, то исходное неравенство на области $x > 0$ равносильно неравенству $\dfrac{\log_3 x}{-2} + 2 + \log_3 x < 3$ или неравенству $\log_3 x < 2$.

Множество решений этого неравенства есть интервал $0 < x < 9$. Поскольку все эти x входят в ОДЗ исходного неравенства, то все они являются его решениями.

Ответ: $0 < x < 9$.

4. Обозначив 2^x через y, перепишем исходное уравнение в виде

$$y^2 - a(a + 1)y + a^3 = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение имеет два корня $y_1 = a^2$ и $y_2 = a$. Заметим, что при $a = 0$ и $a = 1$ дискриминант квадратного уравнения (2) равен 0. Поэтому уравнение (2) имеет один двукратный корень $y_1 = y_2 = 0$ при $a = 0$ и один двукратный корень $y_1 = y_2 = 1$ при $a = 1$.

Следовательно, при $a = 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $2^x = 0$ и не имеет решений.

При $a = 1$ исходное уравнение равносильно уравнению $2^x = 1$ и имеет единственное решение $x = 0$.

Если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то заданное в условии задачи уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2^x = a^2 \quad \text{и} \quad 2^x = a. \qquad (3)$$

При $a < 0$ второе из уравнений (3) решений не имеет, а первое уравнение имеет решение $x = 2\log_2 |a|$. При $a > 0$, $a \neq 1$ первое

уравнение (3) имеет решение $x_1 = 2\log_2 a$, второе уравнение — $x_2 = \log_2 a$. Собирая вместе полученные решения, имеем ответ.

Ответ: При $a = 0$ решений нет, при $a < 0$ единственное решение $2\log_2 |a|$, при $a = 1$ единственное решение 0, при $a > 0$, $a \neq 1$ два решения $\log_2 a$ и $2\log_2 a$.

5. Обозначим через R радиус сферы. Так как пирамида правильная, то ее основание есть квадрат, и вершина S проектируется в центр квадрата — точку O (рис. 66). Поскольку $AS = SB = SC = SD = R$ и $AD = DC = BC = AB$, то треугольники ASD, DSC, CSB и BSA равны. Обозначим угол ASB через α. Если SM — высота треугольника, то в силу того, что он равнобедренный, имеем $AM = R\sin\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, сторона квадрата $ABCD$ равна $2R\sin\frac{\alpha}{2}$, а его площадь равна $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Площадь треугольника ASB равна $\frac{1}{2}AS\cdot BS\sin(\angle ASB) = \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$, и, значит, полная поверхность пирамиды равна $2R^2\sin\alpha + 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$. Из условия имеем

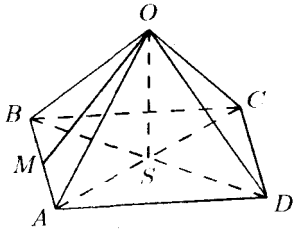


Рис. 66

$$\frac{2R^2\sin\alpha + 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi R^2} = a,$$

откуда

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha = 2\pi a$$

или

$$\sin\alpha - \cos\alpha = 2\pi a - 1,$$

т. е.

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Поскольку $BS = R > BO = AB\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, то должно выполняться неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (5)$$

Учитывая, что α — угол в треугольнике, т. е. $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, а также неравенство (5), заключаем, что $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ или $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ясно, что при выполнении этого условия существует правильная пирамида $SABCD$ с углом α при вершине равнобедренных треугольников в боковых гранях. Значит, существует и указанная в условии задачи конфигурация.

Для того чтобы уравнение (4) имело решение, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$-1 \leqslant \frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}} \leqslant 1$$

или, с учетом того, что $a > 0$, неравенства

$$0 < a \leqslant \frac{1 + \sqrt{2}}{2\pi}. \qquad (6)$$

Множество решений уравнения (4) имеет вид

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, \ n \in Z.$$

Из этих чисел при любом a, удовлетворяющем неравенствам (6), в интервал $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ попадает только одно, при $n = 0$:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right).$$

Осталось выяснить, при каких a найденное значение α удовлетворяет неравенствам $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Из неравенств

$$0 < \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

следует, что

$$-\frac{\pi}{4} < \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi}{4}.$$

Эти же неравенства выполняются тогда и только тогда, когда

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. при $0 < a < \frac{1}{\pi}$. Поскольку все найденные значения a удовлетворяют неравенствам (6), то получаем следующий ответ: $\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right)$ при $0 < a < \frac{1}{\pi}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{2\pi a - 1}{\sqrt{2}}\right)$ при $0 < a < \frac{1}{\pi}$.

6. Обозначим буквой D точку пересечения высот треугольника ABC (рис. 67) и буквой L — точку пересечения прямых AC

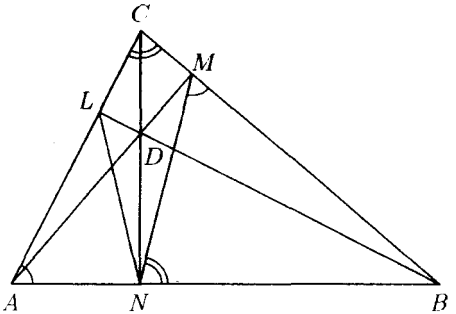


Рис. 67

и BD. Так как $DM \perp BC$ и $DN \perp AB$, то вокруг четырехугольника $NBMD$ можно описать окружность. Вписанные в эту окружность углы DNM и DBM опираются на одну дугу, поэтому они равны. А поскольку $CN \perp AB$ и $BL \perp AC$, находим

$$\angle MNB = \frac{\pi}{2} - \angle DNM = \frac{\pi}{2} - \angle LBC = \angle ACB. \qquad (7)$$

Аналогично доказывается, что $\angle NMB = \angle CAB$. Из доказанных равенств углов следует, что треугольники NMB и CAB подобны. Коэффициент подобия равен

$$\frac{NB}{CB} = \frac{MB}{AB} = \cos(\angle ABC) = \cos\beta.$$

Опустим из точки O перпендикуляры OE и OF на стороны BC и AB треугольника ABC (рис. 68). Так как O — центр описанной

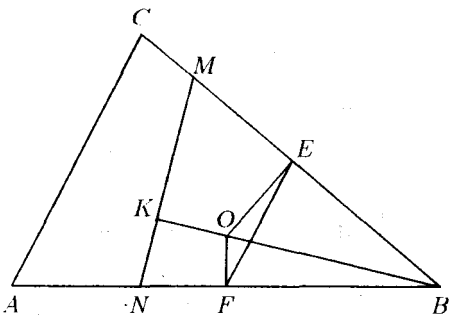


Рис. 68

вокруг треугольника ABC окружности, то E и F — середины сторон BC и AB соответственно. Отрезок EF — средняя линия треугольника ABC, поэтому $FE \parallel AC$ и $\angle FEB = \angle ACB$.

Треугольники OEB и OFB прямоугольные, значит, вокруг четырехугольника $OEBF$ можно описать окружность. Вписанные в нее углы FBO и FEO опираются на одну дугу и поэтому равны.

Имеем

$$\angle FBO = \angle FEO = \frac{\pi}{2} - \angle FEB = \frac{\pi}{2} - \angle ACB.$$

По доказанному ранее $\angle MNB = \angle ACB$ (см. (7)), так что

$$\angle FBO + \angle MNB = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Обозначим буквой K точку пересечения прямых OB и MN (рис. 68). Из равенства (8) следует, что треугольник NKB прямоугольный, т. е. $MN \perp OB$.

Отрезки NK и MK — высоты в треугольниках NOB и MOB, опущенные на сторону OC. Пользуясь условием задачи, находим

$$S = S_{NOMB} = S_{NOB} + S_{MOB} = \\ = \frac{1}{2}OB \cdot NK + \frac{1}{2}OB \cdot MK = \frac{1}{2}OB \cdot MN. \tag{9}$$

Коэффициент подобия треугольников NMB и ABC равен $\cos\beta$, как установлено ранее. Поэтому

$$MN = AC\cos\beta. \tag{10}$$

По теореме синусов, примененной к треугольнику ABC, в силу того, что OB есть радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, находим

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2OB$$

или

$$OB = \frac{AC}{2\sin\beta}. \tag{11}$$

Подставляя выражение (10), (11) для отрезков MN и OB в равенство (9), получаем

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2\sin\beta} AC \cdot \cos\beta = \frac{AC^2}{4\operatorname{tg}\beta}$$

и

$$AC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}.$$

Ответ: $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; πn, $n\in Z$. 2. $-\sqrt{2}$.
3. $0<x<625$.
4. $2\log_5 b$ при $b>0$; при $b=0$ решений нет; $3\log_5|b|$, $2\log_5|b|$ при $b<0$. 5. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{-3+\sqrt{9+16\sqrt{3}\pi k}}{2\sqrt{3}}\right)$;
$0<k<\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 6. $\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 3. 1. $4\pi k$, $k\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in Z$. 2. $-\sqrt{5}$.
3. $0<x<8$.
4. $2\log_3 a$ при $a>0$; при $a=0$ решений нет; $2\log_3|a|$, $\log_3|a|$ при $a<0$. 5. $\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{2\pi m-1}{\sqrt{2}}\right)$; $0<m<\frac{1}{\pi}$. 6. $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha\cos\alpha}}$.

Вариант 4. 1. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; πn, $n\in Z$. 2. $-\sqrt{2}$.
3. $0<x<27$. 4. $3\log_7 b$, $2\log_7 b$ при $b>0$;
при $b=0$ решений нет; $2\log_7|b|$ при $b<0$.
5. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{-3+\sqrt{9+16\sqrt{3}\pi b}}{2\sqrt{3}}\right)$; $0<b<\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 6. $\frac{\alpha^2}{4}\sin 2\beta$.

1986

Решение варианта 1

1. Поскольку $\frac{1}{4}=2^{-2}$, $8^x=2^{3x}$, то исходное уравнение можно записать в виде

$$2^{x^2-4}=2^{3x}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2-3x-4=0. \qquad (1)$$

Корни $x_1=-1$ и $x_2=4$ уравнения (1) являются также и корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=4$.

2. Перенося правую часть исходного неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, после тождественных преобразований получим неравенство

$$\frac{x^2+3}{x-3}>0,$$

равносильное исходному. Множество его решений, а значит и множество решений исходного неравенства есть все x из промежутка $3<x<+\infty$.

Ответ: $3<x<+\infty$.

3. Так как второе уравнение исходной системы есть уравнение с одним неизвестным, то решим вначале его. Поскольку $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $2\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$, то это уравнение равносильно уравнению

$$2\sin x + 2\sin x\cos x = 1 + \cos x$$

или уравнению

$$(2\sin x - 1)(1 + \cos x) = 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -1.$$

Первое из этих уравнений имеет решения

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z.$$

Решениями второго уравнения являются $x_3 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$. Теперь эти значения x подставим в первое уравнение исходной системы. Получим совокупность уравнений

$$\begin{aligned} 3^y &= \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ 3^y &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z, \\ 3^y &= \pi + 2\pi m,\ m \in Z. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как $3^y > 0$ для любого действительного значения y, то при k, l и m отрицательных уравнения совокупности (2) не имеют решений, а для k, l и m неотрицательных имеют, а именно:

$$y_1 = \log_3\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$y_2 = \log_3\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right),\ l = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$y_3 = \log_3(\pi + 2\pi m),\ m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \log_3\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l, \log_3\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l\right)\right)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$,

$(\pi + 2\pi m, \log_3(\pi + 2\pi m))$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Область допустимых значений исходного уравнения есть множество $x > 0$. Поскольку на ОДЗ справедливы тождества $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$ и $\log_4 x = \dfrac{1}{2}\log_2 x$, то исходное уравнение можно записать в виде

$$(2x - 1)(\log_2 x - 1) = 0.$$

Получившееся уравнение равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности двух уравнений

$$2x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_2 x = 1.$$

Решения этой совокупности есть $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$. Оба этих значения x принадлежат ОДЗ исходного уравнения, и, значит, множество его решений состоит из двух чисел: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$.

5. Прямая BD (рис. 69) по условию параллельна плоскости сечения. Поэтому плоскость сечения и плоскость BDS пересекаются по прямой l, параллельной BD. Эта прямая l должна проходить через точку M, ведь точка M принадлежит как плоскости сечения, так и плоскости BDS. Точку пересечения прямых l и DS обозначим буквой R, а буквой E обозначим точку пересечения прямых AR и CS. Секущая плоскость пересекает заданную пирамиду $SABC$ по треугольнику AEM.

Проведем в плоскости ASC через точку D прямую, параллельную AE, и точку ее пересечения с прямой CS обозначим буквой F. Поскольку прямые MR и BD параллельны, то по теореме Фалеса

$$\frac{RD}{SR} = \frac{BM}{MS} = \frac{5}{3}.$$

Аналогично из параллельности прямых AE и DF следует, что

$$\frac{FE}{ES} = \frac{RD}{SR} = \frac{5}{3}$$

или $FE = \frac{5}{3}ES$. По условию точка D есть середина отрезка AC и по построению $DF \parallel AE$. Следовательно, DF — средняя линия треугольника AEC и $CF = FE$. Итак, $CS = CF + FE + ES = 2FE + ES = \frac{13}{3}ES$ и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AS \cdot CS \sin(\angle ASC) = \frac{13}{3}\left(\frac{1}{2}AS \cdot ES \sin(\angle ASE)\right) = \frac{13}{3}S_{ASE}.$$

Опустим из точек B и M перпендикуляры BG и MN на плоскость ASC (рис. 70). Тогда прямые MN, BG и BS лежат в одной плоскости, а отрезки BG и MN являются высотами пирамид $ABCS$ и $AEMS$ соответственно. Из подобия треугольников SBG и SMN следует, что

$$\frac{BG}{MN} = \frac{BS}{MS} = 1 + \frac{BM}{MS} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3},$$

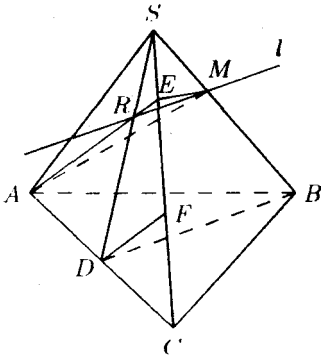


Рис. 69

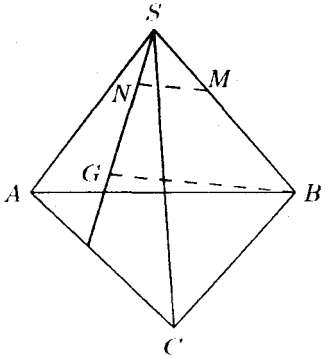


Рис. 70

т. е. $BG = \frac{8}{3}MN$. Таким образом,

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot BG = \frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3}S_{ASE}\cdot\frac{8}{3}MN = \frac{104}{9}V_{AEMS},$$

а искомое отношение равно

$$(V_{ABCS} - V_{AEMS}) : V_{AEMS} = \frac{104}{9} - 1 = \frac{95}{9}.$$

Ответ: $\frac{95}{9}$.

6. Опишем вокруг треугольника окружность, центр ее обозначим буквой O (рис. 71). Перпендикуляр, опущенный из точки O на хорду BC, должен пройти через середину этой хорды,

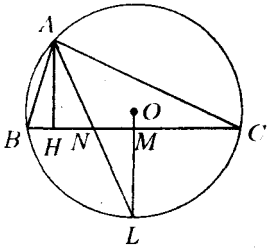


Рис. 71

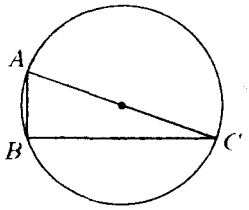


Рис. 72

точку M, а также пересечь окружность в точке L, делящей на две равные части дугу BC. Вписанные углы BAL и LAC опираются на равные дуги, поэтому они имеют равную величину, т. е. прямая AL делит угол BAC пополам и пересекает отрезок BC в точке, обозначаемой согласно условию буквой N.

В условии задачи сказано, что равны отрезки HN и NM, являющиеся катетами в прямоугольных треугольниках AHN и LMN. Кроме того, равны вертикальные углы ANH и LNM. Отсюда следует равенство треугольников AHN и LMN и, в частности, равенство отрезков AH и LM.

В случае, если $AB \perp BC$ (рис. 72), точка B совпадает с точкой H и является точкой пересечения высот треугольника ABC. Значит, в этом случае искомое расстояние равно длине высоты AH, т. е. h. Далее будем рассматривать случай, когда $\angle ABC \neq \frac{\pi}{2}$.

Обозначим буквой D точку пересечения высот треугольника ABC и буквой K точку, в которой высота AH пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника. Докажем, что $DH = KH$. Вообще говоря, возможны три случая расположения точек D и K (рис. 73 а), б), в)). Так как $DH \perp BC$ и $BD \perp AC$, то $\angle BDH = \angle BCA$. Вписанные углы BKA и BCA опираются на одну хорду AB, значит, $\angle BKD = \angle BCA$. Таким

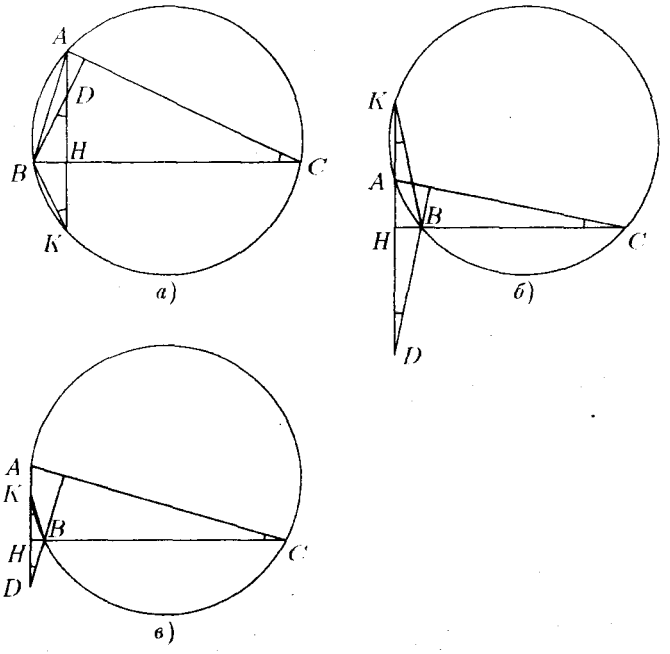


Рис. 73

образом, прямоугольные треугольники BDH и BKH имеют общий катет BH и по равному острому углу ($\angle BDH = \angle BKH$). Следовательно, эти треугольники равны и, в частности, равны их катеты: $DH = KH$.

Пусть AF — диаметр окружности и E — точка пересечения прямых OL и KF (рис. 74 а), б), в)). Поскольку вписанный угол AKF опирается на диаметр AF, то $AK \perp KF$ и, значит, $KF \parallel BC$. В силу того, что прямые AK и OL параллельны (обе они перпендикулярны BC), то заключаем, что $KHME$ — прямоугольник и, в частности, $KH = EM$.

Справедливо равенство $AD = LE$. Действительно, в случае рис. 74 а) имеем

$$AD = AH - DH = LM - KH = LM - EM = LE,$$

и в случаях рис. 74 б), в)

$$AD = AH + DH = LM + KH = LM + EM = LE.$$

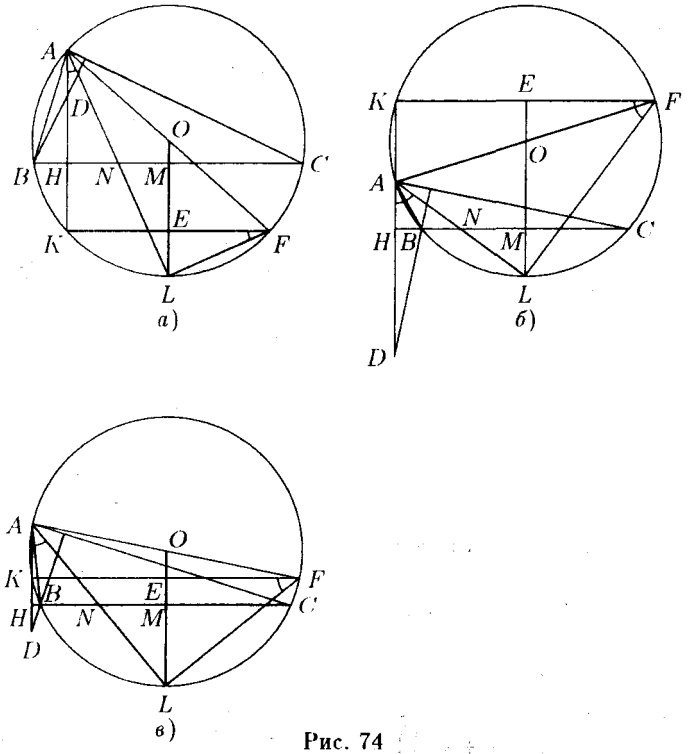


Рис. 74

Вписанные углы ALF и AKF опираются на диаметр. Поэтому $AL \perp LF$ и $AH \perp KF$ и, значит, $\angle KFL = \angle HAN$. Прямоугольные треугольники EFL и HAN имеют, как только что установлено, по равному углу. Следовательно, они подобны и

$$\frac{EL}{HN} = \frac{EF}{AH}.$$

Отсюда, так как $EF = KE = HM$ и $HN = \frac{1}{2}HM$, находим

$$EL = \frac{HM^2}{2AH} = \frac{AM^2 - AH^2}{2AH} = \frac{l^2 - h^2}{2h}$$

и, в силу установленного ранее равенства $AD = LE$, получаем $AD = \frac{l^2 - h^2}{2h}$.

Заметим, что в случае $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ (рис. 75) из подобия треугольников MCL и BAN следует $\frac{ML}{BN} = \frac{MC}{AB}$ или $ML \cdot AB = BN \cdot MC$. Так как $ML = AB = h$, $MC = BM = \sqrt{l^2 - h^2}$ и $BN = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$, то находим $h^2 = \frac{1}{2}(l^2 - h^2)$. Отсюда следует, что $l = \sqrt{3}h$ и, значит, $\frac{l^2 - h^2}{2h} = h$.

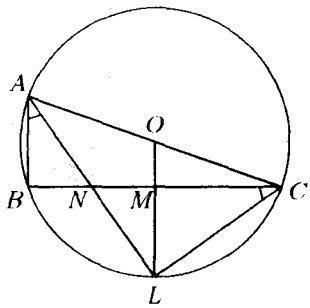


Рис. 75

Таким образом, ответ $\frac{l^2 - h^2}{2h}$ годится и в случае, когда $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{l^2 - h^2}{2h}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = -2$; $x = 3$. 2. $-1 < x < +\infty$. 3. $(\pi n;\ \log_2 \pi n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m; \log_2\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m\right)\right)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. 4. $x = \frac{1}{3}$; $x = 9$. 5. $\frac{49}{81}$. 6. $\sqrt{h^2 + \frac{hm}{2}}$.

Вариант 3. 1. $x = -2$; $x = 1$. 2. $2 < x < +\infty$. 3. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \log_5\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \log_5\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right)$, $k=1,2,3,\ldots$.

4. $x=\sqrt[3]{7}$; $x=7$. 5. $\frac{8}{27}$. 6. $\sqrt{2bh+h^2}$.

Вариант 4. 1. $x=-1$; $x=7$. 2. $2<x<+\infty$.

3. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \log_4\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\right)$, $n=0,1,2,\ldots$;

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi m; \log_4\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)\right)$, $m=0,1,2,\ldots$;

$(2\pi l; \log_4 2\pi l)$, $l=1,2,3,\ldots$. 4. $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $x=3$. 5. $\frac{9}{26}$.

6. $\frac{2}{h}(d^2-h^2)$.

1987

Решение варианта 1

1. Перенесем правую часть исходного неравенства налево и приведем все члены неравенства к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{1-3x}{2x(1-x)} \geqslant 0,$$

равносильное исходному. Множество решений этого неравенства есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{1-3x}{2x(1-x)} = 0$$

и множества решений неравенства

$$\frac{1-3x}{2x(1-x)} > 0. \qquad (1)$$

Уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{3}$. Пользуясь методом интервалов, находим, что множеством решений неравенства (1) являются два промежутка $0<x<\frac{1}{3}$ и $1<x<+\infty$. Следовательно, множество решений исходного неравенства есть два промежутка $0<x\leqslant\frac{1}{3}$ и $1<x<+\infty$.

Ответ: $0<x\leqslant\frac{1}{3}$; $1<x<+\infty$.

2. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$4^{\sin x}+\frac{32}{4^{\sin x}}=18.$$

Обозначив $4^{\sin x}$ через z, будем иметь уравнение

$$z+\frac{32}{z}=18.$$

Перенося все члены этого уравнения в левую часть и приводя к общему знаменателю, перепишем его в виде

$$\frac{z^2 - 18z + 32}{z} = 0. \qquad (2)$$

Поскольку решениями уравнения (2) являются $z_1 = 2$ и $z_2 = 16$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$4^{\sin x} = 2 \quad \text{и} \quad 4^{\sin x} = 16.$$

Эта совокупность уравнений, в свою очередь, равносильна совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = 2.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, второе уравнение этой совокупности решений не имеет, так как 2 не входит в область изменения функции $y = \sin x$. Итак, решениями исходного уравнения являются $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

3. Поскольку угол α принадлежит третьей четверти, и для таких углов косинус отрицателен, то применяя тождество $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, находим, что

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2}{3}.$$

Применяя формулу $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, имеем $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$.

Ответ: $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$.

4. Для нахождения области определения данной функции надо решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 2x) \geqslant 0. \qquad (3)$$

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x > 0, \\ 3x^2 - 2x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Множество решений первого неравенства системы (4) есть объединение двух промежутков $-\infty < x < 0$ и $\frac{2}{3} < x < +\infty$. Множеством решений второго неравенства системы (4) является промежуток $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, откуда следует, что множеством решений

системы (4), а значит, и неравенства (3), является объединение двух промежутков $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$ и $\frac{2}{3} < x \leqslant 1$.

Таким образом, область определения данной функции состоит из двух промежутков $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$ и $\frac{2}{3} < x \leqslant 1$.

Ответ: $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$, $\frac{2}{3} < x \leqslant 1$.

5. Опустим из точки D перпендикуляры DP и DK соответственно на стороны BC и AB данного треугольника ABC (рис. 76). Так как у треугольников ABD и ACB одинаковые основания AB, но площадь треугольника ADB в три раза меньше площади треугольника ACB, то высота треугольника ADB в три раза меньше высоты треугольника ABC, т. е. $KD = \frac{1}{3}BC$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $DP = \frac{1}{4}BA$. Обозначим $DP = x$ и $KD = y$, тогда $AB = 4x$, $BC = 3y$, $AK = 3x$, $PC = 2y$. Из прямоугольных треугольников AKD и DPC, применяя теорему Пифагора, имеем равенства $AD^2 = AK^2 + KD^2$, $DC^2 = DP^2 + PC^2$. Перепишем эти равенства в виде

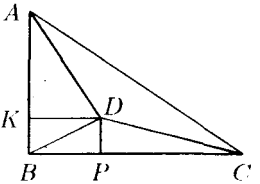


Рис. 76

$$\begin{cases} a^2 = (3x)^2 + y^2, \\ c^2 = x^2 + (2y)^2. \end{cases}$$

Получили систему уравнений относительно x^2 и y^2 и из нее находим, что

$$x^2 = \frac{9c^2 - a^2}{35}, \quad y^2 = \frac{4a^2 - c^2}{35}.$$

Применяя теорему Пифагора к треугольнику BDP, имеем

$$BD = \sqrt{DP^2 + BP^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{8c^2 + 3a^2}{35}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{8c^2 + 3a^2}{35}}$.

6. Поскольку пирамида правильная, то ее вершина проектируется в центр квадрата — точку H. Центр вписанного в пирамиду шара — точка O_1 — лежит на высоте пирамиды SH, при этом шар касается основания пирамиды в точке H.

Так как второй шар касается граней BCS и DSC, то его центр — точка O_2 — равноудалена от граней BSC и DSC, а поэтому лежит на биссекторной плоскости двугранного угла при

ребре SC. Так как пирамида правильная, то эта биссекторная плоскость проходит через высоту SH пирамиды. Поскольку оба шара касаются плоскости основания $ABCD$ и плоскости грани SCD, то их центры лежат на биссекторной плоскости двугранного угла при ребре DC. Следовательно, центры шаров лежат на прямой, по которой пересекаются обе эти плоскости, т. е. центр второго шара лежит на прямой O_1C.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью ASC (рис. 77). Опустим из точки O_2 перпендикуляр O_2K на AC и перпен-

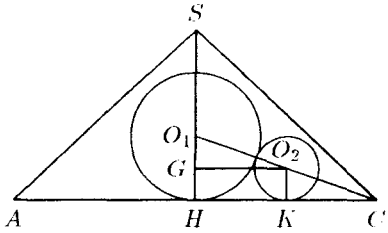


Рис. 77

дикуляр O_2G на SH. Ясно, что прямая O_2G параллельна прямой HK, так как AC и O_2G перпендикулярны AH. Поскольку $O_1H = 2$, $O_2K = 1$, $O_1O_2 = 3$, то $HK = GO_2 = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ и $\operatorname{tg}(\angle O_1CH) = \operatorname{tg}(\angle O_1O_2G) = \dfrac{O_1G}{O_2G} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда $CH = O_1H \cdot \operatorname{ctg}(\angle O_1CH) = 4\sqrt{2}$. Проведем апофему SL боковой грани DSC и точку L соединим с точкой H и с точкой O_1 (рис. 78). Поскольку прямая HL параллельна прямой AD (средняя линия в треугольнике ACD), то треугольник HLC прямоугольный и равнобедренный. Поэтому $HL = CL = \dfrac{CH}{\sqrt{2}} = 4$ и $CD = 8$.

Так как центр вписанного в пирамиду шара лежит на биссектрисе угла HLS, то $\operatorname{tg}(\angle HLO_1) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\angle HLS\right) = \dfrac{O_1H}{HL} = \dfrac{r}{4} = \dfrac{1}{2}$. Но так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, то $\operatorname{tg}(\angle HLS) = \dfrac{1}{2}$. Теперь высота SH пирамиды $SABCD$ находится из прямоугольного треугольника HLS:

$$SH = HL\operatorname{tg}(\angle HLS) = 4\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Объем V пирамиды $SABCD$ находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}CD^2\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot 64 = \frac{1024}{9}.$$

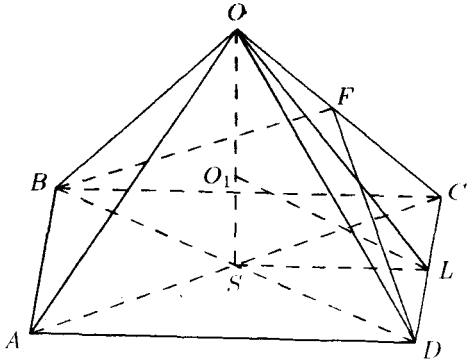


Рис. 78

Опустим из точки D перпендикуляр DF на прямую SC. Так как диагонали квадрата перпендикулярны, то $CH \perp BD$, и из теоремы о трех перпендикулярах заключаем, что SC перпендикулярна плоскости BDF и, значит, $SC \perp BF$. Но тогда угол BFD есть линейный угол двугранного угла с ребром SC.

Треугольник FHD прямоугольный, поэтому $\operatorname{tg}(\angle DFH) = \dfrac{HD}{HF}$, но $HD = HC = 4\sqrt{2}$, а из треугольника HSC имеем $S_{HSC} = \dfrac{1}{2}HF \cdot SC = \dfrac{1}{2}SH \cdot CH$, откуда

$$HF = \frac{SH \cdot CH}{SC}. \qquad (5)$$

Кроме того, $CS^2 = HC^2 + SH^2 = \dfrac{544}{9}$, т. е. $CS = \dfrac{4}{3}\sqrt{34}$. Тогда из (5) находим $HF = \dfrac{16}{\sqrt{17}}$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\angle DFH) = \frac{HD}{HF} = \frac{\sqrt{34}}{4},$$

а двугранный угол при ребре SC равен $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{34}}{4}\right)$.

Ответ: $V = \dfrac{1024}{9}$; $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{34}}{4}\right)$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-\infty < x \leqslant -3$; $0 < x \leqslant 3$. 2. $x = 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $\sin 2\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 4. $-\dfrac{1}{2} < x < 0$; $\dfrac{3}{2} < x < 2$.

5. $\sqrt{\dfrac{3b^2+7d^2}{115}}$. 6. $V=\dfrac{579}{14}$; $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{29}}{8}$.

Вариант 3. 1. $-\infty<x<0$; $1\leqslant x<2$. 2. $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 3. $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $-1\leqslant x<0$; $3<x\leqslant 4$. 5. $\sqrt{\dfrac{143d^2-8c^2}{15}}$.

6. $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$; $V=\dfrac{273}{11}$.

Вариант 4. 1. $-\infty<x\leqslant -2$; $2\leqslant x<+\infty$.

2. $x=2\pi n$, $n\in Z$. 3. $\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

4. $-1<x<-\dfrac{2}{3}$; $0<x<\dfrac{1}{3}$. 5. $\sqrt{\dfrac{n^2+3m^2}{28}}$.

6. $R=2\sqrt{3}$; $V=\dfrac{623}{18}$.

1988

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x,$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$\sin^2 x-4\sin x+1=0.$$

Поскольку квадратное уравнение $z^2-4z+1=0$ имеет два корня $z_1=2+\sqrt{3}$ и $z_2=2-\sqrt{3}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x=2+\sqrt{3}\quad\text{и}\quad\sin x=2-\sqrt{3}.$$

Так как $2+\sqrt{3}>1$ и $0<2-\sqrt{3}<1$, то первое из уравнений этой совокупности решений не имеет, а решения второго уравнения совокупности есть $x=(-1)^n\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi n$, $n\in Z$. Эти x и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi n$, $n\in Z$.

2. Пусть ABC — данный в условии задачи прямоугольный треугольник. Точка O — центр окружности, описанной около него, лежит на гипотенузе AC (рис. 79). Пусть основание высоты, опущенной из вершины B на гипотенузу, есть точка D. Так как нам известен радиус описанной окружности и острый угол прямоугольного треугольника ABC, то один из его катетов равен $2R\sin\alpha$, а другой равен $2R\cos\alpha$. Следовательно, его площадь

равна $2R^2 \sin\alpha \cos\alpha = R^2 \sin 2\alpha$. Но площадь этого треугольника равна также $R \cdot BD$. Поэтому $BD = R \sin 2\alpha$.

Ответ: $R \sin 2\alpha$.

3. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$4 - 6x - x^2 = x^2 + 8x + 16. \qquad (1)$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения всех корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$x^2 + 7x + 6 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -6$. Проверка показывает, что $x_1 = -1$ является корнем исходного уравнения, а $x_2 = -6$ не является. Итак, $x = -1$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = -1$.

4. Обозначим через β величину угла DAB и через a — величину отрезка CM, тогда (рис. 80) $\angle DAM = \angle BAM = \dfrac{\beta}{2}$ и $DM = 2a$.

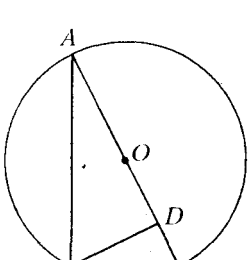


Рис. 79

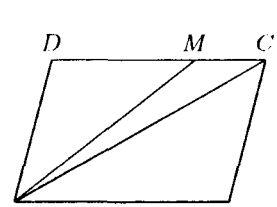


Рис. 80

Применим теорему синусов к треугольникам CAM и AMD. Имеем $\dfrac{AM}{\sin(\angle ACM)} = \dfrac{CM}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{AM}{\sin(\angle ADM)} = \dfrac{MD}{\sin(\angle MAD)}$. Поскольку $\angle ACD = \angle BAC = \angle BAM - \angle CAM = \dfrac{\beta}{2} - \alpha$, $\angle ADC = \pi - \beta$, то $\dfrac{AM}{\sin(\frac{\beta}{2} - \alpha)} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{AM}{\sin(\pi - \beta)} = \dfrac{2a}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Из первого равен-

ства находим $AM = \dfrac{a\sin\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$. Подставляя это выражение во второе равенство, получаем

$$\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{2}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Используя формулу синуса разности двух углов и синуса двойного угла, перепишем это равенство в виде

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = 5\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\angle MAD = \dfrac{\beta}{2} = \operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$ и значит, $\angle BAD = 2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.

5. Второе уравнение исходной системы можно переписать в виде

$$y(x+2)+(x+1)=0,$$

откуда следует, что эта система ни при каком значении параметра a не имеет решений с условием $x=-2$. Поэтому исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} (ax-1)y + x + \dfrac{3}{2} = 0, \\ y = -\dfrac{x+1}{x+2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляя выражение $\left(-\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ вместо y в первое уравнение системы (3), после преобразований получаем систему

$$\begin{cases} (2a-2)x^2 + (2a-9)x - 8 = 0, \\ y = -\dfrac{x+1}{x+2}, \end{cases} \qquad (4)$$

равносильную системе (3).

Найдем все значения параметра a, при которых первое уравнение системы (4) имеет решение $x=-2$. Для таких значений a должно выполняться равенство

$$(2a-2)(-2)^2 + (2a-9)(-2) - 8 = 0,$$

откуда находим, что $a = -\dfrac{1}{2}$.

При $a = -\frac{1}{2}$ первое уравнение системы (4) перепишется в виде

$$-3x^2 - 10x - 8 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = -\frac{4}{3}$. Второму из них соответствует значение $y_2 = \frac{1}{2}$. Для $x_1 = -2$ соответствующего значения y не существует. Итак, при $a = -\frac{1}{2}$ исходная система имеет единственное решение $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a = 1$ первое уравнение системы перепишется в виде

$$-7x - 8 = 0.$$

Оно имеет единственное решение $x = -\frac{8}{7}$, соответствующее значение y равно $\frac{1}{6}$. Итак, при $a = 1$ исходная система уравнений имеет единственное решение $\left(-\frac{8}{7}; \frac{1}{6}\right)$, и это значение a отвечает условию задачи.

При $a \neq 1$ первое уравнение системы (4) есть квадратное уравнение с дискриминантом

$$D = (2a - 9)^2 + 4 \cdot 8 \cdot (2a - 2) = 4a^2 + 28a + 17.$$

Если $D < 0$, то первое уравнение системы (4), а значит, и исходная система, не имеют решений. Эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

Если $D > 0$ и $a \neq -\frac{1}{2}$, то первое уравнение системы (4) имеет два решения, отличных от (-2). Следовательно, система (4), а вместе с ней и исходная система, имеют по два решения. Эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

Равенство $D = 4a^2 + 28a + 17 = 0$ выполняется для $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. Оба эти значения отличны от $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, при $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ первое уравнение системы (4), а вместе с ним система (4) и исходная система, имеют по одному решению. Итак, значения $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$ отвечают условию задачи.

Ответ: -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{-7 - 4\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2}$.

6. Пусть $SABC$ — пирамида, данная в условии задачи (рис. 81). Пусть SO_2 — высота пирамиды. В каждой боковой грани проведем высоту из вершины S.

Поскольку боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то проекции высот боковых граней будут равны. Следовательно, высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды $SABC$, т. е. O_2 есть центр окружности, вписанной в основание пирамиды $SABC$ (рис. 82). Найдем ее радиус R. Так как тре-

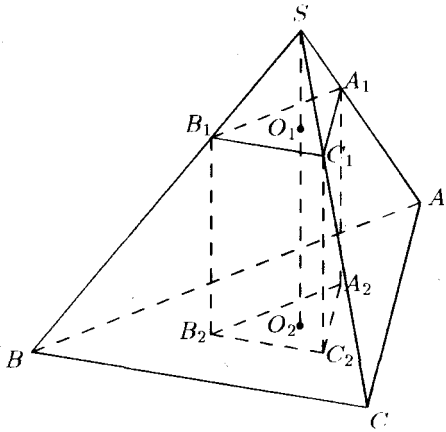


Рис. 81

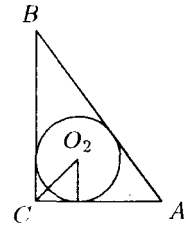


Рис. 82

угольник ABC прямоугольный, то $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ и его площадь S равна $S = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = 6$, и так как в то же время $S = \dfrac{R}{2}(AB + BC + AC) = 6R$, то отсюда находим, что $R = 1$.

Поскольку верхнее основание вписанного цилиндра есть окружность, и она касается каждой боковой грани ровно в одной точке, то эта окружность вписана в треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся сечением пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра (рис. 81).

Так как плоскость верхнего основания цилиндра параллельна плоскости ABC, то она пересекает боковые грани ASB, ASC и BSC соответственно по прямым A_1B_1, A_1C_1 и BC. Из параллельности прямых B_1C_1 и BC следует, что треугольники SB_1C_1 и SBC подобны и значит, $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{SB_1}{SB}$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{SB_1}{SB}$ и, следовательно, $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$. По доказанному $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, поэтому $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и ABC пропорциональны стороны, содержащие равные углы: $\angle A_1B_1C_1$ и $\angle ABC$. Значит, эти тре-

угольники подобны. Если r — радиус основания цилиндра, то r есть радиус окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$. Но тогда коэффициент подобия k треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равен отношению радиусов $\frac{r}{R}$, т. е. равен r.

Рассмотрим прямоугольные треугольники SO_2C и SO_1C_1. Они подобны с коэффициентом подобия k. Ясно, что $O_1C_1 = k\,O_2C$, и поскольку $O_2C = R\sqrt{2} = \sqrt{2}$, то имеем $O_1C_1 = k\sqrt{2}$. Из подобия треугольников SO_1C_1 и SO_2C следует, что $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{SC_1}{SC} = k$. Треугольник SO_2C прямоугольный, поэтому $SO_2 = \sqrt{SC^2 - CO_2{}^2} = 6$ и $SO_1 = 6k$. Тогда высота цилиндра равна $SO_2 - SO_1 = 6 - 6k = 6(1-k)$, а площадь его боковой поверхности есть $2\pi k{\cdot}6(1-k)$, что по условию равно $\frac{8\pi}{3}$. Из равенства $12\pi k(1-k) = \frac{8}{3}\pi$ получим уравнение для нахождения k:

$$9k^2 - 9k + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно, возможны два цилиндра, удовлетворяющих условию задачи, с радиусами основания $r_1 = \frac{2}{3}$ и $r_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\arccos(1-\sqrt{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$. 2. $R^2 \operatorname{tg}\alpha$. 3. $x = -2$. 4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 5. 1; 3; $\frac{11}{2}$. 6. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 3. 1. $x = (-1)^n \arcsin(1-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z$. 2. $4R^2 \sin 2\alpha$. 3. $x = -1$. 4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 5. 1; 2; $\frac{9}{2}$. 6. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$.

Вариант 4. 1. $x = \pm\arccos(2-\sqrt{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$. 2. $2R^2 \sin 2\alpha$. 3. $x = 1$. 4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 5. 2; 3; $\frac{7}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{23}}{2}$; $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

1989

Решение варианта 1

1. Применяя формулу разности синусов, имеем

$$\sin 5x - \sin x = 2\sin 2x \cos 3x.$$

Используя это тождество, исходное уравнение перепишем в виде

$$2\sin 2x \cos 3x = \sqrt{8}\cos 3x.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 3x = 0 \quad \text{и} \quad \sin 2x = \sqrt{2}.$$

Поскольку $\sqrt{2} > 1$, то второе уравнение этой совокупности решений не имеет. Решения первого уравнения, а значит, и исходного уравнения, есть $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

2. Пусть ABC — треугольник, данный в условии задачи (рис. 83). Обозначим через D основание высоты CD, опущенной из вершины C на сторону AB. Так как треугольник ABC остроугольный, то точка D лежит на отрезке AB. Из прямоугольных треугольников ACD и CDB соответственно имеем $AD = h\operatorname{ctg}\alpha$, $BD = h\operatorname{ctg}\beta$, где $h = CD$. Значит, $AB = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$.

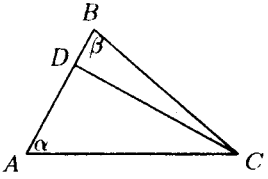


Рис. 83

Площадь треугольника ACB равна S и равна $\frac{1}{2}DC \cdot AB$, поэтому имеем равенство: $S = \frac{1}{2}h^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, откуда находим, что $h = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения состоит их всех $x > 0$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$x(x+4) = 32,$$

имеющему два корня $x_1 = -8$ и $x_2 = 4$. Из этих значений x в ОДЗ исходного уравнения попадает только $x = 4$, которое и является его единственным решением.

Ответ: $x = 4$.

4. Пусть $SABCD$ — данная в условии задачи пирамида (рис. 84). Тогда ее основание есть квадрат $ABCD$, и высота S проектируется в его центр — точку O.

Обозначим через a длину бокового ребра пирамиды. Тогда ее высота SO равна $\frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника ASO находим $AO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда длина AD — стороны основания пирамиды — равна $AO \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$, а длина апофемы SE равна $\sqrt{SO^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2}$, т. е. $SE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{6a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{10}$. Центр O' вписанного в пирамиду шара лежит на высоте пирамиды. Так как $CD \perp SE$ и $CD \perp OE$, то прямая CD перпендикулярна плоскости SOE, и, значит, плоскость DSC перпендикулярна плоскости SOE. Радиус вписанного в пирамиду шара, проведенный в точку касания с плоскостью DSC, перпендикулярен этой плоскости и потому принадлежит плоскости SOE. Следовательно, точка касания F лежит на отрезке SE (рис. 85).

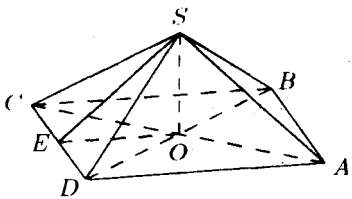


Рис. 84

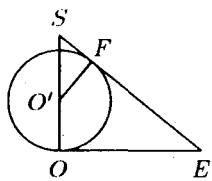


Рис. 85

Обозначим радиус шара через r, тогда $O'F = r$. Из подобия прямоугольных треугольников OSE и $O'FS$ имеем равенство $\frac{SO'}{SE} = \frac{O'F}{OE}$. Так как $SO' = SO - OO'$, то это равенство можно переписать в виде $\frac{\frac{a}{2} - r}{\frac{a}{4}\sqrt{10}} = \frac{r}{\frac{a}{4}\sqrt{6}}$, откуда $r = \frac{a\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + \sqrt{10})}$. Тогда отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме равно

$$\frac{a\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + \sqrt{10})} : \frac{a}{4}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{6}}{5 + \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{6}(5 - \sqrt{15})}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{10}(5 - \sqrt{15})$.

5. Поскольку при $m = 0$ выражение $(m{\cdot}3^m)^{\frac{1}{2}}$ не имеет смысла, то все искомые значения параметра m удовлетворяют неравенству $m \geqslant 0$.

Если $m = 0$, то исходное уравнение перепишется в виде $4x^2 = 0$ и имеет единственный двукратный корень $x_1 = 0$. Для того чтобы квадратное уравнение имело корни, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант D был неотрицателен. Поскольку в нашем случае

$$D = 16(m{\cdot}3^m - 3^{m+1} - m + 3) = 16(m-3)(3^m - 1),$$

то в области $m > 0$ неравенство $D \geqslant 0$ равносильно неравенству $m - 3 \geqslant 0$. Итак, исходное уравнение имеет корни при $m = 0$ и $m \geqslant 3$.

При $m \geqslant 3$ исходное уравнение имеет два корня (различных или совпадающих), и их произведение по теореме Виета равно $\dfrac{3^{m+1} + m - 3}{4}$. Так как при $m \geqslant 3$ имеем

$$\frac{3^{m+1} + m - 3}{4} \geqslant \frac{3^4 + 3 - 3}{4} > 0,$$

то корни имеют одинаковые знаки. Поскольку их сумма есть $4(m{\cdot}3^m)^{\frac{1}{2}}$, т. е. положительна, то оба корня положительны.

Ответ: при $m = 0$ уравнение имеет единственный корень, при $m \geqslant 3$ уравнение имеет положительные корни, при $m < 0$ и $0 < m < 3$ уравнение не имеет корней.

6. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей соответственно радиусов R и r (рис. 86). Обозначим угол AO_1C через α,

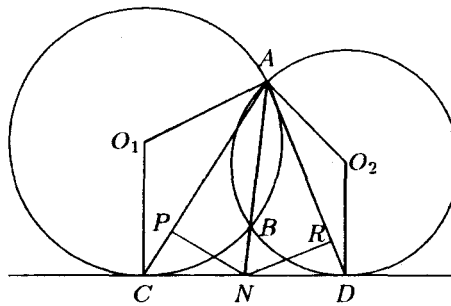


Рис. 86

угол AO_2D — через β и через ρ — радиус окружности, описанной около треугольника ACD. Тогда $\angle O_1CA = \angle O_1AC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AO_1C) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, и поскольку $\angle O_1CD = 90^\circ$, то

$\angle ACD = \angle O_1CD - \angle O_1CA = \dfrac{\alpha}{2}$. Аналогичными рассуждениями находим, что $\angle CDA = \dfrac{\beta}{2}$. Из треугольника O_1AC имеем $AC = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$, а из треугольника AO_2D имеем $AD = 2r\sin\dfrac{\beta}{2}$. Из треугольника ACD имеем $AC = 2\rho\sin\dfrac{\beta}{2}$, $AD = 2\rho\sin\dfrac{\alpha}{2}$, откуда находим, что $\rho^2 = R{\cdot}r$, т. е. $\rho = \sqrt{R{\cdot}r}$. Кроме того, поскольку $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{AC}{AD}\cdot\dfrac{r}{R} = \dfrac{r\sin\frac{\beta}{2}}{R\sin\frac{\alpha}{2}}$, то $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$. Пусть $PN = h_1$ и $NR = h_2$ — высоты соответственно треугольников CNA и DNA, опущенные из точки N. Так как CN и ND — касательные к окружностям радиусов R и r и NA — секущая, то $CN^2 = NB{\cdot}BA = ND^2$, откуда $CN = ND$. Из прямоугольных треугольников CNP и DNR находим $\dfrac{h_1}{CN} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{h_2}{ND} = \sin\dfrac{\beta}{2}$, откуда $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Ответ: 1) $\sqrt{Rr}$; 2) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. 2. $\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

3. 8. 4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$. 5. При $p = 0$ нулевые корни; при $p \geqslant 4$ оба корня положительные. 6. 1) $\sqrt{Rr}$, 2) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Вариант 3. 1. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. 2. $\dfrac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$.

3. 3. 4. $\dfrac{9}{4\sqrt{17}}$. 5. При $m = 0$ нулевые корни; при $m \geqslant 5$ оба корня положительные. 6. 1) $\sqrt{Rr}$, 2) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Вариант 4. 1. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

2. $\dfrac{a^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. 3. 9. 4. $\dfrac{17\sqrt{3}}{4\sqrt{47}}$. 5. При $p = 0$ нулевые корни; при $p \geqslant 7$ оба корня положительные. 6. 1) $\sqrt{Rr}$, 2) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

§4. Химический факультет

1984

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x \geqslant \frac{1}{2}$ и $\log_3 x^2 \neq 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ и $x > 1$. Ясно, что $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет исходному неравенству. При любом x из промежутка $\frac{1}{2} < x < 1$ имеем $\sqrt{x - \frac{1}{2}} > 0$ и $\log_3 x^2 < 0$, поэтому ни одно x из этого промежутка не является решением исходного неравенства. При любом x из промежутка $1 < x < +\infty$ имеем $\sqrt{x - \frac{1}{2}} > 0$ и $\log_3 x^2 > 0$, поэтому любое x из этого промежутка является решением исходного неравенства. Следовательно, решениями исходного неравенства являются $x = \frac{1}{2}$ и все x из промежутка $1 < x < +\infty$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$; $1 < x < +\infty$.

2. Обозначим через S км расстояние между пунктами A и B, а через v_1 км/час и v_2 км/час соответственно скорости первого и второго поездов. Время, которое прошло от выхода первого поезда из A до прибытия туда второго поезда, равно $\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}\right)$ час. Если бы поезда вышли одновременно, первый из пункта A, а второй из пункта B, то время до их встречи равнялось бы $\frac{S}{v_1 + v_2}$ час. Из условия задачи имеем уравнение

$$\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} = \frac{25S}{6(v_1 + v_2)}. \qquad (1)$$

Так как скорость второго поезда на 20 км/час больше скорости первого поезда, то

$$v_2 - v_1 = 20.$$

Итак, для нахождения скоростей поездов получили после деления правой части уравнения (1) на S ($S \neq 0$) систему

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{25}{6(v_1 + v_2)}, \\ v_2 - v_1 = 20. \end{cases}$$

Из второго уравнения $v_2 = 20 + v_1$. Подставляя $20 + v_1$ вместо v_2 в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{20 + v_1} = \frac{25}{6(2v_1 + 20)},$$

которое имеет корни $v_1^{(1)} = 40$, $v_1^{(2)} = -60$. Условию $v_1 > 0$ удовлетворяет только $v_1^{(1)} = 40$, а тогда $v_2 = 20 + v_1 = 60$.

Итак, скорости поездов соответственно равны 40 км/час, 60 км/час.

Ответ: 40 км/час, 60 км/час.

3. Функция $f(x)$ определена при всех x и в каждой точке x имеет производную, которая находится следующим образом: $f'(x) = [x^2(6\sin 2x - 8\cos 2x) + x(6\cos 2x + 8\sin 2x) + 3\sin 2x - 4\cos 2x]' = 2x(6\sin 2x - 8\cos 2x) + x^2(12\cos 2x + 16\sin 2x) + 6\cos 2x + 8\sin 2x + x(-12\sin 2x + 16\cos 2x) + 6\cos 2x + 8\sin 2x = 4(x^2 + 1)(3\cos 2x + 4\sin 2x)$. Поскольку $3\cos 2x + 4\sin 2x = 5\left[\frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x\right] = 5[\sin\varphi\cos 2x + \cos\varphi\sin 2x] = 5\sin(2x + \varphi)$, где $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$, то для производной имеем выражение

$$f'(x) = 20(x^2 + 1)\sin(2x + \varphi),$$

где $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$.

Точки максимума функции $f(x)$ находятся среди корней уравнения $f'(x) = 0$. Поскольку $x^2 + 1 > 0$ для любого x, то $f'(x)$ равна нулю, если $\sin(2x + \varphi) = 0$, т. е. если $2x + \varphi = \pi k$, $k \in Z$, откуда $x = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Выберем среди этих точек те, в которых функция $f(x)$ действительно достигает максимума. Для этого воспользуемся достаточным условием максимума и минимума, связанным со знаками производной $f'(x)$ в окрестности исследуемой точки. Знак производной $f'(x) = 20(x^2 + 1)\sin(2x + \varphi)$ совпадает со знаком функции $\sin(2x + \varphi)$. Неравенство $\sin(2x + \varphi) > 0$ выполняется на интервалах

$$-\frac{\varphi}{2} + \pi n < x < -\frac{\varphi}{2} + \pi\cdot\frac{2n + 1}{2},\ n \in Z,$$

а на дополнительных интервалах

$$-\frac{\varphi}{2} + \pi\cdot\frac{2n + 1}{2} < x < -\frac{\varphi}{2} + \pi(n + 1),\ n \in Z,$$

выполняется неравенство $\sin(2x + \varphi) < 0$. Поэтому при переходе слева направо через точки $x = -\frac{\varphi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, производ-

ная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, и так как в этих точках функция непрерывна, то все эти точки являются точками минимума. При переходе же слева направо через точки $x = -\frac{\varphi}{2} + \pi \cdot \frac{2n+1}{2}$, $n \in Z$, производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, и так как в этих точках функция непрерывна, то все эти точки являются точками максимума.

Ответ: точки максимума есть $-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \pi\frac{2n+1}{2}$, $n \in Z$.

4. Пусть $SABC$ - данная в условии задачи пирамида (рис. 87), точки K, L и M — середины ребер основания AB, AC и BC соответственно. Тогда SK, SL и SM — апофемы боковых граней пирамиды. Обозначим буквой a длину ребра в основании пирамиды $SABC$. Так как LM — средняя линия треугольника ABC, то $LM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Согласно условию задачи $AS = \frac{1}{\sqrt{2}}AC = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ и, применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ASL, находим $SL = \sqrt{AS^2 - AL^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$. Пирамида $SABC$ правильная, поэтому $SK = SM = SL = \frac{a}{2}$. Таким образом, установлено, что в треугольнике LMS все стороны имеют равную длину $\frac{a}{2}$. Следовательно, $\angle LMS = \frac{\pi}{3}$. Аналогично доказывается, что $\angle MSK = \angle KSL = \frac{\pi}{3}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $SB' \leqslant SA'$, $SB' \leqslant SC'$ и, следовательно, $\angle SA'B' < \frac{\pi}{2}$, $\angle SC'B' < \frac{\pi}{2}$.

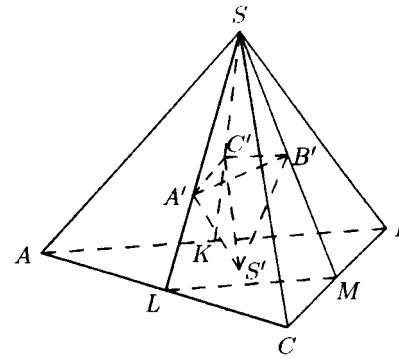


Рис. 87

Применяя теорему синусов к треугольникам $SA'B'$ и $SC'B'$, получаем равенства

$$\frac{SB'}{\sin(\angle SA'B')} = \frac{A'B'}{\sin(\angle A'SB')}, \quad \frac{SB'}{\sin(\angle SC'B')} = \frac{B'C'}{\sin(\angle B'SC')}. \qquad (2)$$

Так как $A'B' = B'C'$ и по доказанному $\angle A'SB' = \angle B'SC' = \frac{\pi}{3}$,

то из равенства (2) следует, что $\sin(\angle SA'B') = \sin(\angle SC'B')$ и далее, поскольку углы $SA'B'$ и $SC'B'$ острые, что $\angle SA'B' = \angle SC'B'$. Теперь можно утверждать, что треугольники $SA'B'$ и $SC'B'$ имеют соответственно равные углы. А так как SB' — их общая сторона, то эти треугольники равны и, в частности, $SA' = SC'$. В равнобедренном треугольнике $A'SC'$ угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Значит, этот треугольник равносторонний. Теперь из равенств $SA' = A'C' = A'B'$ следует, что в равнобедренном треугольнике $SA'B'$ угол при основании ($\angle A'SB'$) равен $\frac{\pi}{3}$. Поэтому треугольник $SA'B'$ также равносторонний и, в частности, $SA' = SB'$. Итак, доказано, что длины всех отрезков SA', SB', SC' равны, и, значит, все треугольники $SA'B'$, $SB'C'$, $SC'A'$ равносторонние. Поскольку $\angle SA'B' = \frac{\pi}{3}$ и $\angle SLM = \frac{\pi}{3}$, то прямые $A'B'$ и LM параллельны. Аналогично доказывается, что параллельны плоскости $A'B'C'$ и ABC.

Из равенства отрезков SA', SB' и SC' следует, что проекции этих отрезков на плоскость $A'B'C'$ имеют равную длину, т. е. проекция точки S на плоскость $A'B'C'$ попадает в центр O окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C'$. Аналогично, из равенства отрезков $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$ следует, что проекция точки S на плоскость $A'B'C'$ также совпадает с точкой O и, следовательно, прямая SS' перпендикулярна плоскости $A'B'C'$. Из параллельности плоскостей $A'B'C'$ и ABC, а также из принадлежности точки S плоскости ABC следует, что SS' есть высота пирамиды $SABC$. Но пирамида $SABC$ правильная, поэтому S' есть центр правильного треугольника ABC, т. е. точка пересечения его медиан.

Вычислим теперь полные поверхности T_1 и T_2 пирамид $SABC$ и $S'A'B'C'$ соответственно. Поскольку SL — высота в треугольнике ASC, то площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}AC{\cdot}SL = \frac{1}{2}a{\cdot}\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Такую же величину имеют площади остальных боковых граней пирамиды. Площадь правильного треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB{\cdot}AC{\cdot}\sin(\angle BAC) = \frac{1}{2}a{\cdot}a{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Итак, имеем

$$T_1 = 3{\cdot}\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2. \qquad (3)$$

Вынесем на рис. 88 сечение пирамиды $SABC$ плоскостью BSL. Так как точка S' лежит на медиане BL треугольника ABC,

то прямая SS' лежит в плоскости BSL. В частности, отсюда следует, что точка O, точка пересечения SS' с плоскостью $A'B'C'$, также лежит в плоскости BSL. Кроме того, $SS' \perp LB$ и $SS' \perp A'O$, так как прямые LB и $A'O$ лежат в плоскостях ABC и $A'B'C'$, перпендикулярных SS'.

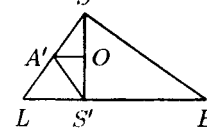


Рис. 88

Треугольники $A'B'S$ и $A'B'S'$ правильные, поэтому $SA' = A'B' = S'A'$. Прямоугольные треугольники $SA'O$ и $S'A'O$ имеют, таким образом, равные гипотенузы и общий катет $A'O$. Значит, они равны, и $SO = S'O$, т. е. O есть середина отрезка SS'. Поскольку $A'O \parallel LS'$, заключаем, что $A'O$ есть средняя линия в треугольнике LSS', и A' есть середина отрезка LS. Теперь находим $SA' = \frac{1}{2}SL = \frac{a}{4}$ и $S'A' = SA' = \frac{a}{4}$. По условию все ребра пирамиды $S'A'B'C'$ равны между собой и, следовательно, равны $\frac{a}{4}$. Площадь одной грани этой пирамиды равна $\left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$, а для полной поверхности T_2 имеем выражение

$$T_2 = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) находим, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2\right) : \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right) = 4(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $4(\sqrt{3}+1)$.

5. Ясно, что все искомые значения a удовлетворяют условию $a \neq 2$, так как выражение $a-2$ находится в знаменателе. Поэтому далее будем считать это условие выполненным. Введем для краткости обозначения $a-2=b$, $b \neq 0$, $\frac{x-2}{b} = t$. Тогда $a = 2+b$, $x = 2+bt$ и $a^2-4a+3 = b^2-1$, $x+a-4 = b(t+1)$, $x-a = b(t-1)$. В новых обозначениях исходное неравенство примет вид

$$\frac{1}{2}b^2|t+1| - |t| + \frac{1}{2}b^2|t-1| \leqslant 1. \qquad (5)$$

Исходное неравенство при некотором a имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда при $b = a-2$ ровно два решения имеет неравенство (5). Найдем теперь все значения параметра b, $b \neq 0$, при каждом из которых неравенство (5) имеет ровно два решения.

Обозначим функцию, стоящую в левой части (5), через $f(t)$. Поскольку при любом t справедливо равенство $f(-t) = f(t)$, то она четная, и, значит, множество решений неравенства (5) симметрично относительно точки $t = 0$. Упростим теперь задание функции $f(t)$, сняв знаки модуля на различных интервалах изменения t.

На множестве $t \geqslant 1$ справедливы неравенства $t + 1 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $t - 1 \geqslant 0$, и, значит,

$$f(t) = \frac{1}{2}b^2(t+1) - t + \frac{1}{2}b^2(t-1) = (b^2-1)t.$$

Если $b^2 \leqslant 1$, то неравенству $(b^2-1)t \leqslant 1$ удовлетворяют все числа t из множества $t \geqslant 1$, т. е. неравенство (5) имеет бесконечное число решений. Искомые значения b удовлетворяют неравенству $b^2 > 1$. В этом предположении находим, что множество решений неравенства $(b^2-1)t \leqslant 1$ имеет вид $t \leqslant \dfrac{1}{b^2-1}$. Следовательно, множество решений неравенства (5) на области $t \geqslant 1$ есть промежуток

$$1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{b^2-1}. \qquad (6)$$

Если $1 < \dfrac{1}{b^2-1}$, то это множество бесконечно, и, значит, искомые значения b удовлетворяют противоположному неравенству $1 \geqslant \dfrac{1}{b^2-1}$. Учитывая, что все они лежат также в области $b^2 > 1$, заключаем, что все искомые значения b удовлетворяют неравенству $b^2 \geqslant 2$. Только такие b и будут рассматриваться в дальнейшем. Отметим дополнительно, что при $b^2 > 2$ промежуток (6) будет пустым, т. е. неравенство (5) не имеет решений в области $t \geqslant 1$, а при $b^2 \leqslant 1$ неравенство (5) справедливо лишь при $t = 1$.

На множестве $0 \leqslant t < 1$ справедливы неравенства $t + 1 \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $t - 1 \leqslant 0$, и, значит,

$$f(t) = \frac{1}{2}b^2(t+1) - t + \frac{1}{2}b^2(1-t) = b^2 - t.$$

Неравенство $b^2 - t \leqslant 1$ имеет решения $t \geqslant b^2 - 1$. Следовательно, множество решений неравенства (5) на области $0 \leqslant t < 1$ при $b^2 \geqslant 2$ пусто.

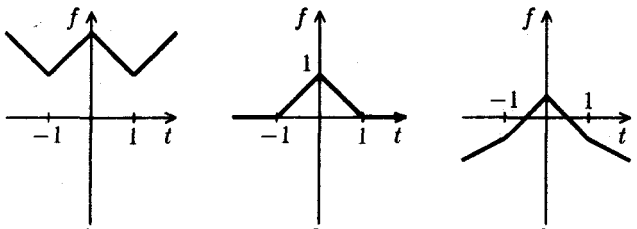
Итак, множество решений неравенства (5) на области $t \geqslant 0$

при $b^2 < 2$ бесконечно;
при $b^2 = 2$ состоит из одной точки $t = 1$;
при $b^2 > 2$ пусто.

В силу симметрии множества решений (5) относительно точки $t = 0$, заключаем, что неравенство (5) имеет ровно два решения только при $b^2 = 2$, т. е. $b = \sqrt{2}$ или $b = -\sqrt{2}$. В этих случаях решениями (5) являются $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. Пользуясь равенством $a = b + 2$, находим теперь искомые значения параметра a: $a_1 = 2 + \sqrt{2}$, $a_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Ответ: $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$.

Заметим, что график функции $f(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 89 а), б), в).



а) $b^2 > 1$ б) $b^2 = 1$ в) $b^2 < 1$

Рис. 89

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = 1$; $x > \sqrt{2}$. 2. 15 л/мин, 20 л/мин. 3. Точки минимума $x = -\frac{1}{3}\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. 4. 8. 5. $-3 - \sqrt{3}$; $-3 + \sqrt{3}$.

Вариант 3. 1. $x = \frac{1}{3}$; $x < -1$. 2. 25 км/час, 10 км/час. 3. Точки максимума $x = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$, $k \in Z$. 4. $\frac{3\sqrt{11}}{4}$. 5. $3 - \sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$.

Вариант 4. 1. $x = 0$; $x < -\sqrt{3}$. 2. 40 м^3/час, 30 м^3/час. 3. Точки минимума $x = -\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. 4. $\frac{1}{12}$. 5. $-2 - \sqrt{3}$; $-2 + \sqrt{3}$.

1985

Решение варианта 1

1. Применяя формулу для разности синусов, перепишем уравнение в виде

$$8\sin x\cos 3x = \sin x(4\cos^2 3x + 3)$$

или

$$\sin x(4\cos^2 3x - 8\cos x + 3) = 0.$$

Значит, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 4\cos^2 3x - 8\cos x + 3 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение $\sin x = 0$ имеет решение $x_1 = \pi k$, $k \in Z$. Поскольку квадратное уравнение $4y^2 - 8y + 3 = 0$ имеет корни $y_1 = \frac{3}{2}$ и $y_2 = \frac{1}{2}$, то второе уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Уравнение $\cos 3x = \frac{3}{2}$ решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ при любом α. Уравнение $\cos 3x = \frac{1}{2}$ имеет решения

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}l\pi,\ l \in Z.$$

Следовательно, решениями исходного уравнения будут

$$x_1 = \pi k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}l\pi;\ k \in Z,\ l \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}l\pi$; $k \in Z$, $l \in Z$.

2. Обозначив $7^{\frac{1}{8}x^2 - x}$ через y, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{1}{y} < 7y + 6. \qquad (2)$$

Поскольку $7^{\frac{1}{8}x^2 - x} > 0$ для любого x, то будем решать неравенство (2) на множестве $y > 0$.

На этом множестве неравенство (2) равносильно неравенству

$$1 < 7y^2 + 6y,$$

множество решений которого состоит из двух промежутков $y < -1$ и $y > \frac{1}{7}$.

Следовательно, неравенство, данное в условии задачи, равносильно неравенству

$$7^{\frac{1}{8}x^2-x} > 7^{-1},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{1}{8}x^2 - x > -1.$$

Множество решений последнего неравенства, а значит, и исходного неравенства, состоит из двух промежутков $-\infty < x < 4 - 2\sqrt{2}$ и $4 + 2\sqrt{2} < x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < 4 - 2\sqrt{2}$; $4 + 2\sqrt{2} < x < +\infty$.

3. Поскольку $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ и $-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1$, то график первой параболы лежит не ниже прямой $y = -1$, а график второй параболы лежит не выше этой прямой (рис. 90).

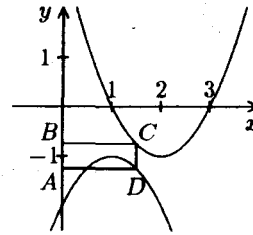


Рис. 90

Обозначим через x абсциссу вершины D, а через $S(x)$ — площадь прямоугольника $ABCD$.

Так как длина стороны CD равна $x^2-4x+3 = -(-x^2+2x-2) = 2x^2 - 6x + 5$, то площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S(x) = AD \cdot CD = x(2x^2 - 6x + 5) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$. Задача сводится к нахождению такого значения x из промежутка $\frac{4}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$, при котором функция $S(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$ принимает наибольшее значение.

Критические точки функции $S(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$ найдем, решая уравнение $S'(x) = 0$, т. е. уравнение $6x^2 - 12x + 5 = 0$.

Корни этого уравнения есть $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$ и $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$, а знаки производной $S'(x)$ распределены так, как указано на рис. 91. В частности, на интервале (x_1, x_2) функция $S(x)$ убывает, а на интервале $(x_2, +\infty)$ возрастает. Поскольку

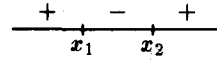


Рис. 91

$\frac{4}{5} - x_1 = \frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{5} > 0$;

$\frac{4}{5} < 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$; $1 + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{2} < 0$, то $x_1 < \frac{4}{5}$, а $\frac{4}{5} < x_2 < \frac{3}{2}$.

Следовательно, только $x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$ принадлежит отрез-

ку $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right]$, на множестве $\left[\frac{4}{5}; x_2\right)$ функция $S(x)$ убывает, а на множестве $\left(x_2; \frac{3}{2}\right]$ возрастает. Из непрерывности $S(x)$ теперь следует, что ее наибольшее значение на отрезке $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right]$ достигается в одной из концевых точек этого отрезка.

Так как $S\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{148}{125}$, $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$, то из неравенства $\frac{148}{125} > \frac{3}{4}$ получаем, что наибольшее значение $S(x)$ на отрезке $\left[\frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right]$ достигается при $x = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

4. Пусть S — вершина заданной пирамиды, ромб $ABCD$ — ее основание, точка O — центр шара, а O_1 — точка пересечения диагоналей ромба (рис. 92).

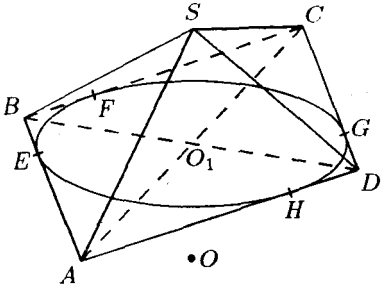


Рис. 92

Так как все стороны ромба касаются шара, то сечение шара плоскостью ромба есть круг, вписанный в этот ромб.

Пусть E, F, G и H — точки, в которых стороны ромба AB, BC, CD и AD соответственно касаются окружности сечения. Поскольку плоскости боковых граней пирамиды касаются сферы, то прямые SE, SF, SG и SH имеют со сферой только по одной общей точке.

Докажем, что $SE = SF = SG = SH$. Через точки S, E и F проведем плоскость. Эта плоскость пересечет сферу по окружности, к которой SE и SF будут касательными. Отсюда следует, что $SE = SF$ (по теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из общей точки).

Аналогично, проведя плоскости через точки S, F, H и S, H, E, получим $SF = SH$, $SH = SE$, откуда следует утверждение.

Поскольку длины наклонных SE, SF, SG и SH равны, то равны и их проекции на плоскость ромба, т. е. вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от точек E, F, G, H, т. е. в центр окружности, вписанной в ромб $ABCD$. Так

как O_1 есть точка пересечения биссектрис всех углов ромба, то O_1 есть центр вписанной окружности, и, значит, высота пирамиды проходит через точку O_1 пересечения диагоналей основания.

Возьмем любые две точки M и N на окружности, вписанной в ромб. Так как $OM = ON$, то проекции наклонных OM и ON на плоскость $ABCD$ равны. Следовательно, центр шара проектируется в центр окружности, вписанной в ромб, т. е. проектируется в точку O_1.

Итак, прямая, проходящая через вершину пирамиды и центр шара, перпендикулярна плоскости ромба и проходит через точку пересечения его диагоналей.

Так как O_1E и O_1G есть радиусы вписанной в ромб $ABCD$ окружности (рис. 93), проведенные в точки касания с прямыми AB и CD соответственно, то $O_1E \perp AB$ и $O_1G \perp CD$. Поскольку $AB \parallel CD$, заключаем, что точки E, O_1 и G лежат на одной прямой и EG — высота ромба. Отсюда также следует, что $EG = AD \cdot \sin(\angle BAD) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ и $O_1E = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Проведем сечение через точки S, O и E (рис. 94). Поскольку

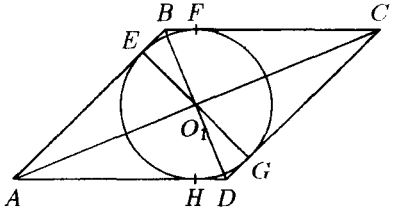


Рис. 93

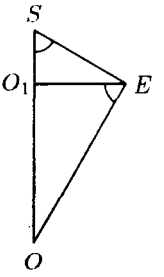


Рис. 94

OE есть радиус сферы, проведенный в точку касания ее с прямой SE, то $OE \perp SE$. В силу перпендикулярности прямой SO и плоскости $ABCD$ заключаем, что $SO \perp O_1E$. Из треугольника OO_1E находим

$$OO_1 = \sqrt{OE^2 - O_1E^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников OO_1E и SO_1E имеем $\frac{SO_1}{O_1E} = \frac{O_1E}{OO_1}$, откуда $SO_1 = \frac{O_1E^2}{OO_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Площадь T ромба равна $AB \cdot EG = 2\sqrt{2}$, а объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}T \cdot SO_1 = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ см^3.

5. Обозначим $u = x - y$ и $v = \log_2(|x| + y + 1)$. В этих обозначениях исходная система уравнений может быть переписана так:

$$\begin{cases} |u| - v^2 + 6 = 0, \\ u^2 - 6uv + 5v^2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем мы решим эту систему относительно переменных u, v, а затем для каждого найденного решения (u_0, v_0) будем решать систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = u_0, \\ \log_2(|x| + y + 1) = v_0. \end{cases} \tag{4}$$

Так будут определены все решения исходной системы уравнений. Отметим сразу, что система (4) разрешима не при любых u_0 и v_0. Действительно, если (x_0, y_0) — решение системы (4), то

$$2^{v_0} + u_0 = (|x_0| + y_0 + 1) + (x_0 - y_0) = |x_0| + x_0 + 1 \geqslant 1.$$

В последнем неравенстве был использован тот факт, что сумма $|x| + x$ при любом x неотрицательна. Итак, мы будем искать решения системы (3), удовлетворяющие условию

$$2^v + u \geqslant 1. \tag{5}$$

Перейдем теперь к решению системы (3).

Из тождества

$$u^2 - 6uv + 5v^2 = (u^2 - uv) - (5uv - 5v^2) = (u - v)(u - 5v)$$

следует, что система уравнений (3) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} |u| - v^2 + 6 = 0, \\ u - v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |u| - v^2 + 6 = 0, \\ u - 5v = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Решим первую систему (6).

Из второго уравнения этой системы следует, что $u = v$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем квадратное уравнение относительно $|v|$

$$|v|^2 - |v| - 6 = 0. \tag{7}$$

Корни квадратного трехчлена $t^2 - t - 6$ равны $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$. Поэтому уравнение (7) равносильно совокупности уравнений

$$|v| = -2 \quad \text{и} \quad |v| = 3.$$

Первое из них не имеет решений. Значит, первая система (6) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} |v| = 3, \\ u = v, \end{cases}$$

имеющей два решения $v_1 = 3$, $u_1 = 3$ и $v_2 = -3$, $u_2 = -3$. Второе из них не удовлетворяет условию (5).

Решим вторую систему (6). Из второго уравнения этой системы следует, что $u = 5v$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем квадратное уравнение относительно $|v|$:

$$|v|^2 - 5|v| - 6 = 0. \qquad (8)$$

Корни квадратного трехчлена $t^2 - 5t - 6$ равны $t_1 = -1$ и $t_2 = 6$. Поэтому уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$|v| = -1 \quad \text{и} \quad |v| = 6.$$

Первое из них не имеет решений. Значит, вторая система (6) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} |v| = 6, \\ u = 5v, \end{cases}$$

имеющей два решения $v_3 = 6$, $u_3 = 30$; $v_4 = -6$, $u_4 = -30$. Второе из них не удовлетворяет условию (5).

Итак, система уравнений (3) имеет два решения $(3;3)$ и $(30;6)$, удовлетворяющих условию (5).

При $u_0 = 3$, $v_0 = 3$ система уравнений (4) может быть переписана так:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ |x| + y + 1 = 8. \end{cases} \qquad (9)$$

Выражая y из первого уравнения этой системы через x и подставляя во второе уравнение, получим уравнение относительно x

$$|x| + x = 10.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = 5$. Соответствующее значение y находим из первого уравнения системы (9): $y_1 = x_1 - 3 = 2$.

При $u_0 = 30$, $v_0 = 6$ система уравнений (4) может быть переписана так:

$$\begin{cases} x - y = 30, \\ |x| + y + 1 = 64. \end{cases}$$

Решая эту систему так же, как и систему (9), находим ее единственное решение $x_2 = \dfrac{93}{2}$ и $y_2 = \dfrac{33}{2}$.

Итак, все решения (x, y) исходной системы уравнений содержатся среди двух пар чисел $(5;2)$ и $\left(\dfrac{93}{2}; \dfrac{33}{2}\right)$. Проверкой убеждаемся, что обе пары действительно являются решениями исходной системы уравнений.

Ответ: $(5;2)$, $\left(\dfrac{93}{2}; \dfrac{33}{2}\right)$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{30}+\frac{1}{5}\pi k,\ k\in Z.$

2. $-\infty<x<3-\sqrt{3};\ 3+\sqrt{3}<x<+\infty.$ 3. $\frac{3}{5}.$ 4. $\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$ см^3.

5. $(3;10);\ (-20;36).$

Вариант 3. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z.$

2. $-\infty<x<4-2\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3}<x<+\infty.$ 3. $\frac{3}{2}.$ 4. $4\sqrt{2}$ см^3.

5. $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right);\ (3;0).$

Вариант 4. 1. $\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{36}+\frac{1}{6}\pi k,\ k\in Z.$

2. $-\infty<x<3-\sqrt{6};\ 3+\sqrt{6}<x<+\infty.$ 3. $\frac{5}{2}.$ 4. $\frac{160\sqrt{5}}{3}$ см^3.

5. $(1;10);\ \left(-120;\frac{115}{2}\right).$

1986

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех значений x, удовлетворяющих условиям $x-3>0$ и $x-2>0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $3<x<+\infty$.

На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)=1$$

или уравнению

$$(x-3)(x-2)=2.$$

Последнее уравнение имеет два корня $x_1=4$ и $x_2=1$. Из них в область $3<x<+\infty$ входит только $x_1=4$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=4$.

Ответ: $x=4$.

2. Обозначим через t время в часах, за которое три насоса могут наполнить второй танкер, а через V — объем второго танкера. Тогда производительность одного насоса равна $\frac{V}{3t}$. За 11 часов работы 4 насоса наполнят объем, равный $\frac{11\cdot4\cdot V}{3t}$, следовательно, объем первого танкера равен

$$\frac{44V}{3t}-\frac{V}{3}. \qquad (1)$$

Один насос может наполнить второй танкер за $3t$ часов, а четверть второго танкера — за $\frac{3t}{4}$ часов. Следовательно, три насоса

могут наполнить первый танкер за $\left(18-\frac{3t}{4}\right)$ часов. Учитывая, что производительность одного насоса равна $\frac{V}{3t}$, заключаем, что объем первого танкера равен

$$3\cdot\frac{V}{3t}\left(18-\frac{3}{4}t\right). \qquad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2) для объема первого танкера и сокращая на V, получаем следующее уравнение

$$\frac{44}{3t}-\frac{1}{3}=\frac{18}{t}-\frac{3}{4}.$$

Это уравнение имеет единственное решение $t=8$.

Ответ: 8 часов.

3. Данную функцию можно представить в виде

$$f(x)=\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=\sin x\cos^2 x-\sin^2 x\cos x.$$

Ее производная равна $f'(x)=\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x-2\sin x\cos^2 x+$ $+\sin^3 x=\cos^3 x+\sin^3 x-2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)=$ $=(\sin x+\cos x)(\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x-2\sin x\cos x)$.

Так как при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выражение $\sin x+\cos x$ положительно, то значения x из интервала $0<x<\frac{\pi}{2}$, при которых производная равна 0, есть решения уравнения

$$\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0,$$

попавшие в этот интервал.

Поскольку $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, то это уравнение равносильно уравнению $\sin 2x=\frac{2}{3}$, откуда либо $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$, $k\in Z$, либо $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\pi l$, $l\in Z$.

Из этих значений x промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат только значения $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

4. Пусть ABC (рис. 95) — треугольник, заданный в условии задачи, G — середина отрезка AC.

Так как по условию $AB=BC$, то BG есть высота треугольника ABC. С помощью теоремы Пифагора находим

$$BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{AB^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}.$$

Далее,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BG = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{55} = 3\sqrt{55}.$$

Справедливо следующее равенство (рис. 96):

$$S_{BDOE} = S_{BCE} - S_{ODC}. \qquad (3)$$

Вычислим площади треугольников BCE и ODC. Треугольники ABC и BCE имеют общую вершину C и, следовательно, одинаковую высоту h, опущенную из вершины C. Поэтому

$$S_{BCE} = \frac{1}{2}BE \cdot h = \frac{BE}{AB} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{BE}{AB} \cdot S_{ABC}.$$

Так как $AB = 8$ и $BE = AB - AE = 6$, то

$$S_{BCE} = \frac{6}{8} \cdot S_{ABC} = \frac{9}{4}\sqrt{55}. \qquad (4)$$

Аналогично можно вычислить площадь треугольника ADC:

$$S_{ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{8} \cdot 3\sqrt{55} = \frac{3}{8}\sqrt{55}$$

и площадь треугольника ODC:

$$S_{ODC} = \frac{OD}{AD} \cdot S_{ADC} = \frac{OD}{AD} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{55}. \qquad (5)$$

Осталось вычислить отношение $\frac{OD}{AD}$. Для этого из точки E проведем прямую EF параллельно AD (рис. 96). Тогда $\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{AE}$, и так как $AE = 2$, $BE = 6$ и $BF = BC - CD - FD = 7 - FD$, получаем уравнение

$$\frac{7 - FD}{FD} = \frac{6}{2},$$

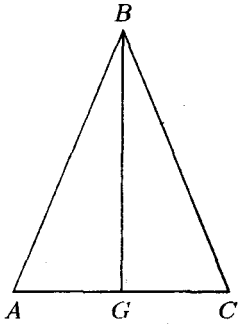


Рис. 95

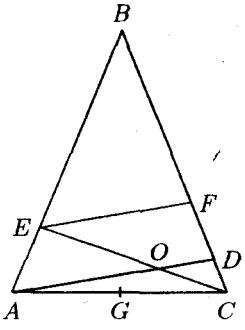


Рис. 96

из которого следует, что $FD = \frac{7}{4}$.

Треугольники EBF и ABD подобны, поэтому

$$\frac{EF}{AD} = \frac{BE}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \tag{6}$$

Из подобия треугольников ODC и EFC имеем

$$\frac{OD}{EF} = \frac{CD}{FC} = \frac{1}{\frac{7}{4}+1} = \frac{4}{11}. \tag{7}$$

Перемножая равенства (6) и (7), получаем

$$\frac{OD}{AD} = \frac{EF}{AD}\cdot\frac{OD}{EF} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11} = \frac{3}{11}.$$

Теперь из (5) следует, что

$$S_{ODC} = \frac{3}{11}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{55} = \frac{9}{88}\sqrt{55},$$

и с помощью равенств (3) и (4) находим, что

$$S_{BDOE} = \frac{9}{4}\sqrt{55} - \frac{9}{88}\sqrt{55} = \frac{189\sqrt{55}}{88}.$$

Ответ: $\frac{189\sqrt{55}}{88}$.

5. Обозначим

$$u = \sqrt{|x-1|} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{7|y|}. \tag{8}$$

Тогда исходная система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = -4a. \end{cases} \tag{9}$$

Заметим также, что выполняются неравенства

$$u \geqslant 0 \quad \text{и} \quad v \geqslant 0. \tag{10}$$

Если u_0, v_0 — какое-либо решение системы (9), удовлетворяющее неравенствам (10), то из формул (8) следует, что исходная система будет иметь следующие решения

$$\begin{gathered} \left(1+u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \quad \left(1+u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right), \\ \left(1-u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right), \quad \left(1-u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Пара чисел $u = v_0$, $v = u_0$ также удовлетворяет равенствам (9) и неравенствам (10). Поэтому решениями исходной системы уравнений будут и следующие пары чисел:

$$\left(1+v_0^2, \frac{u_0^2}{7}\right), \quad \left(1+v_0^2, -\frac{u_0^2}{7}\right),$$
$$\left(1-v_0^2, \frac{u_0^2}{7}\right), \quad \left(1-v_0^2, -\frac{u_0^2}{7}\right). \tag{12}$$

Если параметр a принимает значение, удовлетворяющее условию задачи, то среди выписанных восьми пар чисел (11) и (12) должно быть только четыре различных. Легко проверить, что это возможно лишь тогда, когда $u_0 = 0$, или $v_0 = 0$, или $u_0 = v_0$.

Учитывая, что пара чисел (u_0, v_0) должна удовлетворять первому уравнению системы (9), заключаем, что если для некоторого значения a выполняется условие задачи, то системе (9) обязательно должна удовлетворять по крайней мере одна из трех пар чисел $(0; 1)$, $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Подставляя указанные пары во второе уравнение системы (9), убеждаемся, что это возможно только при $a = -\frac{1}{4}$ и $a = -\frac{1}{32}$. Итак, все искомые значения параметра a содержатся среди двух чисел: $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{32}$.

Рассмотрим систему (9) при $a = -\frac{1}{32}$

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = \frac{1}{8}. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначив $t = uv$, будем иметь

$$u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = 1 - 2t,$$
$$u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = (1-2t)^2 - 2t^2 = 1 - 4t + 2t^2.$$

Следовательно, t удовлетворяет квадратному уравнению

$$1 - 4t + 2t^2 = \frac{1}{8},$$

т. е. уравнению $2t^2 - 4t + \frac{7}{8} = 0$. Это уравнение имеет два корня $t_1 = \frac{1}{4}$ и $t_2 = \frac{7}{4}$. Нас интересуют неотрицательные решения u, v системы (13). Из первого уравнения (13) следует, что должны выполняться неравенства $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, и, значит, $t \leqslant 1$.

Следовательно, $t = \frac{1}{4}$ и все неотрицательные решения системы (13) содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ uv = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, с помощью метода подстановки, находим, что она имеет единственное решение $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что эта пара чисел удовлетворяет и системе уравнений (13). Для нее среди решений (11), (12) исходной системы имеется ровно четыре различных $\left(\frac{5}{4}; \pm\frac{1}{28}\right)$, $\left(\frac{3}{4}; \pm\frac{1}{28}\right)$. Решая так же систему (9) при $a = -\frac{1}{4}$, убеждаемся, что она имеет только два решения $(0; 1)$ и $(1; 0)$ в неотрицательных числах. Для них среди решений (11), (12) исходной системы имеется ровно четыре различных $(0; 0)$, $(2; 0)$, $\left(1; \pm\frac{1}{7}\right)$. Итак, оба числа $-\frac{1}{32}$ и $-\frac{1}{4}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $-\frac{1}{32}; -\frac{1}{4}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = 9$. 2. 9 час.
3. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$, $\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$. 4. 4. 5. $\frac{1}{16}; \frac{1}{128}$.

Вариант 3. 1. $x = 2$. 2. 15 час.
3. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$. 4. $\frac{280\sqrt{65}}{117}$. 5. $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}$.

Вариант 4. 1. $x = 5$. 2. 8 час.
3. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$, $\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$. 4. $\frac{9}{5}$. 5. $\frac{1}{8}; \frac{1}{64}$.

1987

Решение варианта 1

1. Применяя формулу синуса двойного угла

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

исходное уравнение можно переписать в виде

$$(1 + 2\sin x)(\cos x - \sin x) = 0,$$

откуда ясно, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$1 + 2\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x - \sin x = 0.$$

Первое уравнение полученной совокупности уравнений равносильно уравнению

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

решения которого есть $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Второе уравнение совокупности равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

решения которого есть $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.

Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, и $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x > 0$; $x - 1 > 0$; $\frac{x^2}{x-1} > 0$, т. е. ОДЗ есть множество всех x из промежутка $x > 1$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$4\log_2 x + 2\log_2 x - 3 - \log_2(x-1) \leqslant 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x$$

или неравенству

$$\log_2^2 x + 6\log_2 x - 7 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Обозначив $\log_2 x$ через z, перепишем неравенство (1) в виде

$$z^2 + 6z - 7 \leqslant 0.$$

Решение этого неравенства есть все z из промежутка $-7 \leqslant z \leqslant 1$. Следовательно, неравенство (1) равносильно двойному неравенству

$$-7 \leqslant \log_2 x \leqslant 1,$$

имеющему решениями все x из промежутка $2^{-7} \leqslant x \leqslant 2$. Из этих x в ОДЗ исходного неравенства входят все x из промежутка $1 < x \leqslant 2$. Они и будут решениями исходного неравенства.

Ответ: $1 < x \leqslant 2$.

3. Пусть треугольник AOB образован отрезком AB касательной к графику, проведенной в точке (a, a^2+2a+1), и отрезками OB и AO на осях координат (рис. 97). Площадь треугольника AOB равна $\dfrac{BO \cdot AO}{2}$. Так как касательная к графику кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет уравнение $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, то прямая AB — касательная к параболе $y = x^2+2x+1$ в точке (a, a^2+2a+1) — имеет уравнение $y-(a^2+2a+1) = (2a+2)(x-a)$.

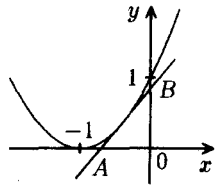


Рис. 97

Поскольку точки A и B лежат на пересечении этой прямой с осями координат, то координаты точек A и B есть

$$A\left(\frac{a-1}{2}; 0\right) \quad \text{и} \quad B(0; -a^2+1).$$

Следовательно, $S(a)$ — площадь треугольника AOB — находится по формуле

$$S(a) = \frac{|a-1|(1-a^2)}{4}.$$

Теперь ясно, что задача сводится к следующей: найти значения $a \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$, такие, что функция $S_1(a) = (1-a)(1-a^2) = a^3 - a^2 - a + 1$ принимает наибольшее значение. Чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке $[c; d]$, надо вычислить значения функции в ее критических точках, принадлежащих интервалу $(c; d)$, вычислить значения в концевых точках $x = c$ и $x = d$ и среди полученных чисел выбрать наибольшее.

Так как на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ функция $S_1(a)$ есть многочлен $a^3 - a^2 - a + 1$, то она на нем дифференцируема, и ее критические точки есть корни уравнения $S_1'(a) = 0$. Поскольку $S_1'(a) = 3a^2 - 2a - 1$, то $S_1'(a) = 0$ при $a_1 = 1$ и $a_2 = -\dfrac{1}{3}$. Из этих значений a в промежуток $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ попадает только

$a_2 = -\frac{1}{3}$. Следовательно, надо сравнить значения функции $S_1(a)$ в точках $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$ и $a_3 = 0$. Имеем $S_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$, $S_1\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, $S_1(0) = 1$. Поскольку $\frac{32}{27} > \frac{9}{8} > 1$, то наибольшее значение площади требуемого в условии задачи треугольника достигается при $a = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{3}$.

4. Так как $AD \perp DC$ и $AD \perp DF$, то ребро AD перпендикулярно плоскости DFC, и, значит, плоскости $ABCD$ и DFC перпендикулярны. Так как прямая EO перпендикулярна плоскости $ABCD$, то плоскость AFC перпендикулярна плоскости $ABCD$. Следовательно, прямая FC — пересечение двух плоскостей, перпендикулярных к ABC, — перпендикулярна плоскости ABC (рис. 98).

Так как точка O находится на AC, а точка E — на AF, то EO лежит в плоскости AFC. Поэтому треугольники AOE и AFC подобны, так как они прямоугольные и имеют общий угол A. Поэтому

$$\frac{EO}{OC} = \frac{AO}{AC} = \frac{AO}{AO+OC} = \frac{AO}{OC} : \left(\frac{AO}{OC} + 1\right) = \frac{\gamma}{\gamma+1},$$

откуда $EO = \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot FC$. Поскольку S_{ABD} равна $\frac{1}{2}S$, половине площади квадрата $ABCD$, то V_1 — объем пирамиды $ABDE$ — равен

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot EO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot FC.$$

Так как V — объем пирамиды $FABCD$ — равен $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot FC$, то $V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+1} V$. Следовательно,

$$V - V_1 = V \cdot \frac{\gamma+2}{2(\gamma+1)}.$$

Теперь надо найти V — объем пирамиды $FABCD$.

Рассмотрим сечение пирамиды $FABCD$ плоскостью AFC (рис. 99). В сечении получится прямоугольный треугольник AFC. Поскольку $\frac{AC}{OC} = \frac{AO+OC}{OC} = \gamma + 1$ и так как $AC = a\sqrt{2}$, то

$$OC = \frac{a\sqrt{2}}{\gamma+1}, \quad AO = \frac{a\sqrt{2}\gamma}{\gamma+1}.$$

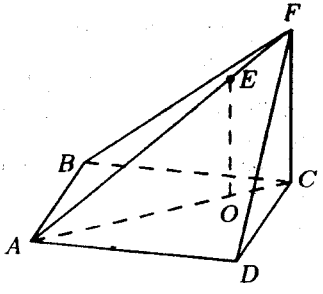


Рис. 98

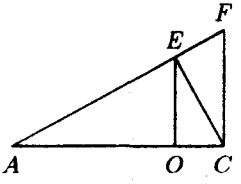


Рис. 99

Так как треугольник AEC прямоугольный и EO — его высота, опущенная из вершины прямого угла, то $EO^2=AO\cdot OC$, т. е. $OE = \sqrt{AO\cdot OC} = \dfrac{a\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}{\gamma+1}$. Поскольку треугольники AOE и AFC подобны, то $\dfrac{FC}{EO} = \dfrac{AC}{AO}$, откуда

$$FC = \frac{EO\cdot AC}{AO} = \left(\frac{a\sqrt{2}\sqrt{\gamma}}{\gamma+1}\cdot a\sqrt{2}\right) : \left(\frac{a\sqrt{2}\gamma}{\gamma+1}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Поскольку $S = a^2$, то $V = \dfrac{1}{3}S\cdot FC = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} = \dfrac{a^3}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\gamma}}$, и искомая разность объемов равна $\dfrac{1}{6}\dfrac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\cdot\dfrac{\gamma+2}{\gamma+1}$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}\dfrac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\cdot\dfrac{\gamma+2}{\gamma+1}$.

5. Множество решений неравенства $x^2 \leqslant 1$ есть промежуток $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Если значение параметра p принадлежит интервалу $0<p<2$, т. е. удовлетворяет неравенству $p(p-2) < 0$, то множество решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0 \qquad (2)$$

содержит точку $x = 0$, удовлетворяющую неравенству $x^2 \leqslant 1$, и потому все p из интервала $0 < p < 2$ не удовлетворяют условию задачи.

Если значение параметра p принадлежит интервалу $1<p<3$, т. е. удовлетворяет неравенству $(p-1)(p-3) < 0$, то множество решений неравенства (2) содержит точку $x = -1$, удовлетворяющую неравенству $x^2 \leqslant 1$, и потому все p из интервала $1 < p < 3$ не удовлетворяют условию задачи.

Итак, все искомые значения параметра p содержатся в двух промежутках $p \leqslant 0$ и $p \geqslant 3$.

Если выполнено неравенство $p \leqslant 0$, то при любом значении x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ имеем $p - x^2 \leqslant -x^2 \leqslant 0$ и $p + x - 2 \leqslant x - 2 \leqslant -1$, так что $(p - x^2)(p + x - 2) \geqslant 0$. Значит, при $p \leqslant 0$ множество решений неравенства (1) не содержит ни одной точки отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и все $p \leqslant 0$ удовлетворяют условию задачи.

Если $p \geqslant 3$, то для любого x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем неравенства

$$p - x^2 \geqslant p - 1 \geqslant 2, \quad p + x - 2 \geqslant p - 2 - 1 \geqslant 0,$$

так что $(p - x^2)(p + x - 2) \geqslant 0$, т. е. левая часть неравенства (2) неотрицательна. Следовательно, ни одно x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ не является решением неравенства (2), и все значения p из области $p \geqslant 3$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $p \leqslant 0$, $p \geqslant 3$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.
2. $\frac{1}{2} < x \leqslant 3$. 3. $b = 1$. 4. $\frac{b^3}{12}\lambda\sqrt{\lambda(\lambda+1)}$.
5. $-\infty < q \leqslant 0$; $12 \leqslant q < +\infty$.

Вариант 3. 1. $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.
2. $2 < x \leqslant 9$. 3. $a = -\frac{2}{3}$. 4. $\frac{a^3(\gamma+1)^2(\gamma+2)}{12\gamma^2}$.
5. $p \leqslant 0$; $p \geqslant 3$.

Вариант 4. 1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.
2. $5 < x \leqslant 8$. 3. $b = \frac{4}{3}$. 4. $\frac{b^3}{12}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}$. 5. $q \leqslant 0$; $q \geqslant 12$.

1988

Решение варианта 1

1. Следствием исходного уравнения является уравнение

$$\log_5(x-8)^2 = \log_5 25(x-2)^2$$

или уравнение

$$(x-8)^2 = 25(x-2)^2. \qquad (1)$$

Корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней

уравнения (1) надо отобрать из них те, которые будут корнями исходного уравнения.

Уравнение (1) имеет два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Проверка показывает, что x_1 является корнем исходного уравнения, а x_2 — не является. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 3$.

Ответ: $x = 3$.

2. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} = -\sin x.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1 = \sin^2 x, \qquad (2)$$

являющееся следствием исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (2) надо проверить, какие из них являются корнями исходного уравнения.

Уравнение (2) можно переписать так:

$$\cos^2 x + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 2 = 0. \qquad (3)$$

Поскольку корни квадратного уравнения $z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}z - 2 = 0$ есть $z_1 = -2\sqrt{2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = -2\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, поскольку $-2\sqrt{2} < -1$. Решения второго уравнения совокупности есть $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$, и $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Следовательно, решения уравнения (2) составляют две серии: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$, и $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Проверим, какие из найденных x являются решениями исходного уравнения.

При любом $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$, левая часть исходного уравнения не равна 0, следовательно, любое $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$, не является решением исходного уравнения.

При любом $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, левая часть исходного урав-

нения равна нулю, следовательно, любое $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. Пусть $M(x; y)$ — точка графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$. Тогда расстояние $d(x)$ между этой точкой и точкой $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ находится по формуле

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2} - 1\right)^2}$$

и задача сводится к нахождению такого значения x, $-\infty < x < +\infty$, при котором функция $d(x)$ принимает наименьшее значение. Очевидно, что наименьшее значение функции $d(x)$ и функции $f(x) = d^2(x)$ принимается в одной и той же точке x. Поэтому рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2} - 1\right)^2.$$

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на всей прямой, то наименьшее ее значение принимается в одной из критических точек. Критическими точками функции $f(x)$ будут корни уравнения $f'(x) = 0$, т. е. корни уравнения

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right) + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2x = 0. \qquad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$4x^3 - \frac{1}{2} = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = \frac{1}{2}$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = \frac{1}{2}$ и производная $f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}$ слева от точки $x = \frac{1}{2}$ отрицательна, а справа — положительна, т. е. проходя через точку $x = \frac{1}{2}$, меняет знак с минуса на плюс, то $x = \frac{1}{2}$ является точкой минимума функции $f(x)$. Значит, при $x = \frac{1}{2}$ расстояние $d(x)$ от точки $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ на кривой наименьшее.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

4. Пусть ABC — данный в условии задачи треугольник. Обозначим через K и L точки касания данной окружности соответственно со сторонами AC и AB треугольника ABC (рис. 100).

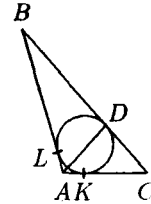


Рис. 100

Так как CD и KC — отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, то $DC = KC = AD$. Поскольку треугольник ADC равнобедренный, то $\angle DAC = \angle DCK$ и $\angle ADC = 180^\circ - 2\angle ACB$. По теореме синусов из треугольника ADC имеем

$$\frac{AC}{\sin(\angle ADC)} = \frac{AD}{\sin(\angle ACD)},$$

откуда, учитывая, что $\sin(\angle ADC) = \sin(180^\circ - 2\angle ACB) = \sin(2\angle ACB) = 2\sin(\angle ACB)\cdot\cos(\angle ACB)$, находим, что $AC = 2AD\cdot\cos(\angle ACD) = \frac{4}{3}AD$. Поскольку $AK = AL$, как отрезки касательных к окружности из общей точки A, то $AK = AL = \frac{4}{3}AD - AD = \frac{1}{3}AD$. Так как $BL = BD$, как отрезки касательных к окружности из общей точки B, то $BL = 9 - AD$ и $AB = 9 - AD + AL = 9 - \frac{2}{3}AD$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC, имеем

$$\left(9 - \frac{2}{3}AD\right)^2 = 9^2 + \left(\frac{4AD}{3}\right)^2 - 2\cdot 9\cdot\frac{4AD}{3}\cdot\frac{2}{3},$$

откуда $AD = 3$. Следовательно, $AC = \frac{4}{3}\cdot 3 = 4$.

Ответ: 4.

5. Решим первую систему.

Из первого уравнения $x = 2 - a - 2y$. Подставляя вместо x значение $2 - a - 2y$ во второе уравнение первой системы, имеем

$$-2 + a + 2y + ay = a - 2a^2$$

или

$$y(2 + a) = 2(1 - a^2).$$

Если $a = -2$, то имеем уравнение $y\cdot 0 = -6$, которое не имеет решений. Значит, и первая система при этом значении a также не имеет решений.

Если $a \neq -2$, то первая система имеет единственное решение.

Рассмотрим вторую систему.

При $a = -2$ ее второе уравнение можно записать в виде

$$y^2 + 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{71}{8} = 0, \qquad (5)$$

откуда следует, что нет x и y, удовлетворяющих равенству (5), а значит, при $a = -2$ вторая система также не имеет решений и, следовательно, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \neq -2$. Для равносильности систем необходимо и достаточно, чтобы вторая система также имела единственное решение. Если пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение второй системы, то в силу того, что в ее оба уравнения входит y в четной степени, пара чисел $(x_0; -y_0)$ также будет решением системы, и единственное решение вторая система может иметь, если оно имеет вид $(x_0; 0)$, т. е. если $y = 0$. Но тогда и первая система должна иметь решение $(x; y)$, у которого $y = 0$, а это означает, что возможные значения a удовлетворяют условию $a^2 - 1 = 0$, т. е. возможные значения a есть $a_1 = 1$ или $a_2 = -1$.

Если $a = -1$, то единственное решение $x = 3$, $y = 0$ первой системы будет и единственным решением второй системы. В самом деле, при $a = -1$ вторая система запишется в виде

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) = y^4, \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) следует, что $x = 3$, $y = 0$. Это единственная пара чисел, удовлетворяющая уравнениям системы (6). Следовательно, при $a = -1$ системы, данные в условии задачи, также равносильны.

Если же $a = 1$, то вторую систему, данную в условии задачи, можно записать в виде

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) = y^4, \\ 2(x-1)(x-3) + y^2 = 0, \end{cases}$$

откуда очевидно, что кроме решения $(3; 0)$ она имеет решение $(1; 0)$, в то время как при $a \neq -2$ первая система имеет единственное решение. Следовательно, при $a = 1$ системы, данные в условии задачи, не равносильны.

Итак, только $a = -2$ и $a = -1$ являются теми числами, при которых обе системы, данные в условии задачи, равносильны.

Ответ: $a = -2$; $a = -1$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = 3$. 2. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 4. 9. 5. $a = 2$; $a = 3$.

Вариант 3. 1. $x = 4$. 2. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. 4. 15. 5. $a = 0$; $a = \frac{1}{2}$.

Вариант 4. 1. $x = 9$. 2. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$. 4. 5. 5. $a = 1$; $a = 4$.

1989

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{x+2}{x-1} > 0, \tag{1}$$

равносильное исходному. Применяя метод интервалов, получаем, что решением неравенства (1), а значит, и исходного, являются все x из объединения двух промежутков $-\infty < x < -2$ и $1 < x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < -2$; $1 < x < +\infty$.

2. Обозначим через d разность прогрессии, тогда $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{15} = a_1 + 14d$, $a_9 = a_1 + 8d$. Поскольку $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$, то $a_1 + a_5 + a_{15} = 3(a_1 + 6d) = 3$, откуда $a_1 + 6d = 1$. Выражение $a_5 + a_9$ равно $a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2(a_1 + 6d)$, и в силу полученного соотношения $a_1 + 6d = 1$ получаем, что $a_5 + a_9 = 2$.

Ответ: 2.

3. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$3\sin x - \cos x > 0 \quad \text{и} \quad \cos x > 0. \tag{2}$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(3\sin x - \cos x)\cos x = 1. \tag{3}$$

Применяя тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, можно переписать уравнение (3) в виде

$$3\sin x \cos x - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x. \tag{4}$$

Поскольку для любого решения x уравнения (4) $\cos x \neq 0$ (иначе $\sin x = 0$), то разделив уравнение (4) на $\cos^2 x$, получим уравнение

$$\operatorname{tg} x - 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1,$$

равносильное уравнению (4). Это уравнение можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $z^2 - 3z + 2 = 0$ имеет корни $z_1 = 2$ и $z_2 = 1$, то уравнение (4) равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Решение этой совокупности есть $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$, и $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$. Проверим, какие из полученных x входят в ОДЗ исходного уравнения.

Поскольку для $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi l$, $l \in Z$, и $x = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, имеем, что $\cos x < 0$ (эти углы в третьей четверти), то эти x не являются решениями исходного уравнения.

Теперь проверим значения $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi p$, $p \in Z$, и $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi r$, $r \in Z$.

При любых целых p и r углы

$$x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi p \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi r \tag{5}$$

лежат в первой четверти и потому удовлетворяют неравенству $\cos x > 0$. Эти углы удовлетворяют также уравнению (3), значит, для них выполняется и неравенство $3\sin x - \cos x > 0$.

Итак, все углы (5) лежат в ОДЗ и, следовательно, составляют множество решений исходного уравнения.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi p$, $p \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi r$, $r \in Z$.

4. Обозначим через K точку пересечения прямых BC и AA'. Будем еще обозначать $AD = x$, $BD = y$ (рис. 101). Так как точка A' симметрична точке A относительно прямой KC, то $AA' \perp KC$ и $A'K = AK$. Поэтому KB — средняя линия треугольника $AA'D$. Значит, $A'B = AB = y$, $KB = \frac{x}{2}$. Так как $A'AD$ — прямоугольный треугольник и AB — его медиана, то $AB = BD = A'B = y$. Поскольку $\sin(\angle ABA') = \sin(\angle ABD)$, то площади треугольников ABD и ABA' равны (они равны соответственно $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot \sin(\angle ABD)$, $S_{ABA'} = \frac{1}{2}AB \cdot A'B \cdot \sin(\angle ABA')$). Очевидно, что $S_{ABD} = S_{BDC} = S_{BD'C} = S_{A'D'B}$. Поэтому S — площадь пятиугольника $ADCD'A'$ — равна $5S_{AA'B}$. Так как $S = 15\sqrt{2}$, то

$$S_{AA'B} = 3\sqrt{2}. \tag{6}$$

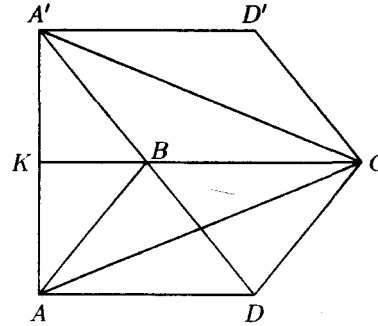


Рис. 101

Из прямоугольного треугольника AKC находим, что $AK = \frac{3}{2}x\,\mathrm{tg}\,\frac{45^\circ}{2}$, а тогда $S_{AA'B} = BK\cdot AK\cdot\frac{3x^2}{4}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{45^\circ}{2}$, и из (6) имеем $x = 2\sqrt{\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{45^\circ}{2}}$. Поскольку $\mathrm{ctg}\,\frac{45^\circ}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{1-\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})$, то $x = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Из треугольника KAB имеем

$$y = \sqrt{AK^2+KB^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{45^\circ}{2}+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\,\frac{45^\circ}{2}+1} =$$
$$= \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 2}{(2+\sqrt{2})^2}+1} = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

5. Рассмотрим функцию

$$f(z) = z(2+\sqrt{z^2+3}).$$

Эта функция определена на всей прямой и является нечетной, поскольку $f(-z) = -z(2+\sqrt{(-z)^2+3}) = -[z(2+\sqrt{z^2+3})] = -f(z)$. Для $z \geqslant 0$ функция $f(z)$ является строго возрастающей, как произведение двух возрастающих функций. Значит, она строго возрастает и на промежутке $(-\infty; 0]$, т. е. строго возрастает на всей прямой.

Данное в условии задачи уравнение можно переписать в виде

$$f(2x+1)+f(3x) = 0$$

или, учитывая, что f — нечетная функция, в виде

$$f(2x+1)-f(-3x) = 0$$

или, наконец, в виде

$$f(2x+1) = f(-3x).$$

Так как значения функции равны, то отсюда, в силу строгой монотонности функции, следует, что и аргументы равны, т. е. $2x+1 = -3x$, откуда $x = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-4 < x < 1$. 2. ± 64. 3. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \operatorname{arcctg} 3 + 2\pi k$, $k \in Z$. 4. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4}{\sqrt{5}}$. 5. $-\frac{1}{7}$.

Вариант 3. 1. $-\infty < x < -3$; $4 < x < +\infty$. 2. 9. 3. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$, $k \in Z$. 4. $2\sqrt{3\sqrt{3}}$. 5. $-\frac{1}{7}$.

Вариант 4. 1. $-1 < x < 1$. 2. 4. 3. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in Z$. 4. 2; $2\sqrt{3}$. 5. $-\frac{1}{3}$.

§5. Биологический факультет

1984

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{x^2-6x+6}{1-x}<0, \qquad (1)$$

равносильное исходному.

Поскольку корни квадратного уравнения $x^2-6x+6=0$ есть $x_1=3+\sqrt{3}$ и $x_2=3-\sqrt{3}$, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$\frac{(x-(3+\sqrt{3}))(x-(3-\sqrt{3}))}{x-1}>0.$$

С помощью метода интервалов находим, что множество решений этого неравенства, а следовательно, и исходного неравенства, состоит из двух промежутков $3+\sqrt{3}<x<+\infty$ и $1<x<3-\sqrt{3}$.

Ответ: $3+\sqrt{3}<x<+\infty$; $1<x<3-\sqrt{3}$.

2. Применяя формулы $\sin\left(\frac{7}{2}\pi+x\right)=\sin\left(x+4\pi-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=-\cos x$ и $2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$, исходное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x+3\cos x+2=0.$$

Квадратное уравнение $z^2+3z+2=0$ имеет корни $z_1=-2$ и $z_2=-1$.

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x=-2 \quad \text{и} \quad \cos x=-1.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $|\cos x|\leqslant 1$ для любого действительного числа x. Второе уравнение имеет решения $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

3. Обозначим выражение $\frac{2x+1}{2x-1}$ буквой y. В силу тождества

$$1-\frac{8x}{(2x+1)^2}=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2$$

исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{4+2\log_2\frac{1}{y^2}}=\log_2 y+2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Все решения получившегося уравнения (2) относительно неизвестной y лежат в области $y > 0$. В этой области

$$\log_2 \frac{1}{y^2} = 2\log_2 \frac{1}{y} = -2\log_2 y.$$

Учитывая, что $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, уравнение (2) перепишем в виде

$$\sqrt{4 - 4\log_2 y} = \log_2 y - 1. \qquad (3)$$

Выражение, стоящее под знаком радикала в левой части уравнения (3), должно быть неотрицательным, поэтому $\log_2 y \leqslant 1$. В то же время правая часть уравнения (3) также должна быть неотрицательна, т. е. $\log_2 y \geqslant 1$. Отсюда следует, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$\log_2 y = 1,$$

имеющему единственный корень $y = 2$, удовлетворяющий условию $y > 0$.

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2x+1}{2x-1} = 2,$$

имеющему единственный корень $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

4. Обозначим буквой M середину ребра CS пирамиды, а буквами L и N — точки, в которых данное в условии задачи сечение пирамиды пересечет ребра BS и DS соответственно (рис. 102). Обозначим буквой O основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. По условию высота пирамиды проходит через центр E ромба $ABCD$ и потому лежит в плоскости ASC. Следовательно, плоскость ASC перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Точка M лежит в плоскости ASC, значит, и прямая MO, перпендикулярная плоскости, также лежит в плоскости ASC, и, в частности, точка O лежит на отрезке AC.

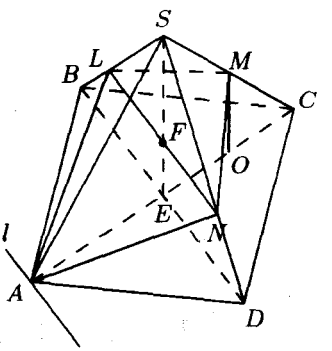


Рис. 102

Обозначим буквой l прямую, по которой заданная в условии задачи плоскость сечения пересекает плоскость $ABCD$, и буквой R — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l (рис. 103). По теореме о трех перпендикулярах $OR \perp AR$, и, значит, угол MRO есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды. Ввиду условия задачи $\angle MRO = \frac{\pi}{4}$. Треугольник MOR прямоугольный, поэтому $\angle RMO = \frac{\pi}{2} - \angle MRO = \frac{\pi}{4}$, и, значит, $OR = OM$. Поскольку $OM \parallel ES$ и M — середина отрезка CS, то $OM = \frac{1}{2}ES$, и ввиду условия задачи $OM = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}a = \frac{9}{8}a$. Итак, $OR = OM = \frac{9}{8}a$. Но из тех же соображений следует, что

$$AO = AE + EO = AE + \frac{1}{2}EC = \\ = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}a = \frac{9}{8}a.$$

Таким образом, перпендикуляр OR к прямой l имеет такую же длину, как и наклонная OA. Это возможно только в случае, когда точка R совпадает с точкой A, и, значит, прямая l перпендикулярна AC и $\angle OAM = \frac{\pi}{4}$. В частности, отсюда следует, что существует единственная секущая плоскость, удовлетворяющая условию задачи.

Так как прямая l, по доказанному, перпендикулярна AC и значит, параллельна BD (диагонали ромба перпендикулярны), то прямая LN, по которой плоскость сечения пересекает плоскость BSD, должна быть параллельна прямой BD. Так как $AO \perp BD$, то по теореме, обратной к теореме о трех перпендикулярах, имеем $AM \perp BD$, и, значит, $AM \perp LN$. Итак, диагонали четырехугольника $ALMN$, площадь которого необходимо найти, перпендикулярны. Пусть F — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ALMN$. Тогда (рис. 104)

$$S_{ALMN} = S_{ALM} + S_{AMN} = \frac{1}{2}AM\cdot LF + \frac{1}{2}AM\cdot FN = \frac{1}{2}AM\cdot LN.$$

Из прямоугольного треугольника AOM находим

$$AM = \frac{AO}{\cos(\angle OAM)} = \frac{9}{8}a : \cos\frac{\pi}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{8}a.$$

Точка F пересечения отрезков AM и LN принадлежит пересечению плоскостей ASC и BSD, т. е. прямой SE. Поскольку

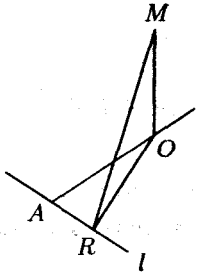


Рис. 103

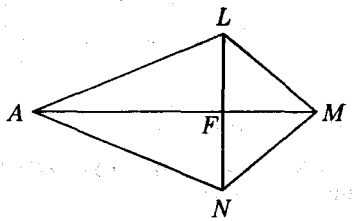


Рис. 104

$SE \perp BD$ и $BD \parallel LN$, то $SF \perp LN$, и, значит, SF — высота треугольника LSN. Прямые LN и BD параллельны, поэтому треугольники LSN и BSD подобны. Отсюда следует, что $\frac{LN}{BD} = \frac{SF}{ES}$, и, значит, $LN = \frac{SF}{ES} \cdot BD$. Так как AEF — прямоугольный треугольник, и $\angle EAF = \frac{\pi}{4}$, то $EF = AE$ и

$$\frac{SF}{ES} = 1 - \frac{EF}{ES} = 1 - \frac{AE}{ES} = 1 - \frac{1}{2}\frac{AC}{ES} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Итак, $LN = \frac{2}{3}BD$. Из прямоугольного треугольника AED находим

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}AC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}a.$$

Поэтому $BD = 2ED = \frac{\sqrt{7}}{2}a$ и $LN = \frac{2}{3}BD = \frac{\sqrt{7}}{3}a$. Наконец,

$$S_{ALMN} = \frac{1}{2}AM \cdot LN = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{8}a \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}a = \frac{3\sqrt{14}}{16}a^2.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{14}}{16}a^2$.

5. Левую часть первого уравнения исходной системы можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} & y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = \\ &= (y^2 - 8)^2 - (2x)^2 - 4y(y^2 - 8 + 2x) = \\ &= (y^2 - 8 + 2x)(y^2 - 8 - 2x) - 4y(y^2 - 8 + 2x) = \\ &= (y^2 - 8 + 2x)(y^2 - 8 - 2x - 4y). \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку

$$x(x-6)+13=(x-3)^2+4,$$
$$\cos\left(\pi\left(y^2+2x+\frac{1}{2}\right)\right)=-\sin(\pi(y^2+2x))$$

и

$$\sin 5\pi x+\sin(\pi(2y^2-x))=2\sin(\pi(2x+y^2))\cos(\pi(3x-y^2)),$$

то левую часть второго уравнения исходной системы можно переписать в виде

$$\sin\left(\pi(2x+y^2)\right)\left(2\cos(\pi(3x-y^2))+\sqrt{(x-3)^2+4}\right). \qquad (5)$$

Из тождеств (4) и (5) заключаем, что решения исходной системы уравнений совпадают с решениями следующей совокупности четырех систем уравнений:

I. $\begin{cases} y^2-8+2x=0, \\ 2\cos(\pi(3x-y^2))+\sqrt{(x-3)^2+4}=0. \end{cases}$

II. $\begin{cases} y^2-4y-8-2x=0, \\ 2\cos(\pi(3x-y^2))+\sqrt{(x-3)^2+4}=0. \end{cases}$

III. $\begin{cases} y^2-8+2x=0, \\ \sin(\pi(2x+y^2))=0. \end{cases}$

IV. $\begin{cases} y^2-4y-8-2x=0, \\ \sin(\pi(2x+y^2))=0. \end{cases}$

При любых x и y справедливы неравенства

$$2\cos(\pi(3x-y^2))\geqslant -2, \qquad \sqrt{(x-3)^2+4}\geqslant 2.$$

Поэтому решения уравнения

$$2\cos(\pi(3x-y^2))+\sqrt{(x-3)^2+4}=0$$

совпадают с решениями системы двух уравнений

$$\begin{cases} \cos(\pi(3x-y^2))=-1, \\ \sqrt{(x-3)^2+4}=2. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы $x=3$, поэтому эта системы может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \cos(\pi(3x-y^2))=-1, \\ x=3. \end{cases}$$

Следовательно, системы уравнений I и II равносильны соответственно системам

$$\text{I}'.\begin{cases} y^2-8+2x=0, \\ x=3, \\ \cos(\pi(9-y^2))=-1. \end{cases} \qquad \text{II}'.\begin{cases} y^2-4y-8-2x=0, \\ x=3, \\ \cos(\pi(9-y^2))=-1. \end{cases}$$

Подставляя $x=3$ в первое уравнение системы I′, получаем квадратное уравнение $y^2-2=0$, имеющее два корня $y_1=\sqrt{2}$ и $y_2=-\sqrt{2}$. Обе пары чисел $(3;\sqrt{2})$, $(3;-\sqrt{2})$ удовлетворяют, как легко видеть, третьему уравнению системы I. Итак, система I имеет два решения $(3;\sqrt{2})$ и $(3;-\sqrt{2})$.

Подставляя $x=3$ в первое уравнение системы II′, получаем квадратное уравнение $y^2-4y-14=0$, имеющее два корня $y_3=2+3\sqrt{2}$ и $y_4=2-3\sqrt{2}$. Легко проверить, что ни одна из пар чисел $(3;2+3\sqrt{2})$, $(3;2-3\sqrt{2})$ не удовлетворяет третьему уравнению системы II′. Значит, система II′, а вместе с ней и система II, не имеют решений.

Если x_0 и y_0 — произвольные числа, удовлетворяющие первому уравнению системы III, то $2x_0^2+y_0^2=8$, и, так как $\sin 8\pi=0$, получаем, что пара чисел (x_0,y_0) удовлетворяет второму уравнению системы III. Это значит, что система III равносильна одному уравнению $y^2-8+2x=0$, и следовательно, множество ее решений состоит из всех пар чисел $\left(\dfrac{8-y^2}{2};y\right)$, где y принимает любое действительное значение.

Из второго уравнения системы IV следует, что $2x+y^2=k$, $k\in Z$. Поэтому решения системы IV совпадают с решениями бесконечной совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} y^2-4y-8-2x=0, \\ 2x+y^2=k, \qquad k\in Z. \end{cases} \tag{6}$$

Для любого фиксированного k, $k\in Z$, из второго уравнения находим, что $x=\dfrac{k-y^2}{2}$. Подставляя это значение x в первое уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$2y^2-4y-8-k=0. \tag{7}$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен $16+8(8+k)=$ $=8(10+k)$. Поэтому, если $k<-10$, то квадратное уравнение (7), а вместе с ним и система уравнений (6), не имеют решений. Если же $k\geqslant -10$, то уравнение (7) имеет два решения $y_5=1+\sqrt{5+\dfrac{k}{2}}$, $y_6=1-\sqrt{5+\dfrac{k}{2}}$, причем $y_5=y_6=1$ при $k=-10$.

Соответствующие значения x равны

$$x_5 = \frac{k - y_5^2}{2} = -3 + \frac{k}{4} - \sqrt{5 + \frac{k}{2}},$$
$$x_6 = \frac{k - y_6^2}{2} = -3 + \frac{k}{4} + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}.$$

Итак, система уравнений IV имеет две бесконечные серии решений

$$\left(-3 + \frac{k}{4} - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; 1 + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);\ k \in Z,\ k \geqslant -10;$$
$$\left(-3 + \frac{k}{4} + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; 1 - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);\ k \in Z,\ k \geqslant -10.$$

Собирая вместе все решения систем I–IV, находим ответ.

Ответ:

$(3, \pm\sqrt{2})$; $\left(\frac{8 - y^2}{2}, y\right)$, y — любое действительное число;

$$\left(-3 + \frac{k}{4} - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; 1 + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);\ k \in Z, k \geqslant -10;$$
$$\left(-3 + \frac{k}{4} + \sqrt{5 + \frac{k}{2}}; 1 - \sqrt{5 + \frac{k}{2}}\right);\ k \in Z, k \geqslant -10.$$

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-\infty < x < \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} < x < 2$.

2. $\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $\sqrt{2} + 1$.

4. $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{6}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{19}\right)\right) b^2$.

5. $\begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in R, \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{5 - \frac{n}{2}}, \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + n), \end{cases}$

$n \in Z$, $n \leqslant 10$, $n \neq 2$.

Вариант 3. 1. $3 < x < 5 - \sqrt{2}$; $5 + \sqrt{2} < x < +\infty$.

2. $\pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $\frac{2\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}}$. 4. $\frac{2}{3}(\sqrt{34} + \sqrt{10})a$.

5. $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y^2 - \dfrac{1}{2} - n, \\ y = 1 \pm \sqrt{\dfrac{4n^2 + 12n + 1}{16 + 8n}}, \end{cases}$

$n \in N$, $n = 0$.

Вариант 4. 1. $-\infty < x < 1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5} < x < 4$.

2. $\dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $\dfrac{3}{5}$. 4. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}(2 + \sqrt{193})b^2$.

5. $\begin{cases} x = -2, \\ y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2n - 279}{2n + 9}}, \\ y = 2x^2 + n, \end{cases}$

$n \in Z$, $n \leqslant -5$, $n \geqslant 140$.

1985

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x + 1 \neq 0$ и $x + 3 \neq 0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; +\infty)$.

На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$5(x + 3) + 4x - 6 = 3(x + 1)(x + 3)$$

или такому

$$-3x^2 - 3x = 0.$$

Получившееся уравнение имеет корни $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Из этих чисел только $x = 0$ входит в ОДЗ исходного уравнения и потому является его единственным решением.

Ответ: $x = 0$.

2. Воспользовавшись тем, что $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$5(1 - 2\sin^2 x) - 7\sin x + 1 = 0$$

или так:

$$10\sin^2 x + 7\sin x - 6 = 0. \qquad (1)$$

Так как квадратное уравнение $10z^2 + 7z - 6 = 0$ имеет корни $z_1 = -\dfrac{6}{5}$ и $z_2 = \dfrac{1}{2}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = -\frac{6}{5} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α.

Решение второго уравнения есть $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Среди этих x имеется только одно, лежащее на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а именно $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$.

3. Обозначив $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$ через y, перепишем исходное неравенство в виде $y^2 - y - 6 > 0$. Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков $3 < y < +\infty$ и $-\infty < y < -2$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 3 \quad \text{и} \quad \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < -2.$$

Неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 3$ равносильно двойному неравенству $0 < 3x + 1 < \frac{1}{8}$. Множество решений полученного неравенства есть промежуток $-\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24}$.

Неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < -2$ равносильно неравенству $3x + 1 > 4$, и значит, множество его решений есть промежуток $1 < x < +\infty$.

Объединение множеств $-\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24}$ и $1 < x < +\infty$ дает множество всех решений исходного неравенства.

Ответ: $-\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24}$; $1 < x < +\infty$.

4. Обозначим искомую площадь треугольника AMB буквой x (рис. 105). Тогда

$$S_{AMC} = x - S_{CMB} = x - S_2,$$
$$S_{DMB} = x - S_{AMD} = x - S_1.$$

Ввиду того, что $\angle AMC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle DMB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, находим

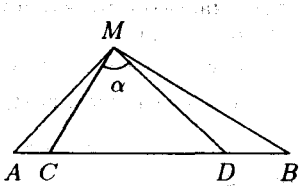


Рис. 105

$$(x - S_1)(x - S_2) = S_{DMB} \cdot S_{AMC} =$$
$$= \frac{1}{2} DM \cdot BM \cdot \sin(\angle DMB) \cdot \frac{1}{2} AM \cdot CM \cdot \sin(\angle AMC) =$$
$$= \frac{1}{2} DM \cdot AM \cdot \frac{1}{2} BM \cdot CM \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= S_1 \cdot S_2 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Получившееся квадратное уравнение относительно x можно переписать в виде

$$x^2 - (S_1 + S_2)x + S_1 \cdot S_2 \cdot \sin^2 \alpha = 0. \qquad (2)$$

Из условия задачи следует, что $x > S_1$ и $x > S_2$, а значит, $x > \dfrac{S_1 + S_2}{2}$. Таким образом, x есть больший из корней квадратного уравнения (2), т. е.

$$x = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.

5. Пусть x_0 — корень уравнения, тогда справедливо числовое равенство

$$8x_0(2x_0^2 - 1)(8x_0^4 - 8x_0^2 + 1) = 1. \qquad (3)$$

Так как x_0 принадлежит отрезку $[0; 1]$, то существует число t, принадлежащее отрезку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, такое, что $x_0 = \cos t$. Подставляя $x_0 = \cos t$ в равенство (3), имеем

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1. \qquad (4)$$

Поскольку $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = 8\cos^2 t(\cos^2 t - 1) + 1 = -8\cos^2 t\sin^2 t + 1 = -2\sin^2 2t + 1 = \cos 4t$, то равенство (4) перепишем в виде

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1. \qquad (5)$$

Умножая обе части этого равенства на $\sin t$, получим

$$8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t = \sin t,$$

откуда

$$\sin 8t = \sin t. \qquad (6)$$

Из этого равенства следует, что

$$8t = t + 2\pi k,\ k \in Z,$$

или

$$8t = \pi - t + 2\pi l,\ l \in Z.$$

Следовательно, или $t = \dfrac{2k}{7}\pi$, $k \in Z$, или $t = \dfrac{2l+1}{9}\pi$, $l \in Z$. Найдем из этих чисел те, которые принадлежат отрезку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Такие числа получаются при $k = 0$, $k = 1$ и $l = 0$, $l = 1$.

Следовательно, совокупность чисел, удовлетворяющих равенству (6) и принадлежащих отрезку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, состоит из чисел 0; $\dfrac{\pi}{9}$; $\dfrac{2\pi}{7}$; $\dfrac{\pi}{3}$. Первое из них не удовлетворяет равенству (5), а остальные, как легко видеть, ему удовлетворяют.

Итак, равенству (5), а значит, и равенству (4), удовлетворяют только три числа из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а именно, $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{\pi}{3}$. А это означает, что данное в условии задачи уравнение имеет на отрезке $[0; 1]$ три корня: $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{\pi}{3}$.

Ответ: 3.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 1. 2. $\frac{5\pi}{3}$. 3. $-31 < x < -11$; $1 < x < 1,5$. 4. $\frac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab\sin^2\varphi}}{2}$. 5. 4.

Вариант 3 1. 4. 2. $\frac{7\pi}{6}$. 3. $-\frac{5}{2} < x < -\frac{7}{3}$; $2 < x < +\infty$. 4. $\frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2-4pq\sin^2\beta}}{2}$. 5. 4.

Вариант 4. 1. -4. 2. $\frac{4\pi}{3}$. 3. $-11 < x < -\frac{1}{2}$; $1 < x < \frac{5}{4}$. 4. $\frac{m+n-\sqrt{(m+n)^2-4mn\sin^2\gamma}}{2}$. 5. 3.

1986

Решение варианта 1

1. Применяя формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, перепишем уравнение в виде

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

или, учитывая, что $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, в виде

$$\cos x=-1.$$

Корни этого уравнения, а значит, и исходного уравнения, есть $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$. Среди них наибольший отрицательный корень есть $x=-\pi$.

Ответ: $-\pi$.

2. Обозначив 3^x через y, исходное неравенство можно переписать в виде

$$y<1+\frac{12}{y}.$$

Перенося все члены этого неравенства в левую часть и приводя к общему знаменателю, получим, что оно равносильно неравенству

$$\frac{y^2 - y - 12}{y} < 0. \qquad (1)$$

На множестве $y > 0$ (нас интересуют только эти значения, поскольку $y = 3^x > 0$ для любого x) неравенство (1) равносильно неравенству

$$y^2 - y - 12 < 0,$$

решения которого составляют промежуток $-3 < y < 4$. Из них в множество $y > 0$ входят лишь y из промежутка $0 < y < 4$.

Следовательно, данное в условии задачи неравенство равносильно неравенству $3^x < 4$. Множество решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства, есть $x < \log_3 4$.

Ответ: $-\infty < x < \log_3 4$.

3. Обозначим через x км/час скорость легкового автомобиля, через t час — время, которое потребуется мотоциклисту для того, чтобы догнать грузовик. Тогда скорость грузовика равна $\frac{5}{6}x$ км/час. Мотоциклист догнал грузовик через $\left(t + \frac{1}{2}\right)$ часа с момента выезда грузовика, поэтому

$$90t = \frac{5}{6}x\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Мотоциклист догнал легковой автомобиль через $\left(t + \frac{3}{2}\right)$ часа с момента выезда легкового автомобиля, и сам находился в пути $(t + 1)$ час. Следовательно,

$$90(t + 1) = x\left(t + \frac{3}{2}\right).$$

Итак, для нахождения t и x получили систему уравнений

$$\begin{cases} 90t = \frac{5}{6}x\left(t + \frac{1}{2}\right), \\ 90(t + 1) = x\left(t + \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы $x = \frac{12 \cdot 18t}{2t + 1}$. Подставляя $\frac{12 \cdot 18t}{2t + 1}$ вместо x во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$5(t + 1) = \frac{6t(2t + 3)}{2t + 1}$$

или, после упрощения (учитывая, что $t > 0$), уравнение

$$2t^2 + 3t - 5 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{5}{2}$. Отсюда, так как $t > 0$, находим, что $t = 1$, но тогда $x = \frac{12 \cdot 18}{3} = 72$.

Ответ: 72 км/час.

4. Данный в условии задачи треугольник изображен на рис. 106. Так как по условию $BM = \frac{3}{2}AM$, то $AB = AM + BM = \frac{5}{2}AM$, и, значит,

$$AM = \frac{2}{5}AB = \frac{2}{5} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

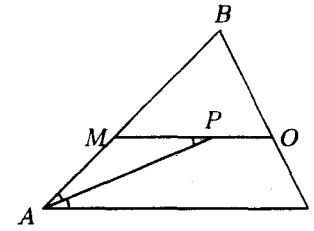


Рис. 106

Треугольник AMP равнобедренный, поскольку $\angle APM = \angle PAC$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых MO и AC, и $\angle PAC = \angle MAP$, так как согласно условию AP есть биссектриса угла BAC.

Так как радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMP, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, то по теореме синусов находим

$$\sqrt{2} = AM = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin(\angle MPA)$$

или

$$\sin(\angle MPA) = \sin(\angle MAP) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}.$$

Далее получаем

$$\cos(\angle BAC) = 1 - 2\sin^2(\angle MAP) = 1 - \frac{2}{4+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Применяя к треугольнику ABC теорему косинусов, имеем

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos(\angle BAC)$$

или $\frac{125}{16} = \frac{25}{2} + AC^2 - 5AC$.

Отсюда следует, что AC есть корень квадратного уравнения $x^2 - 5x - \frac{75}{16} = 0$, и, значит, есть одно из чисел $x_1 = \frac{15}{4}$ или $x_2 = \frac{5}{4}$.

Так как треугольники ABC и MOB подобны, то $\frac{AC}{MO} = \frac{AB}{BM} = \frac{5}{3}$ или $AC = \frac{5}{3}MO$. По условию $MO > MP = AM = \sqrt{2}$, поэтому $AC > \frac{5\sqrt{2}}{3} > \frac{5}{4}$ и, следовательно, $AC = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$.

5. Обозначим выражение

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}$$

буквой b и найдем сначала все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = b \end{cases} \qquad (2)$$

имеет хотя бы одно решение.

Из неравенства

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 = x^2 + y^2 + (x + 2y)^2 \geqslant 0$$

следует, что все b, при которых система (2) имеет хотя бы одно решение, должны удовлетворять неравенству $b \geqslant 0$. Более того, при $b = 0$ второму уравнению системы (2) удовлетворяют только числа $x = 0$, $y = 0$. Так как эти числа не удовлетворяют первому уравнению, то при $b = 0$ система (2) не имеет решения, и, значит, все искомые значения b лежат в области $b > 0$.

Зафиксируем некоторое положительное число b и рассмотрим далее систему (2) при выбранном значении b. Умножим первое уравнение системы (2) на $(-b)$ и к результату прибавим второе уравнение, умноженное на 8. После этих преобразований получится система уравнений

$$\begin{cases} (-b + 16)x^2 + 2(b + 16)xy + (3b + 40)y^2 = 0, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = b, \end{cases} \qquad (3)$$

равносильная системе (2).

Рассмотрим квадратное уравнение

$$(3b + 40)t^2 + 2(b + 16)t + 16 - b = 0. \qquad (4)$$

Если его дискриминант $D = 4(b + 16)^2 - 4(3b + 40)(16 - b) = 16(b^2 + 6b - 96)$ отрицателен, то первому уравнению системы (3) удовлетворяют только числа $x = 0$, $y = 0$. Действительно, пусть x_0, y_0 — его решение, и $x_0 \neq 0$, тогда приходим к равенству

$$(16 - b)x_0^2 + 2(b + 16)x_0y_0 + (3b + 40)y_0^2 =$$
$$= x_0^2\left[16 - b + 2(b + 16)\frac{y_0}{x_0} + (3b + 40)\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2\right] = 0, \qquad (5)$$

из которого следует, что уравнение (4) имеет корень $\frac{y_0}{x_0}$, вопреки неравенству $D < 0$. Значит, $x_0 = 0$, и следовательно, $y_0 = 0$. Пара чисел $x = 0, y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению системы (3). Поэтому при $b > 0$ и $D < 0$ система (3) не имеет решений, а все искомые значения b должны удовлетворять неравенствам

$$b > 0 \quad \text{и} \quad b^2 + 6b - 96 \geqslant 0. \tag{6}$$

Квадратный трехчлен $b^2 + 6b - 96$ имеет два корня $b_1 = -3 - \sqrt{105} < 0$ и $b_2 = -3 + \sqrt{105} > 0$.

Поэтому решения системы неравенств (6) есть

$$b \geqslant -3 + \sqrt{105} \tag{7}$$

Итак, все значения b, при которых система (3) имеет решения, а значит, и равносильная ей система (2), должны удовлетворять неравенству (7).

Пусть b — некоторое число, для которого выполнено неравенство (7). Докажем, что система (3) имеет решение при этом значении b.

Из (7) следует, что для квадратного уравнения (4) $D \geqslant 0$, и поэтому оно имеет корни. Пусть t_1 — один из его корней. Из равенства (5) следует, что любая пара чисел x_0, y_0, такая, что $\frac{y_0}{x_0} = t_1$, будет удовлетворять первому уравнению системы (3). Подберем теперь x_0 ($x_0 \neq 0$) так, чтобы удовлетворялось и второе уравнение этой системы. Так как $y_0 = t_1 x_0$, то x_0 должно удовлетворять равенству

$$x_0^2(2 + 4t_1 + 5t_1^2) = b. \tag{8}$$

В силу того, что $b > 0$ и $2 + 4t_1 + 5t_1^2 = 1 + t_1^2 + (1 + 2t_1)^2 > 0$, заключаем, что число x_0, удовлетворяющее равенству (8), существует, и, значит, система уравнений (3) разрешима.

Итак, условием разрешимости системы (2) является выполнение неравенства (7), а исходная система будет разрешима тогда и только тогда, когда

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \geqslant -3 + \sqrt{105},$$

т. е. когда

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \geqslant 0. \tag{9}$$

В силу того, что

$$a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 = (a^2 - 2a)^2 - 3^2 = (a^2 - 2a - 3)(a^2 - 2a + 3)$$

и $a^2 - 2a + 3 = (a - 1)^2 + 2 > 0$ для любого a, заключаем, что неравенство (9) равносильно неравенству

$$a^2 - 2a - 3 \geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен a^2-2a-3 имеет корни $a_1=-1$, $a_2=3$, поэтому множество решений неравенства (9), а значит, и искомое множество значений a, при которых разрешима исходная система уравнений, имеет вид $a \leqslant -1$; $a \geqslant 3$.

Ответ: $a \leqslant -1$; $a \geqslant 3$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. -2π. 2. $x < \log_2 3$. 3. 14 км/час. 4. 7. 5. $b \leqslant -1$; $b \geqslant 4$.

Вариант 3. 1. $-\dfrac{3\pi}{2}$. 2. $x < \log_5 2$. 3. 24 км/час. 4. 9. 5. $c \leqslant -5$; $c \geqslant 3$.

Вариант 4. 1. $-\dfrac{\pi}{2}$. 2. $x < \log_7 2$. 3. 40 км/час. 4. $2\sqrt{3}$. 5. $d \leqslant -7$; $d \geqslant 2$.

1987

Решение варианта 1

1. Поскольку $\sin\left(2x-\dfrac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos 2x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$14\cos^2 x - 9\cos x - 8 = 0. \qquad (1)$$

Так как квадратное уравнение $14z^2-9z-8=0$ имеет корни $z_1=-\dfrac{1}{2}$ и $z_2=\dfrac{8}{7}$, то уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{8}{7}.$$

Решение первого уравнения есть $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. Второе уравнение решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α, а $\dfrac{8}{7} > 1$.

Следовательно, решения исходного уравнения есть

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. Обозначим через v км/час скорость течения реки, а через t час. — время от отправления плота до встречи плота и катера. Тогда скорость катера по течению реки равна $5v$ км/час, а скорость против течения равна $3v$ км/час. За время t плот проплыл vt км, а катер — $3vt$ км. Следовательно, расстояние между

пунктами A и B равно $4vt$ км. После встречи катера и плота до прибытия катера обратно в пункт B прошло $\frac{3vt}{5v} = \frac{3}{5}t$ часов. За это время плот проплыл $v \cdot \frac{3t}{5}$ км. Всего же плот проплыл $vt + \frac{3vt}{5} = \frac{8}{5}vt$ км. Найдем, какую часть пути от A до B составляет это расстояние. Так как $\frac{vt + \frac{8}{5}vt}{4vt} = \frac{2}{5}$, то плот проплыл $\frac{2}{5}$ пути от A до B.

Ответ: $\frac{2}{5}$ пути от A до B.

3. Перенося все члены из правой части неравенства в его левую часть и приводя затем все члены к общему знаменателю, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{2\log_{0,5}^2 x - 2}{2 - \log_{0,5} x} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Обозначив $\log_{0,5} x$ через z, перепишем неравенство (2) в виде

$$\frac{2(z^2 - 1)}{2 - z} \geqslant 0$$

или в виде

$$\frac{2(z-1)(z+1)}{2-z} \geqslant 0. \qquad (3)$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{(z-1)(z+1)}{z-2} = 0 \qquad (4)$$

и неравенства

$$\frac{(z-1)(z+1)}{z-2} < 0. \qquad (5)$$

Уравнение (4) имеет два решения $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Пользуясь методом интервалов, находим, что множество решений неравенства (5) состоит из двух промежутков $-\infty < z < -1$ и $1 < z < 2$, следовательно, множество решений неравенства (3) состоит из промежутков $-\infty < z \leqslant -1$ и $1 \leqslant z < 2$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\log_{0,5} x \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant \log_{0,5} x < 2.$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $2 \leqslant x < +\infty$. Множество решений второго — промежуток $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, множество решений исходного неравенства есть объединение двух промежутков $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; $2 \leqslant x < +\infty$.

4. Продолжим стороны AB и CD трапеции до их пересечения в точке E (рис. 107). Так как $BC = \frac{1}{2}AD$, то $EC = \frac{1}{2}ED$, $BE = \frac{1}{2}AE$, и, значит, $EP : AP = 3$. Так как $2CD = 3RD$, то $ED = 2CD = 3RD$, откуда $ER = 2RD$ и $ER : RD = 2$. Так как BC — средняя линия треугольника AED, то $S_{BEC} = \frac{1}{4}S_{AED}$ и, следовательно, $S_{ABCD} = \frac{3}{4}S_{AED} = 30$. Из последнего равенства находим $S_{AED} = 40$.

Поскольку треугольники AER и AED имеют общую высоту, опущенную из вершины A на противоположную сторону в каждом треугольнике, то площади этих треугольников относятся как длины их оснований, т. е.

$$\frac{S_{AER}}{S_{AED}} = \frac{ER}{ED} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad S_{AER} = \frac{2}{3} \cdot 40 = \frac{80}{3}.$$

Проведем через точку R отрезок RT, параллельный прямой PD (рис. 108). Так как треугольники PED и TER подобны, то $\frac{PE}{TE} = \frac{ED}{ER} = \frac{3}{2}$, так что $\frac{PT}{TE} = \frac{PE - TE}{TE} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. По доказанному ранее, $AP = \frac{1}{3}PE = \frac{1}{2}TE$. Значит, $AT = AP + PT = \frac{1}{2}TE + \frac{1}{2}TE = TE$, т. е. TR — медиана треугольника AER.

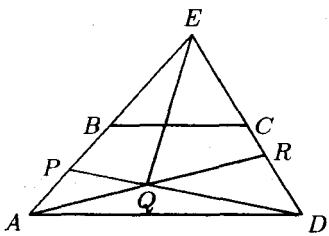


Рис. 107

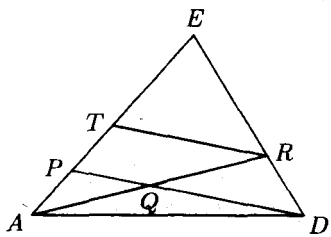


Рис. 108

Но тогда $S_{ATR} = \frac{1}{2}S_{AER} = \frac{40}{3}$. Из доказанных выше равенств следует, что $AP = PT$, так что коэффициент подобия треугольников APQ и ATR равен $\frac{1}{2}$. Значит, $S_{APQ} = \frac{1}{4}S_{ATR} = \frac{1}{4}\cdot\frac{40}{3} = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

5. Перепишем исходную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (3x-y+2)^2 = 3\left(2x+3y+\frac{1}{3}\right), \\ (3x-y+2)^2 + (2x+3y+1-a)^2 = 2 \end{cases} \tag{6}$$

или, обозначив $3x-y+2=u$, $2x+3y+\frac{1}{3}=v$, в виде

$$\begin{cases} u^2 = 3v, \\ u^2 + \left(v - \left(a - \frac{2}{3}\right)\right)^2 = 2. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} u^2 = 3v, \\ \left(v - \left(a - \frac{2}{3}\right)\right)^2 + 3v - 2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что система (6) имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда система (7) имеет хотя бы одно решение. Для того чтобы система (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ее второе уравнение имело хотя бы один неотрицательный корень.

Итак, задача сводится к нахождению таких значений a, при каждом из которых второе уравнение системы (7), т. е. уравнение

$$v^2 + \left(3 - 2a + \frac{4}{3}\right)v + \left(\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - 2\right) = 0 \tag{8}$$

имеет хотя бы один неотрицательный корень. Обозначив $a - \frac{2}{3} = \alpha$, перепишем уравнение (8) в виде

$$v^2 - 2v\left(\alpha - \frac{3}{2}\right) + \alpha^2 - 2 = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен, т. е. если

$$\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 2) \geqslant 0. \tag{10}$$

Неравенство (10) означает, что $\alpha \leqslant \frac{17}{12}$.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (9). По теореме Виета выполняются равенства

$$x_1 + x_2 = 2\alpha - 3,$$
$$x_1 \cdot x_2 = \alpha^2 - 2.$$

Поэтому уравнение (9) при $\alpha \leqslant \frac{17}{12}$ будет иметь два отрицательных корня, если выполнены условия

$$\begin{cases} 2\alpha - 3 < 0, \\ \alpha^2 - 2 > 0. \end{cases}$$

Множество решений получившейся системы неравенств имеет вид $\alpha < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < \alpha < \frac{3}{2}$. Так как $\sqrt{2} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$, то уравнение (9) имеет два отрицательных корня, если $\alpha < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < \alpha \leqslant \frac{17}{12}$. При остальных α из области $\alpha \leqslant \frac{17}{12}$ уравнение (9) имеет хотя бы один неотрицательный корень. Это будет выполнено, если $-\sqrt{2} \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{2}$. Решая неравенства $-\sqrt{2} \leqslant a - \frac{2}{3} \leqslant \sqrt{2}$, находим искомые значения a: $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3} + \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{2}{3} - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3} + \sqrt{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2. 2 часа.
3. $0 < x \leqslant \frac{9}{100}$; $1 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$. 4. $\frac{9}{2}$. 5. $\frac{5}{6} - \sqrt{7} \leqslant a \leqslant \frac{5}{6} + \sqrt{7}$.

Вариант 3. 1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. В 2 раза.
3. $0,81 \leqslant x < 0,9$; $\frac{10}{9} \leqslant x < +\infty$. 4. 6.
5. $0,6 - \sqrt{5} \leqslant a \leqslant 0,6 + \sqrt{5}$.

Вариант 4. 1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $\frac{1}{2}$ пути.
3. $0 < x \leqslant 1$; $\frac{10}{7} < x \leqslant \frac{100}{49}$. 4. 4. 5. $0,8 - \sqrt{3} \leqslant a \leqslant 0,8 + \sqrt{3}$.

1988

Решение варианта 1

1. Применяя формулу произведения косинусов $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$, перепишем исходное уравнение в виде

$$4\cos x + 4\cos\frac{x}{2} - 6\cos x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, то перепишем уравнение (1) в виде

$$4\cos^2\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{2} - 3 = 0. \qquad (2)$$

Так как корни квадратного уравнения $4z^2 - 4z - 3 = 0$ есть $z_1 = -\frac{1}{2}$ и $z_2 = \frac{3}{2}$, то уравнение (2), а значит, и исходное уравнение, равносильны совокупности уравнений

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Решение первого из этих уравнений есть $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$. Второе уравнение решений не имеет, так как $\frac{3}{2}$ не входит в область значений функции $y = \cos x$. Итак, все корни исходного уравнения есть $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$. Из этих чисел наименьшим положительным числом является число $\frac{4\pi}{3}$. Оно и дает ответ в задаче.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию

$$2^{x^2-1} - \frac{1}{8} > 0. \qquad (3)$$

Поскольку $2^{x^2-1} \geqslant 2^{-1} = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} > 0$, то неравенство (3) справедливо при любом действительном x, тем самым ОДЗ исходного неравенства состоит из всех действительных чисел.

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\log_{\sqrt{5}}\left(2^{x^2-1} - \frac{1}{8}\right) < \log_{\sqrt{5}} 7 - 3\log_{\sqrt{5}} 2$$

или, поскольку $\log_{\sqrt{5}} 7 - 3\log_{\sqrt{5}} 2 = \log_{\sqrt{5}}\frac{7}{8}$, в виде

$$\log_{\sqrt{5}}\left(2^{x^2-1} - \frac{1}{8}\right) < \log_{\sqrt{5}}\frac{7}{8}.$$

Это неравенство, учитывая, что неравенство (3) справедливо для любого x, равносильно неравенству

$$2^{x^2-1} - \frac{1}{8} < \frac{7}{8},$$

т. е. неравенству

$$2^{x^2-1} < 1. \qquad (4)$$

Неравенство (4), в свою очередь, равносильно неравенству

$$x^2 - 1 < 0. \qquad (5)$$

Решениями неравенства (5) являются все x из промежутка $-1 < x < 1$.

Ответ: $-1 < x < 1$.

3. Обозначим через S км расстояние между пунктами, а через t часов — время, за которое это расстояние проезжает мотоциклист. Велосипедисту, чтобы проехать это расстояние, потребуется $(t+2)$ часов.

За 45 минут $\left(\frac{3}{4}\text{ часа}\right)$ мотоциклист проехал $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t}$ км, а велосипедист — $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t+2}$ км, и поскольку они встретились через это время, то имеем равенство

$$S = \frac{3}{4}\left(\frac{S}{t} + \frac{S}{t+2}\right).$$

Так как $S > 0$, то для нахождения t получили уравнение

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2} = \frac{4}{3},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{2t^2 + t - 3}{t(t+2)} = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$. Так как искомое время положительно, то $t > 0$. Следовательно, на путь между пунктами мотоциклист затратит 1 час.

Ответ: 1 час.

4. Обозначим через α и β соответственно углы ABC и ACB треугольника ABC и через K, L, P соответственно — точки касания окружности с центром O стороны BC и продолжений сторон AC и AB (рис. 109). Так как треугольник ABC вписан в окружность, то по теореме синусов имеем $\dfrac{BC}{\sin(\angle BAC)} = 2(\sqrt{3}-1)$, откуда $BC = 2(\sqrt{3}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}$. Так как K — точка касания, то $OK \perp BC$, и центр O лежит на биссектрисах углов PBK и KCL, поэтому

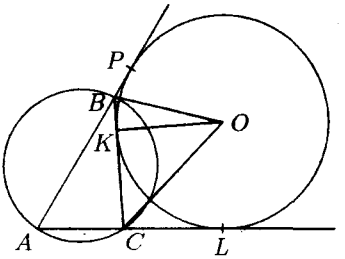


Рис. 109

$$BK = OK\operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ-\alpha}{2}\right) = OK\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$KC = OK\operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ-\beta}{2}\right) = OK\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Поскольку $OK = 1$ и $BC = BK + KC$, то $BC = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \dfrac{\sin 60^\circ}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}}$, и так как $BC = 3-\sqrt{3}$, то $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что α и β — углы треугольника, имеем $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \pm 30^\circ$. Так как $\alpha+\beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, то для нахождения α и β имеем либо систему

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 120^\circ, \\ \alpha-\beta = 60^\circ, \end{cases}$$

либо систему

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 120^\circ, \\ \alpha-\beta = -60^\circ, \end{cases}$$

откуда либо $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$, либо $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$.

Ответ: 30°; 90°.

5. Пусть x_0 и y_0 — решение исходной системы. Тогда выражение $\sqrt{3-x_0^2-y_0^2+2x_0}$ имеет смысл и справедливы равенства

$$\left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi x_0}{2}+\sin\frac{\pi(2x_0-y_0-2)}{6}\right)\left(\sqrt{3-x_0^2-y_0^2+2x_0}-3\right)=0,$$

$$3\cos\frac{\pi x_0}{2}+\sin\frac{\pi(2x_0-y_0)}{6}=\sqrt{3}\cos\frac{\pi(2x_0-y_0)}{6}.$$

Поскольку $\sqrt{3-x_0^2-y_0^2+2x_0}=\sqrt{4-(x_0-1)^2-y_0^2}$ и $4-(x_0-1)^2-y_0^2\leqslant 4$, то для рассматриваемых x_0 и y_0 справедливо неравенство

$$\sqrt{3-x_0^2-y_0^2+2x_0}-3<0,$$

и, значит, рассматриваемые x_0 и y_0 удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x_0}{2}+\sin\dfrac{\pi(2x_0-y_0-2)}{6}=0,\\ 3\cos\dfrac{\pi x_0}{2}+\sin\dfrac{\pi(2x_0-y_0)}{6}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi(2x_0-y_0)}{6},\\ 4-(x_0-1)^2-y_0^2\geqslant 0.\end{cases}\qquad(6)$$

Второе равенство этой системы можно переписать в виде

$$\frac{3}{2}\cos\frac{\pi x_0}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi(2x_0-y_0)}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi(2x_0-y_0)}{6}$$

или, поскольку $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$, в виде

$$\frac{3}{2}\cos\frac{\pi x_0}{2}=\sin\left(-\frac{\pi(2x_0-y_0)}{6}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Следовательно, с учетом первого равенства (6) заключаем, что x_0 и y_0 удовлетворяют системе условий

$$\begin{aligned}&(x_0-1)^2+y_0^2\leqslant 4,\\ &\cos\frac{\pi x_0}{2}=0,\\ &\sin\left(\frac{\pi}{6}(2-2x_0+y_0)\right)=0.\end{aligned}\qquad(7)$$

Из второго условия системы (7) возможные значения x_0 есть $x_0=2n+1$, $n\in Z$, а тогда, с учетом третьего условия системы (7), имеем $y_0=4n+6m$; $n,m\in Z$. Используя первое условие системы (7), заключаем, что должно выполняться неравенство

$$n^2+(2n+3m)^2\leqslant 1.$$

Следовательно, $|n|\leqslant 1$. При $n=1$ получаем уравнение $2+3m=0$ для m, а при $n=-1$ — уравнение $3m-2=0$. Оба уравнения

не имеют целых решений. При $n = 0$ неравенство перепишется в виде $9m^2 \leqslant 1$, оно имеет единственное целое решение $m = 0$. Итак, возможные значения x_0 и y_0, удовлетворяющие условию задачи, есть $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

Проверка показывает, что пара чисел $x = 1$ и $y = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: (1;0).

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \frac{\pi}{3}$. 2. $-2 < x < 2$. 3. 2;3. 4. 90°, 30°. 5. (0;1).

Вариант 3. 1. $x = \frac{\pi}{12}$. 2. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 3. 2 часа. 4. 90°, 30°. 5. (1;0).

Вариант 4. 1. $\frac{2\pi}{3}$. 2. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. 3. 6. 4. 90°, 30°. 5. $(-2; -1)$.

1989

Решение варианта 1

1. Переходя в логарифмах к основанию 7, имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\log_7(2x^2 + x - 5) - \log_7(1 + x) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\log_7(2x^2 + x - 5) = 2\log_7(1 + x). \qquad (1)$$

Уравнение

$$2x^2 + x - 5 = (1 + x)^2 \qquad (2)$$

является следствием уравнения (1), а значит, и исходного уравнения, поэтому после его решения надо проверить, какие из его корней являются корнями исходного уравнения.

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$x^2 - x - 6 = 0. \qquad (3)$$

Корни уравнения (3) есть $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Проверка показывает, что $x = -2$ не является корнем исходного уравнения, а $x = 3$ есть его корень.

Ответ: $x = 3$.

2. Рассмотрим функцию $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ на отрезке $[0; 3]$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значения. Поскольку функция $g(x)$ дифференцируема на всей прямой, то наибольшее и наименьшее свои значения она принимает либо

в критических точках, т. е. там, где $g'(x) = 0$, либо на концах отрезка, т. е. в точках $x = 0$ и $x = 3$. Имеем

$$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12.$$

Корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$. Поскольку $g(0) = 1$, $g(1) = 6$, $g(2) = 5$, $g(3) = 10$, то на отрезке $[0; 3]$ функция $g(x)$ всегда положительна и потому не обращается в ноль. Так как наибольшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[0; 3]$ равно 10, то наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ на отрезке $[0; 3]$ равно $\dfrac{1}{10}$.

Ответ: $\dfrac{1}{10}$.

3. Применяя формулу синуса двойного угла, исходное уравнение перепишем в виде

$$3\sin 2x \sin^4 x + 12\sin 2x \sin^2 x - 8\sin 2x + 4\sin 2x \cos 2x = 0,$$

откуда ясно, что оно равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \tag{4}$$

и

$$3\sin^4 x + 12\sin^2 x - 8 + 4\cos 2x = 0. \tag{5}$$

Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение (5) равносильно уравнению

$$3\sin^4 x + 4\sin^2 x - 4 = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения $\sin 2x = 0$ есть $x = \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. Поскольку квадратное уравнение $3z^2 + 4z - 4 = 0$ имеет два корня $z_1 = \dfrac{2}{3}$ и $z_2 = -2$, то уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\sin^2 x = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = -2.$$

Второе уравнение этой совокупности не имеет решений, а первое уравнение равносильно уравнению

$$\cos 2x = -\frac{1}{3}. \tag{7}$$

Решения уравнения (7) есть $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$. Множество решений исходного уравнения состоит из решений уравнений (4) и (7).

Ответ: $x = \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in Z$; $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

4. Так как $KA < KF$, то точка K лежит на продолжении стороны AF за точку A. Если бы секущая KH проходила через центр O окружности, в которую вписан шестиугольник, то угол NFH был бы прямой, так как опирался бы на диаметр окружности (рис. 110). Если бы секущая KH_1 проходила по другую сторону от O, чем хорда AF, то угол N_1FH_1 был бы меньше прямого (рис. 111). Следовательно, поскольку угол NFH ту-

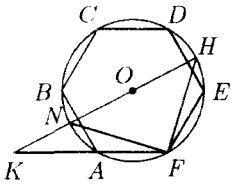


Рис. 110

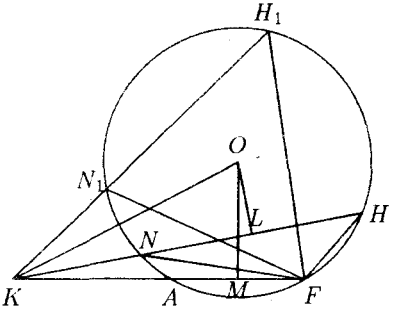


Рис. 111

пой, то хорды AF и NH лежат по одну сторону от O. Так как $KN < KA$, то хорда NH лежит между O и хордой AF. Опустим из точки O перпендикуляры OL и OM соответственно на прямые KH и KF. Тогда точка L — середина хорды NH, и M — середина хорды AF. Искомый угол HKF равен разности углов OKM и OKL: $\angle HKF = \angle OKM - \angle OKL$. Поэтому $\sin(\angle HKF) = \sin(\angle OKM - \angle OKL) = \sin(\angle OKM)\cdot\cos(\angle OKL) - \cos(\angle OKM)\cdot\sin(\angle OKL)$. Из прямоугольных треугольников OKL и OKM находим, что

$$\sin(\angle OKL) = \frac{OL}{OK}, \quad \cos(\angle OKL) = \frac{KL}{OK},$$
$$\sin(\angle OKM) = \frac{OM}{OK}, \quad \cos(\angle OKM) = \frac{KM}{OK}.$$

Поэтому

$$\sin(\angle HKF) = \frac{OM\cdot KL - OL\cdot KM}{OK^2}.$$

Найдем теперь отрезки OM, KL, OL, KM и OK. Поскольку шестиугольник вписан в окружность, то его сторона равна радиусу, поэтому $AF = 2$. Но тогда $AM = 1$, $KF = AK + AF = \sqrt{11} + 1$, $KM = KA + AM = \sqrt{11}$. Из прямоугольного треугольника AOM находим $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{3}$. Поскольку углы AFH и ANH опираются на дуги окружности, допол-

няющие друг друга до полной окружности, то сумма этих углов равна 180°: $\angle AFH + \angle ANH = 180°$. Так как углы ANK и ANH в сумме дают развернутый угол, то $\angle ANK + \angle ANH = 180°$. Из двух последних равенств вытекает, что $\angle AFH = \angle ANK$.

Рассмотрим треугольники KAN и KFH. Они подобны, так как они имеют по два равных угла: угол при вершине K у них общий, и $\angle AFH = \angle ANK$. Из подобия вытекает, что

$$\frac{KH}{AK} = \frac{KF}{KN},$$

откуда находим, что $KH=5$. Но тогда $NH = KH - KN = 3$, $NL = \frac{1}{2}NH = \frac{3}{2}$, $KL = KN + NL = \frac{7}{2}$. Из прямоугольного треугольника NOL находим $OL = \sqrt{ON^2 - NL^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Из прямоугольного треугольника KOL находим $KO = \sqrt{KL^2 + OL^2} = \sqrt{14}$. Теперь находим, что

$$\sin(\angle HKF) = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{77}}{28}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3} - \sqrt{77}}{28}$.

5. Выясним, для каких d существуют числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие одновременно равенствам

$$2x_0 + y_0 - z_0 = d, \quad x_0^2 + 3y_0^2 + z_0^2 = 2. \qquad (8)$$

Из первого равенства $z_0=2x_0+y_0-d$. Подставляя $2x_0+y_0-d$ вместо z_0 во второе равенство, получим, что числа x_0 и y_0 удовлетворяют равенству

$$x_0^2 + 3y_0^2 + (2x_0 + y_0 - d)^2 = 2.$$

Раскрыв в этом равенстве скобки и выделяя затем полные квадраты, это равенство можно переписать в виде

$$\left(2y_0 + x_0 - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(2x_0 - \frac{3}{4}d\right)^2 = 2 - \frac{3}{16}d^2,$$

откуда ясно, что это равенство выполняется только тогда, когда выполняется неравенство $2 - \frac{3}{16}d^2 \geqslant 0$, т. е. если $d^2 \leqslant \frac{32}{3}$. Таким образом, числа, удовлетворяющие равенствам (8), могут существовать только для d, удовлетворяющих условию $d^2 \leqslant \frac{32}{3}$. Наибольшим среди этих d является $d = \sqrt{\frac{32}{3}}$, именно это d и дает ответ в задаче, так как при $d = \sqrt{\frac{32}{3}}$ система (8) имеет

решения $x_0 = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{32}{3}}$, $y_0 = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{32}{3}}$, $z_0 = -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{32}{3}}$, найденные из соотношений

$$\begin{cases} 2y + x - \frac{d}{2} = 0, \\ 2x - \frac{3}{4}d = 0, \\ 2x + y - z = d. \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = 1$. 2. 1. 3. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$, $n \in Z$. 4. $\arcsin\frac{1}{8}$. 5. $-\frac{1}{2}\sqrt{66}$.

Вариант 3. 1. $x = -4$. 2. $\frac{1}{40}$. 3. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n$, $n \in Z$. 4. $\arcsin\left(\frac{1}{16}(5\sqrt{3} - \sqrt{35})\right)$. 5. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Вариант 4. 1. $x = -2$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. 4. $\arcsin\left(\frac{1}{8}(\sqrt{21} - 3)\right)$. 5. $-2\sqrt{5}$.

§6. Факультет почвоведения

1984

Решение варианта 1

1. Поскольку площади трех участков относятся как $4:3:5$, то, обозначив площадь первого участка через x га, найдем, что площади второго и третьего участков равны соответственно $\frac{3}{4}x$ га и $\frac{5}{4}x$ га. Площадь третьего участка на $\frac{1}{4}x$ га больше площади первого. Поэтому при средней урожайности в 28 ц с гектара с третьего участка было собрано на $\frac{1}{4}\cdot x\cdot 28 = 7x$ ц зерна больше. В соответствии с условием задачи, получаем уравнение $7x = 84$, из которого следует, что $x = 12$. Тогда площадь второго участка равна $\frac{3}{4}\cdot 12 = 9$ га, а площадь третьего участка равна $\frac{5}{4}\cdot 12 = 15$ га.

Ответ: 12 га; 9 га; 15 га.

2. Применяя формулу $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, исходное уравнение можно переписать в виде

$$1 - \cos 2x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x$$

или в виде

$$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим, что $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, но тогда $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$.

3. ОДЗ исходного неравенства состоит из всех x, кроме $x = 0$ и $x = -1$. Так как основание логарифма больше единицы, то на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left|1 + \frac{1}{x}\right| > 2$$

или неравенству

$$|x + 1| > 2|x|.$$

Обе части последнего неравенства неотрицательны, значит, оно равносильно неравенству

$$(x + 1)^2 > 4x^2.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$3x^2 - 2x - 1 < 0. \qquad (1)$$

Решая квадратное неравенство (1), находим, что множество его решений есть промежуток $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Поскольку неравенство (1) равносильно исходному неравенству на его ОДЗ, то получаем, что множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков $-\frac{1}{3} < x < 0$ и $0 < x < 1$.

Ответ. $-\frac{1}{3} < x < 0$; $0 < x < 1$.

4. Обозначим величину угла ANC (рис. 112) буквой α. Применяя к треугольнику ANC теорему синусов, находим

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\sin(\angle ACN)}{\sin(\angle ANC)}.$$

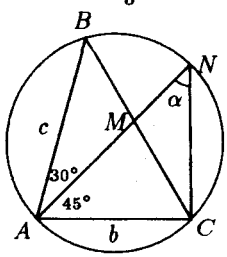


Рис. 112

Так как $\angle ACN = 180° - 45° - \angle ANC$, то

$$AN = AC \cdot \frac{\sin(180° - 45° - \angle ANC)}{\sin(\angle ANC)} = b\frac{\sin(45° + \alpha)}{\sin\alpha} =$$

$$= b\frac{\sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \operatorname{ctg}\alpha).$$

Вычислим $\operatorname{ctg}\alpha$. Вписанные углы ABC и ANC опираются на одну дугу, поэтому $\angle ABC = \angle ANC = \alpha$. Применяя теорему синусов к треугольнику ABC, получаем

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin(\angle ACB)}{\sin(\angle ABC)}$$

и

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin(180° - 75° - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(75° + \alpha)}{\sin\alpha} = \qquad (2)$$

$$= \sin 75° \operatorname{ctg}\alpha + \cos 75°.$$

Так как $\sin 75° = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и $\cos 75° = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, то из (2) на-

ходим $\operatorname{ctg}\alpha = (\sqrt{6}-\sqrt{2})\frac{c}{b} - 2 + \sqrt{3}$, и, следовательно,

$$AN = \frac{b}{\sqrt{2}}(1+\operatorname{ctg}\alpha) = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(c+\frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

Ответ: $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(c+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

5. Обозначим $\sin x$ через t. Тогда данную задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+t}} = t \qquad (3)$$

имеет решение, принадлежащее промежутку $-1 \leqslant t \leqslant 1$. На ОДЗ уравнения (3) его левая часть неотрицательна, поэтому решения должны принадлежать промежутку $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Рассмотрим более простое, чем (3), уравнение:

$$\sqrt{a+t} = t. \qquad (4)$$

Если уравнение (4) имеет решение t_0, то $\sqrt{a+t_0} = t_0$, и, значит, $\sqrt{a+\sqrt{a+t_0}} = \sqrt{a+t_0} = t_0$, т. е. число t_0 будет решением уравнения (3). Верно и обратное утверждение: каждый корень уравнения (3) будет решением уравнения (4). Действительно, если некоторое число t_0 удовлетворяет неравенству $\sqrt{a+t_0} > t_0$ и лежит в ОДЗ уравнения (3), то $\sqrt{a+\sqrt{a+t_0}} > \sqrt{a+t_0} > t_0$, и, значит, t_0 не может быть решением уравнения (3). Если же $\sqrt{a+t_0} < t_0$, и t_0 лежит в ОДЗ уравнения (3), то $\sqrt{a+\sqrt{a+t_0}} < \sqrt{a+t_0} < t_0$, и, следовательно, t_0 не может быть корнем уравнения (3). Итак, все корни уравнения (3) будут корнями уравнения (4), и исходная задача может быть заменена равносильной: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение (4) имеет решение, принадлежащее промежутку $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Если $a > 0$, то для любого t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо неравенство $t^2 \leqslant t < t+a$, откуда $t < \sqrt{t+a}$. Последнее неравенство означает, что уравнение (4) при любом $a > 0$ не имеет решений, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, среди положительных a нет значений, удовлетворяющих условию задачи.

Рассмотрим $a \leqslant 0$. ОДЗ уравнения (4) определяется условием $t \geqslant -a$. Если $a < -1$, то ОДЗ уравнения (4) определяется условием $t \geqslant -a > 1$, и поэтому для этих значений a уравнение (4) не имеет решений, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Найдем решения уравнения (4), лежащие в промежутке $0 \leqslant -a \leqslant t \leqslant 1$. На этом множестве уравнение (4) равносильно квадратному уравнению

$$t^2 - t - a = 0, \tag{5}$$

дискриминант D которого равен $1 + 4a$.

Если дискриминант уравнения (5) меньше нуля, т. е. если $a < -\frac{1}{4}$, то уравнение (5) решений не имеет. Если дискриминант неотрицательный, т. е. $a \geqslant -\frac{1}{4}$, то уравнение (5) имеет корни $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Легко видеть, что для a из промежутка $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ справедливы неравенства

$$-a \leqslant \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \leqslant 1.$$

Эти неравенства означают, что для a из промежутка $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ уравнение (4) имеет решения, принадлежащие промежутку $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Итак, уравнение (4), а следовательно, и уравнение (3), имеют решения, принадлежащие промежутку $0 \leqslant t \leqslant 1$, только при a, принадлежащем промежутку $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$. Следовательно, эти a и дают ответ в рассматриваемой задаче.

Ответ: $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 2,1; 0,6; 0,9.

2. $\frac{5\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in Z.$ 3. $x \neq 2;\ x > \frac{5}{4};\ x < \frac{1}{2}.$

4. $u = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}b - \sqrt{2}c.$ 5. $-\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant 0.$

Вариант 3. 1. 0,004; 0,003; 0,002. 2. $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{3} + \pi k,$ $k \in Z.$ 3. $x \neq 0;\ x < -\frac{3}{2};\ x > -\frac{1}{2}.$

4. $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(b + \frac{\sqrt{6}}{2}c\right).$ 5. $-\frac{5}{4} \leqslant a \leqslant -1.$

Вариант 4. 1. $\frac{10}{7};\ \frac{8}{7};\ \frac{4}{7}.$ 2. $\pm\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

3. $x > 3;\ x < -3.$ 4. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}c.$ 5. $-\frac{1}{20} \leqslant a \leqslant 0.$

1985

Решение варианта 1

1. Обозначая 2^y буквой z, перепишем исходную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2x + z = -1, \\ -20x + 7z = 146. \end{cases} \qquad (1)$$

Решаем эту систему методом подстановки. Из первого уравнения $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$. Подставляя $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right)$ вместо x во второе уравнение системы (1), получим уравнение

$$10 + 10z + 7z = 146,$$

которое имеет единственное решение $z=8$. Но тогда $x=-4,5$. Итак, система (1) имеет единственное решение $x = -4,5$; $z = 8$. Так как $z = 2^y$, то отсюда получаем, что исходная система имеет единственное решение $x = -4,5$; $y = 3$.

Ответ: $x = -4,5$; $y = 3$.

2. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x + 4 > 0$ и $2 - x > 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-4 < x < 2$. Поскольку на ОДЗ имеем $\lg \frac{1}{2-x} = -\lg(2-x)$, то исходное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$\lg(x+4) = 2\lg(2-x)$$

или уравнению $(x+4) = (2-x)^2$. Корни этого квадратного уравнения есть $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$. Из них только $x = 0$ удовлетворяет условию $-4 < x < 2$ и поэтому является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $\cos x \neq 0$. Умножая обе части исходного уравнения на $\cos^2 x$, получим, что на ОДЗ оно равносильно уравнению

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

или уравнению

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \qquad (2)$$

Квадратное уравнение $2z^2 - z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$, поэтому уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений не имеет решений, принадлежащих ОДЗ исходного уравнения (так как для таких x имеем $\cos x = 0$). Второе уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет серию решений $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, и серию решений $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in Z$, обе из которых принадлежат ОДЗ исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение имеет две серии решений

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

и

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad l \in Z.$$

Выберем среди них те решения, которые удовлетворяют условию $\operatorname{tg} x < 0$.

Поскольку для любых $k \in Z$, и $l \in Z$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} > 0,$$

а

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi l\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < 0,$$

то условию задачи удовлетворяют только $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in Z$.

4. Обозначим через E середину отрезка BC (рис. 113). Так как $AC = DC = 1$, то равны дуги AC и DC, а тогда, поскольку вписанные углы ABC и DAC опираются на равные дуги, то они равны, т. е. $\angle ABC = \angle DAC$. Треугольники ABC и AEC подобны, поскольку они имеют общий угол C и, кроме того, $\angle ABC = \angle EAC$. Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CE}$. Поскольку $CE = \frac{1}{2}BC$, то отсюда следует, что $BC^2 = 2AC^2$. Так как $AC = 1$, то находим, что $BC = \sqrt{2}$.

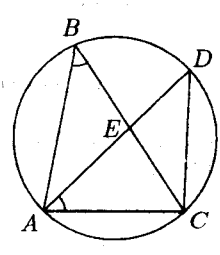


Рис. 113

Ответ: $\sqrt{2}$.

5. Первое решение. Найдем дискриминант исходного уравнения

$$D = 4(a-b-3)^2 - 4(a-b-13) = 4\left(a-b-\frac{7}{2}\right)^2 + 39.$$

Теперь ясно, что $D > 0$ для любых a и b. Следовательно, исходное уравнение для любых a и b имеет два корня. Тогда, если x_0 больший из них, то

$$x_0 = -a + b + 3 + \sqrt{\left(a - b - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}}.$$

Обозначим $t = -a + b + \frac{7}{2}$, тогда $x_0 = t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + \frac{39}{4}}$. При этом, если $a \geqslant 2$ и $b \leqslant 1$, то $t \leqslant \frac{5}{2}$. Следовательно, нам надо найти наибольшее значение функции

$$y = t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + \frac{39}{4}} \tag{3}$$

на промежутке $-\infty < t \leqslant \frac{5}{2}$.

Покажем, что функция (3) есть возрастающая функция. Найдем производную функции (3):

$$y' = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{39}{4}}}.$$

Легко видеть, что для любых t справедливо неравенство

$$1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{39}{4}}} > 0,$$

а это и означает, что функция (3) — возрастающая. Поэтому наибольшее значение на промежутке $-\infty < t \leqslant \frac{5}{2}$ она принимает при $t = \frac{5}{2}$. Следовательно, наибольшее значение x_0 равно 6.

Второе решение. Согласно условию задачи, для любого корня x_1 исходного уравнения должно выполняться равенство

$$x_1^2 + 2(a - b - 3)x_1 + a - b - 13 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$x_1^2 - 6x_1 + (a - b)(2x_1 + 1) - 13 = 0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что ни при каких значениях a и b корень x_1 данного квадратного уравнения не может равняться $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Тогда

перепишем равенство (4) в виде

$$a - b = \frac{-x_1^2 + 6x_1 + 13}{2x_1 + 1}.$$

По условию, $a \geqslant 2$; $b \leqslant 1$, и, значит, $a - b \geqslant 1$, следовательно, должно выполняться неравенство

$$\frac{-x_1^2 + 6x_1 + 13}{2x_1 + 1} = a - b \geqslant 1.$$

Множество решений неравенства $\dfrac{-x^2 + 6x + 13}{2x + 1} \geqslant 1$ состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant 2$ и $-\dfrac{1}{2} < x \leqslant 6$. Таким образом, если числа a и b удовлетворяют неравенствам $a \geqslant 2$ и $b \leqslant 1$, то наибольший корень данного квадратного уравнения не может превосходить 6, т. е. должно выполняться неравенство $x_1 \leqslant 6$. Легко проверить, что при $a = 2$ и $b = 1$ наибольший корень исходного уравнения равен 6.

Ответ: 6.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $(3; -9)$. 2. 0. 3. $\dfrac{\pi}{3} + \pi(2n + 1)$, $n \in Z$. 4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$. 5. 3.

Вариант 3. 1. $(-9; -3)$. 2. 0. 3. $\dfrac{\pi}{6} + \pi(2n + 1)$, $n \in Z$. 4. $4\sqrt{2}$. 5. 5.

Вариант 4. 1. $(-8; 2)$. 2. 0. 3. $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $5\sqrt{2}$. 5. 2.

1986

Решение варианта 1

1. Применяя формулу для косинуса суммы двух углов, перепишем уравнение в виде

$$2\cos x \cos\frac{\pi}{6} - 2\sin x \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cos x$$

или в виде

$$\sin x = 0.$$

Решение этого уравнения, а значит, и исходного уравнения, есть $x = \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in Z$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит их всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $1-2x>0$ и $5x-2>0$, т. е. есть промежуток $\frac{2}{5}<x<\frac{1}{2}$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$1-2x \geqslant 5x-2.$$

Решения этого неравенства образуют промежуток $-\infty<x\leqslant\frac{3}{7}$. Из них в ОДЗ исходного неравенства входят лишь значения x из промежутка $\frac{2}{5}<x\leqslant\frac{3}{7}$. Они и составляют множество решений исходного неравенства.

Ответ: $\frac{2}{5}<x\leqslant\frac{3}{7}$.

3. Обозначим через V_1 км/час и V_2 км/час скорости вспашки поля соответственно первым и вторым тракторами. Так как, работая с первоначальной скоростью, трактора вместе вспахали бы поле за 2 часа 40 минут, то площадь S га всего поля выражается через V_1 и V_2 в виде

$$S=(V_1+V_2)\cdot 2\frac{2}{3}.$$

Так как после увеличения скоростей поле было вспахано за 1 час 36 минут, то площадь всего поля выражается через V_1 и V_2 в виде

$$S=(2V_1+1,5V_2)\cdot 1\frac{3}{5}.$$

Из соотношения

$$(V_1+V_2)\cdot 2\frac{2}{3}=(2V_1+1,5V_2)\cdot 1\frac{3}{5}$$

находим, что $2V_1=V_2$. Все поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью, вспахал бы за

$$\frac{S}{V_1}=\frac{V_1+V_2}{V_1}\cdot 2\frac{2}{3}=\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)\cdot\frac{8}{3}=(1+2)\cdot\frac{8}{3}=8.$$

Ответ: 8 часов.

4. Графиком данной функции $y(x)=x^2+4x+7$ является парабола, изображенная на рис. 114. Возьмем на этой параболе точку с координатами (x_0, y_0). Уравнение касательной к параболе, проведенной в точке (x_0, y_0), имеет вид

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0), \qquad (1)$$

где $y_0 = y(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 7$ и $y'(x_0) = 2x_0 + 4$. Если касательная проходит через точку $A(-1;0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1), т. е. справедливо равенство

$$0 - (x_0^2 + 4x_0 + 7) = (2x_0 + 4)(-1 - x_0).$$

После упрощения получаем, что x_0 — абсцисса точки касания — удовлетворяет уравнению $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$, имеющему два корня $x_0^{(1)} = 1$ и $x_0^{(2)} = -3$. Точки параболы с абсциссами 1 и -3 имеют ординаты, равные соответственно 12 и 4. Итак, касательные к параболе в точках $B(-3;4)$ и $C(1;12)$ проходят через точку $A(-1;0)$, а их уравнения соответственно имеют вид

$$y - 4 = -2(x + 3), \text{ т. е. } y = -2x - 2,$$

и

$$y - 12 = 6(x - 1), \text{ т. е. } y = 6x + 6.$$

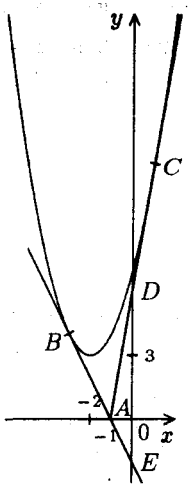


Рис. 114

Касательная AB пересекает ось ординат в точке $E(0;-2)$, а касательная AC — в точке $D(0;6)$. Искомая площадь S есть площадь треугольника ADE и, так как $DE = DO + OE = 6 + 2 = 8$ и $AO = 1$, то $S = \frac{1}{2}AO \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4$.

Ответ: 4.

5. Проведем через точку E прямую, параллельную прямой CD, и через K обозначим точку пересечения этой прямой со стороной AB (рис. 115).

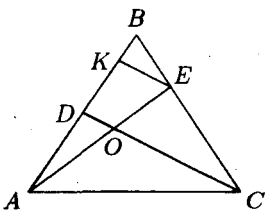


Рис. 115

Из подобия треугольников BKE и BDC имеем

$$\frac{BK}{BD} = \frac{EK}{DC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Из подобия треугольников AOD и AEK имеем

$$\frac{AE}{AO} = \frac{EK}{DO} = \frac{AK}{AD} = \frac{2AD - BK}{BD} = 2 - \frac{BK}{BD} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $AO = \frac{3}{5}AE = 3$. Из соотношения $DO = \frac{3}{5}EK = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}DC = \frac{1}{5}(DO + 4)$ находим, что $DO = 1$. Так

как $\angle AOC = 120°$, то $\angle AOD = 60°$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AOD, получаем

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot DO \cos(\angle AOD) = 9 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7,$$

откуда $AD = \sqrt{7}$, $AB = 2AD = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $-1 < x < 1$. 3. 10 час. 4. 6. 5. $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.

Вариант 3. 1. πn, $n \in Z$. 2. $\frac{4}{9} \leqslant x < \frac{1}{2}$. 3. 3 час. 4. 8. 5. $\sqrt{61}$.

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{4}$. 3. 1 мин. 4. 12. 5. $\sqrt{10 + 3\sqrt{2}}$.

1987

Решение варианта 1

1. Применив формулу для разности синусов, перепишем исходное уравнение в виде

$$5 \sin 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos 7x$$

или в виде

$$\sin 2x \cdot (5 - 2\cos 7x) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 7x = \frac{5}{2}.$$

Второе уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $|\cos x| \leqslant 1$ для любого действительного x. Решение первого уравнения совокупности, а значит, и исходного, есть $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех значений x, удовлетворяющих условию $2x + 3 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-\frac{3}{2} \leqslant x < +\infty$.

Разобьем этот промежуток на два множества $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$, и будем решать исходное неравенство на каждом из этих множеств отдельно.

а) Пусть $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$. На этом промежутке левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Значит, все x из этого промежутка являются решениями исходного неравенства.

б) Пусть $0 \leqslant x < +\infty$, тогда обе части исходного неравенства неотрицательны на этом множестве, и исходное неравенство равносильно на этом множестве неравенству

$$2x + 3 \geqslant x^2.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$x^2 - 2x - 3 \leqslant 0.$$

Множество его решений есть отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Из этих x в множество $0 \leqslant x < +\infty$ попадают только x из промежутка $0 \leqslant x \leqslant 3$. Эти x и являются решениями исходного неравенства в области $0 \leqslant x < +\infty$.

Объединяя решения, найденные на множествах $-\frac{3}{2} \leqslant x < 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$, получим, что множество решений исходного неравенства есть промежуток $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

3. Обозначим скорости первого и второго туриста соответственно через v_1 км/час и v_2 км/час. Ясно, что $v_1 \neq v_2$.

Если скорость первого туриста будет равна $(v_1 - 2)$ км/час, а скорость второго туриста равна $1,5v_2$ км/час, то из условия задачи получаем уравнение

$$\frac{20}{v_1 - 2} = \frac{20}{1,5v_2},$$

из которого следует, что $v_1 - 2 = 1,5v_2$ или $v_1 = 1,5v_2 + 2$. Таким образом, $v_1 > v_2$, и, значит, первый турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем второй, т. е. справедливо равенство

$$\frac{20}{v_2} - \frac{20}{v_1} = 2,5.$$

Подставив $1,5v_2 + 2$ вместо v_1 в это уравнение, после преобразований получим

$$\frac{3v_2^2 - 4v_2 - 32}{v_2(3v_2 + 4)} = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни $v_2' = 4$ и $v_2'' = -\frac{8}{3}$. Поскольку скорость туриста не может быть отрицательной, то условию задачи удовлетворяет $v_2 = 4$ км/час.

Ответ: 4 км/час.

4. Обозначим через O_1 и O_2 соответственно центры первой и второй окружностей, через CD — общую касательную, проведенную к окружностям и не проходящую через точку A (рис. 116). Пусть C_1 и D_1 — точки касания прямой CD соответственно с первой и со второй окружностью; $OC_1 = 2$. Так как радиус перпендикулярен касательной, то $O_1A \perp AB$ и $AO_2 \perp AB$, т. е. O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

Рассмотрим четырехугольник $O_1O_2D_1C_1$. Поскольку AB и C_1B касательные, проведенные к первой окружности из одной точки, то $C_1B = AB = 4$. Аналогично, $BD_1 = AB = 4$. Следовательно, $C_1D_1 = 8$. Ясно, что $O_1C_1 \neq O_2D_1$, в противном случае четырехугольник $O_1O_2D_1C_1$ являлся бы прямоугольником, а тогда $O_1C_1 = O_2D_1 = 2$, $O_1A + AO_2 = 4 = C_1D_1$, что противоречит тому, что $C_1D_1 = 8$. Значит, четырехугольник $O_1O_2D_1C_1$ есть трапеция. Проведем через O_1 прямую, параллельную прямой C_1D_1 (рис. 117) и через D_2 обозначим точку пересечения

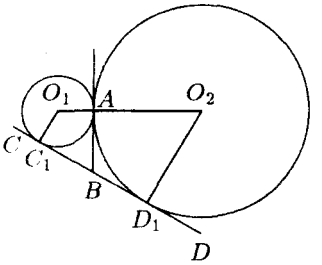


Рис. 116

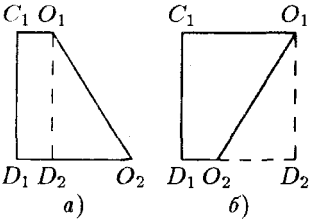


Рис. 117

этой прямой с прямой D_1O_2.

Пусть R — радиус второй окружности. При любом расположении точки D_2 — на отрезке D_1O_2 или на его продолжении — имеем (рис. 117 а), б)) $D_2O_2 = |D_1O_2 - O_1C_1| = |R - 2|$. Поскольку $D_1C_1 = D_2O_1 = 8$, $O_1O_2 = R + 2$, то из прямоугольного треугольника $O_1D_2O_2$ имеем $(R + 2)^2 = |R - 2|^2 + 64$, откуда $R = 8$.

Ответ: 8.

5. Выясним вначале, входит ли множество $-1 \leqslant x \leqslant 2$ в область определения данной функции $y = \sqrt{4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}$. Для этого достаточно доказать, что функция

$$f(x) = 4 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

принимает на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 2$ только положительные значения. Найдем наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 2]$. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на всей прямой. Чтобы найти наименьшее значение функции $f(x)$, надо найти ее значение в критических точках, принадлежащих промежутку $(-1; 2)$, а также на концах отрезка $[-1; 2]$, и среди полученных чисел выбрать наименьшее. Критические точки функции $f(x)$ являются корнями уравнения $f'(x) = 0$, т. е. уравнения $x^2 - x - 2 = 0$. Корни последнего уравнения есть $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Они совпадают с концами отрезка $[-1; 2]$. Следовательно, на интервале $(-1; 2)$ функция $f(x)$ не имеет критических точек. Поскольку $f(-1) = 5\frac{1}{6}$, $f(2) = \frac{2}{3}$, то наименьшее на отрезке $[-1; 2]$ значение функции $f(x)$ есть $\frac{2}{3}$, т. е. положительно. Поэтому для любого x из этого отрезка $f(x) > 0$. А это означает, что функция y определена на отрезке $[-1; 2]$.

Пусть $M(x; y)$ — точка, имеющая абсциссу x и ординату y. Тогда расстояние от этой точки до начала координат находится по формуле

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}.$$

Итак, задача сводится к нахождению такого x_0, в котором функция $d(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-1; 2]$. Очевидно, что наименьшие значения функций $d(x)$ и $d^2(x)$ принимаются на отрезке $[-1; 2]$ в одной и той же точке x_0. Обозначим $d^2(x)$ через $g(x)$ и рассмотрим производную функции $g(x)$: $g'(x) = x^2 + x - 2$. Так как $g'(x) = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, то для нахождения наименьшего значения функции $g(x)$ надо сравнить числа $g(1)$, $g(-1)$ и $g(2)$. Поскольку $g(1) = 2\frac{5}{6}$, $g(-1) = 6\frac{1}{6}$ и $g(2) = 4\frac{2}{3}$, то наименьшее значение функции $g(x)$, а значит, и функции $d(x)$ принимается в точке $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$. 2. $-6 \leqslant x \leqslant 3$. 3. 3 м^3/мин. 4. $3\sqrt{2}$. 5. $x = 2$.

Вариант 3. 1. $x = \frac{\pi}{14} + \pi k$, $k \in Z$. 2. $-\frac{10}{3} \leqslant x \leqslant 5$. 3. 3 км/час. 4. 4. 5. $x = -1$.

Вариант 4. 1. $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$. 2. $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant 5$. 3. 2 м^3/мин. 4. $4\sqrt{3}$. 5. $x = -2$.

1988

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, кроме тех, где $\cos x = 0$. Поэтому на ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$3\cos^2 x + 2\sin x = 0$$

или уравнению

$$3\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Так как квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ и $t_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого действительного x, а $\frac{1+\sqrt{10}}{3} > \frac{1+3}{3} > 1$. Решение второго уравнения есть

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) + \pi n, \ n \in Z. \qquad (2)$$

Поскольку $\cos x \neq 0$ ни для одного из этих x, то все эти x являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

2. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 118). Применяя теорему синусов, имеем $\frac{AD}{\sin 7^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$, откуда $AD = 6\sin 7^\circ$. Треугольник ADB прямоугольный, так как угол D опирается на диаметр. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \cos 30^\circ$, откуда $AB = \frac{12\sin 7^\circ}{\sqrt{3}} =$

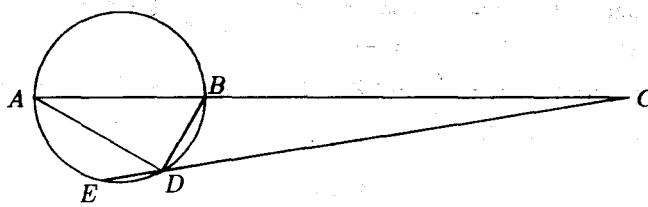


Рис. 118

$= 4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.

Ответ: $4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех действительных x. Для любого x из ОДЗ $25^x > 0$, поэтому, разделив уравнение на 25^x, получим уравнение

$$3\cdot\frac{4^x}{25^x} - 7\cdot\frac{10^x}{25^x} + 2 = 0, \qquad (3)$$

равносильное исходному.

Уравнение (3) можно переписать в виде

$$3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x} + 2 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $3z^2 - 7z + 2 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{1}{3}$ и $z_2 = 2$, то уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x} = 2.$$

Решение первого из этих уравнений есть $x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{3}$, а решение второго есть $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$. Оба этих числа являются решениями и исходного уравнения.

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{3}$; $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$.

4. Первое решение. Предположим, что для приготовления удобрения с искомыми свойствами надо взять x кг удобрения вида А и y кг удобрения вида Б. Тогда в x кг удобрения А будет $\frac{x}{6}$ кг калия, $\frac{3x}{6}$ кг азота, $\frac{2x}{6}$ кг фосфора, а в y кг удобрения Б будет $\frac{3y}{10}$ кг калия, $\frac{y}{2}$ кг азота и $\frac{y}{5}$ кг фосфора. Всего получится $(x+y)$ кг удобрения, в котором должно быть калия — $\left(\frac{x+y}{6}\right)$ кг, азота — $\left(\frac{x+y}{3}\right)$ кг и фосфора — $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ кг. Для

приготовления удобрения заданного свойства должны удовлетворяться одновременно соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{6} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{3y}{10}, \\ \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5}. \end{cases} \qquad (4)$$

Первое соотношение (4) можно записать так: $\dfrac{y}{6} = \dfrac{3y}{10}$, откуда $y = 0$, а тогда $x = 0$. Следовательно, система (4) имеет только нулевое решение, а это означает, что приготовить удобрение с заданным свойством нельзя.

Второе решение. В каждом из обоих видов удобрений А и Б азота содержится больше, чем фосфора. Ясно, что это свойство сохраняется и при смешивании удобрений. Поэтому требование приготовить удобрение, в котором фосфора больше, невыполнимо.

Ответ: нельзя.

5. Предположим, что p — такое значение параметра, для которого пара чисел $(x_0; y_0)$ удовлетворяет условию задачи. Так как $3\sin y_0 - 4\cos y_0 = 5\sin\left(y_0 - \arccos\dfrac{3}{5}\right)$ и $\sin z = \sin(\pi - z)$, то для единственности такой пары $(x_0; y_0)$ необходимо, чтобы $y_0 - \arccos\dfrac{3}{5} = \pi + \arccos\dfrac{3}{5} - y_0$, т. е. чтобы $y_0 = \dfrac{\pi}{2} + \arccos\dfrac{3}{5}$. Для этого значения y_0 имеем $3\sin y_0 - 4\cos y_0 = 5$.

Первое неравенство, данное в условии задачи, запишется в виде

$$x^2 + 2px + 3p^2 + 3p - 2 \leqslant 0. \qquad (5)$$

Таким образом, если p — искомое значение параметра, то неравенство (5) имеет единственное решение, что равносильно обращению в ноль дискриминанта квадратного трехчлена $x^2 + 2px + 3p^2 + 3p - 2$. Дискриминант этого трехчлена равен $(p^2 - 3p^2 - 3p + 2)$. Он обращается в ноль при $p = -2$ и при $p = \dfrac{1}{2}$. Итак, искомые значения параметра p содержатся среди чисел $p = -2$ и $p = \dfrac{1}{2}$. Проверим, удовлетворяют ли эти значения p условиям задачи.

При $p = -2$ имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 9 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases} \qquad (6)$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} (x-2)^2+5 \leqslant 5\sin\left(y-\arccos\dfrac{3}{5}\right), \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases} \qquad (7)$$

Так как левая часть первого неравенства не меньше 5, а правая не больше 5, то первое неравенство системы (7) справедливо только если выполнены условия $(x-2)^2+5=5$ и $5\sin\left(y-\arccos\dfrac{3}{5}\right)=5$, откуда $x=2$, $y=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{3}{5}+2\pi k$, $k \in Z$. Из всех этих значений y условию $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ удовлетворяет лишь одно $y=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{3}{5}$. Следовательно, система (6) имеет единственное решение. Итак, $p=-2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $p=\dfrac{1}{2}$. Тогда имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}+3 \leqslant 3\sin y-4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+5 \leqslant 3\sin y-4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Как и предыдущая, эта система имеет единственное решение.

Ответ: $p=-2$, $p=\dfrac{1}{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x=\pm\arccos\left(\dfrac{\sqrt{29}-2}{5}\right)+2\pi n$, $n \in Z$.

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}$. 3. $x=\log_{\frac{2}{7}} 2$; $x=\log_{\frac{2}{7}}\dfrac{2}{3}$. 4. Нельзя.

5. $p=-1$; $p=\dfrac{1}{3}$.

Вариант 3. 1. $x=(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{2-\sqrt{29}}{5}\right)+\pi n$, $n \in Z$.

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 11^\circ}$. 3. $x=\log_{\frac{5}{3}} 4$; $x=\log_{\frac{5}{3}}\dfrac{1}{2}$. 4. Нельзя. 5. $p=-\dfrac{1}{2}$; $p=3$.

Вариант 4. 1. $x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. $4\sqrt{3}\sin 17^\circ$. 3. $x = \log_{\frac{3}{2}} 5$; $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}$. 4. Нельзя.

5. $p = -\frac{1}{3}$; $p = 2$.

1989

Решение варианта 1

1. Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, то исходное уравнение перепишем в виде

$$\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

или в виде

$$\sin 2x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, а решения второго есть $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения будут $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.

2. Обозначим через x км длину пути автомобиля в пределах населенных пунктов, а через y км — длину пути вне населенных пунктов. Тогда для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{60} + \frac{y}{80} = 5, \\ \frac{x}{50} + \frac{y}{90} = 4\frac{3}{5}. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) находим $x = \frac{1200-3y}{4}$. Подставив $\frac{1200-3y}{4}$ вместо x во второе уравнение системы (1), получаем уравнение

$$\frac{1200-3y}{200} + \frac{y}{90} = \frac{23}{5},$$

откуда $y = 360$, а тогда $x = 30$.

Следовательно, расстояние между A и B равно 390 км.

Ответ: 390 км.

3. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x+2>0$, $x+2\neq 1$, $2x^2+x>0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков: $-2<x<-1$; $-1<x<-\frac{1}{2}$; $0<x<+\infty$.

Поскольку свойства логарифмов зависят от того, больше или меньше единицы основание логарифма, то рассмотрим два случая: а) $x+2>1$ и б) $0<x+2<1$.

Пусть $x+2>1$, т. е. пусть $x>-1$. Тогда для этих x исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству

$$2x^2+x\leqslant(x+2)^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2-3x-4\leqslant 0.$$

Множество решений этого неравенства есть промежуток $-1\leqslant x\leqslant 4$. Из этих x в ОДЗ исходного неравенства входят x из объединения множеств $-1<x<-\frac{1}{2}$ и $0<x\leqslant 4$. Так как эти x удовлетворяют условию $x+2>1$, то они и будут решениями исходного неравенства в случае а).

Пусть $0<x+2<1$, т. е. $-2<x<-1$.

На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$2x^2+x\geqslant(x+2)^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2-3x-4\geqslant 0.$$

Решение этого неравенства есть объединение двух промежутков $-\infty<x\leqslant -1$ и $4\leqslant x<+\infty$. Из этих x условию $-2<x<-1$ удовлетворяют все x из промежутка $-2<x<-1$. Они и являются решениями исходного неравенства в случае б).

Объединяя множества решений, найденных в случаях а) и б), получаем, что решениями исходного неравенства являются все x из объединения промежутков $(-2;-1)$,$(-1;-\frac{1}{2})$, $(0;4]$.

Ответ: $-2<x<-1$; $-1<x<-\frac{1}{2}$; $0<x\leqslant 4$.

4. Пусть ABC — данный в условии задачи прямоугольный треугольник. Обозначим через O_1 и O_2 соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD (рис. 119).

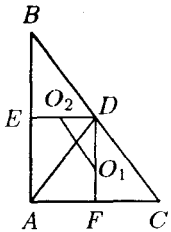


Рис. 119

Проведем прямую DE перпендикулярную AB и прямую DF перпендикулярную AC. Так как ABC прямоугольный треугольник, то $DE \parallel AC$ и $DF \parallel AB$. Так как D — середина BC, то $AF = FC$ и $AE = BE$. Треугольники ADF и FDC равны как прямоугольные по двум катетам ($AF = FC$, DF общий), значит, $\angle ADF = \angle FDC$, т. е. DF — биссектриса угла ADC. Поэтому центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ADC, лежит на DF. Аналогично доказывается, что центр O_2 окружности, вписанной в треугольник ADB, находится на DE. Поскольку $\angle O_1DO_2 = \frac{1}{2}\angle CDA + \frac{1}{2}\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, то треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

Найдем радиусы окружностей, используя формулу $R=\frac{2S}{p}$, где S — площадь треугольника, p — его периметр. Так как $BC = \sqrt{AB^2+AC^2} = 5$, то $AD=BD=DC=\frac{BC}{2}=\frac{5}{2}$. Так как DF и DE — средние линии треугольника, то $AF = FC = ED = \frac{3}{2}$, $AE = BE = DF = 2$. Поэтому периметр треугольника ADC равен 8, а площадь — $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DF = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 3$. Периметр треугольника ADB равен 9, а его площадь равна $\frac{1}{2}\cdot DE\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 3$. Отсюда радиус R_1 окружности, вписанной в треугольник ADC равен $R_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, а радиус R_2 окружности, вписанной в треугольник ADB, равен $R_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Поскольку $O_1D = FD - FO_1 = 2 - R_1 = \frac{5}{4}$ и $O_2D = ED - EO_2 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$, то из прямоугольного треугольника O_1DO_2 имеем

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + O_2D^2} = \frac{5}{12}\sqrt{13}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}\sqrt{13}$.

5. Перейдя к логарифму по основанию 2 и применяя формулу $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, перепишем исходное неравенство в виде

$$(-x^2 + 4x - 3)\log_2(1 + \cos^2 \pi x) \geqslant 1$$

или в виде

$$(1-(x-2)^2)\log_2(1+\cos^2\pi x) \geqslant 1.$$

Для любого действительного x имеем $1-(x-2)^2 \leqslant 1$, и поскольку $0 \leqslant \cos^2\pi x \leqslant 1$, то $\log_2(1+\cos^2\pi x) \leqslant 1$. Следовательно, для любого действительного x имеем

$$(1-(x-2)^2)\log_2(1+\cos^2\pi x) \leqslant 1.$$

Это означает, что исходное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 1-(x-2)^2 = 1, \\ \log_2(1+\cos^2\pi x) = 1. \end{cases}$$

Значит, $x = 2$, являющееся единственным решением первого уравнения системы, является также и решением второго ее уравнения. А это означает, что решением исходного неравенства является только $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. 2. 4 часа 45 минут. 3. $-1 < x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$; $1 < x \leqslant 5$. 4. $\frac{10}{3}$. 5. $x = \frac{1}{2}$.

Вариант 3. 1. $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$. 2. 48 км. 3. $-\frac{3}{2} < x < 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x \leqslant 4\frac{1}{2}$. 4. $\frac{5}{6}\sqrt{13}$. 5. $x = \frac{3}{2}$.

Вариант 4. 1. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. 2. 5 часов 40 минут. 3. $-\frac{5}{2} < x < -1$, $x \neq -\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2} < x \leqslant 3\frac{1}{2}$. 4. $\frac{3}{2}$. 5. $x = 3$.

§7. Географический факультет

1984

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть налево, запишем исходное уравнение в виде

$$\sin\frac{x}{2}(2\cos 2x - 1) = 0.$$

Это уравнение, а значит, и исходное уравнение, равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Множество решений первого уравнения есть $x = 2\pi n$, $n \in Z$, а множество решений второго есть $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. Объединение этих множеств решений и дает ответ в задаче.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.

2. Пусть точка O — центр ромба $ABCD$ (рис. 120). Из прямоугольного треугольника ABO, так как $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$, находим, что $BO = \frac{1}{2}AB = 3$. Применяя теорему косинусов к треугольнику OBE и учитывая, что $BE = BC - CE = 4$ и $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60°$, имеем

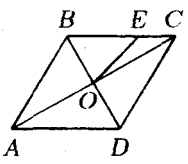


Рис. 120

$$OE^2 = BO^2 + BE^2 - 2BO\cdot BE\cos(\angle OBC) = 9 + 16 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 13,$$

отсюда $OE = \sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

3Н. Поскольку функции $y = x$ и $y = \ln\frac{1}{x-2}$ имеют производную в любой точке x из промежутка $(2; +\infty)$, то данная функция дифференцируема в каждой точке этого промежутка, и по правилу нахождения производной суммы

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}, \qquad x > 2.$$

Так как $\frac{x-3}{x-2} > 0$ при $x < 2$ и $x > 3$, и $\frac{x-3}{x-2} < 0$ при $2 < x < 3$, то $f'(x)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $2 < x < 3$ и равна нулю при $x = 3$.

Следовательно, на интервале $(2;3)$ функция $f(x)$ убывает, на промежутке $(3;+\infty)$ возрастает и, так как она непрерывна в точке $x=3$, то имеет в точке $x=3$ минимум, при этом $f(3)=3$.

Итак, наименьшее значение данной функции при $x>2$ равно 3.

Ответ: 3.

4. Пусть $ABCD$ — данная в условии задачи пирамида (рис. 121), P — середина высоты пирамиды SO. Не ограничивая общности, будем считать, что плоскость сечения проведена перпендикулярно ребру DS и пересекает его в точке K. Так как пирамида правильная, то в ее основании лежит квадрат, и основание O высоты пирамиды совпадает с его центром.

Так как величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани пирамиды, равна $\frac{\pi}{3}$, то треугольник ASB равносторонний, и, значит, сторона квадрата, лежащего в основании, равна 4, а длина его диагоналей AC и BD равна $4\sqrt{2}$. Треугольники DAB и DSB имеют общую сторону DB, а кроме того, $DA=DS=4$ и $BA=BS=4$. Следовательно, эти треугольники равны. В частности, $\angle DSB=\angle DAB=\frac{\pi}{2}$ и $SO=AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$. Кроме того, SO есть медиана, а значит, и биссектриса в равнобедренном треугольнике DSB. Поэтому $\angle DSO=\frac{1}{2}\angle DSB=\frac{\pi}{4}$.

Так как плоскость сечения перпендикулярна ребру DS, то $DS\perp KP$. Поскольку точки K и P лежат в плоскости DSB и $KP\perp DS$, $BS\perp DS$, то $KP\parallel BS$. Рассмотрим треугольник DSB (рис. 122). Пусть M — точка пересечения прямых KP и DB. Согласно условию P есть середина отрезка SO, а по доказанному $PM\parallel BS$. Следовательно, PM есть средняя ли-

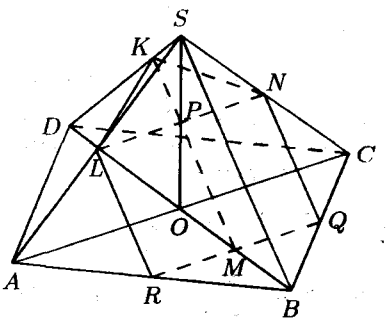


Рис. 121

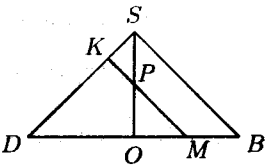


Рис. 122

ния треугольника OBS, и M — середина отрезка OB. Тогда $PM = \frac{1}{2}BS = 2$ и $KP = PS \cdot \sin(\angle KSP) = \frac{1}{2}SO \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Обозначим буквами R, L, N и Q точки, в которых сечение пересекает прямые AB, AS, CS и CB соответственно. Точка M лежит на прямой RQ, по которой сечение пересекает плоскость основания пирамиды. Прямая DS перпендикулярна плоскости сечения, поэтому $DS \perp RQ$. По теореме о трех перпендикулярах можно утверждать, что проекция DS на плоскость $ABCD$ перпендикулярна RQ, т. е. $DO \perp RQ$. Отсюда, так как диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны, следует, что $AC \parallel RQ$. Теперь, поскольку M есть середина отрезка OB, заключаем, что R и Q — середины отрезков AB и BC соответственно. В частности, это означает, что $RQ = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$.

Плоскость сечения и плоскость ABS проходят через параллельные прямые MK и BS соответственно. Поэтому линия их пересечения — прямая RL — параллельна BS. Но тогда RL есть средняя линия треугольника ABS и L — середина отрезка AS. Аналогично доказывается, что $ON \parallel BS$ и N — середина отрезка CS. Так как $RL \parallel BS$ и $QN \parallel BS$, то $RL \parallel QN$. Кроме того, $RL = \frac{1}{2}BS = QN$. Следовательно, четырехугольник $RLNQ$ — параллелограмм, и $LN = RQ = 2\sqrt{2}$, $LN \parallel RQ$.

Точка P лежит на линии пересечения плоскости ASC и плоскости сечения, т. е. на прямой LN. Поэтому $LP \parallel RM$. В силу того, что $MP \parallel BS$ и $RL \parallel BS$, заключаем, что $MP \parallel RL$. Значит, четырехугольник $RLPM$ — параллелограмм, и $LR = PM = 2$, $LN = RQ = 2\sqrt{2}$.

Поскольку $RQ \perp OM$ и OM есть проекция PM на плоскость $ABCD$, то по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, можно утверждать, что $PM \perp RQ$, и, так как $LR \parallel PM$ и $LN \parallel RQ$, что $RLNQ$ есть прямоугольник и KP — высота в треугольнике LKN.

Поэтому

$$S_{RLNQ} = LR \cdot RQ = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$
$$S_{LKN} = \frac{1}{2}KP \cdot LN = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Площадь сечения равна

$$S_{RLNQ} + S_{LKN} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

5. При $y = 1$ и любом значении x второе уравнение заданной системы имеет противоречивый вид: $3 = 0$. Так что эта система ни при каком значении параметра α не имеет решений вида $(x_0, 1)$, и для каждого ее решения, если оно существует, должно выполняться равенство

$$x = \frac{|2+y|}{y-1}.$$

Подставляя это выражение вместо x в первое уравнение исходной системы, после упрощений получим, что при любом значении α множество решений исходной системы уравнений совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} x = \dfrac{|2+y|}{y-1}, \\ y(\alpha|y+2| + y - 1) + 13|y+2| - \alpha(y^2-1) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Найдем теперь все значения параметра α, при каждом из которых второе уравнение системы (1) имеет решение y_0, отличное от единицы.

Соответствующее значение x_0, найденное из первого уравнения системы (1), и y_0 образуют решение исходной системы.

Найдем сначала все значения параметра α, при каждом из которых второе уравнение системы (1) имеет решения, удовлетворяющие условиям $y \geqslant -2$ и $y \neq 1$.

На множестве $y \geqslant -2$ уравнение

$$y(\alpha|y+2| + y - 1) + 13|y+2| - \alpha(y^2-1) = 0 \qquad (2)$$

перепишется в виде

$$y^2 + 2y(6+\alpha) + 26 + \alpha = 0. \qquad (3)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = 4(6+\alpha)^2 - 4(26+\alpha) = 4(\alpha+10)(\alpha+1).$$

Следовательно, уравнение (3) имеет решения, если $D \geqslant 0$, иными словами, если $\alpha \geqslant -1$, либо если $\alpha \leqslant -10$; тогда уравнение (3) имеет решения

$$y_1 = -\left[6 + \alpha + \sqrt{\frac{D}{4}}\right] \quad \text{и} \quad y_2 = -\left[6 + \alpha - \sqrt{\frac{D}{4}}\right].$$

Если $\alpha \geqslant -1$, то $6 + \alpha + \sqrt{D} \geqslant 5$ означает, что $y_1 \leqslant -5$, т. е. при $\alpha \geqslant -1$ корень y_1 уравнения (3) не попадает в множество $y \geqslant -2$. Выясним теперь, когда корень y_2 попадает в множество $y \geqslant -2$. Для этого решим неравенство

$$-\left[6 + \alpha - \sqrt{\frac{D}{4}}\right] \geqslant -2.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$4+\alpha \leqslant \sqrt{(\alpha+10)(\alpha+1)}.$$

Для $\alpha \geqslant -1$ обе части этого неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству

$$(4+\alpha)^2 \leqslant (\alpha+10)(\alpha+1),$$

решения которого составляют промежуток $2 \leqslant \alpha < +\infty$. Легко видеть, что для $\alpha \geqslant 2$ выполнено неравенство $y_2 < 1$. Действительно, неравенство $y_2 < 1$ можно записать в виде

$$\sqrt{\alpha^2+11\alpha+10} < 7+\alpha.$$

Для $\alpha \geqslant 2$ это неравенство равносильно неравенству

$$\alpha^2+11\alpha+10 < (7+\alpha)^2,$$

которое можно записать в виде $0 < 39+3\alpha$. Последнее неравенство, очевидно, выполнено для $\alpha \geqslant 2$, следовательно, для $\alpha \geqslant 2$ имеем $y_2 < 1$.

Итак, в области $-1 \leqslant \alpha < 2$ уравнение (3) не имеет решений в области $y \geqslant 2$, а при $\alpha \geqslant 2$ имеет в этой области одно решение y_2 такое, что $y_2 \neq 1$. Это означает, что все $\alpha \geqslant 2$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь $\alpha \leqslant -10$, тогда очевидно, что больший корень уравнения (3) удовлетворяет условию $y_2 > 1$. Действительно, для $\alpha \leqslant -10$ имеем

$$y_2 = \sqrt{\frac{D}{4}} + (-\alpha) - 6 \geqslant 10 - 6 = 4 > 1.$$

Следовательно, при $\alpha \leqslant -10$ уравнение (3) имеет в области $y \geqslant -2$ решение y_2 такое, что $y_2 \neq 1$. Это означает, что все $\alpha \leqslant -10$ удовлетворяют условию задачи.

Найдем теперь все значения параметра α из промежутка $-10 < \alpha < 2$, при каждом из которых второе уравнение системы (1) имеет решения, удовлетворяющие условию $y < -2$.

На множестве $y < -2$ уравнение (2) перепишется в виде

$$(2\alpha-1)y^2 + 2(\alpha+7)y + 26 - \alpha = 0. \qquad (4)$$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то уравнение (4) принимает вид

$$15y + \frac{51}{2} = 0,$$

и единственный его корень $y_1 = -\frac{51}{30}$ не лежит в области $y < -2$.

Если $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение (4) квадратное, и его дискриминант D равен

$$D = 4(\alpha+7)^2 - 4(2\alpha-1)(26-\alpha) = 12\left[\left(\alpha - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{69}{4}\right].$$

Ясно, что $D \geqslant 0$ для $\alpha \geqslant \frac{13+\sqrt{69}}{2}$ и для $\alpha \leqslant \frac{13-\sqrt{69}}{2}$; так как $\frac{13-\sqrt{69}}{2} > 2$, то $D > 0$ для α из промежутков $-10 < \alpha < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, т. е. для α из этих промежутков уравнение (4) имеет два корня

$$y_1 = \frac{\alpha+7+\sqrt{\frac{D}{4}}}{1-2\alpha} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{\alpha+7-\sqrt{\frac{D}{4}}}{1-2\alpha}.$$

Легко проверить, что для α из промежутка $-10 < \alpha < \frac{1}{2}$ имеем для меньшего из этих корней неравенство $y_2 \geqslant -2$. Действительно, неравенство $y_2 \geqslant -2$ на промежутке $-10 < \alpha < \frac{1}{2}$ можно переписать в виде

$$\alpha + 7 - \sqrt{\frac{D}{4}} \geqslant -2(1-2\alpha)$$

или в виде

$$9 - 3\alpha \geqslant \sqrt{3(\alpha^2 - 13\alpha + 25)}.$$

Для рассматриваемых α обе части последнего неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству

$$(9-3\alpha)^2 \geqslant 3(\alpha^2 - 13\alpha + 25),$$

которое после упрощений запишется в виде

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 \geqslant 0. \qquad (5)$$

Неравенство (5) справедливо для всех α из двух промежутков $2 \leqslant \alpha < +\infty$ и $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, для α из промежутка $-10 < \alpha < \frac{1}{2}$ имеем $y_1 \geqslant y_2 \geqslant -2$, т. е. для α из рассматриваемого промежутка уравнение (4) не имеет корней, удовлетворяющих условию $y < -2$.

Легко проверить, что для α из промежутка $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ для большего из этих корней имеем неравенство $y_2 < -2$.

Действительно, неравенство $y_2 < -2$ на промежутке $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ можно переписать в виде

$$\alpha + 7 - \sqrt{\frac{D}{4}} < -2(1 - 2\alpha)$$

или в виде

$$3\alpha - 9 < \sqrt{3(\alpha^2 - 13\alpha + 25)}.$$

Для рассматриваемых α обе части последнего неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству

$$(3\alpha - 9)^2 < 3(\alpha^2 - 13\alpha + 25),$$

которое после упрощений запишется в виде

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 < 0. \qquad (6)$$

Неравенство (6) справедливо для α из промежутка $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

Следовательно, для α из промежутка $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ уравнение (4) имеет корни, удовлетворяющие условию $y < -2$. Это означает, что все α из промежутка $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ удовлетворяют условию задачи.

Итак, второе уравнение системы (1) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $y \neq 1$ для всех α из двух промежутков $-\infty < \alpha \leqslant -10$ и $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$.

Как указывалось выше, при любых таких α исходная система имеет решения.

Следовательно, все эти α и дают ответ в задаче.

Ответ: $-\infty < \alpha \leqslant -10$; $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$.

3С. ОДЗ исходного неравенства определяется условиями $x^2 - 6x + 18 > 0$ и $x - 4 > 0$. Так как первое из этих неравенств справедливо для любых x, то ОДЗ состоит из всех $x > 4$.

На ОДЗ исходное неравенство можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)^2. \qquad (7)$$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то на области $x > 4$ неравенство (7) равносильно неравенству

$$x^2 - 6x + 18 > (x - 4)^2,$$

решения которого составляют промежуток $-1 < x < +\infty$. Из этих x в область $x > 4$ входят все $x > 4$, они и будут давать ответ в задаче.

Ответ: $x > 4$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pi + 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi l}{3}$; $k \in Z$, $n \in Z$, $l \in Z$. 2. $\sqrt{21}$. 3 Н. $f_{min} = 1$. 3 С. $4 < x < +\infty$. 4. 17. 5. $-\infty < \alpha < -1$; $1 < \alpha < +\infty$.

Вариант 3. 1. $x = 4k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$; $k \in Z$, $n \in Z$. 2. $\sqrt{5,25}$. 3 Н. $f_{max} = 2$. 3 С. $4 < x < +\infty$. 4. $8+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$. 5. $-\infty < \alpha < -\frac{1}{2}$; $3 < \alpha < +\infty$.

Вариант 4. 1. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + 8\pi n$; $x = \frac{10}{3}\pi + 8\pi l$; $k \in Z$, $n \in Z$, $l \in Z$. 2. $\sqrt{7}$. 3 Н. $f_{max} = 1$. 3 С. $4 < x < +\infty$. 4. 8. 5. $-\infty < \alpha < -5 - 4\sqrt{2}$; $0 < \alpha < +\infty$.

1985

Решение варианта 1

1. Воспользовавшись формулой для косинуса двойного угла, данное уравнение можно переписать в виде

$$3\cos x = 2\cos^2 x$$

или в виде

$$\cos x(2\cos x - 3) = 0.$$

Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = 0.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $\frac{3}{2} > 1$. Решения второго уравнения есть $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Они и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2. Область допустимых значений неравенства определяется из условий $3x - 1 > 0$, $3x - 1 \neq 1$ и $2x > 0$, т. е. ОДЗ является промежутком $\frac{1}{3} < x < +\infty$. Так как свойства логарифмов различны при основаниях больших и меньших единицы, то рассмотрим два случая: $3x - 1 > 1$ и $0 < 3x - 1 < 1$.

Пусть $0 < 3x - 1 < 1$, т. е. $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству $2x < 3x - 1$, множество решений которого есть $x > 1$. Ни одно из этих значений x не удовлетворяет условию $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ и поэтому не является решением исходного неравенства.

Пусть $3x - 1 > 1$, т. е. $x > \frac{2}{3}$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству $2x > 3x - 1$, множество решений которого есть $x < 1$. Из этих чисел решениями исходного неравенства будут лишь те, которые удовлетворяют условию $x > \frac{2}{3}$, т. е. только x из промежутка $\frac{2}{3} < x < 1$.

Значит, множество всех решений исходного неравенства есть промежуток $\frac{2}{3} < x < 1$.

Ответ: $\frac{2}{3} < x < 1$.

3. Расположение пунктов A, B и C изображено на рис. 123. Обозначим через x время движения автобуса из пункта B в C. Тогда, в соответствии с условием задачи, грузовик находился в пути $(x + 1)$ час.

Учитывая скорости автомобиля и грузовика, находим, что $BC = 60x$ км, $AC = 40(x + 1)$ км. Согласно теореме косинусов выполняется равенство

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 60^\circ,$$

т. е.

$$120^2 = 40^2(x + 1)^2 + 60^2x^2 - 2 \cdot 40(x + 1)60x.$$

После упрощений приходим к квадратному уравнению

$$7x^2 + 2x - 32 = 0,$$

имеющему единственный положительный корень $x_1 = 2$.

Значит, $x = 2$, т. е. автобус находился в пути 2 часа.

Ответ: 2 часа.

4. Обозначим через α, β, γ соответственно углы A, B и C треугольника ABC (рис. 124). Тогда $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \frac{\pi}{7}$, $\angle A'DC' = \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$. Углы $DA'C'$ и $DC'A'$ равны, так как треугольник $A'DC'$ равнобедренный. Значит, каждый из этих углов равен

$$\frac{1}{2}\left(\pi - \left(\pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right)\right) = \frac{\alpha + \gamma}{4}.$$

Аналогично доказывается, что каждый из углов $DA'B'$ и $DB'A'$ равен $\frac{\alpha + \beta}{4}$, а каждый из углов $DB'C'$ и $DC'B'$ равен $\frac{\beta + \gamma}{4}$.

Угол $B'A'C'$ равен сумме углов $DA'B'$ и $DA'C'$, т. е. равен $\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{4} = \frac{\pi + \alpha}{4}$.

Аналогично находим, что угол $A'B'C'$ равен $\frac{\pi + \beta}{4}$, а

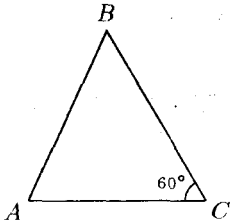


Рис. 123

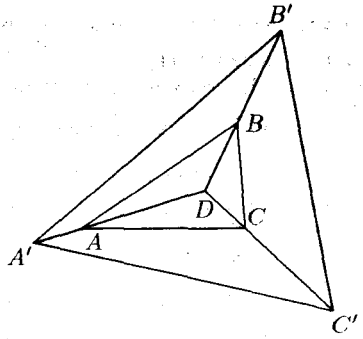


Рис. 124

угол $A'C'B'$ равен $\dfrac{\pi+\gamma}{4}$.

Поскольку

$$\frac{\pi+\beta}{4}-\frac{\pi+\alpha}{4}=\frac{\beta-\alpha}{4}=\frac{\pi}{28}$$

и

$$\frac{\pi+\gamma}{4}-\frac{\pi+\beta}{4}=\frac{\gamma-\beta}{4}=\frac{\pi}{28},$$

то углы треугольника A', B' и C' образуют арифметическую прогрессию, и ее разность равна $\dfrac{\pi}{28}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{28}$.

5. Заданное в условии задачи выражение, очевидно, не может принимать значений, меньших, чем 1. Преобразуем подкоренное выражение следующим образом

$$\begin{aligned} x^2-2axy+y^2-6y+10 &= y^2-2(ax+3)y+x^2+10= \\ &= (y-ax-3)^2+(1-a^2)x^2-6ax+1. \end{aligned} \tag{1}$$

Если неравенство

$$(1-a^2)x^2-6ax+1<0 \tag{2}$$

имеет решение x_0, то, определив числа y_1, y_2 следующим образом

$$y_1=ax_0+3+\sqrt{(a^2-1)x_0^2+6ax_0-1},$$
$$y_2=ax_0+3-\sqrt{(a^2-1)x_0^2+6ax_0-1},$$

получим, что заданное выражение принимает наименьшее значение, равное 1, при двух различных парах чисел (x_0, y_1) и (x_0, y_2).

Итак, для каждого значения параметра a, отвечающего условию задачи, неравенство (2) относительно переменной x не должно иметь решений.

Дискриминант D квадратного неравенства (2) равен $D = (6a)^2 - 4(1-a^2) = 4(10a^2-1)$. Согласно условию $1-a^2>0$, поэтому все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $D \leqslant 0$, т. е. неравенству

$$10a^2 - 1 \leqslant 0. \qquad (3)$$

Фиксируем какое-нибудь значение a, для которого выполнено неравенство (3), и продолжим преобразование выражения (1) следующим образом

$$x^2-2axy+y^2-6y+10 = (y-ax-3)^2+(1-a^2)x^2-6ax+1 =$$
$$= (y-ax-3)^2 + (1-a^2)\left(x - \frac{3a}{1-a^2}\right)^2 + \frac{1-10a^2}{1-a^2}.$$

Учитывая неравенства $1-a^2>0$ и $1-10a^2 \geqslant 0$, заключаем, что наименьшее значение исходного выражения равно

$$1 + 2\sqrt{\frac{1-10a^2}{1-a^2}}$$

и принимается в единственной точке (x_0, y_0), где $x_0 = \dfrac{3a}{1-a^2}$ и $y_0 = ax_0 + 3 = \dfrac{3}{1-a^2}$.

Итак, множество значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи, совпадает с множеством решений неравенства (3), т. е. имеет вид $-\dfrac{1}{\sqrt{10}} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{\sqrt{10}} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pi n$, $n \in Z$. 2. $1 < x < 1,5$. 3. 4. 4. $-\dfrac{\pi}{18}$. 5. $-\dfrac{1}{3} \leqslant b \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Вариант 3. 1. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. $1 < x < 2$. 3. 3. 4. $\dfrac{\pi}{32}$. 5. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant c \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4. 1. $x = 2\pi n$, $n \in Z$. 2. $\dfrac{1}{2} < x < 2$. 3. 5. 4. $-\dfrac{\pi}{14}$. 5. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqslant d \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

1986

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{-(x^2+1)}{2(x^2+2x-5)} > 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному.

Поскольку x^2+1 больше нуля при любом значении x, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$x^2+2x-5<0. \qquad (2)$$

Корни квадратного трехчлена x^2+2x-5 есть $x_1=-1+\sqrt{6}$ и $x_2=-1-\sqrt{6}$, поэтому решения неравенства (2), а значит, и исходного неравенства, составляют промежуток $-1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6}$.

Ответ: $-1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6}$.

2. Область допустимых значений данного уравнения имеет вид $x>0$, $x\neq 1$. Перейдя на ОДЗ в выражении $\log_{x^2}27$ к логарифму по основанию x, имеем

$$\log_{x^2}27=\frac{\log_x 27}{\log_x x^2}=\frac{3\log_x 3}{2}.$$

Кроме того, $\log_x\sqrt{3}=\frac{1}{2}\log_x 3$. Поэтому исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\frac{1}{2}\log_x 3-\frac{3}{2}\log_x 3=\frac{1}{2},$$

т. е. уравнению

$$\log_x 3=-\frac{1}{2}.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{9}$, лежащее в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходному уравнению удовлетворяет только одно число $x=\frac{1}{9}$.

Ответ: $x=\frac{1}{9}$.

3. Обозначим через V л объем цистерн, а через x л и y л — количество воды в начальный момент времени соответственно во второй и в третьей цистернах.

Первая цистерна наполнится за время, равное $\frac{V}{100}$ минут, вторая — за $\frac{V-x}{60}$ минут и третья — за $\frac{V-y}{80}$ минут. Сле-

довательно, неизвестные V, x и y связаны соотношениями

$$\frac{V-x}{60}=\frac{V}{100} \quad \text{и} \quad \frac{V-y}{80}=\frac{V}{100}.$$

Из первого соотношения находим, что $x=\frac{2V}{5}$, а из второго — что $y=\frac{1}{5}V$. Отсюда искомое отношение $\frac{x}{y}$ равно 2.

Итак, в начальный момент во второй цистерне воды было в 2 раза больше, чем в третьей.

Ответ: в 2 раза.

4. Обозначим через α и β соответственно величины углов BAK и KCB (рис. 125). Так как $\alpha+15^\circ=180^\circ-\angle AKB$ и $\beta+15^\circ=180^\circ-\angle BKC$, то $\alpha+\beta+30^\circ=360^\circ-\angle AKB-\angle BKC=\angle AKC=120^\circ$, откуда $\alpha+\beta=90^\circ$.

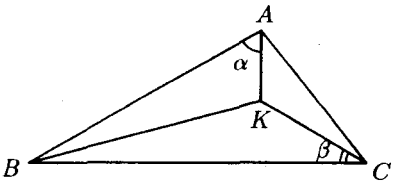


Рис. 125

Применяя теорему синусов к треугольникам AKB и CKB, имеем

$$\frac{BK}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 15^\circ} \quad \text{и} \quad \frac{BK}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ}.$$

Из последних двух равенств получаем, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{3}$, и так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos(90^\circ-\beta)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{3}$, то $\alpha=60^\circ$.

Следовательно, $BK=\frac{\sin\alpha}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin(45^\circ-30^\circ)}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$.

5. Из условия $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right)=1$ находим, что

$$xy=4n,\ n\in Z. \tag{3}$$

Обозначим заданное выражение буквой A и преобразуем его, учитывая, что $xy=4n$, следующим образом

$$A=x^2+y^2-2a(x+y)=(x+y)^2-2a(x+y)-8n=$$
$$=(x+y-a)^2-a^2-8n.$$

Рассмотрим сначала случай $n \leqslant 0$.

Имеем $A \geqslant -a^2 - 8n \geqslant -a^2$. Итак, при любом $n \leqslant 0$ и любых числах x и y, удовлетворяющих (3), справедливо неравенство $A \geqslant -a^2$, причем заданное выражение принимает значение $-a^2$ при $n = 0$, $x = 0$ и $y = a$, а также при $n = 0$, $x = a$ и $y = 0$.

Рассмотрим теперь случай $n \geqslant 1$.

Тогда числа x, y, удовлетворяющие равенству (3), должны быть отличны от нуля и иметь одинаковые знаки. Если $x > 0$ и $y > 0$, то, пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, находим $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} = 2\sqrt{n}$, так что $x + y \geqslant 4\sqrt{n}$. Квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - a^2 - 8n$ возрастает на множестве $t \geqslant 0$. Поскольку $4\sqrt{n} \geqslant 4 > a$, то имеем

$$A = f(x + y - a) \geqslant f(4\sqrt{n} - a) = (4\sqrt{n} - a)^2 - a^2 - 8n =$$
$$= 8n - 8a\sqrt{n} = 8\left(\sqrt{n} - \frac{a}{2}\right)^2 - 2a^2.$$

Функция $\varphi(z) = 8z^2 - 2a^2$ возрастает на множестве $z \geqslant 0$. Поэтому при $n \geqslant 1$ в силу неравенства $\sqrt{n} \geqslant 1 > \frac{a}{2}$ имеем

$$A \geqslant 8n - 8a\sqrt{n} = \varphi\left(\sqrt{n} - \frac{a}{2}\right) \geqslant \varphi\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 8(1 - a).$$

Если $x < 0$ и $y < 0$, то $x + y < 0$ и

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy \geqslant 2xy = 8n,$$

так что

$$A = x^2 + y^2 - 2a(x + y) > x^2 + y^2 \geqslant 8n > 8(1 - a).$$

Итак, при любом $n \geqslant 1$ и любых числах x и y, удовлетворяющих (3), справедливо неравенство $A \geqslant 8(1 - a)$, причем значение $8(1 - a)$ принимается заданным выражением при $n = 1$ и $x = y = 2$.

Таким образом, наименьшее значение A совпадает с меньшим из двух чисел $(-a^2)$ и $8(1 - a)$. Неравенство $8(1 - a) < -a^2$ верно при любом a из промежутка $4 - 2\sqrt{2} < a < 4 + 2\sqrt{2}$. Поэтому в случае $0 < a < 4 - 2\sqrt{2}$ меньшим будет число $-a^2$, при $4 - 2\sqrt{2} < a < 2$ меньшим будет число $8(1 - a)$, а при $a = 4 - 2\sqrt{2}$ имеем $-a^2 = 8(1 - a) = -8(3 - 2\sqrt{2})$.

Ответ: $-a^2$, если $0 < a < 4 - 2\sqrt{2}$; $-8(3 - 2\sqrt{2})$, если $a = 4 - 2\sqrt{2}$; $8(1 - a)$, если $4 - 2\sqrt{2} < a < 2$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-3 - \sqrt{13} < x < -3 + \sqrt{13}$. 2. $\frac{1}{25}$.

3. 80 литров. 4. $\sqrt{\frac{6}{5}}$. 5. $-\frac{a^2}{2}$ при $0 \leqslant a \leqslant 2-\sqrt{2}$; $1-2a$ при $a \geqslant 2-\sqrt{2}$.

Вариант 3. 1. $-4-\sqrt{17} < x < -4+\sqrt{17}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{7}}$. 3. 3 раза. 4. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. 5. $-2a^2$ при $-\infty < a \leqslant 3-2\sqrt{2}$; $2-3a^2$ при $3-2\sqrt{2} \leqslant a < +\infty$.

Вариант 4. 1. $-3-\sqrt{11} < x < -3+\sqrt{11}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3. 600 литров. 4. $\sqrt{\frac{12}{7}}$. 5. $-\frac{a^2}{2}$ при $0 < a \leqslant 4-2\sqrt{2}$; $-4(a-1)$ при $4-2\sqrt{2} \leqslant a < 2$.

1987

Решение варианта 1

1. Поскольку $3^{\log_3 2} = 2$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$7^x - 14 \cdot 7^{-x} - 5 = 0. \qquad (1)$$

Обозначив 7^x через y, уравнение (1) можно переписать в виде

$$y - \frac{14}{y} - 5 = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{y^2 - 5y - 14}{y} = 0,$$

имеющему два корня $y_1 = 7$ и $y_2 = -2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$7^x = 7 \quad \text{и} \quad 7^x = -2.$$

Первое из этих уравнений имеет единственное решение $x = 1$, а второе уравнение решений не имеет, так как -2 не входит в область изменения показательной функции. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

2. Обозначим $|y|$ через z. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$z^2 + 3z - 10 < 0.$$

Множество решений этого неравенства есть промежуток $-5 < z < 2$. Следовательно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$-5 < |y| < 2,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$|y| < 2.$$

Решения этого неравенства образуют промежуток $-2 < y < 2$, они и дают все решения исходного неравенства.

Ответ: $-2 < y < 2$.

3. Так как радиус окружности равен $2\sqrt{5}$, а длина отрезка, отсекаемого от прямой BC равна $4\sqrt{5}$, то этот отсекаемый отрезок является диаметром окружности, и, значит, ее центр — точка O — лежит на прямой BC (рис. 126, 127). Так как $BF < AO$,

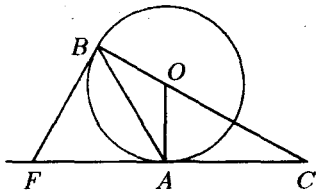


Рис. 126

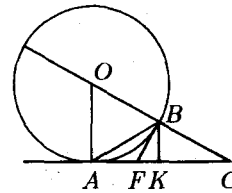


Рис. 127

то возможен лишь рис. 127. Треугольники OAC и FBC прямоугольные с общим углом при вершине C, поэтому они подобны. Из подобия этих треугольников имеем $\frac{OA}{BF} = \frac{OC}{FC} = \frac{AC}{BC}$, откуда $AC = \sqrt{5}BC$, $OC = \sqrt{5}FC$. Так как $OC = OB + BC$, то $\sqrt{5}FC = 2\sqrt{5} + BC$, т. е. $FC = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}BC$. Так как треугольник FBC прямоугольный, то $BF^2 + BC^2 = FC^2$, т. е. $4 + BC^2 = \left(2 + \frac{BC}{\sqrt{5}}\right)^2$, откуда $BC = \sqrt{5}$. Тогда $AC = 5$, $FC = 3$. Опустим из точки B перпендикуляр на сторону AC. Прямоугольные треугольники BFC и BKC подобны, так как они имеют общий угол при вершине. Из подобия имеем $\frac{BK}{BC} = \frac{FB}{FC}$, откуда $BK = \frac{2}{3}\sqrt{5}$. Теперь S — площадь треугольника ABC — можно найти: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{5}}{3}$.

4. Пусть (x_0, y_0) есть решение исходной системы уравнений. Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} \sin(2x_0 + y_0) = 0, \\ \cos(x_0 + y_0) = 1. \end{cases}$$

Из второго равенства системы имеем $x_0 + y_0 = 2\pi m$, $m \in Z$, откуда $x_0 = 2\pi m - y_0$, $m \in Z$. Подставляя это значение x_0 в первое равенство, получаем равенство $\sin(4\pi m - 2y_0 + y_0) = 0$, которое можно переписать в виде $\sin y_0 = 0$. Значения y_0, удовлетворяющие этому равенству и условию $-2\pi \leqslant y_0 \leqslant -\pi$, есть $y_0' = -\pi$ и $y_0'' = -2\pi$.

Если $y_0' = -\pi$, то $x_0' = 2\pi m + \pi$ и $m \in Z$, если $y_0'' = -2\pi$, то $x_0'' = 2\pi m + 2\pi$, $m \in Z$,

Теперь надо среди чисел x_0' и x_0'' найти такие, для которых $-\pi \leqslant x_0 \leqslant \pi$. Такими значениями x_0 будут $x_0' = \pi$, $x_0' = -\pi$ и $x_0'' = 0$.

Легко проверить, что решениями исходной системы будут следующие пары чисел

$$\begin{cases} x_1 = -\pi, \\ y_1 = -\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \pi, \\ y_2 = -\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = -2\pi. \end{cases}$$

Ответ: $(-\pi, -\pi)$; $(\pi, -\pi)$; $(0, -2\pi)$.

5. Рассмотрим отдельно два случая $b \leqslant 2$ и $b \geqslant 3$.

Если $b \leqslant 2$, то при $x_0 = -\dfrac{3}{2}$, $y_0 = -\dfrac{3}{2}$ имеем $x_0 y_0 - b = \dfrac{9}{4} - b > 0$, т. е. выражение $\lg(xy - b)$ определено в точке (x_0, y_0). В то же время $x_0 + y_0 + 3 = 0$, так что выражение $\dfrac{1}{x + y + 3}$ не имеет смысла в точке $x_0 = -\dfrac{3}{2}$, $y_0 = -\dfrac{3}{2}$. Итак, натуральные значения b, не превосходящие 2 (отметим, что таковыми являются только $b = 1$ и $b = 2$), не отвечают условию задачи.

Если же $b \geqslant 3$, то для каждой пары отрицательных чисел x и y, для которых имеет смысл выражение $\lg(xy - b)$, т. е. пары чисел, удовлетворяющей неравенствам

$$\begin{cases} xy > b, \\ x < 0, \\ y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

имеем $x + y + 3 = 3 - (|x| + |y|)$. Пользуясь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, находим

$$\frac{|x| + |y|}{2} \geqslant \sqrt{|x| \cdot |y|} = \sqrt{xy} > \sqrt{b} \geqslant \sqrt{3},$$

так что $x + y + 3 < 3 - 2\sqrt{3} < 0$.

Следовательно, выражение $\dfrac{1}{x + y + 3}$ при $b \geqslant 3$ определено для каждой пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющей неравенствам (2).

Ответ: $b \geqslant 3$, $b \in N$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = 1$. 2. $-5 < y < 5$. 3. $\frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{14-\sqrt{7}}}{\sqrt{7}-1}$.
4. $(\pi;\pi)$, $(\pi;-\pi)$, $(2\pi;0)$. 5. $b \geqslant 3$, $b \in N$.

Вариант 3. 1. $x = 1$. 2. $-6 < y < 6$. 3. $\frac{10}{3}$.
4. $(-\pi;\pi)$, $(0;2\pi)$, $(\pi;\pi)$. 5. $b \leqslant -3$, $b \in Z$.

Вариант 4. 1. $x = 3$. 2. $-5 < y < 5$. 3. $2(\sqrt{2}-1)$.
4. $(\pi;-\pi)$, $(\pi;\pi)$, $(2\pi;0)$. 5. $b \leqslant -3$, $b \in Z$.

1988

Решение варианта 1

1. Область определения функции состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x^2+3x+2>0$, $x>0$, $x \neq 1$. Поскольку решениями неравенства $x^2+3x+2>0$ являются все x из объединения двух множеств $-\infty < x < -2$ и $-1 < x < +\infty$, то область определения данной функции состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $0 < x < 1$; $1 < x < +\infty$.

Ответ: $0 < x < 1$; $1 < x < +\infty$.

2. Обозначим 3^x через y. Тогда исходное неравенство можно переписать в виде

$$y - \frac{\sqrt{3}}{y} > \sqrt{3} - 1.$$

Перенося все члены этого неравенства в левую часть и приводя к общему знаменателю, получим, что оно равносильно неравенству

$$\frac{y^2 - y\cdot(\sqrt{3}-1) - \sqrt{3}}{y} > 0.$$

На множестве $y > 0$ (нас интересуют только эти значения y, поскольку $3^x > 0$) последнее неравенство равносильно неравенству

$$y^2 - y\cdot(\sqrt{3}-1) - \sqrt{3} > 0.$$

Все решения этого неравенства составляют два промежутка $\sqrt{3} < y < +\infty$ и $-\infty < y < -1$. Из них в множество $y > 0$ входят лишь y из промежутка $\sqrt{3} < y < +\infty$. Следовательно, неравенство, данное в условии задачи, равносильно неравенству $3^x > \sqrt{3}$. Множество решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства, состоит из всех $x > \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < x < +\infty$.

3. Обозначим через $V_г$ км/час, V_a км/час, $V_п$ км/час соответственно скорости грузовика, автобуса и пешехода, а через t часов — время, через которое встретились грузовик и автобус.

Так как до встречи автобус и грузовик проехали 20 км, то имеем уравнение

$$(V_г - V_a)\cdot t = 20.$$

Поскольку грузовик догнал пешехода через $\left(t + \frac{1}{2}\right)$ часа, то имеем уравнение

$$V_п\left(t + \frac{1}{2}\right) = V_г\left(t + \frac{1}{2}\right) - 15.$$

Так как автобус и пешеход встретились через $\frac{t}{3}$ часа, то имеем уравнение

$$\frac{t}{3}\cdot(V_п + V_a) = 5.$$

Итак, неизвестные t, $V_г$, V_a, $V_п$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} V_г + V_a = \dfrac{20}{t}, \\ V_п - V_г = -\dfrac{15}{t + \frac{1}{2}}, \\ V_a + V_п = \dfrac{15}{t}. \end{cases}$$

Складывая первые два уравнения системы, получаем, что

$$V_a + V_п = \frac{20}{t} - \frac{15}{t + \frac{1}{2}},$$

и в силу третьего уравнения системы имеем уравнение для нахождения t:

$$\frac{20}{t} - \frac{15}{t + \frac{1}{2}} = \frac{15}{t}$$

или такое

$$\frac{15}{t + \frac{1}{2}} = \frac{5}{t},$$

откуда $t = \frac{1}{4}$. Следовательно, грузовик догнал пешехода через $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ часа, т. е. через 45 минут.

Ответ: 45 минут.

4. Пусть $ABCD$ — данная в условии задачи пирамида (рис. 128). Так как плоскость P параллельна ребру BC, то $EF \parallel BC$ и $GH \parallel BC$. Так как $EF = \frac{1}{2}BC$, то EF — средняя линия треугольника ABC. Значит, $AF = FC$ и $AE = EB$. Поскольку плоскость P параллельна AD, то $FG \parallel AD$ и $EH \parallel AD$. Отсюда заключаем, что GF — средняя линия треугольника ACD, а EH — средняя линия треугольника ABD, поэтому GH — средняя линия треугольника CBD. Следовательно, $GH = 1$, $FG = EH = 2$, а тогда периметр четырехугольника $EFGH$ равен 6 см.

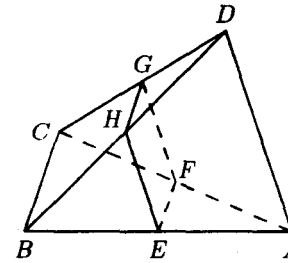


Рис. 128

Ответ: 6 см.

5. Разобьем полуось $x > 0$ на промежутки $0 < x \leqslant \pi$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} \leqslant x < +\infty$.

Для каждого x из промежутка $0 < x \leqslant \pi$ имеем $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x > 0$, поскольку $\sin x \geqslant 0$ и $x^2 + \pi x > 0$ для этих x.

Для каждого x из промежутка $\frac{3\pi}{2} \leqslant x < +\infty$ имеем

$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x \geqslant \frac{9}{4}\pi^2 + \frac{3}{2}\pi^2 - \frac{15}{2}\pi = \frac{15\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) > 0.$$

Рассмотрим теперь x из промежутка $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Положим $x = \pi + y$, тогда y будет из промежутка $0 < y < \frac{\pi}{2}$ и выражение $x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x$ перепишется в виде

$$F(y) = (\pi + y)^2 + \pi(\pi + y) - \frac{15}{2}\pi \sin y = y^2 + 3\pi y + 2\pi^2 - \frac{15}{2}\pi \sin y.$$

Поскольку для каждого $y > 0$ имеем $\sin y < y$, то для $F(y)$ имеем оценку

$$F(y) > y^2 + 3\pi y + 2\pi^2 - \frac{15}{2}\pi y = y^2 - 4,5y \cdot \pi + 2\pi^2.$$

Квадратный трехчлен $y^2 - 4,5\pi y + 2\pi^2$ обращается в нуль в точках $y_1 = \frac{\pi}{2}$ и $y_2 = 4\pi$. Следовательно, в частности, он положителен при $0 < y < \frac{\pi}{2}$, а это означает,что исходное неравенство справедливо и при каждом x из промежутка $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-\infty < x < -2$. 2. $\frac{1}{6} < x < +\infty$. 3. $\frac{5}{8}$ часа. 4. 1.

Вариант 3. 1. $0 < x < +\infty$, $x \neq 1$. 2. $-\infty < x < 0$. 3. $\frac{5}{9}$ часа. 4. 4.

Вариант 4. 1. $-\infty < x < -3$. 2. $-\infty < x < \frac{3}{2}$. 3. $\frac{15}{16}$ часа. 4. 2.

1989

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 + z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = -1$ и $z_2 = \frac{1}{2}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad \text{и} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Решение первого уравнения этой совокупности есть

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Решение второго уравнения есть

$$x = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi m, \ m \in Z.$$

Следовательно, решения исходного уравнения есть: $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

2. Обозначим через V км/час скорость автобуса на подъеме, тогда $2V$ км/час — скорость автобуса при спуске. Расстояние AB в гору автобус проезжает за $\frac{12}{V}$ часов. Следовательно, до встречи с пешеходом при возвращении автобуса из B прошло $\left(\frac{12}{V} + \frac{1}{5}\right)$ часов. За это время пешеход прошел $6\left(\frac{12}{V} + \frac{1}{5}\right)$ км, а за $\frac{1}{5}$ часа, спускаясь вниз, автобус проехал $\frac{2V}{5}$ км. Для нахождения V получили уравнение

$$\left(\frac{12}{V} + \frac{1}{5}\right) \cdot 6 + \frac{2V}{5} = 12,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{V^2 - 27V + 180}{V} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $V_1 = 12$ и $V_2 = 15$. Условию задачи удовлетворяет лишь значение V равное 15, поскольку известно, что на путь в 12 км автобус затратил менее 1 часа.

Ответ: 15 км/час.

3. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $10 - x^2 > 0$, $10 - x^2 \neq 1$, $\frac{16}{5}x - x^2 > 0$, т. е. ОДЗ есть множество всех x из объединения двух промежутков $0 < x < 3$ и $3 < x < \sqrt{10}$ (здесь мы воспользовались тем, что $\frac{16}{5} = 3,2 > \sqrt{10}$). Поскольку свойства логарифмов зависят от того, больше или меньше единицы их основание, то рассмотрим два случая.

а). Пусть $0 < x < 3$. Тогда $10 - x^2 > 1$, и исходное неравенство равносильно на этом множестве неравенству

$$\frac{16}{5}x - x^2 < 10 - x^2,$$

множество решений которого состоит из всех $x < \frac{25}{8}$. Из этих x в рассматриваемую область входят все x из промежутка $0 < x < 3$.

Следовательно, все они являются решением исходного неравенства.

б). Пусть $3 < x < \sqrt{10}$. Тогда $0 < 10 - x^2 < 1$, и исходное неравенство равносильно на этой области неравенству

$$\frac{16}{5}x - x^2 > 10 - x^2.$$

Множество решений этого неравенства состоит из всех $x > \frac{25}{8}$. Осталось проверить, какие из этих x входят в рассматриваемую область. Так как $9 < \left(\frac{25}{8}\right)^2 < 10$, то решением исходного неравенства в случае б) будут все x из промежутка $\frac{25}{8} < x < \sqrt{10}$. Объединяя решения, найденные в случаях а) и б), получаем, что решением исходного неравенства являются все x из объединения двух промежутков: $0 < x < 3$ и $\frac{25}{8} < x < \sqrt{10}$.

Ответ: $0 < x < 3$; $\frac{25}{8} < x < \sqrt{10}$.

4. Так как отрезки касательных, проведенных из некоторой точки к сфере равны, то $AB = BC$ и $DA = DC$ (рис. 129). Треугольники DAB и DCB равны по трем сторонам (DB общая). Значит, угол DCB равен $90°$.

Высоты треугольников DAB и DCB, опущенные соответственно из точек A и C на DB, пересекают сторону DB в некоторой точке K. Плоскость KAC перпендикулярна прямой DB, так как DB перпендикулярна KC и AK. Центр сферы — точка O — лежит на прямой AO, проходящей через точку A и перпендикулярной к плоскости, содержащей треугольник ABD. Следовательно, прямая AO перпендикулярна прямой DB, лежащей в этой плоскости, и поэтому лежит в плоскости KCA. При этом $\angle OAK = 90°$. Так как сфера касается плоскости DCB в точке C, то перпендикулярна этой плоскости и, следовательно, $\angle OCK = 90°$ (рис. 130). Так как треугольник BAD прямоугольный, то по теореме Пифагора $AD = \sqrt{3}$. Прямоугольные треугольники ABD и AKB имеют общий угол ABD и потому подобны. Из подобия имеем $\frac{AK}{AD} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$, откуда $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, но тогда $KC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC находим $AC = \sqrt{2}$. Если E — середина AC, то $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и из треугольника KAC нахо-

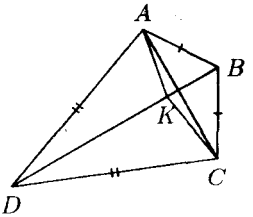


Рис. 129

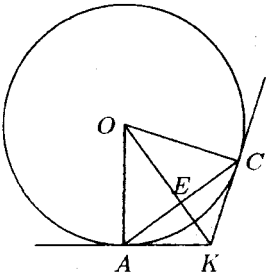


Рис. 130

дим $KE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$. Прямоугольные треугольники AKO и AEK имеют общий угол AKE, следовательно, они подобны, и из подобия следует, что $\frac{OA}{AK} = \frac{AE}{EK}$, откуда следует, что $OA = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Так как OA — радиус сферы, то находим, что площадь поверхности этой сферы равна $4\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 6\pi$.

Ответ: 6π.

5. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 131). Так как $\angle ABD = 90°$ и $\angle ACD = 90°$, то точки A, B, C и D лежат на одной и той же окружности, центр которой — точка O — лежит на середине стороны AD, а ее радиус равен 1. Обозначим через E и F точки пересечения биссектрис соответственно треугольников ABD и ACD. Тогда $\angle AED = 180° - (\angle EAD + \angle EDA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADB) = 135°$; $\angle AFD = 180° - (\angle FAD + \angle FDA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle CAD + \angle ADC) = 135°$. Так как угол, равный сумме углов FAD и FDA, опирается на полуокружность $ABCD$, то $\angle FAD + \angle FDA = 45°$. Аналогично показывается, что $\angle EAD + \angle EDA = 45°$. Следовательно, $\angle AED = \angle AFD = 135°$. Через три точки A, F и D можно провести окружность. Точка E также принадлежит этой окружности, в противном случае угол AED был бы либо больше, либо меньше $135°$, но $\angle AED = \angle AFD = 135°$.

Найдем радиус R_1 этой окружности (рис. 132). Поскольку по теореме синусов $AD = 2R_1 \sin(\angle AED) = 2R_1 \sin 135° = \sqrt{2} \cdot R_1$ и $AD = 2$, то $R_1 = \sqrt{2}$. По той же теореме синусов

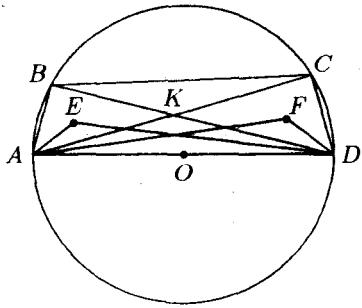


Рис. 131

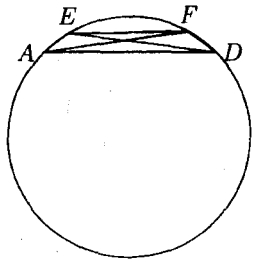


Рис. 132

имеем $EF = 2R_1 \sin(\angle EAF)$, откуда, так как $EF = \sqrt{2}$, следует, что $\sin(\angle EAF) = \frac{1}{2}$. Поскольку $\angle AEF > \angle AED = 135°$, то угол EAF острый и, следовательно, $\angle EAF = 30°$. Аналогично показывается, что $\angle EDF = 30°$. Но тогда $\angle EAD > 30°$, и поскольку AE — биссектриса угла BAD, то $\angle BAD > 60°$. Покажем, что точка F не лежит в треугольнике AKD, где K — точка пересечения диагоналей AC и BD. Действительно, если бы точка F лежала в треугольнике AKD или на его стороне KD, то угол KDA был бы больше (или равен) угла ADF, т. е. было бы справедливо неравенство $\angle BDA \geqslant 30°$, но тогда сумма углов треугольника ABD была бы больше $180°$:

$$\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA > 60° + 90° + 30° = 180°,$$

что, естественно, невозможно. Следовательно, точка F не лежит в треугольнике AKD. Аналогично показывается, что точка E не лежит в треугольнике AKD.

Тогда точка E лежит в треугольнике ABC, и поэтому

$$\angle EAF = \angle EAK + \angle KAF.$$

Но

$$\angle EAK = \angle BAC - \angle BAE = \angle BAC - \frac{1}{2}\angle BAD,$$
$$\angle KAF = \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BAD - \angle BAC).$$

Поэтому $\angle EAF = \angle EAK + \angle KAF = \angle BAC - \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}(\angle BAD - \angle BAC) = \frac{1}{2}\angle BAC$. Так как $\angle EAF = 30°$, то

$\angle BAC = 60°$. Опять применяя теорему синусов для первой окружности, имеем $BC = 2R\sin(\angle BAC) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pi + 2\pi m,$ $m \in Z$. 2. 32 км/час. 3. $\frac{13}{4} < x < 4;\ -\infty < x < -\sqrt{10}$. 4. 2. 5. 5.

Вариант 3. 1. $\pi + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$. 2. 3 км/час. 3. $\frac{1}{3} < x < 3;$ $\frac{33}{10} < x < \sqrt{11}$. 4. $\frac{16}{11}\pi$. 5. $\sqrt{3}$.

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,$ $m \in Z$. 2. 20 км/час. 3. $\sqrt{17} < x < \frac{21}{5}$. 4. 1. 5. 3.

§8. Геологический факультет (отделение геофизики)

1984

Решение варианта 1

1. Обозначив 3^x через y, исходное уравнение можно переписать в виде

$$27y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни $y_1 = \frac{1}{3}$ и $y_2 = -\frac{1}{9}$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$3^x = -\frac{1}{9} \quad \text{и} \quad 3^x = \frac{1}{3}.$$

Первое уравнение из этой совокупности корней не имеет, так как $3^x > 0$ для любого x. Второе уравнение, а значит, и исходное уравнение, имеют единственный корень $x_1 = -1$.

Ответ: $x = -1$.

2. Корни квадратного трехчлена $2x^2 - 6x + 4$ равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Поэтому область допустимых значений исходного неравенства является объединением двух промежутков $-\infty < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Для x из множества $x \leqslant -2$ правая часть исходного неравенства отрицательна, а левая часть — положительна. Значит, эти x решениями исходного неравенства быть не могут.

Для x из множеств $-2 \leqslant x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$ обе части исходного неравенства неотрицательны. Значит, на этих множествах исходное неравенство равносильно неравенству

$$2x^2 - 6x + 4 < x^2 + 4x + 4$$

или неравенству

$$x^2 - 10x < 0.$$

Решения последнего неравенства образуют промежуток $0 < x < 10$. Из них множествам $-2 \leqslant x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$ принадлежат только x, удовлетворяющие условиям $0 < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < 10$. Следовательно, искомое множество решений является объединением множеств $0 < x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x < 10$.

Ответ: $0 < x \leqslant 1$; $2 \leqslant x < 10$.

3. Так как $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и по условию $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$, то получаем, что $\cos\alpha \neq 0$. Запишем условие $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{1}{3}$ в виде

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leqslant \frac{1}{3}$. Так как $\cos^2\alpha > 0$, то это условие можно записать в виде

$$2\sin\alpha\cos\alpha \leqslant \frac{2}{3}\cos^2\alpha.$$

Учитывая, что по условию $2\sin\alpha\cos\alpha \geqslant \frac{3}{5}$, получаем, что справедливо неравенство

$$\frac{3}{5} \leqslant \frac{2}{3}\cos^2\alpha,$$

т. е. неравенство $\cos^2\alpha \geqslant \frac{9}{10}$. Но тогда справедливо неравенство $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \leqslant \frac{1}{10}$. Из неравенства $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$ следует неравенство $\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) \geqslant \frac{9}{100}$, откуда вытекает, что $\frac{1}{10} \leqslant \sin^2\alpha \leqslant \frac{9}{10}$. Таким образом, получаем, что $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$, т. е. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ или $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Проверим, что оба эти значения удовлетворяют условиям задачи.

Синус угла α равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$, в частности, для $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi k$, $k \in Z$. Если $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi k$, $k \in Z$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, и тогда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{6}{10}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}$, т. е. условия задачи выполнены. Следовательно, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ удовлетворяет условию задачи.

В частности, для $\alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi k$, $k \in Z$, имеем $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, но тогда $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, и поэтому $\sin 2\alpha = \frac{6}{10}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, т. е. $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ также удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC (рис. 133), имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos(\angle ACB),$$

т. е.

$$AB^2 = AC^2 + 16 - 2\cdot\frac{5}{12}\cdot 4\cdot AC.$$

Так как $AB + AC = 6$, то $AB = 6 - AC$, и для нахождения AC получаем уравнение

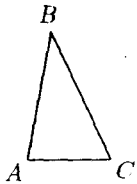


Рис. 133

$$(6 - AC)^2 = AC^2 + 16 - \frac{10}{3}AC,$$

имеющее единственное решение $AC = \frac{30}{13}$. Так как $\angle ACB$ — угол треугольника, то $0 < \angle ACB < \pi$, и потому $\sin(\angle ACB) = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin(\angle ACB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{30}{13}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{119}}{12} = \frac{5\sqrt{119}}{13}$ (см^2).

Ответ: $\frac{5\sqrt{119}}{13}$ см^2.

5. Обозначим через u коп. стоимость игрушки, а через x и z — количество копеек, имеющихся соответственно у первого и третьего мальчиков. Тогда у второго мальчика было $(x + 9)$ коп. Так как на свои деньги мальчики не могли купить даже одной игрушки, то

$$2x + z + 9 < u.$$

Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, т. е. $2x$ копеек, то всего у ребят было бы $3x + z + 9$ копеек. Поскольку тогда у них не хватило бы на покупку двух игрушек 34 копейки, то

$$3x + z + 9 = 2u - 34.$$

После того, как третьему мальчику добавили денег в размере в два раза большем, чем у него было, то денег у ребят стало $2x + 9 + 3z$ копеек. Так как это количество денег составляет стоимость игрушек и еще 6 копеек, то

$$2x + 9 + 3z = 2u + 6.$$

Итак, для нахождения x, z и u имеем следующую систему

$$\begin{cases} 2x + z + 9 < u, \\ 3x + z + 9 = 2u - 34, \\ 2x + 9 + 3z = 2u + 6. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} 2x + z + 9 < u, \\ 3x + z = 2u - 43, \\ 2x + 3z = 2u + 6. \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго и третьего уравнений системы (1) находим

$$x = \frac{4u - 126}{7} \quad \text{и} \quad z = \frac{2u + 77}{7}.$$

Подставляя эти выражения в неравенство системы (1), находим

$$2 \cdot \frac{4u - 126}{7} + \frac{2u + 77}{7} + 9 < u,$$

откуда $u < 37\frac{1}{3}$.

Согласно условию справедливо неравенство $x \geqslant 0$, т. е. $\frac{4u - 126}{7} \geqslant 0$. Отсюда находим $u \geqslant 31\frac{1}{2}$. Поскольку u — целое число, из неравенств $31\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 37\frac{1}{3}$ следует, что $32 \leqslant u \leqslant 37$. Заметим, что $x = \frac{4u - 126}{7} = \frac{4u}{7} - 18$ также целое число. Это возможно только в случае, когда u делится на 7. Среди целых чисел, лежащих на промежутке $32 \leqslant u \leqslant 37$, только одно — $u = 35$ — делится на 7. Значит, $u = 35$, $x = \frac{4u}{7} - 18 = 2$, $z = \frac{2u + 77}{7} = 21$, и две игрушки стоили 70 копеек.

Ответ: 70 копеек.

6. Пусть r и R — радиусы вписанного в заданную пирамиду и описанного вокруг нее шаров. Площади поверхностей этих шаров равны соответственно $4\pi r^2$ и $4\pi R^2$, и значит, искомое отношение есть $\frac{r^2}{R^2}$. Вычислим радиусы R и r. Из равнобедренного треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды (рис. 134), находим $\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{BC}{2AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что $\frac{\angle A}{2} = \frac{\pi}{3}$, т. е. $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$. Но тогда $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Проведем через точку A прямую, лежащую в плоскости ABC и перпендикулярную AB (рис. 135). Согласно условию точка H лежит на этой прямой, причем $CH = CA = 1$. Так как $\angle CAH = \angle BAC - \angle BAH = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ и треугольник ACH равнобедренный, то $\angle CHA = \angle CAH = \frac{\pi}{6}$ и

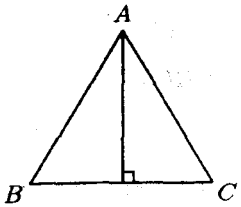


Рис. 134

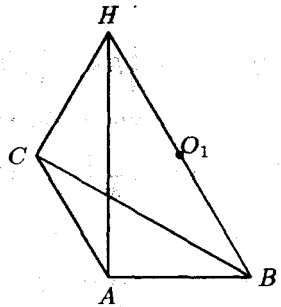


Рис. 135

$\angle ACH = \pi - \angle CHA - \angle CAH = \dfrac{2\pi}{3}$. В треугольниках ABC и ACH стороны AB и CH равны, сторона AC общая, а углы $\angle BAC$ и $\angle ACH$, заключенные между соответственно равными сторонами, также равны, и $AH = BC = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ABH находим по теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Имеем $\angle BCH = \angle ACH - \angle ACB = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, треугольник BCH прямоугольный. Точка O_1 — середина отрезка BH — гипотенузы прямоугольных треугольников ABH и BCH — является центром окружности, описанной вокруг этих треугольников, и потому равноудалена от точек A, B, C, H, причем $HO_1 = \dfrac{1}{2}BH = 1$.

Рассмотрим треугольник BHS (рис. 136). Так как SH — высота пирамиды $SABC$, то прямая SH перпендикулярна плоскости ABC, и, в частности, $SH \perp HB$. Пусть O — середина отрезка BS. Тогда OO_1 — средняя линия в треугольнике BHS и $OO_1 \parallel SH$. Это означает, что прямая OO_1 перпендикулярна плоскости ABC, O_1 есть проекция точки O на плоскость ABC и, в силу равенств $AO_1 = BO_1 = CO_1$, точка O равноудалена от вершин треугольника ABC. Но O есть середина отрезка BS, т. е. $BO = SO$. Таким образом, точка O равноудалена от всех вершин пирамиды $SABC$ и является центром описанной вокруг нее сферы. Имеем, пользуясь теоремой Пифа-

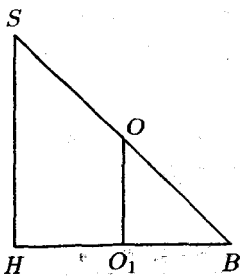


Рис. 136

гора,

$$R = BO = \frac{1}{2}BS = \frac{1}{2}\sqrt{BH^2 + SH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2}.$$

Вычислим теперь r. Объем пирамиды V равен

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin(\angle BAC)\cdot SH = \\ = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Если соединить центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, с вершинами, то пирамида разобьется на четыре пирамиды, основаниями которых являются треугольники ABC, SAB, SBC и SAC, а высоты равны r. Поэтому

$$V = \frac{1}{3}rS_{ABC} + \frac{1}{3}rS_{ASB} + \frac{1}{3}rS_{BSC} + \frac{1}{3}rS_{ASC}$$

и

$$r = \frac{3V}{S_{ABC} + S_{ASB} + S_{BSC} + S_{ASC}}. \qquad (2)$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\angle BAC) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Вычислим площади остальных боковых граней. Для этого найдем сначала боковые ребра пирамиды. Пользуясь теоремой Пифагора, получаем

$$AS = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7},$$
$$BS = \sqrt{SH^2 + BH^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8},$$
$$CS = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Применяя к треугольнику ASC теорему косинусов, имеем

$$AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS\cdot BS\cos(\angle ASB),$$

откуда

$$\cos(\angle ASB) = \frac{AS^2 + BS^2 - AB^2}{2AS\cdot BS} = \frac{7+8-1}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Аналогично находим

$$\cos(\angle ASC) = \frac{AS^2 + CS^2 - AC^2}{2AS\cdot CS} = \frac{7+5-1}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{11}{2\sqrt{35}},$$
$$\cos(\angle BSC) = \frac{BS^2 + CS^2 - BC^2}{2BS\cdot CS} = \frac{8+5-3}{2\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Из всех этих равенств следует, что

$$\sin(\angle ASB) = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \sin(\angle ASC) = \sqrt{\frac{19}{140}},\ \sin(\angle BSC) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

и

$$S_{ASB} = \frac{1}{2}AS\cdot BS\cdot\sin(\angle ASB) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$S_{BSC} = \frac{1}{2}BS\cdot CS\cdot\sin(\angle BSC) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$S_{ASC} = \frac{1}{2}AS\cdot CS\cdot\sin(\angle ASC) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{19}{140}} = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

Подставляя найденные значения объема пирамиды и площадей ее боковых граней в формулу (2), получаем

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}+2\sqrt{15}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{6}{(\sqrt{19}+2\sqrt{15}+2\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}.$$

Ответ: $\dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{6}{(\sqrt{19}+2\sqrt{15}+2\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. -3. 2. $0 < x \leqslant 2$; $4 \leqslant x < 20$. 3. $\frac{4}{5}$. 4. $\frac{297}{14}$ см^2. 5. $97 < l < 108$. 6. $\dfrac{3}{\sqrt{130}+\frac{3}{2}\sqrt{13}+65+2\sqrt{39}}$.

Вариант 3. 1. -1. 2. $-2 \leqslant x < -\frac{8}{5}$; $0 < x \leqslant 2$. 3. $-\frac{8}{15}$. 4. $\frac{25}{3}$ см^2. 5. 60. 6. $\dfrac{48}{(1+\sqrt{15}+\sqrt{20+\sqrt{12}})^2(29-4\sqrt{3})}$.

Вариант 4. 1. -4. 2. $-3 \leqslant x < -\frac{18}{7}$; $0 < x \leqslant 2$. 3. $\frac{12}{5}$. 4. 11 см^2. 5. 64. 6. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2(\sqrt{39}+4\sqrt{3}+3\sqrt{7})}$.

1985

Решение варианта 1

1. Так как $\log_2(3^{\log_2 5}) = \log_2 5\cdot\log_2 3$ и $\log_2(5^{\log_2 3}) = \log_2 3\cdot\log_2 5$, то числа $3^{\log_2 5}$ и $5^{\log_2 3}$ равны, поэтому для опре-

деления того, какое из данных в условии задачи чисел больше, надо сравнить числа

$$10^{\frac{1}{3}\lg 2} \quad \text{и} \quad \sqrt[10]{10}.$$

Так как $10^{\frac{1}{3}\lg 2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[10]{10} = 10^{\frac{1}{10}}$, $(2^{\frac{1}{3}})^{30} = 2^{10} = 1024$, $(10^{\frac{1}{10}})^{30} = 10^3 = 1000$ и $2^{10} > 10^3$, то $2^{\frac{1}{3}} > \sqrt[10]{10}$. Поэтому

$$3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2} > 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}.$$

Ответ: число $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$ больше числа $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$.

2. Для освобождения от знаков абсолютной величины, разобьем ось на промежутки $-\infty < x \leqslant 1$, $1 < x \leqslant 2$, $2 < x < +\infty$ и будем решать исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Если $-\infty < x \leqslant 1$, то $x - 2 < 0$ и $x - 1 \leqslant 0$. Значит, $|x-2| = -(x-2) = 2 - x$, $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$, и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{2-x}{1-x-1} \geqslant 1.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2}{-x} \geqslant 0. \tag{1}$$

Множество решений неравенства (1) есть промежуток $-\infty < x < 0$. Все эти x входят в область $-\infty < x \leqslant 1$ и поэтому являются решениями исходного неравенства.

Если $1 < x \leqslant 2$, то $x - 2 \leqslant 0$ и $x - 1 > 0$. Значит, $|x-2| = 2-x$, $|x-1| = x - 1$, и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{2-x}{x-1-1} \geqslant 1. \tag{2}$$

Неравенство (2) может быть записано в виде

$$\frac{2-x}{-(2-x)} \geqslant 1$$

и очевидно, что оно не имеет решений. Следовательно, исходное неравенство не имеет решений в области $1 < x \leqslant 2$.

Если $2 < x < +\infty$, то $x - 2 > 0$ и $x - 1 > 0$. Значит, $|x-2| = x - 2$, $|x-1| = x - 1$, и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{x-2}{x-2} \geqslant 1.$$

Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В область $2 < x < +\infty$ попадает лишь промежуток $2 < x < +\infty$. Все x из этого промежутка и будут решениями исходного неравенства.

Объединяя решения исходного неравенства, найденные на областях $-\infty < x \leqslant 1$ и $2 < x < +\infty$, получаем, что множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x < 0$ и $2 < x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < 0$; $2 < x < +\infty$.

3. Обозначим через x и y соответственно количество деталей, изготовляемых первым и вторым рабочими. Так как, работая вместе, за один час они изготовили 30 деталей, то

$$x + y = 30.$$

Первый рабочий изготовит 60 деталей за $\frac{60}{x}$ часов, а второй — за $\frac{60}{y}$ часов. Поскольку первый рабочий на изготовление 60 деталей потратил на 3 часа меньше, чем второй, то имеем

$$\frac{60}{y} - \frac{60}{x} = 3.$$

Итак, для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ \dfrac{60}{y} - \dfrac{60}{x} = 3. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы $y = 30 - x$. Подставляя $30 - x$ вместо y во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$\frac{60}{30 - x} - \frac{60}{x} = 3,$$

которое имеет корни $x_1 = 20$ и $x_2 = -30$. Так как количество деталей есть число положительное, то $x = 20$, а тогда $y = 10$. Следовательно, второй рабочий изготовит 90 деталей за 9 часов.

Ответ: 9 часов.

4. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{5}{\sqrt{34}}\cos x\right) = \sqrt{17}.$$

Обозначив $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$ и учитывая, что $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

или так:

$$\cos(x - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решения этого уравнения, а следовательно, и исходного, таковы

$$x = \varphi \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} + 2\pi k,\ k \in Z.$

5. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Поскольку

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1} = \frac{(3x^2-7x+3)-(3x^2-5x-1)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}} = \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}$$

и

$$\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4} = \frac{(x^2-2)-(x^2-3x+4)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}},$$

то исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

или в виде

$$(x-2)\left[\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}\right]=0.$$

Решение этого уравнения есть $x = 2$, поскольку на ОДЗ исходного уравнения выражение

$$\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}$$

положительно.

Ответ: $x = 2$.

6. Пусть S — вершина данного конуса, SH — его высота и l — ось вращения, перпендикулярная согласно условию высоте SH (рис. 137). Проведем плоскость через прямые l и SH. Точки ее пересечения с окружностью основания конуса обозначим буквами A и B. Тогда $SA = SB = 5$, $SH = 4$ и $AB \parallel l$, так как высота SH перпендикулярна лежащим в одной плоскости прямым AB и l.

Докажем, что сечение указанного в задаче тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения l, состоит из двух равных секторов $SAmB$ и $SCnD$ (рис. 138)

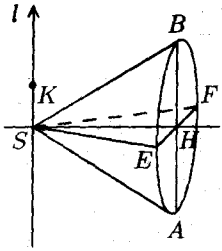


Рис. 137

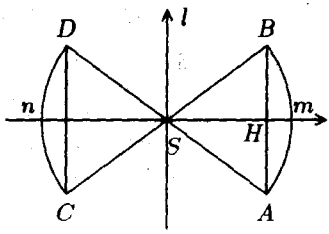


Рис. 138

радиуса $SA = SC = 5$ и с углами при вершине, равными углу между образующими в осевом сечении конуса, т. е. $\cos\left(\frac{1}{2}\angle ASB\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\angle CSD\right) = \frac{4}{5}$. Для этого достаточно установить, что тела, полученные вращением конуса (рис. 137) вокруг оси l и сектора $SAmB$ (рис. 138) вокруг оси l, совпадают. Проведем в плоскости основания конуса через точку H прямую, перпендикулярную AB и точки ее пересечения с окружностью основания конуса обозначим буквами E и F (рис. 137). Так как $l \parallel BH$ и $BH \perp EF$, то $l \perp EF$. Отсюда, поскольку $l \perp SH$, заключаем, что плоскость ESF перпендикулярна оси вращения l.

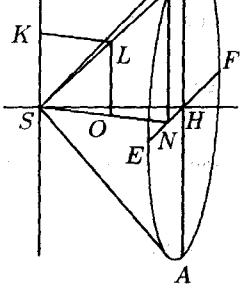


Рис. 139

Возьмем какую-нибудь точку K на оси вращения l ниже или выше точки S, но так, чтобы $SK \leqslant BH$ (рис. 137). Проведем через точку K плоскость α перпендикулярно l и выберем на линии пересечения α и боковой поверхности конуса некоторую точку L. Пусть SM — образующая конуса, проходящая через точку L; O и N — проекции точек L и M соответственно на плоскость ESF (рис. 139). Так как точка L принадлежит плоскости α, и $\alpha \parallel ESF$, то $SKLO$ — прямоугольник, $LO = KS$, $SO = KL$. Прямые LO и MN параллельны, поэтому треугольники SLO и SMN подобны, а значит, $\frac{LO}{MN} = \frac{SO}{SN}$ или $\frac{KS}{MN} = \frac{KL}{SN}$, откуда $KL = KS \cdot \frac{SN}{MN}$. Из прямоугольного треугольника SMN находим $SN = \sqrt{SM^2 - MN^2}$, и,

так как $SM = SB = 5$, то $SN = \sqrt{25 - MN^2}$. Итак,

$$KL = KS \cdot \frac{\sqrt{25 - MN^2}}{MN}. \qquad (3)$$

Пусть PQ — прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость основания конуса (рис. 140). Так как PQ и EF есть прямые, по которым параллельные плоскости α и ESF пересекаются плоскостью основания конуса, то $PQ \parallel EF$. Пусть R — проекция точки Q на прямую EF. Тогда $OR \parallel PH$ и, значит, $QR = PH = KS$. Точка N принадлежит отрезку RH, так как M и плоскость ESF, а следовательно, и точка N лежат по разные стороны от плоскости α. Верно и обратное, какую бы точку N на отрезке RH ни взять, соответствующая точка M и вершина конуса S будут лежать по разные стороны от плоскости α. Следовательно, образующая SM пересечет плоскость α в некоторой точке L, лежащей на линии пересечения плоскости α и боковой поверхности конуса.

Правая часть равенства (3) в зависимости от длины отрезка MN является убывающей функцией. Поэтому самое маленькое ее значение принимается тогда, когда точка N совпадает с точкой H, т. е. когда $MN = BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. В этом случае (см. (3)) $KL = \frac{4}{3}KS$. Самое же большое значение KL принимается, когда точка N совпадает с точкой R. Тогда $MN = QR = KS$ и $KL = \sqrt{25 - KS^2}$.

Итак, когда точка L пробегает линию пересечения боковой поверхности конуса с плоскостью α, расстояние от L до оси вращения, т. е. длина отрезка KL, принимает всевозможные значения, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{4}{3}KS \leqslant KL \leqslant \sqrt{25 - KS^2}. \qquad (4)$$

Теперь легко видеть, что расстояние от любой точки, лежащей в сечении конуса плоскостью α, также удовлетворяет неравенству (4).

Рассмотрим теперь сектор $SAmB$ (рис. 141). Пусть G и T — точки, в которых перпендикуляр к l, проведенный из точки K, пересекает отрезок SB и дугу AmB соответственно. Из прямоугольного треугольника KST находим

$$KT = \sqrt{ST^2 - KS^2} = \sqrt{SB^2 - KS^2} = \sqrt{25 - KS^2}.$$

Так как прямые KT и SH параллельны, то $\angle SGK = \angle BSH$, и, следовательно, прямоугольные треугольники SGK и BSH подобны. Отсюда следует, что

$$\frac{KG}{SH} = \frac{KS}{BH} \quad \text{и} \quad KG = \frac{KS \cdot SH}{BH} = \frac{4}{3}KS.$$

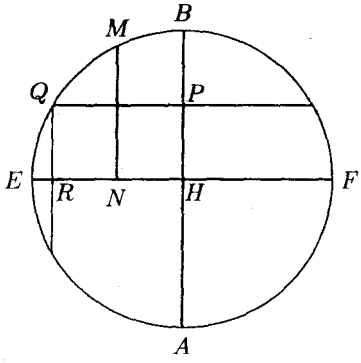


Рис. 140

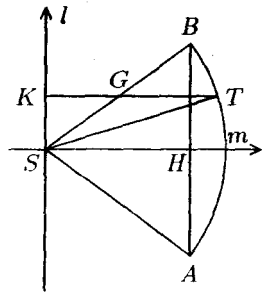


Рис. 141

Итак, все точки L отрезка GT удовлетворяют неравенствам (4). Это и доказывает утверждение о совпадении тел вращения конуса и сектора $SAmB$.

Искомая площадь сечения есть удвоенная площадь сектора $SAmB$. Поскольку $\angle ASB = 2\arccos\frac{4}{5}$ и $SB = 5$, то площадь сектора равна

$$\frac{\pi\cdot 25}{2\pi}\cdot 2\arccos\frac{4}{5} = 25\arccos\frac{4}{5},$$

а искомая площадь имеет величину $50\arccos\frac{4}{5}$.

Ответ: $50\arccos\frac{4}{5}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6} < 3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$.
2. $x < 1$; $x > 3$. 3. 6 часов. 4. $-\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.
5. $x = -1$. 6. $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 3. 1. $7^{\log_5 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 15} > 2^{\log_5 7} + \sqrt{6}$.
2. $-\infty < x < -2$; $0 < x < +\infty$. 3. 8 часов.
4. $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 5. $x = -3$. 6. 9π.

Вариант 4. 1. $5^{\log_3 7} + \sqrt{7} < 7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$.
2. $-\infty < x < -3$; $-1 < x < +\infty$. 3. 1,5 часа.
4. $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{29}} + \pi n$, $n \in Z$. 5. $x = 1$. 6. 12.

1986

Решение варианта 1

1. Перенеся $\sin x$ в левую часть исходного уравнения и применяя формулу разности двух синусов, перепишем его в виде

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=0.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,$$

множество решений которого, а следовательно, и исходного, есть

$$x=\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z.$

2. Пусть h — длина высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A (рис. 142), r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, O — ее центр. Если S — площадь заданного треугольника, то имеем

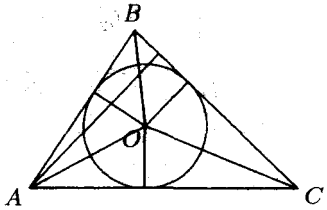


Рис. 142

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot h \qquad (1)$$

и

$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{AOC}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r=$$
$$=\frac{1}{2}r(AB+BC+AC). \qquad (2)$$

Длины сторон AB, BC и AC треугольника в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Поэтому $BC-AB=$ $=AC-BC$ или $AB+AC=2BC$. Теперь из (2) следует, что

$$S=\frac{3}{2}r\cdot BC. \qquad (3)$$

Приравнивая выражения для S из равенств (1) и (3), находим, что $\frac{h}{r}=3$.

Ответ: 3.

3. Освобождаясь от знаменателя в исходном уравнении, получаем уравнение

$$2\cdot 6^x-4^x-15=3(6^x-9^x-5), \qquad (4)$$

являющееся следствием исходного уравнения. Перенеся все члены полученного уравнения в левую часть, перепишем его в виде

$$3\cdot 3^{2x} - 2^x\cdot 3^x - 2^{2x} = 0$$

или, поскольку $2^{2x} \neq 0$ для любого x, в виде

$$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $3z^2 - z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ и $z_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, то уравнение (4) равносильно совокупности уравнений

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1-\sqrt{13}}{6}.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x_1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{13}}{6}$. Второе уравнение решений не имеет.

Докажем теперь, что число $x_1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ удовлетворяет исходному уравнению.

В силу того, что x_1 есть корень уравнения (4), справедливо равенство

$$2\cdot 6^{x_1} - 4^{x_1} - 15 = 3(6^{x_1} - 9^{x_1} - 5),$$

поэтому достаточно проверить условие $6^{x_1} - 9^{x_1} - 5 \neq 0$. Поскольку $\frac{1+\sqrt{13}}{6} < 1$ и, значит, $x_1 < 0$, находим, что

$$6^{x_1} - 9^{x_1} - 5 < 6^{x_1} + 9^{x_1} - 5 < 1 + 1 - 5 = -3 < 0.$$

Итак, $6^{x_1} - 9^{x_1} - 5 \neq 0$, и $x_1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ есть единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

4. Обозначим через x м и y м соответственно длину и ширину прямоугольной спортплощадки.

Так как ее площадь равна 0,1 га или 1000 м^2, то

$$xy = 1000.$$

На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей, поэтому

$$2x\cdot 7 + 2y\cdot 3 = 820.$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 1000, \\ 14x + 6y = 820. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x = \frac{410-3y}{7}$. Подставляя это значение x в первое уравнение системы, получаем уравнение

$$\frac{410-3y}{7}\cdot y = 1000,$$

т. е. уравнение

$$3y^2 - 410y + 7000 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $y_1 = 20$ и $y_2 = \frac{350}{3}$. Соответствующие значения x есть $x_1 = 50$ и $x_2 = \frac{60}{7}$. Так как $x > y$, то условию задачи удовлетворяет лишь $x = 50$ м и $y = 20$ м.

Ответ: 50 м, 20 м.

5. Для любой пары положительных чисел a и b область допустимых значений исходного неравенства есть множество x, удовлетворяющих условию $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-a \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant a$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} > \frac{1}{x^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{xb},$$

т. е. неравенству

$$\frac{2}{xb} > \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2},$$

которое, учитывая, что $b > 0$, можно переписать в виде

$$\frac{1}{x} > \frac{a^2+b^2}{2a^2b}. \qquad (5)$$

На множестве $-a \leqslant x < 0$ неравенство (5) решений не имеет. На множестве $0 < x \leqslant a$ неравенство (5) равносильно неравенству

$$x < \frac{2a^2b}{a^2+b^2}. \qquad (6)$$

Выясним, какое из чисел a или $\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$ больше. Для этого рассмотрим разность $a - \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$. Имеем

$$a - \frac{2a^2b}{a^2+b^2} = \frac{a^3+ab^2-2a^2b}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2-2ab+b^2)}{a^2+b^2} = \frac{a(a-b)^2}{a^2+b^2} \geqslant 0.$$

Следовательно, $a \geqslant \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$, и множество решений неравенства (5) в области $0 < x \leqslant a$, а значит, и исходного неравенства, есть промежуток $0 < x < \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

Ответ: $0 < x < \dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

6. Фиксируем какое-нибудь значение параметра p, при котором заданное уравнение имеет решение. Обозначим это решение через x_0. Введем для краткости обозначения: $u = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{15}\sin x_0 - \dfrac{3\pi}{5}\right)$ и $v = \sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\sin^2 x_0 + \dfrac{3\pi}{14}\right)$. Тогда $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{14} - \dfrac{\pi}{7}\cos 2x_0\right) = 1 - \sin^2\left(\dfrac{5\pi}{14} - \dfrac{\pi}{7}(1 - 2\sin^2 x_0)\right) = 1 - v^2$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{15}\sin x_0 + \dfrac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{15}\sin x_0 - \dfrac{3\pi}{5}\right) = u$, и согласно условию задачи справедливо равенство

$$3\sqrt{3}uv + 1 - v^2 = 6u^2 - p,$$

которое можно переписать так:

$$1 + p = 6u^2 - 3\sqrt{3}uv + v^2 = (2\sqrt{3}u - v)(\sqrt{3}u - v). \qquad (7)$$

Из неравенств

$$\frac{\pi}{15}\sin x_0 - \frac{3\pi}{5} \leqslant \frac{\pi}{15} - \frac{3\pi}{5} = -\frac{8\pi}{15},$$
$$\frac{\pi}{15}\sin x_0 - \frac{3\pi}{5} \geqslant -\frac{\pi}{15} - \frac{3\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3}$$

и

$$-\frac{\pi}{2} > -\frac{8\pi}{15} > -\frac{2\pi}{3} > -\frac{3\pi}{2} \qquad (8)$$

следует, что

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15}\sin x_0 - \frac{3\pi}{5}\right) \geqslant \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Кроме того,

$$v = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x_0 + \frac{3\pi}{14}\right) \leqslant 1.$$

Поэтому

$$2\sqrt{3}u - v \geqslant 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - 1 = 5,$$
$$\sqrt{3}u - v \geqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - 1 = 2,$$

и из (7) следует, что $1 + p \geqslant 5\cdot 2 = 10$, т. е. $p \geqslant 9$.

Итак, при любом $p < 9$ заданное уравнение не имеет решений. Если $p = 9$, то, как доказано выше, обязательно должны

выполняться равенства $u = \sqrt{3}$, $v = 1$. Равенство $u = \sqrt{3}$ в силу неравенств (8) означает, что $\frac{\pi}{15}\sin x_0 - \frac{3\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. что $\sin x_0 = -1$. Единственное значение x_0, удовлетворяющее этому равенству и лежащее на отрезке $0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi$, есть $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

При этом значении x_0

$$v = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\sin^2 x_0 + \frac{3\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

и, как легко проверить, заданное в условии задачи уравнение будет справедливым.

Ответ: при $p = 9$ имеем $x = \frac{3\pi}{2}$, при $p < 9$ уравнение решений не имеет.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2. 6 см^2.
3. $\log_{\frac{5}{3}} \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. 4. 300 м, 90 м. 5. $[-c; 0)$ при $c < d$, $\left(-\frac{2c^2 d}{c^2+d^2}; 0\right)$ при $c \geqslant d$. 6. $-\frac{3\pi}{2}$ при $p = 5$; при $p > 5$ решений нет.

Вариант 3. 1. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 2. 1. 3. $\log_{\frac{5}{2}}(\sqrt{6}-1)$.
4. 20 га, 16 га. 5. $[-a; 0) \cup \left(0; \frac{2a^2 c}{a^2+c^2}\right)$ при $a \leqslant c$, $[-a; 0) \cup (0; a]$ при $a > c$. 6. $-\frac{\pi}{2}$ при $p = 18$; при $p > 18$ решений нет.

Вариант 4. 1. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 2. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
3. $\log_{\frac{7}{3}} \frac{11+\sqrt{137}}{2}$. 4. 40; 6.
5. $0 < |x| < \frac{2b^2 d}{b^2+d^2}$ при $b \leqslant d$, $0 < |x| < b$ при $b > d$. 6. $\frac{5\pi}{2}$ при $p = 24$; при $p > 24$ решений нет.

1987

Решение варианта 1

1. Пусть $ABCD$ — ромб (рис. 143) и O — точка пересечения его диагоналей AC и BD. Так как диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам и перпендикулярны, то из прямоугольного треугольника AOB имеем $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{61}$.

Если дан равносторонний треугольник со стороной a, то его площадь S равна $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ$. Поскольку по условию сторона этого треугольника равна $\sqrt{61}$, то его площадь равна $\frac{61\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{61\sqrt{3}}{4}$.

2. Применяя основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

исходное уравнение перепишем в виде

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0.$$

Поскольку корни квадратного уравнения $4z^2 - 4z - 3 = 0$ есть $z_1 = \frac{3}{2}$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\frac{3}{2} > 1$, то первое из этих уравнений решений не имеет. Решение второго уравнения, а значит, и исходного, есть $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. Перенося (-3) влево и приводя члены неравенства к общему знаменателю, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{4 - 3x}{1 - x} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Множество решений неравенства (1) состоит из всех решений уравнения

$$\frac{4 - 3x}{1 - x} = 0 \qquad (2)$$

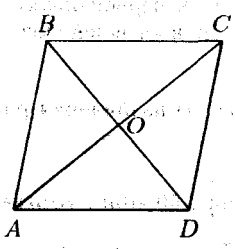


Рис. 143

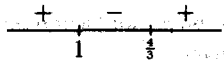


Рис. 144

и всех решений неравенства

$$\frac{4+3x}{1-x} > 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет одно решение $x = \frac{4}{3}$. Решая неравенство (3) методом интервалов (рис. 144), находим, что его решениями являются все значения x из двух промежутков $-\infty < x < 1$ и $\frac{4}{3} < x < +\infty$.

Следовательно, решениями неравенства (1), а значит, и исходного неравенства, являются все x из двух промежутков $-\infty < x < 1$ и $\frac{4}{3} \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < 1$; $\frac{4}{3} \leqslant x < +\infty$.

4. Из первого уравнения находим $x = \frac{16-3y}{2}$. Подставляя $\frac{16-3y}{2}$ вместо x во второе уравнение, получаем уравнение

$$\log_2 \frac{16-3y}{2} + \log_2 y = 3. \qquad (4)$$

Следствием этого уравнения является уравнение

$$\frac{16-3y}{2} \cdot y = 8.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $y_1 = 4$ и $y_2 = \frac{4}{3}$, каждый из которых удовлетворяет уравнению (4) и, значит, является его решением. Соответствующие значения x есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$. Итак, исходная система уравнений имеет два решения $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ и $x_2 = 6$, $y_2 = \frac{4}{3}$.

Ответ: $(2; 4)$, $\left(6; \frac{4}{3}\right)$.

5. Обозначим через u км/час скорость первой лодки в стоячей воде, тогда скорость второй лодки в стоячей воде равна $\frac{3}{4}u$ км/час.

Время движения первой лодки до места назначения равно

$$\frac{8}{u} + \frac{5}{u+2},$$

и, поскольку лодка плыла не более 2 час. 50 мин., то имеем неравенство

$$\frac{8}{u} + \frac{5}{u+2} \leqslant \frac{17}{6}.$$

Время движения второй лодки до места назначения равно

$$\frac{8}{\frac{3}{4}u}+\frac{5}{\frac{3}{4}u+2},$$

и, поскольку лодка плыла не более 3 час. 40 мин., то имеем неравенство

$$\frac{32}{3u}+\frac{20}{3u+8}\geqslant\frac{11}{3}.$$

Итак, скорость первой лодки удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{8}{u}+\dfrac{5}{u+2}\leqslant\dfrac{17}{6},\\ \dfrac{32}{3u}+\dfrac{20}{3u+8}\geqslant\dfrac{11}{3}.\end{cases}$$

Будем рассматривать эту систему для $u>0$. Эта система на множестве $u>0$ равносильна системе

$$\begin{cases}17u^2-14u-96\geqslant 0,\\ 33u^2-68u-256\leqslant 0.\end{cases}$$

Решения первого неравенства этой системы составляют два промежутка $-\infty<u\leqslant-\dfrac{24}{17}$ и $4\leqslant u<+\infty$. Из них условию $u>0$ удовлетворяют лишь u из промежутка $4\leqslant u<+\infty$. Решения второго неравенства этой системы составляют промежуток $-\dfrac{64}{33}\leqslant u\leqslant 4$. Из них условию $u>0$ удовлетворяют u из промежутка $0<u\leqslant 4$. Общая часть этих множеств состоит из одной точки $u=4$. Итак, скорость первой лодки в стоячей воде равна 4 км/час, а второй есть $4\cdot\dfrac{3}{4}=3$ км/час.

Ответ: 4 км/час; 3 км/час.

6. Так как пирамида правильная (рис. 145), то $KS=LS=MS=NS$ и четырехугольник $KLMN$ — квадрат, высота SO имеет основанием точку O — центр квадрата $KLMN$. Пусть основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость SMN, есть точка Q. Проведем плоскость через прямые AQ и AS. Она пересечет плоскость SNM по прямой SQ. В треугольнике AQS из точки K проведем прямую KT, параллельную прямой AQ. Так как прямая AQ перпендикулярна плоскости SMN, то и прямая KT ей перпендикулярна. Следовательно, длина KT равна расстоянию от точки K до плоскости SMN. Треугольники AQS и KTS подобны по построению, поэтому $AQ:KT=AS:KS$. Поскольку $AS=KS+AK$, $AQ=24$, $KS=SL=2\sqrt{41}$, то отсюда получаем, что

$$AK=2\sqrt{41}\left(\frac{24}{KT}-1\right). \qquad (5)$$

Итак, для нахождения длины отрезка AK надо найти расстояние от точки K до плоскости SMN. Поскольку прямые KL и MN параллельны и прямая MN лежит в плоскости SMN, то расстояние от точки K до плоскости SMN равно расстоянию от любой точки прямой KL до этой плоскости. Пусть точка B — середина отрезка KL, точка C — середина отрезка MN. Так как треугольник SMN равнобедренный, то SC — высота этого треугольника, и поэтому $SC = \sqrt{SM^2 - CM^2} = 10$.

Аналогично показывается, что BS — высота треугольника KSL и $BS = 10$. Точка O лежит на отрезке BC и делит его пополам. Так как треугольник SOC прямоугольный, то $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = 6$.

Рассмотрим треугольник BSC (рис. 146). Опустим в нем вы-

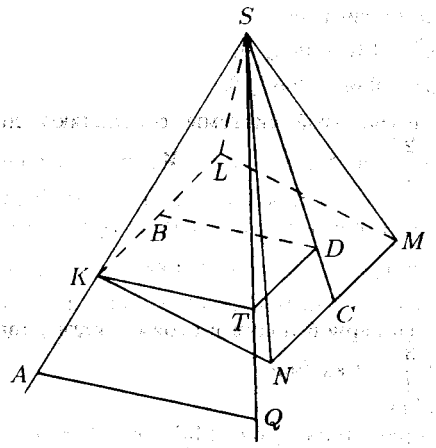


Рис. 145

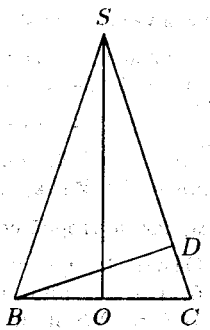


Рис. 146

соту BD из вершины B на сторону SC. Тогда в прямоугольных треугольниках BDC и SOC общий угол BCS. Следовательно, эти треугольники подобны. Из подобия следует, что $\frac{BD}{BC} = \frac{SO}{SC}$, откуда находим, что $BD = 9,6$.

Покажем, что прямая BD перпендикулярна плоскости SMN. По построению прямая BD перпендикулярна прямой SC. Прямая MN перпендикулярна плоскости BSC, так как она перпендикулярна прямым SC и BC, но тогда прямая MN перпендикулярна любой прямой в плоскости BSC, т. е. в частности, прямой BD. Итак, прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым SC и MN в плоскости SMN, следо-

вательно, она перпендикулярна этой плоскости. Значит, длина отрезка BD равна расстоянию от точки B до плоскости SMN, и поэтому $KT = BD = 9,6$. Теперь из равенства (5) находим, что $AK = 3\sqrt{41}$.

Ответ: $3\sqrt{41}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 12 см. 2. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. $1 < x < +\infty;\ -\infty < x \leqslant \frac{1}{2}$. 4. (9;3), (1;27). 5. 12 деталей. 6. 5 см.

Вариант 3. 1. $13\sqrt{2}$ см. 2. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

3. $-\infty < x < -2;\ -\frac{5}{3} \leqslant x < +\infty$. 4. $\left(10; \frac{32}{5}\right)$, (16;4).

5. 80 км/час. 6. $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ см.

Вариант 4. 1. $\sqrt{74}$ см. 2. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

3. $-\infty < x \leqslant 1;\ 2 < x < +\infty$. 4. (1;25), $\left(50; \frac{1}{2}\right)$. 5. 4 км/час.

6. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

1988

Решение варианта 1

1. Докажем, что $\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Для этого сравним числа $\sqrt{3} - 1$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$, то достаточно сравнить числа $4 - \frac{1}{2}$ и $2\sqrt{3}$. Поскольку $\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} > 12 = (2\sqrt{3})^2$, то $4 - \frac{1}{2} > 2\sqrt{3}$. Значит, $4 - 2\sqrt{3} > \frac{1}{2}$, т. е. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1 > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, для любого действительного x выражение $|x| + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ положительно, и исходное уравнение равносильно уравнению $x - 2 = 0$, которое имеет единственный корень $x = 2$.

Значит, исходное уравнение также имеет единственный корень $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

2. Множество решений неравенства состоит из всех решений уравнения

$$(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} = 0 \qquad (1)$$

и всех решений неравенства

$$(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} > 0. \qquad (2)$$

Решим уравнение (1). Область допустимых значений уравнения (1) состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant -4$. На этой области уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{x+4} = 0. \qquad (3)$$

Решения первого из этих уравнений есть $x_1 = -3$ и $x_2 = -5$. Из них только $x_1 = -3$ входит в ОДЗ уравнения (1) и потому является его решением. Второе уравнение совокупности (3) имеет единственное решение $x = -4$, которое входит в ОДЗ уравнения (1), и, значит, также является его решением.

Итак, уравнение (1) имеет два решения $x = -3$ и $x = -4$.

Решим неравенство (2). ОДЗ неравенства (2) есть промежуток $-4 \leqslant x < +\infty$. Поскольку $x = -4$ не является его решением, то рассмотрим его при $x > -4$. Тогда $x + 4 > 0$ и $\sqrt{x+4} > 0$, поэтому неравенство (2) равносильно на множестве $x > -4$ неравенству

$$x^2 + 8x + 15 > 0.$$

Решениями этого неравенства являются все x из двух промежутков $-\infty < x < -5$ и $-3 < x < +\infty$.

Из этих x условию $x > -4$ удовлетворяют только x из промежутка $-3 < x < +\infty$. Они и являются решениями неравенства (2). Следовательно, решениями данного в условии задачи неравенства являются $x = -4$ и все x из промежутка $-3 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $x = -4$; $-3 \leqslant x < +\infty$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > 0$ и $x \neq \frac{1}{2}$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \log_{2x}(18x) = -1.$$

Решения уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$ есть $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Из этих чисел в ОДЗ исходного уравнения входит только число $x = 2$, которое и является его корнем.

Уравнение

$$\log_{2x}(18x) = -1$$

на ОДЗ исходного уравнения равносильно уравнению

$$18x = \frac{1}{2x}.$$

Решение этого уравнения есть $x_3 = \frac{1}{6}$ и $x_4 = -\frac{1}{6}$. Из этих чисел в ОДЗ исходного уравнения входит только число $x_3 = \frac{1}{6}$, которое и является его решением. Итак, решениями исходного уравнения являются $x = 2$ и $x = \frac{1}{6}$.

Ответ: $x = 2$; $x = \frac{1}{6}$.

4. Пусть R — искомый радиус, т. е. радиус окружности, описанной около треугольника AMB (рис. 147). По теореме синусов $2R\sin(\angle AMB) = AB$. Так как $AB = 20$, то найдя $\sin(\angle AMB)$, найдем и R. Обозначим через P и K соответственно точки касания окружности с центром в точке O со сторонами AM и MB треугольника AMB. Так как треугольники APO и BKO прямоугольные, то $\sin(\angle PAO) = \frac{5}{13}$ и $\sin(\angle OBK) = \frac{5}{7}$. Поскольку точки P и K лежат по одну сторону от прямой AB, то углы A и B треугольника AMB острые. Поэтому $\cos(\angle PAO) = \frac{12}{13}$ и $\cos(\angle OBK) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Так как $\angle AMB = 180^\circ - \angle PAO - \angle OBM$, то $\sin(\angle AMB) = \sin(\angle MAB + \angle OBM) = \sin(\angle PAO)\cos(\angle OBM) + \cos(\angle PAO)\sin(\angle OBM) = \frac{10\cdot\sqrt{6}(1+\sqrt{6})}{91}$. Поэтому $R =$

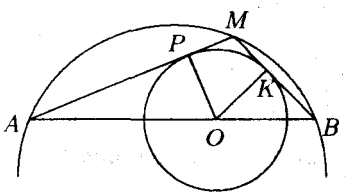


Рис. 147

$$= \frac{AB}{2\sin(\angle AMB)} = \frac{91\cdot(6-\sqrt{6})}{30}.$$

Ответ: $\frac{91\cdot(6-\sqrt{6})}{30}$.

5. Обозначим через n число рейсов, совершенных автобусом, а через v км/час и u км/час соответственно его скорости по шоссе и по грунтовой дороге. Тогда на одну поездку по шоссе автобус тратил $\frac{80}{v}$ час., а на одну поездку по грунтовой дороге — $\frac{120}{u}$ час., и из условия задачи имеем

$$\frac{120}{u} - \frac{80}{v} = 2.$$

На один рейс из A в B и обратно автобус тратит $2\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right)$ час., а на n рейсов он тратит $2n\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right)$ час., и из условия задачи имеем

$$2n\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right) < 168.$$

Если бы автобус ехал со средней скоростью $\frac{u+v}{2}$ км/час, то 2100 км он проехал бы за $\frac{4200}{u+v}$ час., поэтому

$$2n\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right) = \frac{4200}{u+v}.$$

По условию задачи $n > 4$. Итак, получили соотношения

$$\begin{cases} \frac{120}{u} - \frac{80}{v} = 2, \\ 2n\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right) = \frac{4200}{u+v}, \\ 2n\left(\frac{120}{u}+\frac{80}{v}\right) < 168, \\ n > 4. \end{cases} \qquad (4)$$

Поскольку

$$\frac{120}{u} + \frac{80}{v} = 2 + \frac{160}{v} > 2,$$

то из первого неравенства следует, что $4n < 168$, откуда $n < 42$. Обозначим $\frac{u}{40} = u_1$ и $\frac{v}{40} = v_1$, тогда систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{3}{u_1} - \frac{2}{v_1} = 2, \\ 2n\left(\frac{3}{u_1} + \frac{2}{v_1}\right) = \frac{105}{u_1 + v_1}, \\ 2n\left(\frac{3}{u_1} + \frac{2}{v_1}\right) < 168, \\ n > 4. \end{cases}$$

Подставляя значение $\frac{3v_1}{2(1+v_1)}$ вместо u_1 во второе соотношение, имеем соотношение

$$2n\left(\frac{2}{v_1} + \frac{2(1+v_1)}{v_1}\right) = \frac{105}{\frac{3v_1}{2(1+v_1)} + v_1},$$

которое можно переписать в виде

$$4nv_1^2 - v_1(105 - 18n) + (20n - 105) = 0. \qquad (5)$$

Поскольку этому соотношению (при пока неизвестном нам n) должно удовлетворять положительное v_1 (ведь автобус двигался), то рассматривая соотношение (5) как квадратное уравнение относительно v_1, получаем, что его дискриминант должен быть неотрицательным, т. е. должно быть выполнено неравенство

$$(105 - 18n)^2 - 4n(20n - 105) = 4n^2 - 20n \cdot 105 + 105^2 \geqslant 0.$$

Решениями этого неравенства являются все $n \leqslant 105 \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right)$ и все $n \geqslant 105 \cdot \left(\frac{5}{2} + \sqrt{6}\right)$. С учетом найденного ранее условия $n < 42$ и условия $n > 4$ получаем, что возможное значение n равно натуральному числу, удовлетворяющему условию $4 < n \leqslant 105 \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right)$. Так как $\sqrt{6} > 2$, то

$$105 \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right) = \frac{105}{2(5 + 2\sqrt{6})} < \frac{105}{18} = \frac{35}{6} < 6$$

и, значит, $4 < n < 6$. Следовательно, $n = 5$. Тогда соотношение (5) перепишется в виде

$$4v_1^2 - 3v_1 - 1 = 0,$$

откуда $v_1^{(1)} = 1$ и $v_1^{(2)} = -\frac{1}{4}$. Это означает, что $v_1 = 1$, т. е. скорость автобуса по шоссе равна 40 км/час. Поскольку $u_1 = \frac{3v_1}{2(1+v_1)}$, то при $v_1 = 1$ имеем $u_1 = \frac{3}{4}$, а потому скорость автобуса по грунтовой дороге равна 30 км/час. Проверка показывает, что $n = 5$, $v = 40$ и $u = 30$ удовлетворяют системе (4), а значит, в действительности есть ее решение.

Ответ: 40 км/час — скорость по шоссе; 30 км/час — скорость по грунтовой дороге.

6. Обозначим $\sin x$ через u, а $(1-a)$ через b. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$y = \frac{u+2b}{u^2-b} \tag{6}$$

при любом y из промежутка $1 \leqslant y \leqslant 2$ имеет решение u, удовлетворяющее неравенству $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

Пусть b удовлетворяет условию задачи. Тогда при $y = 1$ уравнение

$$1 = \frac{u+2b}{u^2-b}$$

имеет решение u_1 из промежутка $[-1; 1]$ и

$$3b = u_1^2 - u_1 = 2 + (u_1+1)(u_1-2) \leqslant 2.$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что $u_1 + 1 \geqslant 0$ и $u_1 - 2 < 0$. Итак, искомые значения b удовлетворяют условию $b \leqslant \frac{2}{3}$.

Далее, при $y = 2$ уравнение

$$2 = \frac{u+2b}{u^2-b}$$

имеет решение u_2, такое, что $-1 \leqslant u_2 \leqslant 1$, откуда

$$4b = 2u_2^2 - u_2 = 2\left(u_2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \geqslant -\frac{1}{8}$$

и, следовательно, $b \geqslant -\frac{1}{32}$. Итак, все искомые значения b удовлетворяют неравенству

$$-\frac{1}{32} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}. \qquad (7)$$

Докажем теперь, что при любом b из промежутка $-\frac{1}{32} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$ уравнение (6) относительно u при любом $y = y_0$, $1 \leqslant y_0 \leqslant 2$ имеет решение u_0 с условием $-1 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Пусть b удовлетворяет неравенству (7) и $1 \leqslant y_0 \leqslant 2$. Тогда уравнение

$$\frac{u+2b}{u^2-b} = y_0 \qquad (8)$$

имеет следствием квадратное относительно u уравнение

$$y_0 u^2 - u - by_0 - 2b = 0. \qquad (9)$$

Его дискриминант D неотрицателен:

$$D = 1 + 4by_0(y_0+2) \geqslant 1 - \frac{1}{8}y_0(y_0+2) \geqslant 1 - \frac{1}{8}\cdot 2\cdot 4 = 0.$$

Уравнение (9) имеет корни $\frac{1 \pm \sqrt{D}}{2y_0}$. Рассмотрим $u_0 = \frac{1-\sqrt{D}}{2y_0}$. Тогда $u_0 \leqslant \frac{1}{2y_0} \leqslant \frac{1}{2} < 1$. Далее, $D = 1 + 4by_0(y_0+2) \leqslant$ $\leqslant 1 + \frac{8}{3}y_0(y_0+2) = 1 + 4y_0 + \frac{4}{3}y_0 + \frac{8}{3}y_0^2 \leqslant 1 + 4y_0 + 4y_0^2 = (1+2y_0)^2$, так что

$$u_0 \geqslant \frac{1-(1+2y_0)}{2y_0} = -1.$$

Итак, u_0 принадлежит промежутку $[-1; 1]$. Найденное число u_0 будет корнем уравнения (9), но при некоторых b, возможно, не будет корнем уравнения (8). Найдем эти исключительные значения b, при которых уравнения (8) и (9) не равносильны.

Число u_0 не будет корнем уравнения (8), лишь если $u_0^2 = b$. Но тогда из равенства $u_0 + 2b = y_0(u_0^2 - b)$ следует, что должно выполняться равенство $u_0 + 2b = 0$. Из равенств $u_0^2 = b$ и $u_0 = -2b$ следует, что $4b^2 - b = 0$. Это уравнение имеет два корня $b_1 = 0$ и $b_2 = \frac{1}{4}$. Значит, при всех b из промежутка $-\frac{1}{32} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$, отличных от 0 и $\frac{1}{4}$, уравнение (8) имеет корень u_0, удовлетво-

ряющий неравенствам $-1 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Для всех этих значений b числа $a = 1 - b$ удовлетворяют условию задачи.

Рассмотрим теперь отдельно значения b, равные 0 и $\frac{1}{4}$. При $b = 0$ уравнение (8) перепишется в виде

$$y_0 = \frac{u}{u^2}.$$

Так как $u = 0$ не есть решение этого уравнения, то оно равносильно уравнению $y_0 = \frac{1}{u}$, имеющему единственный корень $u = \frac{1}{y_0}$, принадлежащий в силу условия $1 \leqslant y_0 \leqslant 2$ промежутку $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Следовательно, $b = 0$ и $a = 1$ удовлетворяют условию задачи.

При $b = \frac{1}{4}$ и $y_0 = 1$ уравнение (8) перепишется в виде

$$\frac{u + \frac{1}{2}}{u^2 - \frac{1}{4}} = 1. \qquad (10)$$

Решим его. Умножая обе части уравнения (10) на знаменатель, получаем уравнение

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(u - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

имеющее два корня $u_1 = -\frac{1}{2}$ и $u_2 = \frac{3}{2}$. Корень $\left(-\frac{1}{2}\right)$ не удовлетворяет уравнению (10), а $\frac{3}{2}$ удовлетворяет. Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень $u = \frac{3}{2}$, не принадлежащий промежутку $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Итак, $b = \frac{1}{4}$ и $a = \frac{3}{4}$ не удовлетворяют условию задачи. Так как $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ и $1 - \left(-\frac{1}{32}\right) = \frac{33}{32}$, находим ответ: $\frac{1}{3} \leqslant a < \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} < a \leqslant \frac{33}{32}$.

Ответ: $\frac{1}{3} \leqslant a < \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} < a \leqslant \frac{33}{32}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = -1$. 2. $-\infty < x \leqslant 7$; $x = 10$. 3. $x = 1$; $x = 5$. 4. $R = \frac{6}{7}\sqrt{21}$. 5. Производительность нового

пресса — 100 дет./час, старого — 60 дет./час. 6. $-2 \leqslant a < 0$; $0 < a < \frac{4}{3}$.

Вариант 3. 1. $x = 3$. 2. $8 \leqslant x < +\infty$; $x = \frac{3}{2}$. 3. $x = 1$; $x = 18$. 4. $\frac{5}{2}(3\sqrt{21} + 8)$.

Вариант 4. 1. $x = -2$. 2. $-\infty < x \leqslant -9$; $x = \frac{5}{3}$. 3. $x = 1$; $x = 3$.

1989

Решение варианта 1

1. Переходя в логарифмах к основанию 2, имеем

$$2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = \frac{2\log_2\frac{1}{5}}{\log_2\frac{1}{2}} = 2\log_2 5 = \log_2 25,$$
$$3\log_8 26 = \log_2 26.$$

Поскольку $\log_2 26 > \log_2 25$, то первое из данных чисел меньше, чем второе.

Ответ: второе число больше.

2. Перенося правую часть неравенства налево и приводя члены к общему знаменателю, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leqslant 0.$$

Множество решений этого неравенства есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = 0 \qquad (1)$$

и неравенства

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} < 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) имеет решения $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Пользуясь методом интервалов (рис. 148), находим, что множество решений неравенства (2) состоит из двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $1 < x < 2$. Следовательно, решениями исходного неравенства являются все x из промежутков $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 < x \leqslant 2$.

Ответ: $-\infty < x \leqslant -1$, $1 < x \leqslant 2$.

3. Так как при любом x выполняется неравенство $1 - \cos 2x \geqslant 0$, то все решения исходного уравнения таковы, что

$\sin x > 0$. На множестве $\sin x > 0$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 = 1 - \cos 2x.$$

Множество решений этого уравнения имеет вид $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Из них в промежуток $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадают только $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{4}$, а из этих двух чисел условию $\sin x > 0$ удовлетворяет только $x = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4}$.

4. Обозначим через α величину угла CDA, тогда величина угла CDB есть $\pi - \alpha$ (рис. 149). Поскольку $\alpha + \frac{5}{7}\alpha = 180°$, то

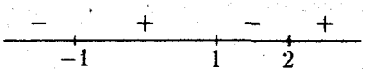


Рис. 148

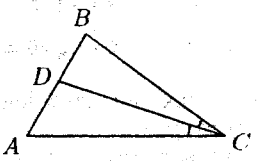


Рис. 149

$\angle CDA = 105°$ и $\angle CDB = 75°$; поскольку

$$\angle ADC + \angle DAC + \angle ACD = 180°,$$

то $\angle ACD = 45°$. Так как CD — биссектриса угла ACB, то $\angle ACB = 90°$. Следовательно, треугольник ACB прямоугольный, и поэтому $AC = BC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

По теореме синусов $\frac{AD}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 105°}$, откуда $AD =$

$$= AC \cdot \frac{\sin 45°}{\sin(60° + 45°)} = AC \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60°} =$$

$$= AC \cdot \frac{1}{\sin 60° + \cos 60°} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = 3 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $3 - \sqrt{3}$.

5. Обозначим через x л количество кислоты, первоначально содержавшееся в 100 л смеси. Ясно, что $x < 100$. В одном литре смеси содержалось $\frac{x}{100}$ л кислоты. В первый раз смеси было отлито $(x + 10)$ л, при этом было отли-

то $(x+10)\frac{x}{100}$ л кислоты. После добавления воды объем новой смеси стал опять равен 100 л. В этом объеме осталось $\left(x-(x+10)\frac{x}{100}\right)$ л кислоты. Новое содержание кислоты в одном литре составило $\frac{1}{100}\left(x-(x+10)\frac{x}{100}\right)$. Во второй раз также было отлито $(x+10)$ л. После этого количество кислоты стало равным $x-(x+10)\cdot\frac{x}{100}-\frac{x+10}{100}\left(x-(x+10)\frac{x}{100}\right)=$ $=x\left(1-\frac{x+10}{100}-\frac{x+10}{100}\left(1-\frac{x+10}{100}\right)\right)=x\left(1-\frac{x+10}{100}\right)^2$ литров. Согласно условию это количество равно $\frac{x}{4}$. Из уравнения

$$x\left(1-\frac{x+10}{100}\right)^2=\frac{x}{4},$$

учитывая, что $x>0$, получим

$$\left(1-\frac{x+10}{100}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Решая это уравнение относительно x, находим $x_1=40$ и $x_2=140$. Учитывая неравенство $x<100$, заключаем, что $x=40$. Искомое количество воды равно 60 л.

Ответ: 60 л.

6. Введя обозначение $t=\sin x$, исходное уравнение перепишем в виде

$$(a-3)^2\cdot t^2=a^2-7a+6. \qquad (3)$$

Теперь задача может быть переформулирована так: найти все значение параметра a, при каждом из которых уравнение (3) не имеет корней, принадлежащих промежутку $-1\leqslant t\leqslant 1$.

При $a=3$ уравнение (3) принимает вид $0=-6$, и, следовательно, при $a=3$ исходное уравнение не имеет решений.

При $a\neq 3$ уравнение (3) может быть переписано в виде

$$t^2=\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2},$$

откуда искомые значения параметра a есть решения совокупности неравенств

$$\frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}>1 \quad \text{и} \quad \frac{a^2-7a+6}{(a-3)^2}<0. \qquad (4)$$

Первое из этих неравенств равносильно неравенству

$$\frac{a+3}{(a-3)^2} < 0.$$

Множество его решений есть $a < -3$.

Так как $a^2 - 7a + 6 = (a-1)(a-6)$ и на множестве $a \neq 3$ имеем $(a-3)^2 > 0$, то множество решений второго неравенства совокупности (4) при условии $a \neq 3$ есть $1 < a < 3$ и $3 < a < 6$.

Объединяя найденные значения a, получаем, что решением задачи являются все a из объединения двух промежутков $-\infty < a < -3$ и $1 < a < 6$.

Ответ: $-\infty < a < -3$; $1 < a < 6$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$.

2. $-2 \leqslant x < 2$; $3 \leqslant x < +\infty$. 3. $x = \pi$. 4. $\sqrt{3} - 1$. 5. 60%.

6. $-\infty < a \leqslant -1$, $3 \leqslant a \leqslant \frac{7}{2}$.

Вариант 3. 1. $2\log_2 5 > 3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{23}$.

2. $-\infty < x \leqslant -2$; $-1 < x \leqslant 1$. 3. $x = \frac{5}{4}\pi$. 4. $\sqrt{3} + 1$. 5. 6 кг.

6. $-\infty < a \leqslant -\frac{10}{3}$; $-3 < a < -2$.

Вариант 4. 1. $2\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} > 3\log_{27} 15$.

2. $-\infty < x < -2$; $-1 \leqslant x \leqslant 3$. 3. $x = -\frac{\pi}{2}$. 4. $3 + \sqrt{3}$. 5. 5 л.

6. $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 3 - \sqrt{14}$; $3 + \sqrt{14} \leqslant a < +\infty$.

§9. Геологический факультет (отделение общей геологии)

1984

Решение варианта 1

1. Так как $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x - 128 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку квадратное уравнение $y^2 - 8y - 128 = 0$ имеет корни $y_1 = -8$ и $y_2 = 16$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$2^x = 16 \quad \text{и} \quad 2^x = -8.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x = 4$, второе корней не имеет, так как $2^x > 0$ для любого x. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, т. е. состоит из двух промежутков $2 \leqslant x < +\infty$ и $-\infty < x \leqslant 1$. В области $x \geqslant 2$ обе части исходного неравенства неотрицательны, и оно равносильно на этом множестве неравенству

$$x^2 - 3x + 2 \leqslant 9(x-1)^2$$

или неравенству

$$8x^2 - 15x + 7 \geqslant 0.$$

Множество решений последнего неравенства есть объединение двух промежутков $-\infty < x \leqslant \frac{7}{8}$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Это множество содержит область $x \geqslant 2$. Следовательно, все x из множества $x \geqslant 2$ являются решениями исходного неравенства.

При $x = 1$ левая часть и правая часть исходного неравенства равны нулю. Значит, $x = 1$ является его решением.

В области $x < 1$ левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому для таких x неравенство не выполняется.

Итак, множество решений исходного неравенства есть $x = 1$ и все $x \geqslant 2$.

Ответ: $x = 1$; $x \geqslant 2$.

3. Так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и по условию $\cos 2\alpha \leqslant -\frac{7}{8}$, то $\cos^2\alpha \leqslant \frac{1}{16}$, т. е. $-\frac{1}{4} \leqslant \cos\alpha \leqslant \frac{1}{4}$. Кроме того, по условию

задачи $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$, так что $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. Используя формулу $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ находим: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{8}$, т. е. $\sin\frac{\alpha}{2}$ равен либо $\sqrt{\frac{5}{8}}$, либо $-\sqrt{\frac{5}{8}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$.

4. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC (рис. 150), получаем равенство

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos(\angle BAC). \qquad (2)$$

Кроме того, по условию $AB + BC = 7$. Подставляя в равенство (2) вместо BC выражение $7 - AB$ и учитывая, что $AC = 5$, $\cos(\angle BAC) = \frac{4}{5}$, получим равенство $(7 - AB)^2 = AB^2 + 25 - 8AB$, откуда $AB = 4$.

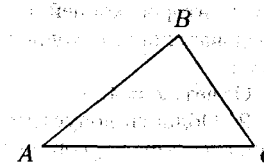


Рис. 150

Следовательно, $BC = 3$, и поэтому по теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник ABC прямоугольный, и его площадь равна $\frac{1}{2}AB \cdot BC = 6$.

Ответ: 6.

5. Обозначим через x число посаженных яблонь, а через y — число посаженных слив, тогда груш было посажено $x + 6$. Число всех посаженных деревьев равно $x + x + y + 6$, что меньше $\frac{1}{3}$ числа приготовленных ям, т. е.

$$2x + y + 6 < \frac{N}{3}.$$

Если бы яблонь посадили в 3 раза больше, то всего было бы посажено $3x + x + 6 + y$ деревьев, и так как при этом остались бы неиспользованными 59 ям, то

$$4x + 6 + y = N - 59.$$

На оставшиеся места посадили персиковые деревья, т. е. их посадили $(N - 2x - y - 6)$ штук, и, поскольку их в три раза больше, чем сливовых деревьев, то

$$N - 2x - y - 6 = 3y.$$

Итак, для нахождения N, x и y получили систему условий

$$\begin{cases} 2x + y + 6 < \dfrac{N}{3}, \\ 4x + 6 + y = N - 59, \\ N - 2x - y - 6 = 3y. \end{cases} \qquad (3)$$

Выразим x и y через N из двух последних уравнений:

$$x = \frac{3N - 254}{14} \quad \text{и} \quad y = \frac{N + 53}{7}.$$

Поскольку $x \geqslant 1$, то $3N - 254 \geqslant 14$, т. е. $N \geqslant \dfrac{268}{3} = 89\dfrac{1}{3}$. Подставляя x и y в первое неравенство системы (3), имеем

$$\frac{3N - 254}{7} + \frac{N + 53}{7} + 6 < \frac{N}{3},$$

откуда $N < \dfrac{477}{5} = 95,4$.

Так как $y = \dfrac{N + 53}{7} = 8 + \dfrac{N - 3}{7}$ есть целое число, то N при делении на 7 должно давать в остатке 3. Среди чисел 90, 91, 92, 93, 94, 95 только одно, а именно $N = 94$, имеет остаток 3 при делении на 7. Тогда $x = 2$ и $y = 21$.

Ответ: 94.

6. Пусть $SABCD$ — данная в условии задачи пирамида (рис. 151). Так как углы при основании AD трапеции $ABCD$ острые, то длина основания AD больше, чем длина основания BC.

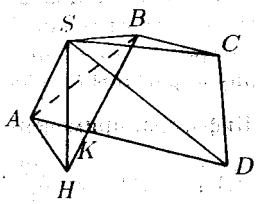


Рис. 151

Рассмотрим трапецию $ABCD$ и выясним, по какую сторону от AD лежит основание H высоты SH. Проведем высоту BK в трапеции $ABCD$. Из прямоугольного треугольника ABK находим, что

$$AB = \frac{AK}{\cos(\angle BAK)} = \frac{AD - BC}{2\cos(\angle BAK)} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{3\pi}{8}}.$$

Так как

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

то $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{2 - \sqrt{2}}} > 1$. Поскольку H лежит вне трапеции $ABCD$ и на прямой BK, то, вообще говоря, возможны два случая, изображенные на рис. 152 и рис. 153.

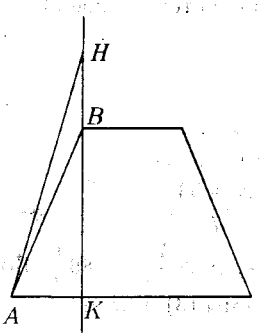


Рис. 152

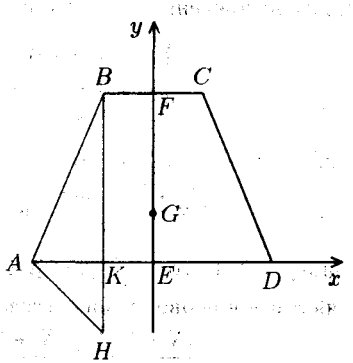


Рис. 153

Если точка H лежит на продолжении отрезка BK за точку B (рис. 152), то $AH > AB > 1$. Так как по условию $AH = 1$, приходим к заключению, что в действительности имеет место случай, изображенный на рис. 153.

Введем в пространстве систему координат. Поместим ее начало в точку E — середину отрезка AD — и направим ось абсцисс по прямой AD так, чтобы точка B имела положительную абсциссу, ось ординат — в плоскости $ABCD$ так, чтобы точка B имела положительную ординату (рис. 153), а третью ось направим в полупространство, содержащее вершину пирамиды S. Так как $AK = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то по теореме Пифагора, примененной к треугольнику AKH, имеем $KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Кроме того, $KE = AE - AK = \dfrac{AD}{2} - AK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{1}{2}$. В силу того, что $SH = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$, заключаем, что вершина S пирамиды имеет координаты $S\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\right)$.

Обозначим буквой G проекцию центра O сферы, описанной вокруг пирамиды $SABCD$, на плоскость $ABCD$. Так как равные наклонные AO, BO, CO и DO должны иметь равные проекции на плоскость $ABCD$, то $AG = BG = CG = DG$. В частности, это означает, что точка G лежит на оси ординат, а центр сферы — точка O — имеет координаты $O(0; y; z)$ с числами y и z, которые будут определены в дальнейшем.

Из прямоугольного треугольника ABK находим

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует что точка B имеет координаты $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, а поскольку точка A имеет координаты $A\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, то, пользуясь формулой, выражающей длину отрезка через координаты его концов, находим, что

$$SO^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - y\right)^2 + \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - z\right)^2,$$

$$AO^2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 + z^2,$$

$$BO^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - y\right)^2 + z^2.$$

Из равенства $AO^2 = BO^2$ следует уравнение

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - y\right)^2.$$

Откуда находим, что $y = \frac{1}{2}$. Приравнивая теперь величины AO^2 и SO^2, подставив в них $y = \frac{1}{2}$, имеем

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + z^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - z\right)^2.$$

Откуда находим, что $z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Искомый радиус сферы R равен AO, т. е.

$$R = AO = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 2. 2. $x=-1$; $x \geqslant 3$. 3. $\pm\dfrac{24}{25}$. 4. 24. 5. 84. 6. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 3. 1. 2. 2. $x=-2$; $x \geqslant 5$. 3. $\pm\sqrt{7}$. 4. 6. 5. 90. 6. $1+\sqrt{2}$.

Вариант 4. 1. 3. 2. $x=2$; $x \geqslant 3$. 3. $\dfrac{5}{12} \leqslant |\operatorname{ctg}\alpha| \leqslant \dfrac{12}{5}$. 4. 4. 5. 64. 6. $3+2\sqrt{2}$.

1985

Решение варианта 1

1. Рассмотрим числа $2^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 2}$. Прологарифмируем каждое из этих чисел по основанию 3, тогда получаем

$$\log_3(2^{\log_3 5}) = \log_3 5 \cdot \log_3 2,$$
$$\log_3(5^{\log_3 2}) = \log_3 2 \cdot \log_3 5.$$

Так как правые части этих равенств равны, то равны и левые, но это означает, что числа $2^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 2}$ равны, а поэтому число $2^{\log_3 5} - 0,1$ меньше числа $5^{\log_3 2}$.

Ответ: $2^{\log_3 5} - 0,1 < 5^{\log_3 2}$.

2. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $|x-1| \neq 1$, т. е. из всех x кроме $x=0$ и $x=2$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$|x-2| = |x-1| - 1. \qquad (1)$$

Решим теперь уравнение (1). Для этого разобьем ось OX на три промежутка $-\infty < x \leqslant 1$, $1 < x \leqslant 2$, $2 < x < +\infty$ и решим уравнение (1) на каждом из них отдельно.

На промежутке $-\infty < x \leqslant 1$ справедливы равенства $|x-2| = -(x-2)$, $|x-1| = -(x-1)$, так что уравнение (1) может быть переписано в виде $-(x-2) = -(x-1) - 1$. Получившееся уравнение решений не имеет. Значит, и уравнение (1) не имеет решений в области $-\infty < x \leqslant 1$.

На промежутке $1 < x \leqslant 2$ справедливы равенства $|x-2| = -(x-2)$, $|x-1| = x-1$, так что уравнение (1) может быть переписано в виде $-(x-2) = x-1-1$. Это уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$, принадлежащий рассматриваемому промежутку.

На промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $|x-2| = x-2$, $|x-1| = x-1$, и уравнение (1) можно переписать так: $x-2 = x-1-1$. Получившееся равенство выполняется при любом значении x. Поэтому все числа x из промежутка $2 < x < +\infty$ являются решениями уравнения (1).

Объединяя найденные множества решений, заключаем, что множество решений уравнения (1) имеет вид $2 \leqslant x < +\infty$. Из этих чисел только $x = 2$ не входит в ОДЗ исходного уравнения. Поэтому множество решений исходного уравнения имеет вид $2 < x < +\infty$.

Ответ: $2 < x < +\infty$.

3. Обозначим через x и y количества деталей, которые изготавливают за 1 час соответственно первый и второй рабочие. Вместе за 1 час они изготовят $x+y$ деталей, так что в соответствии с условием задачи получаем равенство

$$x + y = 30. \qquad (2)$$

Первый рабочий на изготовление 60 деталей потратил $\frac{60}{x}$ часов, а второму рабочему на такую же партию деталей потребовалось $\frac{60}{y}$ часов. По условию задачи справедливо равенство

$$\frac{60}{y} - \frac{60}{x} = 3. \qquad (3)$$

Выражая из уравнения (2) x через y, находим $x = 30 - y$. Подставив это выражение в уравнение (3), получаем уравнение

$$\frac{60}{y} - \frac{60}{30-y} = 3.$$

Это уравнение имеет два корня $y_1 = 10$ и $y_2 = 60$. Поскольку $x = 30 - y > 0$, то условию задачи удовлетворяет только $y = 10$. Поэтому второй рабочий изготовит 90 деталей за $90 : 10 = 9$ часов.

Ответ: 9 часов.

4. Заменяя 4 на выражение $4\sin^2 x + 4\cos^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x$$

или в виде

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0. \qquad (4)$$

Поскольку те x, для которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения (4), то, поделив левую и правую его части на $\cos^2 x$, получаем, что данное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0.$$

Так как квадратное уравнение $z^2 - 4z - 5 = 0$ имеет два корня $z_1 = -1$ и $z_2 = 5$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 5.$$

Следовательно, решения исходного уравнения есть $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$, и $x_2 = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in Z$.

5. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x + 2 \geqslant 0$, $(x + 2) \times (2x - 1) \geqslant 0$, $(x + 6)(2x - 1) \geqslant 0$ и $x + 6 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $\frac{1}{2} \leqslant x < +\infty$. Поскольку на ОДЗ $\sqrt{(x+2)(2x-1)} = \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1}$ и $\sqrt{(x+6)(2x-1)} = \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1}$, то исходное уравнение можно записать так:

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1} + 3\sqrt{x+2}.$$

Перенеся все члены с радикалами в левую часть и группируя слагаемые, перепишем это уравнение в виде

$$(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4. \qquad (5)$$

Поскольку $\sqrt{x+6} \neq \sqrt{x+2}$, то, умножив левую и правую части уравнения (5) на $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$, имеем уравнение

$$\sqrt{2x-1} - 3 = (\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}), \qquad (6)$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ.

На ОДЗ справедливо неравенство $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} > 0$. Поэтому все решения уравнения (6) удовлетворяют неравенству $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$ и, значит, лежат в области $x > 5$.

На множестве $x > 5$ обе части уравнения (6) положительны, следовательно, на этом множестве оно равносильно уравнению

$$(\sqrt{2x-1} - 3)^2 = (\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2})^2,$$

т. е. уравнению

$$3\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{x+2}. \qquad (7)$$

Обе части уравнения (7) определены на множестве $x > 5$ и положительны на этом множестве. Следовательно, в области $x > 5$ уравнение (7) равносильно уравнению

$$9(2x-1) = (x+6)(x+2).$$

Получившееся уравнение имеет два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = 7$. Из них в область $x > 5$ попадает только корень $x_2 = 7$. Итак, уравнение (6), а значит, и исходное уравнение, имеет единственный корень $x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

6. Заданный куб изображен на рис. 154.

Кратчайший путь между точками M и N на поверхности куба состоит из нескольких линий, расположенных на гранях куба. Ясно, что эти линии должны быть отрезками. Поэтому кратчайший путь содержится среди ломаных с вершинами, лежащими на ребрах куба, началом в точке M и концом в точке N. Первое звено любого такого пути из точки M в точку N может лежать либо в грани $ABCD$, либо в грани $BCC'B'$. В силу симметрии куба относительно плоскости $BCD'A'$, содержащей точки M и N, можно считать, что первое звено кратчайшего пути лежит в плоскости $ABCD$.

Рассмотрим какой-нибудь ломаный путь, состоящий из двух звеньев ML и LN, где точка L лежит на ребре куба AD (рис. 154). Повернем квадрат $ADD'A'$ вокруг отрезка AD так, чтобы его плоскость совпала с плоскостью $ABCD$ и квадраты $ADD'A'$ и $ADBC$ лежали по разные стороны от AD (рис. 155). Длина ломаной NLM не меньше

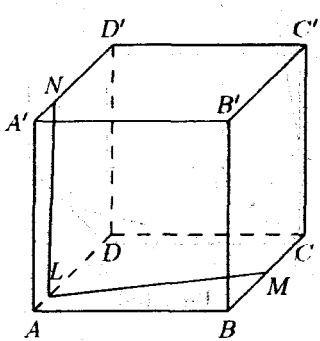


Рис. 154

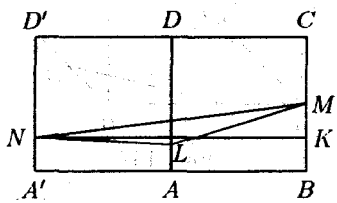


Рис. 155

длины отрезка NM. Если K — точка на отрезке BM такая, что $NK \parallel A'B$, то $BK = A'N = 1$, $KM = BM - BK = 1$, $NK = A'B = 2AB = 8$. Из прямоугольного треугольника MNK находим $MN = \sqrt{NK^2 + KM^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$. Итак, каждая ломаная, соединяющая по поверхности куба точки M и N и пересекающая ребро AD, имеет длину, не меньшую, чем $\sqrt{65}$.

Рассмотрим какой-нибудь путь $ML_1'\ldots L_k'N$ из M в N, первое звено которого пересекает ребро CD (рис. 156). Если обозначить через L_i точку, симметричную L_i' относительно плоскости, перпендикулярной ребру BC и проходящей через точку M, то путь $ML_1\ldots L_kN$ будет короче, чем путь $ML_1'\ldots L_k'N$, поскольку точка N лежит ближе к вершине A', чем к вершине D'. Значит, кратчайший путь не может содержаться среди путей, первое звено которых пересекает ребро CD.

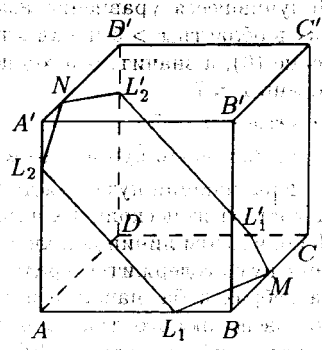


Рис. 156

Рассмотрим теперь какой-нибудь ломаный путь, первое звено которого пересекает ребро AB. Точку пересечения обозначим через L_1, а следующую за ней вершину ломаной — через L_2. Ясно, что кратчайший из путей, пересекающих ребро AB, должен содержаться среди путей ML_1L_2N, изображенных на рис. 157 и рис. 158.

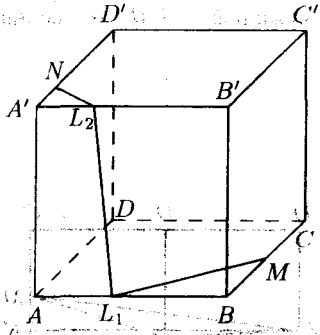


Рис. 157

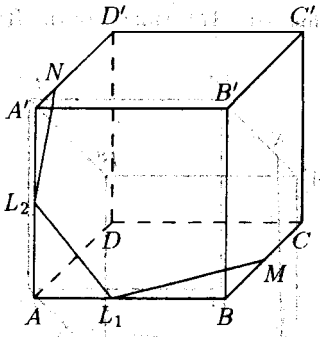


Рис. 158

Рассмотрим ломаные ML_1L_2N, у которых точка L_2 лежит на ребре $A'B'$ (рис. 157). Повернем квадрат $A'B'C'D'$ вокруг отрезка $A'B'$, а квадрат $ABCD$ — вокруг отрезка AB так, чтобы оба квадрата попали в плоскость $ABB'A'$ так, как на рис. 159. Длина ломаной ML_1L_2N не меньше длины отрезка MN. Если из точки M провести прямую MK параллельно стороне квадрата CD (рис. 159), то будем иметь $MK = CD = 4$, $KA = MB = 2$ и

$$KN = KA + AA' + A'N = 2 + 4 + 1 = 7.$$

По теореме Пифагора находим $MN = \sqrt{KN^2 + MK^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$. Итак, все пути, пересекающие ребра AB и $A'B'$, имеют длину не меньшую, чем $\sqrt{65}$.

Найдем теперь самый короткий из путей, изображенных на рис 158. Если повернуть квадрат $ADD'A'$ вокруг отрезка AA' и квадрат $ABCD$ — вокруг отрезка AB так, чтобы оба квадрата попала в плоскость $ABB'A'$, то получится фигура, изображенная на рис. 160. Длина ломаной ML_1L_2N не меньше дли-

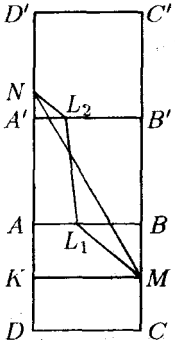


Рис. 159

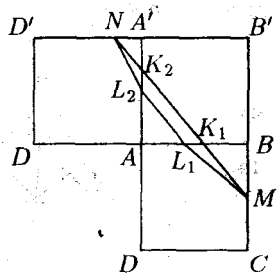


Рис. 160

ны отрезка MN. Так как $MB' = MB + BB' = 2 + 4 = 6$, $NB' = NA' + A'B' = 1 + 4 = 5$, то, применяя теорему Пифагора к треугольнику MNB', находим

$$MN = \sqrt{MB'^2 + NB'^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}.$$

Отсюда следует, что кратчайшим будет путь по поверхности куба MK_1K_2N, где точки K_1 и K_2 лежат на отрезках AB и AA', причем (рис. 160)

$$\frac{BK_1}{BM} = \frac{NA'}{A'K_2} = \frac{NB'}{MB'} = \frac{5}{6},$$

т. е. $BK_1 = \frac{5}{6}BM = \frac{5}{3}$, $A'K_2 = \frac{6}{5}NA' = \frac{6}{5}$. Длина этого пути равна $\sqrt{61}$. Еще один путь такой же длины симметричен пути MK_1K_2N относительно плоскости $A'BCD'$.

Ответ: $\sqrt{61}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $2^{\log_7 3} + 0,1 > 3^{\log_7 2}$. 2. $-\infty < x < -2$. 3. 6 часов. 4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $k \in Z$.

5. $x = 1$. 6. $\dfrac{17\sqrt{2}+3}{7}$.

Вариант 3. 1. $2^{\log_5 2} - 0,1 < 2^{\log_5 7}$. 2. $3 \leqslant x < +\infty$.
3. 8 часов. 4. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z$.
5. $x = 5$. 6. $\sqrt{\dfrac{31}{17}}$

Вариант 4. 1. $5^{\log_3 7} + 0,1 > 7^{\log_3 5}$. 2. $-\infty < x \leqslant -3$.
3. 1,5 часа. 4. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$.
5. $x = 2$. 6. 2.

1988

Решение варианта 1

1. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{5}$ (рис 161). Значит, $AC + BC = 2 + \sqrt{5}$. Так как $ABDE$ — квадрат со стороной 1, то $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{2}$. Итак, задача сводится к сравнению двух чисел $2 + \sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$. Сравним квадраты этих чисел: $(2+\sqrt{5})^2$ и $(3\sqrt{2})^2$. Соответственно имеем: $(2+\sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$, $(3\sqrt{2})^2 = 18$. Поскольку $(4\sqrt{5})^2 = 80$ и $9^2 = 81$, то $4\sqrt{5} < 9$. Значит, $4\sqrt{5} + 9 < 18$, а это означает, что $(2+\sqrt{5})^2 < (3\sqrt{2})^2$, т. е. $2 + \sqrt{5} < 3\sqrt{2}$.

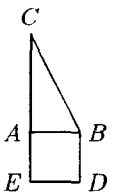


Рис. 161

Ответ: $AC + BC$ меньше, чем $3AD$.

2. Эту задачу можно переформулировать как задачу о решении уравнения относительно α.

Для тех α, для которых $\sin(4\alpha + 60^\circ) \neq 0$, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin(4\alpha + 60^\circ) - \sin 20^\circ = 0$$

или уравнению

$$\sin(2\alpha + 20^\circ)\cdot\cos(2\alpha + 40^\circ) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin(2\alpha + 20^\circ) = 0 \quad \text{и} \quad \cos(2\alpha + 40^\circ) = 0.$$

Решения первого из этих уравнений есть $\alpha = -10^\circ + 90^\circ\cdot k$, $k \in Z$. Решения второго уравнения есть $\alpha = 25^\circ + 90^\circ\cdot m$, $m \in Z$. Полученные α удовлетворяют условию $\sin(4\alpha + 60^\circ) \neq 0$, так как при $\alpha = -10^\circ + 90^\circ\cdot k$, $k \in Z$, имеем $\sin(4\alpha + 60^\circ) = \sin 20^\circ \neq 0$, а при $\alpha = 25^\circ + 90^\circ\cdot m$, $m \in Z$, имеем $\sin(4\alpha + 60^\circ) = \sin 140^\circ \neq 0$.

Ответ: $\alpha = -10^\circ + 90^\circ\cdot k$, $k \in Z$; $\alpha = 25^\circ + 90^\circ\cdot m$, $m \in Z$.

3. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 162). Обозначим через E и K точки касания окружности с основаниями трапеции, а через F и L — точки касания с боковыми сторонами. Обозначим через α угол FAO. Так как AO и BO — биссектрисы соответственно углов BAD и ABC, а $\angle BAD + \angle ABC = \pi$ и $\angle BOE + \angle OBE = \frac{\pi}{2}$, то $\angle BOE$ также равен α. Из прямоугольного треугольника AFO имеем $FO = 12\operatorname{tg}\alpha$. Так как $BE = BF$, как отрезки касательных, проведенных из одной точки B, то из прямоугольного треугольника BOE имеем $EO = 3\operatorname{ctg}\alpha$. Так как $FO = EO$, как радиусы вписанной окружности, то $12\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{4}$. Поскольку $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Значит, $FO = 6$, т. е. радиус окружности равен 6. Поэтому высота трапеции равна 12. Так как $EC = BC - BE = 6$, то треугольник OEC прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle ECO = 45°$. Следовательно, угол ECD равен $90°$ и $CD \perp BC$ (рис. 163). Поскольку $AK = 12$,

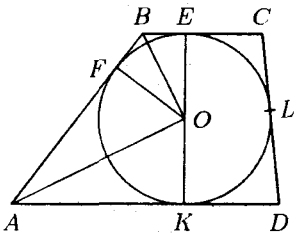


Рис. 162

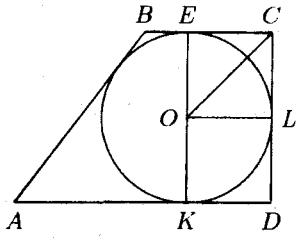


Рис. 163

как отрезок касательной, проведенной к окружности из точки A ($AK = AF = 12$), то $AD = AK + KD = AK + EC = 18$. Следовательно, площадь трапеции равна $EK \cdot \frac{AD + BC}{2} = 162$.

Ответ: 162.

4. Переходя к логарифмам по основанию 3, получим неравенство

$$-2\log_3\left(\frac{3x+2}{x}\right) \leqslant -\log_3 x^2, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Поскольку $\log_3 x^2 = 2\log_3|x|$, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$\log_3\left(\frac{3x+2}{x}\right) \geqslant \log_3|x|,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\frac{3x+2}{x} \geqslant |x|. \qquad (2)$$

На множестве $x < 0$ неравенство (2) равносильно неравенству

$$3x + 2 \leqslant -x^2.$$

Решениями этого неравенства являются все x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant -1$. Все эти x принадлежат рассматриваемому множеству $x < 0$ и, значит, являются решениями исходного неравенства на множестве $x < 0$.

На множестве $x > 0$ неравенство (2) равносильно неравенству

$$3x + 2 \geqslant x^2.$$

Решениями этого неравенства являются все x из промежутка $\frac{3-\sqrt{17}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Из них рассматриваемому промежутку $0 < x < +\infty$ принадлежат только x из множества $0 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Они и являются решениями неравенства (2) на множестве $x > 0$.

Итак, решениями исходного неравенства являются все x из объединения промежутков $-2 \leqslant x \leqslant -1$ и $0 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $-2 \leqslant x \leqslant -1$; $0 < x \leqslant \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

5. Пусть n и m соответственно — число "Лиазов" и "Икарусов", $3k$ — число пионеров в каждом "Лиазе". Тогда число пионеров в каждом "Икарусе" равно $3,6k$. В силу условию задачи имеем соотношение

$$3kn + 3,6km = 510.$$

Ясно, что поскольку количество пионеров в автобусе — число целое, то, чтобы $3,6k$ было целым числом, k должно быть кратно 5, т. е. $k = 5k_1$, поэтому имеем соотношение

$$15k_1n + 18k_1m = 510$$

или, сокращая на 3, соотношение

$$5k_1n + 6k_1m = 170.$$

Так как $6k_1m$ кратно двум и 170 кратно двум, то $5k_1n$ кратно двум и, так как n нечетное число, то k_1 кратно двум, т. е. $k_1 = 2k_2$. Поэтому имеем соотношение

$$10k_2n + 12k_2m = 170$$

или, сокращая на 2, соотношение

$$5k_2n + 6k_2m = 85. \qquad (3)$$

Так как в правой части этого равенства — нечетное число, то число k_2 не может быть четным. Так как $5k_2n$ и 85 кратны 5, то k_2m кратно 5 и, так как k_2 — нечетное число, то k_2m — также нечетное число, поэтому число k_2m больше 5 быть не может (иначе оно было бы не меньше 15, вопреки (3)). Следовательно, либо $k_2 = 1$ и $m = 5$, либо $k_2 = 5$ и $m = 1$.

Если $k_2 = 5$ и $m = 1$, то нет целого n, удовлетворяющего условию (3).

Пусть $k_2 = 1$ и $m = 5$, тогда условию (3) удовлетворяет $n = 11$. Но тогда $k_1 = 2$ и $k = 10$, и число пионеров в "Лиазе" равно 30, а число пионеров в "Икарусе" равно 36. В пять "Икарусов" войдет 180 человек, и для перевозки остальных 330 человек действительно надо 11 "Лиазов".

Ответ: 11 "Лиазов" и 5 "Икарусов".

6. Рассмотрим схематический график функции

$$y = |x - \alpha| + |x - \beta|. \qquad (4)$$

При $\alpha < \beta$ этот график будет иметь вид, как на рис. 164. Поэтому уравнение $|x - \alpha| + |x - \beta| = c$ либо не будет иметь решений, либо будет иметь их 2, либо бесконечно много.

В случае $\alpha = \beta$ график функции (4) будет иметь вид, как на рис. 165. Поэтому уравнение $2|x - \alpha| = c$ будет иметь единственное решение только в случае, когда $c = 0$. Следовательно, те a и b, при которых исходное уравнение имеет единственный корень, должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} \sin^2 a = 2\sin a\cos^4 4a - \cos^2 4a, \\ b\left(a + \dfrac{3}{2}\pi\right) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Если $a = -\dfrac{3\pi}{2}$, то $\sin^2 a = 1$, $2\sin a\cos^4 4a - \cos^2 4a = 1$. Это значение a удовлетворяет первому из условий (5). Следовательно, $a = -\dfrac{3\pi}{2}$ и b — любое действительное число — удовлетворяют условию задачи.

При $a \neq -\dfrac{3\pi}{2}$ второе условие означает, что $b = 0$, и для нахождения a надо решить уравнение

$$\sin^2 a - 2\sin a\cos^4 4a + \cos^2 4a = 0. \qquad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$(\sin a - \cos^4 4a)^2 = \cos^8 4a - \cos^2 4a. \qquad (7)$$

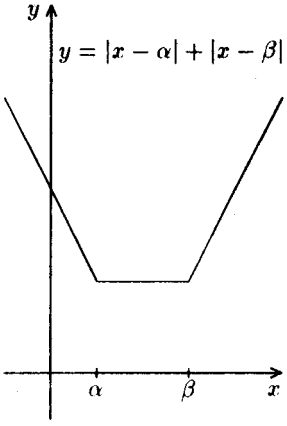


Рис. 164

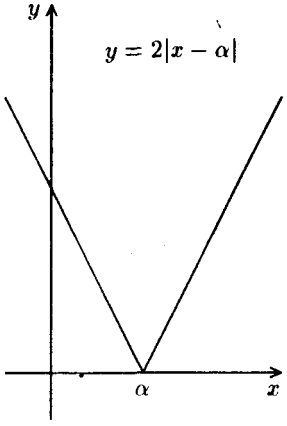


Рис. 165

Так как левая часть этого уравнения неотрицательна при любом a, то уравнение (7) может иметь решения только в том случае, когда его правая часть неотрицательна, т. е. когда справедливо неравенство

$$\cos^8 4a - \cos^2 4a \geqslant 0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) справедливо для всех a, являющихся решениями уравнения

$$\cos^8 4a - \cos^2 4a = 0, \qquad (9)$$

и для всех a, являющихся решениями неравенства

$$\cos^8 4a - \cos^2 4a > 0. \qquad (10)$$

Неравенство (10) решений не имеет, так как для любого a справедливо неравенство $\cos^2 4a \geqslant \cos^8 4a$. Уравнение (9) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 4a = 0, \quad \cos 4a = 1 \quad \text{и} \quad \cos 4a = -1. \qquad (11)$$

Таким образом, уравнение (7) может иметь решения только тогда, когда a удовлетворяет одному из условий (11).

Если $\cos 4a = 0$, то из уравнения (7) следует, что $\sin a = 0$.

Если $\cos 4a = 1$, то из уравнения (7) следует, что $\sin a = 1$.

Если $\cos 4a = -1$, то из уравнения (7) следует, что $\sin a = 1$.

Следовательно, искомые значения a есть решения следующей совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} \sin a = 0, \\ \cos 4a = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin a = 1, \\ \cos 4a = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin a = 1, \\ \cos 4a = 1. \end{cases}$$

Первая и вторая из этих систем решений не имеют, а решения третьей есть $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Итак, искомые значения параметров a и b есть $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $b = 0$ или $a = -\frac{3\pi}{2}$, b — любое действительное число.

Действительно, при этих значениях параметров исходное уравнение перепишется в виде

$$|x-1| + |x-1| = 0$$

и очевидно, что это уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right)$, $k \in Z$, или $\left(-\frac{3\pi}{2}; p\right)$, p — любое действительное число.

Ответы к варианту 2. 1. $AC - AB$ меньше, чем удвоенная сторона квадрата с диагональю 5.
2. $\varphi = 35^\circ + 120^\circ \cdot m$, $m \in Z$; $\varphi = 45^\circ + 120^\circ \cdot k$, $k \in Z$. 3. 6 и 12.
4. $-\infty < x \leqslant -3$; $-1 \leqslant x < -\frac{3}{4}$; $2 + \sqrt{7} \leqslant x < +\infty$. 5. 140.
6. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m; 0\right)$, $m \in Z$; $\left(\frac{5\pi}{2}; p\right)$, p — любое действительное число.

§10. Экономический факультет (отделение политической экономии)

1984

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x+2>0$ и $5x+6>0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-\frac{6}{5}<x<+\infty$. На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2[(x+2)(5x+6)]=7.$$

На области $-\frac{6}{5}<x<+\infty$ последнее уравнение равносильно уравнению

$$(x+2)(5x+6)=2^7$$

или уравнению

$$5x^2+16x-116=0. \qquad (1)$$

Корни уравнения (1) есть $x_1=\frac{-8+2\sqrt{161}}{5}$ и $x_2=\frac{-8-2\sqrt{161}}{5}$. Проверим, какие из этих корней удовлетворяют условию $-\frac{6}{5}<x<+\infty$.

Так как $12<\sqrt{161}$, то $\frac{-8+2\sqrt{161}}{5}>\frac{-8+24}{5}=\frac{16}{5}>-\frac{6}{5}$, а $\frac{-8-2\sqrt{161}}{5}<-\frac{32}{5}<-\frac{6}{5}$.

Итак, число $x_1=\frac{-8+2\sqrt{161}}{5}$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{-8+2\sqrt{161}}{5}$.

2. Поскольку $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то исходное уравнение можно переписать так:

$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$$

или так:

$$\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x=0 \quad \text{и} \quad \sin x-\sqrt{3}\cos x=0.$$

Решения первого уравнения есть $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$$

или, пользуясь формулой для синуса разности двух углов, в виде

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Отсюда $x - \frac{\pi}{3} = \pi n$, $n \in Z$, или $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Следовательно, получаем две серии решений исходного уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, и $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

3. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем числовую ось на промежутки $-\infty < x < -\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$, $4 < x < +\infty$ и будем решать исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Если $-\infty < x < -\frac{5}{3}$, то $x - 4 < 0$, а $3x + 5 < 0$. Значит, $|x - 4| = -(x - 4)$, $|3x + 5| = -(3x + 5)$, и исходное неравенство имеет вид

$$-2(x - 4) - (3x + 5) \geqslant 16.$$

Решения этого неравенства образуют промежуток $-\infty < x \leqslant -\frac{13}{5}$. Все x из этого промежутка лежат в области $-\infty < x < -\frac{5}{3}$. Следовательно, множество всех решений исходного неравенства в области $-\infty < x < -\frac{5}{3}$ есть промежуток $-\infty < x \leqslant -\frac{13}{5}$.

Если $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$, то $x - 4 \leqslant 0$, а $3x + 5 \geqslant 0$. Значит, $|x - 4| = -(x - 4)$, $|3x + 5| = 3x + 5$, и исходное неравенство имеет вид

$$-2(x - 4) + 3x + 5 \geqslant 16.$$

Решения этого неравенства образуют промежуток $3 \leqslant x < +\infty$. Из этих x в области $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$ лежат числа, удовлетворяющие неравенствам $3 \leqslant x \leqslant 4$.

Следовательно, множество всех решений исходного неравенства в области $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$ есть промежуток $3 \leqslant x \leqslant 4$.

Если $4 < x < +\infty$, то $x - 4 > 0$ и $3x + 5 > 0$. Значит, $|x - 4| = x - 4$, $|3x + 5| = 3x + 5$, и исходное неравенство имеет вид

$$2(x - 4) + 3x + 5 \geqslant 16.$$

Решения этого неравенства образуют промежуток $\frac{19}{5} \leqslant x < +\infty$. Так как $\frac{19}{5} < 4$, то множество решений исходного неравен-

ства в области $4 < x < +\infty$ совпадает со всей этой областью $4 < x < +\infty$.

Объединяя решения, найденные в областях $-\infty < x < -\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 4$ и $4 < x < +\infty$, получаем, что множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -\frac{13}{5}$ и $3 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x \leqslant -\frac{13}{5}$, $3 \leqslant x < +\infty$.

4. Обозначим буквами x и y количества землекопов в первой и во второй бригадах соответственно. Согласно условию

$$x + y = 52. \tag{2}$$

Обозначим также через t_1 и t_2 время работы первой и второй бригад соответственно.

Если бы первая бригада работала без перерыва,то смогла бы выкопать котлован в 1,5 раза больше. Это означает, что за время перерыва она смогла бы выполнить половину сделанной ею работы, и, следовательно, время перерыва первой бригады равно $0,5t_1$ часов. Аналогично, вторая бригада за время ее перерыва смогла бы выполнить 0,4 сделанной ею работы, и следовательно, время ее перерыва равно $0,4t_2$ часов. Согласно условию задачи, выполнены неравенства

$$0,5t_1 \geqslant 1,5 \quad \text{и} \quad 0,4t_2 \leqslant 1\frac{1}{3}. \tag{3}$$

Рабочий день первой бригады продолжался, таким образом, $t_1 + 0,5t_1 = 1,5t_1$ часов, а рабочий день второй бригады продолжался $t_2 + 0,4t_2 = 1,4t_2$ часов. Первая бригада закончила работу на 1 час позже второй, поэтому справедливо равенство

$$1,5t_1 - 1,4t_2 = 1. \tag{4}$$

Так как производительность землекопов одинакова, то на рытье котлованов равного объема бригады должны были затратить одинаковое количество человеко-часов. Затраты первой бригады равны $x \cdot t_1$ человеко-часов, а затраты второй бригады — $y \cdot t_2$ человеко-часов.

Значит, справедливо еще одно уравнение

$$xt_1 = yt_2. \tag{5}$$

Из уравнения (2) следует, что $y = 52 - x$. Подставляя это значение y в уравнение (5) и учитывая, что $x \neq 0$, получаем, что

$$t_1 = \frac{52 - x}{x} t_2. \tag{6}$$

Подставляя это значение t_1 в уравнение (4) и учитывая, что x — натуральное число и поэтому $78 - 2,9x \neq 0$, находим, что

$$t_2 = \frac{x}{78 - 2,9x}.$$

Подставляя это значение t_2 в (6), имеем что

$$t_1 = \frac{52 - x}{78 - 2,9x}.$$

Подставляя найденные значения для t_1 и t_2 в неравенства (3), получаем систему неравенств относительно x

$$\begin{cases} \dfrac{52 - x}{78 - 2,9x} \geqslant 3, \\ \dfrac{3x}{78 - 2,9x} \leqslant 10. \end{cases}$$

Перенося правые части этих неравенств налево и преобразуя полученные левые части, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x - 23\frac{7}{11}}{x - 26\frac{26}{29}} \leqslant 0, \\ \dfrac{x - 24\frac{3}{8}}{x - 26\frac{26}{29}} \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решения первого неравенства системы (7) составляют промежуток $23\frac{7}{11} \leqslant x < 26\frac{26}{29}$. Из этих x второму неравенству системы (7) удовлетворяют все x из промежутка

$$23\frac{7}{11} \leqslant x \leqslant 24\frac{3}{8}. \tag{8}$$

Эти x и являются решениями системы (7). Так как x — натуральное число, то неравенствам (8) удовлетворяет лишь $x = 24$, но тогда из уравнения (2) следует, что $y = 28$.

Ответ: 24 и 28.

5. Опустим из вершин A и C заданного четырехугольника перпендикуляры AE и CF на его диагональ BD (рис. 166) и обозначим α, β, γ, δ углы при вершинах B и D четырехугольника $ABCD$, как это показано на рис. 166. Тогда CF — высота в треугольниках BEC и CED, AE — высота в треугольниках ABF и AFD. Площадь S

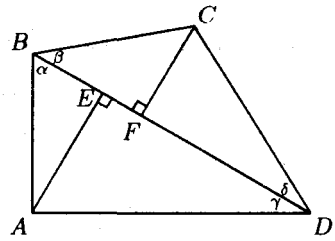


Рис. 166

четырехугольника $ABCD$ может быть выражена следующим образом

$$\begin{aligned} S &= S_{BEC} + S_{CED} + S_{ABF} + S_{AFD} = \\ &= \frac{1}{2}BE\cdot CF + \frac{1}{2}ED\cdot CF + \frac{1}{2}BF\cdot AE + \frac{1}{2}FD\cdot AE = \\ &= \frac{1}{2}AB\cos\alpha\cdot CD\sin\delta + \frac{1}{2}AD\cos\gamma\cdot BC\sin\beta + \\ &+ \frac{1}{2}BC\cos\beta\cdot AD\sin\gamma + \frac{1}{2}CD\cos\delta\cdot AB\sin\alpha = \\ &= \frac{1}{2}AB\cdot CD\sin(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}BC\cdot AD\sin(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

Так как $\sin(\alpha+\delta) \leqslant 1$, $\sin(\beta+\gamma) \leqslant 1$ и согласно условию $S = \frac{1}{2}AB\cdot CD + \frac{1}{2}BC\cdot AD$, то из найденного выражения для S находим, что должны выполняться равенства

$$\sin(\alpha+\delta) = 1 \quad \text{и} \quad \sin(\beta+\gamma) = 1$$

или, поскольку все углы α, β, γ, δ неотрицательны и меньше π, равенства

$$\alpha+\delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \beta+\gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

В силу того, что α и γ — острые углы прямоугольного треугольника ABD, имеем

$$\alpha+\gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Кроме того по условию $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, так что

$$\gamma+\delta = \frac{\pi}{3}. \tag{11}$$

Из равенств (9), (10) и (11) находим

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{\pi}{6},\ \delta = \frac{\pi}{6}.$$

Применяя к треугольнику BCD теорему синусов, получаем равенство

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\delta},$$

откуда следует, что

$$CD = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}\cdot BC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\cdot 4 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

6. Данное в условии задачи неравенство имеет смысл лишь при тех значениях параметра a, при которых одновременно выполняются неравенства

$$\begin{cases} a^3 + a^2 - a - 1 \geqslant 0, \\ a^3 + a^2 \geqslant 0, \\ a^4 - a^2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{12}$$

Так как $a^3 + a^2 - a - 1 = (a+1)^2(a-1)$, $a^3 + a^2 = a^2(a+1)$ и $a^4 - a^2 = a^2(a+1)(a-1)$, то множество решений получившейся системы неравенств (12) состоит из $a = -1$ и из $a \geqslant 1$.

Если $a = -1$, то исходное неравенство имеет вид $0 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1 \leqslant 0$. Множество его решений совпадает с множеством всех действительных чисел, а условие

$$a \leqslant x \leqslant 2a + 1 \tag{13}$$

превращается в условие $-1 \leqslant x \leqslant -1$. Значит, при $a = -1$ исходное неравенство имеет единственное решение $x = -1$, удовлетворяющее неравенствам (13), т. е. $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \geqslant 1$, для этих a справедливо тождество

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^3 + a^2 - a - 1}\,x^3 - \sqrt{a^3 + a^2}\,x^2 + \sqrt{a^4 - a^2}\,x - a^2 = \\ = \;& x^2\sqrt{a+1}(x\sqrt{a^2-1} - a) + a(x\sqrt{a^2-1} - a) = \\ = \;& (x^2\sqrt{a+1} + a)(x\sqrt{a^2-1} - a). \end{aligned}$$

Поэтому для $a \geqslant 1$ исходное неравенство можно переписать в виде

$$(x^2\sqrt{a+1} + a)(x\sqrt{a^2-1} - a) \leqslant 0. \tag{14}$$

При $a \geqslant 1$ функция $x^2\sqrt{a+1} + a$ принимает только положительные значения. Следовательно, неравенство (14), а вместе с ним и исходное, равносильно для этих a неравенству

$$x\sqrt{a^2-1} - a \leqslant 0. \tag{15}$$

Если $a = 1$, то неравенство (15) принимает вид $0 \cdot x - 1 \leqslant 0$. Множество его решений совпадает с множеством всех действительных чисел. Условие (13), имеющее при $a = 1$ вид $1 \leqslant x \leqslant 3$, справедливо для бесконечного множества решений заданного неравенства.

Следовательно, искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $a > 1$. В этом случае множество решений неравенства (15) имеет вид

$$x \leqslant \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{16}$$

Значение параметра $a > 1$ будет удовлетворять условию задачи в том и только том случае, когда система неравенств (13) и (16) имеет единственное решение. Это возможно, только если

$$a = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

На множестве $a > 1$ получившееся уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{a^2 - 1} = 1. \qquad (17)$$

Уравнение (17) имеет два корня $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -\sqrt{2}$, из которых в множестве $a > 1$ лежит лишь $a_1 = \sqrt{2}$.

Итак, решениями задачи являются два числа $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$.

Ответ: $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\dfrac{-3 + 2\sqrt{46}}{5}$. 2. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

3. $-\infty < x \leqslant -\dfrac{5}{3}$; $-1 \leqslant x < +\infty$. 4. 8 и 9. 5. $7\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

6. $a = -2$; $a = 2 + \sqrt{12}$.

Вариант 3. 1. $\dfrac{-1 + \sqrt{73}}{2}$. 2. πk, $k \in Z$; $\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

3. $-1 \leqslant x \leqslant 0$. 4. 21 и 28. 5. $3\sin\dfrac{5\pi}{24} : \sin\dfrac{11\pi}{24}$.

6. $a = 0$; $a = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Вариант 4. 1. $\dfrac{5 + \sqrt{343}}{3}$. 2. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

3. $-\dfrac{29}{9} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5}$. 4. 25 и 24. 5. $5\sqrt{2} : 2\sin\dfrac{\pi}{12}$.

6. $a = -3$; $a = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

1985

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть исходного неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{x - 2}{3x + 1} \geqslant 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному.

Множество решений неравенства (1) состоит из всех решений уравнения

$$\frac{x - 2}{3x + 1} = 0 \qquad (2)$$

и всех решений неравенства

$$\frac{x-2}{3x+1} > 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет единственное решение $x = 2$. Применяя метод интервалов, получаем, что множество всех решений неравенства (3) состоит из двух промежутков $2 < x < +\infty$ и $-\infty < x < -\frac{1}{3}$. Объединяя множество решений уравнения (2) и множество решений неравенства (3), получаем, что множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $2 \leqslant x < +\infty$ и $-\infty < x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $2 \leqslant x < +\infty$; $-\infty < x < -\frac{1}{3}$.

2. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех чисел $x \neq \pi n$, $n \in Z$. На ОДЗ функция $\sin x$ отлична от нуля. Умножая исходное уравнение на $\sin x$, получаем, что оно равносильно на ОДЗ уравнению

$$2\sin^2 x = 3\cos x$$

или уравнению

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 + 3z - 2 = 0$ имеет корни $z_1 = -2$ и $z_2 = \frac{1}{2}$, то исходное уравнение равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$\cos x = -2 \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Решения второго уравнения есть $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, только эти x и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. Те значения a, при каждом из которых исходное уравнение может иметь решения, удовлетворяют условиям $a > 0$ и $a \neq 1$.

Рассмотрим какое-либо из таких значений a. Переходя в исходном уравнении в логарифмах к основанию 2, имеем уравнение

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 a} + \frac{\log_2 x}{2} = 1,$$

равносильное исходному, которое можно переписать в виде

$$\log_2 x(3\log_2 a + 2) = 2\log_2 a. \qquad (4)$$

Если $3\log_2 a + 2 = 0$, т. е. если $a = 2^{-\frac{2}{3}}$, то левая часть уравнения (4) равна нулю, а правая отлична от нуля. Следовательно, в этом случае уравнение (4), а значит, и исходное, решений не имеют.

Если a удовлетворяет условию $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 x = \frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}.$$

Решение этого уравнения, а следовательно, и исходного, есть

$$x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a+2}}.$$

Ответ: при $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$ исходное уравнение имеет решение $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a+2}}$.

4. Первое решение. Поскольку для любых x

$$3x^2 - x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + 1\frac{11}{12} > 0$$

и функции $2x^2 + x + 1$ и $3x^2 - x + 2$ дифференцируемы на всей числовой прямой, то исходная функция имеет производную

$$y' = \frac{(4x+1)(3x^2 - x + 2) - (6x - 1)(2x^2 + x + 1)}{(3x^2 - x + 2)^2} = \\ = \frac{-5x^2 + 2x + 3}{(3x^2 - x + 2)^2}.$$

Уравнение $y' = 0$ имеет два корня $x_1 = -\frac{3}{5}$ и $x_2 = 1$. На множестве $x < -\frac{3}{5}$ справедливо неравенство $y' < 0$, на множестве $-\frac{3}{5} < x < 1$ справедливо неравенство $y' > 0$, на множестве $x > 1$ справедливо неравенство $y' < 0$.

Следовательно, данная функция убывает на промежутке $-\infty < x < -\frac{3}{5}$, возрастает на промежутке $-\frac{3}{5} < x < 1$, убывает на промежутке $1 < x < +\infty$. Так как данная функция непрерывна в точках $x = -\frac{3}{5}$ и $x = 1$, то она убывает на промежутке $-\infty < x \leqslant -\frac{3}{5}$ и наименьшее значение на множестве $-\infty < x \leqslant -\frac{3}{5}$ принимает в точке $x = -\frac{3}{5}$; возрастает на отрезке

$\left[-\frac{3}{5}; 1\right]$, и наименьшее значение ее на этом отрезке принимается в точке $x = -\frac{3}{5}$.

Поскольку $y\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{23}$ и при $x \geqslant 1$ имеем

$$\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2} = \frac{2}{3} + \frac{5x-1}{9\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}\right]} > \frac{2}{3} > \frac{7}{23} = y\left(-\frac{3}{5}\right),$$

то в каждой точке промежутка $1 < x < +\infty$ функция принимает значение большее, чем $y\left(-\frac{3}{5}\right)$. Таким образом, наименьшее значение данной функции принимается в точке $x = -\frac{3}{5}$, и оно равно $\frac{7}{23}$.

Второе решение. Определим те значения x, при каждом из которых данная функция принимает заданное значение a. Для этого решим уравнение

$$a = \frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$x^2(3a-2) - x(a+1) + 2a - 1 = 0. \qquad (5)$$

При $a = \frac{2}{3}$ решение этого уравнения есть $x = \frac{1}{5}$. При $a \neq \frac{2}{3}$ квадратное уравнение (5) имеет решения тогда и только тогда, когда неотрицателен его дискриминант

$$(a+1)^2 - 4(2a-1)(3a-2) = -23a^2 + 30a - 7,$$

т. е. когда a удовлетворяет неравенству

$$23a^2 - 30a + 7 \leqslant 0.$$

Решения этого неравенства (с учетом того, что $a \neq \frac{2}{3}$) образуют два промежутка $\frac{7}{23} \leqslant a < \frac{2}{3}$ и $\frac{2}{3} < a \leqslant 1$. Следовательно, все возможные значения данной функции образуют промежуток $\frac{7}{23} \leqslant a \leqslant 1$, откуда следует, что наименьшее значение, принимаемое данной функцией, есть $y_{min} = \frac{7}{23}$.

Ответ: $\frac{7}{23}$.

5. Обозначим через t время, за которое пешеход с большей скоростью (назовем его первым) пройдет расстояние между пунктами A и B. Скорость второго пешехода, по условию, в 1,5 раза меньше, чем скорость первого. Значит, на путь из A в B он затратит в 1,5 раза больше времени, т. е. $1,5t$. Из условия задачи следует, что $1,5t - t \leqslant \frac{1}{3}$. Таким образом, t удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}. \tag{6}$$

Будем вести отсчет времени от того момента, когда из пункта A вышел первый пешеход. Пусть s — момент времени, когда из пункта A вышел второй пешеход. Если второй пешеход вышел позже, чем первый, то $s > 0$, если же раньше или одновременно с первым, то $s \leqslant 0$. В любом случае, согласно условию выполняется неравенство

$$|s| \leqslant \frac{2}{3}. \tag{7}$$

Первый пешеход пришел в пункт B в момент времени t, а второй — в момент времени $s + 1,5t$. По условию должно выполняться неравенство

$$|s + 1,5t - t| \geqslant 1,$$

т. е.

$$\left|s + \frac{1}{2}t\right| \geqslant 1. \tag{8}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$s + \frac{1}{2}t \geqslant -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot 0 = -\frac{2}{3},$$

и, значит, не может выполняться неравенство $s + \frac{1}{2}t \leqslant -1$. Теперь из (8) заключаем, что

$$s + \frac{1}{2}t \geqslant 1$$

или

$$s \geqslant 1 - \frac{1}{2}t. \tag{9}$$

Из (7) и (9) находим

$$\frac{2}{3} \geqslant s \geqslant 1 - \frac{1}{2}t, \tag{10}$$

откуда $t \geqslant \frac{2}{3}$. Вместе с неравенством (6) это неравенство дает $t = \frac{2}{3}$. Подставляя полученное значение t в правую часть неравенства (10), находим, что $s = \frac{2}{3}$.

Итак, первому пешеходу на путь из A в B потребуется $\frac{2}{3}$ часа. Он выйдет первым. Спустя 40 минут из пункта A выйдет второй пешеход и через $1,5\cdot\frac{2}{3}=1$ час после выхода он придет в пункт B.

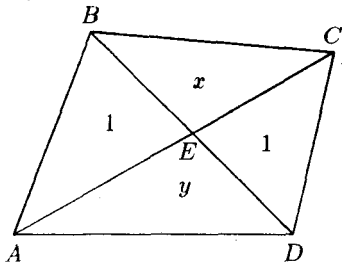


Рис. 167

Ответ: $\frac{2}{3}$ часа и 1 час.

6. Обозначим буквами x и y площади треугольников BCE и AED соответственно (рис. 167). Так как $\sin(\angle BEC)=\sin(\angle CED)=$ $=\sin(\angle AED)=\sin(\angle AEB)$,

то

$$xy=\left(\frac{1}{2}BE\cdot CE\cdot\sin(\angle BEC)\right)\left(\frac{1}{2}AE\cdot DE\cdot\sin(\angle AED)\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}BE\cdot AE\cdot\sin(\angle AED)\right)\left(\frac{1}{2}CE\cdot DE\cdot\sin(\angle CED)\right)= \qquad (11)$$
$$=S_{ABE}\cdot S_{CED}=1,$$

кроме того, согласно условию $S_{ABCD}=x+y+2\leqslant 4$, т. е.

$$x+y\leqslant 2. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(x+y)^2-4\leqslant 0$$

и, значит, $x=y$. Теперь из (11) находим $x=y=1$. Треугольники ABE и BEC имеют равные площади. Кроме того, их высоты, опущенные из вершины B, равны. Следовательно, равны и основания, т. е. точка E — середина отрезка AC. Аналогично доказывается, что точка E делит пополам и отрезок BD. Выпуклый четырехугольник, в котором диагонали, пересекаясь, делятся пополам, является параллелограммом.

Значит, $BC=AD=3$.

Ответ: 3.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-\infty<x<3$; $14\leqslant x<+\infty$.

2. $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi n$, $n\in Z$.

3. При $a>0$, $a\neq 1$, $a\neq\frac{1}{9}$ $x=3^{\frac{10\log_3 a}{6+3\log_3 a}}$. 4. $\frac{7}{23}$. 5. 5 часов; 10 часов. 6. 4.

Вариант 3. 1. $-\infty < x \leqslant -\frac{2}{17}$; $\frac{2}{31} < x < +\infty$.

2. $(-1)^{n-1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}} + \pi n$, $n \in Z$. 3. При $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$ $x = 5^{\frac{4\log_5 a}{3\log_5 a+1}}$. 4. $y_{min} = -\frac{8}{23}$. 5. 40 минут; 1 час 20 минут.

6. $\sqrt{5}$

Вариант 4. 1. $-\infty < x < \frac{5}{8}$; $\frac{19}{21} \leqslant x < +\infty$.

2. $(-1)^{n-1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

3. При $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 3^{\frac{2}{7}}$ $x = 3^{\frac{-6\log_3 a}{7\log_3 a-2}}$. 4. $y_{min} = 1$.

5. 2,5 часа; 4,5 часа. 6. $\sqrt{7}$.

1986

Решение варианта 1

1. Поскольку $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 5^{-(x-2)}$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$5^{x+1} = 5^{-(x-2)}.$$

Это уравнение равносильно уравнению $x + 1 = -x + 2$, единственное решение которого, а следовательно, и исходного, есть $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Решая исходную систему как линейную систему относительно x и $\sin y$, находим, что $x = -3$, $\sin y = -\frac{1}{2}$. Решения уравнения $\sin y = -\frac{1}{2}$ имеют вид $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, решениями исходной системы являются пары чисел $\left(-3; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(-3; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения есть промежуток $-\frac{4}{3} \leqslant x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$3x + 4 = 0 \quad \text{и} \quad 9x^2 + 21x + 10 = 0.$$

Решение первого уравнения есть $x_1 = -\frac{4}{3}$. Решения второго уравнения есть $x_2 = -\frac{5}{3}$ и $x_3 = -\frac{2}{3}$. Поскольку $-\frac{5}{3} < -\frac{4}{3}$, а

$-\frac{2}{3} > -\frac{4}{3}$, то решениями исходного уравнения являются $x_1 = -\frac{4}{3}$ и $x_3 = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

4. Конфигурация, описанная в условии задачи, изображена на рис. 168. Докажем сначала, что точки A, K и L лежат на одной прямой. Проведем для этого через точку K прямую параллельно AD. Точки ее пересечения со сторонами AB и CD прямоугольника обозначим буквами E и F. Из точки L опустим перпендикуляр LN на прямую EF. Так как $KE \perp AB$, то E — точка касания прямой AB и окружности с центром K, и, значит, $KE = 2$. Аналогично, проводя из точки L перпендикуляр LP к прямой CD и пользуясь тем, что $LNFP$ прямоугольник, заключаем, что длина отрезка NF равна радиусу меньшей окружности, т. е. $NF = 1$. Далее, так как $EF = AD = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, находим $KN = EF - EK - NF = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Длина отрезка LK — гипотенузы прямоугольного треугольника KLN — равна сумме радиусов окружностей, т. е. 3. Поэтому $\cos(\angle LKN) = \frac{KN}{LK} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\angle LKN = \frac{\pi}{4}$. Точка K — центр окружности, касающейся прямых AB и AD — равноудалена от этих прямых. Поэтому AK есть биссектриса угла BAD и $\angle KAD = \frac{\pi}{4}$. Прямые EF и AD параллельны, и $\angle LKN = \angle KAD$. Отсюда следует, что точки A, K и L лежат на одной прямой.

Опустим из точки C перпендикуляр CQ на прямую AL (рис. 169). Тогда CQ есть высота треугольника CLM, и его площадь может быть вычислена по формуле

$$S = \frac{1}{2} ML \cdot CQ. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике ABM угол BAM равен $\frac{\pi}{4}$. Поэтому $AM = AB\cos\frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Кроме того, $AK = \frac{EK}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$ML = AL - AM = AK + KL - AM =$$
$$= 2\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

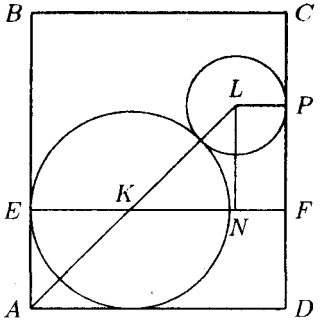


Рис. 168

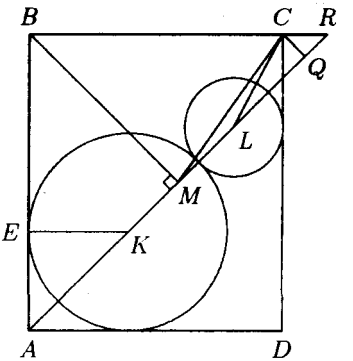


Рис. 169

Продолжим отрезок BC за точку C до пересечения с прямой AL в точке R. Тогда в прямоугольном треугольнике ABR имеем $\angle BRA = \frac{\pi}{2} - \angle BAR = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, и, значит,

$$CR = BR - BC = AB - BC =$$

$$= 6 - 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Из прямоугольного треугольника CRQ находим

$$CQ = CR\sin(\angle CRQ) = 3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Подставляя длины отрезков ML и CQ в формулу (1), имеем

$$S = \frac{1}{2}\cdot(3 - \sqrt{2})\cdot\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5).$$

Ответ: $\frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5)$.

5. Пусть линию, связывающую города А и Б, обслуживают соответственно x, y и z самолетов I, II и III типов. Согласно условию задачи имеем следующую систему условий на натуральные числа x, y и z:

$$\begin{cases} 230x + 110y + 40z = 760, \\ 27x + 12y + 5z = 88, \\ x + y + z \leqslant 8. \end{cases} \qquad (2)$$

Из первых двух равенств системы (2) находим, что $y = 4 - x$, $z = 8 - 3x$. Подставляя значения y и z в неравенство системы (2) имеем

$$(4 - x) + (8 - 3x) + x \leqslant 8,$$

откуда $x \geqslant \frac{4}{3}$.

Так как x — натуральное число, то $x \geqslant 2$. Так как z — натуральное число, то $z \geqslant 1$; учитывая, что $z = 8 - 3x$, получаем, что $8 - 3x \geqslant 1$, откуда $x \leqslant 2$. Следовательно, $x = 2$, а тогда $y = 2$ и $z = 2$. Легко проверить, что найденные числа удовлетворяют условию задачи.

Итак, на линии действуют по два самолета каждого типа.

Ответ: 2; 2; 2.

6. Докажем сначала, что плоскость сечения пересекает плоскость основания пирамиды по прямой, параллельной ребру BC.

Точка M пересечения медиан треугольника ABC (рис. 170) делит каждую из медиан в отношении $1:2$, следовательно, расстояние от нее до стороны BC равно $\frac{1}{3}$ расстояния до BC от вершины A треугольника. Итак, точка M удалена от прямой BC на расстояние $\frac{1}{3}AD$, где AD — высота треугольника, опущенная из вершины A.

Докажем, что радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $\frac{1}{3}AD$. Если соединить центр O вписанной окружности с вершинами треугольника ABC (рис. 171), то вы-

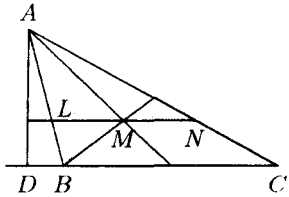


Рис. 170

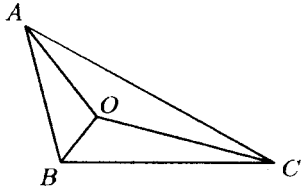


Рис. 171

соты получившихся при этом треугольников AOB, BOC, AOC, опущенные из вершины O, будут равняться r. Поэтому площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC). \qquad (3)$$

С другой стороны, эта площадь равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot BC. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$\frac{r}{AD} = \frac{BC}{AB + BC + AC}. \qquad (5)$$

По теореме синусов отношение $\dfrac{AC}{\sin(\angle ABC)}$ равно удвоенному радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABC, т. е. $\dfrac{16}{\sqrt{15}}$. Значит, $\sin(\angle ABC) = \dfrac{\sqrt{15}}{16}AC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Учитывая, что угол ABC тупой, находим

$$\cos(\angle ABC) = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4}.$$

В соответствии с теоремой косинусов справедливо равенство

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos(\angle ABC).$$

Обозначив $x = AB$, получаем отсюда соотношение

$$16 = x^2 + 9 - 2x\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

или $2x^2 + 3x - 14 = 0$. Корни этого квадратного уравнения равны $x_1 = 2$ и $x_2 = -\dfrac{7}{2}$. Следовательно, $AB = 2$, и из соотношения (5) в силу того, что $BC = 3$ и $AC = 4$, находим $r : AD = \dfrac{1}{3}$ или $r = \dfrac{1}{3}AD$.

Итак, точка пересечения медиан треугольника ABC и центр вписанной в него окружности удалены на одинаковое расстояние от прямой BC. Обе эти точки лежат внутри треугольника и различны. Иначе говоря, прямая AM делит пополам сторону BC и угол BAC, что возможно только в равнобедренном треугольнике. Отсюда следует, что плоскость сечения и плоскость ABC пересекаются по прямой MO, параллельной стороне BC основания пирамиды.

Обозначим буквами L и N точки, в которых прямая MO пересекает прямые AB и AC соответственно (рис. 172). Сечением пирамиды будет треугольник LNS, его площадь и требуется найти. Опустим из точки S перпендикуляр SP на прямую LN. Тогда

$$S_{LNS} = \frac{1}{2}LN\cdot SP. \qquad (6)$$

Точка M делит медиану треугольника ABC, проведенную из точки A, в отношении $1 : 2$. Поэтому (рис. 170) $\dfrac{LN}{BC} = \dfrac{2}{3}$ и $LN = \dfrac{2}{3}BC = 2$. Из прямоугольного треугольника ABD находим $AD = AB\sin(\angle ABD) = AB\sin(\angle ABC) = 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

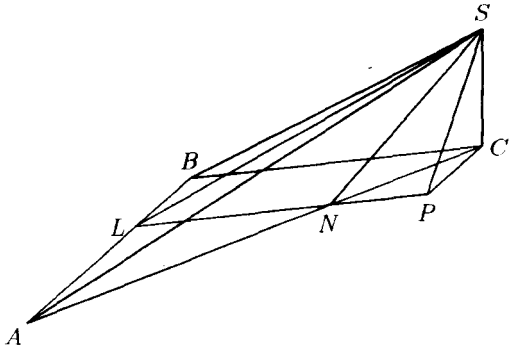


Рис. 172

и $r = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{15}}{6}$. По теореме о трех перпендикулярах имеем $CP \perp LN$, следовательно, длина отрезка CP равна расстоянию между прямыми BC и LN, т. е. $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$. Из прямоугольного треугольника SPC находим

$$SP = \sqrt{CP^2 + SC^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{93}}{6}\right)^2} = \sqrt{3},$$

и, значит (см. (6)), $S_{LNS} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = -\frac{2}{3}$. 2. $\left(3; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

3. $x = -\frac{3}{5}$; $x = 1$. 4. $7(\sqrt{2} - 1)$. 5. 2 цеха I и II типа, 4 цеха III типа. 6. $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 3. 1. $x = -2$. 2. $\left(5; (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

3. $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{3}{2}$. 4. $\frac{3}{8}(5\sqrt{2} + 13)$.

5. 2 линии I и II типа, 1 линия III типа. 6. $2\sqrt{7}$.

Вариант 4. 1. $x = \frac{2}{3}$. 2. $\left(-5; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

3. $x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$. 4. $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$. 5. 2 гостиницы I и II типа,

3 гостиницы III типа. 6. $\frac{\pi}{6}$.

1987

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, исходное уравнение перепишем в виде

$$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 - 3\sqrt{2}z + 2 = 0$ имеет корни $z_1 = \sqrt{2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого действительного x. Решения второго уравнения, а значит, и исходного, есть $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

2. Пусть продано x кг, y кг и z кг орехов соответственно первого, второго и третьего сортов. Так как всего продано 12 тонн, то

$$x + y + z = 12000. \qquad (1)$$

Так как 1 кг первого сорта стоил 2 руб., второго — 4 руб., третьего — 6 руб., а всего получено 42 тыс. руб., то

$$2x + 4y + 6z = 42000. \qquad (2)$$

Количества проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию, поэтому

$$y = \frac{x+z}{2}. \qquad (3)$$

Итак, для нахождения x, y и z получили систему уравнений (1), (2) и (3) с тремя неизвестными. Подставляя $\frac{x+z}{2}$ вместо y в первое и второе уравнения, получаем уравнения

$$x + z = 8000, \qquad (4)$$

$$x + 2z = 10500. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) имеем

$$x = 8000 - z.$$

Подставляя это значение x в уравнение (5), получаем уравнение

$$8000 + z = 10500,$$

из которого находим, что $z = 2500$, но тогда $x = 5500$ и $y = 4000$. Следовательно, продано 5,5 тонн орехов первого сорта, 4 тонны — второго и 2,5 тонн — третьего сорта.

Ответ: 5,5 т., 4 т., 2,5 т.

3. Перенеся правую часть неравенства в левую часть и приводя к общему знаменателю, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{|x-2|+2-x-2|x-3|}{|x-3|-1} \leqslant 0. \qquad (6)$$

Для освобождения от знаков абсолютной величины рассмотрим решение неравенства (6) на трех промежутках:

а) $-\infty < x \leqslant 2$; б) $2 < x < 3$; в) $3 \leqslant x < +\infty$.

а). Пусть $-\infty < x \leqslant 2$. На этом промежутке $|2-x| = 2-x$, $|x-3| = 3-x$, и поэтому неравенство (6) перепишется в виде

$$\frac{-2}{2-x} \leqslant 0. \qquad (7)$$

Решениями неравенства (7) являются все $-\infty < x < 2$, все они входят в рассматриваемую область и поэтому являются решениями исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

б). Пусть $2 < x < 3$. На этом промежутке $|2-x| = x-2$, $|x-3| = 3-x$, и поэтому неравенство (6) перепишется в виде

$$\frac{-2(3-x)}{2-x} \leqslant 0. \qquad (8)$$

Множество решений неравенства (8) состоит из множества решений уравнения

$$3-x=0 \qquad (9)$$

и множества решений неравенства

$$\frac{x-3}{x-2} > 0. \qquad (10)$$

Уравнение (9) имеет единственное решение $x = 3$, решения неравенства (10) составляют два промежутка $-\infty < x < 2$ и $3 < x < +\infty$. Ни одно из этих чисел не входит в рассматриваемую область, и поэтому на ней исходное неравенство решений не имеет.

в). Пусть $3 \leqslant x < +\infty$. На этом промежутке $|2-x| = x-2$, $|x-3| = x-3$, и поэтому неравенство (6) перепишется в виде

$$\frac{-2(x-3)}{x-4} \leqslant 0. \qquad (11)$$

Множество решений неравенства (11) состоит из множества решений уравнения

$$x-3=0 \qquad (12)$$

и множества решений неравенства

$$\frac{x-3}{x-4} > 0. \qquad (13)$$

Уравнение (12) имеет единственное решение $x = 3$, решения неравенства (13) составляют два промежутка $-\infty < x < 3$ и $4 < x < +\infty$. Из этих решений в рассматриваемую область входят $x = 3$ и все x из промежутка $4 < x < +\infty$, и поэтому все они являются решениями исходного неравенства.

Объединение решений, найденных в случаях а), б), в) и дает все решения исходного неравенства.

Ответ: $-\infty < x < 2$; $x = 3$; $4 < x < +\infty$.

4. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$x-1>0, \quad x-1 \neq 1, \quad x^2-8x+16>0,$$
$$4-x>0, \quad 4-x \neq 1, \quad -x^2+5x-4>0,$$

т. е. ОДЗ есть объединение трех промежутков $1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $3 < x < 4$. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(4-x)^2 + \log_{4-x}(4-x)(x-1) > 3. \qquad (14)$$

Поскольку на ОДЗ неравенства имеем $4 - x > 0$ и $x - 1 > 0$, то неравенство (14) равносильно на ОДЗ неравенству

$$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1) > 2. \qquad (15)$$

Так как на ОДЗ $\log_{4-x}(x-1) = \dfrac{1}{\log_{x-1}(4-x)}$, то неравенство (15) перепишем в виде

$$\log_{x-1}(4-x) + \frac{1}{\log_{x-1}(4-x)} > 2$$

или в виде

$$\frac{(\log_{x-1}(4-x)-1)^2}{\log_{x-1}(4-x)} > 0. \qquad (16)$$

Так как уравнение $\log_{x-1}(4-x) = 1$ имеет решением $x = \dfrac{5}{2}$, то решения неравенства (16) лежат в области $x \neq \dfrac{5}{2}$, и на этом множестве оно равносильно неравенству

$$\log_{x-1}(4-x) > 0. \qquad (17)$$

Получившееся неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x-1>1, \\ 4-x>1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<x-1<1, \\ 0<4-x<1. \end{cases}$$

Решения первой системы из этой совокупности есть все x из промежутка $2 < x < 3$. Вторая система решений не имеет.

Итак, решениями неравенства (17) являются все x из промежутка $2 < x < 3$. Из этих x решениями неравенства (16) являются все x, удовлетворяющие условию $x \neq \frac{5}{2}$ и принадлежащие ОДЗ, т. е. все x из объединения двух промежутков $2 < x < \frac{5}{2}$ и $\frac{5}{2} < x < 3$.

Ответ: $2 < x < \frac{5}{2}$; $\frac{5}{2} < x < 3$.

5. Обозначим через L и N точки пересечения прямой, проходящей через точку K и параллельной прямой BC, с прямой BM и стороной AC (рис. 173).

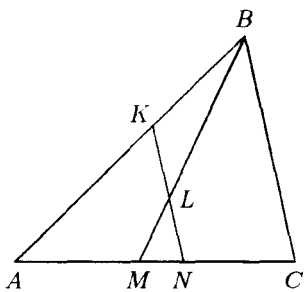


Рис. 173

Треугольники MLN и MBC подобны, так как у них по три равных угла: угол M общий, $\angle LNM = \angle BCM$ и $\angle MLN = \angle MBC$ как соответствующие углы при параллельных прямых KN и BC. Из подобия этих треугольников следует, что $BL : ML = NC : MN$. Аналогично доказывается, что треугольники ANK и ACB также подобны. Поэтому $\frac{NC}{AN} = \frac{KB}{AK} = \frac{2}{3}$, откуда $NC = \frac{2}{3}AN$. Так как $NC = MC - MN$ и $AN = AM + MN$ и по условию $AM = \frac{4}{5}MC$, то $MC - MN = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}MC + MN\right)$. Откуда $MC = \frac{25}{7}MN$, но тогда $NC = \frac{18}{7}MN$. Поэтому $\frac{NC}{MN} = \frac{18}{7}$, и, значит, $\frac{BL}{ML} = \frac{18}{7}$.

Ответ: $\frac{18}{7}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. 4,5 тонны; 3 тонны; 1,5 тонны. 3. $4 < x < 6$, $6 < x < 8$. 4. $-4 < x < -3$; $x = -\frac{5}{2}$; $-2 < x < -1$. 5. $\frac{22}{27}$.

Вариант 3. 1. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.
2. 3,5 тонны; 2 тонны; 0,5 тонны.
3. $-\infty < x \leqslant 3,\ x \neq -4;\ x \geqslant -2$. 4. $3 < x < 3,5;\ 3,5 < x < 4$.
5. $\frac{20}{29}$.

Вариант 4. 1. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. 2. 4,5 тонны; 4 тонны; 3,5 тонны. 3. $-8 < x < -6;\ -6 < x < -4$.
4. $-5 < x < -4;\ x = -\frac{7}{2};\ -3 < x < -2$. 5. $\frac{13}{27}$.

1988

Решение варианта 1

1. Достаточно сравнить числа

$$\sqrt[3]{4} \quad \text{и} \quad 3 - \sqrt{2}$$

или числа $(\sqrt[3]{4})^3$ и $(3-\sqrt{2})^3$. Поскольку $(3-\sqrt{2})^3 = 45 - 29\sqrt{2}$, то надо сравнить числа

$$4 \quad \text{и} \quad 45 - 29\sqrt{2}$$

или числа

$$29\sqrt{2} \quad \text{и} \quad 41.$$

Сравним числа $(29\sqrt{2})^2$ и 41^2. Так как $(29\sqrt{2})^2 = 1682$ и $41^2 = 1681$, то $29\sqrt{2} > 41$. Теперь очевидно, что из справедливости этого неравенства следует справедливость следующих неравенств:

$$4 > 45 - 29\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^3,$$
$$\sqrt[3]{4} > 3 - \sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3.$$

Следовательно, число $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ больше числа 3.

Ответ: $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ больше 3.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2 + x - 6 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Рассмотрим исходное неравенство на каждом из этих промежутков.

Пусть x принадлежит промежутку $2 \leqslant x < +\infty$. Для этих x левая часть исходного неравенства положительна, а правая — отрицательна. Значит, все эти x являются решениями исходного неравенства.

Пусть x принадлежит промежутку $-\infty < x \leqslant -3$. Перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{x^2 + x - 6} > -x - 1.$$

Для x из рассматриваемого промежутка обе части неравенства неотрицательны, и оно на этом множестве равносильно неравенству

$$x^2 + x - 6 > x^2 + 2x + 1.$$

Множество решений последнего неравенства есть все x из промежутка $-\infty < x < -7$. Все эти числа принадлежат рассматриваемому промежутку $-\infty < x \leqslant -3$. Все они и являются решением исходного неравенства на промежутке $-\infty < x \leqslant -3$. Объединяя решения, найденные на промежутках $-\infty < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$, получаем, что решениями исходного неравенства являются все x из двух промежутков $-\infty < x < -7$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < -7$; $2 \leqslant x < +\infty$.

3. Применяя формулы произведения косинусов и произведения синуса и косинуса

$$\cos x \cdot \cos 2x = \frac{\cos 3x + \cos x}{2},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin 5x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{2},$$

а также формулу приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 3x$, исходное уравнение перепишем в виде

$$\cos x = \sin 5x$$

или так:

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Применяя формулу разности косинусов

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

последнее уравнение перепишем в виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0.$$

Решения первого из этих уравнений есть $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Решениями второго уравнения являются $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$.

Объединение множеств $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, и $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$, и есть множество решений исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$.

4. Заметим, что если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит множеству точек $M(x; y)$ на координатной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| \leqslant 2 - x, \tag{1}$$

то точка с координатами $(x_0, -y_0)$ также ему принадлежит. Поэтому, чтобы изобразить на плоскости XOY множество точек, удовлетворяющих условию (1), достаточно рассмотреть случай $y \geqslant 0$, а затем удвоить найденную площадь.

Если $y \geqslant 0$, то $y + \frac{1}{2}x^2 \geqslant 0$, и неравенство (1) перепишется в виде

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + y + \frac{1}{2}x^2 \leqslant 2 - x \tag{2}$$

или в виде

$$\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| \leqslant 2 - x - \frac{1}{2}x^2 - y. \tag{3}$$

Поскольку неравенству $|a| \leqslant b$ удовлетворяют в точности те же пары чисел $(a; b)$, что и двойному неравенству $-b \leqslant a \leqslant b$, то часть множества $M(x, y)$, лежащая в области $y \geqslant 0$, может быть определена неравенствами

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2}x^2 \leqslant 2 - x - \frac{1}{2}x^2 - y, \\ y + \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \leqslant y - \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

или неравенствами

$$\begin{cases} 2y + x \leqslant 2, \\ x^2 + x - 2 \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Множество решений неравенства $x^2 + x - 2 \leqslant 0$ есть отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 1$, поэтому на плоскости XOY множество, задаваемое неравенствами (4), есть трапеция $ABCD$ (рис. 174), где уравнение прямой BC есть $2y + x = 2$.

Из уравнения $y = \frac{2 - x}{2}$ находим, что ординаты точек B и C равны соответственно 2 и $\frac{1}{2}$, так что $AB = 2$, $CD = \frac{1}{2}$ и $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{15}{4}$. Тогда площадь всей фигуры равна $\frac{15}{2}$.

Ответ: $\frac{15}{2}$.

5. Пусть ABC — данный в условии задачи треугольник (рис. 175). Применяя теорему косинусов к треугольнику BDC, имеем

$$4 = BD^2 + DC^2 - 2BD\cdot DC\cdot\frac{13}{20}. \qquad (5)$$

Так как по условию $\angle ABC = \pi - \angle ADB$ и $\angle BDC = \pi - \angle ADB$, то $\angle ABC = \angle BDC$. Таким образом, в треугольниках BDC и ABC по три равных угла, следовательно, они подобны. Из их подобия имеем $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$. Так как $BC = 2$, $AC = AD + DC = 3 + DC$, то получаем соотношение $\frac{3 + DC}{2} = \frac{2}{DC}$, откуда находим, что $DC = 1$. Тогда из равенства (5) находим, что $BD = \frac{5}{2}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ADB, имеем

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot BD\cos(\angle ADB).$$

Поскольку $\cos(\angle ADB) = \cos(\pi - \angle BDC) = -\cos(\angle BDC) = -\frac{13}{20}$, то $AB^2 = 9 + \frac{25}{4} + \frac{30}{2}\cdot\frac{13}{20} = 25$, откуда $AB = 5$. Итак, найдены длины всех сторон треугольника ABC, и поэтому найден его периметр $AB + BC + AD + DC = 11$.

Ответ: 11.

6. Преобразуем выражение, стоящее под знаков абсолютной величины. Применяя формулы косинуса и синуса двойного угла $2\sin x\cos x = \sin 2x$, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, получаем, что

$$3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a = a\sin 2x - \cos 2x + a + 2.$$

Вводя дополнительный угол $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, получаем, что

$$3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a = \sqrt{a^2+1}\cdot\sin(2x - \varphi) + a + 2,$$

и тогда данное в условии задачи неравенство можно переписать в виде

$$|\sqrt{a^2+1}\sin(2x - \varphi) + a + 2| \leqslant 3.$$

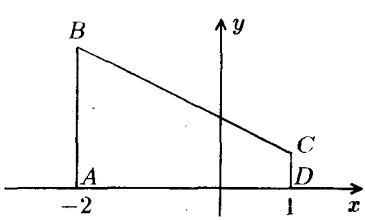


Рис. 174

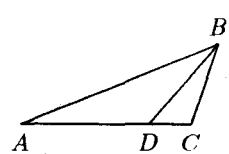


Рис. 175

Это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{-5-a}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant \sin(2x-\varphi) \leqslant \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}. \qquad (6)$$

Для того чтобы неравенство (6) выполнялось при всех значениях x, необходимо и достаточно, чтобы параметр a удовлетворял системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{-5-a}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant -1, \\ \dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 1, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} 5+a \geqslant \sqrt{a^2+1}, \\ 1-a \geqslant \sqrt{a^2+1}. \end{cases} \qquad (7)$$

Ясно, что среди $a < -5$ нет решений первого неравенства (7), а значит, и системы неравенств (7). Для $a \geqslant -5$ первое неравенство (7) равносильно неравенству

$$25 + 10a + a^2 \geqslant 1 + a^2. \qquad (8)$$

Решениями неравенства (8) являются все $a \geqslant -\frac{12}{5}$. Так как $-\frac{12}{5} > -5$, то все $a \geqslant -\frac{12}{5}$ являются решениями первого неравенства (7).

Ясно, что среди $a > 1$ нет решений второго неравенства (7), а значит, и системы неравенств (7).

Для $a \leqslant 1$ второе неравенство (7) равносильно неравенству

$$a^2 + 1 \leqslant 1 - 2a + a^2,$$

решениями которого являются все $a \leqslant 0$. Так как $0 \leqslant 1$, то все $a \leqslant 0$ являются решениями второго неравенства (7). Следовательно, решениями системы неравенств (7) являются все a из промежутка $-\frac{12}{5} \leqslant a \leqslant 0$. Именно они и удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $-\frac{12}{5} \leqslant a \leqslant 0$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ меньше 3.
2. $-\infty < x \leqslant -1$; $8 < x < +\infty$.

3. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. 4. 15. 5. $\frac{27}{2}$.
6. $-\frac{24}{5} \leqslant a \leqslant 0$.

Вариант 3. 1. $\sqrt{13} - \sqrt[3]{4} > 2$.
2. $14 < x < +\infty$. 3. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$.
4. 30. 5. 9. 6. $\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{33}{10}$.

Вариант 4. 1. $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$. 2. $-\infty < x < -16$.
3. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{4}$, $m \in Z$. 4. 40. 5. $\frac{35}{2}$.
6. $1 \leqslant a \leqslant \frac{53}{10}$.

1989

Решение варианта 1

1. Область определения функции $y(x)$ состоит из всех значений x, одновременно удовлетворяющих двум неравенствам $x^2 - 9 \geqslant 0$ и $-x^2 + x + 20 > 0$. Решениями первого из этих неравенств являются все x из объединения двух промежутков $-\infty < x \leqslant -3$ и $3 \leqslant x < +\infty$. Решениями второго неравенства являются все x из промежутка $-4 < x < 5$. Следовательно, область определения данной функции состоит из двух промежутков $-4 < x \leqslant -3$ и $3 \leqslant x < 5$.

Ответ: $-4 < x \leqslant -3$; $3 \leqslant x < 5$.

2. Заменяя $\log_{30} 5$ на $\frac{1}{\log_5 30}$ и $\log_6 5$ на $\frac{1}{\log_5 6}$, имеем $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5} = \log_5^2 30 - \log_5 150 \cdot \log_5 6 = (\log_5(5 \cdot 6))^2 - \log_5(5^2 \cdot 6) \cdot \log_5 6 = (1 + \log_5 6)^2 - (2 + \log_5 6)\log_5 6 = 1 + 2\log_5 6 + \log_5^2 6 - 2\log_5 6 - \log_5^2 6 = 1$.

Ответ: 1.

3. Перепишем исходное уравнение в виде

$$||3 - x| - x + 1| = 6 - x.$$

Следствием этого уравнения является совокупность уравнений

$$|3 - x| - x + 1 = 6 - x \quad \text{и} \quad -|3 - x| + x - 1 = 6 - x,$$

т. е. совокупность уравнений

$$|3 - x| = 5 \quad \text{и} \quad |3 - x| = 2x - 7.$$

Следствием этой совокупности является совокупность уравнений

$$3 - x = 5, \ -(3 - x) = 5, \ 3 - x = 2x - 7 \ \text{и} \ -(3 - x) = 2x - 7.$$

Решения этой совокупности уравнений есть

$$x = -2,\ x = 8,\ x = \frac{10}{3} \text{ и } x = 4.$$

Из этих чисел исходному уравнению удовлетворяют только $x = -2$ и $x = 4$, в чем легко убедиться проверкой.

Ответ: $x = -2$; $x = 4$.

4. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$4\sin x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Перепишем эту совокупность в виде

$$\sin x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in Z. \tag{1}$$

Из уравнений этой совокупности будут иметь решения лишь те уравнения, для которых

$$\left|\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}\right| \leqslant 1, \quad k \in Z.$$

Легко видеть, что этому условию удовлетворяют лишь k, равные 0 и -1.

Следовательно, только два уравнения

$$\sin x = \frac{\pi}{12} \quad \text{и} \quad \sin x = -\frac{\pi}{6} \tag{2}$$

из совокупности (1) будут иметь решения, а остальные уравнения решений иметь не будут. Решения совокупности уравнений (2) есть $x = (-1)^l \arcsin\frac{\pi}{12} + \pi l$, $l \in Z$, $x = (-1)^{m+1}\arcsin\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. Из этих значений x заданному промежутку $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ принадлежат $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{12}$ и $x = \pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{12}$, $x = \pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$.

5. Пусть ABC — данный в условии задачи треугольник (рис. 176). Так как $BD : CE = 3 : 2$, то $CE = \frac{2}{3}BD$. Так как из точки B проведены две секущие BA и BC, то $BD \cdot BA = BE \cdot BC$, т. е. $BD(5 + BD) = 4\left(4 + \frac{2}{3}BD\right)$, откуда находим, что $BD = 3$, но тогда $CE = 2$ и $BC = 6$. Применяя теорему косинусов, из треугольника ABC находим, что

$$\cos(\angle ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3}{4}.$$

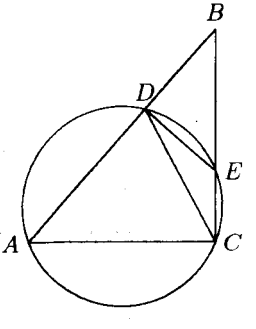


Рис. 176

Из треугольника DBC, применяя теорему косинусов, имеем

$$DC = \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos(\angle DBC)} = \sqrt{18}.$$

Применяя теорему косинусов, из треугольника BDC находим, что

$$\cos(\angle BDC) = \frac{BD^2 + DC^2 - BC^2}{2BD \cdot DC} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

но тогда $\angle BDC = \pi - \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\pi - \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

6. Многочлен, стоящий в левой части исходного уравнения, можно представить в виде

$$\begin{aligned} & y^2(3x+1)^2 - y(3x+1)(3x+5) + 2x^2 + 7x + 6 = \\ = & \left(y(3x+1) - \frac{3x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \\ = & (y(3x+1) - 2x - 3)(y(3x+1) - x - 2). \end{aligned}$$

Откуда ясно, что искомые числа удовлетворяют хотя бы одному из равенств

$$3xy + y - x - 2 = 0 \tag{3}$$

или

$$3xy + y - 2x - 3 = 0. \tag{4}$$

Равенство (3) можно переписать в виде

$$(3x+1)(3y-1) = 5.$$

Поскольку $3x+1$ и $3y-1$ — целые числа, то число 5 должно делиться на $3x+1$, т. е. $3x+1$ может принимать одно из четырех значений -1, 1, -5 и 5. Уравнения $3x+1=-1$ и $3x+1=5$ целых решений не имеют. Два других уравнения $3x+1=1$ и $3x+1=-5$ имеют решениями соответственно $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$. Соответствующие им значения y равны $y_1 = 2$ и $y_2 = 0$.

Равенство (4) можно переписать в виде

$$(3x+1)(3y-2) = 7.$$

Как и выше, $3x+1$ может принимать лишь четыре значения -1, 1, -7 и 7. Уравнения $3x+1=-1$ и $3x+1=-7$ не имеют целых решений. Уравнениям $3x+1=1$ и $3x+1=7$ удовлетворяют соответственно $x_3 = 0$ и $x_4 = 2$. Соответствующие значения y есть $y_3 = 3$ и $y_4 = 1$.

Итак, условию задачи удовлетворяют только четыре пары чисел $(0;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$, $(2;1)$.

Ответ: $(0;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$, $(2;1)$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-3 \leqslant x < -2$; $2 < x \leqslant 4$. 2. 3. 3. $x = -1$; $x = 5$. 4. $\pi + \arccos\frac{\pi}{4}$; $2\pi - \arccos\frac{\pi}{12}$. 5. $\pi - \arccos\frac{1}{4}$. 6. $(-2;2)$, $(-4;0)$, $(0;4)$.

Вариант 3. 1. $-5 \leqslant x < -2$; $4 < x \leqslant 5$. 2. 2. 3. $x = -4$; $x = 2$. 4. $\pi + \arcsin\frac{\pi}{12}$; $\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}$. 5. $\pi - \arccos\frac{\sqrt{15}}{20}$. 6. $(-2;0)$, $(0;-2)$, $(-3;0)$, $(-1;2)$.

Вариант 4. 1. $-4 < x \leqslant -3$; $2 \leqslant x < 4$. 2. 4. 3. $x = -5$; $x = 1$. 4. $\pi + \arccos\frac{\pi}{12}$; $2\pi - \arccos\frac{\pi}{6}$. 5. $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. 6. $(-2;2)$, $(0;4)$, $(4;0)$.

§11. Экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики)

1984

Решение варианта 1

1. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{6x-1}{2x^2+3} \geqslant 1. \qquad (1)$$

Поскольку $2x^2+3 \geqslant 0$ для любого x, то, умножая неравенство (1) на $2x^2+3$, после упрощений получим неравенство

$$x^2-3x+2 \leqslant 0,$$

равносильное неравенству (1).

Множество решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства, есть промежуток $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Разобьем числовую ось точками $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{2}{3}$ на три промежутка $-\infty < x < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3$ и $3 < x < +\infty$. Если x принадлежит промежутку $-\infty < x < \frac{2}{3}$, то $x-3<0$, $3x-2<0$ и $|x-3| = 3-x$, $|3x-2| = 2-3x$. Поэтому на этом промежутке данная функция может быть записана в виде

$$y = 2|x-3| + |3x-2| = 2(3-x)+2-3x = 8-5x.$$

Если x принадлежит промежутку $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3$, то $x-3 \leqslant 0$, $3x-2 \geqslant 0$ и $|x-3| = 3-x$, $|3x-2| = 3x-2$. Поэтому на этом промежутке данная функция может быть записана в виде

$$y = 2|x-3| + |3x-2| = 2(3-x)+3x-2 = x+4.$$

Если x принадлежит промежутку $3 < x < +\infty$, то $x-3>0$, $3x-2>0$ и $|x-3| = x-3$, $|3x-2| = 3x-2$. Поэтому на этом промежутке данная функция может быть записана в виде

$$y = 2|x-3| + |3x-2| = 2(x-3)+3x-2 = 5x-8.$$

Итак, данная функция имеет вид

$$y = \begin{cases} 8-5x, & -\infty < x < \frac{2}{3}, \\ x+4, & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3, \\ 5x-8, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, она убывает на промежутке $-\infty < x \leqslant \frac{2}{3}$, возрастает на промежутках $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3$ и $3 < x < +\infty$, т. е. возрастает на промежутке $\frac{2}{3} \leqslant x < +\infty$, поэтому данная функция наименьшее значение принимает при $x = \frac{2}{3}$, и оно равно $y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}$.

Ответ: $\frac{14}{3}$.

3. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Так как на ОДЗ справедливо тождество $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, то исходное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$3 - 12\sin^2 x - 2\cos 4x = -5\cos^2 x.$$

Пользуясь тождествами $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, полученное уравнение можно переписать в виде

$$3 - 6(1 - \cos 2x) - 2(2\cos^2 2x - 1) = -\frac{5}{2}(1 + \cos 2x)$$

или после упрощений в виде

$$8\cos^2 2x - 17\cos 2x - 3 = 0. \qquad (2)$$

Квадратное уравнение $8t^2 - 17t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{17 + \sqrt{385}}{16}$ и $t_2 = \frac{17 - \sqrt{385}}{16}$, поэтому уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 2x = \frac{17 + \sqrt{385}}{16} \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{17 - \sqrt{385}}{16}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $\frac{17 + \sqrt{385}}{16} > 1$. Множество решений второго уравнения, а значит, и уравнения (2), имеет вид $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{17 - \sqrt{385}}{16} + \pi n$, $n \in Z$. Поскольку эти числа лежат в ОДЗ исходного уравнения, то они и составляют множество его решений.

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{17 - \sqrt{385}}{16} + \pi n$, $n \in Z$.

4. Обозначим буквами A_1, B_1, C_1 середины сторон BC, AC и AB соответственно и буквой O — центр окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 177). По неравенству треугольника имеем $AC + BC > AB$. Следовательно, $AC > AB - BC = 2\sqrt{19} - 4 > 4 = BC$, т. е. $CB_1 > CA_1$.

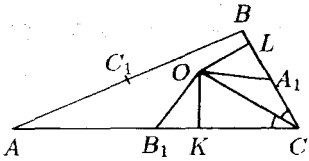


Рис. 177

Опустим из точки O перпендикуляры OK и OL на стороны AC и BC треугольника ABC. Прямоугольные треугольники OKC и OLC имеют общую гипотенузу OC. А кроме того, поскольку OC — биссектриса угла C, их острые углы $\angle OCK$ и $\angle OCL$ равны. Поэтому треугольники OKC и OLC равны, и $OK = OL$, $CK = CL$. В прямоугольных треугольниках OB_1K и OA_1L равны катеты OK и OL, равны также и гипотенузы OB_1 и OA_1, поскольку O — центр окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, треугольники OB_1K и OA_1L равны, и $B_1K = A_1L$.

Из доказанных ранее неравенства $CB_1 > CA_1$ и равенства $CK = CL$ следует, что если $CA_1 \geqslant CL$, то $CB_1 > CK$ (рис. 178) и $CA_1 = CL + A_1L = CK + B_1K = CB_1$.

Поскольку это равенство не имеет места, заключаем, что $CA_1 < CL$.

Если же $CB_1 \leqslant CK$ (рис. 179), то $CA_1 = CL - A_1L = CK - B_1K = CB_1$, что также неверно. Следовательно, $CB_1 > CK$, и имеет место случай, изображенный на рис. 177.

Так как треугольники OB_1K и OA_1L равны, то $\angle B_1OK = \angle A_1OL$ и

$$\angle B_1OA_1 = \angle B_1OK + \angle KOA_1 = \angle A_1OL + \angle KOA_1 = \angle KOL. \quad (3)$$

В четырехугольнике $KOLC$ имеем $\angle OKC = \angle OLC = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\angle KOL = \pi - \angle C. \quad (4)$$

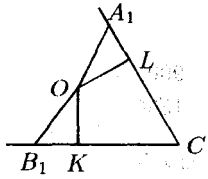


Рис. 178

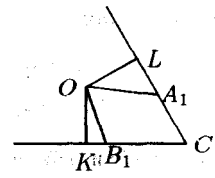


Рис. 179

Угол B_1OA_1 есть центральный угол в окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 180). Вписанный в эту окружность угол $B_1C_1A_1$ также опирается на хорду A_1B_1. Следовательно, $\angle B_1OA_1 = 2\angle B_1C_1A_1$. Отрезки A_1C_1 и B_1C_1 являются средними линиями треугольника ABC. Поэтому четырехугольник $B_1C_1A_1C$ — параллелограмм и $\angle B_1C_1A_1 = \angle C$. Итак,

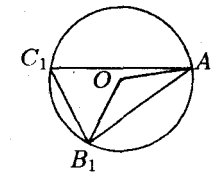


Рис. 180

$$\angle B_1OA_1 = 2\angle C_1. \qquad (5)$$

Из равенств (3), (4) и (5) следует, что $2\angle C = \pi - \angle C$. Отсюда находим $\angle C = \dfrac{\pi}{3}$.

Обозначим длину отрезка AC буквой x. По теореме косинусов справедливо равенство

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos(\angle C),$$

так что

$$76 = x^2 + 16 - 2x \cdot 4 \cos\frac{\pi}{3}$$

или

$$x^2 - 4x - 60 = 0.$$

Корни получившегося квадратного уравнения равны $x_1 = -6$ и $x_2 = 10$. Следовательно, $AC = 10$.

Ответ: 10.

5. Пусть надо собрать x 12-квартирных домов, y 16-квартирных домов и z 21-квартирных домов. Тогда общее число деталей первого вида, которое пошло на сборку всех домов равно

$$70x + 110y + 150z,$$

а общее число деталей второго вида, которое пошло на сборку всех домов равно

$$100x + 150y + 200z.$$

По условию задачи,

$$\begin{aligned} 70x + 110y + 150z &\leqslant 900, \\ 100x + 150y + 200z &\leqslant 1300. \end{aligned} \qquad (6)$$

Требуется найти такие x, y и z, чтобы общее число квартир, равное $12x + 16y + 21z$, было наибольшим. Итак, задача состоит в нахождении наибольшего значения выражения $12x + 16y + 21z$

при условии, что неотрицательные целые числа x, y и z связаны условиями (6), которые после сокращения можно записать в виде

$$\begin{aligned} 7x + 11y + 15z &\leqslant 90, \\ 2x + 3y + 4z &\leqslant 26. \end{aligned} \tag{7}$$

Для любых неотрицательных x, y, z, удовлетворяющих первому из условий (7), справедливы неравенства

$$3,5(2x + 3y + 4z) = 7x + 10,5y + 14z \leqslant 7x + 11y + 15z \leqslant 90,$$

так что

$$2x + 3y + 4z \leqslant \frac{90}{3,5} = 25\frac{5}{7}.$$

Полученное неравенство означает, что второе из условий (7) выполняется для любых неотрицательных x, y, z, удовлетворяющих первому условию (7).

Итак, задача свелась к нахождению наибольшего значения выражения $12x + 16y + 21z$ при условии, что неотрицательные целые числа x, y, z таковы, что

$$7x + 11y + 15z \leqslant 90. \tag{8}$$

Существует лишь конечное множество троек неотрицательных целых чисел x, y и z, удовлетворяющих неравенству (8). Пусть (x_0, y_0, z_0) та из них, для которой сумма $12x_0 + 16y_0 + 21z_0$ принимает наибольшее значение.

Если $z_0 \geqslant 1$, то тройка $(x_0 + 2; y_0; z_0 - 1)$ состоит из неотрицательных целых чисел. Для нее выполняются неравенства

$$7(x_0 + 2) + 11y_0 + 15(z_0 - 1) = 7x_0 + 11y_0 + 15z_0 - 1 \leqslant 90$$

и

$$\begin{aligned} 12(x_0 + 2) + 16y_0 + 21(z_0 - 1) = 12x_0 + 16y_0 + 21z_0 + 3 &> \\ > 12x_0 + 16y_0 + 21z_0, \end{aligned}$$

что противоречит выбору тройки чисел $(x_0; y_0; z_0)$. Значит, $z_0 = 0$.

Если $y_0 \geqslant 2$, то тройка $(x_0 + 3; y_0 - 2; 0)$ состоит из неотрицательных целых чисел. Для нее выполняются неравенства

$$7(x_0 + 3) + 11(y_0 - 2) + 15 \cdot 0 = 7x_0 + 11y_0 + 15 \cdot 0 - 1 \leqslant 90$$

и

$$12(x_0+3)+16(y_0-2)+21\cdot 0=12x_0+16y_0+21\cdot 0+4>$$
$$>12x_0+16y_0+21\cdot 0,$$

что противоречит выбору тройки чисел $(x_0; y_0; z_0)$. Итак, $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$.

При $y_0=0$, $z_0=0$ самое большое значение x_0, удовлетворяющее неравенству (8), равно 12. Если же $y_0=1$, $z_0=0$, то самое большое значение x_0 равно 11. Итак, тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ есть одна из троек (12;0;0) или (11;1;0). Для первой тройки сумма $12x+16y+21z$ равна 144, а для второй тройки равна 148. Следовательно, $x_0=11$, $y_0=1$, $z_0=0$.

Ответ: 11 домов на 12 квартир и 1 дом на 16 квартир.

6. Обозначим буквами A, B, C, D вершины основания заданной пирамиды, причем так, чтобы точки P, Q, M и N лежали на ее боковых ребрах SA, SB, SC и SD соответственно (рис. 181). Пусть также O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, являющаяся согласно условию основанием высоты пирамиды SO. Тогда $OD=OB=OC=OA$, но тогда треугольники OAS, OBS, OCS и ODS равны, и поэтому $AS=BS=CS=DS$. Пусть K — точка пересечения отрезка SO и плоскости сечения $PQMN$.

Точки S и O лежат как в плоскости ASC, так и в плоскости BSD, поэтому отрезок SO, а вместе с ним и точка K принадлежат плоскостям ASC и BSD. Точки P, K и M лежат в плоскости ASC и в плоскости сечения, следовательно, точка K лежит на прямой MP, по которой пересекаются эти плоскости. Аналогично доказывается, что точка K лежит на прямой QN, и, значит, K есть точка пересечения отрезков PM и QN.

Равнобедренные треугольники ASC и BSD имеют соответственно равные стороны. Поэтому они равны, а кроме того, высота SO в каждом из них является биссектрисой угла при вершине S.

Проведем через точку K плоскость, параллельную плоскости $ABCD$ (рис. 182). Точки ее пересечения с ребрами SA, SB, SC и SD обозначим буквами A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Плоскость SAD должна пересечь параллельные плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по параллельным прямым. Значит, $AD \parallel A_1D_1$ и, аналогично, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$. Отсюда заключаем, поскольку SAB, SBC, SCD, SDA — равнобедренные треугольники, что SA_1B_1, SB_1C_1, SC_1D_1, SD_1A_1 — также равнобедренные треугольники, т. е. все отрезки SA_1, SB_1, SC_1 и SD_1 имеют равную длину, которую для краткости обозначим буквой a.

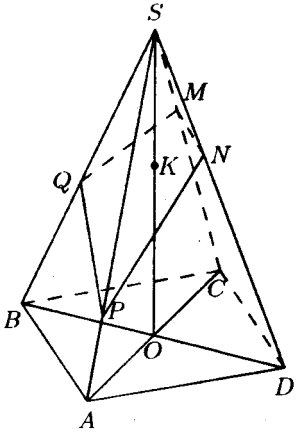


Рис. 181

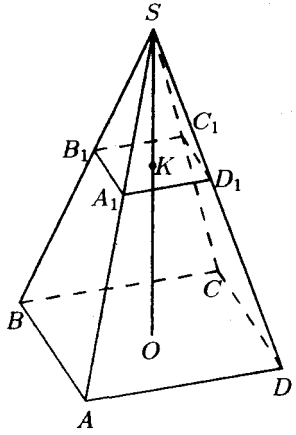


Рис. 182

Вынесем на рис. 183 сечение пирамиды плоскостью ASC. Применяя к треугольникам PKA_1 и MKC_1 теорему синусов, получаем равенства

$$\frac{PK}{PA_1} = \frac{\sin(\angle PA_1K)}{\sin(\angle PKA_1)}, \qquad \frac{KM}{MC_1} = \frac{\sin(\angle MC_1K)}{\sin(\angle MKC_1)}. \tag{9}$$

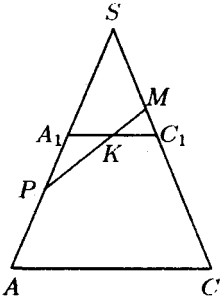


Рис. 183

Так как $\angle PKA_1 = \angle MKC_1$ и $\angle PA_1K = \pi - \angle SA_1K = \pi - \angle MC_1K$, заключаем, что правые части равенств (9) равны, и следовательно,

$$\frac{PK}{PA_1} = \frac{KM}{MC_1},$$

т. е.

$$\frac{PK}{KM} = \frac{PA_1}{MC_1}. \tag{10}$$

Биссектриса SK угла при вершине S треугольника PSM делит противоположную сторону PM на отрезки PK и KM, пропорциональные боковым сторонам SP и SM. Поэтому $\frac{PK}{KM} = \frac{SP}{SM}$, и в силу (10) получаем равенство $\frac{SP}{SM} = \frac{PA_1}{MC_1}$, из которого, учитывая, что $PA_1 = SP - a$ и $MC_1 = a - SM$, имеем

$$\frac{SP}{SM} = \frac{SP - a}{a - SM},$$

откуда

$$a = \frac{2SP \cdot SM}{SP + SM}. \qquad (11)$$

Подставляя в это равенство $SP = 7$ и $SM = \frac{7}{6}$, находим $a = 2$.

Рассмотрим теперь плоскость BSD. Точно так же, как доказывалось равенство (11), доказывается, что

$$a = \frac{2SQ \cdot SN}{SQ + SN}. \qquad (12)$$

Если для краткости обозначить $x = SQ$ и $y = SN$, то из (12) с учетом равенства $a = 2$ находим

$$\frac{2xy}{x + y} = 2$$

и

$$xy = x + y.$$

Согласно условию имеем $x + y = \frac{25}{6}$, так что числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{25}{6}, \\ xy = \frac{25}{6}. \end{cases}$$

Решая ее и учитывая данное в условии неравенство $x > y$, находим $x = \frac{5}{2}$ и $y = \frac{5}{3}$.

Ответ: $SQ = \frac{5}{2}$, $SN = \frac{5}{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1$. 2. $y_{min} = 7$. 3. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{33 - \sqrt{465}}{24} + \pi n$, $n \in Z$. 4. 18. 5. 2 дома на 6 квартир и 12 домов на 10 квартир. 6. $SC = 5$, $SF = \frac{5}{4}$.

Вариант 3. 1. $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 3$. 2. $y_{min} = \frac{3}{2}$. 3. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{13 - \sqrt{425}}{32} + \pi n$, $n \in Z$. 4. 24. 5. 14 домов на 22 квартиры, 2 дома на 25 квартир. 6. $SA = \frac{8}{3}$, $SB = \frac{7}{3}$.

Вариант 4. 1. $-2 \leqslant x \leqslant 3$. 2. $y_{min} = 3\frac{3}{5}$. 3. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{15-\sqrt{113}}{8} + \pi n$, $n \in Z$. 4. 4. 5. 11 домов на 10 квартир, 1 дом на 14 квартир. 6. $SE = 4$, $SN = 2$.

1985

Решение варианта 1

1. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x. \qquad (1)$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно каждый корень уравнения (1) будет корнем исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Так как квадратное уравнение $2z^2 + z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = -1$ и $z_2 = \frac{1}{2}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = -1.$$

Очевидно, что все x, удовлетворяющие уравнению $\sin x = -1$, не являются решениями исходного уравнения, ведь при таких x выражения под знаками корней исходного уравнения отрицательны. Для значений x, удовлетворяющих равенству $\sin x = \frac{1}{2}$, имеем, что $1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$.

Поэтому все значения x, удовлетворяющие равенству $\sin x = \frac{1}{2}$, т. е. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $\frac{1}{3} - x > 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-\infty < x < \frac{1}{3}$. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем ОДЗ на два промежутка $-\infty < x \leqslant 0$ и $0 < x < \frac{1}{3}$.

В области $-\infty < x \leqslant 0$ имеем $|x| = -x$, поэтому исходное неравенство перепишется так:

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geqslant -x.$$

Ясно, что $x = 0$ является решением этого неравенства, а в области $x < 0$ оно равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 2$$

и, поскольку $\frac{1}{2} < 1$, неравенству $\frac{1}{3} - x \geqslant 2$. Множество решений этого неравенства есть промежуток $-\infty < x \leqslant -\frac{5}{3}$. Из этих x в область $-\infty < x < 0$ попадают все x из промежутка $-\infty < x \leqslant -\frac{5}{3}$.

В области $0 < x < \frac{1}{3}$ имеем $|x| = x$, поэтому исходное неравенство перепишется в виде

$$x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geqslant x.$$

На множестве $0 < x < \frac{1}{3}$ последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

и, поскольку $\frac{1}{2} < 1$, неравенству $\frac{1}{3} - x \leqslant \frac{1}{2}$. Множество решений этого неравенства есть промежуток $-\frac{1}{6} \leqslant x < +\infty$. Из этих x в рассматриваемую область $0 < x < \frac{1}{3}$ попадают все x из промежутка $0 < x < \frac{1}{3}$.

Итак, решениями исходного неравенства являются все числа из объединения двух промежутков $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right]$ и $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ и точки $x = 0$.

Ответ: $-\infty < x \leqslant -\frac{5}{3}$; $0 \leqslant x < \frac{1}{3}$.

3. Обозначим через N и K точки, в которых прямая AM пересекается с прямыми BP и BQ соответственно (рис. 184). Как известно, точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2:1$, если считать от вершины. Согласно условию задачи $AK = 2KM$, поэтому K есть точка пересечения медиан треугольника ABC. Отсюда следует, что BQ — медиана треугольника ABC, т. е. $AQ = QC$ и $BK = 2KQ$.

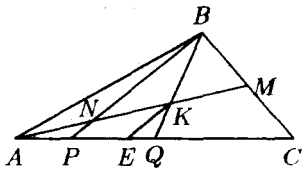


Рис. 184

Проведем $KE \parallel BP$ (рис. 184). Тогда $\dfrac{PE}{EQ} = \dfrac{BK}{KQ} = 2$, откуда $EQ = \dfrac{1}{2}PE$. Отсюда следует, что $PE = PQ - EQ = PQ - \dfrac{1}{2}PE$, т. е. $PE = \dfrac{2}{3}PQ = 2$. По условию точка N есть середина отрезка AK, значит PN есть средняя линия треугольника AKE и $AP = PE = 2$. Наконец, $AC = 2AQ = 2(AP + PQ) = 10$.

Ответ: 10.

4. Обозначим через v км/час скорость лодки в стоячей воде и через u км/час скорость течения реки. По условию лодка, двигаясь по течению реки, достигла пункта B через 10 часов после выхода из пункта A. Поэтому расстояние между A и B равно $10(v+u)$ км. Катер двигался из пункта A в пункт B со скоростью $(2v+u)$ км/час, а обратно против течения со скоростью $(2v-u)$ км/час. Поэтому на весь путь катер затратил $\dfrac{10(v+u)}{2v+u} + \dfrac{10(v+u)}{2v-u}$ час. В соответствии с условием задачи получаем неравенство

$$\frac{10(v+u)}{2v+u} + \frac{10(v+u)}{2v-u} \geqslant 16. \qquad (2)$$

По условию задачи лодка и катер до встречи двигались не более 8 часов. За это время лодка прошла не более $8(v+u)$ км, и, значит, на путь от места встречи до пункта A катеру понадобится не более $\dfrac{8(v+u)}{2v-u}$ часов. До этого в пути он находился не более 8 часов, так что на весь путь от A до B и обратно занял у катера не более $8 + \dfrac{8(v+u)}{2v-u}$ часов. Таким образом,

$$\frac{10(v+u)}{2v+u} + \frac{10(v+u)}{2v-u} \leqslant 8 + \frac{8(v+u)}{2v-u}. \qquad (3)$$

Обозначим отношение $\frac{v}{u}$ буквой t. Из условия задачи следует, что $2v - u > 0$, т. е. $t > \frac{1}{2}$ Неравенства (2) и (3) могут теперь быть переписаны так:

$$\begin{cases} \frac{10(t+1)}{2t+1} + \frac{10(t+1)}{2t-1} \geqslant 16, \\ \frac{10(t+1)}{2t+1} + \frac{2(t+1)}{2t-1} \leqslant 8. \end{cases}$$

Полученная система неравенств на множестве $t > \frac{1}{2}$ равносильна системе

$$\begin{cases} 3t^2 - 5t - 2 \leqslant 0, \\ t^2 - 2t \geqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений этой системы состоит из точки $t = 2$ и промежутка $-\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 0$. Учитывая, что $t > \frac{1}{2}$, находим, что $t = 2$. Искомое время прибытия катера в пункт B равно $6 + \frac{10(v+u)}{2v-u} = 6 + \frac{10(t+1)}{2t-1} = 16$ часов.

Ответ: 16 часов.

5. Первое решение. Из тождества

$$(x^2 + y^2)(z^2 + v^2) = (xv + yz)^2 + (xz - yv)^2$$

следует, что для каждого решения $(x; y; z; v)$ заданной системы справедливо неравенство

$$36 = (xv + yz)^2 + (xz - yv)^2 \geqslant (xv + yz)^2 \geqslant 36. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что для каждого решения должно выполняться равенство

$$xz - yv = 0. \qquad (5)$$

Пользуясь им, находим

$$(x + z)^2 + (y - v)^2 = x^2 + z^2 + y^2 + v^2 = 13. \qquad (6)$$

Итак, для любого решения исходной системы справедливо неравенство

$$(x + z)^2 \leqslant 13.$$

Таким образом, для любого решения исходной системы справедливо неравенство

$$x + z \leqslant \sqrt{13}.$$

Укажем теперь те решения $(x_0; y_0; z_0; v_0)$ исходной системы, для каждого из которых

$$x_0 + z_0 = \sqrt{13}. \qquad (7)$$

Из (6) следует, что $y_0 = v_0$, а из (4), что

$$x_0 v_0 + y_0 z_0 = 6.$$

Пользуясь тремя последними равенствами, находим, что

$$y_0(x_0 + z_0) = 6$$

и

$$y_0 = v_0 = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Из первых двух уравнений системы, учитывая равенство (7), имеем $x_0 = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$ и $z_0 = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$.

Таким образом, существует единственное решение $\left(\dfrac{4}{\sqrt{13}}; \dfrac{6}{\sqrt{13}}; \dfrac{9}{\sqrt{13}}; \dfrac{6}{\sqrt{13}}\right)$ исходной системы, для которого выражение $x + z$ принимает наименьшее значение.

Второе решение. Пусть $(x_0; y_0; z_0; v_0)$ — решение исходной системы. Так как $x_0^2 + y_0^2 = 4$, то существует φ_0, $\varphi_0 \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, такое, что $x_0 = 2\cos\varphi_0$, $y_0 = 2\sin\varphi_0$. Так как $z_0^2 + v_0^2 = 9$, то существует ψ_0, $\psi_0 \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, такое, что $z_0 = 3\cos\psi_0$, $v_0 = 3\sin\psi_0$. Поэтому из неравенства $x_0 v_0 + y_0 z_0 \geqslant 6$ имеем

$$6\cos\varphi_0 \sin\psi_0 + 6\sin\varphi_0 \cos\psi_0 \geqslant 6,$$

т. е. $\sin(\varphi_0 + \psi_0) \geqslant 1$, отсюда $\sin(\varphi_0 + \psi_0) = 1$, т. е. $\varphi_0 + \psi_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Для $x_0 + z_0$ имеем $x_0 + z_0 = 2\cos\varphi_0 + 3\cos\psi_0 = 2\cos\varphi_0 + 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi_0\right) = 2\cos\varphi_0 + 3\sin\varphi_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cos\varphi_0 + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\sin\varphi_0\right)\sqrt{13} = \sqrt{13}\sin(\varphi_0 + \varphi_1)$, где $\varphi_1 = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Максимум $x_0 + z_0$ достигается при $\varphi_0 + \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; так как $0 \leqslant \varphi_0 + \varphi_1 \leqslant \pi$, то отсюда следует, что максимум $x_0 + z_0$ достигается при единственном значении $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, а тогда

$$x_0 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{4}{\sqrt{13}},$$
$$y_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 2\sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}},$$
$$z_0 = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{9}{\sqrt{13}},$$
$$v_0 = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$; $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$; $z = \frac{9}{\sqrt{13}}$; $v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. $-\frac{5}{9} < x \leqslant -\frac{2}{9}$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{22}{9}$. 3. $AC = \frac{20}{\sqrt{3}}$. 4. 4 часа 48 минут. 5. $a = -\frac{12}{5}$, $b = -\frac{9}{5}$, $c = -\frac{12}{5}$, $d = -\frac{16}{5}$.

Вариант 3. 1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 2. $-\infty < x \leqslant -\frac{9}{2}$; $x = 0$; $\frac{3}{10} \leqslant x < \frac{1}{2}$. 3. $PR = 5\sqrt{3}$. 4. 40 минут и 1 час. 5. $x = \frac{3}{\sqrt{28}}$, $y = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$, $a = \frac{25}{\sqrt{28}}$, $b = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$.

Вариант 4. 1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 2. $-\frac{4}{5} < x \leqslant -\frac{3}{5}$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{21}{5}$. 3. $AC = 10\sqrt{\frac{7}{15}}$. 4. 11 часов. 5. $u = -\frac{10}{\sqrt{29}}$, $v = \frac{4}{\sqrt{29}}$, $a = -\frac{10}{\sqrt{29}}$, $b = \frac{25}{\sqrt{29}}$.

1986

Решение варианта 1

1. Поскольку $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$2^{|x+1|} = 2^{\frac{-2x+3}{2}}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$|x+1| = \frac{-2x+3}{2}.$$

Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$4(x+1)^2 = (-2x+3)^2, \qquad (1)$$

являющееся следствием исходного уравнения. Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (1), но не обязательно каждый корень уравнения (1) будет корнем исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) из них надо отобрать те, которые будут удовлетворять исходному уравнению.

Проверка показывает, что единственный корень $x = \frac{1}{4}$ уравнения (1) является также и корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

2. Обозначим $\sin x$ через u и $\log_y 3$ через v. В новых обозначениях исходная система имеет вид

$$\begin{cases} 6u + 7v = -10, \\ -5u + 2v = 0,5. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных относительно u и v уравнений, находим, что $u = -\frac{1}{2}$, $v = -1$.

Итак, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\log_y 3 = -1$. Решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеют вид $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Решение уравнения $\log_3 y = -1$ есть $y = \frac{1}{3}$. Следовательно, решениями исходной системы являются пары чисел $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{1}{3}\right)$, $n \in Z$.

Ответ: $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{1}{3}\right)$, $n \in Z$.

3. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $-25x^2 + 15x - 2 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{5}$. Точки $x = \frac{1}{5}$ и $x = \frac{2}{5}$ удовлетворяют исходному неравенству, так как в них левая его часть обращается в нуль. На множестве $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$ функция $y(x) = \sqrt{-25x^2 + 15x - 2}$ положительна для любого значения x. Значит, на этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$8x^2 - 6x + 1 \geqslant 0.$$

Множество решений последнего неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2} \leqslant x < +\infty$, а его часть, со-

держащаяся в множестве $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$, состоит только из одного промежутка $\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{1}{4}$.

Следовательно, множество всех решений исходного неравенства состоит из точки $x = \frac{2}{5}$ и промежутка $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$; $x = \frac{2}{5}$.

4. Пусть O — центр данной окружности (рис. 185). Так как $AO = OD$, то точка P лежит на отрезке AO. Так как $\frac{AP}{PD} = \frac{1}{3}$, то

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AP}{AP + PD} = \frac{1}{1 + \frac{PD}{AP}} = \frac{1}{4},$$

т. е. точка P есть середина отрезка AO. Так как $BO = AO$ и $\angle BAD = 60^\circ$, то треугольник AOB равносторонний, и поэтому P есть основание высоты трапеции, опущенной из вершины B на основание AD. Так как $OC = OD$ и $\angle ODC = 60^\circ$, то треугольник OCD равносторонний, но тогда треугольник BOC также равносторонний и $BC = R = 2\sqrt{7}$.

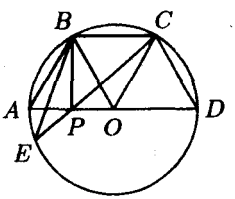


Рис. 185

Так как $\angle BOC$ равен 60°, то и дуга BC также равна 60°, а значит, угол BEP равен 30°.

Высота трапеции BP равна

$$BP = R\sin 60^\circ = 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}.$$

Так как $\angle BEP + \angle EBP = \angle BPC$, то $\sin(\angle EPB) = \sin(\angle BPC) = \frac{BC}{PC} = \frac{BC}{\sqrt{BC^2 + BP^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{28+21}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$. По теореме синусов из треугольника BPE находим

$$\frac{BE}{\sin(\angle EPB)} = \frac{BP}{\sin 30^\circ},$$

т. е. $BE = \frac{\sqrt{21}\cdot 2\cdot 2}{\sqrt{7}} = 4\sqrt{3}$.

Обозначим длину отрезка EP буквой x. По теореме косинусов справедливо равенство

$$BP^2 = BE^2 + EP^2 - 2BE\cdot EP\cos(\angle BEP)$$

или

$$21 = 48 + x^2 - 2\cdot 4\sqrt{3}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

После упрощения получаем квадратное уравнение $x^2 - 12x + 27 = 0$, имеющее два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = 9$. Учитывая, что BE — наибольшая сторона в тупоугольном треугольнике BPE, т. е. $EP < BE = 4\sqrt{3}$, заключаем, что $EP = x = 3$. Итак, $S_{BPE} = \frac{1}{2}BE\cdot EP\sin(\angle BEP) = \frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

5. Обозначим через n, $n \geqslant 2$, число дней, в течение которых рабочие изготавливали детали, а через m_1 и m_2 соответственно — производительности в один день первого и второго рабочих. Тогда из условия задачи имеем

$$\begin{cases} n(m_2 - m_1) = k, \\ 127 \leqslant k \leqslant 132, \\ n(2m_1 - m_2) = 77. \end{cases}$$

Так как n, m_1 и m_2 — натуральные числа и так как $77 = 7\cdot 11$, то из третьего условия следует, что число n может равняться или 7, или 11, или 77. Из первого условия следует, что число k делится на n. Среди натуральных чисел от 127 до 132 на 7 и на 77 не делится без остатка, как легко проверить непосредственно, ни одно из них, а на число 11 делится единственное число 132. Следовательно, значение n равно 11, а k равно 132. Тогда для нахождения m_1 и m_2 получаем систему

$$\begin{cases} 2m_1 - m_2 = 7, \\ m_2 - m_1 = 12, \end{cases}$$

откуда $m_1 = 19$, $m_2 = 31$.

Ответ: 11 дней, 19 деталей и 31 деталь.

6. Пусть $PQRP_1Q_1R_1$ — заданная призма (рис. 186). Возьмем на отрезке QQ_1 некоторую точку K и проведем плоскость, перпендикулярную ребру QQ_1. Пусть эта плоскость пересекает ребра PP_1 и RR_1 призмы $PQRP_1Q_1R_1$ соответственно в точках M и L, а ребра DD_1, EE_1 и FF_1 призмы $DEFD_1E_1F_1$ соответственно — в точках M_1, K_1 и L_1. Так как $PP_1 \parallel QQ_1$ и $RR_1 \parallel QQ_1$ и плоскость MKL перпендикулярна QQ_1, то $MK \perp QQ_1$ и $KL \perp QQ_1$. Это означает, что $\angle MKL$ есть линейный угол двугранного угла с ребром QQ_1. Так что $\cos(\angle MKL) = \frac{1}{4}$. Анало-

гично доказывается, что $\cos(\angle KML) = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Имеем

$$\sin(\angle MKL) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\sin(\angle KML) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Обозначим для краткости через α, β и γ соответственно углы KML, MLK и LKM. Тогда $\cos\beta = -\cos(\alpha + \gamma) = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma = \frac{\sqrt{15\cdot 6}}{16} - \frac{\sqrt{10}}{16} = \frac{\sqrt{10}}{8} > 0$, т. е. угол MLK острый и $\sin\beta = \frac{3\sqrt{6}}{8}$.

Для искомой площади S боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$ имеем $S = DD_1\cdot(M_1K_1 + K_1L_1 + L_1M_1)$. Поскольку $DD_1 = PP_1$, то условие минимальности S означает, что минимален периметр треугольника $L_1M_1K_1$ среди всех треугольников, вписанных в треугольник KLM.

Итак, задача свелась к нахождению треугольника $K_1M_1L_1$, вписанного в заданный треугольник KML и имеющего наименьший периметр.

Найдем вначале треугольник наименьшего периметра среди всех треугольников, вписанных в треугольник KLM и имеющих фиксированную вершину M_1 (рис. 187). Обозначим через M_1' и M_1'' точки, симметричные точке M_1 относительно сторон ML и KL, соответственно (рис. 187). Треугольники $M_1'LM_1$ и M_1LM_1'' равнобедренные, и, следовательно,

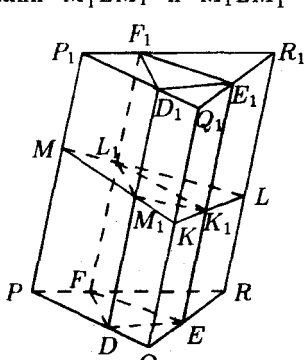


Рис. 186

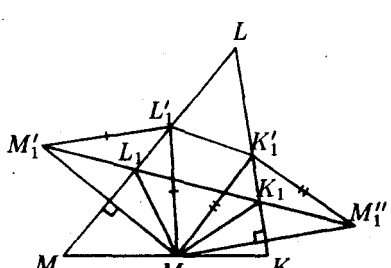


Рис. 187

$M_1'L = LM_1'' = LM_1$, т. е. равнобедренный также и треугольник $M_1'LM_1''$. Ясно, что $\angle M_1'LM_1'' = 2\beta$. Пусть L_1 и K_1 — точки пересечения отрезка $M_1'M_1''$ соответственно со сторонами ML и KL. Если L_1' и K_1' — произвольные точки соответственно на ML и KL, то периметр треугольника $M_1L_1K_1$, равный длине отрезка $M_1'M_1''$, меньше, чем периметр треугольника $M_1L_1'K_1'$, равный длине ломаной $M_1''K_1'L_1'M_1'$.

Поэтому периметр треугольника $M_1L_1K_1$, наименьший из периметров вписанных треугольников с вершиной M_1, равен $M_1'M_1''$ и

$$M_1'M_1'' = 2M_1'L\cdot\sin\beta = 2LM_1\cdot\sin\beta.$$

Следовательно, надо теперь выбором точки M_1 на стороне MK найти наименьшее значение выражения $2LM_1\cdot\sin\beta$, т. е. наименьшее значение LM_1. Это будет, если M_1 есть основание высоты треугольника MLK, опущенной из вершины L, и тогда

$$2LM_1\cdot\sin\beta = 2ML\cdot\sin\alpha\sin\beta.$$

Следовательно,

$$S=2PP_1\cdot ML\sin\alpha\sin\beta = 2S_{PP_1R_1R}\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= 2\cdot 64\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{8} = 72.$$

Ответ: 72 см^2.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \frac{1}{8}$. 2. $\left(\pi + 2\pi n, \frac{1}{9}\right)$, $n \in Z$.

3. $x = \frac{1}{5}$; $\frac{3}{5} \leqslant x \leqslant 1$. 4. $\frac{9\sqrt{13}}{14}$. 5. 13 дней; 19 тонн, 31 тонна.
6. 21 см^2.

Вариант 3. 1. $x = -\frac{1}{4}$. 2. $\left((-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{1}{3}\right)$, $n \in Z$.

3. $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$; $x = 2$. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{7}$.

5. 11 дней; 18 шкафов, 29 шкафов. 6. $\frac{23\sqrt{6}}{24}$

Вариант 4. 1. $x = -\frac{1}{8}$. 2. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{1}{9}\right)$, $n \in Z$.

3. $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$; $x = 2$. 4. $\frac{18\sqrt{3}}{7}$. 5. 13 дней; 16 тонн, 25 тонн.
6. $\frac{14}{15}\sqrt{10}$.

1987

Решение варианта 1

1. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, для которых $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$.

На этом множестве исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$

Решения уравнения $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$ есть $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Все эти x удовлетворяют условию $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ и потому являются решениями исходного уравнения. Решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ есть $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, и $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Проверим, какие из них удовлетворяют условию $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$.

Для $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, имеем

$$\cos\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) > 0.$$

Значит, все $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, являются решениями исходного уравнения.

Для $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$, имеем

$$\cos\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}+2\pi m\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right) < 0.$$

Значит, ни одно из этих x не является решением исходного уравнения, так как не входит в его ОДЗ.

Итак, решениями исходного уравнения являются $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, и $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$.

2. Обозначим число проданных орехов I, II и III сортов соответственно через x т, y т и z т. Тогда из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 10,5, \\ 2x + 4y + 6z = 33, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим $x = 4,5 + z$, $y = 6 - 2z$. Подставляя эти выражения для x и y в третье уравнение, получаем:

$$(6 - 2z)^2 = (4,5 + z)z.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $z_1 = 1,5$ и $z_2 = 8$. Условию задачи удовлетворяет $z = 1,5$, поскольку $y = 6 - 2z > 0$. Соответственно находим $x = 6$ и $y = 3$.

Ответ: 6 т; 3 т; 1,5 т.

3. См. решение задачи 3, § 10, 1987 г.

4. См. решение задачи 4, § 10, 1987 г.

5. Обозначим через O точку пересечения прямых BM и KC. Проведем прямую MP параллельно KC (рис. 188). Тогда будут справедливы равенства $\frac{BO}{OM} = \frac{KB}{KP}$ и $\frac{AP}{KP} = \frac{AM}{MC} = \frac{4}{5}$. Следовательно, $AP = \frac{4}{5}KP$ и $AK = AP + KP = \frac{9}{5}KP$. По условию $\frac{KB}{AK} = \frac{3}{2}$, так что $KB = \frac{3}{2}AK = \frac{27}{10}KP$ и $\frac{BO}{OM} = \frac{KB}{KP} = \frac{27}{10}$.

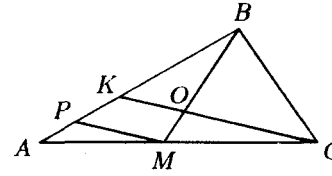


Рис. 188

Ответ: $\frac{27}{10}$.

6. Пусть a_0 — такое значение параметра a, при котором пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение исходной системы уравнений. Заметим, что в обоих уравнениях исходной системы x находится либо в четной степени, либо под знаком абсолютной величины. Это означает, что при том же значении параметра a_0 пара чисел $(-x_0; y_0)$ также является решением исходной системы. Если $x_0 \neq 0$, то исходная система при этом значении параметра имеет по крайней мере два различных решения. Поэтому a_0 может удовлетворять условию задачи только в том случае, когда $(x_0; y_0)$ — решение исходной системы таково, что $x_0 = 0$. Но тогда из второго уравнения исходной системы следует, что либо $y_0 = 1$, либо $y_0 = -1$. Следовательно, a_0 может удовлетворять условию задачи только тогда, когда при $a = a_0$ решение исходной системы есть либо $(0; 1)$, либо $(0; -1)$.

Подставляя $x = 0$ и $y = 1$, получаем равенство $3+4 = 3 + 3a_0$, откуда $a_0 = \frac{4}{3}$. Подставляя $x = 0$ и $y = -1$, получаем равенство $3 + 4 = -3 + 3a_0$, откуда $a_0 = \frac{10}{3}$.

Итак, показано, что для любого значения параметра a, $a \neq \frac{4}{3}$ и $a \neq \frac{10}{3}$, исходная система имеет более одного решения или вообще не имеет решений. Остается проверить, сколько решений имеет система при $a = \frac{4}{3}$ и при $a = \frac{10}{3}$.

Пусть $a = \frac{10}{3}$, тогда исходная система уравнений перепишется в виде

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что кроме решения $(0; -1)$ эта система имеет еще решения $(1; 0)$ и $(-1; 0)$.

Пусть $a = \frac{4}{3}$, тогда исходная система уравнений перепишется в виде

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 4, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} 5(|x| - x^2) = 3(y - 2^{|x|}), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Докажем, что других решений кроме решения $(0; 1)$ система (1) не имеет.

Из второго уравнения системы (1) следует, что для любого ее решения $(x_0; y_0)$ справедливы неравенства $|x_0| \leqslant 1$ и $|y_0| \leqslant 1$, а это означает, в частности, что

$$|x_0| - x_0^2 = |x_0|\cdot(1 - |x_0|) \geqslant 0,$$

и так как $2^{|x_0|} \geqslant 1$, то

$$y_0 - 2^{|x_0|} \leqslant 1 - 2^{|x_0|} \leqslant 0.$$

Следовательно, любое решение $(x_0; y_0)$ системы (1) удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} |x_0| - x_0^2 = 0, \\ y_0 = 2^{|x_0|}, \\ x_0^2 + y_0^2 = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Из первого равенства (2) имеем либо $x_0 = 0$, либо $x_0 = 1$, либо $x_0 = -1$. Если $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$, то из второго равенства (2) имеем $y_0 = 2$, а ни одна из пар $(1; 2)$ и $(-1; 2)$ не удовлетворяет третьему равенству (2), т. е. ни одна из этих пар чисел не является решением исходной системы.

Если $x_0 = 0$, то из второго равенства $y_0 = 1$. Поэтому $(0; 1)$ — единственная пара чисел, удовлетворяющая условиям (2), т. е. единственное решение исходной системы.

Итак, при $a = \frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
2. 2 тонны; 1 тонна; 0,5 тонны. 3. $4 < x < 6$; $6 < x < 8$.
4. $-4 < x < -3$; $x = -\frac{5}{2}$; $-2 < x < -1$. 5. $\frac{21}{44}$. 6. $a = \frac{2}{5}$.

Вариант 3. 1. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.
2. 8 тонн; 2 тонны; 0,5 тонны.
3. $-\infty < x \leqslant -3$, $x \neq -4$; $-2 \leqslant x < +\infty$.
4. $3 < x < 3,5$; $3,5 < x < 4$. 5. $\frac{25}{7}$. 6. $a = \frac{3}{2}$.

Вариант 4. 1. $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.
2. 2 тонны; 1 тонна; 0,5 тонны. 3. $-8 < x < -6$; $-6 < x < -4$.
4. $-5 < x < -4$; $x = -\frac{7}{2}$; $-3 < x < -2$. 5. $\frac{23}{32}$. 6. $a = \frac{1}{3}$.

1988

Решение варианта 1

1. См. решение задачи 1, § 10, 1988 г.

2. Применяя формулу косинуса двойного угла $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\cos x$$

или, замечая, что $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, в виде

$$-\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x. \qquad (1)$$

Применяя формулу суммы косинусов

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$2\cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2}\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0 \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. Решения второго уравнения есть $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$, и $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$.

3. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x^2+x-6\geqslant 0$ и $x+5\neq 0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков

$$-\infty<x<-5, \quad -5<x\leqslant -3, \quad 2\leqslant x<+\infty.$$

а). Пусть x принадлежит промежутку $-\infty<x<-5$. Тогда $x+5<0$, и исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-6}+3x+13<x+5$$

или неравенству

$$\sqrt{x^2+x-6}<-2x-8.$$

Поскольку для рассматриваемых x обе части этого неравенства положительны, то оно равносильно на множестве $-\infty<x<-5$ неравенству

$$x^2+x-6<4x^2+32x+64,$$

т. е. неравенству

$$3x^2+31x+70>0. \qquad (2)$$

Решениями неравенства (2) являются все x из объединения двух промежутков $-\infty<x<-7$ и $-\frac{10}{3}<x<+\infty$. Из этих x рассматриваемому промежутку $-\infty<x<-5$ принадлежат x из промежутка $-\infty<x<-7$. Они и являются решениями исходного неравенства на промежутке $-\infty<x<-5$.

б). Пусть x принадлежит одному из промежутков $-5<x\leqslant -3$ или $2\leqslant x<+\infty$. Тогда $x+5>0$, и на этих множествах исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-6}>-2x-8. \qquad (3)$$

Любое x из промежутков $-4<x\leqslant -3$ и $2\leqslant x<+\infty$ является решением неравенства (3), а значит, и исходного неравенства,

поскольку для каждого такого x левая часть неравенства (3) неотрицательна, а правая — отрицательна.

Рассмотрим x из промежутка $-5 < x \leqslant -4$. Для каждого такого x обе части неравенства (3) неотрицательны, и поэтому оно равносильно на этом множестве неравенству

$$3x^2 + 31x + 70 < 0.$$

Решениями этого неравенства являются все x из промежутка $-7 < x < -\frac{10}{3}$, содержащего весь промежуток $-5 < x \leqslant -4$.

Следовательно, в случае б) решениями неравенства (3), а значит, и исходного неравенства, являются все x из промежутков $-5 < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Объединяя решения, полученные в случаях а) и б), находим, что решениями исходного неравенства являются все x из объединения промежутков $-\infty < x < -7$; $-5 < x \leqslant -3$; $2 \leqslant x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < -7$; $-5 < x \leqslant -3$; $2 \leqslant x < +\infty$.

4. См. решение задачи 4, § 10, 1988 г.

5. См. решение задачи 5, § 10, 1988 г.

6. Решим второе уравнение. Переходя в логарифмах к основанию 2, получим уравнение

$$-\log_2(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) + 2\log_2(5 - \operatorname{tg} x) = 1, \qquad (4)$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Следствием этого уравнения является уравнение

$$(3\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg} x + 1) = \frac{(5 - \operatorname{tg} x)^2}{2}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$17\operatorname{tg}^2 x + 10\operatorname{tg} x - 27 = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{27}{17}.$$

Решения $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ являются решениями второго уравнения, данного в условии задачи, поскольку справедливо числовое равенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\cdot 1 - 1) - \log_2(3\cdot 1 + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - 1) = 1.$$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{27}{17}$ не являются решениями второго уравнения, поскольку для них $3\operatorname{tg} x - 1 \leqslant -\frac{64}{17} < 0$, и, значит, они не принадлежат области допустимых значений этого уравнения.

Итак, решениями второго уравнения, данного в условии задачи, являются только $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Подставляя эти значения x в первое из данных уравнений, получаем равенства

$$a(2a-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k\right)^3 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k\right)^3 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k = 0,\ k \in Z.$$

Все эти равенства можно переписать в виде

$$2a^2 + a - 3 = 0. \qquad (6)$$

Условию (6) удовлетворяют лишь два значения $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{2}$. Следовательно, только эти числа могут являться искомыми значениями a. Проверим, будет ли при каждом из этих значений a первое уравнение иметь решениями только $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Пусть $a = 1$. Тогда первое из исходных уравнений перепишется в виде

$$\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2\sin x = 0. \qquad (7)$$

Поскольку $\sin x = \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)$ для любых x, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2\sin^3 x - 2\sin x\cos^2 x = 0. \qquad (8)$$

Так как $\cos x \neq 0$ для любого решения уравнения (8), то его можно разделить на $\cos^3 x$ и получить уравнение

$$3 - \operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x = 0, \qquad (9)$$

равносильное уравнению (8).

Перепишем уравнение (9) в виде

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3) = 0. \qquad (10)$$

Так как квадратное уравнение $z^2 + 3z + 3 = 0$ не имеет действительных корней, то уравнение (10) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

множество корней которого есть $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Итак, в случае $a = 1$ уравнения, данные в условии задачи, равносильны.

Пусть $a = -\frac{3}{2}$, тогда первое из исходных уравнений запишется в виде

$$12\sin^3 x + 6\cos^3 x - 9\sin x = 0$$

или в виде

$$12\sin^3 x + 6\cos^3 x - 9\sin^3 x - 9\sin x\cos^2 x = 0. \qquad (11)$$

Так же как и выше показывается, что уравнение (11) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 2 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2) = 0. \qquad (12)$$

Так как квадратное уравнение $z^2 - 2z - 2 = 0$ имеет корни $z_1 = 1 + \sqrt{3}$ и $z_2 = 1 - \sqrt{3}$, то уравнение (12) равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = 1 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1 - \sqrt{3}. \qquad (13)$$

Ясно, что совокупность уравнений (13) имеет кроме решений $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, и другие решения. Следовательно, значение $a = -\frac{3}{2}$ условию задачи не удовлетворяет.

Ответ: $a = 1$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3} < 3$.
2. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 3. $-\infty < x \leqslant -1$; $4 \leqslant x < 6$; $8 < x < +\infty$. 4. 15. 5. $\frac{27}{2}$. 6. $a = 3$.

Вариант 3. 1. $\sqrt{13} - \sqrt[3]{4} > 2$.
2. $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3}$, $m \in Z$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $-\infty < x < -6$; $-4 < x < -2$; $3 < x < +\infty$. 4. 30. 5. 18. 6. $a = 1$.

Вариант 4. 1. $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3} > 1$.
2. $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in Z$. 3. $-\infty < x < 0$; $5 < x < 7$; $9 < x < +\infty$. 4. 40. 5. $\frac{70}{3}$. 6. $a = -3$.

§12. Факультет психологии

1984

Решение варианта 1

1. Последовательно выполняя действия, находим

$$0,125 : 1\frac{1}{8} = \frac{1}{8} : \frac{9}{8} = \frac{1}{9}; \quad \frac{17}{90} - \frac{1}{9} = \frac{7}{90}; \quad 3 \cdot \frac{7}{90} = \frac{7}{30};$$

$$\frac{7}{30} : 480 = \frac{7}{14400}; \quad 7 : 1,8 = 7 : \frac{9}{5} = \frac{35}{9};$$

$$2\frac{1}{3} : 1,5 = \frac{7}{3} : \frac{3}{2} = \frac{14}{9}; \quad \frac{35}{9} - \frac{14}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3};$$

$$\frac{7}{3} : 2\frac{2}{3} = \frac{7}{3} : \frac{8}{3} = \frac{7}{8}; \quad \frac{7}{14400} : \frac{7}{8} = \frac{8}{14400} = \frac{1}{1800};$$

$$\left(\frac{1}{1800}\right)^{-1} = 1800; \quad \frac{679 \cdot 10^{-2}}{0,7} = \frac{679}{100} : \frac{7}{10} = \frac{97}{10};$$

$$\frac{97}{10} + \frac{3}{10} = 10; \quad 1800 : 10 = 180.$$

Ответ: 180.

2. Обозначим через v км/час скорость, с которой турист поднимался в гору. Тогда $2v$ км — длина подъема в гору, а $(2v + 18)$ км — длина спуска с горы. Турист спускался со скоростью $\frac{2v+18}{4} = \frac{v+9}{2}$ км/час. При подъеме один километр турист проходил за $\frac{1}{v}$ час, а при спуске на один километр он тратил $\frac{2}{v+9}$ час. Из условия задачи имеем уравнение

$$\frac{2}{v+9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{v},$$

имеющее корни $v_1 = 3$ и $v_2 = -18$. Так как скорость положительна, то условию задачи отвечает лишь $v = 3$. Тогда подъем составляет $2v = 6$ км, а спуск — $2v + 18 = 24$ км, и весь путь туриста равен 30 км.

Ответ: 30 км.

3. Поскольку $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sin x[4\cos^2 x - 4\cos x - 3] = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Решения первого уравнения есть $x = \pi k$, $k \in Z$. Квадратное уравнение $4z^2 - 4z - 3 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{3}{2}$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$. Поэтому второе уравнение совокупности (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого α. Второе уравнение имеет решения $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

4. Не ограничивая общности, можно считать, что O_1 — центр большой окружности (рис. 189). Так как обе окружности симметричны относительно прямой O_1O_2, то точки их пересечения A и B также симметричны относительно O_1O_2. Это означает, что отрезок AB перпендикулярен O_1O_2 и, пересекая прямую O_1O_2 в точке M, делится этой точкой пополам, т. е. $AM = BM$.

Какое бы положение C_1' или C_1'' (рис. 190) ни занимала бы

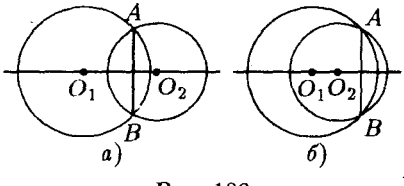


Рис. 189

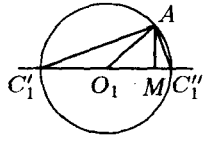


Рис. 190

точка C_1, площадь треугольника C_1O_1A равна $\frac{1}{2}C_1O_1 \cdot AM$, т. е. равна $4AM$. Аналогично, площадь треугольника C_2O_2B равна $\frac{1}{2}C_2O_2 \cdot BM = 3BM = 3AM$. Таким образом, произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно $4AM \cdot 3AM$, т. е. равно $12AM^2$. Согласно условию справедливо равенство

$$12AM^2 = 336,$$

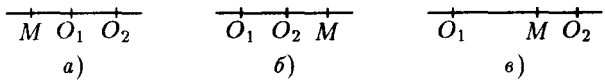
откуда следует, что $AM^2 = 28$. Из прямоугольного треугольника O_1AM по теореме Пифагора находим

$$O_1M = \sqrt{O_1A^2 - AM^2} = \sqrt{64 - 28} = 6.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника O_2AM находим

$$O_2M = \sqrt{O_2A^2 - AM^2} = \sqrt{36 - 28} = 2\sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что точки O_2 и M лежат на прямой по одну сторону относительно точки O_1, т. е. случай, изображенный на рис. 191 а) не имеет места.



а) б) в)

Рис. 191

Если точка M лежит вне отрезка O_1O_2 (рис. 191 б)), то $O_1O_2 = O_1M - O_2M = 6 - 2\sqrt{2}$, и при любом расположении точек C_1 и C_2 имеем, пользуясь неравенством треугольника,

$$C_1C_2 \leqslant C_1O_1 + O_1C_2 \leqslant C_1O_1 + O_1O_2 + C_2O_2 = \\ = 8 + 6 - 2\sqrt{2} + 6 = 20 - 2\sqrt{2},$$

вопреки указанному в условии задачи неравенству $C_1C_2 > 20$. Следовательно, имеет место случай, изображенный на рис. 191 в) и $O_1O_2 = O_1M + O_2M = 6 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $6 + 2\sqrt{2}$.

5. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии и через d ее разность. Тогда из условий задачи имеем $a + d = 2$ и

$$(a + 2d)^2 + (a + 3d)^2 < 4. \qquad (2)$$

Подставляя в неравенство (2) значение a равное $2 - d$, имеем неравенство

$$(2 + d)^2 + (2 + 2d)^2 < 4,$$

которое можно переписать в виде

$$5d^2 + 12d + 4 < 0.$$

Решения последнего неравенства составляют промежуток $-2 < d < -\frac{2}{5}$. Так как по условию прогрессия состоит из целых чисел, то ее разность также целое число, поэтому разность прогрессии есть (-1), а тогда ее первый член равен $a = 2 - d = 3$.

Ответ: 3.

6. Пусть a, b и c соответственно — число сотен, десятков и единиц некоторого натурального числа, удовлетворяющего условию задачи. Тогда из первого условия имеем $3a = b + c$, а из второго, что число $(10b + c) - (10c + b) = 9(b - c)$ неотрицательное и делится на 81. Следовательно, $b \geqslant c$ и $b - c$ делится на 9. Итак, нужно найти трехзначные числа abc, для которых $3a = b + c$, $b \geqslant c$ и $b - c$ делится на 9.

Поскольку разность $b - c$ делится на 9, то либо $b - c$ равно 0, либо $b - c$ равно 9.

Если $b - c = 0$, то $b = c$ и $3a = 2b$. Поскольку a и b — цифры, причем a больше нуля, находим, что это возможно, если $a = 2$, $b = 3$, тогда $c = 3$, или $a = 4$, $b = 6$, тогда $c = 6$, или $a = 6$, $b = 9$, тогда $c = 9$. Получаем числа 233, 466, 699.

Если $b - c = 9$, то $b = 9$, $c = 0$, и поскольку $3a = b + c = 9$, находим еще одно число 390.

Итак, условию задачи удовлетворяют четыре числа: 233, 466, 699, 390.

Ответ: 233; 466; 699; 390.

7. Пусть $(x_0; y_0)$ — пара чисел, удовлетворяющая условию задачи. Тогда выполняются числовые неравенства

$$4^{x_0+y_0-1} + 3\cdot 4^{2y_0-1} \leqslant 2 \qquad (3)$$

и

$$x_0 + 3y_0 \geqslant 2 - \log_4 3. \qquad (4)$$

Первое неравенство, умножив на 4^{2y_0-1}, можно переписать в виде

$$4^{x_0+3y_0-2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot 4^{2y_0} - 3\cdot 4^{4y_0-2}, \qquad (5)$$

а второе, пропотенцировав по основанию 4, в виде

$$\frac{1}{3} \leqslant 4^{x_0+3y_0-2}. \qquad (6)$$

Тогда из (6) находим

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2}\cdot 4^{2y_0} - 3\cdot 4^{4y_0-2}$$

или

$$(3\cdot 4^{2y_0-1} - 1)^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $3\cdot 4^{2y_0-1} = 1$, т. е. $2y_0 = \log_4 \frac{4}{3}$ или $y_0 = \frac{1}{2}\log_4 \frac{4}{3}$. Подставляя это значение y_0 в неравенства (3) и (4), имеем

$$4^{x_0+\log_4\sqrt{\frac{4}{3}}-1} + 3\cdot 4^{\log_4\frac{4}{3}-1} \leqslant 2$$

и

$$x_0 + \frac{3}{2}\log_4 \frac{4}{3} \geqslant 2 - \log_4 3,$$

т. е.

$$x_0 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3 \qquad (7)$$

и

$$x_0 \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3. \qquad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3$. Легко проверить, что пара чисел $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3$ и $y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_4 3$ действительно удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3$, $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_4 3$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 459. 2. 10.

3. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $\frac{27\sqrt{15}}{8}$. 5. 2. 6. 153; 226; 379. 7. $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_3 2$; $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2 3$.

Вариант 3. 1. 63. 2. 28 км.

3. πk, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $2 + 2\sqrt{7}$. 5. 15.

6. 525; 921. 7. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2 3$; $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2 3$.

Вариант 4. 1. 271. 2. 20 м^3.

3. πk, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 4. $\frac{75\sqrt{7}}{4}$. 5. 3. 6. 248; 436; 624; 812. 7. $x = \frac{1}{2} - \log_3 2$; $y = 2\log_3 2$.

1985

Решение варианта 1

1. Из формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ следует, что исходное уравнение можно переписать в виде

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$ имеет корни $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Множество решений первого уравнения имеет вид $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Решения второго уравнения таковы: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2. Исходное неравенство можно переписать в виде

$$4\cdot(2^x)^2 - 7\cdot 2^x - 2 < 0. \qquad (2)$$

Квадратный трехчлен $4t^2 - 7t - 2$ имеет корни $t_1 = -\frac{1}{4}$ и $t_2 = 2$. Поэтому множество решений неравенства $4t^2 - 7t - 2 < 0$ имеет вид $-\frac{1}{4} < t < 2$, а неравенство (2) равносильно двойному неравенству

$$-\frac{1}{4} < 2^x < 2. \qquad (3)$$

Левое неравенство в (3) выполняется при любом x, так как область значений показательной функции состоит только из положительных чисел. Поэтому неравенство (3) равносильно неравенству

$$2^x < 2,$$

и, значит, множество его решений, а следовательно, и множество решений исходного неравенства имеет вид $x < 1$.

Ответ: $-\infty < x < 1$.

3. Обозначим стоимость блокнота через x копеек. Так как один карандаш стоит 3 копейки, то покупки Алеши, Бори и Васи стоят соответственно $(12 + 2x)$ копеек, $(18 + x)$ копеек и $(9 + x)$ копеек. Согласно условию числа $12 + 2x$, $18 + x$, $9 + x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Поэтому

$$\frac{18 + x}{12 + 2x} = \frac{9 + x}{18 + x}.$$

После упрощений получаем квадратное уравнение

$$x^2 - 6x - 216 = 0,$$

имеющее два корня $x_1 = -12$ и $x_2 = 18$. Так как стоимость блокнота положительна, находим, что $x = 18$ копеек.

Ответ: 18 копеек.

4. Квадратные трехчлены $x^2 + x$ и $x^2 - 3x + 2$ имеют корни соответственно $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Из них только $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ попадают на отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Чтобы избавиться от знаков абсолютной величины, разобьем отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ точками $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ на три промежутка $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, $(0; 1)$, $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ и на каждом из них будем исследовать заданную функцию отдельно.

На промежутке $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ справедливы неравенства $x^2 + x \leqslant 0$, $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, так что $|x^2 + x| = -x^2 - x$, $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ и

$$y = -x^2 - x + x^2 - 3x + 2 = -4x + 2.$$

Функция $y(x) = -4x + 2$ убывает на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, и, следовательно, ее наибольшее значение на этом отрезке равно $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$, а наименьшее — $y(0) = 2$.

На промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедливы неравенства $x^2 + x \geqslant 0$, $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, так что $|x^2 + x| = x^2 + x$, $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ и

$$y = x^2 + x + x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 2x + 2.$$

График функции $y = 2x^2 - 2x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ есть парабола, направленная вверх, а вершина ее имеет абсциссу $x = \frac{1}{2}$, принадлежащую отрезку $[0; 1]$. Поэтому наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[0; 1]$ равно $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, а наибольшее значение на этом же отрезке есть $y(0) = y(1) = 2$.

На промежутке $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$ справедливы неравенства $x^2 + x \geqslant 0$, $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$, так что $|x^2 + x| = x^2 + x$, $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$ и

$$y = x^2 + x - x^2 + 3x - 2 = 4x - 2.$$

Функция $y(x) = 4x - 2$ возрастает на отрезке $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, и, следовательно, ее наибольшее значение на этом отрезке равно $y\left(\frac{3}{2}\right) = 4$, а наименьшее — $y(1) = 2$.

Таким образом, наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ равно большему из чисел 4, 2 и 4, т. е. 4, а наименьшее значение на том же отрезке равно меньшему из чисел 2, $\frac{3}{2}$ и 2, т. е. $\frac{3}{2}$. Наибольшее значение принимается в точках $-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$, а наименьшее — в точке $\frac{1}{2}$.

Ответ: наибольшее значение равно 4, наименьшее значение равно 1,5.

5. Обозначим буквами F и G концы заданной в условии задачи хорды, O — центр окружности. Вообще говоря, возможны два случая расположения хорды FG, изображенные на рис. 192 и рис. 193.

Так как $BC = R$ и $BC = 2R\sin(\angle BAC)$, то $\sin(\angle BAC) = \frac{1}{2}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$.

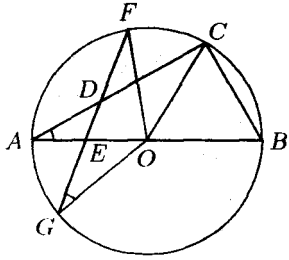


Рис. 192

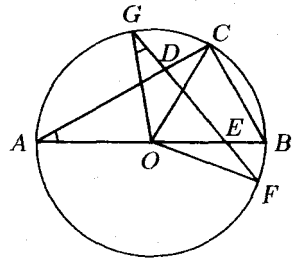


Рис. 193

Треугольники AOC и FOG равны по трем сторонам. Поэтому $\angle EGO = \angle CAO = \frac{\pi}{6}$. По условию $\angle ADE = \alpha$, поэтому $\angle AED = \pi - \frac{\pi}{6} - \alpha = \frac{5\pi}{6} - \alpha$. В обоих случаях, изображенных на рис. 192 и рис. 193, справедливо равенство $\angle GEO = \angle AED$, так что $\angle GEO = \frac{5\pi}{6} - \alpha$.

Применяя к треугольнику GEO теорему синусов, находим

$$\frac{EO}{\sin(\angle EGO)} = \frac{GO}{\sin(\angle GEO)}.$$

Отсюда, поскольку $GO = R$, $\sin(\angle EGO) = \frac{1}{2}$, $\sin(\angle GEO) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$, находим

$$EO = \frac{R}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}. \qquad (4)$$

По теореме синусов, примененной к треугольнику ADE, справедливо равенство

$$\frac{AD}{\sin(\angle AED)} = \frac{AE}{\sin(\angle ADE)}.$$

Поэтому

$$AD = AE \cdot \frac{\sin(\angle AED)}{\sin(\angle ADE)} = AE \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\alpha},$$

и для площади S треугольника ADE получаем выражение

$$S = \frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin(\angle DAE) = \frac{1}{4}AE^2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\sin\alpha}.$$

Пользуясь равенством (4), в случае, изображенном на рис. 192, имеем

$$AE = AO - EO = R - \frac{R}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)} = R\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

и

$$S = \frac{R^2}{16}\frac{\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\alpha}.$$

Если же имеет место случай, изображенный на рис. 193, то

$$AE = AO + EO = R + \frac{R}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)} = R\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+1}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

и

$$S = \frac{R^2}{16}\frac{\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+1\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\alpha}.$$

Легко проверить, что случай, изображенный на рис. 192, возможен при $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, а второй случай — при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

Ответ:

а) при $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ $S = \dfrac{R^2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1\right)^2}{16\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\alpha}$;

б) при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \frac{2\pi}{3}$ $S_1 = \dfrac{R^2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1\right)^2}{16\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\alpha}$ и $S_2 = \dfrac{R^2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+1\right)^2}{16\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\alpha}$;

в) при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $S = \frac{R^2}{3}\sqrt{3}$.

6. Найдем сначала все пары целых чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7 \qquad (5)$$

и неравенству $x < y$. Поскольку

$$-15x^2 + 11xy - 2y^2 = (3x - y)(2y - 5x)$$

и при целых x, y выражения $3x - y$, $2y - 5x$ также являются целыми числами, то каждое из решений уравнения (5) в целых числах удовлетворяет одной из систем уравнений

$$\begin{cases}3x - y = 7,\\ 2y - 5x = 1,\end{cases}\quad\begin{cases}3x - y = 1,\\ 2y - 5x = 7,\end{cases}\quad\begin{cases}3x - y = -7,\\ 2y - 5x = -1,\end{cases}\quad\begin{cases}3x - y = -1,\\ 2y - 5x = -7.\end{cases}$$

Решениями этих систем соответственно являются пары чисел $(15;38)$, $(9;26)$, $(-15;-38)$, $(-9;-26)$. Из них только пары $(15;38)$ и $(9;26)$ удовлетворяют неравенству $x < y$.

Таким образом, требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых выполняется только одно из неравенств

$$2a^2 \cdot 15 + 3a \cdot 38 < 0$$

или

$$2a^2 \cdot 9 + 3a \cdot 26 < 0.$$

После упрощения эти неравенства принимают вид

$$5a^2 + 19a < 0$$

и

$$3a^2 + 13a < 0.$$

Множество решений первого неравенства имеет вид $-\frac{19}{5} < a < 0$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-\frac{13}{3} < a < 0$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все числа a из промежутка $-\frac{13}{3} < a \leqslant -\frac{19}{5}$.

Ответ: $-\frac{13}{3} < a \leqslant -\frac{19}{5}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.
2. $-\infty < x < 1$. 3. 20 час.
4. Наибольшее значение равно 4; наименьшее значение равно $\frac{3}{2}$.
5. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}\frac{\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)}$. 6. $-\frac{5}{11} < a \leqslant -\frac{1}{3}$.

Вариант 3. 1. $2\pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$. 2. $-\infty < x < -1$.
3. 12.
4. Наибольшее значение равно 4; наименьшее значение равно $\frac{3}{2}$.
5. $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\frac{\left(\sin(120^\circ - \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sin(120^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}$. 6. $-\frac{13}{2} < a \leqslant -5$.

Вариант 4. 1. $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$.
2. $-\infty < x < -1$. 3. 1 т.

4. Наибольшее значение равно 4; наименьшее значение равно $\frac{3}{2}$.

5. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}\,\frac{\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sin\alpha\cdot\sin(135^\circ-\alpha)}$. 6. $-3<a\leqslant-\frac{11}{5}$.

1986

Решение варианта 1

1. Так как

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha=\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha}{1-\sin^2 2\alpha}$$

и

$$\sin^2 2\alpha=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=\frac{112}{121},$$

то

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha=\frac{\frac{112}{121}}{1-\frac{112}{121}}=\frac{112}{9}.$$

Ответ: $\frac{112}{9}$.

2. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получим уравнение

$$35-5x=(9-2x)^2,$$

которое можно переписать в виде

$$4x^2-31x+46=0. \qquad (1)$$

Корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (1), но не обязательно все корни уравнения (1) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) надо отобрать те из них, которые будут корнями данного уравнения.

Уравнение (1) имеет корни $x_1=2$ и $x_2=\frac{23}{4}$. Проверка показывает, что только $x_1=2$ будет корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=2$.

3. Обозначим $\lg x^2$ через y; тогда, учитывая, что $\lg x^4=2\lg x^2$, исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{6-2y}{3+2y}<2. \qquad (2)$$

Перенося правую часть этого неравенства налево и приводя затем левую часть к общему знаменателю, запишем неравенство (2) в виде

$$\frac{-6y}{3+2y}<0$$

или в виде

$$\frac{y}{y+\frac{3}{2}} > 0. \qquad (3)$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение двух промежутков $-\infty < y < -\frac{3}{2}$ и $0 < y < +\infty$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$-\infty < \lg x^2 < -\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \lg x^2 < +\infty.$$

Первое из этих неравенств равносильно двойному неравенству

$$0 < x^2 < 10^{-\frac{3}{2}}, \qquad (4)$$

в второе равносильно неравенству

$$x^2 > 1. \qquad (5)$$

Множество решений неравенства (4) есть объединение двух промежутков $0 < x < 10^{-\frac{3}{4}}$ и $-10^{-\frac{3}{4}} < x < 0$. Множество решений неравенства (5) есть объединение двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

Итак, решения исходного неравенства есть все x из промежутков $-\infty < x < -1$, $-10^{-\frac{3}{4}} < x < 0$, $0 < x < 10^{-\frac{3}{4}}$, $1 < x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x < -1$; $-10^{-\frac{3}{4}} < x < 0$; $0 < x < 10^{-\frac{3}{4}}$; $1 < x < +\infty$.

4. Обозначим буквами x, y и z количества соли в килограммах, содержащиеся в 1 кг первого, второго и третьего растворов соответственно. В 200 г первого, 100 г второго и 100 г третьего растворов содержится соответственно $0,2x$, $0,1y$ и $0,1z$ килограммов соли. Из условия следует справедливость равенства

$$0,2x + 0,1y = 0,1z. \qquad (6)$$

Так как числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y}. \qquad (7)$$

Обозначим буквой v искомое количество второго раствора в граммах. В нем содержится $\frac{v}{1000}\cdot y$ кг соли, и согласно условию должно выполняться равенство

$$\frac{v}{1000}\cdot y = 0,1z,$$

так что $v = 100\frac{z}{y}$. Обозначим отношение $\frac{z}{y}$ буквой t. Тогда из (7) следует, что

$$y = tx \quad \text{и тогда} \quad z = ty = t^2x.$$

Подставляя эти выражения в равенство (6), находим

$$0{,}2x + 0{,}1tx = 0{,}1t^2x.$$

Разделив обе части последнего равенства на x ($x \neq 0$) и умножив их на 10, получим квадратное уравнение $2 + t = t^2$. Его корни есть $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$. Поскольку $z > 0$, $y > 0$, т. е. $t > 0$, то $t = 2$. Теперь находим $v = 100t = 200$.

Ответ: 200 г.

5. Обозначим через r искомый радиус окружности, через O — ее центр, а через K, L и M соответственно — точки касания этой окружности с отрезками AB, DE и AC (рис. 194).

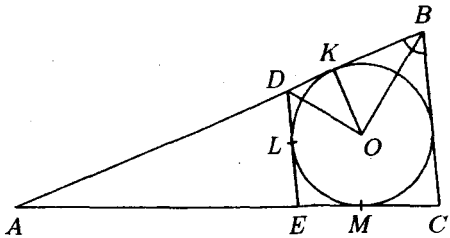


Рис. 194

Так как DK и DL — касательные к окружности, проведенные из точки D, то $DK = DL$. Аналогично, имеют место равенства $EL = EM$ и $AK = AM$. Из этих равенств получаем

$$AK + AM = AD + DK + AE + EM = \\ = AD + AE + DL + LE = 30.$$

Следовательно, $AK = AM = 15$. Из прямоугольных треугольников OKB и OKD, поскольку $DE \parallel BC$ и OB, OD — биссектрисы углов ABC и BDE соответственно, имеем

$$BK = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad DK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Так как $DE \parallel BC$, то треугольники EAD и CAB подобны с коэффициентом подобия $\frac{4}{3}$. Поэтому

$$\frac{4}{3} = \frac{AB}{AD} = \frac{AK + BK}{AK - DK} = \frac{15 + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{15 - r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

откуда находим

$$r = \frac{15}{3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{15}{3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

6. Первое решение. Если $t = x + 3y$, то $x = t - 3y$ и

$$x^2 + xy + 4y^2 = (t - 3y)^2 + (t - 3y)y + 4y^2 = 10y^2 - 5ty + t^2.$$

Задача теперь может быть переформулирована так: найти наибольшее значение параметра t, при котором неравенство

$$10y^2 - 5ty + t^2 \leqslant 3 \qquad (8)$$

имеет решения относительно y. Неравенство (8) имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант D квадратного трехчлена $10y^2 - 5ty + t^2 - 3$ неотрицателен. Имеем

$$D = 25t^2 - 4\cdot 10(t^2 - 3) = 120 - 15t^2.$$

Из неравенства $120 - 15t^2 \geqslant 0$ следует, что $t \leqslant 2\sqrt{2}$. При $t = 2\sqrt{2}$ неравенство (8) может быть переписано так: $5(\sqrt{2}y - 1)^2 \leqslant 0$, откуда следует, что оно имеет решение $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $x = t - 3y = 2\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак, наибольшее значение выражения $x + 3y$ при указанном в задаче условии равно $2\sqrt{2}$. Оно принимается при $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Второе решение. Из тождества

$$x^2 + xy + 4y^2 = \frac{3}{8}(x + 3y)^2 + \frac{5}{8}(x - y)^2$$

следует, что для любой пары чисел x, y, удовлетворяющих условию

$$x^2 + xy + 4y^2 \leqslant 3,$$

справедливо неравенство

$$\frac{3}{8}(x + 3y)^2 \leqslant 3 \qquad (9)$$

и $x + 3y \leqslant 2\sqrt{2}$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 2\sqrt{2}, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

находим пару чисел $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, удовлетворяющих неравенству (9), при которых выражение $x + 3y$ принимает свое наибольшее значение $2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. $\dfrac{203}{121}$. 2. $\dfrac{7}{4}$. 3. $-\infty < x < -10^{\frac{1}{3}}$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; $10^{\frac{1}{3}} < x < +\infty$. 4. 500 г. 5. $\dfrac{60 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$. 6. $7\sqrt{3}$.

Вариант 3. 1. $\frac{64}{225}$. 2. $\frac{17}{4}$.

3. $-\infty < x < -1$; $-10^{-\frac{2}{3}} < x < 0$; $0 < x < 10^{-\frac{2}{3}}$; $1 < x < +\infty$.

4. 600 г. 5. $\frac{10\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2+3\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$. 6. $-\sqrt{15}$.

Вариант 4. 1. 624. 2. 4.

3. $-\infty < x < -10^{\frac{1}{2}}$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; $10^{\frac{1}{2}} < x < +\infty$.

4. 750 г. 5. $\frac{10\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+3\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$. 6. $-\sqrt{13}$.

1987

Решение варианта 1

1. Обозначим через a_1 первый член прогрессии, а через q — ее знаменатель. Тогда из условия задачи имеем равенства

$$\begin{gathered} a_1(1+q+q^2+q^3+q^4) = \frac{3}{2} + a_1(1+q+q^2), \\ a_1q^4 = 4a_1q^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Из второго равенства (1) получаем (поскольку $a_1 \neq 0$), что $q^2 = 4$, откуда $q_1 = 2$ или $q_2 = -2$. Так как по условию задачи $q > 0$, то $q = 2$.

В силу первого из равенств (1) имеем $31a_1 = \frac{3}{2} + 7a_1$, откуда $a_1 = \frac{1}{16}$. Четвертый член прогрессии равен $a_1q^3 = \frac{1}{16}\cdot 2^3 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\log_2(x^2-2x-1) = \log_2\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Следствием этого уравнения является уравнение

$$x^2-2x-1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

имеющее решениями числа $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$.

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (2), но не обязательно все корни уравнения (2) будут корнями исходного уравнения. Поэтому надо отобрать те из найденных корней уравнения (2), которые будут корнями исходного уравнения.

Проверка показывает, что $x = 0$ не является корнем исходного уравнения, а $x = 4$ является.

Ответ: $x = 4$.

3. Если S м^2 — площадь класса, то $3S$ м^2 — площадь актового зала. Пусть x — число маляров, которые работали в актовом зале, тогда $(x-6)$ маляров работали в классе. Если v м^2 — производительность одного маляра (т. е. количество квадратных метров, побеленных за один час), то время, за которое был побелен класс, равно $\dfrac{S}{(x-6)v}$, а время, за которое был побелен потолок в актовом зале, равно $\dfrac{3S}{vx}$. Поскольку работа в актовом зале закончилась раньше работы в классе, то

$$\frac{3S}{vx} < \frac{S}{(x-6)v},$$

откуда, учитывая, что $v > 0$ и $S > 0$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} < \dfrac{1}{x-6}, \\ x > 0, \end{cases}$$

множество решений которой имеет вид $x < 9$.

В бригаде работало $x + (x-6) = 2x - 6$ маляров. Наибольшее возможное целое значение для x равно 9, поэтому наибольшее возможное число маляров в бригаде есть $2 \cdot 8 - 6 = 10$.

Ответ: 10.

4. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$\frac{3}{4} - \cos x = \frac{3}{4} - \cos 3x, \qquad (3)$$

являющееся следствием исходного уравнения, поэтому после нахождения корней уравнения (3) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения.

Уравнение (3) равносильно уравнению

$$\cos 3x - \cos x = 0,$$

которое, применяя формулу разности косинусов $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, можно переписать в виде

$$-2\sin 2x \sin x = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\sin^2 x \cos x = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 0,$$

решения которой есть $x_1 = 2\pi n$, $n \in Z$, $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$, и $x_3 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Подставляя значения $x_2 = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$,

и $x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, в исходное уравнение, получаем, что они являются решениями исходного уравнения, а подставляя $x_1 = 2\pi n$, $n \in Z$, находим, что они не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

5. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 195). Опустим в треугольниках ABC и ADC из вершин B и D высоты h_B и h_D. Из равенств $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot h_D$, $S_{COD} = \frac{1}{2}CO \cdot h_D$ следует, что $\frac{OC}{AO} = \frac{S_{COD}}{S_{AOD}} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ и $OC = \frac{2}{3}AO = \frac{16}{3}$. Поскольку $S_{BOC} = \frac{1}{2}OC \cdot h_B = \frac{8}{3} \cdot h_B = 20$, то $h_B = \frac{15}{2}$ и $\sin(\angle BAO) = \frac{h_B}{AB} = \frac{1}{2}$, откуда угол BAO равен либо 30°, либо 150°. Поскольку сумма углов треугольника равна 180° и угол AOB больше 31°, то угол BAO не может равняться 150° и, значит, равен 30°.

Ответ: 30°.

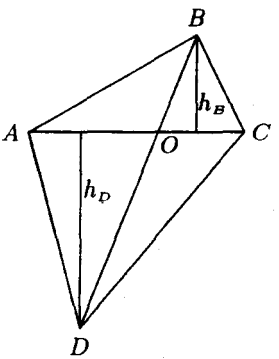


Рис. 195

6. Пусть x_0 — решение неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2.$$

Обозначим $a = \sqrt{x_0 - 1} + 1$ и $b = \sqrt[3]{x_0^2 - 1} - 1$. Тогда

$$a + b > 2$$

и

$$x_0 + 2\sqrt{x_0 - 1} + \sqrt[3]{x_0^4 - 2x_0^2 + 1} - 2\sqrt[3]{x_0^2 - 1} - 1 = a^2 + b^2 - 2.$$

Из тождества

$$a^2 + b^2 - 2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + 2(a + b - 2)$$

следует, что $a^2 + b^2 - 2 > 0$, т. е. x_0 является решением второго неравенства.

Ответы к вариантам 2–4.

Вариант 2. 1. 3. 2. $x = 1$. 3. 9.
4. $x = \pi l$, $l \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. 5. $\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 3. 1. $\frac{1}{2}$. 2. $x = 0$. 3. 2. 4. $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$. 5. 45°.

Вариант 4. 1. $\frac{2}{27}$. 2. $x = \frac{1}{2}$. 3. 11. 4. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi p$, $p \in Z$. 5. 60°.

1988

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x = 2\pi k$, $k \in Z$. Решения второго уравнения есть $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. Их объединение и дает множество решений исходного уравнения.

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. Поскольку $32^{3(x^3-8)} = 2^{15(x^3-8)}$ и $8^{19(2x-x^2)} = 2^{57(2x-x^2)}$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$2^{15(x^3-8)} = 2^{57(2x-x^2)}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$15(x^3 - 8) = 57(2x - x^2),$$

которое можно переписать в виде

$$(x-2)(15x^2 + 87x + 60) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 5x^2 + 29x + 20 = 0.$$

Решение первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = 2$, а решения второго уравнения есть $x_2 = -5$ и $x_3 = -\frac{4}{5}$. Все три числа $x_1 = 2$, $x_2 = -5$ и $x_3 = -\frac{4}{5}$ и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -5$; $x_3 = -\frac{4}{5}$.

3. Область допустимых значений неравенства состоит из всех чисел x, удовлетворяющих условию $36 - x^2 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-6 \leqslant x \leqslant 6$.

Поскольку $2x - 11 = 0$ при $x = \frac{11}{2}$, то разобьем промежуток $-6 \leqslant x \leqslant 6$ на два промежутка $-6 \leqslant x < \frac{11}{2}$ и $\frac{11}{2} \leqslant x \leqslant 6$ и рассмотрим исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Для каждого x, принадлежащего промежутку $-6 \leqslant x < \frac{11}{2}$ левая часть неравенства отрицательна, а правая неотрицательна, значит, неравенство выполняется. Следовательно, все x из промежутка $-6 \leqslant x < \frac{11}{2}$ являются решениями исходного неравенства.

Для x из промежутка $\frac{11}{2} \leqslant x \leqslant 6$ обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно на этом множестве неравенству

$$(2x - 11)^2 < 4(36 - x^2).$$

Это неравенство можно записать в виде

$$8x^2 - 44x - 23 < 0. \qquad (2)$$

Решения неравенства (2) есть все x из промежутка $\frac{11 - \sqrt{167}}{4} < x < \frac{11 + \sqrt{167}}{4}$. Поскольку $\frac{11 - \sqrt{167}}{4} < \frac{11}{2}$ и $\frac{11 + \sqrt{167}}{4} < \frac{11 + 13}{4} = 6$, то из этих x рассматриваемому промежутку $\frac{11}{2} \leqslant x \leqslant 6$ принадлежат только x из множества $\frac{11}{2} \leqslant x < \frac{11 + \sqrt{167}}{4}$. Объединяя решения, найденные на двух промежутках, получаем, что множеством решений исходного неравенства являются все x из промежутка $-6 \leqslant x < \frac{11 + \sqrt{167}}{4}$.

Ответ: $-6 \leqslant x < \frac{11 + \sqrt{167}}{4}$.

4. Обозначим через t час. время пребывания в пути первого поезда, тогда второй поезд был в пути $(t - 20)$ час.

Если S км — расстояние между городами, то до встречи первый поезд прошел расстояние $24 \cdot \frac{S}{t}$ км, а второй — $24 \cdot \frac{S}{t - 20}$ км.

Так как сумма этих расстояний равна расстоянию между городами A и B, то получаем уравнение

$$S\cdot\frac{24}{t}+S\cdot\frac{24}{t-20}=S.$$

Так как $S\neq 0$, то отсюда имеем уравнение

$$\frac{24}{t}+\frac{24}{t-20}=1.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{t^2-68t+480}{t(t-20)}=0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $t_1=60$ и $t_2=8$. По условию задачи должно выполняться неравенство $t>24$, поэтому искомое $t=60$ час. Итак, первый поезд был в пути 60 часов.

Ответ: 60 часов.

5. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 196). Площадь

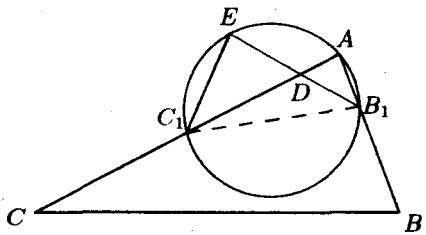


Рис. 196

треугольника B_1C_1E равна сумме площадей треугольников DB_1C_1 и DEC_1. Найдем их.

Так как S — площадь треугольника ABC — равна $\frac{1}{2}AB\times$ $\times AC\sin(\angle BAC)$, а S_1 — площадь треугольника AB_1C_1 — равна $\frac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\sin(\angle BAC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{3}\cdot\frac{AC}{2}\sin(\angle BAC)$, то $S_1=\frac{1}{6}S$. Поскольку $S=12$, то $S_1=2$. Треугольники ADB_1 и C_1DB_1 имеют общую высоту, опущенную из вершины B_1 на прямую AC_1, поэтому их площади S_2 и S_3 относятся так же, как относятся длины оснований AD и DC_1:

$$\frac{S_2}{S_3}=\frac{AD}{DC_1}=\frac{AD}{AC_1-AD}=\frac{1}{3}.$$

Поскольку $S_2+S_3=S_1=2$, то отсюда находим, что $S_2=\frac{1}{2}$, $S_3=\frac{3}{2}$. Треугольники AB_1D и C_1DE подобны, так как име-

ют по три равных угла: $\angle ADB_1 = \angle EDC_1$ как вертикальные, $\angle C_1AB_1 = \angle C_1EB_1$ и $\angle EB_1A = \angle EC_1A$ как углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же хорду. Если $S_4 = S_{EDC_1}$, то из подобия треугольников AB_1D и C_1DE следует, что

$$\frac{S_4}{S_2} = \left(\frac{DE}{AD}\right)^2 = 4$$

и $S_4 = 4S_2 = 2$. Искомая площадь треугольника B_1C_1E равна $S_3 + S_4 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

Ответ: $\frac{7}{2}$.

6. Если $a = 0$, то, например, $x = 0$ есть решение данного неравенства, т. е. при $a = 0$ неравенство имеет решения. Так как нас интересует наибольшее значение a, при котором неравенство имеет решение, то надо дальше исследовать, есть ли такие положительные a.

Преобразуем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$a\left(\sqrt{a}(x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2}\right).$$

При любом $x \neq 1$ (учитываем, что $a > 0$) это выражение не меньше, чем $2a$, поскольку выражение в скобках есть сумма двух взаимно обратных положительных величин ($y + \frac{1}{y} \geqslant 2$ при $y > 0$). При любом x правая часть данного неравенства не превосходит $\sqrt[4]{a^3}$. Очевидно, что данное в условии неравенство может иметь решения только в случае, если $2a \leqslant \sqrt[4]{a^3}$, т. е. если $a \leqslant \frac{1}{16}$.

Пусть $a = \frac{1}{16}$. Тогда левая часть данного неравенства достигает минимального значения $\frac{1}{8}$ при x, удовлетворяющем условию $\frac{1}{4}(x-1)^2 = 1$, т. е. при $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$. Правая часть неравенства при тех же значениях x достигает максимального значения $\frac{1}{8}$. Это означает, что при $a = \frac{1}{16}$ есть решения исходного неравенства. Так как при любом $a > \frac{1}{16}$ исходное неравенство не имеет решений, то $a = \frac{1}{16}$ есть искомое значение параметра a.

Ответ: $a = \frac{1}{16}$.

Ответы к варианту 2. 1. $x=\pi+2\pi n, n\in Z; x=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$. 2. $x=-2$; $x=\frac{4}{3}$; $x=3$. 3. $-9\leqslant x<\frac{34+\sqrt{116}}{5}$. 4. 12 часов. 5. $\frac{17}{3}$. 6. $b=\frac{1}{9}$.

1989

Решение варианта 1

1. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получаем неравенство

$$\frac{x^2+6x+7}{x+4}<0, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Поскольку корни квадратного уравнения $x^2+6x+7=0$ есть $x_1=-3-\sqrt{2}$ и $x_2=-3+\sqrt{2}$, то неравенство (1) перепишется в виде

$$\frac{(x-(-3-\sqrt{2}))(x-(-3+\sqrt{2}))}{x+4}<0.$$

С помощью метода интервалов (рис. 197) находим, что множе-

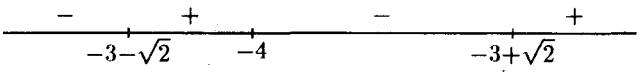


Рис. 197

ство всех решений этого неравенства, а следовательно, и исходного, состоит из двух промежутков $-\infty<x<-3-\sqrt{2}$ и $-4<x<-3+\sqrt{2}$.

Ответ: $-\infty<x<-3-\sqrt{2}$, $-4<x<-3+\sqrt{2}$.

2. Применяя формулу косинуса половинного угла $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, исходное уравнение перепишем в виде

$$\left|\frac{1+\cos x}{2}-\frac{2}{5}\right|=5\cos x+1$$

или в виде

$$|5\cos x+1|=10(5\cos x+1). \qquad (2)$$

Множество решений уравнения $10t=|t|$ содержится среди неотрицательных чисел, так что это уравнение равносильно уравнению $10t=t$ и имеет единственное решение $t=0$. Поэтому уравнение (2) равносильно уравнению

$$5\cos x+1=0,$$

т. е. уравнению

$$\cos x = -\frac{1}{5}.$$

Решения этого уравнения, а значит, и исходного, есть $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$.

3. Подставляя вместо y выражение $1 + (\log_x 0,2)^3$ в первое уравнение, получаем уравнение для нахождения x:

$$\log_x 25 + 2 + 2(\log_x 0,2)^3 = 2.$$

Так как $\log_x 25 = 2\log_x 5$ и $\log_x 0,2 = \log_x \frac{1}{5} = -\log_x 5$, то это уравнение можно переписать в виде

$$(\log_x 5)(1 - \log_x^2 5) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$\log_x 5 = 0 \quad \text{и} \quad \log_x^2 5 = 1.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, а поскольку $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$, то решение второго есть $x_1 = 5$ и $x_2 = \frac{1}{5}$. Тогда соответствующие им y есть $y_1 = 0$ и $y_2 = 2$.

Итак, исходная система имеет два решения $(5;0)$ и $\left(\frac{1}{5};2\right)$.

Ответ: $(5;0)$, $\left(\frac{1}{5};2\right)$.

4. Рассмотрим отдельно два случая: $r = 0$ (рис. 198) и $r > 0$ (рис. 199). Пусть окружность с центром в точке O_1 каса-

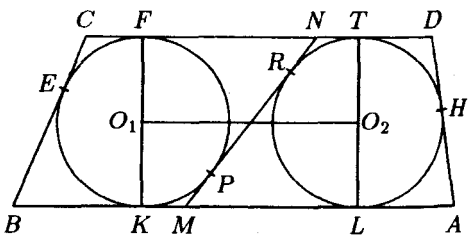


Рис. 198

ется прямой MN в точке P, прямой AB в точке K, прямой CD в точке F, прямой BC в точке E, а окружность с центром в точке O_2 касается прямой MN в точке R, прямой AB в точке L, прямой CD в точке T, прямой AD в точке H.

Если $r = 0$, то радиусы данных окружностей равны, и потому их общие касательные AB и CD параллельны, но тогда $O_1O_2 = KL = FT$.

Если $r > 0$, то возможны два случая: а) радиус окружности, касающейся стороны BC, меньше радиуса окружности, касающейся стороны AD; б) радиус окружности, касающейся стороны BC, больше радиуса окружности, касающейся стороны AD.

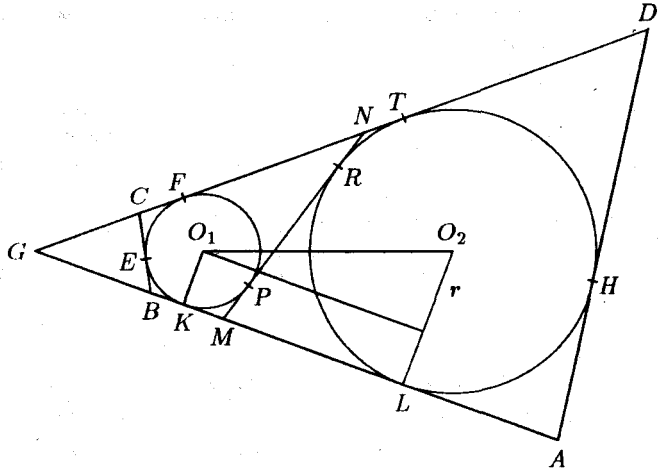


Рис. 199

В случае а) прямые CD и AB пересекаются в точке G, лежащей на продолжении отрезка AB за точку B (рис. 199). Но тогда $GT = GL$ и $GF = GK$ как касательные, проведенные к окружности из одной точки. Откуда получаем, что $FT = GT - GF = GL - GK = KL$.

Аналогично и в случае б) находим, что $FT = KL$. В случаях а) и б) ясно, что $O_1O_2 = \sqrt{KL^2 + r^2}$. Таким образом, осталось найти KL.

Опять пользуясь тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, находим

$$MR = ML,\ RN = NT,\ PN = FN,\ MP = KM.$$

Поэтому

$$MN = MR + RN = ML + NT,$$
$$MN = MP + PN = KM + FN.$$

Складывая почленно получившиеся равенства и учитывая, что

$$KM + ML = KL,\ FN + NT = FT,$$

имеем $2MN = FT + KL$. В силу доказанного выше равенства $FT = KL$ отсюда следует, что $KL = MN$.

Четырехугольник $MBCN$ описан вокруг окружности с центром O_1, поэтому $CN + BM = BC + MN$, и, значит,

$$2p = BM + BC + CN + MN = 2(BC + MN) = 2(a + MN).$$

Таким образом, $KL = MN = p - a$ и $O_1O_2 = \sqrt{(p-a)^2 + r^2}$. Ясно, что этот ответ справедлив и при $r = 0$, и при $r > 0$. Заметим еще, что длина одной стороны четырехугольника всегда меньше половины периметра, поэтому $p - a > 0$.

Ответ: $\sqrt{r^2 + (p-a)^2}$.

5. Пусть a — некоторое фиксированное значение параметра. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $3ax + a^2 \geqslant 0$, т. е. условию $a(3x + a) \geqslant 0$.

Перепишем исходное неравенство в виде

$$x + 2a > 2\sqrt{3ax + a^2}. \qquad (4)$$

Если $a = 0$, то множество решений исходного неравенства есть промежуток $0 < x < +\infty$.

При любом $a < 0$ ОДЗ исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \leqslant -\frac{a}{3}$. В этом случае исходное неравенство может иметь решения только из области $x + 2a \geqslant 0$, т. е. из области $x \geqslant -2a$. Поскольку $-\frac{a}{3} < -2a$, то ни одно x из области $x \geqslant -2a$ не принадлежит промежутку $x \leqslant -\frac{a}{3}$. Следовательно, при $a < 0$ исходное неравенство решений не имеет.

При любом $a > 0$ ОДЗ исходного неравенства имеет вид $x \geqslant -\frac{a}{3}$. Так как $2a > \frac{a}{3}$, то на этом множестве выполняется неравенство $x + 2a > x + \frac{a}{3} \geqslant 0$. Таким образом, при $a > 0$ обе части неравенства (4) неотрицательны на его ОДЗ, поэтому оно равносильно на ОДЗ неравенству

$$(x + 2a)^2 > 4(3ax + a^2),$$

т. е. неравенству

$$x(x - 8a) > 0.$$

Множество решений последнего неравенства при $a > 0$ состоит из двух промежутков $-\infty < x < 0$ и $8a < x < +\infty$. Причем в ОДЗ

попадают лишь x, удовлетворяющие неравенствам $-\frac{a}{3} \leqslant x < 0$ и $8a < x < +\infty$.

Ответ: 1. Нет решений при $a < 0$.

2. $0 < x < +\infty$ при $a = 0$.

3. $-\frac{a}{3} \leqslant x < 0$, $8a < x < +\infty$ при $a > 0$.

Ответы к варианту 2. 1. $-\infty < x < -2\sqrt{2}$; $-1 < x < -2+\sqrt{2}$.
2. $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. $(2; 6)$, $\left(\frac{1}{2}; 10\right)$.
4. $b + p$.
5. Решений нет при $a < 0$; $0 < x < +\infty$ при $a = 0$; $-\frac{4}{3}a \leqslant x < -a$, $0 < x < +\infty$ при $a > 0$.

§13. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики)

1984

Решение варианта 1

1. Обозначив 2^x через y, исходное уравнение можно переписать в виде

$$y^3 - y^2 = y$$

или в виде

$$y(y^2 - y - 1) = 0.$$

Корни квадратного трехчлена $y^2 - y - 1$ равны $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности трех уравнений

$$2^x = 0, \quad 2^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad 2^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Первое и второе уравнения этой совокупности решений не имеют, так как 0 и $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ не принадлежат множеству значений показательной функции $y = 2^x$.

Уравнение $2^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, а значит, и исходное уравнение, имеют единственное решение $x = \log_2 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x = \log_2 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Применяя тождество $\sin 3x \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + 1 = \cos 2x$$

или, поскольку $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, в виде

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Так как квадратное уравнение $2y^2 + y - 3 = 0$ имеет корни $y_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $y_2 = 1$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x = -\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos 2x = 1.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного числа α. Решения второго уравнения есть $x = \pi k$, $k \in Z$.

Значит, эти и только эти значения x являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in Z$.

3. На множестве $[-2; 1]$ справедливо равенство $|x-1| = 1-x$, и поэтому

$$y = -x^2 + 3(1-x) + 2 = -x^2 - 3x + 5.$$

На множестве $[1; 2]$ имеем $|x-1| = x-1$, и поэтому

$$y = -x^2 + 3(x-1) + 2 = -x^2 + 3x - 1.$$

Следовательно,

$$y = \begin{cases} -x^2 - 3x + 5, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 + 3x - 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции y на отрезке $[-2; 2]$, достаточно вычислить значения функции в концах отрезка, а также в критических точках, принадлежащих интервалу $(-2; 2)$. Среди полученных чисел надо выбрать наибольшее и наименьшее. К критическим точкам в данном случае следует отнести точку $x_1 = 1$, а также корни уравнения $y' = 0$, принадлежащие интервалам $(-2; 1)$, $(1; 2)$. Имеем

$$y'(x) = \begin{cases} -2x - 3, & \text{если } -2 < x < 1, \\ -2x + 3, & \text{если } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Решая уравнения $-2x - 3 = 0$ и $-2x + 3 = 0$, находим два корня $x_2 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_3 = \dfrac{3}{2}$, лежащие на интервалах $(-2; 1)$ и $(1; 2)$ соответственно.

Следовательно, к множеству критических точек относятся $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{3}{2}$, $x_3 = \dfrac{3}{2}$. Имеем $y(-2) = 7$, $y\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{29}{4}$, $y(1) = 1$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$, $y(2) = 1$. Таким образом, наибольшее значение заданной функции на отрезке $[-2; 2]$ равно $\dfrac{29}{4}$, а наименьшее равно 1.

Ответ: наибольшее значение равно $7\dfrac{1}{4}$, а наименьшее значение равно 1.

4. Обозначим буквой α величину угла BAC. Применяя теорему косинусов к треугольникам ABC и AMN (рис. 200) соответственно, имеем

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\alpha = 13 - 12\cos\alpha,$$
$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM\cdot AN\cos\alpha = 6,25 - 6\cos\alpha.$$

Так как $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$ и $\dfrac{BC^2}{MN^2} = \dfrac{13 - 12\cos\alpha}{6,25 - 6\cos\alpha}$, то для нахождения $\cos\alpha$ имеем уравнение

$$\frac{13 - 12\cos\alpha}{6,25 - 6\cos\alpha} = \left(\frac{6}{\sqrt{17}}\right)^2,$$

откуда $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

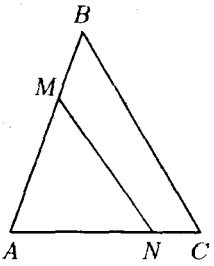


Рис. 200

Так как $\angle BAC$ есть угол треугольника, то $0 < \alpha < \pi$. Поэтому

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

и

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin(\angle BAC) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$ см^2.

5. Зафиксируем некоторое значение параметра a, удовлетворяющее условию задачи, и пусть $(x_0; y_0)$ есть единственное решение данной системы неравенств при этом значении параметра a. В силу того, что x и y входят симметричным образом в эту систему, имеем, что $(y_0; x_0)$ также является ее решением. Так как решение должно быть единственным, то $x_0 = y_0$, и при этом число x_0 удовлетворяет неравенству

$$x_0^2 - x_0 + 2a \leqslant 0.$$

Это неравенство должно иметь единственное решение, что будет тогда, когда дискриминант этого квадратного трехчлена равен нулю, т. е. если $1 - 8a = 0$ или $a = \dfrac{1}{8}$. Итак, если a удовлетворяет условию задачи, то $a = \dfrac{1}{8}$. Теперь докажем, что при этом значении a данная система действительно имеет единственное решение.

При $a = \frac{1}{8}$ данную в условии задачи систему неравенств можно записать в виде

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + \frac{1}{4}, \\ x \geqslant y^2 + \frac{1}{4}. \end{cases} \qquad (2)$$

Если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет этой системе неравенств, то она удовлетворяет и неравенству, полученному при сложении этих неравенств. Складывая эти неравенства, имеем неравенство

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется только для $x = y = \frac{1}{2}$, т. е. оно имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Значит, и система неравенств (2) имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, $a = \frac{1}{8}$ и только оно удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = \frac{1}{8}$.

Ответы к варианту 2. 1. $\log_3 \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$.
2. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. 3. Наибольшее значение равно (-1), наименьшее значение равно $\left(-13\frac{1}{4}\right)$. 4. $PQ = \sqrt{10}$ см.
5. $b = -\frac{1}{4}$.

1985

Решение варианта 1

1. Переписав исходное уравнение в виде

$$\sin x(\sqrt{3} - 2\sin x) = 0,$$

получаем, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, исходное уравнение имеет три серии решений $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$. Из первой

серии промежутку $-5 < x < -3$ принадлежит лишь одно число $(-\pi)$. Из третьей серии этому промежутку принадлежит число $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$. Вторая серия таких чисел не содержит, так как неравенства $-5 < \frac{\pi}{3} + 2\pi m < -3$ не выполняются ни для одного целого значения m.

Ответ: $-\pi$; $-\frac{4\pi}{3}$.

2. Обозначим через x, y, z и u количества рыб, пойманных соответственно Колей, Петей, Мишей и Ваней. Из условия, что числа x, y и z в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию, имеем

$$y^2 = xz. \tag{1}$$

Далее из условия задачи следует, что числа

$$x - 2,\ y,\ z \text{ и } u - 12 \tag{2}$$

образуют арифметическую прогрессию.

Так как Миша поймал на 18 рыб меньше Васи, то $u = z + 18$, и разность арифметической прогрессии (2) равна

$$(u - 12) - z = (z + 18 - 12) - z = 6.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} y = x - 2 + 6, \\ z = y + 6. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $y = z - 6$ и $x = y - 4 = z - 10$. Подставляя найденные выражения x и y через z в равенство (1), получаем уравнение

$$(z - 6)^2 = (z - 10)z.$$

Его единственный корень равен 18. Итак, Миша поймал 18 рыб.

Ответ: 18.

3. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x+1} - x > \frac{1}{4}. \tag{3}$$

ОДЗ неравенства (3) состоит из всех чисел x, таких, что $x \geqslant -1$.

Перепишем неравенство (3) в виде

$$\sqrt{x+1} > x + \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Для x из множества $-1 \leqslant x < -\frac{1}{4}$ левая часть неравенства (4) неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому неравенство (4) выполняется и все x из множества $-1 \leqslant x < -\frac{1}{4}$ являются его решениями.

На множестве $x \geqslant -\frac{1}{4}$ обе части неравенства (4) неотрицательны и оно равносильно неравенству

$$x + 1 > x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16},$$

которое можно переписать в виде

$$16x^2 - 8x - 15 < 0.$$

Множество решений этого неравенства имеет вид $-\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$. Из этих x множеству $x \geqslant -\frac{1}{4}$ принадлежат только x, удовлетворяющие условию $-\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{5}{4}$.

Следовательно, искомое множество решений исходного неравенства является объединением промежутков $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$, т. е. имеет вид $-1 \leqslant x < \frac{5}{4}$.

Ответ: $-1 \leqslant x < \frac{5}{4}$.

4. Пусть ABC (рис. 201) — данный в условии задачи треугольник. Так как треугольники ABC и AQC имеют одинаковую высоту, проведенную из вершины A, то их площади относятся как длины оснований BC и QC, т. е.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AQC}} = \frac{BC}{QC} = \frac{6}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{AQC} = \frac{5}{6}S_{ABC} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC = \frac{5}{4}AC.$$

Учитывая, что M — середина отрезка AC, заключаем, что

$$S_{AQC} = \frac{5}{2}\,CM. \qquad (5)$$

Из прямоугольных треугольников BMD и BCD с гипотенузами BM и BC находим

$$MD = \sqrt{BM^2 - BD^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$
$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку $4 < 3\sqrt{3}$, заключаем, что точки M и D лежат по одну сторону от точки C, т. е. случай, изображенный на рис. 202 невозможен. Если точка D лежит вне отрезка CM (рис. 203), то $CM = CD - MD = 3\sqrt{3} - 4$, и из (5) находим

$$S_{AQC} = \frac{5}{2}(3\sqrt{3} - 4) < 3,$$

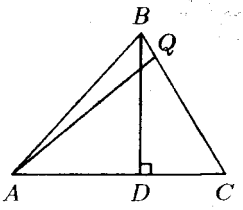


Рис. 201

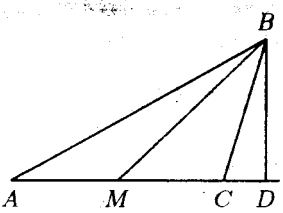


Рис. 202

что противоречит условию.

Следовательно, точка D лежит на отрезке CM, т. е. имеет место случай, изображенный на рис. 204. Тогда $CM = CD + MD = 3\sqrt{3} + 4$ и

$$S_{AQC} = \frac{5}{2}CM = \frac{5}{2}(3\sqrt{3} + 4) > 3.$$

Ответ: $\frac{5}{2}(3\sqrt{3} + 4)$.

5. Зафиксируем значение параметра a, при котором заданное уравнение имеет решение x_0. Тогда справедливо равенство

$$2\sqrt{7} + 3\cos a = 4\cos x_0 \sin a + 2\sin x_0 \cos a.$$

Возводя обе его части в квадрат, получим, что

$$\begin{aligned}(2\sqrt{7} + 3\cos a)^2 &= \\ &= 16\cos^2 x_0 \sin^2 a + 16\sin a \cos a \cdot \sin x_0 \cos x_0 + 4\sin^2 x_0 \cos^2 a = \\ &= 16\sin^2 a + 4\cos^2 a - (4\sin a \sin x_0 - 2\cos a \cos x_0)^2 \leqslant \\ &\leqslant 16\sin^2 a + 4\cos^2 a,\end{aligned}$$

т. е. получим неравенство

$$28 + 12\sqrt{7}\cos a + 9\cos^2 a \leqslant 16\sin^2 a + 4\cos^2 a. \qquad (6)$$

Пользуясь равенством $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, из (6) находим, что

$$12 + 12\sqrt{7}\cos a + 21\cos^2 a \leqslant 0,$$

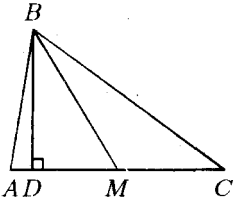


Рис. 203

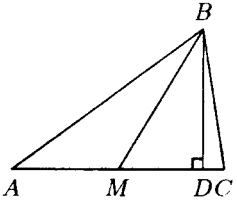


Рис. 204

т. е.

$$3(2+\sqrt{7}\cos a)^2 \leqslant 0,$$

откуда $\cos a = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Отсюда следует, что если $\cos a \neq -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, то исходное уравнение решений не имеет. Равенство $\cos a = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ возможно, если

$$a = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) + 2\pi n,\ n \in Z \tag{7}$$

или

$$a = -\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right) + 2\pi n,\ n \in Z. \tag{8}$$

В случае (7) имеем $\sin a > 0$ и

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

и исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

В случае (8) справедливо неравенство $\sin a < 0$, так что

$$\sin a = -\sqrt{1-\cos^2 a} = -\sqrt{1-\frac{4}{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

и исходное уравнение принимает вид

$$-\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$$

или

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Отсюда находим

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ:

если $a = \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$, то $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

если $a = -\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$, то $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

при остальных значениях a решений нет.

Ответы к варианту 2. 1. $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$. 2. 6. 3. $1 \leqslant x < 2$. 4. $\frac{36}{13}(5\sqrt{2}+6)$. 5. Если $b = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; если $b = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; при других b решений нет.

1986

Решение варианта 1

1. Приведя выражение в левой части исходного неравенства к общему знаменателю, перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} > 0. \qquad (1)$$

Так как $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$, то неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Множество ее решений, а значит, и множество решений исходного неравенства, состоит из двух промежутков $-1 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Ответ: $-1 < x < 1$; $1 < x < +\infty$.

2. Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то исходное уравнение перепишем в виде

$$\cos x(\cos x - 1) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 1.$$

Первое уравнение имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Второе уравнение имеет решения $x = 2\pi m$, $m \in Z$. Следовательно, множество решений исходного уравнения состоит из чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, и $x = 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $x = 2\pi m$, $m \in Z$.

3. Поскольку объем цилиндра равен $10^2 \cdot \pi \cdot h$, а объем шара равен $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$, то объем удаляемой части равен $100\pi h - \frac{\pi h^3}{6}$, и задача свелась к нахождению такого значения h из промежутка $0 \leqslant h \leqslant 20$, при котором функция $f(h) = 100\pi h - \frac{\pi h^3}{6}$ принимает максимальное значение.

Наибольшее значение функции $f(h)$ содержится среди чисел $f(0)$, $f(20)$, а также среди корней уравнения $f'(h) = 0$, принадлежащих промежутку $(0; 20)$. Поскольку $f'(h) = 100\pi - \frac{\pi h^2}{2}$, то уравнение $f'(h) = 0$ имеет единственный корень $h = 10\sqrt{2}$, удовлетворяющий неравенствам $0 < h < 20$.

Наибольшее из чисел $f(0) = 0$, $f(20) = \frac{2000\pi}{3}$ и $f(10\sqrt{2}) = \frac{2000}{3}\pi\sqrt{2}$ равно $\frac{2000}{3}\pi\sqrt{2}$. Следовательно, при $h = 10\sqrt{2}$ объем удаляемой части заготовки максимален.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

4. Заданная трапеция $ABCD$ изображена на рис. 205. Согласно условию $OC = CB = OB$.

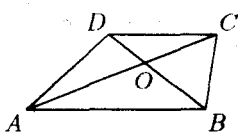


Рис. 205

Из подобия треугольников DOC и AOB имеем $\frac{AB}{OB} = \frac{DC}{DO}$, откуда $DO = \frac{OB \cdot DC}{AB} = \frac{3}{5}OB$ и тогда $DB = DO + OB = \frac{8}{5}OB$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику DBC, имеем

$$DC^2 = DB^2 + CB^2 - 2DB \cdot CB \cos(\angle DBC),$$

т. е.

$$9 = \left(\frac{8}{5}OB\right)^2 + OB^2 - 2\left(\frac{8}{5}OB \cdot OB\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Из этого уравнения находим $OB = \frac{15}{7}$.

Ответ: $\frac{15}{7}$.

5. Предположим, что было проведено в любом порядке k операций первого вида, l операций второго вида, p операций третьего вида и r операций четвертого вида. Тогда в результате в первом и втором ящиках окажется соответственно $15 + 2k + l - p - 2r$ и $16 + k - 2l + 2p - r$ яблок.

Допустим, что выполняются равенства

$$\begin{cases} 15 + 2k + l - p - 2r = 50, \\ 16 + k - 2l + 2p - r = 25. \end{cases} \qquad (2)$$

Умножая первое из них на 2 и складывая со вторым, получим равенство

$$46 + 5(k - r) = 125$$

или

$$5(k-r)=79.$$

Поскольку k и r — целые числа и 79 не делится на 5, приходим к заключению, что равенства (2) при целых k, l, p и r невозможны, т. е. ответ на вопрос задачи отрицательный.

Ответ: нет.

Ответы к варианту 2. 1. $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 1$. 2. $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. 3. $\frac{6}{\sqrt{3}}$. 4. $\frac{24}{7}$. 5. Нет.

1987

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и основное тригонометрическое тождество, исходное уравнение можно переписать в виде

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Так как квадратное уравнение $5z^2 + 4z - 3 = 0$ имеет корни $z_1 = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$ и $z_2 = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{-2-\sqrt{19}}{5} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $\frac{-2-\sqrt{19}}{5} < -1$ и не входит в область значений функции $y = \cos x$. Поскольку $0 < \frac{-2+\sqrt{19}}{5} < 1$, то второе уравнение совокупности имеет решения $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi m$, $m \in Z$. Все эти значения x и являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi m$, $m \in Z$.

2. Следствием исходного уравнения является уравнение

$$2x^2 - 8x - 2 = 2(5 - x^2). \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Проверка показывает, что исходному уравнению удовлетворяет лишь $x_1 = -1$.

Ответ: $x = -1$.

3. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех значений x, удовлетворяющих условию

$2x^2 + 15x - 17 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -\frac{17}{2}$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Для любого x из промежутка $-\infty < x \leqslant -\frac{17}{2}$ левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Следовательно, любое x из промежутка $-\infty < x \leqslant -\frac{17}{2}$ является решением исходного неравенства.

Для любого x из промежутка $1 \leqslant x < +\infty$ обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому исходное неравенство на промежутке $1 \leqslant x < +\infty$ равносильно неравенству

$$2x^2 + 15x - 17 > (x+3)^2$$

которое можно переписать в виде

$$x^2 + 9x - 26 > 0. \qquad (3)$$

Решениями неравенства (3) являются все значения x из промежутков $-\infty < x < \frac{-9-\sqrt{185}}{2}$ и $\frac{-9+\sqrt{185}}{2} < x < +\infty$. Поскольку $\frac{-9-\sqrt{185}}{2} < 1$ и $\frac{-9+\sqrt{185}}{2} > 1$, то из полученных решений неравенства (3) в промежуток $1 \leqslant x < +\infty$ попадают лишь все x из промежутка $\frac{-9+\sqrt{185}}{2} < x < +\infty$. Следовательно, любое x из этого промежутка является решением исходного неравенства. Объединяя найденные выше решения, получим, что решениями исходного неравенства являются все x из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -\frac{17}{2}$ и $\frac{-9+\sqrt{185}}{2} < x < +\infty$.

Ответ: $-\infty < x \leqslant -\frac{17}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{185}}{2} < x < +\infty$.

4. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 206). Проведем через точки O и C прямую, и пусть K — точка пересечения этой прямой со стороной AB треугольника ABC. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке и этой точкой делятся в отношении $1:2$, то KC — медиана треугольника ABC, и, поскольку $AM = BE = 3$, то $OE = OM = 1$ и $OA = OB = 2$. Отсюда следует равенство треугольников KBO и KAO (по трем сторонам). Таким образом, $\angle AKC = \angle BKC$, а в силу того, что вместе они составляют раз-

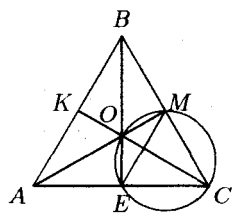


Рис. 206

вернутый угол, заключаем, что прямые AB и KC перпендикулярны. По условию, ME — средняя линия треугольника ABC. Значит, $ME \parallel AB$, и из доказанного ранее теперь следует, что $ME \perp OC$.

Из равенств $OE = OM = 1$ заключаем, что $\angle OME = \angle OCM$ (эти вписанные углы опираются на равные хорды) и $\angle OMC = \angle OME + \angle EMC = \angle OCM + \angle EMC = \frac{\pi}{2}$. Последнее равенство следует из того, что $\angle OCM$ и $\angle EMC$ есть острые углы прямоугольного треугольника ($ME \perp OC$). Итак, $AM \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BE \perp AC$. Прямоугольные треугольники ABM и ACM равны по двум катетам, а потому имеют равные гипотенузы: $AB = AC$. Аналогично доказывается, что $AB = BC$. Итак, треугольник ABC равносторонний, $\angle ABC = 60^\circ$ и $AB = \dfrac{AM}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$ см.

Ответ: $2\sqrt{3}$ см.

5. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > -6$, $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq 0$. Таким образом, ОДЗ состоит из трех промежутков $-6 < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x < 0$, $0 < x < +\infty$.

Рассмотрим исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

а). Пусть $-6 < x < -\frac{2}{3}$. Учитывая, что x отрицательно, получаем, что на этом интервале исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(x+6) > \frac{6x-2}{3x+2}. \qquad (4)$$

Поскольку на этом интервале справедливы неравенства

$$\log_3(x+6) < \log_3\left(-\frac{2}{3}+6\right) = \log_3\frac{16}{3} < 2,$$
$$\frac{6x-2}{3x+2} = 2 - \frac{6}{3x+2} > 2,$$

то неравенство (4), а вместе и ним и исходное неравенство, не имеет решений на интервале $-6 < x < -\frac{2}{3}$.

б). Пусть $-\frac{2}{3} < x < 0$. Поскольку на этом интервале

$$1 + \log_3(x+6) > 1 + \log_3\left(-\frac{2}{3}+6\right) = 1 + \log_3\frac{16}{3} > 0,$$

то правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время, для любого x из рассматриваемого интервала имеем $\frac{9}{3x+2} > 0$. Значит, все x из интервала $-\frac{2}{3} < x < 0$ являются решениями исходного неравенства.

в). Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(x+6) < \frac{6x-2}{3x+2}. \qquad (5)$$

На множестве $x > 0$ справедливы неравенства

$$\log_3(x+6) > 1, \quad \frac{6x-2}{3x+2} = 2 - \frac{6}{3x+2} < 2.$$

Отсюда заключаем, что неравенство (5) не имеет решений для $x \geqslant 3$, поскольку для этих x имеем $\log_3(x+6) \geqslant 2$, а $\frac{6x-2}{3x+2} < 2$. Неравенство (5) не имеет решений на множестве $x > 0$ и для тех x, где $\frac{6x-2}{3x+2} \leqslant 1$, т. е. для x из промежутка $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$.

Таким образом, остается рассмотреть x, принадлежащие промежутку $\frac{4}{3} < x < 2$. Для x их этого интервала имеем

$$\log_3(x+6) > \log_3\left(\frac{4}{3}+6\right) = \log_3\frac{22}{3} > \log_3 7,$$
$$\frac{6x-2}{3x+2} = 2 - \frac{6}{3x+2} < 2 - \frac{6}{8} = \frac{5}{4}.$$

Покажем теперь, что справедливо неравенство $\log_3 7 > \frac{5}{4}$. В самом деле, поскольку $7^4 > 3^5$, то $7 > 3^{\frac{5}{4}}$ и $\log_3 7 > \frac{5}{4}$. Итак, на интервале $\frac{4}{3} < x < 2$ неравенство (5) не имеет решений. Следовательно, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-\frac{2}{3} < x < 0$.

Ответ: $-\frac{2}{3} < x < 0$.

1988

Решение варианта 1

1. Используя свойства логарифмов, имеем

$$\log_3 24 = \log_3(3\cdot 8) = 1 + \log_3 8,$$
$$\log_3 216 = \log_3(3^3\cdot 8) = 3 + \log_3 8,$$
$$\log_{72} 3 = \frac{1}{\log_3 72} = \frac{1}{2 + \log_3 8},$$
$$\log_8 3 = \frac{1}{\log_3 8}.$$

Обозначив для краткости $\log_3 8$ буквой z, получаем, что данное в условии задачи выражение равно

$$(1+z)(2+z) - z(3+z) = z^2 + 3z + 2 - z^2 - 3z = 2.$$

Ответ: 2.

2. Подставляя $4-2y$ вместо x в первое уравнение системы, получаем уравнение

$$3|5-2y| + 2|y-2| = 20. \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения надо освободиться от знаков абсолютной величины. Для этого рассмотрим три случая: а) $-\infty < y \leqslant 2$, б) $2 < y \leqslant \frac{5}{2}$, в) $\frac{5}{2} < y < +\infty$.

а). Пусть $-\infty < y \leqslant 2$. Тогда $|5-2y| = 5-2y$, $|y-2| = -(y-2)$, и уравнение (1) перепишется в виде

$$3(5-2y) - 2(y-2) = 20. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет единственный корень $y = -\frac{1}{8}$. Это значение y удовлетворяет условию $-\infty < y \leqslant 2$. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $y = -\frac{1}{8}$ на промежутке $-\infty < y \leqslant 2$.

б). Пусть $2 < y \leqslant \frac{5}{2}$. Тогда $|5-2y| = 5-2y$, $|y-2| = y-2$, и уравнение (1) перепишется в виде

$$3(5-2y) + 2(y-2) = 20. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет единственный корень $y = -\frac{9}{4}$. Это значение y не удовлетворяет условию $2 < y \leqslant \frac{5}{2}$. Следовательно, уравнение (1) не имеет корней на промежутке $2 < y \leqslant \frac{5}{2}$.

в). Пусть $\frac{5}{2} < y < +\infty$. Тогда $|5-2y| = -(5-2y)$, $|y-2| = y-2$, и уравнение (1) перепишется в виде

$$-3(5-2y) + 2(y-2) = 20. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет единственный корень $y = \frac{39}{8}$. Это значение y удовлетворяет условию $\frac{5}{2} < y < +\infty$ и, значит, является корнем уравнения (1) на промежутке $\frac{5}{2} < y < +\infty$.

Итак, уравнение (1) имеет два решения $y_1 = -\frac{1}{8}$ и $y_2 = \frac{39}{8}$. Соответствующие им значения x есть $x_1 = \frac{17}{4}$ и $x_2 = -\frac{23}{4}$. Следовательно, исходная система имеет две пары решений $\left(\frac{17}{4}; -\frac{1}{8}\right)$ и $\left(-\frac{23}{4}; \frac{39}{8}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{17}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{23}{4}; \frac{39}{8}\right)$.

3. Применяя формулы синуса и косинуса двойного угла

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x, \quad 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x,$$

исходное уравнение перепишем в виде

$$\cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos 2x = 0 \quad \text{и} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

Решения первого из этих уравнений есть $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, а решения второго есть $x = -\frac{\pi}{12} + \pi m$, $m \in Z$, и $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi l$, $l \in Z$. Все эти x являются решениями исходного уравнения.

Теперь надо выбрать те из них, которые удовлетворяют условию $|x| < 1$. Из серии решений $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, этому условию удовлетворяют только $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = -\frac{\pi}{4}$. Соответствующие k равны 0 и -1. Для значений $k \geqslant 1$ имеем $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} > \frac{3\pi}{4} > 1$, а для значений $k \leqslant -2$ имеем $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} < -1$. Следовательно, для этих k соответствующие x не удовлетворяют условию $|x| < 1$. Из серии решений $x = -\frac{\pi}{12} + \pi m$, $m \in Z$, условию $|x| < 1$ удовлетворяет только $x_3 = -\frac{\pi}{12}$, поскольку при $m \geqslant 1$ имеем $-\frac{\pi}{12} + \pi m \geqslant -\frac{\pi}{12} + \pi + \frac{11\pi}{12} > 1$, а для значений $m \leqslant -1$ имеем $-\frac{\pi}{12} + \pi m \leqslant -\pi < -1$. Из серии решений $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi l$,

$l \in Z$, не найдется ни одного x, удовлетворяющего условию $|x| < 1$, так как при $l \leqslant 0$ имеем $-\frac{5\pi}{12} + \pi l \leqslant -\frac{5\pi}{12} < -1$, а при $l \geqslant 1$ имеем $-\frac{5\pi}{12} + \pi l \geqslant \frac{7\pi}{12} > 1$.

Итак, условию задачи удовлетворяют только три значения x: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = -\frac{\pi}{12}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4}$; $x = -\frac{\pi}{12}$; $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Обозначим через P и G соответственно точки касания данной окружности со сторонами AB и BC трапеции $ABCD$ (рис. 207). По теореме о касательной и секущей, проведенной из некоторой точки (в данном случае, из точек C и A), имеем $CG = \sqrt{CD \cdot CN}$ и $AP = \sqrt{AM \cdot AD}$. Поскольку $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}$ и $AD = AM + MD = 6$, то $AM = \frac{3}{2}$ и $AP = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 6} = 3$. Поскольку $\frac{CN}{DN} = \frac{4}{3}$ и $AB = CD = CN + ND = 7$, то $CN = 4$ и $CG = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$. Поскольку отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки равны, то $BG = BP$. Так как $BP = AB - AP = 7 - 3 = 4$, то $BG = BP = 4$ и $BC = BG + CG = 4 + 2\sqrt{7}$.

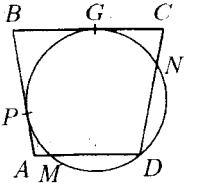


Рис. 207

Ответ: $4 + 2\sqrt{7}$.

5. Обозначим через v_1 и v_2 соответственно производительности, т. е. количество автомобилей, производившихся в один час, первой и второй бригады соответственно. Обозначим также количество автомобилей, произведенных второй бригадой на первом этапе, буквой k. Тогда первая бригада произвела на первом этапе работы $k + 2$ автомобиля. Отсюда следует, что время работы первой и второй бригад на первом этапе составило $\frac{k+2}{v_1}$ и $\frac{k}{v_2}$ часов соответственно. Согласно условию, имеем равенство

$$\frac{k+2}{v_1} = \frac{k}{v_2}$$

или

$$\frac{k+2}{k} = \frac{v_1}{v_2}.$$

На втором этапе производительности бригад составили v_1 и $1,1v_2$, а произвели они $n-2$ и n автомобилей соответственно. Как и выше, отсюда получаем соотношение

$$\frac{n-2}{n} = \frac{v_1}{1,1v_2}.$$

Следовательно,

$$1,1\cdot\frac{n-2}{n} = \frac{k+2}{k}$$

или

$$n = \frac{22k}{k-20}.$$

Согласно условию числа n и k должны быть положительными. Из последнего равенства теперь получаем, что $k > 20$ и $n = 22 + \dfrac{440}{k-20} > 22$. Отсюда следует, что наименьшее целое возможное значение n есть 23, и принимается оно при $k = 460$.

Ответ: 23.

Ответы к варианту 2. 1. 2. 2. $\left(\frac{3}{2};0\right)$, $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$. 3. $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$. 4. 10. 5. 390 минут.

1989

Решение варианта 1

1. Применяя формулу косинуса двойного угла

$$\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

и формулу приведения

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку квадратное уравнение $4z^2 - z - 3 = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{3}{4}$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Решения первого из этих уравнений есть $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Решения второго уравнения совокупности (2) есть

$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi}{6}+\pi m$, $m\in Z$. Объединяя решения уравнений совокупности (2), получаем все решения исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi}{6}+\pi m$, $m\in Z$.

2. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $2x^2+x\geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть объединение двух промежутков $-\infty<x\leqslant-\frac{1}{2}$ и $0\leqslant x<+\infty$. Поскольку при $x=-\frac{1}{2}$ имеем $2x^2+x=0$ и $1+2x=0$, то $x=-\frac{1}{2}$ не есть решение исходного неравенства.

Для любого x из промежутка $-\infty<x<-\frac{1}{2}$ левая часть исходного неравенства положительна, а правая отрицательна, поэтому все эти x являются решениями исходного неравенства.

Для любого $x\geqslant 0$ обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно на множестве $x\geqslant 0$ неравенству

$$2x^2+x>(1+2x)^2. \tag{3}$$

Перепишем неравенство (3) в виде

$$2x^2+3x+1<0. \tag{4}$$

Множество решений неравенства (4) есть промежуток $-\frac{1}{2}<x<-1$. Ни одно из этих x не попадает в рассматриваемую область $x\geqslant 0$. Следовательно, в области $x\geqslant 0$ исходное неравенство не имеет решений.

Итак, решениями исходного неравенства являются все x из промежутка $-\infty<x<-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\infty<x<-\frac{1}{2}$.

3. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих системе условий $2x+2>0$, $2x+2\neq 1$, $2x^2-8x+6>0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков $-1<x<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<x<1$, $3<x<+\infty$.

На ОДЗ уравнение равносильно уравнению

$$2x^2-8x+6=(2x+1)^2,$$

т. е. уравнению

$$x^2+8x-1=0. \tag{5}$$

Решения уравнения (5) есть $x_1 = -4 + \sqrt{17}$ и $x_2 = -4 - \sqrt{17}$. Очевидно, что $x_2 < -1$ и $0 < x_1 < 1$. Следовательно, только x_1 входит в ОДЗ исходного уравнения. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень x_1.

Ответ: $x = \sqrt{17} - 4$.

4. Пусть O_1 — центр окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, r — ее радиус, L — точка касания двух окружностей с центрами в точках O и O_1 (рис. 208). Тогда касательная, проведенная в точке L к окружности с центром в точке O, совпадает с касательной, проведенной в той же точке L к окружности в центром O_1. Поэтому радиусы OL и O_1L будут к ней перпендикулярны, а это означает, что точки O, O_1 и L лежат на одной прямой. Поэтому $OO_1 = OL - O_1L = 2 - r$.

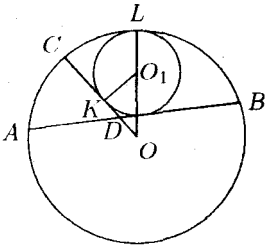


Рис. 208

Из точки O_1 опустим перпендикуляр на прямую OC, и пусть его основанием будет точка K. Центр O_1 лежит на биссектрисе угла ADC, поэтому угол O_1DC равен $\frac{\pi}{3}$. Тогда $DK = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $OK = OD + DK = \sqrt{3} + \frac{r}{\sqrt{3}}$, и из прямоугольного треугольника OO_1K имеем

$$(2-r)^2 = r^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Это уравнение можно переписать в виде $r^2 + 18r - 3 = 0$. Среди его корней $r_{1,2} = -9 \pm 2\sqrt{21}$ имеется только один положительный. Итак, $r = -9 + 2\sqrt{21}$.

Ответ: $-9 + 2\sqrt{21}$.

5. Пусть a — значение параметра, отвечающее условию задачи. Из второго равенства следует, что $z = \frac{a - x - 2y}{3}$, так что исходная система уравнений относительно x, y, z равносильна системе

$$\begin{cases} z = \dfrac{a - x - 2y}{3}, \\ 3x^2 - 2x + 12y^2 - y - a = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Эта система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $3x^2 - 2x + 12y^2 - y - a = 0$ имеет единственное решение. Это уравнение можно переписать в виде

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 12\left(y - \frac{1}{24}\right)^2 = a + \frac{17}{48},$$

откуда следует, что $a + \frac{17}{48} \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant -\frac{17}{48}$.

Если $a > -\frac{17}{48}$, то второму уравнению системы (6) будут удовлетворять числа $y = \frac{1}{24}$, $x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3}\left(a + \frac{17}{48}\right)}$, и, значит, оно будет иметь более одного решения.

Если же $a = -\frac{17}{48}$, то второе уравнение системы (6) имеет единственное решение $x_0 = \frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{1}{24}$. Тогда из первого уравнения системы (6) находим $z_0 = -\frac{37}{144}$.

Ответ: $-\frac{17}{48}$.

Дополнение

Образцы вариантов письменных работ, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова в 1992–1994 гг

§1. Механико-математический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$7\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1.$$

2. Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, причем $\angle SAD=50^\circ$, $\angle PQS=70^\circ$, $\angle RQS=60^\circ$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обосновать.

3. Даны числа p и q такие, что $p=\log_z y$, $q=\log_x y$. Найти $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3}\sqrt{xyz}$.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

5. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB=27$ и $BC=18$. Найти расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

6. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{(x-1)}17}\geqslant\frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291}17}.$$

2. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$9^x+(b^2+6)3^x-b^2+16=0$$

не имеет решения.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(\sin y-\cos x+1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}^2\left(y+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=0,\\(\cos x+\sin y)(2+\sin 2y+\cos y)=0.\end{cases}$$

4. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найти площадь S треугольника PQR, если известно, что $S<7$.

5. Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиуса a, отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1:2:1$ каждый. Найти расстояние от точки P до прямой QR.

6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 80 км/час. Через 40 минут расстояние между первым и вторым было в два раза меньше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым было равно расстоянию между первым и третьим, а также было равно половине расстояния, которое осталось проехать третьему до A. Через 1 час 20 минут после старта расстояние между первым и вторым было

равно $\frac{2}{5}$ расстояния между первым и третьим. Найти расстояние между пунктами A и B.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}.$$

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найти EF.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

6. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

§2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

1992

Вариант 1

1. Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$ больше?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos 4x}\sin x = 2\sin\frac{\pi}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(11-x)+\log_2(x+1) \leqslant \log_2[(x+1)(x^2+5x-5)].$$

4. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянные, и они движутся по одному шоссе. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найти время отправления мотоцикла из города B.

5. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найти площадь треугольника ABC.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3} < \sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geqslant 0.$$

2. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

3. Решить неравенство

$$|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leqslant 3^x + 4x - x^2 - 7.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Точка $M(x; y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2x - y = 2a^2 - 2b, \quad x - by = 2 - 2a^2,$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3; -1)$?

6. Найти все значения a, при каждом из которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}.$$

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$8\sin 5x + \cos 10x + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|x-7| \leqslant 3-\sqrt{x-4}.$$

3. Найти все отрицательные значения v, при каждом из которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_5\left(\frac{\cos v}{5}\right)}-\frac{1}{\log_{5\cos v}\left(\frac{1}{5}\right)} \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определить периметр треугольника ABC.

5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция: 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-ой инъекции?

6. Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$ а $\angle EHG = 60°$. Найти длину ребра HF.

§3. Физический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$8x - 1 < 4x^2.$$

2. Решить уравнение

$$8\cos x - 3\cos 2x = 5.$$

3. Решить уравнение

$$3\log_3 x^5 = 6 + \log_3 x.$$

4. В треугольнике ABC $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В арифметической прогрессии девятый член в 2 раза больше десятого, а сумма шестого и двенадцатого членов равна 8. Найти первый член и разность прогрессии.

6. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $AL = a$. Найти BL.

7. Про некоторую нечетную функцию известно, что при $x > 0$ она задается формулой $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Найти, какой формулой задается функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.

8. В конусе угол между высотой и образующей равен φ. Боковой поверхности конуса касаются три шара радиуса r, каждый из которых касается двух других. Шары находятся вне конуса. Плоскость β, проходящая через центры шаров, перпендикулярна высоте конуса. Найти расстояние от вершины конуса до плоскости β.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$(1 - 4^x)(4 - x) > 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 3x = \sin(3 + x).$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_5 x} + 3 = 7 \log_5 \sqrt[7]{x}.$$

4. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL = LM$) угол KLM равен φ. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для треугольника KLM.

5. Решить неравенство

$$\frac{|x-1|}{x+2} < 1.$$

6. Через точку O проведены две прямые, касающиеся окружности в точках M и N. На окружности взята точка K (точки O и K — по разные стороны от прямой MN). Расстояния от точки K до прямых OM и MN равны соответственно p и q. Найти расстояние от точки K до прямой ON.

7. Число $x = 5$ является одним из корней уравнения $3x^2 + px + q = 0$, где $q < 0$. Найти действительные корни уравнения $3x^4 + px^2 + q = 0$.

8. Два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, меньшего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

1994

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$5\cos x + 2\sin x = 3.$$

3. Решить уравнение

$$5^{x-1} + 5\cdot(0{,}2)^{x-2} = 26.$$

4. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

5. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$$

6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

7. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

§4. Химический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(-2 + 3^{-x}) = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\sin x} < 1.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150°, а основание AD равно 8. Найти радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от D.

4. Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля. Состав второго сплава: 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта. Состав третьего сплава: 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

5. Найти все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$2x - |x - k^2| = 11k - 3\cdot|x + 4k|$$

1) не имеет решений, 2) имеет конечное непустое множество решений.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1.$$

2. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x = 1 + \cos 2x.$$

4. В квадрат площадью 18 см^2 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся, как 1 : 2. Найти площадь прямоугольника.

5. Найти число решений уравнения

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$$

и дать обоснование ответа.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_4(x+1) + \log_4(x+4) = 1.$$

2. Решить неравенство

$$4x - 1 > 3|x|.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{1 - \sin x - \cos x}.$$

4. Прямоугольные треугольники имеют общую гипотенузу $KL = 5$. Вершины их прямых углов M и N лежат по разные стороны от прямой, проходящей через точки K и L, $LM = LN = 3$. Отрезок KP содержит точку M, и $MP = 1$. Отрезок KQ содержит точку N, и $NQ = 6$. Найти разность между площадью треугольника KPQ и суммарной площадью треугольников KLM и KLN.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 4y\cos x + 4 = 0, \\ x|y|(x^2 + 3y^2) = 2\pi^3 + 24\pi. \end{cases}$$

§5. Биологический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4\cos^2\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{x-9}{x-4}\right)+\log_2(x^2-14x+40)=2+\log_2 3.$$

3. Дана окружность, диаметр MN которой равен 16 см. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше чем 15 см. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найти площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72 см.

4. Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} p^2+q^2<18p-20q-166, \\ 32p-q^2>p^2+12q+271. \end{cases}$$

5. Найти наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{u}+\frac{q}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv+q\sqrt{1-u^2}\leqslant r, \\ p^2+2qr\sqrt{1-u^2}\geqslant q^2+r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2}+q^2\dfrac{1-v^2-u^2}{v^2-1}\geqslant r^2. \end{cases}$$

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x-2\cos x-3=0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2(9^x + 2\cdot 3^x - 5) = 1 + 2\log_4(3^{x+1} - 4).$$

3. Решить неравенство

$$5\sqrt{1 - \frac{1}{z}} > \frac{7z - 1}{z}.$$

4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны единице. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD.

6. Найти все решения системы

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

1994

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 4x^2 + xy + 3y^2 = 48. \end{cases}$$

2. Какое из двух чисел больше

$$\sqrt{14} \quad \text{или} \quad 4^{2\log_{16}\left(1 - \frac{1}{16}\right) + \frac{2}{3}\log_4 8}\ ?$$

Ответ обосновать.

3. Найти все решения уравнения

$$3\,\mathrm{tg}^2\left(\pi x + \frac{\pi}{8}\right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $\frac{5}{3} < x < 3$.

4. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $AD = 3$, $BC = 2$ и углы A и D при основании, равные соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg}(1/3)$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E — точка пересечения диагоналей трапеции.

5. Найти все такие значения величины x, при каждом из которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (9a - 19)x + (10 - 2a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию

$$1 < a < 3.$$

§6. Факультет почвоведения

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2(\cos 6x + \sin 2x \cdot \cos 4x) = \sin 6x + \sin 2x.$$

2. Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях A, $Б$ или B с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях A половину полетного времени, в метеоусловиях $Б$ — треть времени, в метеоусловиях B — $1/6$ полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях A и $3/4$ — в метеоусловиях B. В третий раз — по четверти полетного времени в метеоусловиях A и $Б$, а половину времени — в метеоусловиях B. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях B, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй — на 92,5, а в третий — на 97,5%.

3. Решить уравнение

$$\frac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{x/2+2}}{3^{x/2} - 9} = -9.$$

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2, лежащими на стороне MN треугольника MPN, касаются друг друга и пересекают стороны MP и PN в точках M, D и N, C соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найти площадь треугольника MNP, если известно, что отношение площади треугольника MCO_2 к площади треугольника O_1DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $PN = MP \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

5. При каких значениях параметра a все числа из отрезка $1 \leqslant x \leqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0?$$

1993

Вариант 2

1. Разделить число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась во второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 3 : 5, третья к четвертой — как 5 : 6.

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{9x^2+1} 37 > 1.$$

4. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определить длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

5. Найти все действительные числа a, при каждом из которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений x.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)\cdot(2\sin x + \cos x - \cos^2 x).$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-1} + y = 2, \\ 3^{2x-1} + 2y = 5. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$2\ln\frac{1}{3x-2} + \ln(5 - 2x) \geqslant 0.$$

4. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} b + \cos ax \leqslant 2, \\ x^2 + 2bx + 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

5. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке Q. Длина отрезка, соединяющего вершину C с серединой отрезка AD, равна 3. Расстояние от точки Q до отрезка BC равно 1, длина стороны AD равна 2. Найти длину отрезка AQ.

§7. Географический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0.$$

2. Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственное решение $x = 2$.

3. Решить неравенство

$$(\log_x 9 - 1)\log_3(9x) \leqslant 3.$$

4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC.

5. Найти все значения параметра c, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$$

имеет ровно три различных решения.

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{13 - 2x} = 5 - x.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right).$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

4. В треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN, где M, N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

5. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

2. Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найти отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что

$$4a_{12} = b_{19}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_x(2 - x - x^2) > 0.$$

4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

§8. Геологический факультет

1992

Вариант 1

1. Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма седьмого и десятого — 5. Найти сумму первых восемнадцати членов этой арифметической прогрессии.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{5-8x}+2x \leqslant 1.$$

3. Решить уравнение

$$|\log_7 3\cdot\log_3 x^4 - 7\log_x x^2| = 4\log_x 49.$$

4. Решить уравнение

$$4\cos x\cdot\cos 3x - 10\cos^2 x - 16\sin x\cdot\sin 3x = 4\sin^2 x + 3.$$

5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel DC$, $AB = 5$, $DC = 1$, угол ABC равен $60°$. Точка K лежит на отрезке AB, причем $AK = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от C. Найти площадь треугольника OFC.

6. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{64-3x^2-xz}+1+y^2+2y\sin(\pi z)=(xz-73)(\cos(\pi z)-\cos(2\pi z))^2.$$

1993

Вариант 2

1. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+27b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}{a-9b}\right)^2.$$

2. Решить уравнение

$$15(\cos 2x)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = 7.$$

3. На берегу озера расположены пункты A и B. Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Еще через 1 час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу?

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{4}\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(x^2) > \log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(\sqrt[4]{3x+4}).$$

5. Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками A и B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в 4 раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найти меры углов треугольника AMB, если известно, что один из них в 2 раза больше другого.

6. Найти все неотрицательные действительные значения параметра a, при каждом из которых в области $(y+2)^2 - 4x \leqslant 0$ лежат ровно три точки графика функции

$$y = 2x(\sqrt{\cos(2a\pi x) - \cos^4(a\pi x)} - 1) + 2.$$

1994

Вариант 3

1. Какое из чисел больше $2\sqrt{7}$ или $5,(29)$?

2. Упростить до целого числа выражение

$$2\cdot\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}}{\sqrt{7-\sqrt{5}}}\cdot 2\sqrt{11}.$$

3. Решить уравнение

$$y + 8\sqrt{y^2+y-6} - 6 + y^2 = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 9x + \cos 15x = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\sqrt{11z - z^2 - 28} \neq 0.$$

6. Решить неравенство

$$6\cos x + \sin 2x < 0.$$

7. Геологическая информационная система поставляется на четырех дискетах. При установке их на компьютер каждая из дискет увеличивает объем этой системы на определенное количество % по отношению к предыдущему объему: первая дискета — на 10%, вторая дискета — на 12%, третья дискета — на 25%, четвертая дискета — на 30%. На сколько % в результате увеличится объем этой системы?

8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю BD. Доказать, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

9. Четыре бригады разрабатывали месторождение нефти в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. В течение пяти последних месяцев второго года и первых трех месяцев третьего года работа не проводилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год	4 : 5 : 2 : 1	и	17 млн. т.;
во второй год	2 : 3 : 1 : 1	и	10 млн. т.;
в третий год	1 : 2 : 2 : 4	и	11 млн. т..

Сколько млн. т. нефти выработали бы за 2 месяца четыре бригады, работая все вместе?

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нем через вершину C проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной этой диагонали и проходящей через ее середину, к площади его боковой поверхности.

§9. Экономический факультет

1992

Вариант 1

1. Вычислить $\log_{\frac{18}{7}}|\sin(\gamma+\pi/4)|+\log_{\frac{18}{7}}|\cos(3\gamma+\pi/4)|$, если известно, что $\cos\gamma+\sin\gamma=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. Решить неравенство

$$(4^{x-1}+4^{1-x}-2)^{-1}\cdot(x^2-5x+4)\sqrt{7-x}\leqslant 0.$$

3. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей первого типа и 2010 деталей второго типа. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он может изготовить 1 деталь второго типа. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC, BAD и CAD при вершине A равны $\pi/3$, $3\pi/4$ и $\pi/2$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD.

5. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA=12$, $OD=8$, $CD=2$.

6. Найти все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2-5(x-1)+3|x-q|-q\leqslant 0$ максимально.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{7^x-6}25<2.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=1.$$

3. Решить неравенство

$$3\sqrt{x+2} \leqslant 6 - |x-2|.$$

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin((y-1)^2) \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1| - x \geqslant 0. \end{cases}$$

5. За время хранения вклада в банке проценты по нему прибавлялись к вкладу ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$%, потом $7\frac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

1994

Вариант 3

1. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 3625x^3 = 9947y^3, \\ |y| \leqslant 6. \end{cases}$$

2. Найти область значений функции

$$y = \sqrt{30 - 12x - 6x^2}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_4\left(\frac{x-14}{\sin x}\right) = \log_4((x-14)\cdot\sin x).$$

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y + x - 1| + |2y + 4| < 4.$$

5. Предприятие производит детскую обувь и является убыточным. Известно, что при изготовлении m пар обуви в месяц расходы предприятия на выпуск одной пары обуви составляют не менее $\frac{126000}{m} + 9 - \left|3 - \frac{54000}{m}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждой пары обуви при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

6. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS, соединяющий вершину M с точкой S, расположенной на стороне KN, пересекает диагональ LN в точке O. Известно, что $KL : MN = 6 : 7$, $KM : ON = 2 : 1$ и $\angle KLN + \angle KMN = 180°$. Найти отношение длин отрезков MO и OS.

§10. Факультет психологии

1992

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$3\sin 2\pi x \geqslant \sqrt{2}\sin 4\pi x + 3\cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y}\cdot 3^{y}\cdot 6^{x+y}\cdot 9^{x} = 144, \\ \log_{(0{,}2x+0{,}1y)}(27^{x}9^{y}+4^{x+y})\cdot\log_{5}(0{,}2x+0{,}1y)=2. \end{cases}$$

3. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

4. Найти все значения параметров a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x = a,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x^3 - 8x + b = 0.$$

5. В тетраэдре $ABCD$ на ребре AB взята точка K, на ребре AC — точка L, на ребре BD — точка N, на ребре CD — точка M. Точки E и G — середины ребер AD и BC соответственно. Прямые EG, KM, LM пересекаются в одной точке. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если $AK : KB = 5$, $AD = 9$, $BC = 8$, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC равен 45°.

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2\cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2},$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi;2\pi]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC=1$ и $\angle C_1CA_1=\alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

5. Уравнение $(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a=0$ имеет действительные корни x_1, x_2.

1) Найти все значения параметра a, при каждом из которых оба корня больше единицы.

2) Найти все значения параметра b, при каждом из которых выражение

$$(x_1-b)(x_2-b)$$

не зависит от параметра a.

1994

Вариант 3

1. Верно ли неравенство

$$\log_2 27>\sqrt{6\log_2 9+5}.$$

(таблицами и калькулятором не пользоваться).

2. Известно, что $y=1$, $z=1$ одно из решений системы

$$\begin{cases} ay-bz+2a=0, \\ (b-1)y^2-az^2+2\cos\left(\dfrac{1000\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

Найти все решения данной системы уравнений.

3. Из вершины C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая луч AD в точке K. Точка L на прямой AK равноуда-

лена от прямой CK и прямой AC, причем AL и на 1 м длиннее чем LK. Известно, что треугольник ACK тупоугольный, а $AK = 9$ м. Найти косинус угла ACK.

4. Через вершины A и B треугольной пирамиды $SABC$ проведена сфера, пересекающая ребра AS и BS в точках M и N соответственно. Через точки B и N проведена вторая сфера, пересекающая ребро SC в точках P и Q, причем $PQ = \frac{1}{3}SC$. Найти, какую часть ребра SC составляет отрезок QC ($QC < PC$), если M — середина SA и $SC = \frac{3}{2}SA$.

5. Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причем каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причем число ящиков было равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

§11. Институт стран Азии и Африки

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0.$$

2. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leqslant 1.$$

4. Дан треугольник со сторонами 4; 8; 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

5. Решить неравенство

$$\log_{1/2}|\cos x| \cdot \log_5(x^2-9) < 0.$$

6. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geqslant 1.$$

2. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

3. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая

основание этого треугольника в точке D. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120°.

4. Решить уравнение

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

5. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 3x^2\cos x + 3x^2 = 0.$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 2|x-a| \geqslant a^2$$

справедливо для всех действительных x.

1994

Вариант 3

1. Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в четыре раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальный доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в четыре раза.

2. Решить уравнение

$$3^{x\cdot\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x} = 1.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DN являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. Найти AC, если известно, что $AM = 4$, $BN = 9$.

4. Решить неравенство

$$2\cos x - 1 \leqslant \sqrt{8\cos^2 x - 8\cos x - 16}.$$

5. Решить неравенство

$$|x - 7^{1+\sqrt{6-x}}| \leqslant \frac{4}{3}x - 7\cdot 7^{\sqrt{6-x}}.$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{3} - 4$$

имеет решение.

Ответы к дополнению

§1. Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. На продолжении. 3. $\frac{1}{6}\,\frac{p+q+pq}{p+q-2pq}$ при $p \neq 0$; $\frac{1}{6}$ при $p = 0$. 4. 36. 5. 8. 6. $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Вариант 2

1. $(1; 2)$. 2. $[-4; 4]$.
3. $(-\pi/3 + 2\pi k; -5\pi/6 + 2\pi m)$; $(-\pi/6 + \pi n; -2\pi/3 + \pi(n + 2l))$; $k, m, n, l \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 5. $a\sqrt{3}\cdot 9$. 6. 120 км.

Вариант 3

1. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. $x = \log_2 2/3$, $y = 1/6$.
3. $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$; $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. 4. $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$. 5. $x \in \{0; 1\}$ при $a = 0$; $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$ при $a \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$: $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$, $x = \frac{-1 - a - \sqrt{3a^2 - 3}}{2}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

§2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $x \in [2; 11)$.
4. 11 часов. 5. $\frac{1}{4}(5 + \sqrt{15})$. 6. $a \in (2\pi - 1/8; \infty)$.

Вариант 2

1. $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 1$; $3 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$. 2. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.
3. $\log_3 4 \leqslant x \leqslant 3$. 4. $\frac{12}{5}$. 5. $a = b = 0$, $b = -a^2 = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Вариант 3

1. $\frac{(-1)^n}{5} \arcsin(2 - \sqrt{5}) + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 4$, $5 \leqslant x \leqslant 8$.
3. $v = 2\pi n$; $n = -1, -2, -3, \ldots$. 4. 44. 5. $6 + 2 \cdot (1/6)^{24}$.
6. $\sqrt{247}$.

§3. Физический факультет

Вариант 1

1. $x < \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $x > \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.
2. $2\pi k$, $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $3^{3/7}$. 4. $\frac{1}{2} c^2 \frac{\sin(\alpha + \gamma) \sin \alpha}{\sin \gamma}$.
5. $a_1 = 20$, $d = -2$. 6. $\frac{R^2}{a}$. 7. 4; $-\frac{4}{9}$. 8. $\frac{r \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \varphi - 1 \right|}{\sin \varphi}$.

Вариант 2

1. $x > 4$, $x < 0$. 2. $\frac{\pi - 3}{4} + \frac{\pi}{2} n$; $\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $5 \frac{\sqrt{13} + 7}{2}$.
4. $\sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\pi - \varphi}{4}$. 5. $x < -2$; $x > -\frac{1}{2}$. 6. $\frac{q^2}{p}$. 7. $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$.

8. $\left(\dfrac{2R\sqrt{r}-r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right)^2$.

Вариант 3

1. $1/2 < x < 1$. 2. $\pm\arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}}+\arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $x=1$, $x=3$. 4. $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$; $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$. 5. $x=2$, $x=2^{-7}$.
6. $\sqrt{m^2+n^2}$. 7. $a\leqslant 20$. 8. $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$.

§4. Химический факультет

Вариант 1

1. -1.
2. $2\pi n\leqslant x<\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<x\leqslant\pi+2\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$.
3. $10\pm4\sqrt{3}$. 4. $[15;40]$ в процентах.
5. (1) $(-23;0)$, (2) $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$.

Вариант 2

1. $[-1;1)\cup(1;3]$. 2. 2; 4.
3. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m$; $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; m, $k\in\mathbb{Z}$. 4. 8. 5. Решений нет.

Вариант 3

1. $x=0$. 2. $1<x<+\infty$. 3. $2\pi n$, $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$.
4. 12. 5. $x=\pi$, $y=2$.

§5. Биологический факультет

Вариант 1

1. $-\dfrac{\pi}{36}\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi k}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$. 2. 13. 3. 216 см^2. 4. $(12;-8)$.
5. 5.

Вариант 2

1. $2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$. 2. 1. 3. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right)$. 4. 573. 5. $90°$. 6. $(4; -3; 0)$; $(2; -1; 2)$.

Вариант 3

1. $(1; -4)$; $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. 2. Второе больше. 3. $\frac{41}{24}$; $\frac{49}{24}$; $\frac{65}{24}$. 4. $\frac{4}{35 + 2\sqrt{101} + \sqrt{229}}$. 5. $2 - \sqrt{6} \leqslant x \leqslant 1$; $4 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{6}$.

§6. Факультет почвоведения

Вариант 1

1. $-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. 90%. 3. 0. 4. $\frac{81}{2}(2\sqrt{3} - 3)$. 5. $\left(-\infty; +\frac{5}{3}\right)$.

Вариант 2

1. 16, 24, 40, 48. 2. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $(-2; 0) \cup (0; 2)$. 4. 5; 5/4. 5. $\left[-1; -\frac{1}{5}\right]$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + 2\pi m$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 1$, $y = 1$. 3. $\frac{2}{3} < x \leqslant \frac{5 + \sqrt{34}}{9}$.
4. $b = 3$, $a = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $b = -3$, $a \in (-\infty; +\infty)$. 5. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§7. Географический факультет

Вариант 1

1. $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. $(2; -8; 8)$. 3. $\left[\frac{1}{81}; 1\right) \cup [3; +\infty)$. 4. 60. 5. 4; $\frac{19}{4}$.

Вариант 2

1. $x = 2$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $-2 < x < 1$, $x = 2$. 4. $\frac{25}{64}\sqrt{15}$. 5. $a = -\frac{5}{13}$; $a = -5$.

Вариант 3

1. πn, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. 1. 3. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$. 4. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 5. $2 \leqslant a < 3$, $3 < a \leqslant 4$.

§8. Геологический факультет

Вариант 1

1. -9.
2. $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$. 3. $x = 7^{\frac{1}{4}(7+\sqrt{17})}$, $x = 7^{\frac{1}{4}(7-\sqrt{17})}$, $x = 7^4$.
4. $\pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $\frac{19\sqrt{3}}{52}$.
6. $\left(x = -128, y = 1, z = -\frac{1}{2} + 384\right)$,
$\left(x = 128, y = -1, z = \frac{1}{2} - 384\right)$.

Вариант 2

1. 3. 2. $x = \pm\arccos 5/6 + \pi n$. 3. 5/4 часа. 4. $-1 < x < 0$; $0 < x < 4$. 5. 80°, 60°, 40°. 6. $3/4 < a < 1$; $1 < a < 5/4$.

Вариант 3

1. 5,(29) больше. 2. 4. 3. $y = -3$, $y = 2$.
4. $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}$, $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. 5. $4 < z < 7$.
6. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 7. 100,2%. 9. 10 млн. т.
10. $3\sqrt{3}$.

§9. Экономический факультет

Вариант 1

1. -1. 2. $x = 7$; $1 < x \leqslant 4$. 3. 39 и 153 человек. 4. $\pi/4$.
5. 2. 6. $q = 5$; $\frac{13}{4} \leqslant q \leqslant \frac{7}{2}$.

Вариант 2

1. $\log_7 6 < x < 1$; $x > \log_7 11$. 2. $x = \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $-2 \leqslant x \leqslant -1$; $x = 2$. 4. $10 + 2\sqrt{5}$. 5. 12 месяцев. 6. 195.

Вариант 3

1. $(-7; -5)$, $(0; 0)$, $(7; 5)$. 2. $0 \leqslant y \leqslant 6$.
3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. 4. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$.
5. 12000 или 24000 пар обуви. 6. 4/3.

§10. Факультет психологии

Вариант 1

1. $\frac{3}{8} + n$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. $x = -2\log_2 3 + 4\log_3 2$, $y = 3\log_2 3 - 4\log_3 2$. 3. 4.
4. $a = 2$, $b = 3$. 5. $5\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. 2. 2. $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$. 3. $-\frac{\pi}{12}$; $2\pi - \frac{\pi}{12}$. 4. $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$.
5. 1) $\left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$; 2) $\frac{7}{3}$.

Вариант 3

1. Нет, неверно. 2. $(1; 1)$; $\left(-\frac{13}{17}; \frac{7}{17}\right)$. 3. $\frac{5+\sqrt{7}}{8}$. 4. $\frac{1}{3}$.
5. 41472.

§11. Институт стран Азии и Африки

Вариант 1

1. $-2\log_2 3$. 2. $(-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; \infty)$.
4. $\sqrt{14}$. 5. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$. 6. $a = -3$, $S = 18$.

Вариант 2

1. $1 \leqslant x < 3$. 2. 28. 3. $\sqrt{7}$. 4. $2/3 < x < 1$; $1 < x \leqslant 2$.
5. $x = 0$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 6. $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Вариант 3

1. 1:2; 10. 2. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. 3. 10. 4. $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $x_1 = 6$. 6. $a = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.