

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Москва 2000

Факультет ВМиК • Геологический факультет • Экономический факультет • Институт стран Азии и Африки • Факультет Государственного управления • Черноморский филиал МГУ

Сборник содержит варианты письменных вступительных экзаменов по математике факультетов МГУ: ВМиК, геологического, экономического, государственного управления, социально-экономического отделения ИСАА, Черноморского филиала МГУ (г. Севастополь); задачи устных экзаменов, а также задания письменного тура математической олимпиады «Абитуриент -2001». Варианты приводятся парами: один подробно разобранный, другой - для самостоятельного решения. Рекомендуются поступающим в вузы, учащимся старших классов и преподавателям математики.

СОДЕРЖАНИЕ

	Условия задач	Ответы и решения
1. Факультет ВМиК.		
Вариант 1.1 (апрель 2001 г.)	6	35
Вариант 1.2 (апрель 2001 г.)	7	47
Вариант 1.3 (июль 2001 г.)	8	47
Вариант 1.4 (июль 2001 г.)	9	56
Отделение прикладной информатики		
Вариант 1.5 (июль 2001 г.)	10	56
Вариант 1.6 (июль 2001 г.)	11	60
Задачи устного экзамена	12	61
2. Геологический факультет		
Вариант 2.1 (май 2001 г.)	15	62
Вариант 2.2 (май 2001 г.)	16	68
Вариант 2.3 (июль 2001 г.)	17	68
Вариант 2.4 (июль 2001 г.)	19	74
Задачи устного экзамена	20	75
3. Экономический факультет		
Отделение экономики		
Вариант 3.1 (июль 2001 г.)	22	76
Вариант 3.2 (июль 2001 г.)	23	81
Вечернее отделение		
Вариант 3.3 (июль 2001 г.)	24	82
Вариант 3.4 (июль 2001 г.)	24	86
Отделение менеджмента		
Вариант 3.5 (июль 2001 г.)	25	87
Вариант 3.6 (июль 2001 г.)	26	88
4. Институт стран Азии и Африки		

Вариант 4.1 (июль 2001 г.)	27	88
Вариант 4.2 (июль 2001 г.)	28	93
5. Факультет государственного управления		
Вариант 5.1 (июль 2001 г.)	29	94
Вариант 5.2 (июль 2001 г.)	29	97
6. Черноморский филиал МГУ (Севастополь).		
Вариант 6.1 (май 2001 г.)	30	97
Вариант 6.2 (май 2001 г.)	31	104
Вариант 6.3 (июль 2001 г.)	32	105
Вариант 6.4 (июль 2001 г.)	33	111

З-153 Задачи вступительных экзаменов

по математике (2001 г.)

**(В.К.Власов, В.П.Воронин, Е.А.Григорьев,
Д.В.Денисов, В.С.Панферов, М.М.Потапов,
А.В.Разгулин, В.С.Серов, В.В.Тихомиров,
В.Г.Ушаков, М.В.Федотов, Е.Н.Хайлов,
Е.В.Шикин, Б.М.Щедрин –
под общей редакцией Е.А.Григорьева)**

М., факультет ВМиК МГУ, 2001, – с.111.

ISBN 5-89407-116-X

Издательский отдел факультета Вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В.Ломоносова (лицензия ЛР ИД №05899 от 24.09.2001)

*Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета
Вычислительной математики и кибернетики МГУ.*

Сборник содержит варианты письменных вступительных экзаменов по математике факультетов МГУ: ВМиК, геологического, экономического, государственного управления, социально-экономического отделения ИСАА, Черноморского филиала МГУ (г. Севастополь); задачи устных экзаменов, а также задания письменного тура математической олимпиады «Абитуриент – 2001». Варианты приводятся парами: один подробно разобранный, другой – для самостоятельного решения. Рекомендуется поступающим в вузы, учащимся старших классов и преподавателям математики.

УДК 51
ББК 22.1я72

ISBN 5-89407-116-X

© Факультет Вычислительной математики
и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова,
2001 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Условия задач	Ответы и решения
1. Факультет ВМиК.		
Вариант 1.1 (апрель 2001 г.)	6	35
Вариант 1.2 (апрель 2001 г.)	7	47
Вариант 1.3 (июль 2001 г.)	8	47
Вариант 1.4 (июль 2001 г.)	9	56
Отделение прикладной информатики.		
Вариант 1.5 (июль 2001 г.)	10	56
Вариант 1.6 (июль 2001 г.)	11	60
Задачи устного экзамена	12	61
2. Геологический факультет.		
Вариант 2.1 (май 2001 г.)	15	62
Вариант 2.2 (май 2001 г.)	16	68
Вариант 2.3 (июль 2001 г.)	17	68
Вариант 2.4 (июль 2001 г.)	19	74
Задачи устного экзамена	20	75
3. Экономический факультет.		
Отделение экономики.		
Вариант 3.1 (июль 2001 г.)	22	76
Вариант 3.2 (июль 2001 г.)	23	81
Вечернее отделение.		
Вариант 3.3 (июль 2001 г.)	24	82
Вариант 3.4 (июль 2001 г.)	24	86
Отделение менеджмента.		
Вариант 3.5 (июль 2001 г.)	25	87
Вариант 3.6 (июль 2001 г.)	26	88
4. Институт стран Азии и Африки.		
Вариант 4.1 (июль 2001 г.)	27	88
Вариант 4.2 (июль 2001 г.)	28	93
5. Факультет государственного управления.		
Вариант 5.1 (июль 2001 г.)	29	94
Вариант 5.2 (июль 2001 г.)	29	97

6. Черноморский филиал МГУ (Севастополь).

Вариант 6.1 (май 2001 г.)	30	9
Вариант 6.2 (май 2001 г.)	31	10
Вариант 6.3 (июль 2001 г.)	32	10
Вариант 6.4 (июль 2001 г.)	33	11

От редактора.

Очередной сборник задач содержит материалы экзаменов по математике 2001 г., подготовленные экзаменационной комиссией факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. Сборник расширен по сравнению с выпусками прошлых лет, поскольку в 2001 г. на факультете ВМиК была открыта программа подготовки бакалавров – отделение прикладной информатики (экзамены по математике письменно и устно). Экзамен по математике (письменно) появился на одном из отделений факультета государственного управления.

Таким образом, в сборнике представлены варианты письменных вступительных экзаменов факультетов ВМиК, геологического, экономического, государственного управления и Института стран Азии и Африки (социально-экономическое отделение); задачи устных экзаменов по математике; задания олимпиады "Абитуриент - 2001", проводившейся на факультетах ВМиК и геологическом. Публикуются также варианты, предлагавшиеся в Черноморском филиале МГУ в г. Севастополе (олимпиада для абитуриентов в мае и вступительные экзамены в июле).

Как обычно, варианты приводятся парами – один подробно разобранный, другой – для самостоятельной работы. В случаях, когда на различных отделениях факультета предлагались близкие по содержанию задачи, мы не повторяем решений этих задач. Исключение составляют ситуации, в которых представлены иные способы решения.

Наличие в сборнике разнообразных по тематике и трудности задач делают настоящее издание полезным не только поступающим в МГУ, но и более широкому кругу учащихся и преподавателей.

В подготовке материалов данного сборника принимали участие также В.Я. Галкин, В.М. Круглов, В.Ю. Королев, В.В. Морозов, В.И. Родин. Пользуюсь приятной возможностью выразить сердечную признательность всем названным коллегам.

Задачи экзаменов по математике.

1. Факультет Вычислительной математики и кибернетики.

Вариант 1.1 (апрель 2001 г.)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?
2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/час. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 час. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.
4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD , равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB , равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$3a - 1 - (8a - 5) \cdot 3^{-2 \sqrt{-\log_{81}(x^2 + 6x + 9)}} \leq 3(a + 2) \cdot |x + 3|^2 \sqrt{\log_{|x+3|} \frac{1}{9}}.$$

6. Сфера касается всех боковых рёбер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, причём рёбер SA и SB она касается соответственно в точках K и L . Точки K , L и S лежат по одну сторону от плоскости, которая касается сферы в точке M , принадлежащей грани SAB , и пересекает рёбра SA и SB в точках G и H соответственно. Прямые KM и LM делят апофему грани SAB на три равных отрезка. Известно, что $AB=9$ и $GH=3\sqrt{11}$. Найдите объём пирамиды $SABCDEF$ и радиус сферы.

Вариант 1.2 (апрель 2001 г.)

1. Третий член арифметической прогрессии в шесть раз больше первого члена, а сумма первых семи членов равна 119. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 416?
2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2 \cos x - \sin y = 0, \\ 4 \sin x + 2 \cos y = 5. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B вышел первый пешеход. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A вышел второй пешеход. Через некоторое время первый пешеход увеличил скорость на 2 км/час. Если бы первый пешеход сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым пешеходом состоялась бы на один час раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 60 км, в момент изменения скорости первым пешеходом расстояние между ним и вторым пешеходом было больше 20 км, на весь путь из A в B первый пешеход затратил 11 час. Найдите первоначальную скорость пешеходов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , длина диагонали BD равна 48. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD , равно 20. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB , равен 13. Найдите длину стороны AB .
5. Для каждого значения параметра a решите неравенство
- $$2a + 3 - 2(a - 1) \cdot 2^{-2 \sqrt{2 \log_{\frac{1}{2}} |x-4|}} \geq (3a + 7) \cdot (x^2 - 8x + 16)^{\sqrt{-\frac{1}{2} \log_{|x-4|} 2}}.$$
6. Шар касается боковой поверхности прямого кругового конуса. SH – высота этого конуса, а SA и SB – две его образующие, касающиеся шара в точках K и L соответственно, причём $\angle AHB = 120^\circ$. Точки K , L и S лежат по одну сторону от плоскости, которая касается шара в точке M , принадлежащей плоскости, содержащей прямые SA и SB , и пересекает образующие SA и SB в точках C и D соответственно. Прямые KM и LM делят высоту SN треугольника SAB на три равных отрезка. Известно, что $AB = 5$ и $CD = 5\sqrt{3}$. Найдите объём конуса и радиус шара.

Вариант 1.3 (июль 2001 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3 (x^{-2}), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$$

2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.
3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \leq -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq 11 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

4. Решите уравнение

$$\cos(\pi(x + 7\sqrt{x})) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$$

5. Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

6. Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot f(x^2 - 2x - 112) + |f(x^2 - 2x - 112) - 3 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x})|}{(3 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112) - 2 \cdot f(-2x\sqrt{32 - 2x}))^7} > 0.$$

Вариант 1.4 (июль 2001 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 \sqrt[3]{y} = -7^{-x}, \\ 7^x + \log_5 y = 6. \end{cases}$$

2. Сумма первых одиннадцати членов арифметической прогрессии больше 203, но меньше 217. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Пятый член равен 16. Найдите сумму первых пятидесяти членов этой прогрессии.

3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y - 2x \geq 4, \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y \leq -4 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$ принимает минимальное значение.

4. Решите уравнение

$$\cos(\pi(x - 5\sqrt{x})) \cdot \cos(\pi(4x + \sqrt{x})) = 1.$$

5. Вокруг трапеции с основаниями 2 и $\sqrt{8}$ описана окружность радиуса $\sqrt{3}$ с центром, находящимся внутри трапеции. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

6. Функция $f(x)$ определена, убывает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{4 \cdot f(2x\sqrt{x+9}) + |f(2x\sqrt{x+9}) - 5 \cdot f(x^2 + x - 40)|}{(5 \cdot f(2x\sqrt{x+9}) + 9) - 4 \cdot f(2x\sqrt{x+9})^{15}} > 0.$$

Отделение прикладной информатики.

Вариант 1.5 (июль 2001 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{y} = -3^{1-x}, \\ 3^x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

2. Сумма первых девяти членов арифметической прогрессии больше 119, но меньше 133. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Третий член равен 10. Найдите сумму первых ста членов этой прогрессии.

3. При всех значениях параметра a решите неравенство

$$|2x + a| \leq x + 2.$$

4. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} 3y + 2x \geq 2, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 4 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ принимает минимальное значение.

5. Решите уравнение

$$\cos(\pi(x + 3\sqrt{x})) \cdot \cos(\pi(2x - \sqrt{x})) = -1.$$

6. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Найдите все корни уравнения

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot x^6 - [x].$$

7. Вокруг трапеции с основаниями $\sqrt{8}$ и $\sqrt{28}$ описана окружность радиуса 3 с центром, находящимся внутри трапеции. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

Вариант 1.6 (июль 2001 г.)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -2^{1-y} = \log_5 \sqrt{x}, \\ 2^y + \log_5 x = 2. \end{cases}$$

2. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 30. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Семнадцатый член больше 113, но меньше 121. Найдите девятый член этой прогрессии.

3. При всех значениях параметра b решите неравенство

$$|2x + 3b| \leq x + 1.$$

4. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} 2y - x \leq -6, \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y \leq -9 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ принимает минимальное значение.

5. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(4x - \sqrt{x})\right) \cdot \cos(\pi(x + 3\sqrt{x})) = 1.$$

6. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Найдите все корни уравнения

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{x} - [x].$$

7. Трапеция с основанием $\sqrt{44}$ и высотой $\sqrt{11} + \sqrt{5}$ вписана в окружность радиуса 4. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

Задачи устного экзамена.

1. Какое из чисел больше: $0,7(621)$ или $\frac{141}{185}$?
2. Найдите все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53x1y}$ (x и y – цифры).
3. Найдите пять таких последовательных натуральных чисел, чтобы сумма квадратов трёх первых из них равнялась сумме квадратов двух последних.
4. Выясните, сколько решений в натуральных числах имеет система

$$\begin{cases} k^2 + l = m^2, \\ k + l^2 = n^2. \end{cases}$$

5. Найдите все упорядоченные тройки простых чисел (p, q, r) , удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

6. Найдите все целые числа m и n , при которых один из корней уравнения

$$3x^3 + m \cdot x^2 + n \cdot x + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

7. Найдите уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

8. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z-x)(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

9. Представьте функцию $f(x) = \frac{3^x + x^2}{\sin x}$ в виде суммы чётной и нечётной функций в области, где она определена.

10. Решите уравнение $\log_2(5 + 3 \cos 4x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$. Какие значения может принимать сумма $\alpha + \beta + \gamma$?

12. Известно, что $5 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$. Чему равно значение $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha}$?

13. Решите уравнение $\arcsin \frac{x}{2} + 2 \arccos x = \pi$.

14. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = 6 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y + 3 \cos x.$$

15. Решите уравнение $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

16. Сравните два числа: $\log_3 10 + 4 \lg 3$ и 4 .

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

18. Изобразите на координатной плоскости множество всех таких точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$|x^2 + xy + y^2| \geq |x^2 + xy - y^2|.$$

19. С помощью циркуля и линейки разделите угол 54° на три равные части.
20. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найдите ее радиус, если меньший катет этого треугольника равен a , а гипотенуза равна c .
21. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 , радиусами r_1 и r_1 соответственно, касаются друг друга внешним образом. На отрезке O_1O_2 как на диаметре построена окружность S_3 . Найдите радиус окружности, касающейся внешним образом окружностей S_1 и S_2 и внутренним образом окружности S_3 .
22. Треугольник ABC – равнобедренный с острым углом при вершине ($AB = BC$, $\angle ABC < \frac{\pi}{2}$). К боковой стороне BC проведены высота и медиана, длины которых равны 6 и $3\sqrt{5}$ соответственно. Найдите длину стороны AB .
23. Существует ли треугольник, в котором длины сторон относятся друг к другу как $2 : 3 : 4$, а периметр более чем в 14 раз больше радиуса вписанной окружности?
24. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$, $AD = a$, $AB = b$. На ребре DD' выбрана точка M так, что получившийся в сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , C' и M , четырехугольник имеет наименьший возможный периметр. Найдите $DM : MD'$.
25. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) проведена плоскость через середины ребер DD_1 и $D_1 C_1$ и вершину A . Найдите угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

26. Пусть R и r – соответственно радиусы описанного и вписанного шаров правильной четырехугольной пирамиды. Найдите наименьшее значение величины $\frac{R}{r}$.
27. Плоскость $\mathcal{P}$ пересекается некоторой прямой в точке S . На этой прямой по одну сторону от плоскости $\mathcal{P}$ расположены две точки A и B , $SA = a$, $SB = b$. Найдите геометрическое место точек касания сфер, проходящих через точки A и B , с плоскостью $\mathcal{P}$.

2. Геологический факультет.

Вариант 2.1 (май 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leq 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 8x + 12} \geq x - 5.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\log_3(-x)}{\log_9(-5x-4)} = 1.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1,$$

расположенные на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

5. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC , касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB соответственно в точках L и K , отличных от вершины A . Найдите отношение $AC : AB$, если известно, что длина отрезка LC в два раза больше длины отрезка KB , а отношение $CM : BM = 3 : 2$.

6. При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объема кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объема воды, при этом концентрация раствора (отношение объема кислоты к общему объему раствора) уменьшилась на 40%. Раствор C получен из раствора B добавлением нового количества воды, в два раза большего по объему, чем было добавлено к раствору A при получении B . Во сколько раз концентрация раствора B больше концентрации раствора C ?

7. При каких значениях y уравнение

$$|2x + 6| + |2x - 8| = yx + 12$$

имеет единственное решение x ?

8. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие – на не пересекающей эту диагональ куба диагонали его грани.

Вариант 2.2 (май 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x - 2| + 1}{|2x + 3| - 7} \leq 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 9x + 18} \geq x - 5.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(-x)}{\log_4(-6x - 5)} = 1.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\sin x + \cos 2x - \sin 2x = 1,$$

расположенные на отрезке $\left[-\frac{4\pi}{3}; 0\right]$.

5. Окружность, проходящая через вершину P треугольника PQR , касается стороны QR в точке F и пересекает стороны PQ и PR соответственно в точках M и N , отличных от вершины P . Найдите отношение $QF : FR$, если известно, что длина стороны PQ в полтора раза больше длины стороны PR , а отношение $QM : RN = 1 : 6$.
6. При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объема кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объема воды, а раствор C получен из раствора B добавлением уже другого количества воды. Известно, что концентрация (отношение объема кислоты к общему объему раствора) при получении B уменьшилась по сравнению с концентрацией раствора A на 20%, а концентрация раствора C в два раза меньше концентрации раствора A . Во сколько раз больше было добавлено воды при получении раствора C из раствора B , чем при получении раствора B из раствора A ?
7. При каких значениях y уравнение

$$|3x + 6| + |3x - 9| = yx + 12$$

имеет единственное решение x ?

8. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 3, а две другие – на не пересекающей эту диагональ куба диагонали его грани.

Вариант 2.3 (июль 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \geq 0.$$

2. Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right)^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4+xy. \end{cases}$$

6. Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C . Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C , а второй из B по направлению к C . Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/час, второго – 33 км/час, а каждое из расстояний от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равно 275 км?

7. Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A . Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN , если $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$.

8. При каких значениях параметра $a \geq 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right) \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2 + 1)\pi]$?

Укажите эти корни.

Вариант 2.4 (июль 2000 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-5} - 1}{1 - \frac{1}{x-8}} \geq 0.$$

2. Найдите неположительные решения уравнения

$$1 - \sin 11x = \left(\cos \frac{5x}{2} + \sin \frac{5x}{2} \right)^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{3}{4} \right)^{x+1} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{243}{1024}.$$

4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 4 м и 6 м. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{x+2y-xy} = 5, \\ \frac{10}{xy} - xy = 4 - x - 2y. \end{cases}$$

6. Пункты
- A
- и
- B
- расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте
- C
- . Два грузовика одновременно начинают движение: первый из пункта
- A
- по направлению к
- C
- , а второй из
- B
- по направлению к
- C
- . Через какое время после начала движения расстояние между грузовиками будет наименьшим и каким, если скорость первого грузовика равна 36 км/час, второго – 48 км/час, а каждое из расстояний от пункта
- A
- до пункта
- C
- и от пункта
- B
- до пункта
- C
- равно 300 км?

7. Сфера с диаметром
- $AD = 3$
- касается плоскости треугольника
- ABC
- в точке
- A
- . Отрезки
- BD
- и
- CD
- пересекают сферу в точках
- M
- и
- N
- соответственно. Найдите длину отрезка
- MN
- , если
- $AB = 3\sqrt{3}$
- ,
- $AC = 3\sqrt{15}$
- , а
- $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$
- .

8. При каких значениях параметра $a \geq 1$ уравнение

$$\sin \left(\frac{4}{13} x \right) \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[(2a+1)\pi; (a^2+2)\pi]$?
Укажите эти корни.

Задачи устного экзамена.

1. Представьте число $0,2(13)$ в виде обыкновенной дроби.
2. Вычислите $2\sqrt{5} \cdot 5 (\lg 5 / \lg 25)$.
3. Сравните числа $\sin 3$ и $0,5$.
4. Сравните числа $\cos 5$ и $0,5$.
5. Решите уравнение в целых числах: $xy = 2x + y$.
6. Найдите все целочисленные пары $(x; y)$, где $|x| \leq 1$, удовлетворяющие уравнению

$$xy = x^2 + \frac{1}{4}y^2.$$

7. Найдите минимальное значение функции

$$y = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

8. Решите уравнение $\lg(3 + 2 \lg(1 + x)) = 0$.
9. Решите уравнение $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.
10. Решите уравнение $2|\sin x| + \cos x = 1$.
11. Решите неравенство $\log_{x-2}(3x - x^2) \leq 2$.
12. Решите неравенство $\log_{|x-2|}(x+3)^2 \leq 2$.
13. Имеет ли корни уравнение $\sqrt{x} + x^2 = 8x - 15$?
14. Имеет ли корни уравнение $|x| = x^2 - 8x + 18$?

15. Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2} \cos x$, если $\sin x = \frac{1}{2}$?
16. Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2} \cos x$, если $\sin x + \cos x = 1$?
17. Постройте график функции $y = \lg \left(\frac{x^2}{|x|} \right)$.
18. Постройте график функции $y = \frac{|\log_2 x| + \log_2 x}{\log_2 x}$.
19. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами
- $$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 4y \leq -6, \\ x \leq 2. \end{cases}$$
20. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством
- $$|y - 2x| + |y + 2x| \leq 2.$$
21. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AB = 3$ и $AC = 5$. Найдите длину биссектрисы AD .
22. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AB = 3$ и $AC = 5$. Найдите длину высоты AD .
23. В треугольнике ABC известно, что $\angle A + \angle B = \angle C$, $AC = 3$ и $BC = 4$. Найдите сторону AB .
24. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 2\angle B$, $AC = 2$ и $AB = 3$. Найдите сторону BC .
25. На стороне AD квадрата $ABCD$ выбрана точка E так, что $\operatorname{tg} \angle ABE = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырехугольника $BCDE$.

3. Экономический факультет.

Отделение экономики.

Вариант 3.1 (июль 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$$

2. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

3. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD .

4. Решите неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \cos \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{6}{x} - x - 4} \right) + 3 \sin \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1} \right) = \sqrt{12}.$$

6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.
7. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v , для которых уравнение

$$364 a^2 u - 55 v = -20020 a^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях a , два из которых относятся как 3 : 5.

Вариант 3.2 (июль 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$|x^2 + 10x + 16| \geq |x^2 - 16|.$$

2. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи – со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.
3. На координатной плоскости заданы точки $A(9;1)$, $B(2;0)$, $D(1;5)$ и $E(9;7)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где C – точка пересечения прямых AD и BE .

4. Решите неравенство

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \log_{16}(16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16) > 12.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{5} \cos \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{15x - 6x^2 - x^3} \right) - \sqrt{5} \sin \left(\frac{\pi}{x} \cdot \sqrt{15x^2 - 6x^3 - x^4} \right) = \sqrt{10}.$$

6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания $a = 1$ и боковым ребром $l = \sqrt{5}$. Тринадцатый шар того же радиуса с центром внутри пирамиды касается всех двенадцати данных шаров. Найдите радиусы шаров.
7. Найдите наименьшие целочисленные значения v и w , для которых уравнение

$$85v - 308b^2w = -26180b^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях b , два из которых относятся как 5 : 1.

*Вечернее отделение.***Вариант 3.3 (июль 2001 г.)**

1. Решите уравнение

$$\sqrt{7} \sin x - 6 \sin 2x + \sqrt{7} \sin 3x = 0.$$

2. Решите неравенство $|x^2 - 13x + 36| \geq |36 - x^2|$.

3. Вследствие неблагоприятных погодных условий план сбора свеклы на первом поле был невыполнен на 20 %, а на втором – на 15 %. При этом общий урожай с двух полей составил 328 тонн свеклы, что составляет 82 % общего плана. Определите план сбора свеклы с каждого поля.

4. На координатной плоскости заданы точки $A(1; 3)$, $B(1; 9)$, $C(6; 8)$ и $E(5; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где D – точка пересечения прямых AC и BE .

5. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{5}}(5^x - 2) \cdot \log_5(25^{x+1} - 20 \cdot 5^{x+1} + 100) > 24.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{7} \cos \left(\frac{\pi}{x} \cdot \sqrt{6x^2 + 6x^3 - x^4} \right) + \sqrt{7} \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{6x^2 + 6x - x^3} \right) = \sqrt{14}.$$

7. Центры восьми шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания $a = 2$ и боковым ребром $l = \sqrt{6}$. Девятый шар того же радиуса с центром внутри пирамиды касается всех восьми данных шаров. Найдите радиус шаров.

Вариант 3.4 (июль 2001 г.)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \cos x - 4 \cos 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 0.$$

2. Решите неравенство $|x^2 + 5x + 4| \leq |x^2 - 4|$.
3. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их на общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55%?
4. На координатной плоскости заданы точки $A(1;9)$, $C(5;8)$, $D(8;2)$ и $E(2;2)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где B – точка пересечения прямых EC и AD .
5. Решите неравенство

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_9(9^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+3} + 81) < 3.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

7. Центры восьми шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной четырехугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех восьми данных шаров.

Отделение менеджмента.

Вариант 3.5 (июль 2001 г.)

1. Решите уравнение $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x$.
2. Решите уравнение $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.
3. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их на общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55%?

4. На координатной плоскости заданы точки $A(1;9)$, $C(5;8)$, $D(8;2)$ и $E(2;2)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где B – точка пересечения прямых EC и AD .

5. Решите неравенство

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_9(9^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+3} + 81) < 3.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

Вариант 3.6 (июль 2001 г.)

1. Решите уравнение $\sin x + \sin 3x = \sqrt{2} \sin 2x$.
2. Решите уравнение $|x^2 + 10x + 16| = |x^2 - 16|$.
3. Вследствие неблагоприятных погодных условий план сбора свеклы на первом поле был невыполнен на 20%, а на втором – на 15%. При этом общий урожай с двух полей составил 328 тонн свеклы, что составляет 82% общего плана. Определите план сбора свеклы с каждого поля.
4. На координатной плоскости заданы точки $A(1;3)$, $B(1;9)$, $C(6;8)$ и $E(5;1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где D – точка пересечения прямых AC и BE .

5. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{5}}(5^x - 2) \cdot \log_5(25^{x+1} - 20 \cdot 5^{x+1} + 100) > 24.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{7} \cos \left(\frac{\pi}{x} \cdot \sqrt{6x^2 + 6x^3 - x^4} \right) + \sqrt{7} \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{6x^2 + 6x - x^3} \right) = \sqrt{14}.$$

4. Институт стран Азии и Африки.

Вариант 4.1 (июль 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3\sqrt{3x - 2x^2}} \geq 0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x,$$

удовлетворяющие условиям $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$.

3. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

4. Решите неравенство

$$(1 + \log_3 x) \cdot \sqrt{\log_{3x} \sqrt[3]{\frac{x}{3}}} \leq 2.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

7. Решите уравнение

$$\frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

Вариант 4.2 (июль 2001 г.)

1. Решите неравенство

$$\frac{4 + 3x - x^2}{\sqrt{9 + 2\sqrt{3x - x^2}}} \leq 0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$3 \sin^2 2x + 2 \sin x = 2 \sin^3 x,$$

удовлетворяющие условиям $\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$.

3. Расстояние между городами А и Б равно 200 км. Из А в разное время выехали автобус, мотоцикл и автомобиль, скорости которых постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А отправился автобус, в середине маршрута его догнал автомобиль, выехавший на 4 часа позже автобуса. В пункт Б автобус прибыл одновременно с мотоциклом, выехавшим из А на 6 час 40 минут позже автобуса. Определите скорости автобуса, мотоцикла и автомобиля.

4. Решите неравенство

$$(1 + \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{2x} \sqrt{\frac{x}{2}}} \leq 1.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{7}$, $BC = 4$ и $AC = \sqrt{3}$. Сравните величину угла AOB и 105° , если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.
6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + a(y + 1) = 2a, \\ x^3 + a(2y^3 + 1) = ay^3 + 2a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

7. Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin x}{\sin x} \cdot \sqrt{3 + 2x + 2y - 2xy - x^2 - y^2} + 2 - \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \frac{2 \cos x + 5 \sin x}{\sin x}.$$

5. Факультет Государственного управления.

Вариант 5.1 (июль 2001 г.)

1. Решите уравнение $\sin x + \sin 3x = \sqrt{3} \sin 2x$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 13x + 36| = |36 - x^2|$.

3. В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи – со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

4. На координатной плоскости заданы точки $A(9;1)$, $B(2;0)$, $D(1;5)$ и $E(9;7)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где C – точка пересечения прямых AD и BE .

5. Решите неравенство

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \log_{16}(16^{x+1} - 8 \cdot 4^{x+1} + 16) > 12.$$

6. Решите уравнение

$$\arccos\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right)\right) - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

Вариант 5.2 (июль 2001 г.)

1. Решите уравнение $\cos x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 2x$.

2. Решите уравнение $|x^2 + 5x + 4| = |x^2 - 4|$.

3. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем их продала на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?
4. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD .
5. Решите неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

6. Решите уравнение

$$\arcsin \left(\cos \left(\pi \cdot \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x^2 - 5x + 7} \right) - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{6} = 0.$$

6. Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Вариант 6.1 (май 2001 г.)

1. Определите все целые значения x , для которых дробь

$$\frac{x^2(x^2 - 35)(x^2 - 10)}{(x^2 - 64)(x^2 - 100)}$$

является неположительной.

2. Решите неравенство

$$\frac{|x - 1|}{3 - x} \geq \frac{|x - 1|}{3 - 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\lg(4^x - 5) - \lg(5 - 2^x) \geq \lg 2.$$

4. Найдите все пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию

$$(|x| - 2x) y^2 \leq 18x(6 - 2y).$$

5. Решите уравнение

$$\frac{4 \sin x - 3}{\sqrt{7} \sin x + 3 \cos x} = 1.$$

6. Решите неравенство

$$x > \sqrt{1 + \frac{3x}{4}} - \sqrt{1 - \frac{3x}{4}}.$$

7. В трапеции $ABCD$ стороны $BC \parallel AD$, $BC < AD$, диагональ BD в $4/3$ раза больше радиуса окружности, описанной вокруг трапеции. Найдите отношение CD к радиусу, если площади треугольников ABD и BCD относятся как $5 : 1$.

8. Решите уравнение

$$2^{|x^2+2x|} + 2^{x^2+2x} + 2^{-2x-x^2+1} = 5.$$

9. Для каждого значения a решите неравенство

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} > x.$$

Вариант 6.2 (май 2001 г.)

1. Определите целые значения x , для которых дробь

$$\frac{x^2(50 - x^2)(x^2 - 99)}{(x^2 - 4)(x^2 - 16)}$$

является неотрицательной.

2. Решите неравенство

$$\frac{|x+2|}{7+3x} \leq \frac{|x+2|}{7+x}.$$

3. Решите неравенство

$$\lg(4 - 3^x) + \lg 4 \leq \lg(9^x - 5).$$

4. Найдите все пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию

$$(|x| + 2x) y^2 \leq 24x(y - 2).$$

5. Решите уравнение

$$\frac{2 + 3 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{5} \cos x} = 1.$$

6. Решите неравенство

$$x < \sqrt{1 + \frac{4x}{5}} - \sqrt{1 - \frac{4x}{5}}.$$

7. В трапеции $ABCD$ стороны $BC \parallel AD$, $BC < AD$, диагональ BD в $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ раза больше радиуса окружности, описанной вокруг трапеции. Найдите отношение площадей треугольников ABD и BCD , если отношение стороны AD к радиусу равно $2 : 1$.

8. Решите уравнение

$$2 \cdot 3^{|x^2-2x|} + 3^{x^2-2x} + 3^{2x-x^2+1} = 10.$$

9. Для каждого значения a решите неравенство

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} < x.$$

Вариант 6.3 (июль 2001 г.)

1. В коробке находятся красные и синие шары, причем синие шары составляют 1% от общего числа шаров. После того, как из коробки взяли часть красных шаров, доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2%. Найдите отношение числа взятых красных шаров к первоначальному общему числу шаров в коробке.

2. Решите уравнение

$$|\sin x| = \cos x + \frac{1}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{|x-1| - |2x+1|}{|x-2| - |2x+2|} \geq 0.$$

4. Решите неравенство

$$\lg(5x - x^2) - \lg(x^2 - 3x) \leq \lg(x^2 - 13x + 40).$$

5. Выясните, при каких значениях a уравнение имеет решения и найдите эти решения:

$$2^{\frac{x^2+1}{x^2}} + 2^{\frac{x^2-1}{x^2}} = a.$$

6. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен 1. Известно, что $BC : AB = 3 : 2$, $AC : AB = 2 : 1$. Найдите высоты h_A , h_B и h_C , опущенные из вершин A , B и C соответственно.

7. Решите уравнение

$$8|\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x| = \cos 18x + 12 \cos 9x + 27.$$

8. Решите уравнение

$$\sqrt{2^{x^2+2x} \cdot 5^{x^2-5x+5}} - 50 = \sqrt{2^{4-x^2} \cdot 5^{2x^2-2x+1}} - 50.$$

9. В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Четырехугольник, полученный при пересечении этих биссектрис, имеет площадь, равную $2/3$ площади исходного параллелограмма. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к меньшей.

Вариант 6.4 (июль 2001 г.)

1. В коробке находятся черные и белые шары, причем черные шары составляют 3% от общего числа шаров. После того, как в коробку дополнительно положили несколько белых шаров, доля черных от общего числа шаров, оказавшихся в коробке, составила 1%. Найдите отношение числа дополнительно положенных белых шаров к первоначальному общему числу шаров в коробке.

2. Решите уравнение

$$|\cos x| = \sin x + \frac{1}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{|2x+1| - |x-4|}{|3x-1| - |x+1|} \geq 0.$$

4. Решите неравенство

$$\lg(4x - x^2) - \lg(x^2 - 2x) \geq \lg(x^2 - 10x + 24).$$

5. Выясните, при каких значениях a уравнение имеет решения и найдите эти решения:

$$3^{\frac{x^2+1}{x^2}} + 3^{\frac{x^2-1}{x^2}} = a.$$

6. В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины A , равна 1. Известно, что $BC : AB = 2 : 1$, $AC : AB = 3 : 2$. Найдите радиус вписанной окружности и высоты h_B и h_C , опущенные из вершин B и C соответственно.

7. Решите уравнение

$$2\sqrt{2} |\sin 3x + \cos 3x| = \cos 16x - 8 \cos 8x + 11.$$

8. Решите уравнение

$$\sqrt{32x^2 - x} \cdot 4x^2 + 3x + 3 - 120 = \sqrt{3^{2+x^2} \cdot 4^{2x^2-1} - 120}.$$

9. В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Найдите отношение площади четырехугольника, полученного при пересечении этих биссектрис, к площади исходного параллелограмма, если отношение большей стороны параллелограмма к меньшей равно 2.

Ответы и решения.

1. Факультет Вычислительной математики и кибернетики.

Вариант 1.1.

1. Ответ: 12.

*Решение*¹. Пусть a_1 – первый член и d – разность арифметической прогрессии. Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

из условия задачи получаем систему

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 27, \\ 5a_1 + 10d = 80. \end{cases}$$

Отсюда $a_1 = 2$, $d = 7$. Та же формула для S_n дает теперь уравнение относительно n :

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7 = 486 \Leftrightarrow 7n^2 - 3n - 972 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, получаем единственное значение $n = 12$.

$$2. \text{ Ответ : } \left\{ \left(\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m; \pi + \arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right); \right. \\ \left. \left(-\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m; -\arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right); m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 6 \sin x = -2 \cos y, \\ 6 \cos x = 2 \sin y + 7. \end{cases}$$

¹Здесь и ниже $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Возводя каждое уравнение системы в квадрат и складывая результаты, имеем

$$36 \sin^2 x + 36 \cos^2 x = 4 \cos^2 y + 4 \sin^2 y + 28 \sin y + 49 \Leftrightarrow$$

$$36 = 4 + 28 \sin y + 49, \text{ откуда } \sin y = -\frac{17}{28}.$$

Теперь из второго уравнения системы находим $\cos x = \frac{27}{28}$. Из этих равенств следует

$$x = \begin{cases} \arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m, \\ -\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

При возведении в квадрат могли появиться посторонние решения. Для получения ответа надо иметь в виду, что подходят только такие пары $(x; y)$, для которых $\sin x$ и $\cos y$ имеют разные знаки. Таким образом, получаются пары:

$$\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m, \\ y = \pi - \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m, \\ y = \arcsin\left(-\frac{17}{28}\right) + 2\pi n, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$.

3. Ответ: 10 км/час.

Решение. Пусть v (км/час) – первоначальная скорость велосипедистов, τ (час) – время, прошедшее с момента выезда велосипедистов до момента изменения скорости первым велосипедистом.

Известно, что на весь путь первый велосипедист затратил 15 час. Поэтому

$$v\tau + (v + 10)(15 - \tau) = 180 \Leftrightarrow 3v - 2\tau = 6. \quad (1)$$

Возможны два случая.

1 случай. Встреча произошла до момента или в момент изменения скорости первым велосипедистом. Из условий задачи получаем уравнение

$$\frac{180}{2v} - \frac{180}{2v + 10} = 3 \Leftrightarrow v^2 + 5v - 150 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 10 \\ v = -15. \end{cases}$$

Подходит только положительное значение $v = 10$. Тогда из (1) получаем $\tau = 12$. Следовательно, в момент $\tau = 12$ час. первый велосипедист находился в 120 км, а второй велосипедист – в $(180 - 120) = 60$ км от пункта А. Значит, расстояние между ними было равно $60 < 70$ км.

Таким образом, первый случай отвечает условиям задачи. Графики движения велосипедистов изображены на рис. 1.

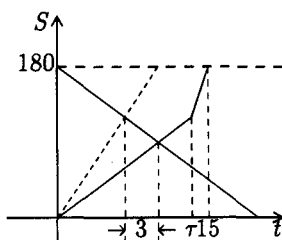


Рис. 1.

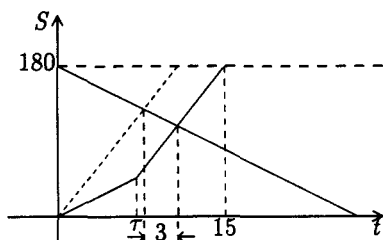


Рис. 2.

2 случай. Встреча произошла в момент $t_0 > \tau$ (см. рис. 2). Тогда

$$\tau + \frac{180 - 2v\tau}{2v + 10} = t_0.$$

В случае движения первого велосипедиста с увеличенной скоростью с самого начала имеем

$$\frac{180}{2v + 10} = t_0 - 3.$$

Исключая t_0 и учитывая уравнение (1), получаем систему

$$\begin{cases} \tau - \frac{v\tau}{v+5} = 3, \\ 3v - 2\tau = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\tau - 3v = 15, \\ 3v - 2\tau = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{20}{3}, \\ \tau = 7. \end{cases}$$

Расстояние между велосипедистами в момент τ равно

$$180 - 2v\tau = 180 - \frac{2 \cdot 20}{3} \cdot 7 = \frac{260}{3} > 70,$$

что противоречит условию задачи.

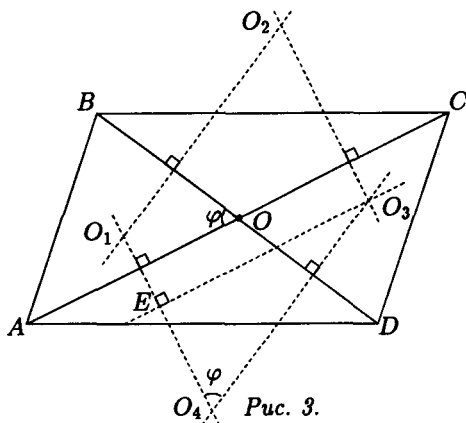
Итак, $v = 10$.

4. Ответ: $S = \frac{192}{17}$ или $S = \frac{1728}{25} = 69,12$.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис. 3), O_1 , O_2 , O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB , BOC , COD и AOD соответственно. Пусть $\angle AOB = \varphi$ ($0 < \varphi < \pi$).

Так как O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_4 и O_1O_4 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BO , CO , DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм, где $\angle O_1O_4O_3 = \angle AOB = \varphi$.

Обозначим через E проекцию точки O_3 на прямую O_1O_4 . Поскольку $AO = OC$, имеем $O_3E = AO$. Тогда $AO = O_3O_4 \cdot \sin \varphi = 16 \sin \varphi$. По теореме синусов для треугольника ABO , в котором известен радиус описанной окружности $R = 5$, получаем $AB = 2R \sin \varphi = 10 \sin \varphi$.



В том же треугольнике $BO = \frac{BD}{2} = 6$, следовательно, по теореме косинусов

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cos \varphi$$

$$\text{т.е. } 100 \sin^2 \varphi = 256 \sin^2 \varphi + 36 - 192 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Заменяя 36 на $36 \sin^2 \varphi + 36 \cos^2 \varphi$ и поделив полученное равенство на $12 \sin^2 \varphi$ ($\sin^2 \varphi \neq 0$), приходим к квадратному уравнению

$$3 \operatorname{ctg}^2 \varphi - 16 \operatorname{ctg} \varphi + 16 = 0.$$

Отсюда имеем два решения

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{4}{3} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \varphi = 4.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{или} \quad \sin \varphi = \frac{3}{5}.$$

Остается найти S - площадь параллелограмма $ABCD$:

$$S = 4 \cdot S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \varphi = 192 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Соответственно получаем два варианта ответа:

$$S = \frac{192}{17} \quad \text{или} \quad S = \frac{1728}{25} = 69,12.$$

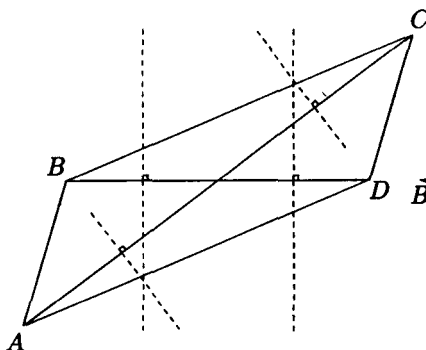


Рис. 4.1.

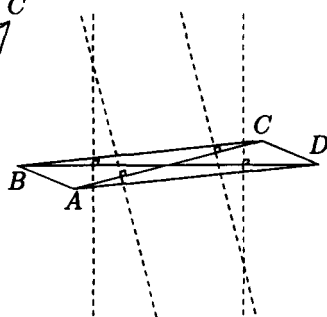


Рис. 4.2.

Замечание. Два различных значения площади параллелограмма получаются потому, что центры описанных окружностей O_1 , O_2 и O_3 , O_4 попарно могут лежать либо по разные стороны (первое значение в ответе), либо по одну сторону (второе значение в ответе) от прямой BD (см. соответственно рис. 4.1 и 4.2).

5. Ответ: При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ $x \in \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right) \cup \left(-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$;
при $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right)$ $x \in (-4; -3 - \varphi(a)) \cup \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right) \cup$

$$\cup \left(-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup [-3 + \varphi(a); -2);$$

при $a = \frac{1}{10}$ $x \in (-4; -3) \cup (-3; -2);$

при $a \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right)$ $x \in \left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup [-3 - \varphi(a); -3) \cup$
 $\cup (-3; -3 + \varphi(a)) \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right);$

при $a \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ $x \in \left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right).$

Здесь принято обозначение $\varphi(a) = \left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3} \sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}.$

Решение. ОДЗ данного неравенства состоит из всех x , удовлетворяющих системе условий

$$\begin{cases} 0 < |x+3| \neq 1, \\ \log_{|x+3|} 9 \leq 0, \\ \log_{81} (x+3)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < |x+3| < 1.$$

Отсюда $x \in (-4; -3) \cup (-3; -2).$

Обозначим

$$t = 3^{-2 \cdot \sqrt{-\log_{81} (x^2+6x+9)}} = 3^{-2 \cdot \sqrt{-\log_9 |x+3|}},$$

$$y = |x+3|^{2 \cdot \sqrt{-\log_{|x+3|} 9}}.$$

Тогда

$$\log_3 t = -2 \cdot \sqrt{-\log_9 |x+3|} < 0,$$

следовательно, на ОДЗ справедливо $0 < t < 1.$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \log_3 y &= 2 \cdot \sqrt{-\log_{|x+3|} 9} \cdot \log_3 |x+3| = 4 \log_9 |x+3| \cdot \sqrt{-\log_{|x+3|} 9} = \\ &= \frac{4 \log_9 |x+3|}{\sqrt{-\log_9 |x+3|}} = -4 \sqrt{-\log_9 |x+3|} = 2 \log_3 t. \end{aligned}$$

Поэтому $y = t^2$, и мы приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 3(a+2)t^2 + (8a-5)t - (3a-1) \geq 0, \\ 0 < t < 1, \end{cases}$$

которую требуется решить при всех значениях параметра a .

Если $a = -2$, то $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Пусть $a \neq -2$. Рассмотрим квадратный трехчлен в первом неравенстве системы. Его дискриминант равен

$$D = (8a-5)^2 + 4 \cdot 3 \cdot (a+2)(3a-1) = (10a-1)^2.$$

Определив корни трехчлена $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1-3a}{a+2}$, приведем систему к виду

$$\begin{cases} (a+2)\left(t - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1-3a}{a+2}\right) \geq 0, \\ 0 < t < 1. \end{cases} \quad (1)$$

1) Если $a < -2$, то $a+2 < 0$ и $\frac{1-3a}{a+2} < 0$. Следовательно, последняя система имеет решение $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

2) Если $a \geq \frac{1}{3}$, то $a+2 > 0$ и $\frac{1-3a}{a+2} \leq 0$. Тогда система (1) имеет решение $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

3) Если $-2 < a < \frac{1}{3}$, то $a+2 > 0$ и систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \left(t - \frac{1}{3}\right)\left(t - \frac{1-3a}{a+2}\right) \geq 0, \\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения точек $\frac{1}{3}$ и $\frac{1-3a}{a+2}$ на оси t .

а) Если $a \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right)$, то $0 < \frac{1-3a}{a+2} < \frac{1}{3}$.

Тогда $t \in \left(0; \frac{1-3a}{a+2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

b) Если $a = \frac{1}{10}$, то $t \in (0; 1)$.

c) Если $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right)$, то $\frac{1}{3} < \frac{1-3a}{a+2} < 1$. Тогда $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1-3a}{a+2}; 1\right)$.

d) Если $a \in \left(-2; -\frac{1}{4}\right]$, то $\frac{1-3a}{a+2} \geq 1$. Тогда $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Итак, система неравенств относительно t решена при всех значениях параметра a . Упорядочим по a полученные результаты:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$;

при $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right)$ $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1-3a}{a+2}; 1\right)$;

при $a = \frac{1}{10}$ $t \in (0; 1)$;

при $a \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right)$ $t \in \left(0; \frac{1-3a}{a+2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

при $a \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ $t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

Остается вернуться к переменной x , которая связана с t посредством равенства

$$t = 3^{-2 \cdot \sqrt{-\log_3 |x+3|}} = 3^{-\sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|}}.$$

Установим теперь окончательный результат.

1) При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ получаем

$$3^{-\sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|}} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 |x+3| \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < |x+3| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right) \cup \left(-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

2) При $a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right)$ имеем

$$\begin{cases} 3^{-\sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|}} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1-3a}{a+2} \leq 3^{-\sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|}} < 1. \end{cases}$$

Первое из неравенств совокупности решено выше. Решаем второе неравенство:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{-2 \cdot \log_3 |x+3|} &\leq \log_3 \frac{a+2}{1-3a} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2} \cdot \log_3^2 \frac{a+2}{1-3a} &\leq \log_3 |x+3| < 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3} \sqrt{\frac{a+2}{1-3a}} &\leq |x+3| < 1. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\varphi(a) = \left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3} \sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}.$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} 0 < |x+3| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \varphi(a) \leq |x+3| < 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x \in (-4; -3 - \varphi(a)] \cup \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right) \cup \left(-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \\ \cup [-3 + \varphi(a); -2). \end{aligned}$$

Аналогично находим остальные части ответа.

6. Ответ: $V = 729\sqrt{6}$; $R = \frac{27 - 3\sqrt{11}}{4\sqrt{2}}$.

Решение. Докажем вспомогательное

Утверждение. Пусть в треугольник GSH вписана окружность с центром в точке O , касающаяся его сторон GS и GH соответственно в точках K и M . Прямая KM пересекает прямую SO в точке P . Тогда $\angle SPH = 90^\circ$.

Доказательство: i) Если треугольник GSH равнобедренный, $GS = SH$, то точки P и M совпадают. SM является биссектрисой, медианой и высотой треугольника GSH , поэтому угол SPH – прямой.

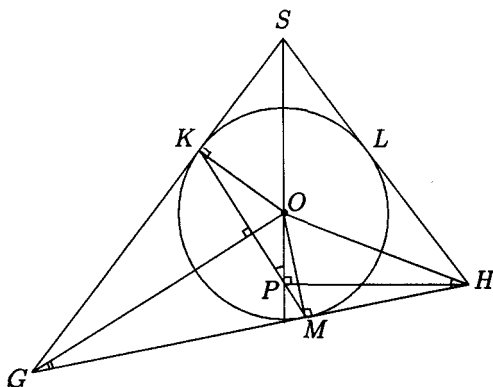


Рис. 5.

ii) Пусть в треугольнике GSH $SH < GS$. Тогда точки H и M лежат по одну сторону от прямой SO (докажите!), а P лежит внутри треугольника GSH (см. рис. 5).

Пусть $\angle GSH = \alpha$, $\angle SGH = \beta$, $\angle SHG = \gamma$.

Поскольку углы OKG и OMG – прямые, точки O, K, G, M лежат на одной окружности, следовательно, $\angle OKM = \angle OGM = \frac{\beta}{2}$. Тогда из треугольника SKP имеем $\angle SPK = \pi - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}$. Поэтому $\angle OPM + \angle OHM = \pi - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi$, следовательно выпуклый четырехугольник $OPMH$ является вписанным в некоторую окружность. Но тогда $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$.

iii) Пусть теперь $SH > GS$. Тогда точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO , а P находится вне треугольника GSH (см. рис. 6).

Дословно повторяя рассуждения п. ii), получаем $\angle OKM = \angle OGM = \frac{\beta}{2}$, поэтому $\angle SPK = \frac{\gamma}{2}$. Так как равные углы OPM и OHM опираются на один и тот же отрезок OM , а их вершины P и H находятся

по одну сторону от прямой OM , то существует окружность, проходящая через точки O, H, P, M . Следовательно, $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$. Утверждение доказано.

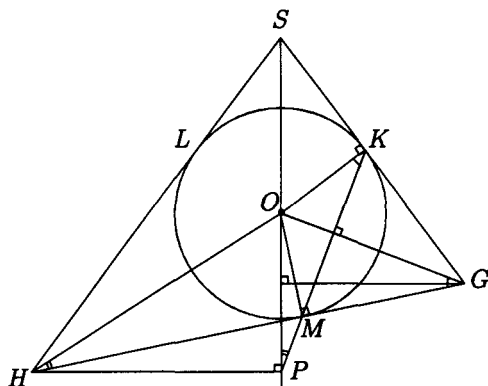


Рис. 6.

Сфера, о которой идет речь в условии задачи, в пересечении с плоскостью ASB даёт окружность, вписанную в треугольник GSH . Последний отсекается от треугольника ASB плоскостью, касающейся сферы в точке M (см. рис. 7 и рис. 8).

Обозначим $AB = a$ и $GH = b$. Из доказанного утверждения следует, что точки пересечения прямых KM и LM с апофемой SN грани ASB являются проекциями точек G и H на эту апофему. Следовательно, так как по условию задачи апофема делится прямыми KM и LM на три равных отрезка, одна из этих точек делит ребро в отношении $1:2$, а другая — $2:1$. Пусть для определённости $SA = SB = 3x$, $SG = x$ и $SH = 2x$. Пусть $\angle ASB = \alpha$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ASB :

$$18x^2 - 18x^2 \cos \alpha = a^2, \text{ откуда } \cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{18x^2}.$$

Теперь теорема косинусов для треугольника GSH дает

$$x^2 + 4x^2 - 4x^2 \left(1 - \frac{a^2}{18x^2}\right) = b^2, \text{ откуда } x^2 = \frac{9b^2 - 2a^2}{9}.$$

Поэтому $SA = \sqrt{9b^2 - 2a^2}$.

Пусть $SI = h$ – высота пирамиды. $AI = a$, поскольку $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Тогда из треугольника SAI по теореме Пифагора $h = \sqrt{9b^2 - 3a^2}$. Отсюда

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot S_{AIB} \cdot h = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

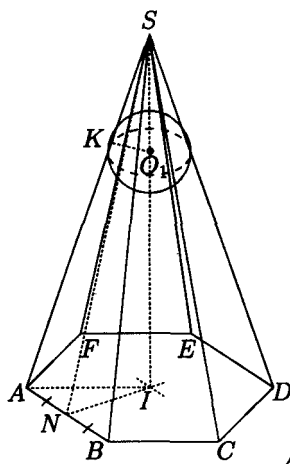


Рис. 7.

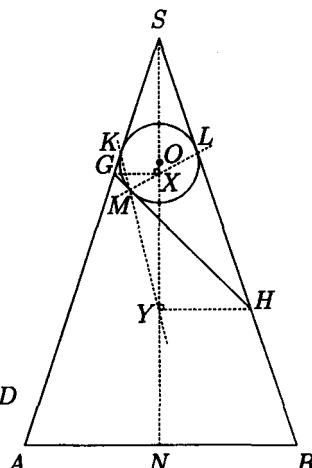


Рис. 8.

Найдем теперь радиус сферы. Пусть O_1 – ее центр, $O_1K = R$ – искомый радиус. Из подобия прямоугольных треугольников SAI и SO_1K получаем

$$R = AI \cdot \frac{SK}{SI} \Leftrightarrow R = a \cdot \frac{SK}{h}.$$

Используя теорему об отрезках касательных, выходящих из одной точки, имеем

$$SK = \frac{SG + SH - GH}{2} = \frac{3x - b}{2} = \frac{\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b}{2}.$$

$$\text{Значит, } R = \frac{a(\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b)}{2\sqrt{9b^2 - 3a^2}}.$$

Подставляя данные задачи $a = 9$ и $b = 3\sqrt{11}$, находим ответ.

Вариант 1.2.**Ответы.**

1. 13.

$$2. \left\{ \left(\arcsin \left(\frac{37}{40} \right) + 2\pi m; \arccos \left(\frac{13}{20} \right) + 2\pi n \right); \right. \\ \left. \left(\pi - \arcsin \left(\frac{37}{40} \right) + 2\pi m; -\arccos \left(\frac{13}{20} \right) + 2\pi n \right); m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. 5 км/час.

$$4. AB = 24 \text{ или } AB = \frac{104}{\sqrt{41}}.$$

$$5. \text{ При } a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \quad x \in \left(3; 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 5\right);$$

$$\text{при } a \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \quad x \in \left(3; 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup [4 - \varphi(a); 4) \cup (4; 4 + \varphi(a)] \cup \\ \cup \left[4 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 5\right);$$

$$\text{при } a = -1 \quad x \in (3; 4) \cup (4; 5);$$

$$\text{при } a \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \quad x \in (3; 4 - \varphi(a)] \cup \left[4 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 4\right) \cup \left(4; 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \\ \cup [4 + \varphi(a); 5);$$

$$\text{при } a \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right) \quad x \in \left[4 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 4\right) \cup \left(4; 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{Здесь принято обозначение } \varphi(a) = \left(\frac{2a+3}{1-a}\right)^{\log_2 \sqrt{\frac{1-a}{2a+3}}}.$$

$$6. \quad V = \frac{125\pi\sqrt{222}}{27}; \quad R = \frac{25 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{74}}.$$

Вариант 1.3.

$$1. \text{ Ответ: } \left\{ \left(\frac{1}{3}; 1 \right) \right\}.$$

Решение. Пусть $\log_3 x = u$; $5^y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{10}{v} = -2u, \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{5}{v}, \\ v^2 - 4v - 5 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет корни $v = -1$; $v = 5$. Учитывая, что $v > 0$, получаем единственное решение системы

$$\begin{cases} u = -1, \\ v = 5, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = 1. \end{cases}$$

2. Ответ: $a_{20} = 119$.

Решение. Пусть $a_n = a_1 + (n - 1)d$ — общий член арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d . Так как все члены этой прогрессии натуральные числа, то разность d тоже натуральное число. По условию задачи

$$\begin{cases} S_4 = 56, \\ 67 < a_{12} < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 56, \\ 67 < a_1 + 11d < 74 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 = 28 - 3d, \\ 67 < \frac{28 - 3d}{2} + 11d < 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 28 - 3d, \\ \frac{106}{19} < d < \frac{120}{19}. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 6, \end{cases}$ поэтому $a_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$.

3. Ответ: $\left\{ \left(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5} \right) \right\}$.

Решение. Перепишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} y \leq -3x - 3, \\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4^2. \end{cases}$$

Множество M точек плоскости Oxy , координаты $(x; y)$ которых являются решениями данной системы, — это часть круга радиуса 4 с центром в точке $O_1(-2; -1)$, лежащая под прямой AB , имеющей уравнение $y = -3x - 3$, вместе с хордой AB (см. рис. 9).

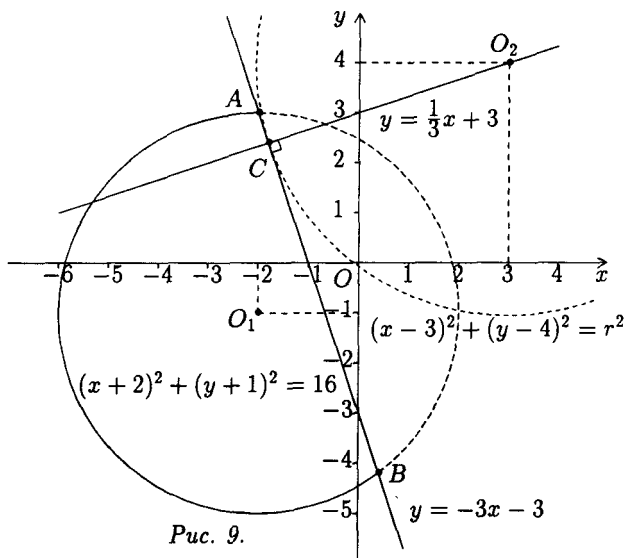


Рис. 9.

Значение данной в условии функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$$

равно квадрату расстояния между точками $(x; y)$ и $(3; 4)$. Поэтому на множестве решений системы функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение в точке множества M , ближайшей к точке $O_2(3; 4)$. Чтобы найти это решение, через точку O_2 проведем прямую, перпендикулярную прямой AB .

Перпендикулярными к прямым вида $y = kx + c$ являются прямые $y = -\frac{1}{k}x + d$. Отсюда нетрудно получить уравнение искомой прямой: $y = \frac{1}{3}x + 3$.

Точка C пересечения этой прямой с AB находится из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -3x - 3, \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5}, \\ y = \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Для завершения решения достаточно убедиться, что $C \in M$:

$$\left(-\frac{9}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{12}{5} + 1\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{289}{25} = \frac{58}{5} < 16.$$

4. Ответ: $\{(4n - 3)^2, n \in N\}$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение, заменив произведение на сумму:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(6x + 15\sqrt{x})\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x - 13\sqrt{x})\right) = 2.$$

Так как значение синуса не превосходит единицы, это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}(6x + 15\sqrt{x})\right) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x - 13\sqrt{x})\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(6x + 15\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \\ \frac{\pi}{2}(2x - 13\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z. \end{cases}$$

После упрощения имеем систему:

$$\begin{cases} 6x + 15\sqrt{x} = 4k + 1, \quad k \in Z, \\ 2x - 13\sqrt{x} = 4l + 1, \quad l \in Z. \end{cases} \quad (1)$$

Ее решения суть такие неотрицательные значения x , для которых существуют некоторые целые k и l , удовлетворяющие уравнениям системы.

Докажем, что любое такое число x является квадратом целого числа. Вычитая из первого уравнения системы утроенное второе, получаем равенство

$$54\sqrt{x} = 4k - 12l - 2 \Leftrightarrow 27\sqrt{x} = 2k - 6l - 1,$$

из которого следует, что x – квадрат рационального числа. Заметим, что $x = 0$ не является решением.

Пусть $x = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, где p и q – взаимно простые натуральные числа, $q \geq 2$. Тогда из второго уравнения системы (1) имеем

$$2\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 13\frac{p}{q} = 4l + 1 \Leftrightarrow 2p^2 = q(13p + (4l + 1)q).$$

Покажем, что последнее уравнение не имеет решений при $q > 2$. Действительно, если $q = 2s$, где $s \geq 2$, то p^2 делится на s , значит у p и q есть общий простой делитель, что противоречит предположению о взаимной простоте чисел p и q .

Если же $q = s$, где $s \geq 3$ – нечётное число, то p^2 делится на s . Аналогично предыдущему случаю получаем противоречие.

Рассмотрим случай $q = 2$. Подстановка в уравнения (1) $x = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ приводит к системе

$$\begin{cases} 3p^2 + 15p = 8k + 2, \\ p^2 - 13p = 8l + 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения вычтем утроенное второе. Тогда

$$54p = 8k - 24l - 4 \Leftrightarrow 27p = 4k - 12l - 2.$$

Значит, p – чётное число, то есть p и q не являются взаимно простыми. Снова получаем противоречие.

Итак, $x = m^2$ – квадрат натурального числа. Пусть $m = 4t + r$, где t – целое неотрицательное число, а $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ – остаток от деления m на 4. Тогда система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} m(6m + 15) = 4k + 1, \\ m(2m - 13) = 4l + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4t + r)(24t + 6r + 15) = 4k + 1, \\ (4t + r)(8t + 2r - 13) = 4l + 1. \end{cases}$$

Перепишем уравнения, выделяя слагаемые, кратные 4:

$$\begin{cases} (4t + r)(24t + 4r + 16 + (2r - 1)) = 4k + 1, \\ (4t + r)(8t - 12 + (2r - 1)) = 4l + 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что система имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда число $r(2r - 1)$ при делении на 4 дает в остатке 1. Перебором убеждаемся, что это возможно лишь при $r = 1$.

Итак, решениями исходного уравнения являются все целые числа, являющиеся квадратами тех натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, т.е. $x = (4n + 1)^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, или, что то же самое, $x = (4n - 3)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Ответ: $8 + 4\sqrt{6} - 10 \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (рис. 11). Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая: $AB = CD$. Пусть M и N – середины оснований трапеции BC и AD соответственно, тогда MN – высота трапеции, $MN = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

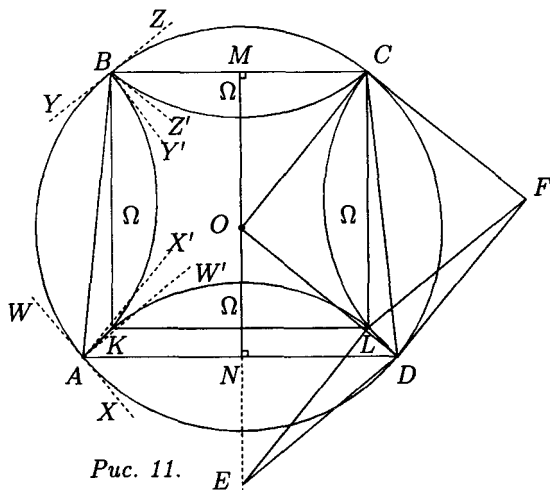


Рис. 11.

Центр O описанной около трапеции окружности лежит на прямой MN . Поскольку

$$MO = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3} < MN,$$

точка O лежит внутри трапеции. Тогда $NO = MN - MO = \sqrt{2}$, а $AN = ND = \sqrt{OD^2 - ON^2} = \sqrt{3}$. Следовательно, $AD > BC$, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ – острые углы, а $\angle ABC = \angle DCB$ – тупые углы.

Дуги $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CD$ и $\smile AD$ отражаются внутрь трапеции симметрично относительно прямых AB , BC , CD и AD соответственно. Дуги, отражённые внутрь трапеции, далее будем называть внутренними. Пусть XW и YZ – касательные, проведённые к окружности

в точках A и B соответственно, AW' , AX' , BY' и BZ' – лучи, симметричные лучам AW , AX , BY и BZ относительно прямых AB , AD , AB и BC соответственно. (Таким образом, AW' касается внутренней дуги AB в точке A , AX' касается внутренней дуги AD и т.д.)

Пусть E и F – точки, симметричные точке O относительно прямых AD и CD соответственно.

Заметим, что каждый из углов $\angle WAB$, $\angle XAD$ – это угол между касательной и хордой, поэтому

$$\begin{aligned}\angle W'AB + \angle X'AD &= \angle WAB + \angle XAD = \\ &= \angle BCA + \angle ACD = \angle BCD > \angle BAD.\end{aligned}$$

Это означает, что внутренние дуги AB и AD пересекаются внутри трапеции. Пусть K – точка их пересечения.

Аналогично доказывается, что внутренние дуги CD и AD тоже пересекаются в некоторой точке L .

В то же время

$$\angle Y'BA + \angle Z'BC = \angle YBA + \angle ZBC = \angle ADC < \angle ABC,$$

откуда следует, что внутренние дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции. Аналогично, не пересекаются внутренние дуги BC и CD . Так как $OC = OD = FC = FD = ED = EL = FL = \sqrt{5}$, то $OCFD$ и $ELFD$ – ромбы, значит $OC \parallel FD \parallel EL$. Следовательно, $EOCL$ – параллелограмм. $CL = OE = 2 \cdot ON = 2\sqrt{2}$, $CL \parallel OE$. Отсюда получается, что $BC = CL$, $BC \perp CL$. Аналогично доказывается, что $BC = BK$, $BC \perp BK$. Значит, $KBCL$ – квадрат.

Таким образом, дуги $\smile BC$, $\smile BK$, $\smile CL$ и $\smile KL$ равны, так как это дуги равных окружностей, стягиваемые равными хордами. Дуги $\smile AB$ и $\smile BC$ не пересекаются внутри трапеции, следовательно, дуги $\smile BC$, $\smile BK$, $\smile CL$ и $\smile KL$ не пересекаются внутри квадрата $KBCL$. Пусть Ω – площадь каждого из сегментов, отсекаемых равными хордами BC , BK , CL и KL от равных окружностей. Площадь s

сегмента круга радиуса r , дуга которого задается центральным углом α , вычисляется по формуле

$$s = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) .$$

В нашем случае

$$\sin \angle COM = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \cos \angle COM = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

значит,

$$\sin \angle BOC = 2 \cdot \sin \angle COM \cdot \cos \angle COM = \frac{2\sqrt{6}}{5} .$$

Поэтому

$$\Omega = \frac{5}{2} \left(\arcsin \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) - \frac{2\sqrt{6}}{5} \right) .$$

Тогда окончательно получаем, что искомая площадь S фигуры, состоящей из всех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь неё сегментов, равна

$$S = BC^2 - 4 \cdot \Omega = 8 - 10 \arcsin \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) + 4\sqrt{6} .$$

6. Ответ: $(-13 - \sqrt{57}; 8)$.

Решение. Введём обозначения

$$a = f(x^2 - 2x - 112), \quad b = f(-2x\sqrt{32 - 2x}), \quad c = f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112)$$

и представим основание степени в знаменателе в виде $3c - 2b = c + 2(c - b)$. Здесь $c < 0$, поскольку функция $f(x)$ отрицательна. Разность $c - b < 0$ в силу возрастания $f(x)$, так как

$$-2x\sqrt{32 - 2x} > -2x\sqrt{32 - 2x} - 112 .$$

Поэтому знаменатель дроби $(c + 2(c - b))^7$ в исходном неравенстве отрицателен, и, следовательно, её числитель также должен быть отрицательным:

$$2a + |a - 3b| < 0 .$$

Последнее неравенство равносильно системе из трех неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a - 3b < -2a, \\ a - 3b > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a < b, \\ a < -3b. \end{cases}$$

Первое и третье неравенства в системе выполнены вследствие отрицательности $f(x)$. Второе же в силу возрастания функции $f(x)$ равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 112 < -2x\sqrt{32 - 2x}.$$

Переписав его в виде

$$(x + \sqrt{32 - 2x})^2 < 144,$$

перейдем к эквивалентному неравенству

$$|\sqrt{32 - 2x} + x| < 12,$$

а от него к равносильной системе

$$\begin{cases} \sqrt{32 - 2x} < 12 - x, \\ \sqrt{32 - 2x} > -12 - x. \end{cases}$$

Решаем первое из неравенств системы:

$$\sqrt{32 - 2x} < 12 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 2x \geq 0, \\ x < 12, \\ x^2 - 22x + 112 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 12, \\ x \in (-\infty; 8) \cup (14; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x < 8.$$

Для второго неравенства имеем

$$\sqrt{32 - 2x} > -12 - x \Leftrightarrow \begin{cases} -12 - x < 0, \\ 32 - 2x \geq 0 \\ -12 - x \geq 0, \\ x^2 + 26x + 112 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-12; 16] \\ x \in (-13 - \sqrt{57}; -12] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-13 - \sqrt{57}; 16].$$

Пересечение полученных множеств решений дает ответ задачи $x \in (-13 - \sqrt{57}; 8)$.

Вариант 1.4.

Ответы.

1. $\left\{ \left(1; \frac{1}{5} \right) \right\}$.
2. $S_{50} = 3875$.
3. $\left\{ \left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5} \right) \right\}$.
4. $\{ 4(n-1)^2, n \in N \}$.
5. $4 + 4\sqrt{2} - 4 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.
6. $\left(-5; \frac{15 + \sqrt{65}}{2} \right)$.

Вариант 1.5.

1. Ответ: $\left\{ \left(1; \frac{1}{4} \right) \right\}$.

Решение аналогично решению задачи 1 варианта 1.3.

2. Ответ: $S_{100} = 10500$.

Решение аналогично решению задачи 2 варианта 1.3.

3. Ответ: Если $a < 4$, то $x \in \left[-\frac{a+2}{3}, 2-a \right]$;
если $a = 4$, то $x = -2$;
если $a > 4$, то решений нет.

Решение. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x + a \leq x + 2, \\ 2x + a \geq -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 - a, \\ x \geq -\frac{a+2}{3}. \end{cases}$$

Последняя система имеет решение лишь при условии

$$-\frac{a+2}{3} \leq 2 - a \Leftrightarrow a \leq 4.$$

При этом если $a = 4$, то $-\frac{a+2}{3} = 2 - a$, т.е. решение единственное.

Дадим графическую интерпретацию решения этого неравенства.

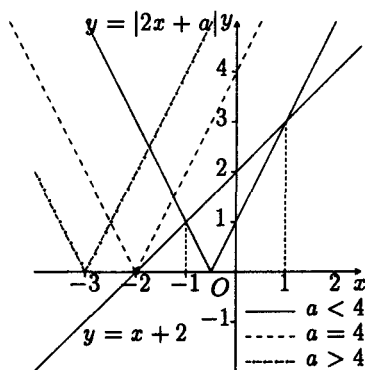


Рис. 12.

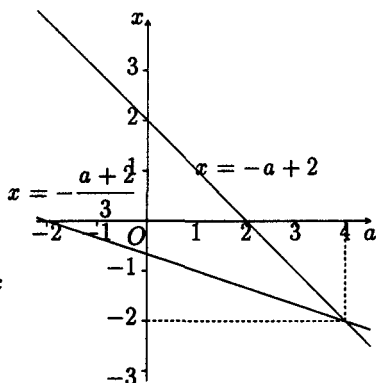


Рис. 13.

1 способ. В декартовой системе координат Oxy рассмотрим графики функций $y = |2x + a|$ и $y = x + 2$ (рис. 12). При $a > 4$ график первой функции лежит выше графика второй функции, графики не имеют общих точек. Неравенство решений не имеет.

При $a = 4$ график первой функции лежит не ниже графика второй функции, графики имеют одну общую точку с абсциссой, равной -2 . Неравенство имеет единственное решение $x = -2$.

При $a < 4$ графики функции имеют две общие точки с абсциссами, равными $-\frac{a+2}{3}$ и $2 - a$ соответственно, и между этими точками график первой функции лежит под графиком второй. Неравенство имеет решения $x \in \left[-\frac{a+2}{3}; 2 - a\right]$.

2 способ. В декартовой системе координат Oax рассмотрим графики двух прямых $x = 2 - a$ и $x = -\frac{a+2}{3}$ (рис. 13).

При значении параметра, равно a_0 , решениями являются ординаты всех точек, расположенных на прямой $a = a_0$ не выше первого графика и не ниже второго одновременно.

При $a > 4$ таких точек нет. При $a = 4$ — одна точка. При $a < 4$ решения даёт отрезок $\left[-\frac{a+2}{3}; 2-a\right]$.

4. Ответ: $\left\{\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)\right\}$.

Решение. Перепишем систему в следующем виде

$$\begin{cases} y \geq \frac{2-2x}{3}, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 3^2, \end{cases}$$

Множество M точек координатной плоскости Oxy , абсцисса и ордината которых являются решением данной системы, — это часть круга радиуса 3 с центром в точке $(1; 2)$, лежащая над прямой AB , имеющей уравнение $y = \frac{2-2x}{3}$, вместе с хордой AB (рис. 10).

Значение функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = (x+2)^2 + (y+3)^2$$

равно квадрату расстояния между точками $(x; y)$ и $(-2; -3)$. Поэтому на множестве решений системы функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение в точке множества M , ближайшей к точке $D(-2; -3)$. Будем искать решение задачи среди точек прямой AB . Это означает, что переменные x и y в выражении $f(x, y)$ должны быть связаны равенством $y = \frac{2-2x}{3}$.

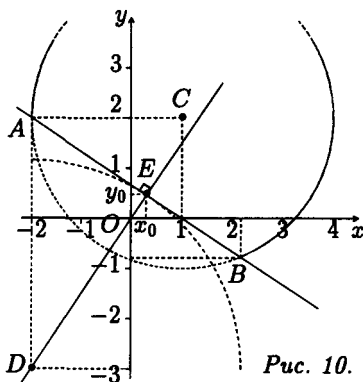


Рис. 10.

Таким образом, получаем функцию одной переменной

$$u(x) = (x+2)^2 + \left(\frac{2-2x}{3} + 3\right)^2 = \frac{1}{9}(13x^2 - 8x + 157).$$

Квадратный трехчлен в правой части последнего равенства имеет минимум в точке $x = \frac{4}{13}$. Воспользовавшись уравнением прямой AB , найдем соответствующее значение $y = \frac{6}{13}$.

Осталось выяснить, действительно ли полученная точка $\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)$ дает решение задачи. Для этого достаточно убедиться, что она принадлежит множеству M . Это так, потому что

$$\left(\frac{4}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{13} - 2\right)^2 = \frac{81}{169} + \frac{400}{169} = \frac{481}{169} < 9.$$

5. Ответ: $\{(2n-1)^2, n \in N\}$.

Решение аналогично решению задачи 4 варианта 1.3.

6. Ответ: $\{0; \sqrt[3]{2}\}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^6 = 2 \cdot \left(\left[x + \frac{1}{2} \right] + [x] \right).$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а для $x < 0$ $\left[x + \frac{1}{2} \right] \leq 0$ и $[x] < 0$, то при отрицательных значениях x решений нет.

Рассмотрим далее для $x \geq 0$ следующие случаи.

а) $0 \leq x < \frac{1}{2}$. При таких ограничениях $\left[x + \frac{1}{2} \right] = 0$ и $[x] = 0$. Поэтому уравнение принимает вид $x^6 = 0$, откуда получается решение $x = 0$.

б) $\frac{1}{2} \leq x < 1$. В этом случае $\left[x + \frac{1}{2} \right] = 1$ и $[x] = 0$. Тогда имеем уравнение $x^6 = 2$ с единственным положительным корнем $x = \sqrt[6]{2}$. Но $\sqrt[6]{2} > 1$, следовательно, на этом промежутке решений нет.

в) $1 \leq x < \frac{3}{2}$. При таких ограничениях $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] = 1$. Получаем уравнение $x^6 = 4$ с единственным положительным корнем $x = \sqrt[6]{4} =$

$\sqrt[3]{2}$. Очевидно, $\sqrt[3]{2} > 1$. С другой стороны, $\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}$, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2$. Итак, $x = \sqrt[3]{2}$ – решение данного уравнения.

d) $x \geq \frac{3}{2}$. В этом случае выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x^6 &= x^5 \cdot x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5 x = 7\frac{19}{32}x > 4x + 1 = 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right) + x\right) \geq \\ &\geq 2 \cdot \left(\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]\right). \end{aligned}$$

(Здесь учтено, что из определения целой части числа следует $[a] \leq a$).

Поэтому при $x \geq \frac{3}{2}$ уравнение корней не имеет.

7. Ответ: $S = 4 + 4\sqrt{14} - 36 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Решение аналогично решению задачи 5 варианта 1.3.

Вариант 1.6.

Ответы

- $\left(\frac{1}{25}; 2\right)$.
- $a_9 = 59$.
- Если $b < \frac{2}{3}$, то $x \in \left[-\frac{3b+1}{3}; -3b+1\right]$;
если $b = \frac{2}{3}$, то $x = -1$;
если $b > \frac{2}{3}$, то решений нет.
- $\left(\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.
- $\{(2n-1)^2, n \in N\}$.
- $\left\{0; \frac{64}{49}\right\}$.

$$7. \quad S = 20 + 4\sqrt{55} - 64 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right).$$

Задачи устного экзамена.

Ответы.

1. Числа равны.
2. 53010, 53910, 53415.
3. 10, 11, 12, 13, 14.
4. Система решений в натуральных числах не имеет.
5. $(p; q; r) \in \{(2; 3; 17), (3; 2; 17)\}$.
6. $m = -12$, $n = 6$.
7. $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.
8. $\{(-4; 2; 0), (-2; 1; 2)\}$.

Указание. Из второго уравнения следует $0 \leq z \leq 2$, а из третьего уравнения $z(z - 2) \geq 0$.

9. $f(x) = \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2 \sin x}\right) + \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2 \sin x} + \frac{x^2}{\sin x}\right)$.
 10. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 11. $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 12. $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{2}$.
 13. 0.
 14. $f_{\min}(x, y) = -7$; $f_{\max}(x, y) = 7$.
- Указание.* Используйте неравенство $|a \sin \alpha + b \cos \alpha| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
15. 2.
 16. $\log_3 10 + 4 \lg 3 > 4$.

$$17. \left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3} \right).$$

18. Внутренность двух углов, образованных пересекающимися прямыми $x = 0$ и $y = -x$, которая содержит ось Ox .

19. Указание. Постройте биссектрису угла, дополняющего данный угол до прямого.

$$20. R = \frac{ac}{a+c}.$$

$$21. R = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}.$$

$$22. AB = 10.$$

23. Не существует.

$$24. DM : MD' = a : b.$$

Указание. Сделайте развертку граней $AA'D'D$ и $DD'C'C$.

$$25. \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$26. \left(\frac{R}{r} \right)_{\min} = \sqrt{2} + 1.$$

27. Окружность на плоскости $\mathcal{P}$ с центром в точке S и радиусом $\sqrt{ab}$.

2. Геологический факультет.

Вариант 2.1.

1. Ответ: $(-1; 4)$.

Решение. Так как $|x-3|+2 > 0$, то исходное неравенство равносильно

$$|2x-3| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 5 \\ 2x-3 > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

2. Ответ: $(-\infty; 2] \cup \left[\frac{13}{2}; +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим два случая.

$$a) \quad \begin{cases} x < 5, \\ x^2 - 8x + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

$$b) \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x^2 - 8x + 12 \geq (x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ 2x \geq 13 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{13}{2}.$$

3. Ответ: $\{-4\}$.

Решение.

$$\frac{\log_3(-x)}{\log_9(-5x-4)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < -5x-4 \neq 1, \\ \log_9 x^2 = \log_9 (-5x-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{5}, \\ x \neq -1, \\ x^2 + 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

4. Ответ: $\left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$\cos x - \sin 2x = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow \cos x \cdot (1 - 2 \sin x) = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое из полученных уравнений дает серию решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, из которой отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$ принадлежат числа $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

Второе уравнение приводится к виду $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, откуда

$$\begin{cases} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\alpha + \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $\alpha = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Докажем, что $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$. В силу возрастания $\sin x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ это равносильно

$$\sin \frac{\pi}{12} < \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

Вычислим

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2.$$

Отсюда $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$, поэтому (1) вытекает из неравенств

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}.$$

Теперь легко проверить, что из множества решений второго уравнения в заданный промежуток попадает лишь число $x = -\alpha - \frac{5\pi}{4}$.

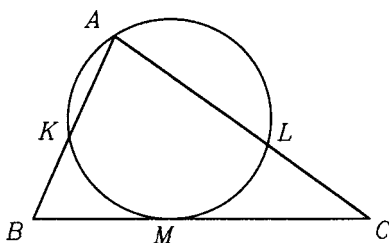


Рис. 14.

5. Ответ: 9 : 8.

Решение. По теореме об отрезках касательной и секущей, выходящих из одной точки (рис. 14), имеем

$$AC \cdot LC = CM^2.$$

Аналогично для отрезков касательной BM и секущей AB , выходящих из вершины B ,

$$AB \cdot BK = BM^2.$$

Тогда, разделив одно равенство на другое, получим

$$\frac{AC}{AB} \cdot \frac{LC}{BK} = \left(\frac{CM}{BM}\right)^2.$$

Отсюда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BK}{LC} \cdot \left(\frac{CM}{BM}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}.$$

6. Ответ: 1,8 раза.

Решение. Обозначим общий объем раствора A через M , а объем кислоты в нем через x . Тогда концентрация этого раствора: $\frac{x}{M}$.

Пусть раствор B был получен из раствора A добавлением объема воды y . Тогда общий объем раствора B составил $M+y$, его концентрация: $\frac{x}{M+y}$. Для раствора C имеем общий объем $M+3y$ и концентрацию $\frac{x}{M+3y}$.

По условию концентрация раствора B составила 60% концентрации раствора A , т.е.

$$\frac{x}{M+y} = \frac{3}{5} \frac{x}{M} \Leftrightarrow \frac{y}{M} = \frac{2}{3}.$$

Теперь найдем отношение концентрации раствора B к концентрации раствора C :

$$\frac{x}{M+y} : \frac{x}{M+3y} = \frac{M+3y}{M+y} = \frac{1+3\frac{y}{M}}{1+\frac{y}{M}} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

7. Ответ: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty) \cup \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right\}$.

Решение. Раскрывая модули, вычислим

$$f(x) = |2x+6| + |2x-8| = \begin{cases} -4x+2, & x < -3, \\ 14, & -3 \leq x \leq 4, \\ 4x-2, & x > 4. \end{cases}$$

График функции $u = f(x)$ – ломаная линия на рис. 15. Правая часть уравнения определяет семейство прямых $g_y(x) = yx + 12$, проходящих через точку с координатами $(0; 12)$ и имеющих переменный угловой коэффициент y . Их графики – прямые, изображенные пунктиром.

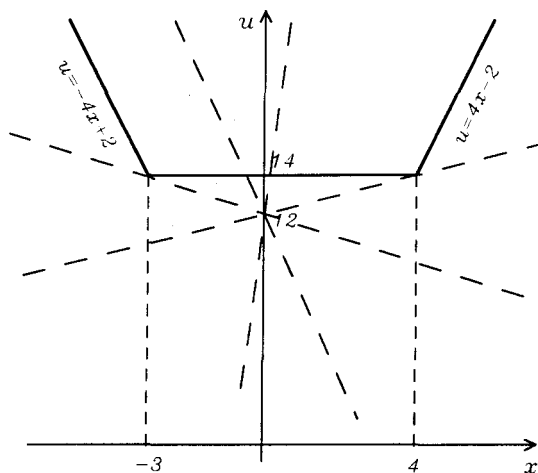


Рис. 15.

Очевидно, среди прямых этого семейства ровно по одной точке пересечения с графиком $u = f(x)$ имеют лишь те y , у которых угловой коэффициент отвечает требованию $|y| \geq 4$, а также две прямые, проходящие через точки "излома", т.е. для которых

$$\begin{cases} g_y(-3) = 14 \\ g_y(4) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 12 = 14 \\ 4y + 12 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

8. Ответ: $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Рассмотрим правильный тетраэдр $SPQT$ с ребрами длины a (рис. 16). Нетрудно видеть, что его скрещивающиеся ребра (например, PT и SQ) взаимно перпендикулярны. Расстояние между ними – длина их общего перпендикуляра. Очевидно, что это отрезок EK ,

соединяющий середины противоположных ребер. Поскольку $SE = QE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SK = \frac{a}{2}$, из треугольника SEK получаем $l = EK = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Заметим, что определив положение отрезка l в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, мы определим положение тетраэдра в этом кубе.

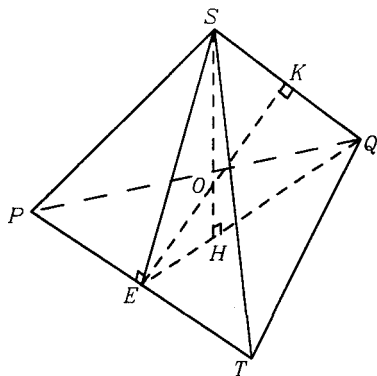


Рис. 16.

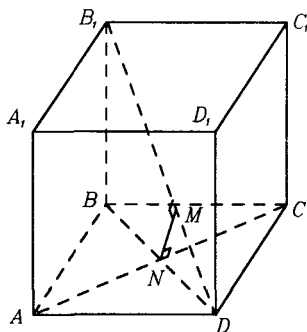


Рис. 17.

Скрещивающиеся прямые, задаваемые диагональю куба B_1D и диагональю AC нижней грани куба (рис. 17), также взаимно перпендикулярны. Пусть ребро PT тетраэдра лежит на AC , а противоположное ему ребро SQ — на B_1D . Общий перпендикуляр к этим прямым находится в плоскости BB_1D ; это отрезок NM , он и выступает в роли l .

Вычислим длину NM . В треугольнике BB_1D имеем $BB_1 = 2$; $BD = 2\sqrt{2}$; $B_1D = \sqrt{BD^2 + B_1B^2} = 2\sqrt{3}$; $ND = NB = \sqrt{2}$; $B_1B \perp BD$, $NM \perp B_1D$.

Так как $\triangle BB_1D \sim \triangle NMD$, то $NM = \frac{BB_1}{B_1D} \cdot ND = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Из равенства $NM = l$ получаем $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Осталось найти радиус R описанной сферы для правильного тетраэдра с ребром длины a . Заметим, что центры вписанной и описанной сфер совпадают, пусть это точка O (рис. 16). Она лежит на высоте пирамиды SH , причем $SO = R$, а $OH = r$ — радиус вписанной сфе-

ры. Данный правильный тетраэдр складывается из четырех равных тетраэдров с вершинами в точке O и высотами, равными r . Поэтому, сравнивая объемы $\frac{V_{OPQT}}{V_{SPQT}} = \frac{1}{4} = \frac{OH}{SH}$, имеем $R = \frac{3}{4} SH$.

Из $\triangle SQH$, где $QH = \frac{2}{3} \cdot QE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, получаем

$$SH = \sqrt{SQ^2 - QH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно, $R = \frac{3}{4} SH = \frac{\sqrt{6}}{4} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Вариант 2.2.

Ответы.

1. $(-5; 2)$.
2. $(-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$.
3. $\{-5\}$.
4. $\left\{-\pi; 0; -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$.
5. $1:2$.
6. 3 раза.
7. $\left\{-\frac{3}{2}; 1\right\} \cup (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$.
8. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Вариант 2.3.

1. *Ответ:* $(1; 2] \cup (7; 8)$.

Решение. Неравенство равносильно системе условий

$$\begin{cases} \frac{(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-8)} \leq 0, \\ x \neq 7. \end{cases}$$

Применяя метод интервалов, получаем ответ.

$$2. \text{ Ответ: } \left\{ \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; n, k \in Z, n, k \geq 0 \right\}.$$

Решение. Раскрыв скобки в правой части, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \sin 7x + \sin 3x = 0 &\Leftrightarrow \sin 5x \cdot \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi n}{5}, & n \in Z \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, & k \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Неотрицательные решения получаются при $n, k \geq 0$.

$$3. \text{ Ответ: } \{3 \pm \sqrt{5}\}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{7}\right)^{x-2-\frac{1}{x-1}} &= \left(\frac{5}{7}\right)^3 \Leftrightarrow x-2-\frac{1}{x-1}=3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+4=0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$4. \text{ Ответ: а) } S = \frac{16}{3} (\text{м}^2), \text{ центр вне треугольника;}$$

$$\text{б) } S = \frac{8\sqrt{5}}{3} (\text{м}^2), \text{ центр внутри треугольника.}$$

Решение. Обозначим основание данного равнобедренного треугольника через a , а боковую сторону — $2b$. Поскольку прямая, проходящая через вершину основания, делит площадь треугольника пополам, она делит пополам противоположную боковую сторону.

Имеются две возможности.

а)

$$\begin{cases} 2b + b = 5, \\ a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{3}, \\ b = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Так как $4b = \frac{20}{3} > \frac{16}{3} = a$, то такой треугольник существует.

Его площадь можно найти по формуле Герона:

$$S = \sqrt{6 \cdot \left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 \cdot \left(6 - \frac{16}{3}\right)} = \frac{16}{3}.$$

Согласно теореме косинусов для наибольшего из углов треугольника (лежащего против большей стороны) имеем

$$\cos A = \frac{2 \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2}{2 \left(\frac{10}{3}\right)^2} = -\frac{7}{25} < 0,$$

следовательно, треугольник тупоугольный, поэтому центр описанной окружности находится вне его.

b)

$$\begin{cases} 2b + b = 7, \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3}, \\ b = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Очевидно, что неравенство треугольника для полученных значений a и b выполнено, так что эта ситуация реализуема.

Находим площадь треугольника:

$$S = \sqrt{6 \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right)^2 \cdot \left(6 - \frac{8}{3}\right)} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Поскольку боковые стороны в данном случае больше основания, а двух неострых углов в треугольнике быть не может, полученный треугольник остроугольный, значит, центр описанной окружности находится внутри него.

5. Ответ: $\left\{ (1; 5); \left(\frac{5}{2}; 2\right) \right\}.$

Решение. Пусть $u = \frac{xy}{2}$, $v = 2x + y - xy$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u + \frac{5}{v} = 5, \\ \frac{5}{u} + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \left(1 - \frac{1}{v}\right), \\ \frac{v}{v-1} + v = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение системы дает

$$v^2 - 4v + 4 = 0 \Leftrightarrow v = 2.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} u = \frac{5}{2}, \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 5, \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{x}, \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 5 \\ x = \frac{5}{2}, \\ y = 2. \end{cases}$$

6. Ответ: 7 час.; 55 км.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке C . Без уменьшения общности можно считать, что точка A находится на положительной полуоси абсцисс, а точка B – на положительной полуоси ординат. Тогда, поскольку по условию $AC = BC = 275$ (км), через время t (час) после начала движения координаты первого мотоциклиста суть $(275 - 44t; 0)$, а второго – $(0; 275 - 33t)$.

Квадрат расстояния $r(t)$ между этими точками равен

$$\begin{aligned} r^2(t) &= (275 - 44t)^2 + (275 - 33t)^2 = \\ &= 11^2 ((25 - 4t)^2 + (25 - 3t)^2) = 55^2 (t^2 - 14t + 50). \end{aligned}$$

Минимум функции

$$r(t) = 55 \sqrt{t^2 - 14t + 50}$$

достигается в той же точке t_0 , что и минимум $r^2(t)$. В силу свойств квадратного трехчлена имеем $t_0 = 7$; при этом

$$\min r(t) = r(t_0) = 55 \sqrt{49 - 98 + 50} = 55.$$

7. Ответ: $\frac{3}{4}$.

Решение. Так как сфера в точке A касается плоскости ABC , ее диаметр AD перпендикулярен этой плоскости (рис. 18). Тогда в сечении сферы плоскостью ABD мы имеем окружность с диаметром AD , для которой AB – касательная, а BD – секущая.

Из прямоугольного треугольника ABD :

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}.$$

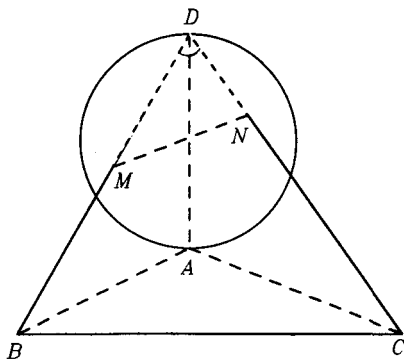


Рис. 18.

По теореме об отрезках секущей и касательной получаем

$$BD \cdot BM = AB^2, \text{ откуда } BM = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично, рассматривая сечение сферы плоскостью ACD , находим

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = 4\sqrt{3}, \quad CN = \frac{AC^2}{CD} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Вычислив

$$DM = 2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad DN = 4\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

применим теорему косинусов к треугольнику DMN , где $\angle MDN = \frac{\pi}{3}$:

$$MN^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

Отсюда $MN = \frac{3}{4}$.

8. Ответ: $a \in \{3\} \cup [\sqrt{10}; \sqrt{11})$.

Решение. Решим сначала данное уравнение:

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right) \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin \left(\frac{4}{13} x \right) = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{array} \right. \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \frac{13}{4} \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l. \end{array} \right. \quad n, k, l \in Z.$$

Исключим из множества решений уравнения (1) точки вида $x = \frac{\pi}{2} n$. Для этого найдем такие $k \in Z$, при которых выполнено равенство

$$\frac{13}{4} \pi k = \frac{\pi}{2} n \Leftrightarrow 13k = 2n, \quad n \in Z.$$

Это четные значения k , следовательно, корни исходного уравнения задаются непересекающимися сериями

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi n \\ x_2 = \frac{13}{4} (2\pi k + 1). \end{array} \right. \quad k, n \in Z$$

Заметим, что расстояние между соседними точками первой серии равно π , а второй — $\frac{13\pi}{2}$. Длина отрезка, указанного в условии задачи, $l = (a^2 + 1)\pi - 2a\pi = (a - 1)^2\pi$.

Всякий отрезок, длина которого $l < 4\pi$, содержит не более четырех корней первой серии и не более одного — второй. Если же $l \geq 6,5\pi$, то отрезок такой длины содержит как минимум шесть корней первой серии и по крайней мере один — второй. Таким образом, ровно шесть различных корней уравнения на данном отрезке могут быть лишь при условии

$$4\pi \leq (a - 1)^2\pi < 6,5\pi \Leftrightarrow 2 \leq |a - 1| < \sqrt{6,5}.$$

Принимая во внимание условие задачи $a \geq 1$, имеем

$$3 \leq a < 1 + \sqrt{6,5}.$$

Если $a = 3$, то получающийся отрезок $[6\pi; 10\pi]$ содержит пять корней $6\pi, 7\pi, 8\pi, 9\pi, 10\pi$ вида x_1 и корень $x_2 = \frac{39}{4}\pi$, т.е. ровно шесть корней (см. рис. 19).

Пусть $a > 3$. Из неравенства $a < 1 + \sqrt{6,5}$, следует, что левая граница заданного отрезка удовлетворяет условию

$$6\pi < 2a\pi < 2(1 + \sqrt{6,5})\pi < 8\pi.$$

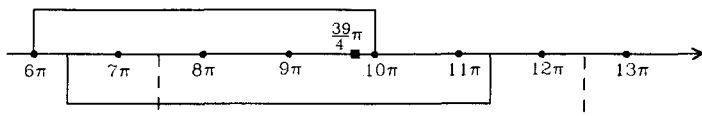


Рис. 19.

Тогда для наличия ровно шести корней достаточно выполнения требований

$$\left[\begin{cases} 6 < 2a \leq 7, \\ 11 \leq a^2 + 1 < 12 \\ 7 < 2a < 2(1 + \sqrt{6,5}), \\ 12 \leq a^2 + 1 < 13 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 3 < a \leq \frac{7}{2}, \\ \sqrt{10} \leq a < \sqrt{11} \\ \frac{7}{2} < a < 1 + \sqrt{6,5}, \\ \sqrt{11} \leq a < \sqrt{12} \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 < a \leq \frac{7}{2}, \\ \sqrt{10} \leq a < \sqrt{11} \end{array} \right. \Leftrightarrow \sqrt{10} \leq a < \sqrt{11}$$

(вторая из систем совокупности несовместна, так как $\frac{7}{2} > \sqrt{12}$).

Вариант 2.4.

Ответы.

- $(5; 6] \cup (8; 9)$.
- $\left\{ \frac{\pi n}{8}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; n, k \in \mathbb{Z}, n \leq 0, k \leq -1 \right\}$.
- $\{3 \pm \sqrt{2}\}$.
- а) $S = \frac{7}{\sqrt{15}} (\text{м}^2)$ центр вне треугольника;
б) $S = \sqrt{15} (\text{м}^2)$, центр внутри треугольника.

5. $\left\{ (5; 1); \left(2; \frac{5}{2} \right) \right\}.$
6. 7 час.; 60 км.
7. $\frac{3\sqrt{3}}{4}.$
8. $a \in \{3\} \cup [\sqrt{10}; \sqrt{11}).$

Задачи устного экзамена.*Ответы.*

1. $\frac{211}{990}.$
2. 10.
3. $\sin 3 < 0,5.$
4. $\cos 5 < 0,5.$
5. $\{(0; 0), (2; 4), (-1; 1), (3; 3)\}.$
6. $\{(0; 0), (1; 2), (-1; -2)\}.$
7. 0.
8. -0,9.
9. 100.
10. $2\pi k; \pm \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi n; k, n \in Z.$
11. $\left(2; \frac{7 + \sqrt{17}}{4}\right].$
12. $(-\infty; -3) \cup \left(-3; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; 2) \cup (2; 3).$
13. Не имеет.
14. Имеет.
15. $\frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}.$
16. $1; \sqrt{2}.$
17. $y = \lg |x|.$
18. $y = 0,$ если $0 < x < 1;$ $y = 2,$ если $x > 1.$

19. $S = \pi$.

20. $S = 2$.

21. $AD = \frac{15\sqrt{2}}{8}$.

22. $AD = \frac{15}{\sqrt{34}}$.

23. $AB = 5$.

24. $BC = \sqrt{10}$.

25. $\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$.

3. Экономический факультет.

Вариант 3.1.

1. Ответ: $\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

Решение. Поскольку левая и правая части неравенства неотрицательны, можно возводить в квадрат:

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2| \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 15)^2 \leq (15 - x^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 8x + 15 - (15 - x^2)) \cdot (x^2 - 8x + 15 + (15 - x^2)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x - 4) \cdot (4x - 15) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty).$$

2. Ответ. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

Решение. Пусть первый пакет акций был приобретен за x тыс. рублей, а второй – за y тыс. рублей. Тогда

$$\begin{cases} 1,28(x+y) = 7680, \\ 1,4x + 1,2y = 7680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6000, \\ 1,4x + 1,2y = 7680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2400, \\ y = 3600. \end{cases}$$

3. Ответ: 36.

Решение. Сначала найдем уравнение прямой AC (рис. 20). Для этого, используя координаты точек $A(0; 2)$ и $C(10; 7)$ и общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, определим значения коэффициентов k и b из

системы

$$\begin{cases} b = 2, \\ 10k + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0,5, \\ b = 2. \end{cases}$$

Таким образом, имеем $y = 0,5x + 2$.

Аналогично приходим к уравнению $y = -x + 8$ для прямой BD , проходящей через точки $B(1;7)$ и $D(7;1)$.

Координаты точки $E = AC \cap BD$ получаем из системы

$$\begin{cases} y = 0,5x + 2, \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Итак, $E = E(4;4)$. Заметим, что искомая площадь пятиугольника

$$S_{ABCDE} = S_{BAC} + S_{BDC} - S_{BEC}.$$

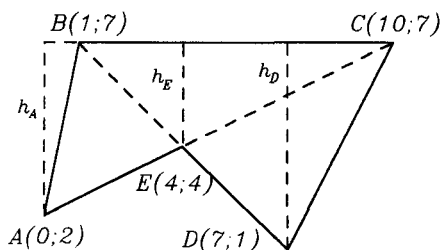


Рис. 20.

Треугольники BAC , BDC и BEC имеют общее основание BC и высоты $h_A = 7 - 2 = 5$, $h_D = 7 - 1 = 6$, $h_E = 7 - 4 = 3$ соответственно. Поэтому искомая площадь

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2} \cdot (h_A + h_D - h_E) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (5 + 6 - 3) \cdot 9 = 36.$$

4. Ответ: $(\log_2 49 - 4; \log_2 7)$.

Решение. Преобразуем второй логарифм:

$$\log_{\sqrt{2}} (16(4^x - 6 \cdot 2^x + 9)) = 2 \cdot \log_2 (16(2^x - 3)^2).$$

Вводя обозначение $t = \log_2 (2^x - 3)$, получаем неравенство

$$t \cdot 2 \cdot (4 + 2t) < 32 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 < 0 \Leftrightarrow -4 < t < 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -4 < \log_2(2^x - 3) < 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{16} < 2^x - 3 < 4 \\ &\Leftrightarrow \log_2 \frac{49}{16} < x < \log_2 7. \end{aligned}$$

5. Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{356} - 12}{6}, \frac{\sqrt{164} - 12}{6} \right\}$.

Решение. Так как из условия следует $x > 0$, то внеся переменные множители под радикалы, получим

$$\sqrt{3} \cos(\pi\sqrt{6-4x-x^2}) + 3 \sin(\pi\sqrt{6-4x-x^2}) = \sqrt{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cos(\pi\sqrt{6-4x-x^2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\pi\sqrt{6-4x-x^2}) = 1.$$

Вводя вспомогательный аргумент, приходим к уравнению

$$\cos\left(\pi \cdot \sqrt{6-4x-x^2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Отсюда

$$\pi \cdot \sqrt{6-4x-x^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т.е.

$$\sqrt{6-4x-x^2} = \frac{1}{3} + 2k \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} + 2k \geq 0, \\ 6-4x-x^2 = \left(\frac{1}{3} + 2k\right)^2. \end{cases}$$

Дискриминант уравнения $x^2 + 4x - 6 + \left(\frac{1}{3} + 2k\right)^2 = 0$ должен быть неотрицателен:

$$D = 16 - 4 \left(-6 + \left(\frac{1}{3} + 2k\right)^2\right) = 40 - 4 \left(\frac{1}{3} + 2k\right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, получаем двойное неравенство $0 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq \sqrt{10}$, которое имеет лишь два целочисленных решения: $k = 0; 1$.

При $k = 0$ имеем $D = 40 - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{356}{9}$, тогда

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{356}}{6}.$$

Поскольку $x > 0$, то остается $x = \frac{-12 + \sqrt{356}}{6}$.

Аналогично при $k = 1$ имеем $D = 40 - 4 \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{164}{9}$, тогда

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{164}}{6}.$$

Отбирая положительный корень, находим $x = \frac{-12 + \sqrt{164}}{6}$.

6. Ответ: $\arccos(6 - \sqrt{33})$.

Решение. Заметим, что центр O шара, вписанного в правильную пирамиду $SAB CDEF$ с вершиной S , лежит на высоте SH пирамиды, а точка K касания вписанным шаром боковой грани SBC принадлежит апофеме этой грани. Пусть P и Q – середины противоположных ребер BC и EF основания, T – середина бокового ребра SA , R – радиус вписанного шара, r – радиусы шаров с центрами в серединах ребер, $SH = h$.

Рассмотрим сечение SPQ (рис. 21). Поскольку $SP \perp BC$, $QP \perp BC$, то $\angle SPH$ – плоский угол искомого двугранного угла. Обозначим его величину через α .

Пусть a – длина стороны основания пирамиды, тогда $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Так как $OK \perp SP$, $SH \perp PQ$, то $\angle KOS = \angle SPH$. Отсюда $\triangle SKO \sim \triangle SPH$, следовательно,

$$\frac{OK}{SO} = \frac{PH}{SP}, \text{ т.е. } \frac{R}{h - R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}}.$$

Возведение в квадрат в последнем равенстве приводит к соотношению

$$3a^2(h - 2R) = 4R^2h. \quad (1)$$

Из прямоугольного $\triangle OPH$ по теореме Пифагора имеем

$$(R + r)^2 = R^2 + \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = 3a^2. \quad (2)$$

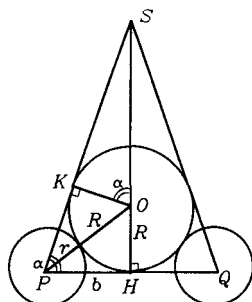


Рис. 21.

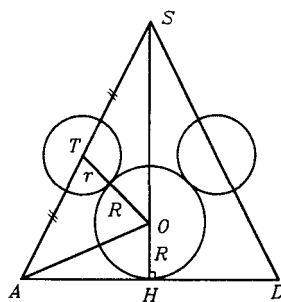


Рис. 22.

Рассмотрим далее диагональное сечение SAD (рис. 22). Имея в виду, что $AH = a$, $\cos \angle ASH = \frac{h}{SA}$, по теореме косинусов для треугольника STO получаем

$$\begin{aligned} OT^2 &= ST^2 + SO^2 - 2ST \cdot \frac{SA}{2} \cdot \frac{h}{SA} \Leftrightarrow \\ (R+r)^2 &= \frac{1}{4}(h^2 + a^2) + (h-R)^2 - h(h-R) \Leftrightarrow \\ 4r^2 + 8Rr &= h^2 + a^2 - 4Rh. \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая (2), (3), имеем

$$2a^2 = h^2 - 4Rh. \quad (4)$$

Теперь, исключая из (1) и (4) a^2 , получаем

$$3h^2 - 18Rh + 16R^2 = 0.$$

После деления на R^2 и обозначения $t = \frac{h}{R}$, учитывая вытекающее из (4) условие $h > 4R$, приходим к системе

$$\begin{cases} 3t^2 - 18t + 16 = 0, \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{9 + \sqrt{33}}{3}.$$

Тогда из $\triangle SKO$ имеем

$$\cos \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{h-R} = \frac{1}{t-1} = \frac{3}{6 + \sqrt{33}} = 6 - \sqrt{33}.$$

7. Ответ: $u = -187$; $v = -819$.

Решение. Так как $20020 = 364 \cdot 55$, $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $55 = 5 \cdot 11$, то после деления почленно на 20020 приходим к биквадратному уравнению

$$a^4 + pa^2 - q = 0, \quad \text{где } p = \frac{u}{5 \cdot 11}, q = \frac{v}{2^2 \cdot 7 \cdot 13}.$$

Пусть $t = a^2$. Биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда корни t_1, t_2 уравнения $t^2 + pt - q = 0$ положительны и различны. В соответствии с теоремой Виета это равносильно системе условий

$$\begin{cases} p < 0, \\ q < 0, \\ D = p^2 + 4q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0, \\ v < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Пусть $0 < t_1 < t_2$, тогда корнями исходного уравнения являются $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$. В силу условия задачи

$$\begin{aligned} \sqrt{t_1} : \sqrt{t_2} &= 3 : 5 \Leftrightarrow 25t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow \\ 25(-p - \sqrt{D}) &= 9(-p + \sqrt{D}) \Leftrightarrow -8p = 17\sqrt{D} \Leftrightarrow \\ 8^2 p^2 &= 17^2 (p^2 + 4q) \Leftrightarrow 9 \cdot 25p^2 = -17^2 \cdot 4q. \end{aligned}$$

В исходных обозначениях получается равенство

$$3^2 \cdot 7 \cdot 13 u^2 = 11^2 \cdot 17^2 \cdot (-v) \quad \text{где } u, v \in \mathbb{Z}; u, v < 0.$$

Следовательно, u делится на 17 и 11, а v делится на 9, 7 и 13. Среди чисел такого вида наибольшими отрицательными являются $u = -17 \cdot 11 = -187$, $v = -9 \cdot 7 \cdot 13 = -819$.

Вариант 3.2.

Ответы.

- $\left[-5; -\frac{16}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.
- 5400 руб. и 8100 руб.

3. 33.
4. $(0; \log_4 257 - 4) \cup (\log_4 65; +\infty)$.
5. $\left\{ \frac{\sqrt{335} - 12}{4}; \frac{\sqrt{159} - 12}{4} \right\}$.
6. $\frac{\sqrt{13}}{8}$.
7. $v = 77; w = 221$.

Вариант 3.3.

1. Ответ: $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуя сумму синусов в произведение, получаем

$$\sqrt{7}(\sin x + \sin 3x) - 6 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{7} \sin 2x \cdot \cos x - 6 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x (\sqrt{7} \cos x - 3) = 0.$$

Так как $\frac{3}{\sqrt{7}} > 1$, то уравнение $\cos x = \frac{3}{\sqrt{7}}$ решений не имеет.

Уравнение $\sin 2x = 0$ дает решения $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

2. Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{72}{13}; \frac{13}{2} \right]$.

Решение. Используем равносильные переходы

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Тогда имеем

$$|x^2 - 13x + 36| \geq |36 - x^2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 13x + 36 \geq |36 - x^2| \\ x^2 - 13x + 36 \leq -|36 - x^2|. \end{cases}$$

Первое из неравенств совокупности преобразуется следующим образом:

$$|36 - x^2| \leq x^2 - 13x + 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - x^2 \leq x^2 - 13x + 36, \\ 36 - x^2 \geq -x^2 + 13x - 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 13x \geq 0, \\ 13x \leq 72 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Для второго неравенства аналогично имеем

$$|36 - x^2| \leq -x^2 + 13x - 36 \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - x^2 \leq -x^2 + 13x - 36, \\ 36 - x^2 \geq x^2 - 13x + 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x \geq 72, \\ 2x^2 - 13x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{72}{13} \leq x \leq \frac{13}{2}.$$

Объединяя полученные множества, приходим к ответу.

3. *Ответ:* 240 и 160 тонн.

Решение. Пусть план сбора свеклы с первого поля составлял x тонн, а со второго поля — y тонн. Тогда по условию задачи

$$\begin{cases} 0,8x + 0,85y = 328, \\ 0,82(x + y) = 328 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 0,85y = 328, \\ x + y = 400. \end{cases}$$

Отсюда $x = 240$, $y = 160$.

4. *Ответ:* 21.

Решение аналогично решению задачи 3 варианта 3.1.

5. *Ответ:* $(\log_5 2; \log_5 251 - 3) \cup (\log_5 27; +\infty)$.

Решение. После перехода в первом логарифме к основанию 5 неравенство приобретает вид

$$2 \cdot \log_5 (5^x - 2) \cdot \log_5 (25 \cdot (25^x - 4 \cdot 5^x + 4)) > 24.$$

Выделим полный квадрат под вторым логарифмом и, обозначив $t = \log_5 (5^x - 2)$, получим

$$2 \cdot t \cdot (2 + 2t) > 24 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ t > 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \log_5 (5^x - 2) < -3 \\ \log_5 (5^x - 2) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 5^x < 2 + 5^{-3} \\ 5^x > 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 2 < x < \log_5 \frac{251}{125} \\ x > \log_5 27. \end{cases}$$

6. Ответ: $\left\{ \frac{12 + \sqrt{239}}{4}; \frac{12 + \sqrt{159}}{4} \right\}$.

Решение. Поскольку из условия следует $x > 0$, то, внося переменные множители под радикалы, получим

$$\sqrt{7} \cos(\pi\sqrt{6+6x-x^2}) + \sqrt{7} \sin(\pi\sqrt{6+6x-x^2}) = \sqrt{14} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\pi\sqrt{6+6x-x^2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\pi\sqrt{6+6x-x^2}) = 1.$$

Введем новую переменную $t = \pi\sqrt{6+6x-x^2}$. Очевидно, $t \geq 0$. С другой стороны,

$$t = \pi\sqrt{6+6x-x^2} = \pi\sqrt{15-(x-3)^2} \leq \pi\sqrt{15}.$$

Решаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t = 1$$

методом вспомогательного аргумента:

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Полученные выше ограничения на t приводят к неравенствам

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq \pi\sqrt{15} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4} + 2k \leq \sqrt{15},$$

которые выполняются только для $k = 0; 1$.

При $k = 0$ имеем уравнение

$$\sqrt{6+6x-x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x - 6 + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{239}}{4}.$$

Поскольку $x > 0$, остается $x = \frac{12 + \sqrt{239}}{4}$.

При $k = 1$ получаем уравнение

$$\sqrt{6 + 6x - x^2} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x - 6 + \frac{81}{16} = 0 \Leftrightarrow \frac{12 \pm \sqrt{159}}{4}.$$

Нам подходит только положительный корень $x = \frac{12 + \sqrt{159}}{4}$.

7. Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{8}$.

Решение. Центр O девятого шара равноудален от середин ребер основания правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S и, следовательно, лежит на высоте SH этой пирамиды. Пусть P и Q – середины сторон AB и CD квадрата $ABCD$, T – середина бокового ребра SA , r – радиусы шаров.

Рассмотрим диагональное сечение SAC (рис. 23). Из прямоугольного $\triangle SAH$, где $SA = \sqrt{6}$, $AH = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}$, находим высоту

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2,$$

а затем $\cos \angle ASH = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

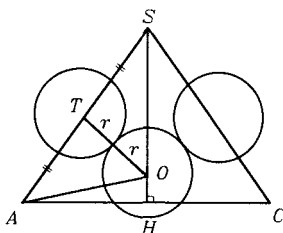


Рис. 23.

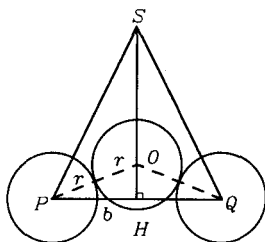


Рис. 24.

Длина отрезка OT , соединяющего центры касающихся шаров, равна $2r$. Обозначив $SO = x$ и применяя теорему косинусов к $\triangle STO$, получаем

$$4r^2 = x^2 + \frac{3}{2} - 2x \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}},$$

т.е.

$$4r^2 = x^2 - 2x + \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Вычислим апофему SP данной пирамиды:

$$SP = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{5}.$$

Рассмотрим далее сечение SPQ (рис. 24). Из прямоугольного $\triangle SPH$ имеем $\cos \angle PSH = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Теорема косинусов применительно к $\triangle PSO$ дает

$$4r^2 = x^2 + 5 - 2x\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}},$$

т.е.

$$4r^2 = x^2 - 4x + 5. \quad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) получаем $x = \frac{7}{2}$, а затем находим радиус: $r = \frac{\sqrt{17}}{8}$.

Вариант 3.4.

Ответы.

- $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$
- $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{8}{5}; 0\right].$
- 17100 руб. и 11400 руб.
- 27.
- $(\log_3 28 - 3; \log_3 4).$
- $\left\{ \frac{18 + \sqrt{503}}{6}; \frac{18 + \sqrt{335}}{6} \right\}.$
- $\arccos(2 - \sqrt{3}).$

Вариант 3.5.

1. Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуя сумму косинусов по формуле

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

получим

$$2 \cos 2x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Ответ: $\left\{0; \frac{15}{4}; 4\right\}$.

Решение. Поскольку

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b, \end{cases}$$

данное уравнение приводится к совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 15 - x^2 \\ x^2 - 8x + 15 = x^2 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x = 0 \\ 8x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; & x = 4 \\ x = \frac{15}{4}. \end{cases}$$

3. Ответ: 17100 руб. и 11400 руб.

Решение. Пусть первый предмет был куплен антикварным магазином за x рублей, а второй предмет – за y рублей. Тогда по условию

$$\begin{cases} 1,4(x + y) = 39900, \\ 1,3x + 1,55y = 39900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28500, \\ 1,3x + 1,55y = 39900. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x = 17100$, $y = 11400$.

4. Ответ: 27.

Решение аналогично решению задачи 3 варианта 3.1.

5. Ответ: $(\log_3 28 - 3; \log_3 4)$.

Решение. См. решения задачи 4 варианта 3.1 и задачи 5 варианта 3.3.

6. Ответ: $\left\{ \frac{18 + \sqrt{503}}{6}; \frac{18 + \sqrt{335}}{6} \right\}$.

Решение. См. решения задачи 5 варианта 3.1 и задачи 6 варианта 3.3.

Вариант 3.6.

Ответы.

1. $\frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.
2. $\left\{ -5; -\frac{16}{5}; 0 \right\}$.
3. 240 и 160 тонн.
4. 21.
5. $(\log_5 2; \log_5 251 - 3) \cup (\log_5 27; +\infty)$.
6. $\left\{ \frac{12 + \sqrt{239}}{4}; \frac{12 + \sqrt{159}}{4} \right\}$.

4. Институт стран Азии и Африки.

Вариант 4.1.

1. Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; 2\sqrt{3})$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{(x-3)(2x+1)}}{(2x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})} \leq 0.$$

В силу неотрицательности числителя дроби имеем два случая.

Случай а)

$$(x - 3)(2x + 1) = 0$$

дает решения $x = 3$; $x = -\frac{1}{2}$.

б) При

$$(x - 3)(2x + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 3 \end{cases}$$

имеем

$$(2x + \sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 2\sqrt{3}.$$

Отсюда получаем решения

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 2\sqrt{3}).$$

Объединяя а) и б), приходим к ответу.

2. Ответ: $\left\{ \frac{3\pi}{2}; 2\pi; 2\pi - \arccos \frac{2}{5} \right\}$.

Решение. Решаем данное уравнение:

$$5 \cdot 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 8 \cos x (1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$5 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2} \quad n \in Z, \\ x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k \quad k \in Z. \end{cases}$$

Остается отобрать из полученного множества решения, удовлетворяющие условию $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$. Это два значения из первой серии:

$x = \frac{3\pi}{2}$; $x = 2\pi$; а также одно из второй: $x = 2\pi - \arccos \frac{2}{5}$ (здесь мы учли, что $0 < \arccos \frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}$).

3. Ответ: 4; 8; 12 км/час.

Решение. Пусть скорости пешехода, всадника и велосипедиста соответственно a , $a + d$ и $a + 2d$ км/час (здесь a — первый член, d — разность арифметической прогрессии).

Из условия задачи следует

$$\begin{cases} \frac{5}{a} - \frac{5}{a+2d} = \frac{5}{6}, \\ \frac{10}{a} - \frac{10}{a+d} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12d = a(a+2d), \\ 8d = a(a+d). \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$4d = ad \Leftrightarrow d(a-4) = 0.$$

Поскольку $d \neq 0$ (скорости участников движения по смыслу задачи различны), имеем $a = 4$. Тогда $d = 4$. Остается выписать ответ.

4. Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3; 3\sqrt{13}\right]$.

Решение. Обозначив $t = \log_3 x$, перейдем к логарифмам по основанию

3. При этом

$$\log_{3x} \sqrt[3]{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_3 \frac{x}{3}}{\log_3 3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t-1}{t+1}.$$

Следовательно, исходное неравенство преобразуется к виду

$$(1+t) \sqrt{\frac{t-1}{3(1+t)}} \leq 2. \quad (1)$$

Если $t+1 < 0$, то в силу неотрицательности радикала получаем решения

$$\begin{cases} t+1 < 0, \\ \frac{t-1}{3(1+t)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t < -1.$$

При $t+1 \geq 0$ можно возводить в квадрат обе части неравенства, поэтому (1) приводится к системе

$$\begin{cases} t+1 \geq 0, \\ \frac{t-1}{3(1+t)} \geq 0, \\ \frac{(t+1)^2(t-1)}{3(1+t)} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1, \\ t^2 - 1 \leq 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{13}.$$

Итак, неравенство (1) имеет решения $t \in (-\infty; -1) \cup [1; \sqrt{13}]$. Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \log_3 x < -1 \\ 1 \leq \log_3 x \leq \sqrt{13}, \end{cases}$$

откуда с учетом $x > 0$ и находим ответ.

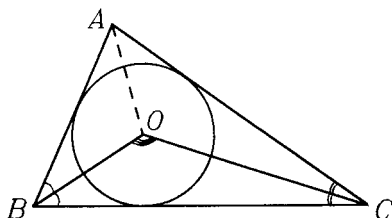


Рис. 25.

5. Ответ: $\angle BOC = 112,5^\circ$.

Решение. Так как центр O вписанной в треугольник ABC окружности находится в точке пересечения его биссектрис (рис. 25), то

$$\angle BOC = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C \right) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A.$$

Теорема косинусов для треугольника ABC дает

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cos \angle A,$$

откуда

$$\cos \angle A = \frac{9 + 2 - 5}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

поэтому $\angle A = 45^\circ$, следовательно, $\angle BOC = 112,5^\circ$.

6. Ответ: $\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1 - x), \\ a(x^3 - 1) + a^3(1 - x)^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x-1)(x^2+x+1-a^2(x-1)^2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in R$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым.

б) $x = 1$. Очевидно, система имеет решение $(1; 0)$ при любом a .

с) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = a(1-x), \\ x^2+x+1-a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} y = a(1-x), \\ (a^2-1)x^2 - (2a^2+1)x + a^2 - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a . Поэтому искомыми являются те и только те значения $a \neq 0$, при которых система с) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \neq 1$, то квадратное уравнение (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$$D = (2a^2+1)^2 - 4(a^2-1)^2 = 3(4a^2-1) \leq 0,$$

что равносильно $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$.

Итак, в ответ попадают следующие значения параметра: $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$ и $|a| = 1$.

7. Ответ: $\{(\pi n; \pi n - 1); n \in Z\}$.

Решение. Преобразуем выражение под радикалом:

$$\begin{aligned} A &= 3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2 = -(x-y)^2 + 2(x-y) + 3 = \\ &= -((x-y)^2 - 2(x-y) + 1) + 4 = -(x-y-1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание неотрицательность подкоренного выражения, имеем $0 \leq A \leq 4$.

Заметив, что $\cos x \neq 0$, перепишем данное уравнение, переходя к переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$3 + 2t = 1 - t^2 + (1 + t)\sqrt{A} \Leftrightarrow t^2 - (\sqrt{A} - 2)t + 2 - \sqrt{A} = 0.$$

Это уравнение может иметь решения лишь при условии неотрицательности дискриминанта:

$$(\sqrt{A} - 2)^2 - 4(2 - \sqrt{A}) \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 4.$$

Сравнивая с полученным ранее ограничением, имеем $A = 4$. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in Z, \\ y = x - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi n - 1, \end{cases} \quad n \in Z. \end{aligned}$$

Вариант 4.2.

Ответы.

1. $(-\sqrt{3}; -1] \cup [4; 3\sqrt{3})$.
2. $\left\{ \pi; \frac{3\pi}{2}; \pi + \arcsin \frac{1}{6} \right\}$.
3. 20; 60; 100 км/час.
4. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 2\sqrt{3}]$.
5. $\angle AOB = 105^\circ$.
6. $(-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$.
7. $\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 1 - \frac{\pi}{2} - \pi n\right); n \in Z \right\}$.

5. Факультет Государственного управления.

Вариант 5.1.

1. Ответ: $\frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in Z$.

Решение. Преобразуя сумму синусов по формуле

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

получим

$$2 \sin 2x \cdot \cos x - \sqrt{3} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

2. Ответ: $\left\{ 0; \frac{72}{13}; \frac{13}{2} \right\}$.

Решение. Используем следующее свойство модулей:

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b. \end{cases}$$

В соответствии с ним данное уравнение приводится к совокупности

$$\begin{cases} x^2 - 13x + 36 = 36 - x^2 \\ x^2 - 13x + 36 = x^2 - 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 13x = 0 \\ 13x = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = \frac{13}{2} \\ x = \frac{72}{13}. \end{cases}$$

3. Ответ: 5400 рублей и 8100 рублей.

Решение. Пусть первоначально костюм стоил x рублей, а плащ — y рублей. Тогда по условию задачи

$$\begin{cases} 0,68(x + y) = 9180, \\ 0,8x + 0,6y = 9180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13500, \\ 80x + 60y = 68(x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13500, \\ 3x = 2y. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = 17100$, $y = 11400$.

4. Ответ: 33.

Решение. Найдем уравнение прямой AD (рис. 26). Для этого, используя координаты точек $A(9;1)$ и $D(1;5)$ и общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, определим значения коэффициентов k и b из системы

$$\begin{cases} 9k + b = 1, \\ k + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -0,5, \\ b = 5,5. \end{cases}$$

Таким образом, имеем $y = -0,5x + 5,5$.

Аналогично приходим к уравнению $y = x - 2$ для прямой BE , содержащей точки $B(2;0)$ и $E(9;7)$.

Координаты точки C пересечения прямых BE и AD получаем из системы

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = -0,5x + 5,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

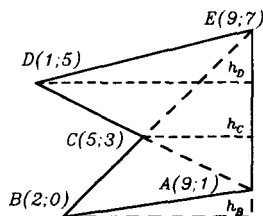


Рис. 26.

Заметим, что площадь пятиугольника

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{ADE} - S_{ACE}.$$

Треугольники ABE , ADE и ACE имеют общее основание AE и высоты $h_B = 9 - 2 = 7$, $h_D = 9 - 1 = 8$, $h_C = 9 - 5 = 4$ соответственно.

Поэтому

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2} (h_B + h_D - h_C) \cdot AE = \frac{1}{2} (7 + 8 - 4) \cdot 6 = 33.$$

5. Ответ: $(0; \log_4 257 - 4) \cup (\log_4 65; +\infty)$.

Решение. Переходя к основанию 4, имеем

$$\log_4(4^x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_4(16 \cdot (16^x - 2 \cdot 4^x + 1)) > 12.$$

Преобразуем второй логарифм, выделив полный квадрат:

$$\log_4(16 \cdot (4^{2x} - 2 \cdot 4^x + 1)) = \log_4 4^2 + \log_4 (4^x - 1)^2.$$

После введения обозначения $t = \log_4(4^x - 1)$ получаем

$$t \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 + 2t) > 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -4 \\ t > 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_4(4^x - 1) < -4 \\ \log_4(4^x - 1) > 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 4^x - 1 < \frac{1}{256} \\ 4^x - 1 > 64 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \log_4 \frac{257}{256} \\ x > \log_4 65. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Ответ: $\{-3; -2; 1\}$.

Решение. По определению обратной функции имеем

$$\cos \left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} \right) + \frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}.$$

Решаем тригонометрическое уравнение

$$\cos \left(\pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} \right) = -1 \Leftrightarrow \pi \cdot \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} = \pi + 2\pi k.$$

Уравнение

$$\frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

преобразуем к виду

$$(k+1)x^2 + (4k+1)x + 7k - 2 = 0.$$

При $k = -1$ получается линейное уравнение, его решение $x = -3$.

При $k \neq -1$ имеем квадратное уравнение, дискриминант которого

$$D = (4k + 1)^2 - 4(k + 1)(7k - 2) = -12k^2 - 12k + 9$$

должен быть неотрицательным. Отсюда

$$4k^2 + 4k - 3 \leq 0 \Leftrightarrow k \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Указанным условиям отвечает только значение $k = 0$. Возникающее при этом уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет корни $x = -2; 1$.

Вариант 5.2.

Ответы.

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.
2. $\left\{-\frac{5}{2}; -\frac{8}{5}; 0\right\}$.
3. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.
4. 36.
5. $(\log_2 49 - 4; \log_2 7)$.
6. $\left\{2; \frac{5}{2}; 4\right\}$.

6. Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Вариант 6.1.

1. Ответ: $\{0; \pm 4; \pm 5; \pm 9\}$.

Решение.

$$\frac{x^2 (x^2 - 35) (x^2 - 10)}{(x^2 - 64) (x^2 - 100)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 (x^2 - 35) (x^2 - 10) (x^2 - 64) (x^2 - 100) \leq 0, \\ x \neq \pm 8; \pm 10. \end{cases}$$

Применяя метод интервалов, находим решение этого неравенства (см. рис. 27). Остается выбрать целые значения x из полученного множества.

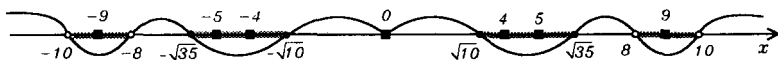


Рис. 27.

2. Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{3-x} \geq \frac{|x-1|}{3-2x} &\Leftrightarrow |x-1| \cdot \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2x-3} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |x-1| \cdot \frac{x}{(x-3)(2x-3)} \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $x = 1$ — решение. При $x \neq 1$ $|x-1| > 0$, поэтому неравенство равносильно

$$\frac{x}{(x-3)(2x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow (-\infty; 0] \cup \left(\frac{3}{2}; 3\right).$$

3. Ответ: $[\log_2 3; \log_2 5)$.

Решение. Имеем

$$\lg(4^x - 5) \geq \lg(2 \cdot 5 - 2 \cdot 2^x) \Leftrightarrow 4^x - 5 \geq 10 - 2 \cdot 2^x > 0.$$

Обозначая $y = 2^x$, где $y > 0$, приходим к системе

$$\begin{cases} y^2 + 2y - 15 \geq 0, \\ 0 < y < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq y < 5.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем ответ.

4. Ответ: $(x; 6)$, где $x < 0$;

$(0; y)$, где $y \in \mathbb{R}$;

$(x; y)$, где $x > 0$, $y \in (-\infty; 18 - 6\sqrt{6}] \cup [18 + 6\sqrt{6}; \infty)$.

Решение. а) При $x = 0$ неравенство верно для любого y .

б) При $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} -xy^2 &\leq 18x(6-2y) \Leftrightarrow y^2 \geq -18(6-2y) \Leftrightarrow \\ y^2 - 36y + 108 &\geq 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty; 18-6\sqrt{6}] \cup [18+6\sqrt{6}; \infty). \end{aligned}$$

в) При $x < 0$ получаем

$$\begin{aligned} -3xy^2 &\leq 18x(6-2y) \Leftrightarrow y^2 \leq -6(6-2y) \Leftrightarrow \\ y^2 - 12y + 36 &\leq 0 \Leftrightarrow (y-6)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = 6. \end{aligned}$$

5. Ответ: $\pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение.

$$\frac{4 \sin x - 3}{\sqrt{7} \sin x + 3 \cos x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin x - 3 = \sqrt{7} \sin x + 3 \cos x, \\ \sqrt{7} \sin x + 3 \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$\begin{aligned} (4 - \sqrt{7}) \sin x &= 3(1 + \cos x) \Leftrightarrow 2(4 - \sqrt{7}) \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 6 \cos^2 \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{4 - \sqrt{7}} = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

а) Из первого уравнения совокупности получаем $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для этих значений x

$$\sqrt{7} \sin x + 3 \cos x = -3 \neq 0.$$

б) Если x является решением второго уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$, то

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{3}{4}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Отсюда

$$\sqrt{7} \sin x + 3 \cos x = \sqrt{7} \cdot \frac{3}{4} + 3 \left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = 0,$$

так что случай б) решений исходного уравнения не дает.

6. Ответ: $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Решение. Заметим, что задача имеет смысл при $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Преобразуем исходное неравенство, умножив обе части на сумму радикалов (это выражение положительно)

$$x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{3x}{4}} + \sqrt{1 - \frac{3x}{4}}\right) > \frac{3x}{2} \Leftrightarrow x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{3x}{4}} + \sqrt{1 - \frac{3x}{4}} - \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ \sqrt{1 + \frac{3x}{4}} + \sqrt{1 - \frac{3x}{4}} > \frac{3}{2} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ 2 + 2\sqrt{1 - \frac{9}{16}x^2} > \frac{9}{4} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ \sqrt{1 - \frac{9}{16}x^2} > \frac{1}{8} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ x^2 < \frac{7}{4}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

откуда с учетом ОДЗ имеем $x \in \left(0; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Аналогично для случая

$$\begin{aligned} \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ \sqrt{1 + \frac{3x}{4}} + \sqrt{1 - \frac{3x}{4}} < \frac{3}{2} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ \sqrt{1 - \frac{9}{16}x^2} < \frac{1}{8} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x^2 > \frac{7}{4}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом ОДЗ получаем $x \in \left[-\frac{4}{3}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

7. Ответ: $\frac{8}{\sqrt{61}}$.

Решение. Из условия существования описанной окружности следует, что в данной трапеции $AB = CD$ (рис. 28).

Введем обозначения: $AB = CD = x$, $BC = y$, $\angle BAD = \alpha$, R – радиус описанной окружности.

Поскольку треугольники ABD и BCD имеют равные высоты, то

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{BC} = 5, \text{ поэтому } AD = 5y.$$

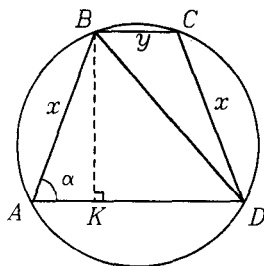


Рис. 28.

Используя теорему синусов и условие задачи, имеем $BD = 2R \sin \alpha = \frac{4}{3} R$, откуда $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Так как $BC < AD$, то $\alpha < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Пусть $BK \perp AD$, тогда

$$AK = x \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} x; \quad AD = BC + 2 AK.$$

Отсюда

$$y = \frac{\sqrt{5}}{6} x; \quad AD = \frac{5\sqrt{5}}{6} x.$$

Теперь по теореме косинусов для треугольника ABD получаем

$$\frac{16}{9} R^2 = x^2 + \frac{125}{36} x^2 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} x^2,$$

следовательно, $\frac{16}{9} R^2 = \frac{61}{36} x^2$ и окончательно $\frac{x}{R} = \frac{8}{\sqrt{61}}$.

8. Ответ: $\left\{ -1 \pm \sqrt{2}; -1 \pm \sqrt{\log_2 (5 - \sqrt{13})} \right\}.$

Решение. а) При $x^2 + 2x \geq 0$ имеем

$$2 \cdot 2^{x^2+2x} + 2 \cdot 2^{-(x^2+2x)} = 5.$$

Вводя переменную $t = 2^{x^2+2x}$, $t \geq 1$, приходим к уравнению

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Подходит лишь корень $t = 2$, поэтому остается решить уравнение

$$2^{x^2+2x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

б) При $x^2 + 2x < 0$ исходное уравнение принимает вид

$$2^{x^2+2x} + 3 \cdot 2^{-(x^2+2x)} = 5.$$

Делаем такую же замену, как и выше: $t = 2^{x^2+2x}$, заметив, что переменная $t \in (0; 1)$.

Решаем уравнение

$$t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Подходит лишь корень $t = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Тогда

$$2^{x^2+2x} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - \log_2 \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 = \log_2 (5 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{\log_2 (5 - \sqrt{13})}.$$

9. Ответ: При $a \leq 0$ решений нет; при $0 < a < 1$ $x \in [-a; a^2 - a]$; при $a \geq 1$ $x \in \left[-a; \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right)$.

Решение. Допустимые значения переменных определяются условиями

$$\begin{cases} a + x \geq 0, \\ a \geq \sqrt{a+x}. \end{cases}$$

Ясно, что данное неравенство не имеет решений при $a \leq 0$. Пусть $a > 0$. Рассмотрим два случая.

$$a) \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -a, \\ a - \sqrt{a+x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -a, \\ x \leq a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ -a \leq x \leq a^2 - a. \end{cases}$$

Так как $a^2 - a < 0$ для $0 < a < 1$ и $a^2 - a \geq 0$ для $a \geq 1$, в данном случае имеем: если $0 < a < 1$, то $x \in [-a; a^2 - a]$; если $a \geq 1$, то $x \in [-a; 0)$.

$$b) \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ x \leq a^2 - a, \\ a - \sqrt{a+x} > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq a^2 - a, \\ \sqrt{a+x} < a - x^2. \end{cases}$$

Первые два неравенства полученной системы непротиворечивы лишь при $a \geq 1$. Второе неравенство является следствием третьего. В самом деле, для переменных $x \geq 0, a > 0$

$$x \leq a^2 - a \Leftrightarrow a - \sqrt{a+x} \geq 0.$$

Последнее же соотношение, очевидно, следует из $a - \sqrt{a+x} > x^2$.

Учитывая вышесказанное и избавляясь от радикала, преобразуем систему к виду ($a \geq 1$):

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a > x^2, \\ a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x > 0. \end{cases}$$

Решаем последнее неравенство относительно a . Дискриминант квадратного трехчлена

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2,$$

а его корни $a_1 = x^2 - x$, $a_2 = x^2 + x + 1$. Очевидно, $a_2 > a_1$ при $x \geq 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a > x^2, \\ \begin{cases} a < x^2 - x \\ a > x^2 + x + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ a > x^2 + x + 1 \end{cases}$$

(отсюда вытекает $a > 1$). Осталось решить неравенство

$$x^2 + x + 1 - a < 0.$$

Для значений $a > 1$ множество его решений имеет вид:

$$x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right).$$

Поскольку $\frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2} < 0$, а $\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} > 0$, полученная система равносильна

$$\begin{cases} a > 1, \\ 0 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, если $0 < a \leq 1$, то в области $x \geq 0$ решений нет; если $a > 1$, то $x \in \left[0; \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right)$.

Объединяя результаты, полученные в а) и б), приходим к ответу.

Вариант 6.2.

Ответы.

- $\{0; \pm 3; \pm 8; \pm 9\}$.
- $\left(-7; -\frac{7}{3}\right) \cup \{-2\} \cup [0; +\infty)$.
- $[1; \log_3 4)$.
- $(x; 4)$, где $x > 0$;
 $(0; y)$, где $y \in \mathbf{R}$;
 $(x; y)$, где $x < 0$, $y \in (-\infty; 12 - 4\sqrt{6}] \cup [12 + 4\sqrt{6}; +\infty)$.

$$5. \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \left(-\frac{6}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right].$$

$$7. \frac{9}{7}.$$

$$8. \left\{1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{1 + \log_3 (5 - 2\sqrt{5})}\right\}.$$

$$9. \text{ При } a \leq 1 \text{ решений нет; при } a > 1 \quad x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}; a^2 - a\right).$$

Вариант 6.3.

1. *Ответ:* 1 : 2.

Решение. Пусть m – количество синих шаров в коробке, а n – количество взятых красных шаров. Тогда, в соответствии с условием, общее количество шаров – $100m$ и

$$\frac{m}{100m - n} \cdot 100 = 2 \Leftrightarrow 2n = 100m.$$

Поэтому искомая величина $\frac{n}{100m} = \frac{1}{2}$.

$$2. \text{ Ответ: } \pm \arccos \frac{\sqrt{7} - 1}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решение.

$$|\sin x| = \cos x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \cos x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4}, \\ \cos x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду

$$2 \cos^2 x + \cos x - \frac{3}{4} = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$. Значение $\frac{-1 - \sqrt{7}}{4} < -\frac{1}{2}$ не подходит.

$$\text{Итак, } \cos x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}.$$

3. Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Решение. Домножая обе части исходного неравенства на выражение

$$\frac{|x-1| + |2x+1|}{|x-2| + |2x+2|} > 0,$$

получаем равносильное неравенство

$$\frac{(x-1)^2 - (2x+1)^2}{(x-2)^2 - (2x+2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{x(x+4)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x+4} \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup [-2; 0) \cup (0; +\infty).$$

4. Ответ: $\left[\frac{11 - \sqrt{21}}{2}; 5 \right)$.

Решение. Найдём ОДЗ неравенства из системы

$$\begin{cases} x(5-x) > 0, \\ x(x-3) > 0, \\ (x-5)(x-8) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5.$$

Данное неравенство на ОДЗ преобразуется следующим образом:

$$\lg x(5-x) - \lg x(x-3) \leq \lg (5-x)(8-x) \Leftrightarrow$$

$$\lg x + \lg (5-x) - \lg x - \lg (x-3) \leq \lg (8-x) + \lg (5-x) \Leftrightarrow$$

$$\lg (x-3)(8-x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 25 \leq 0.$$

Итак,

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 25 \leq 0, \\ 3 < x < 5, \end{cases}$$

откуда получаем $\frac{11 - \sqrt{21}}{2} \leq x < 5$.

5. Ответ: При $a > 4$ $x = \pm \left(\log_2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} \right)^{-1/2}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2^{1+\frac{1}{x^2}} + 2^{1-\frac{1}{x^2}} = a.$$

Обозначив $y = 2^{\frac{1}{x^2}}$, заметим, что $y > 1$, так как $\frac{1}{x^2} > 0$ при всех допустимых значениях x . Теперь, применяя неравенство, связывающее взаимно обратные величины, получаем

$$\frac{a}{2} = y + \frac{1}{y} > 2.$$

Отсюда следует, что при $a \leq 4$ данное уравнение не имеет решений.

Пусть $a > 4$. Уравнение

$$2y^2 - ay + 2 = 0$$

имеет корни

$$y_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} = \frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{4} > 1,$$

$$y_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4} = \frac{a^2 - a^2 + 16}{4(a + \sqrt{a^2 - 16})} = \frac{1}{y_1} < 1.$$

Учитывая условие $y > 1$, имеем

$$2^{1/x^2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4},$$

откуда

$$\frac{1}{x^2} = \log_2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} \Leftrightarrow x = \pm \left(\log_2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} \right)^{-1/2}.$$

6. Ответ: $h_A = 3$; $h_B = \frac{9}{4}$; $h_C = \frac{9}{2}$.

Решение. Пусть $AB = c$. Тогда из соотношений

$$BC : AB = 3 : 2, AC : AB = 2 : 1$$

следует $a = BC = \frac{3}{2}c$, $b = AC = 2c$.

Записывая различными способами выражения для удвоенной площади данного треугольника, получаем

$$ah_A = bh_B = ch_C = 2pr,$$

где $2p = \frac{9}{2}c$ — периметр треугольника, а r — радиус вписанной окружности.

Тогда

$$\frac{3}{2}c \cdot h_A = 2c \cdot h_B = c \cdot h_C = \frac{9}{2}c,$$

откуда

$$h_A = 3; \quad h_B = \frac{9}{4}; \quad h_C = \frac{9}{2}.$$

7. Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, вводя вспомогательный аргумент, и оценим ее:

$$\begin{aligned} 8|\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x| &= 16 \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right| = \\ &= 16 \left| \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \leq 16. \end{aligned}$$

Преобразование правой части приводит к оценке

$$\begin{aligned} \cos 18x + 12 \cos 9x + 27 &= 2 \cos^2 9x + 12 \cos 9x + 26 = \\ &= 2(\cos 9x + 3)^2 + 8 \geq 2 \cdot 4 + 8 = 16. \end{aligned}$$

Таким образом, данное равенство возможно, только если

$$\begin{cases} \left| \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \right| = 1, \\ \cos 9x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \\ 9x = \pi + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Для существования решения системы уравнений необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие целые числа k, n , что

$$-3\pi + 9\pi k = 2\pi + 4\pi n \Leftrightarrow 9k = 4n + 5$$

$$\Leftrightarrow 9(k-1) = 4(n-1), \text{ откуда } k-1 = 4m, m \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } k = 4m+1.$$

Поэтому

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

8. Ответ: $\left\{ \log_{4/5} \frac{625}{16} \right\}$.

Решение.

$$\sqrt{2^{x^2+2x} \cdot 5^{x^2-5x+5}} - 50 = \sqrt{2^{4-x^2} \cdot 5^{2x^2-2x+1}} - 50 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{x^2+2x} \cdot 5^{x^2-5x+5} - 50 = 2^{4-x^2} \cdot 5^{2x^2-2x+1} - 50, \\ 2^{x^2+2x} \cdot 5^{x^2-5x+5} \geq 50. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$2^{x^2+2x} \cdot 5^{x^2-5x+5} = 2^{4-x^2} \cdot 5^{2x^2-2x+1} \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x-4} = 5^{x^2+3x-4} \Leftrightarrow$$

$$4^{(x-1)(x+2)} = 5^{(x-1)(x+4)} \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \log_5 4 = (x-1)(x+4).$$

Корень $x_1 = 1$ – посторонний, так как для него не выполнено неравенство системы: $2^3 \cdot 5 = 40 < 50$.

Проверим выполнение этого условия для другого корня

$$x_2 = \frac{4 - 2 \log_5 4}{\log_5 4 - 1} = \frac{\log_5 \frac{625}{16}}{\log_5 \frac{4}{5}} = \log_{4/5} \frac{625}{16}.$$

Имеем

$$(x_2 + 2) \log_5 4 = x_2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$2^{2x_2+4} = 5^{x_2+4}, \text{ т.е. } 2^{2x_2} = \frac{1}{16} \cdot 5^{x_2+4},$$

поэтому

$$2^{x_2^2+2x_2} \cdot 5^{x_2^2-5x_2+5} = \frac{1}{16} \cdot 2^{x_2^2} \cdot 5^{x_2^2-4x_2+9} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 2^{x_2^2} \cdot 5^{(x_2-2)^2} \cdot 5^5 \geq \frac{5^5}{16} > 50.$$

9. Ответ: 3 : 1.

Решение. Заметим, что стороны параллелограмма (обозначим их длины через a, b) не могут быть равными. В противном случае мы имели бы ромб, биссектрисы внутренних углов которого совпадают с его диагоналями. Пусть для определенности $a < b$ (рис. 29).

Отметим следующие обстоятельства.

i) Биссектрисы внутренних углов параллелограмма, прилежащих к одной и той же стороне, пересекаются под прямым углом (например,

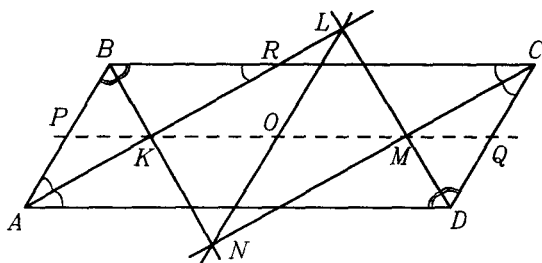


Рис. 29.

$\angle BKA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$). Поэтому четырехугольник $KLMN$ является прямоугольником.

ii) Точки пересечения биссектрис K и M , L и N попарно лежат на прямых, проходящих через середины противоположных сторон параллелограмма. В самом деле, по свойству биссектрисы угла точка K , например, равноудалена от сторон BC и AB , AB и AD , следовательно, от BC и AD .

Пусть R — точка пересечения биссектрисы $\angle BAD$ со стороной BC . Тогда треугольник ABR равнобедренный, так как углы BAR и BRA равны. Поскольку PK в нем — средняя линия, то $PK = \frac{1}{2}BR = \frac{a}{2}$. Аналогично $MQ = \frac{a}{2}$. Следовательно, $KM = PQ - PK - MQ = b - a$.

Диагонали прямоугольника $KLMN$ равны: $LN = KM = b - a$, угол KON , образованный их пересечением, равен $\angle A$ исходного параллелограмма, поскольку $PO \parallel AD$, $ON \parallel AP$.

Если BH — высота параллелограмма $ABCD$, проведенная из вершины B , то его площадь

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH = ab \sin \angle A.$$

Площадь $KLMN$ находим по формуле

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot LN \cdot \sin \angle KON = \frac{1}{2} \cdot (b - a)^2 \cdot \sin \angle A.$$

По условию

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{2ab} = \frac{2}{3}.$$

Вводя отношение $k = \frac{b}{a}$, приходим к уравнению

$$k^2 - \frac{10}{3}k + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ k = 3. \end{cases}$$

И, наконец, принимая во внимание, что $b > a$, т.е. $k > 1$, получаем ответ $b : a = 3 : 1$.

Вариант 6.4.

Ответы.

1. $1 : 2$.

2. $(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4} + \pi k, k \in Z$.

3. $(-\infty; -5] \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

4. $(2; 4 - \sqrt{3}]$.

5. При $a > 6$ $x = \pm \left(\log_3 \frac{a + \sqrt{a^2 - 36}}{6} \right)^{-1/2}$.

6. $h_B = \frac{4}{3}; h_C = 2; r = \frac{4}{9}$.

7. $\frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in Z$.

8. $\left\{ \log_{3/4} \frac{9}{256} \right\}$.

9. $1 : 4$.

Учебно-методическое пособие

**Задачи вступительных экзаменов
по математике (2001 г.)**
под ред. Е.А.Григорьева

Компьютерный набор *В.П.Воронин, Е.А.Григорьев, А.В.Разгулин*
Компьютерные рисунки *В.П.Воронин, А.В.Разгулин*

Лиц. изд. ИД № 00510 от 01.12.99 г.
Подписано в печать 15.11.2001. Формат 60×88¹/₁₆.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Печ. л. 7.0. Тираж 3000 экз. Заказ 8078.

ООО "МАКС Пресс." 107066, Москва, Елоховский пр. д. 3, стр. 2.
Тел. 939-38-90, 928-22-27, 928-10-42. Факс 939-38-91.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86.