

ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Под ред. С.С.Кротова

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.. 1988. — 192с. — (Б-чка «Квант». Вып 60)

Сборник, в котором содержится около 250 задач по физике, предлагавшихся школьникам на московских физических олимпиадах с 1968 по 1985г. В книгу вошли наиболее интересные и оригинальные задачи с решениями.

Для школьников и преподавателей физики. Может быть использован для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы, где предъявляются повышенные требования к знаниям по физике.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

	3	
	Задачи	Решения
1. Механика	5	61
2. Теплота и молекулярная физика	30	125
3. Электричество и магнетизм	41	149
4. Оптика	56	179

Современный этап развития науки и техники требует подготовки большого числа высококвалифицированных специалистов в области естественных и технических наук. Надлежащее решение этой задачи невозможно без существенного повышения уровня преподавания физики, усиления индивидуального подхода, раннего выявления и развития творческих способностей будущих специалистов. При этом важную роль играют олимпиады по физике для учащихся средних школ и профессионально-технических училищ, которые способствуют выявлению наиболее одаренных учащихся, позволяют правильно сориентировать их в выборе будущей профессии, пропагандируют научно-технические знания среди молодежи.

Предлагаемая читателям книга «Задачи московских физических олимпиад» подытоживает опыт проведения московских олимпиад школьников по физике за последние 15 лет. Московская олимпиада включает три теоретических тура — районный, городской, отборочный — и заключительный, экспериментальный тур, по результатам проведения которого формируется команда школьников г. Москвы для участия во Всесоюзной олимпиаде. Уровень сложности задач нарастает, начиная с простейших задач районного тура, решение которых требует лишь уверенного владения основными законами и понятиями физики, и кончая довольно трудными задачами отборочного тура. Некоторые из задач последнего, отборочного тура представляют собой небольшое научное исследование (как правило, эти задачи являются украшением олимпиады).

В настоящую книгу включены только задачи теоретических туров. Структура книги полностью отражает представительность различных разделов курса физики на олимпиаде. При этом, естественно, чем раньше тот или иной раздел физики изучается в школе, тем большее число задач этого раздела встречается на олимпиаде, тем больший удельный вес соответствующего раздела в предлагаемой книге. Поскольку отдельные темы оказались представленными одной-двумя задачами, а некоторые — десятком задач, мы не стали вводить подробную рубрикацию.

Большинство задач являются оригинальными, значительная их часть предложена авторами книги. Наиболее сложные задачи отмечены звездочкой. Представляя произведение замкнутого коллектива авторов, они отражают определенные традиции, опыт проведения именно московских олимпиад, передают научные вкусы и стиль работы коллектива единомышленников — в этом состоит специфика предлагаемой книги.

Учитывая все сказанное, книгу можно рекомендовать очень широкому кругу читателей. Наиболее целесообразно использовать ее в качестве дополнения к имеющимся сборникам задач по элементарной физике. Она будет полезна тем, кто после подробного изучения курса физики хочет углубить свои знания, попробовать силы при решении нестандартных задач, развить физическую интуицию. Предназначая ее в первую очередь школьникам старших классов, мы считаем, что и студенты первых курсов найдут в ней кое-что интересное, а руководители физических кружков, преподаватели вечерних и заочных школ, учителя, ведущие факультативные занятия, тоже почерпнут для себя много полезного.

Настоящая книга никогда не увидела бы свет, если бы не вдохновляющая поддержка идеи ее создания академиком И. К. Кикоиным, который на протяжении многих лет возглавлял Центральный оргкомитет Всесоюзной олимпиады школьников, редколлегию журнала «Квант» и серии «Библиотечка «Квант». Данная книга является данью нашего уважения и памяти этому крупнейшему советскому ученому, мудрому и чуткому учителю.

Нам бы хотелось высказать слова благодарности своим старшим товарищам-коллегам по олимпиадной деятельности — В. К. Петерсону, Г. Е. Пустовалову, Г. Я. Мякишеву, А. В. Ткачуку, В. И. Григорьеву, Б. Б. Буховцеву, совместная работа с которыми способствовала формированию нашего понимания того, что такое физическая задача. Мы признательны также всем членам жюри московских олимпиад последних лет. Идеи ряда задач принадлежат им.

Наконец, нам очень приятно поблагодарить Г. В. Меледина, самым тщательным образом прочитавшего книгу в рукописи и сделавшего ряд полезных замечаний как по содержанию, так и по стилю книги.

1. МЕХАНИКА



В задачах этого раздела, там, где необходимо, считать ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.1. Какое время больше — спуска тела по наклонной плоскости с высоты h (при нулевой начальной скорости) или подъема с такой начальной скоростью, что тело останавливается на той же высоте h ?

1.2. Локомотив находился на расстоянии $L = 400 \text{ м}$ от светофора и имел скорость $v = 54 \text{ км/ч}$, когда началось торможение.

Определите положение локомотива относительно светофора через 1 минуту после начала торможения, если он двигался с ускорением $a = 0,3 \text{ м/с}^2$.

1.3. Вертолет взлетает с аэродрома по вертикали с ускорением $a = 3 \text{ м/с}^2$ и начальной скоростью, равной нулю. Через некоторое время t_1 пилот выключил двигатель. Звук на земле в месте взлета перестал быть слышен спустя время $t_2 = 30 \text{ с}$.

Определите скорость вертолета v в момент прекращения работы двигателя. Считать скорость звука $c = 320 \text{ м/с}$.

1.4. Материальная точка начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением a . Спустя время t_1 после начала ее движения ускорение меняет знак на противоположный, оставаясь неизменным по модулю.

Определите, через какое время t после начала движения точка окажется в исходном положении.

1.5. Два тела движутся по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями v_1 и v_2 и постоянными ускорениями a_1 и a_2 , направленными противоположно соответствующим скоростям в начальный момент времени.

При каком максимальном начальном расстоянии l_{max} между телами они встретятся в процессе движения?

1.6. На упругую плиту свободно падают два стальных шарика: 1-й с высоты $h_1 = 44 \text{ см}$, 2-й с высоты $h_2 = 11 \text{ см}$ спустя τ секунд после 1-го. Через некоторое время τ скорости шариков совпадают по модулю и направлению.

Определите время τ и интервал времени, в течение которого скорости обоих шариков будут равными. Считать, что шарики между собой не соударяются.

1.7*. На вогнутую сферическую поверхность радиуса R с высоты $H = R/8$ вблизи вертикальной оси симметрии падают с нулевой начальной скоростью маленькие шарики.

Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, покажите, что после 1-го соударения каждый шарик попадает в низшую точку сферической поверхности. Считать, что шарики между собой не соударяются.

1.8. Маленький шарик, брошенный с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, ударился о вертикальную стенку, движущуюся ему навстречу с горизонтально направленной скоростью v , и отскочил в точку, из которой был брошен.

Определите, через какое время t после броска произошло столкновение шарика со стенкой? Потерями на трение пренебречь.

1.9*. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности и попадает в точку A в вертикальный цилиндрический колодец глубины H и радиуса r . Скорость шарика v составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 1, вид сверху).

При каком соотношении между v , H , r и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца? Потерями на трение пренебречь.

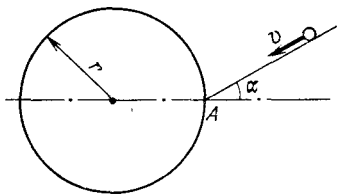


Рис. 1

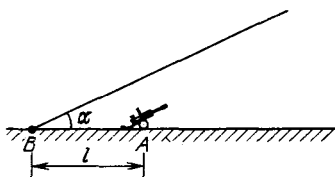


Рис. 2

1.10. Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис. 2). Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна v_0 , траектория снаряда лежит в плоскости рисунка.

Определите максимальную дальность полета снаряда $L_{\max}$.

1.11. В одной автомашине лобовое стекло имеет угол наклона к горизонту, равный $\beta_1 = 30^\circ$, а в другой $\beta_2 = 15^\circ$.

При каком отношении скоростей двух автомашин v_1/v_2 водители увидят градины, отскакивающими от лобовых стекол своих машин в вертикальном направлении? Считать, что относительно земли градины падают вертикально.

1.12. По гладкой горизонтальной поверхности движется лист фанеры. Скорости точек A и B равны v и лежат в плоскости листа фанеры (рис. 3).

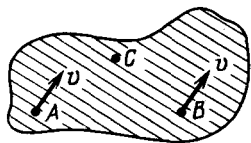


Рис. 3

Определите скорость точки C .

1.13. Необходимо поставить в небольшой просвет между вереницей автомашин, стоящих вдоль тротуара, еще одну машину.

Как следует заезжать в просвет: передним ходом или задним, если у машины поворачиваются только передние колеса.

1.14*. Самолет, летящий горизонтально со скоростью v_0 , начинает подниматься вверх, описывая окружность, лежащую в вертикальной плоскости. Скорость самолета при этом меняется с высотой h над первоначальным уровнем движения по закону $v^2 = v_0^2 - 2a_0h$. В верхней точке траектории его скорость оказывается равной $v_1 = v_0/2$.

Определите ускорение a самолета в тот момент, когда его скорость направлена вертикально вверх.

1.15. Открытая карусель вращается с угловой скоростью ω . На карусели на расстоянии r от оси вращения стоит человек. Идет дождь и капли дождя падают вертикально вниз со скоростью v_0 .

Как человек должен держать зонт, чтобы наилучшим образом укрыться от дождя?

1.16*. Катушка катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, причем скорость конца нити (точка A) горизонтальна и равна v . На катушку опирается шарнирно закрепленная в точке B доска (рис. 4). Внутренний и внешний радиусы катушки равны r и R соответственно.

Определите угловую скорость ω доски в зависимости от угла α .

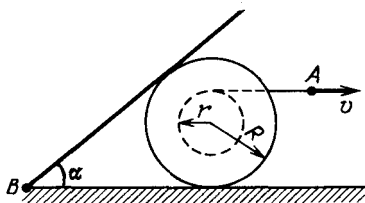


Рис. 4

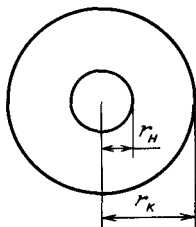


Рис. 5

1.17. На пустую катушку магнитофона, вращающуюся с постоянной угловой скоростью, перематывается магнитная лента. После перемотки конечный радиус r_k намотки оказался в три раза больше начального радиуса r_n (рис. 5). Время перемотки ленты равно t_1 .

За какое время t_2 на такую же катушку перемотается лента, вдвое более тонкая?

1.18. При прослушивании магнитофонной записи было замечено, что радиус намотки пленки на кассете уменьшился вдвое за время $t_1 = 20$ мин.

За какое время t_2 после этого радиус еще раз уменьшится вдвое?

1.19. Два колечка O и O' надеты на вертикальные неподвижные стержни AB и $A'B'$ соответственно. Нерастяжимая нить закреплена в точке A' и на колечке O и продета через колечко O' (рис. 6).

Считая, что колечко O' движется вниз с постоянной скоростью v_1 , определите скорость v_2 колечка O , если $\angle AOO' = \alpha$.

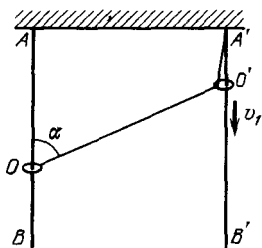


Рис. 6

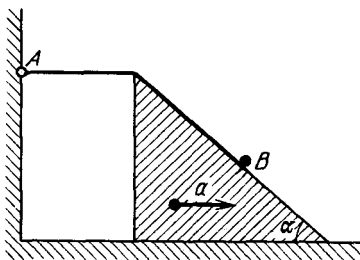


Рис. 7

1.20. На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая невесомая веревка (рис. 7). Один из концов веревки прикреплен к стене в точке A . В точке B к веревке прикреплен небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a .

Определите ускорение $a_{\text{гр}}$ грузика, пока он находится на клине.

1.21. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 = 2$ см/с.

За какое время t муравей добежит от точки A до точки B , которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника?

1.22. Во время движения паровоза по закруглению радиуса R в горизонтальном направлении дует ветер. Форма дымного следа изображена на рис. 8 (вид сверху).

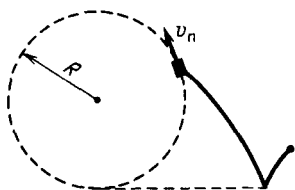


Рис. 8

Определите, используя рисунок, скорость ветра $v_{\text{в}}$, если известно, что она постоянна, а скорость паровоза $v_n = 36$ км/ч.

1.23*. Трое школьников — Слава, Игорь и Никита — решили покататься на каруселях. Слава и Игорь заняли диаметрально противоположные точки карусели радиуса r . Никита выбрал карусель радиуса R . Расположение мальчиков в начальный момент времени показано на рис. 9.

Учитывая, что карусели касаются друг друга и вращаются в одну и ту же сторону с одной и той же угловой скоростью ω , определите характер движения: Никиты с точки зрения Игоря; Славы с точки зрения Никиты.

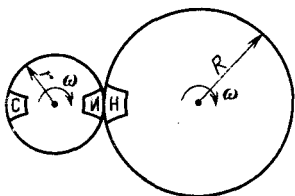


Рис. 9

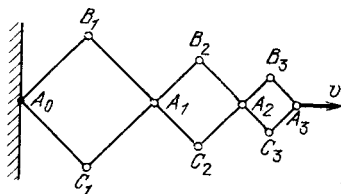


Рис. 10

1.24. На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R . Мимо него движется со скоростью v такой же обруч.

Найдите зависимость скорости v_A верхней точки «пересечения» обручей от расстояния d между их центрами. Считать, что обручи тонкие и второй обруч «проезжает» вплотную к первому.

1.25. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3 : 2 : 1 (рис. 10). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью v .

Определите скорости вершин A_1 , A_2 , B_2 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.

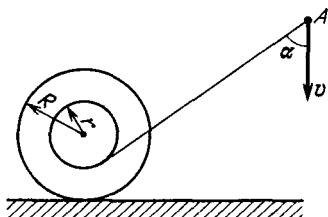


Рис. 11

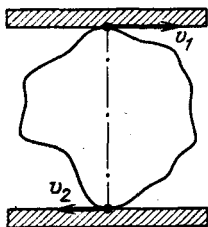


Рис. 12

1.26. Конец нити, намотанной на катушку, внешний радиус которой равен R , внутренний — r , перекинут через вбитый в стену гвоздь A (рис. 11). Нить тянут с постоянной скоростью v .

Найдите скорость v_0 движения центра катушки в тот момент, когда нить составляет угол α с вертикалью. Считать, что катушка катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания.

1.27. Жесткая заготовка зажата между двумя параллельными направляющими, движущимися горизонтально в противоположные стороны со скоростями v_1 и v_2 . В некоторый момент времени точки касания заготовки и направляющих лежат на прямой, перпендикулярной направлениям скоростей v_1 и v_2 (рис. 12).

Какие точки заготовки имеют в этот момент скорости, равные по модулю v_1 и v_2 ?

1.28. На длинную горизонтальную ленту транспортера, движущуюся с постоянной скоростью, положили брусок и сообщили ему скорость относительно земли $v_0 = 5$ м/с, направленную против движения ленты. Спустя время $t = 4$ с скорость бруска сравнялась со скоростью ленты. Коэффициент трения между бруском и лентой равен $\mu = 0,2$.

Определите скорость v ленты транспортера.

1.29. Тело соскальзывает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения μ между телом и наклонной плоскостью изменяется с увеличением расстояния l от вершины наклонной плоскости по закону $\mu = bl$. Тело останавливается, не дойдя до конца наклонной плоскости.

Найдите время t , прошедшее с начала движения тела до его остановки.

1.30. Сани с грузом, едущие по льду, попадают на участок, посыпанный песком, и, не пройдя и половины своей длины, останавливаются не разворачиваясь. После этого им резким толчком сообщают первоначальную скорость.

Найдите отношение путей и времен торможения до первой остановки и после резкого толчка.

1.31. Через неподвижное, горизонтально расположенное на некоторой высоте бревно переброшена веревка. Чтобы удержать груз массой $m = 6$ кг, подвешенный на одном конце веревки, необходимо тянуть второй конец с минимальной силой $T_1 = 40$ Н.

Определите минимальную силу T_2 , с которой необходимо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься.

1.32. Почему трудно повернуть руль, когда автомобиль стоит, и легко, когда автомобиль движется?

1.33. На тело, движущееся с постоянной скоростью v , начинает действовать некоторая постоянная сила. Спустя промежуток времени Δt скорость тела уменьшается в два раза.

Спустя еще такой же интервал времени скорость уменьшается еще в два раза.

Определите скорость v_k тела через интервал времени $3\Delta t$ с начала действия постоянной силы.

1.34. В закрытый вагон, стоящий на рельсах, проложенных по горизонтальной поверхности, сел человек, у которого имеются пружинные весы и секундомер. Сидя лицом по направлению движения вагона (вдоль рельсов) и прицепив к пружинным весам грузик массой m , человек стал наблюдать за направлением отклонения грузика и показаниями весов, фиксируя те моменты времени, когда показания изменялись.

Вагон пришел в движение и первые $t_1 = 4$ с грузик был отклонен к человеку, а весы показывали $1,25mg$; затем время, равное $t_2 = 3$ с, грузик висел вертикально, а весы показывали mg . После этого грузик отклонился влево (поперек вагона) и при этом в течение времени $t_3 = 25,12$ с весы опять показывали $1,25mg$. Наконец, еще на протяжении $t_4 = 4$ с грузик был отклонен вперед при тех же показаниях весов.

Определите, где относительно своего первоначального положения оказался вагон и с какой скоростью он к этому моменту двигался. Считать, что при изменении направления отклонения и показаний весов человек сразу гасит рукой возникающие колебания.

1.35. Два невесомых одинаковых стержня соединены шарнирно друг с другом и подвешены на шарнирах к горизонтальной балке (рис. 13). Жесткость каждого из стержней равна k_0 , угол между ними 2α .

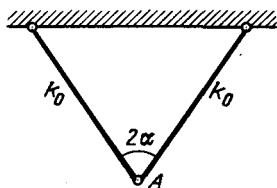


Рис. 13

Найдите жесткость k системы стержней по отношению к вертикальному смещению шарнира A под действием некоторой силы F . Считать смещение малым по сравнению с длиной стержней.

1.36. Из двух расположенных в одной горизонтальной плоскости на расстоянии $s = 10$ м одна от другой пружинных пушечек одновременно вылетают тяжелые шарики, один из которых (1-й) имеет начальную вертикальную скорость $v_1 = 10$ м/с, а 2-й вылетает под углом α к горизонту со скоростью $v_2 = 20$ м/с. На каждый из шариков действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха $F = \mu v$, $\mu = 0,1$ г/с.

Найдите, каким должен быть угол α , чтобы шарики столкнулись в воздухе.

1.37. Легкая пружина длины l , жесткости k установлена на столе вертикально. На нее падает небольшой шарик массой m .

Определите, на какой высоте h от поверхности стола шарик будет иметь максимальную скорость.

1.38*. На невесомой нити длиной l привязан тяжелый шарик массой m ; сила трения шарика о воздух пропорциональна скорости его движения относительно воздуха: $F_{\text{тр}} = \mu v$. Дует горизонтальный сильный ветер с постоянной скоростью v .

Определите период T малых колебаний. Считать, что колебания шарика затухают за время, много большее периода колебаний.

1.39. Резиновую нить массой m и жесткости k подвешивают за один из концов.

Определите общее удлинение нити Δl .

1.40. Для покоящейся системы, изображенной на рис. 14, найдите ускорения всех грузов сразу после того, как была перерезана удерживающая их нижняя нить. Считать, что нити невесомы и нерастяжимы, пружины невесомы, масса блока пренебрежимо мала, трение в подвесе отсутствует.

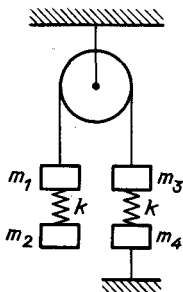


Рис. 14

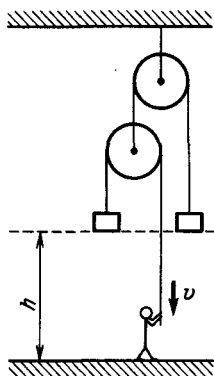


Рис. 15

1.41. Человек поднимал один из двух грузов равной массы с постоянной скоростью v (рис. 15). В момент, когда оба груза оказались на одинаковой высоте h , верхний блок растормозился (получил возможность вращаться без трения, как и нижний блок).

Определите, какой из грузов и спустя какое время t первым окажется на полу, считая, что человек продолжает выбирать веревку с прежней постоянной скоростью v . Массой блоков, веревок и растяжением веревок пренебречь.

1.42. Имеются наклонная плоскость и брусок, который может скользить по ней в различных направлениях (рис. 16). Если бруску сообщить некоторую начальную скорость v , направленную вдоль наклонной плоскости вниз, то он будет двигаться равнозамедленно и пройдет до остановки расстояние l_1 . Если

бруску сообщить такую же по модулю скорость, но направленную вверх, то он, двигаясь вверх, пройдет до остановки расстояние l_2 . В нижней части наклонной плоскости установлена идеально гладкая горизонтальная направляющая планка.

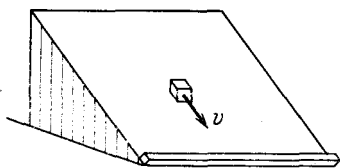


Рис. 16

Какое расстояние l пройдет брусек по наклонной плоскости вдоль горизонтальной направляющей планки, если ему сообщить в горизонтальном направлении ту же по модулю начальную скорость, что и в предыдущих случаях?

1.43. Брусек толкнули резко вверх вдоль крыши, образующей угол α с горизонтом. Время подъема бруска до высшей точки оказалось в два раза меньше, чем время спуска до исходной точки.

Определите коэффициент трения μ между бруском и крышей.

1.44. На «невесомой подставке», образованной двумя гладкими наклонными плоскостями, каждая из которых составляет угол α с горизонтом, находятся два шарика, расположенные, как показано на рис. 17. Подставка может без трения скользить по горизонтальной плоскости. Верхний шарик, масса которого m_1 , отпускают.

Определите, при каком условии нижний шарик, масса которого m_2 , начнет после этого «забираться» на подставку.

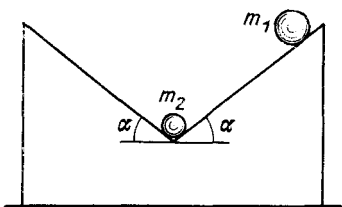


Рис. 17

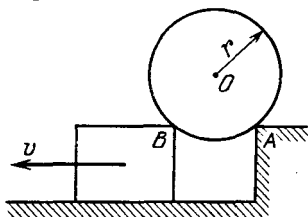


Рис. 18

1.45. Цилиндр массой m и радиуса r опирается на две подставки одинаковой высоты (рис. 18). Одна подставка неподвижна, а другая выезжает из-под цилиндра со скоростью v .

Определите силу давления N цилиндра на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $AB = r\sqrt{2}$. Считать, что в начальный момент подставки располагались очень близко друг к другу; трением между цилиндром и подставками пренебречь.

1.46. По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с горизонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин, одна из плоскостей которого вертикальна (рис. 19). Масса цилиндра m_1 , масса клина m_2 .

Найдите силу давления N клина на цилиндр. Трением между цилиндром и клином пренебречь.

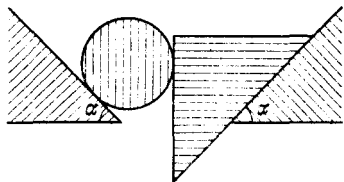


Рис. 19

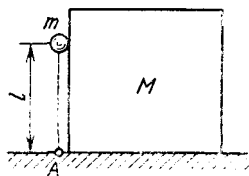


Рис. 20

1.47. Невесомый стержень длиной l с небольшим грузом массой m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 20) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массой M . От небольшого толчка система приходит в движение.

При каком отношении масс M/m стержень в момент отрыва от тела будет составлять с горизонтом угол $\alpha = \pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость u тела? Трением пренебречь.

1.48. Однородный стержень AB массой m длины l нижним концом опирается о стену и с помощью нити DC удерживается в наклонном положении (рис. 21). Нить привязана к стене в точке C , а к стержню в точке D , такой, что $AD = AB/3$. Углы, составляемые нитью и стержнем со стеной, равны α и β соответственно.

Найдите возможные значения коэффициента трения μ между стержнем и стеной.

1.49*. Массивный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω . На него сверху опускают диск массой m радиуса r , ось которого направлена строго вертикально (рис. 22). Расстояние между осями дисков равно d ($d > r$), коэффициент трения между поверхностями равен μ .

Определите установившуюся угловую скорость ω малого диска. Какой момент сил M необходимо приложить к оси большого диска, чтобы скорость его вращения оставалась не-

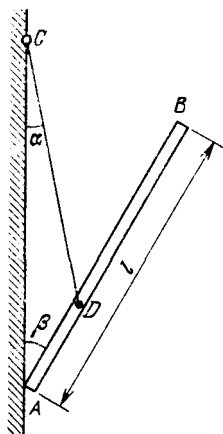


Рис. 21

изменной? Радиус массивного диска $R > d + r$. Трением в осях дисков пренебречь.

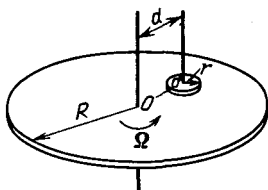


Рис. 22

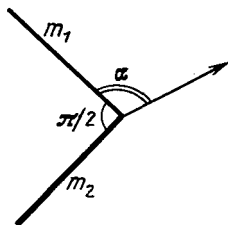


Рис. 23

1.50. Две жестко связанные однородные палочки одинаковой длины массами m_1 и m_2 образуют угол $\pi/2$ и лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 23). Систему равномерно тянут с помощью нити, прикрепленной к вершине угла и параллельной поверхности.

Определите угол α , который составляет нить с палочкой массой m_1 .

1.51. Мяч, движущийся со скоростью, равной $v = 10$ м/с, ударяется о ногу футболиста.

Определите скорость u , с которой должна двигаться нога футболиста для того, чтобы ударившийся о ногу мяч остановился. Считать массу мяча много меньшей массы ноги футболиста, а удар абсолютно упругим.

1.52. Вблизи поверхности земли свободно падает тело массой m . В некоторый момент времени в него попадает (и застревает) горизонтально летящая тяжелая пуля массой M .

Как изменится время падения тела на землю? Определите время падения t тела, если известно, что пуля попала в тело на половине пути, а время свободного падения тела с той же высоты равно t_0 . Считать, что масса пули много больше массы тела ($M \gg m$). Сопротивлением воздуха пренебречь.

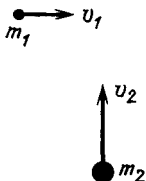


Рис. 24

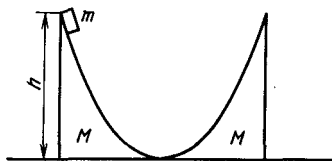


Рис. 25

1.53. Два тела массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг движутся навстречу друг другу во взаимно перпендикулярных направле-

ниях со скоростями $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 2$ м/с (рис. 24). В результате соударения тела слипаются.

Определите, какое количество теплоты Q выделится в результате соударения.

1.54. Два подвижных клина одинаковой массы M имеют плавные переходы на горизонтальную плоскость (рис. 25). С левого клина соскальзывает шайба массой m с высоты h .

На какую максимальную высоту $h_{\max}$ шайба поднимется на правом клине? Трением пренебречь.

1.55. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки покоится симметричный брусок массой m_1 с углублением полусферической формы радиуса r (рис. 26). Из начального положения без трения соскальзывает маленькая шайба массой m_2 .

Найти максимальную скорость бруска при его последующем движении.

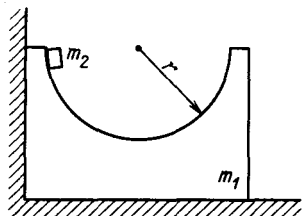


Рис. 26

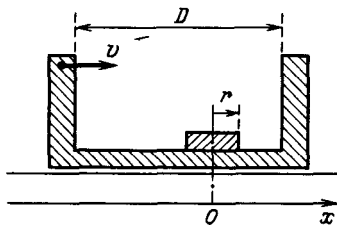


Рис. 27

1.56. На столе лежит круглая коробка с внутренним диаметром D , а в ней шайба радиусом r (рис. 27). Коробку как целое начинают двигать с постоянной скоростью v , направленной вдоль линии центров коробки и шайбы. В момент времени t_0 шайба ударяется о коробку.

Найдите временные зависимости перемещения центра шайбы $x_{\text{ш}}$ и ее скорости $v_{\text{ш}}$ относительно стола, начиная с момента t_0 и считая все удары шайбы о коробку абсолютно упругими. Постройте графики $x_{\text{ш}}(t)$ и $v_{\text{ш}}(t)$. Трением между коробкой и шайбой пренебречь.

1.57. Тонкий обруч массой M и радиуса r поставлен на горизонтальную плоскость. В начальный момент обруч покоится. По гладкому каналу, проходящему внутри обруча, соскальзывает из верхней точки без начальной скорости небольшая шайба массой m .

Определите скорость и центра обруча в тот момент, когда шайба

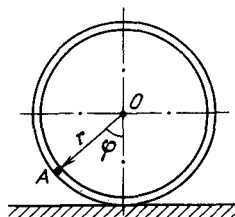


Рис. 28

находится в некоторой точке обруча A , радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью (рис. 28). Трением между обручем и плоскостью пренебречь.

1.58. Горизонтально расположенный невесомый стержень длиной $3l$ с закрепленными на нем на равных расстояниях друг от друга и от концов удерживающих его вертикальных нитей грузами массами m_1 и m_2 находится в положении равновесия (рис. 29).

Определите силу натяжения T левой нити в тот момент времени, когда правую нить перерезают.

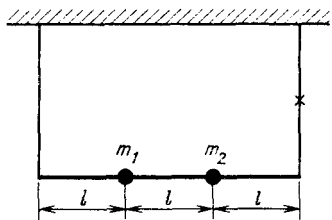


Рис. 29

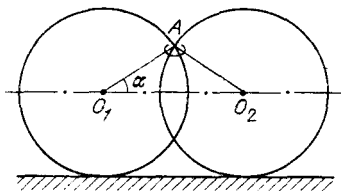


Рис. 30

1.59. Колечко массой m , свободно скрепляющее два тонких одинаковых обруча массой M каждый, начинает соскальзывать вниз; обручи при этом разъезжаются в разные стороны по шероховатой горизонтальной поверхности.

Определите ускорение a колечка в начальный момент времени, если $\angle AO_1O_2 = \alpha$ (рис. 30). Трением между колечком и обручами пренебречь.

1.60. Гибкий трубопровод длиной l соединяет в пространстве точки A и B , разность высот между которыми равна h (рис. 31). Внутри трубопровода по всей его длине лежит веревка, которую удерживают в точке A .

Определите ускорение a , с которым начнет двигаться веревка в начальный момент времени после того, как ее отпустят.

Трением между веревкой и стенками трубопровода пренебречь.

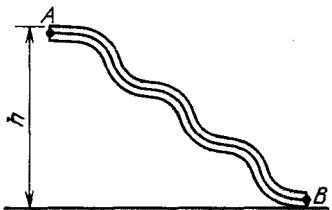


Рис. 31

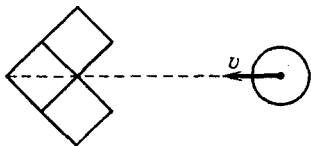


Рис. 32

1.61. На группу из трех гладких одинаковых кубиков, лежащих на гладкой горизонтальной поверхности, как показано на

рис. 32, налетает со скоростью v гладкая шайба. Масса каждого кубика равна массе шайбы. Диаметр шайбы и ее высота равны ребру кубика.

Определите скорости всех тел после соударения.

1.62. В гладкой неподвижной круговой горизонтальной трубе покоятся несколько одинаковых шариков. Один из шариков взрывается, распадаясь на две части неравной массы.

Определите окончательную скорость образовавшегося после всех соударений тела. Считать все соударения абсолютно неупругими.

1.63. Три небольших тела, массы которых относятся, как $3:4:5$ (масса самого легкого тела равна m), удерживаются в трех различных точках на внутренней поверхности гладкой полусферической чаши радиуса r . В нижней точке чаша закреплена на горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени тела отпускают и предоставляют самим себе.

Определите максимальное количество теплоты Q , которое может выделиться в такой системе. При каком начальном положении тел это осуществится? Считать все соударения тел абсолютно неупругими.

1.64. Покажите, что максимальная скорость, которую при столкновении может сообщить протону α -частица, составляет $1,6$ ее начальной скорости.

1.65. При движении по песку рекомендуют давление воздуха в шинах автомобиля уменьшить. Зачем?

1.66. Длинная гладкая цилиндрическая труба радиуса r наклонена под углом α к горизонту (рис. 33). Из точки A по внутренней поверхности трубы пускают вверх небольшое тело, направление начальной скорости которого составляет угол φ с прямой AB .

Определите минимальную начальную скорость v_0 , при которой тело начнет двигаться вверх без отрыва от поверхности трубы.

1.67*. К оси колеса массой m радиуса r привязана нерастяжимая веревка, которую тянут в горизонтальном направлении в плоскости колеса. Колесо катится без подскоков по решетке, состоящей из параллельных горизонтальных прутьев, расстояние между которыми равно l , причем $l \ll r$.

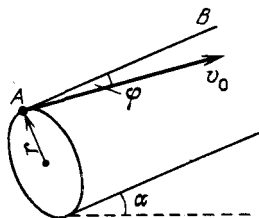


Рис. 33

Определите, какой должна быть средняя сила натяжения T веревки, чтобы колесо двигалось в среднем с постоянной скоростью v ? Считать массу колеса сосредоточенной в его оси.

1.68. По шероховатой горизонтальной плоскости, переходящей в наклонную, составляющую угол α с горизонтом, катится без проскальзывания с некоторой скоростью v , перпендикулярной границе раздела плоскостей, колесная пара, состоящая из двух легких колес радиуса r , насаженных на тонкую тяжелую ось (рис. 34).

Определите, при каком значении v колесная пара перекаатится с горизонтальной плоскости на наклонную без отрыва.

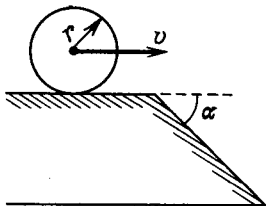


Рис. 34

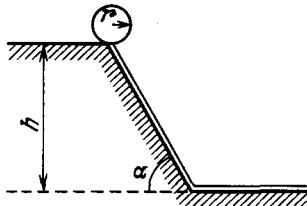


Рис. 35

1.69. Тонкий обод массой m и радиуса r скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, наматывая при этом на себя тонкую ленту, линейная плотность которой равна ρ (рис. 35). В начальный момент обод находится на высоте h над горизонтальной поверхностью.

Определите, на каком расстоянии s от основания наклонной плоскости обод остановится. Считать переход от наклонной плоскости к горизонтальной поверхности плавным.

1.70. С аэростата, парящего в воздухе, сбросили два одинаковых по размерам маленьких шарика массой m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), связанных тонкой невесомой нитью.

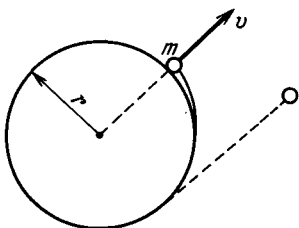


Рис. 36

Найдите силу натяжения T нити в полете после того, как движение шариков установится.

1.71*. Шарик невесомой нерастяжимой нитью прикреплен к неподвижному цилиндру радиуса r . Первоначально нить была намотана так, что шарик касался цилиндра. В некоторый момент времени шарiku была сообщена скорость v в радиальном направлении и нить начала разматываться (рис. 36).

Найдите длину l размотанного участка нити к моменту времени t . Силой тяжести пренебречь.

1.72. Три маленьких шарика одинаковой массы — белый (Б), зеленый (З), голубой (Г) — закреплены невесомыми стержнями

в вершинах равностороннего треугольника со стороной l . Система шариков положена на гладкую горизонтальную поверхность и приведена во вращение вокруг центра масс с периодом T . В некоторый момент времени голубой шарик отрывается от каркаса.

Определите расстояние L , на котором окажется голубой шарик от зеленого спустя время T .

1.73. На расстоянии l слева от края стола лежит брусок, соединенный с другим бруском такой же массы через невесомый блок невесомой нерастяжимой нитью длины $2l$, перекинутой через блок (рис. 37). Правый брусок удерживают на одном уровне с левым так, что нить не натянута и не провисает, затем его отпускают.

Что произойдет раньше: левый брусок доедет до края (достигнет блока) стола или правый брусок ударится о стол?

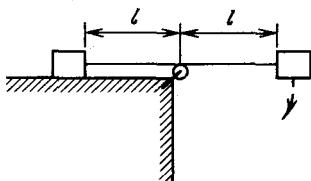


Рис. 37

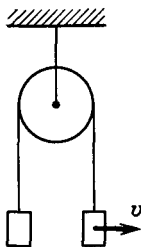


Рис. 38

1.74. На концах невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок, находятся два груза одной и той же массы (рис. 38). Сначала система покоится и грузы находятся на одном уровне. Затем правому грузу толчком сообщается горизонтальная скорость v в плоскости рисунка.

Какой из грузов окажется ниже через некоторое время?

1.75. К концу свободно висящего стержня на двух нитях длиной $l_1 = 7$ см и $l_2 = 11$ см подвешены шарики массами $m_1 = 56$ г и $m_2 = 28$ г (рис. 39).

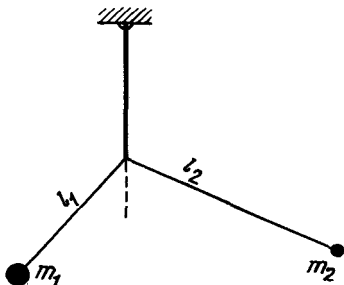


Рис. 39

Определите угловую скорость ω , с которой надо вращать стержень вокруг вертикальной оси, чтобы он не отклонялся от вертикального положения.

1.76. Вокруг вертикальной оси вращается с постоянной угловой скоростью ω невесомый горизонтальный жесткий стержень, по которому без трения могут двигаться два шарика одной и той же массы m . Шарик соединен между собой невесомой пружиной жесткости k , длина которой в ненапряженном состоянии равна l_0 . Ближайший к вертикальной оси шарик соединен с ней такой же пружиной.

Найдите длину каждой из пружин. При каких условиях шарик будут двигаться по окружностям?

1.77. Зависимость кинетической энергии W_k тела от перемещения s при движении тела по прямой изображена на рис. 40. Известно, что в точке A на тело действовала сила $F_A = 2$ Н.

Определите, какие силы действовали на тело в точках B и C .

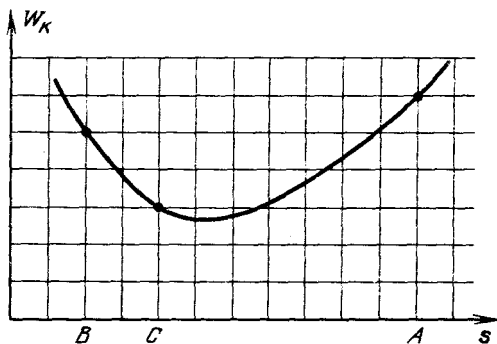


Рис. 40

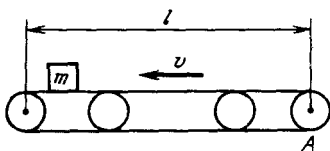


Рис. 41

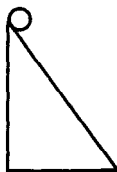


Рис. 42



Рис. 43

1.78. Лента транспортера длиной l , на которой лежит брусок массой m , движется со скоростью v (рис. 41).

Определите скорость v_0 , с которой нужно толкнуть брусок против движения транспортера, чтобы количество теплоты, выделившееся при торможении бруска лентой транспортера, было максимальным. Чему равно это максимальное количество теплоты Q , если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v < \sqrt{2\mu l g}$?

1.79. Массивная труба скатывается с одинаковой высоты с горок разного профиля (рис. 42, 43). В первом случае проскальзывания нет, а во втором случае труба проскальзывает на некотором участке пути.

Определите, в каком случае скорость трубы в конце горки будет меньше.

1.80. На легкой пружине подвешен тяжелый груз. Пружину медленно оттягивают вниз за середину, совершая при этом некоторую работу A , затем пружину отпускают.

Определите максимальную кинетическую энергию W_k груза при последующем движении.

1.81. Массы двух звезд равны m_1 и m_2 , расстояние между ними равно l .

Найдите период T обращения этих звезд по круговым орбитам вокруг их общего центра.

1.82. Метеорит, летящий на планету массой M (по прямой, проходящей через центр планеты), попадает в автоматическую космическую станцию, вращавшуюся вокруг планеты по круговой орбите радиуса R . Масса станции в 10 раз превосходит массу метеорита. В результате столкновения метеорит застревает в станции, которая переходит на новую орбиту с минимальным расстоянием до планеты $R/2$.

Определите скорость u метеорита перед столкновением.

1.83. Высадившись на полюсе некоторой планеты, космонавты обнаружили, что сила тяжести там составляет 0,01 земной, а продолжительность суток такая же, как и на Земле. При исследовании планеты оказалось, что на ее экваторе тела невесомы.

Определите радиус R этой планеты.

1.84. Радиус орбиты Нептуна в 30 раз больше радиуса орбиты Земли.

Определите период обращения Нептуна T_H вокруг Солнца.

1.85. На нити, перекинутой через два блока, подвешены три груза, массы которых равны m_1 , m_2 и M (рис. 44). Блоки находятся на одинаковой высоте от точек подвеса.

Найдите соотношения между массами грузов, при которых вся система будет находиться в состоянии равновесия. Всегда ли эти условия осуществимы? Трением пренебречь.

1.86. Определите, при каком минимальном коэффициенте трения $\mu_{\min}$ однородного тонкого стержня о пол человек может

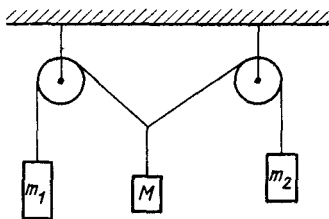


Рис. 44

медленно без проскальзывания поднять его с пола до вертикального положения, прилагая к концу стержня силу, перпендикулярную ему.

1.87. Три невесомых шарнирно связанных в точках C и D стержня длины l каждый закреплены также шарнирно в точках A и B , лежащих на одной горизонтали (рис. 45); длина $AB = 2l$. К шарниру C подвесили груз массой m .

Определите минимальную силу $F_{\min}$, приложенную к шарниру D , при которой средний стержень сохраняет горизонтальное положение.

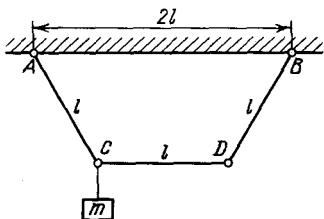


Рис. 45

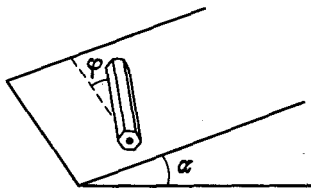


Рис. 46

1.88. Если шестигранный карандаш поместить на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтальной поверхностью, перпендикулярно ее образующей (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью), карандаш будет покоиться. Если его положить параллельно образующей, он будет скатываться вниз.

Определите угол φ между осью карандаша и образующей наклонной плоскости (рис. 46), при котором карандаш еще будет находиться в равновесии.

1.89. Однородный стержень длины $2l$ опирается одним концом о вертикальную стену, а другим концом о гладкую неподвижную поверхность.

Какой функцией $y(x)$ должно описываться сечение этой поверхности, чтобы стержень в любом положении оставался в равновесии даже в отсутствие трения? Считать, что стержень все время находится в фиксированной вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости стены.

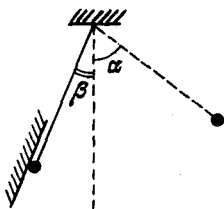


Рис. 47

1.90. Тонкий абсолютно жесткий невесомый стержень, на конце которого закреплен точечный шарик, отклонили на небольшой угол α от положения равновесия и отпустили. В момент, когда стержень составлял угол $\beta < \alpha$ с вертикалью, про-

изошло абсолютно упругое соударение шарика с наклонной стенкой (рис. 47).

Определите отношение T_1/T периода колебаний такого маятника к периоду математического маятника той же длины.

1.91*. На чашку пружинных весов массой M с некоторой высоты падает шарик массой m ($M \gg m$). Жесткость пружины равна k .

Определите смещение Δx точки, около которой будет совершать колебания стрелка весов. Считать удары шарика о чашку абсолютно упругими.

1.92. По длинной проволоке, изогнутой в вертикальной плоскости в виде графика некоторой функции, может двигаться без трения бусинка массой m . Пусть l_A — длина участка проволоки от начала координат до некоторой точки A . Известно, что если отпустить бусинку в точке A , такой, что $l_A < l_{A_0}$, то ее движение будет строго гармоническим: $l(t) = l_A \cos \omega t$.

Докажите, что существует такая точка B ($l_{A_0} \leq l_B$), в которой условие гармоничности колебаний будет нарушено.

1.93. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами m и $2m$, соединенные пружиной жесткости k .

Найдите период T малых продольных колебаний системы. Трением пренебречь.

1.94. Тяжелое круглое бревно подвесили за концы на двух канатах так, что расстояние между точками подвеса каждой веревки равно диаметру бревна. Длина каждого вертикального участка канатов равна l .

Определите период T малых колебаний системы в вертикальной плоскости, перпендикулярной бревну.

1.95. На горизонтальных рельсах находится груз массой M . К нему прикреплен маятник — шарик массой m на невесомой нерастяжимой нити. Груз может двигаться только вдоль рельсов.

Найдите отношение периодов T_2/T_1 малых колебаний маятника в параллельной и перпендикулярной рельсам вертикальных плоскостях.

1.96. Четыре невесомых стержня длины l каждый соединены шарнирно и образуют ромб (рис. 48). Шарнир A закреплен, а к шарниру C подвешен груз. Шарниры D и B соединены невесомой пружиной, имеющей в недеформированном состоянии длину $1,5 l$. В положении равновесия стержни образуют с вертикалью углы $\alpha_0 = 30^\circ$.

Найдите период T малых колебаний груза.

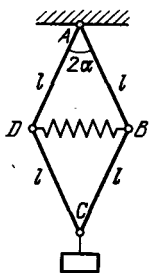


Рис. 48

1.97. Тонкий обруч, шарнирно закрепленный в точке A , располагают в начальный момент так, что его центр масс находится почти прямо над точкой A (рис. 49). После этого обруч отпускают без толчка, и спустя время $\tau = 0,5$ с центр масс обруча занимает крайнее нижнее положение.

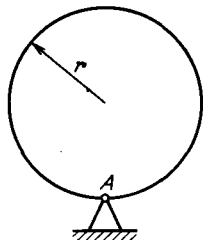


Рис. 49

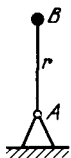


Рис. 50

Определите время t , за которое вернется в нижнее положение равновесия маятник, представляющий собой массивный шарик B , закрепленный на невесомом жестком стержне, длина которого равна радиусу

обруча, если в начальный момент шарик занимал почти крайнее верхнее положение (рис. 50) и был отпущен без толчка.

1.98. Невесомый жесткий стержень с грузом на конце прикреплен шарнирно в точке A к стене так, что может поворачиваться во все стороны (рис. 51). Стержень удерживается в горизонтальном положении вертикальной нерастяжимой нитью длины l , прикрепленной к его середине. Грузу сообщили импульс, перпендикулярный плоскости рисунка.

Найдите период T малых колебаний системы.

1.99. Одна веревка качелей закреплена выше другой на величину b . Расстояние между столбами качелей равно a . Длины веревок равны l_1 и l_2 , причем $l_1^2 + l_2^2 = a^2 + b^2$ (рис. 52).

Найдите период T малых качаний на таких качелях. Раз-
мерами человека пренебречь по сравнению со всеми указанными выше длинами.

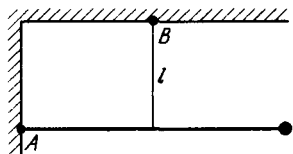


Рис. 51

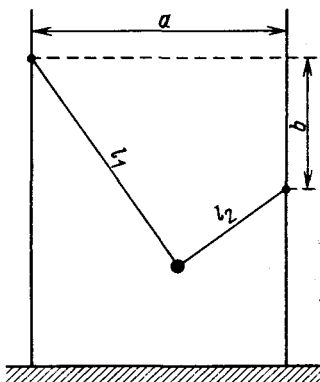


Рис. 52

1.100. Лифтер высотного здания, будучи человеком пунктуальным, повесил на стену лифта точные маятниковые часы, чтобы знать, когда кончается рабочий день. Время движения лифта с ускорением, направленным вверх и направленным

вниз, одинаково (по неподвижным часам); одинаковы также модули ускорений.

Как вы думаете, закончит ли лифтер работу вовремя, переработает или недоработает?

1.101. Как известно, атмосферное давление уменьшается с высотой. Поэтому в самых верхних этажах высотного здания МГУ атмосферное давление должно быть меньше, чем в самых нижних. Чтобы проверить это, учащийся соединил трубами одно из колен манометра с верхней аудиторией, а другое с нижней.

Что показал манометр?

1.102. Две тонкостенные трубки, закрытые с одного конца, вставлены одна в другую и целиком заполнены ртутью. Площади поперечных сечений трубок равны S и $2S$. Атмосферное давление равно $p_0 = \rho_{\text{рт}}gh$, где $\rho_{\text{рт}}$ — плотность ртути, g — ускорение свободного падения, h — высота. Длина каждой трубки равна $l > h$.

Какую работу A нужно произвести внешними силами, чтобы медленно вытащить внутреннюю трубку? Давлением паров ртути и силами сцепления ртути с материалом трубок пренебречь.

1.103. На горизонтальной поверхности расположены два цилиндра. Ось одного из них горизонтальна, а другого вертикальна, и в нижней части цилиндры соединены трубкой небольшого сечения. «Горизонтальный» цилиндр радиуса r с одной стороны открыт, и в него вставлен поршень (рис. 53). «Вертикальный» цилиндр открыт с верхней стороны. В цилиндры налита вода, причем в «горизонтальном» цилиндре она заполняет все отделяемое поршнем пространство, а в «вертикальном» стоит на некотором уровне.

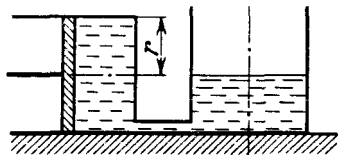


Рис. 53

Определите уровень h воды в вертикальном цилиндре, при котором поршень находится в равновесии. Трением пренебречь.

1.104. На пробку массой $m_{\text{пр}}$ намотана проволока из алюминия. Плотность пробки равна $\rho_{\text{пр}} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, алюминия $\rho_{\text{ал}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Определите, какую минимальную массу $m_{\text{ал}}$ проволоки надо намотать на пробку, чтобы пробка вместе с проволокой полностью погрузилась в воду.

1.105. К шару массой $M = 10 \text{ кг}$ и диаметром $D = 0,3 \text{ м}$ (объем такого шара $V = 0,0141 \text{ м}^3$) прикреплен одним концом

железная цепь, другой конец цепи свободен. Длина цепи равна $l = 3$ м, масса $m = 9$ кг. Шар с цепью находится в водоеме, глубина которого равна $H = 3$ м.

Определите глубину, на которой будет плавать шар. Считать, что железо тяжелее воды в 7,85 раза.

1.106. На рычаге уравновешены два различных по весу, но одинаковых по объему тела.

Нарушится ли равновесие, если погрузить рычаг в воду так, чтобы вода покрыла тела целиком?

1.107. В двух одинаковых сосудах с водой плавают плоская широкая и высокая узкая коробочки. Коробочки не утонули, когда в каждую из них положили по одинаковому тяжелому предмету массой m .

В каком из сосудов уровень воды при этом поднялся выше?

1.108. В сосуде с ртутью плавает стальной шарик.

Как изменится объем части шарика, погруженной в ртуть, если поверх ртути налить слой воды, полностью закрывающей шарик?

1.109. В сосуде с водой, поверх которой налит слой более легкого масла, плавает кусок льда.

Как изменится уровень границы раздела воды и масла, если лед растает? Как при этом изменится общий уровень жидкости в сосуде?

1.110. К концу однородной палочки массой $M = 4,4$ г подвешен на невесомой нити однородный алюминиевый шарик радиуса $r = 0,5$ см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду окажется половина шарика (рис. 54). Плотность алюминия равна $\rho_{\text{ал}} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м³.

Определите, в каком отношении y/x делится длина палочки в этом случае. Поверхностным натяжением на границе шарика и воды пренебречь.

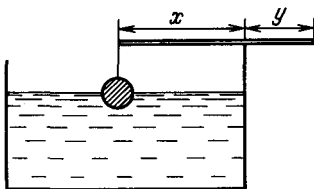


Рис. 54

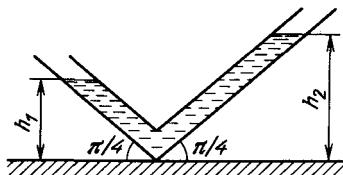


Рис. 55

1.111. До какого деления заполнит трубку ртуть свободно падающего барометра длиной 105 см при атмосферном давлении 760 мм рт. ст.?

1.112. Простейший акселерометр (прибор для измерения ускорений) может быть сделан в виде трубки, заполненной жидкостью и изогнутой, как показано на рис. 55. При движении уровень жидкости в левом колене установился на высоте h_1 , а в правом — на высоте h_2 .

Найдите ускорение a вагона, в котором находится акселерометр. Считать диаметр трубки много меньше, чем h_1 и h_2 .

1.113. Реактивный лайнер, длина салона которого равна $l = 50$ м, летит горизонтально с ускорением $a = 1$ м/с². Плотность воздуха в салоне равна $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

На сколько отличается от атмосферного давление на уши пассажиров, сидящих в начале, середине и конце салона?

1.114. Закрытая с обоих концов трубка, полностью заполненная водой, равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO' . На боковой стенке трубки на расстояниях r_1 и r_2 от оси вращения установлены манометры, которые показывают давления p_1 и p_2 соответственно (рис. 56).

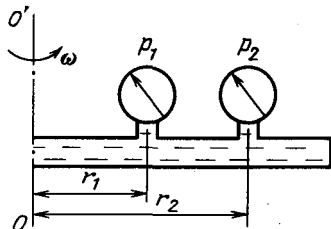


Рис. 56

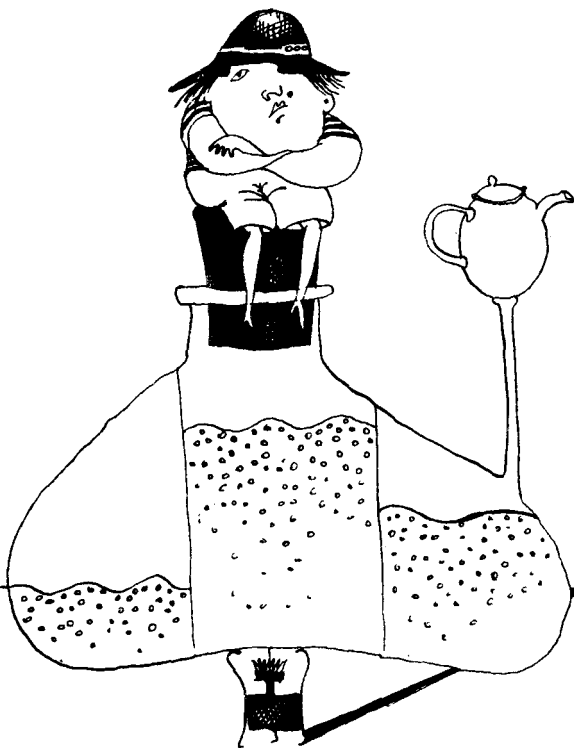
Определите угловую скорость ω вращения трубки. Плотность воды ρ_v считать известной.

1.115. Предположим, что в некоторой среде сила сопротивления F движению тела зависит от скорости v последнего как $F = \mu v^\alpha$, где $\alpha > 0$.

При каких значениях показателя степени α тело после придания ему начального импульса проходит бесконечно большое расстояние?

1.116. Известно, что атмосферное давление на Марсе составляет $1/200$ часть от атмосферного давления на Земле. Диаметр Марса примерно вдвое меньше земного, и если средняя плотность Земли равна $\rho_z = 5,5 \cdot 10^3$ кг/м³, то Марса $\rho_m = 4 \cdot 10^3$ кг/м³.

Определите, во сколько раз масса марсианской атмосферы меньше, чем земной.



В задачах этого раздела, там, где необходимо, принять универсальную газовую постоянную $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

2.1. В двух вертикальных цилиндрах различного поперечного сечения под поршнями, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, находится газ при постоянной температуре, а над поршнями — вакуум. Цилиндры соединены внизу трубкой, а поршни располагаются на одинаковой высоте $h_0 = 0,2$ м.

Какова будет разность их высот h , если увеличить массу 1-го поршня до массы 2-го?

2.2. Стенки сосуда, в котором находится газ температуры T , имеют температуру T_c .

В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T_c < T$) или когда теплее ($T_c > T$)?

2.3. С n молями идеального газа совершен круговой процесс (цикл) $1 - 2 - 3 - 4 - 1$, состоящий из двух изобар $2 - 3$ и $4 - 1$, изохоры $1 - 2$ и некоторого процесса $3 - 4$, изображенного на pV -диаграмме прямой линией (рис. 57). Температуры газа в состояниях 1, 2, 3 равны T_1, T_2, T_3 соответственно, точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

Определите работу A газа за цикл.

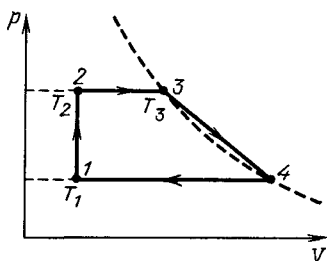


Рис. 57

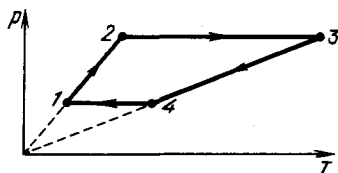


Рис. 58

2.4. С 3 молями идеального одноатомного газа совершен цикл, изображенный на рис. 58. Температуры газа в различных состояниях равны: $T_1 = 400$ К, $T_2 = 800$ К, $T_3 = 2400$ К и $T_4 = 1200$ К.

Найдите работу A газа за цикл.

2.5. Определите работу A , которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, изображенном на рис. 59, если $p_1 = 10^5$ Па, $p_0 = 3 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 4 \cdot 10^5$ Па, $V_2 - V_1 = 10$ л и участки цикла $4 - 3$ и $2 - 1$ параллельны оси V .

2.6. Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же начального состояния до одинаковой конечной температуры. На pV -диаграмме процессы изображаются прямыми линиями $1 - 3$ и $1 - 2$ (рис. 60).

Определите, при каком из процессов газу сообщается большее количество теплоты.

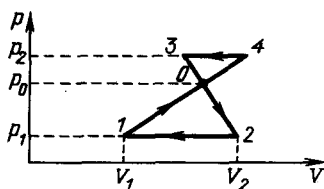


Рис. 59

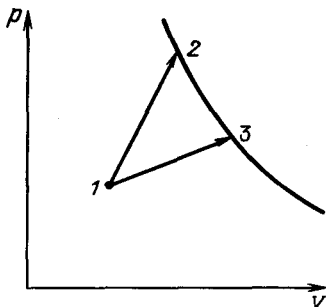


Рис. 60

2.7. Сосуд вместимостью $V = 30$ л разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми тонкими перегородками (рис. 61). В левую часть вводят $m_{H_2} = 30$ г водорода, в среднюю $m_{O_2} = 160$ г кислорода и в правую $m_{N_2} = 70$ г азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую — водород и азот.

Какое давление будет в каждой из трех частей сосуда после установления равновесия, если он поддерживается при постоянной температуре $T = 300$ К?

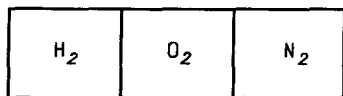


Рис. 61

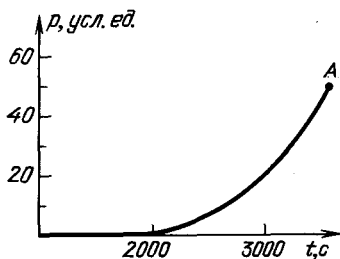


Рис. 62

2.8*. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности планеты по вертикали с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления (в условных единицах) от времени приведен на рис. 62. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре: $T = 700$ К и ускорении свободного падения: $g = 10$ м/с².

Определите:

скорость v спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа CO_2 ;

температуру T_h на высоте $h = 15$ км над поверхностью планеты.

2.9. В вертикальном цилиндре вместимостью V под невесомым поршнем находится n молей идеального одноатомного газа.

Газ под поршнем теплоизолирован. На поршень положили груз массой M , в результате чего поршень переместился на расстояние h .

Определите конечную температуру газа T_k , установившуюся после перемещения поршня, если площадь поршня равна S , атмосферное давление p_0 .

2.10. В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем, масса которого равна M , находится 1 моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент времени под поршнем включается нагреватель, передающий газу за единицу времени количество теплоты q .

Определите установившуюся скорость v движения поршня при условии, что давление газа под поршнем постоянно и равно p_0 , газ под поршнем теплоизолирован.

2.11*. Произведение давления газа на его объем (pV) не меняется с изменением объема при постоянной температуре, только если предположить, что газы, с которыми мы имеем дело, являются идеальными.

Определите, будет уменьшаться или увеличиваться произведение pV при очень сильном сжатии газа, если не делать предположения об идеальности последнего.

2.12*. Горизонтальный цилиндрический сосуд длиной $2l$ разделен тонким нетеплопроводящим поршнем на две равные части, в каждой из которых находится по n молей идеального одноатомного газа при температуре T . Поршень прикреплен к торцам сосуда недеформированными пружинами жесткости k каждая (рис. 63). Газу в правой части сообщили количество теплоты Q , в результате чего поршень сместился влево на расстояние $x = l/2$.

Определите количество теплоты Q' , отданное при температуре T термостату, с которым газ в левой части все время находился в тепловом контакте.

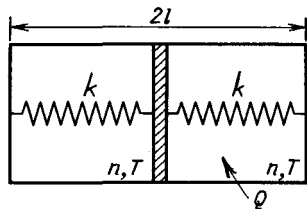


Рис. 63

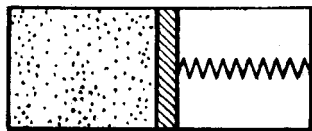


Рис. 64

2.13. Теплоизолированный сосуд разделен на две части нетеплопроводящим поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда содержится 1 моль

идеального одноатомного газа, в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда (рис. 64).

Определите теплоемкость C системы. Теплоемкостью сосуда, поршня и пружины пренебречь.

2.14. Докажите, что к. п. д. тепловой машины, использующей цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор, меньше к. п. д. идеальной тепловой машины Карно, работающей с теми же нагревателем и холодильником.

2.15*. Предположим, что планету массой M и радиуса r окружает атмосфера постоянной плотности, состоящая из газа с молярной массой μ .

Определите температуру T атмосферы на поверхности планеты, если толщина атмосферы равна h ($h \ll r$).

2.16. Известно, что если температура на улице равна -20°C , то в комнате температура равна $+20^\circ\text{C}$, а если на улице температура равна -40°C , то в комнате устанавливается температура $+10^\circ\text{C}$.

Найдите температуру T батареи, отапливающей комнату.

2.17. Космический объект имеет форму шара радиусом R . По всему его объему равномерно распределены источники, обеспечивающие выделение теплоты с постоянной скоростью. Количество теплоты, выделяемое единицей площади поверхности, пропорционально 4-й степени термодинамической температуры.

Во сколько раз изменилась бы температура объекта, если его радиус уменьшился бы вдвое?

2.18*. Теплообменник длины l состоит из трубы площадью поперечного сечения $2S$, внутри которой про-

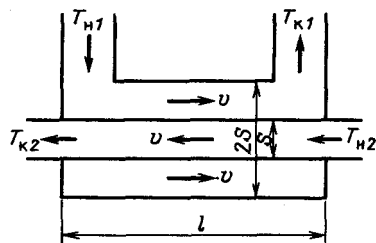


Рис. 65

ходит другая труба площадью поперечного сечения S (рис. 65). Трубы тонкостенные. Вся конструкция теплоизолирована от внешней среды. В трубах со скоростью v прокачивается жидкость плотностью ρ и удельной теплоемкостью c . Температуры жидкости при входе в теплообменник равны $T_{н1}$ и $T_{н2}$ соответственно.

Определите температуры $T_{к1}$ и $T_{к2}$ жидкости при выходе из теплообменника, если потоки жидкости по трубам текут навстречу друг другу. Считать, что теплота, переданная в единицу времени через единичную площадку, пропорциональна разности температур с коэффициентом пропорциональности k .

Теплопроводностью жидкости в направлении ее течения пренебречь.

2.19*. В закрытом цилиндрическом сосуде с площадью основания S находится вещество в газообразном состоянии вне поля тяготения Земли. Масса газа равна M , давление p , причем $p \ll p_{\text{нас}}$, где $p_{\text{нас}}$ — давление насыщенных паров вещества при данной температуре. Сосуд начинают разгонять с ускорением a , направленным по оси цилиндра. Температура поддерживается постоянной.

Определите, какая масса жидкости $m_{\text{ж}}$ образуется в результате движения в сосуде.

2.20. На некоторой планете давление насыщенного водяного пара равно $p_0 = 760$ мм рт. ст.

Определите его плотность ρ .

2.21. В холодную погоду изо рта при дыхании идет «пар». Если приоткрыть дверь в теплую избу в морозный день, то в комнату тоже врывается «пар».

Объясните эти явления.

2.22*. Сосуд объемом $V = 2$ л содержит $m_{\text{H}_2} = 2$ г водорода и немного воды. Давление в сосуде равно $p_{\text{H}} = 17 \cdot 10^5$ Па. Сосуд нагревают так, что давление в нем увеличивается до $p_{\text{к}} = 26 \cdot 10^5$ Па, и часть воды испаряется. Молярная масса водяных паров равна $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Определите начальную T_{H} и конечную $T_{\text{к}}$ температуры воды и ее массу Δm .

У к а з а н и е. Воспользуйтесь следующей температурной зависимостью давления насыщенных паров воды:

$T, ^\circ\text{C}$	100	120	133	152	180
$p_{\text{нас}}, 10^5 \text{ Па}$	1	2	3	5	10

2.23. Нижний конец капилляра радиусом $r = 0,2$ мм и длины $l = 8$ см погружен в воду, температура которой постоянна и равна $T_{\text{H}} = 0^\circ\text{C}$. Температура верхнего конца капилляра равна $T_{\text{в}} = 100^\circ\text{C}$.

На какую высоту h поднимется вода в капилляре? Считать, что теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем. Теплообменом с окружающим воздухом пренебречь.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь следующей температурной зависимостью поверхностного натяжения воды:

$T, ^\circ\text{C}$	0	20	50	90
$\sigma, \text{ мН/м}$	76	73	67	60

2.24. В цилиндре с подвижным поршнем находится воздух под давлением p_1 и мыльный пузырь радиуса r . Поверхностное

натяжение равно σ , температура T поддерживается постоянной.

Определите давление p_2 , до которого нужно сжать воздух медленным вдвиганием поршня, чтобы мыльный пузырь уменьшил свои размеры вдвое.

2.25. Почему при кладке кирпичных печей используют глиняный раствор для скрепления кирпичей, а не, например, цементный (более прочный)? Учтите, что для кладки печей используют красный кирпич, сделанный из глины.

2.26. В теплоизолированном сосуде имеются две жидкости с начальными температурами T_1 и T_2 и удельными теплоемкостями c_1 и c_2 , разделенные нетеплопроводящей перегородкой. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой T оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей.

Найдите отношение масс жидкостей m_1/m_2 .

2.27. В первый раз в пробирку налили воду при температуре 20°C . Дно пробирки погрузили в большое количество воды при температуре 80°C . Вода в пробирке нагрелась за время t_1 до 80°C . Во второй раз в пробирку налили воду при температуре 80°C . Дно пробирки погрузили в большое количество воды при температуре 20°C . Вода в пробирке охладилась за время t_2 до 20°C .

Какое время больше: t_1 или t_2 ?

2.28. В два одинаковых легких металлических сосуда налили одну и ту же массу воды. Тяжелый шарик (масса которого равна массе воды, а его плотность много больше плотности воды) опустили на тонкой нетеплопроводящей нити в один из сосудов так, что он находится в центре объема налитой воды. Сосуды нагрели до температуры кипения воды и поставили остывать. Известно, что время остывания сосуда с шариком до температуры окружающей среды в k раз больше времени остывания сосуда без шарика.

Определите отношение удельных теплоемкостей материала шарика и воды $c_{\text{ш}}/c_{\text{в}}$.

2.29. Два одинаковых теплоизолированных цилиндрических калориметра высоты $h = 75$ см заполнены на $1/3$. Первый — льдом, образовавшимся в результате замерзания налитой в него воды, второй — водой при $T_{\text{в}} = 10^\circ\text{C}$. Воду из второго калориметра переливают в первый, в результате чего он оказывается заполненным на $2/3$. После того как температура в первом калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h = 0,5$ см. Плотность льда равна $\rho_{\text{л}} = 0,9 \rho_{\text{в}}$, удельная

теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг · К).

Найти начальную температуру $T_{\text{л}}$ льда в первом калориметре.

2.30*. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под легким поршнем находится смесь равных масс воды и льда: $m = m_{\text{в}} = m_{\text{л}} = 1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0 = 10^5$ Па до $p_1 = 2,5 \cdot 10^6$ Па. Удельные теплоемкости воды и льда равны $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг · К), $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,9 \rho_{\text{в}}$ ($\rho_{\text{в}}$ — плотность воды).

Определите, какая масса Δm льда при этом растает и какую работу A совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1°C нужно довести давление до значения $p = 14 \cdot 10^6$ Па, а для уменьшения объема некоторой массы воды на 1% давление нужно поднять до $p' = 20 \cdot 10^6$ Па.

1) Решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми.

2) Оцените поправку, которую дает учет сжимаемости, считая сжимаемость льда равной половине сжимаемости воды.

2.31. Известно, что если обычную воду подсолить, то температура ее кипения станет выше.

Определите, как при этом изменится плотность насыщенных водяных паров при температуре кипения.

2.32. Для многих веществ существует такое значение температуры $T_{\text{тр}}$ и давления $p_{\text{тр}}$, при котором все три фазы вещества (газообразная, жидкая и твердая) находятся в равновесии друг с другом — так называемая тройная точка вещества. Например, для воды $T_{\text{тр}} = +0,0075^\circ\text{C}$, $p_{\text{тр}} = 4,58$ мм рт. ст. Удельная теплота испарения воды в тройной точке равна $q = 2,48 \cdot 10^3$ кДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,34 \cdot 10^3$ кДж/кг.

Найдите удельную теплоту сублимации воды v (т. е. прямого перехода из твердого в газообразное состояние) в тройной точке.

2.33. Известно, что давление насыщенного пара над водным раствором сахара меньше, чем над чистой водой, где оно равно $p_{\text{нас}}$, на величину $\Delta p = 0,05 p_{\text{нас}} c$, где c — молярная концентрация раствора. Цилиндрический сосуд, наполненный до высоты $h_1 = 10$ см раствором сахара с концентрацией $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, помещают под широкий колпак. На горизонтальную поверхность под колпаком налит тот же раствор с концентрацией $c_2 = 10^{-3}$, его уровень $h_2 \ll h_1$ (рис. 66).

Определите уровень h раствора в цилиндрическом сосуде после установления равновесия. Температура поддерживается постоянной и равной 20°C . Пар над поверхностью раствора содержит только молекулы воды, молярная масса водяных паров равна $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

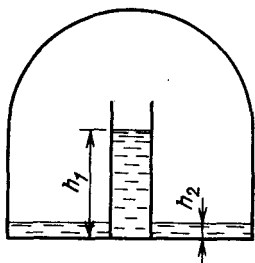


Рис. 66

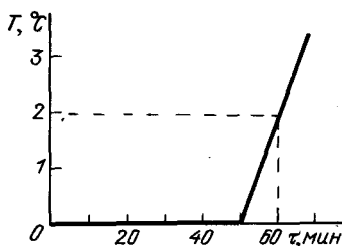


Рис. 67

2.34. Вертикальная длинная кирпичная труба заполнена чугуном. Нижний конец трубы поддерживается при температуре $T_1 > T_{\text{пл}}$ ($T_{\text{пл}}$ — температура плавления чугуна), верхний — при температуре $T_2 < T_{\text{пл}}$. Теплопроводность у расплавленного (жидкого) чугуна в k раз больше, чем у твердого.

Определите, какая часть трубы занята расплавленным металлом.

2.35*. Оболочка космической станции представляет собой зачерненную сферу, температура которой в результате работы аппаратуры внутри станции поддерживается равной $T = 500$ К. Количество теплоты, выделяемое единицей площади поверхности, пропорционально 4-й степени термодинамической температуры.

Определите температуру оболочки T_x , если станцию окружить тонким черным сферическим экраном почти такого же радиуса, как и радиус ее оболочки.

2.36. В ведре находится смесь воды со льдом массой $m = 10$ кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившаяся зависимость температуры от времени $T(\tau)$ изображена на рис. 67. Удельная теплоемкость воды равна $c_v = 4,2$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

Определите массу $m_{\text{л}}$ льда в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.

2.37*. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Сначала была исследована

зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до $T_1 = 100^\circ\text{C}$ мгновенно происходил скачок сопротивления от значения $R_1 = 50$ до $R_2 = 100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $T_2 = 99^\circ\text{C}$. Затем к резистору приложили постоянное напряжение $U_1 = 60$ В, при котором его температура оказалась равной $T_3 = 80^\circ\text{C}$. Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2 = 80$ В, то в цепи возникли самопроизвольные колебания тока.

Температура воздуха в лаборатории постоянна и равна $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха, теплоемкость резистора $C = 3$ Дж/К.

Определите период T этих колебаний, а также максимальное и минимальное значения силы тока.

2.38. Когда летом после сухой и жаркой погоды идет дождь и капли попадают на стену из красного кирпича, слышится шипение.

Объясните, почему?

2.39. Тонкая U-образная, запаянная с одного конца трубка состоит из трех колен длиной по $l = 250$ мм каждое, согнутых под прямыми углами. Вертикальные части трубки заполнены ртутью до половины (рис. 68). Медленно нагревая в запаянной трубке газ, отделенный от атмосферы ртутью, можно вытеснить из трубки всю ртуть.

Определите, какую работу A совершит при этом газ в трубке, полностью вытеснив ртуть. Атмосферное давление равно $p_0 = 10^5$ Па, плотность ртути $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, поперечное сечение трубки $S = 1$ см².

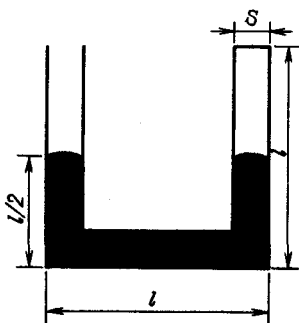


Рис. 68

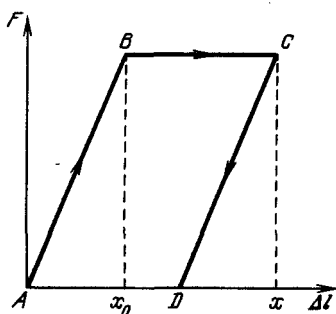


Рис. 69

2.40. Остаточную деформацию упругого стержня можно грубо описать в рамках следующей модели. Если растяжение

стержня $\Delta l < x_0$ (где x_0 — заданная для данного стержня величина), то сила, необходимая для того, чтобы вызвать растяжение Δl , определяется законом Гука $F = k \Delta l$, где k — жесткость стержня. Если $\Delta l > x_0$, то сила перестает зависеть от растяжения (вещество стержня начинает «течь»). Если теперь начать снимать нагрузку, то удлинение стержня будет спадать по пути CD , который для простоты считаем прямым и параллельным участку AB (рис. 69). Поэтому при полном снятии нагрузки стержень остается деформированным (точка D на рисунке).

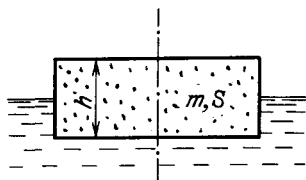


Рис. 70

Пусть стержень вначале растянут на $\Delta l = x > x_0$, а затем нагрузку убирают.

Определите максимальное изменение ΔT температуры стержня, если его теплоемкость равна C . Стержень теплоизолирован.

2.41. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массой m , высоты h и площадью основания S плавает в воде (рис. 70). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на Δh .

Определите начальное давление p_1 газа в цилиндре. Атмосферное давление равно p_0 , температура не меняется.

2.42. Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся в положительном направлении оси x с большой скоростью v . В момент прихода волны давление резко повышается. Эта зависимость изображена на рис. 71.

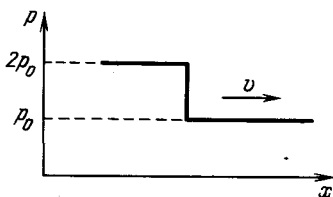


Рис. 71

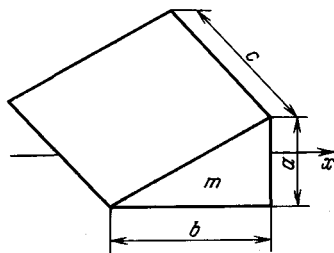
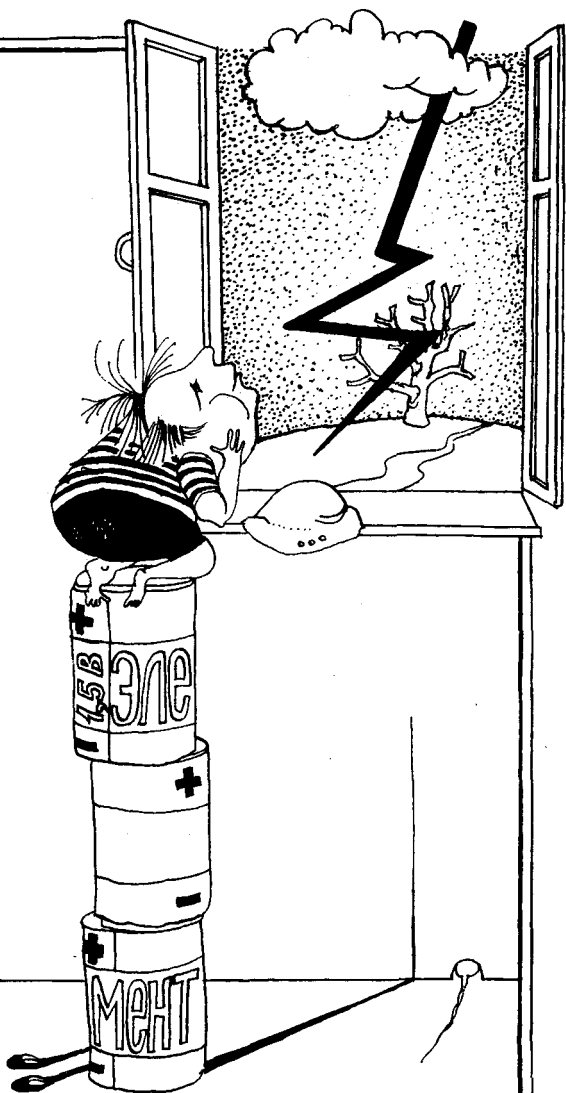


Рис. 72

Определите, какую скорость u приобретает клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны. Масса клина равна m , размеры указаны на рис. 72. Трением пренебречь. Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости волны ($u \ll v$).

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



В задачах этого раздела, там, где необходимо, считать электрическую постоянную ϵ_0 заданной.

3.1. Между двумя разноименными точечными зарядами $+q_1$ и $-q_2$ помещают тонкий диэлектрический стержень (рис. 73).

Как изменятся силы, действующие на заряды?

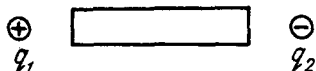


Рис. 73

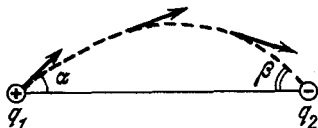


Рис. 74

3.2. Линия напряженности выходит из положительного точечного заряда $+q_1$ под углом α к прямой, соединяющей его с отрицательным точечным зарядом $-q_2$ (рис. 74).

Под каким углом β линия напряженности войдет в заряд $-q_2$?

3.3. Найдите напряженность E электрического поля в центре полусферы, создаваемую зарядами, распределенными равномерно с плотностью σ по всей поверхности этой полусферы.

3.4. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядами, равномерно распределенными по поверхности полусферы, в центре O этой полусферы равна E_0 . Двумя плоскостями, проходящими через один и тот же диаметр и составляющими друг с другом угол α , от этой полусферы отделена часть поверхности (рис. 75).

Найдите напряженность E электрического поля в той же точке O , создаваемую зарядами, находящимися на отделенной части поверхности (на «дольке»).

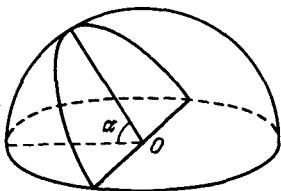


Рис. 75

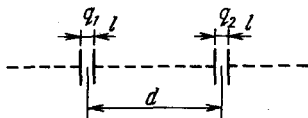


Рис. 76

3.5*. Два плоских конденсатора расположены перпендикулярно общей оси. Расстояние между конденсаторами d много больше размеров их пластин и расстояния l между ними. Оба конденсатора заряжены — заряд первого конденсатора q_1 , а второго q_2 (рис. 76).

Найдите силу взаимодействия F конденсаторов.

3.6. Найдите силу взаимодействия F двух соприкасающихся по всей поверхности полусфер радиуса R , если одна из них равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ_1 , а другая σ_2 .

3.7. Известно, что минимальная напряженность однородного электрического поля, которое разрывает на две части проводящую незаряженную тонкостенную сферу, равна E_0 .

Определите минимальную напряженность E_1 поля, которое разорвет сферу вдвое большего радиуса, если толщина ее стенок остается постоянной.

3.8. Три небольших одинаковых незаряженных металлических шарика находятся в вершинах равностороннего треугольника. Шарiki поочередно по одному разу соединяют с удаленным большим заряженным проводящим шаром, центр которого находится на перпендикуляре, восставленном к плоскости треугольника и проходящем через центр последнего. В результате на первом шарике оказался заряд q_1 , а на втором — заряд q_2 .

Определите заряд q_3 третьего шарика.

3.9. Металлический шар радиуса r_1 , заряженный до потенциала ϕ_1 , окружают проводящей тонкостенной сферической оболочкой радиуса r_2 (рис. 77).

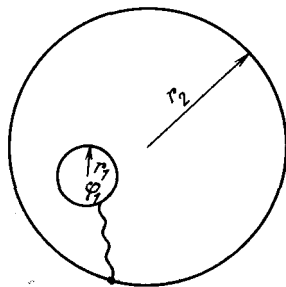


Рис. 77

Определите потенциал ϕ_2 шара после того, как шар будет на некоторое время соединен проводником с оболочкой?

3.10. Очень маленькая заземленная проводящая сфера находится на расстоянии a от точечного заряда q_1 и на расстоянии b от точечного заряда q_2 ($a < b$). В некоторый момент сфера начинает расширяться так, что ее радиус растет по закону $R = vt$.

Определите зависимость силы тока от времени $I(t)$ в проводнике, осуществляющем заземление. Считать, что точечные заряды и центр сферы неподвижны и в соответствующие моменты времени исходные точечные заряды попадают внутрь расширяющейся сферы, не касаясь ее (через небольшие отверстия).

3.11. Три незаряженных конденсатора, емкости которых равны C_1 , C_2 и C_3 , соединены, как показано на рис. 78, и подключены к точкам A , B и D . Потенциалы этих точек равны ϕ_A , ϕ_B и ϕ_D .

Определите потенциал ϕ_0 общей точки O .

3.12*. Толщина плоского листка металлической фольги равна d , площадь листка S . Расстояние от некоторого заряда q до центра листка равно l , причем $d \ll \sqrt{S} \ll l$.

Определите силу F , с которой листок притягивается к заряду q . Считать, что прямая, соединяющая заряд с центром листка, перпендикулярна поверхности листка.

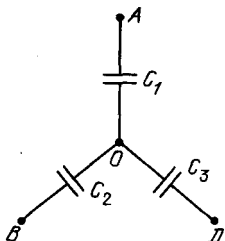


Рис. 78

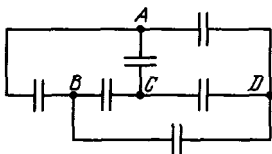


Рис. 79

3.13. К какой паре точек схемы, изображенной на рис. 79, надо подключить источник тока, чтобы зарядить все шесть конденсаторов, емкости которых равны?

3.14. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от напряжения на конденсаторе по закону $\epsilon = \alpha U$, где $\alpha = 1 \text{ В}^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору, который не заряжен, подключают такой же конденсатор, но без диэлектрика, который заряжен до напряжения $U_0 = 156 \text{ В}$.

Определите напряжение U , которое установится на конденсаторах.

3.15. Два небольших шарика массой m , несущие одинаковый заряд q каждый, соединены непроводящей нитью длины $2l$. В некоторый момент времени середина нити начинает двигаться с постоянной скоростью v , перпендикулярной направлению нити в начальный момент времени.

Определите, на какое минимальное расстояние d сблизятся шарики.

3.16. Два шарика с зарядами q_1 и q_2 имели вначале одинаковые по модулю и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электрическое поле, направление скорости 1-го шарика повернулось на 60° , а модуль скорости уменьшился вдвое. Направление скорости 2-го шарика повернулось на 90° .

Во сколько раз изменилась скорость 2-го шарика? Определите модуль отношения заряда к массе для 2-го шарика, если для 1-го он равен k_1 . Электростатическим взаимодействием шариков пренебречь.

3.17. В вершинах правильного 1977-угольника со стороной a были закреплены небольшие одинаковые шарики с равными зарядами. В некоторый момент времени один из шариков был освобожден, а через достаточно большой промежуток времени был освобожден шарик, соседний с 1-ым освобожденным. Оказалось, что на достаточно большом расстоянии от многоугольника кинетические энергии отпущенных шариков различаются на величину K .

Найдите заряд q каждого шарика.

3.18. Почему ударную ионизацию (ионизация в результате соударения) атомов производят электроны, а не ионы, хотя те и другие приобретают в ускоряющем поле одинаковую кинетическую энергию $mv^2/2 = e \Delta\phi$ (e — заряд частиц, $\Delta\phi$ — разность потенциалов ускоряющего поля). Считать, что после соударения ионизируемый атом и налетевшая на него частица имеют приблизительно одинаковые скорости.

3.19. Два небольших одинаковых шарика, лежащие на горизонтальной плоскости, соединены невесомой пружиной. Один из шариков закреплен в точке O , другой свободен. Каждый из шариков одинаково зарядили, в результате чего пружина растянулась в два раза.

Определите, во сколько раз изменилась частота гармонических колебаний системы.

3.20. Два небольших шарика, имеющих одинаковые массы и заряды и находящихся на одной вертикали на высотах h_1 и h_2 , бросили в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями v . Шарик 1-й коснулся земли на расстоянии l от вертикали бросания.

На какой высоте H_2 в этот момент будет 2-й шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.

3.21. Моток голой проволоки, состоящей из семи с половиной витков, растянут между двумя вбитыми в доску гвоздями, к которым прикреплены концы проволоки. Подключив к гвоздям приборы, измерили сопротивление цепи между гвоздями.

Определите, во сколько раз изменится это сопротивление, если моток размотать, оставив концы присоединенными к гвоздям.

3.22. Пять одинаковых сопротивлений (спиралей для электрических плиток) включены по схеме, указанной на рис. 80.

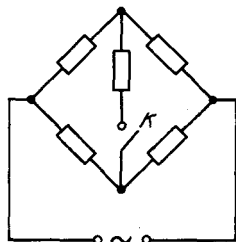


Рис. 80

Как изменится накал правой верхней спирали, если замкнуть ключ K ?

3.23. Как изменится сопротивление цепи, состоящей из пяти одинаковых проводников, если добавить еще два таких же проводника, как показано штриховой линией на рис. 81?

3.24. Проволочный каркас в виде тетраэдра $ADCB$ подключен к источнику постоянного тока (рис. 82). Сопротивления всех ребер тетраэдра одинаковы.

Определите, исключение какого из ребер каркаса приведет к наибольшему изменению тока I в цепи. Чему равно это максимальное изменение тока $\Delta I_{\max}$? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

3.25. В схеме, изображенной на рис. 83, сопротивления всех резисторов одинаковы и равны R . Напряжение на клеммах равно U .

Определите силу тока I в подводящих проводах, если их сопротивлением можно пренебречь.

3.26*. Определите сопротивление цепи R_{AB} между точками A и B каркаса, составленного из девяти одинаковых проволок сопротивлением R каждая (рис. 84).

3.27. Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B каркаса, изготовленного из тонкой однородной проволоки (рис. 85). Число последовательно вложенных равносторонних треугольников (стороны каждого последующего уменьшаются в два раза) считать стремящимся к бесконечности. Сторону AB принять равной a , сопротивление единицы длины проволоки ρ .

3.28. Схема из резисторов состоит из очень большого (бесконечного) числа звеньев (рис. 86). Сопротивления резисторов каждого последующего звена в k раз отличаются от сопротивления резисторов в предыдущем звене.

Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B , если сопротивления в первом звене равны R_1 и R_2 .

3.29. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рис. 87. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата равны R . Нагрузка подключена к половине реостата. Входное напряжение неизменно и равно U .

Определите, как изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление увеличить в два раза.

3.30. Имеются два разных амперметра. Отклонение стрелки в каждом амперметре пропорционально силе тока, а шкалы имеют равномерные деления. К первому амперметру подключен резистор с сопротивлением R_1 , ко второму амперметру — резистор с неизвестным сопротивлением R_x . Сначала амперметры соединяют последовательно и подключают к точкам A и B (как показано на рис. 88). Отклонения стрелок в ампер-



Рис. 81

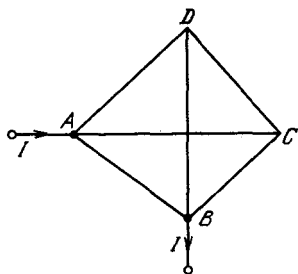


Рис. 82

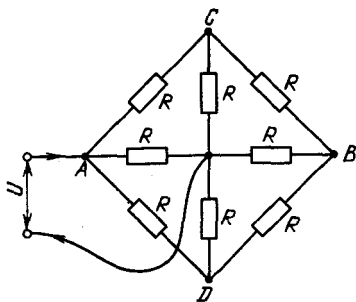


Рис. 83

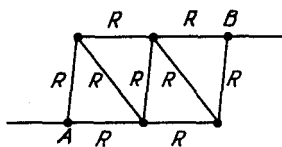


Рис. 84

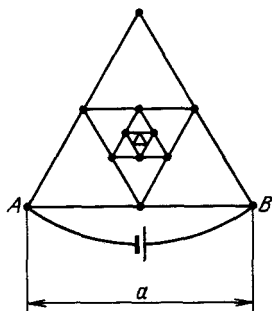


Рис. 85

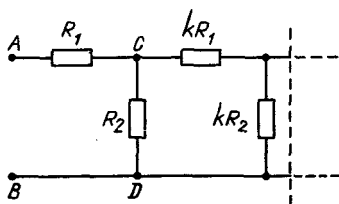


Рис. 86

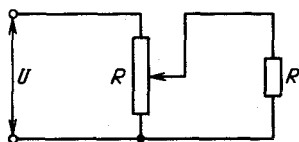


Рис. 87

метрах в этом случае равны n_1 и n_2 . Затем эти амперметры соединяют параллельно и подключают к точкам A и B (как показано на рис. 89). Отклонения стрелок во втором случае равны n'_1 и n'_2 .

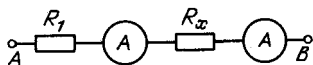


Рис. 88

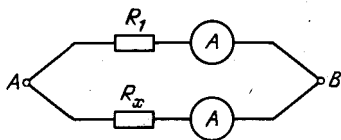


Рис. 89

Определите неизвестное сопротивление R_x второго резистора.

3.31. Имеются две проволоки одинаковой длины, но разного квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения первой проволоки $d_1 = 1$ мм, второй $d_2 = 4$ мм. Для того чтобы расплавить первую проволоку, через нее нужно пропустить ток $I_1 = 10$ А.

Определите силу тока I_2 , который нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась. Считать, что количество теплоты, уходящее в окружающую среду за 1 секунду, подчиняется закону $Q = kS(T - T_{\text{ср}})$, где S — площадь поверхности проволоки, T — ее температура, $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды вдали от проволоки, k — коэффициент пропорциональности, одинаковый для обоих образцов.

3.32. В схеме, изображенной на рис. 90, переключатель K может находиться в положениях 1 и 2. В цепь включены два

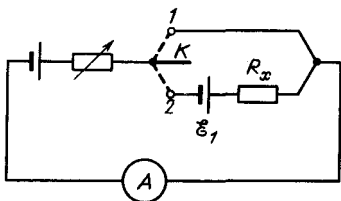


Рис. 90

источника постоянного тока, два резистора и амперметр. Э. д. с. одного источника тока равна $\mathcal{E}_1$, э. д. с. другого неизвестна. Внутреннее сопротивление источников тока равно нулю. Сопротивление резисторов также неизвестно. Сопротивление одного резистора является переменным, и его под-

бирают так, чтобы ток через амперметр при двух положениях переключателя был одинаковым; этот ток измеряют, и он оказывается равным I .

Определите сопротивление, обозначенное на схеме через R_x .

3.33. Может ли сила тока, протекающего через резистор, увеличиться, если замкнуть накоротко один из источников то-

ка, например с э. д. с. $\mathcal{E}_2$, как показано на рис. 91? Параметры элементов схемы считать заданными.

3.34*. Скрытая схема, состоящая из резисторов («черный ящик»), имеет четыре вывода (рис. 92). Если к зажимам 1 и 2 подвести напряжение, то при разомкнутых клеммах 3 и 4 внутри схемы выделяется мощность $N_1 = 40$ Вт, а при замкнутых клеммах 3 и 4 $N_2 = 80$ Вт. Если к тому же источнику подключить клеммы 3 и 4, то при разомкнутых клеммах 1 и 2 в схеме выделяется мощность $N_3 = 20$ Вт.

Определите мощность N_4 , которую будет потреблять схема при замкнутых клеммах 1 и 2, когда то же напряжение будет приложено к клеммам 3 и 4.

3.35. В схеме, изображенной на рис. 93, определите силу протекающего через батарею тока: в первый момент времени после замыкания ключа K ; спустя большой промежуток времени. Параметры элементов схемы считать заданными.

3.36. Ключ K (рис. 94) замыкают поочередно с каждым из контактов на малые одинаковые промежутки времени, так что изменение заряда конденсатора за время каждого замыкания мало.

Какой заряд $q_{\text{уст}}$ установится на конденсаторе?

3.37. В электрическую цепь включены источник тока с э. д. с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r , конденсаторы емкостью C_1 и C_2 и резисторы сопротивлением R_1 и R_2 (рис. 95).

Найдите напряжения U_1 и U_2 на каждом конденсаторе.

3.38*. Между точками E и F схемы, изображенной на рис. 96, включают сначала идеальный вольтметр, а затем идеальный амперметр; их показания соответственно равны U_0 и I_0 .

Определите силу тока I , который будет течь через резистор сопротивлением R , включенный между точками E и F .

3.39. Пластина A плоского конденсатора неподвижна, пластина B прикреплена к стенке пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине A (рис. 97). После замыкания ключа K пластина B начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом начальное равновесное расстояние d между пластинами конденсатора (когда пружина не растянута) уменьшилось на 10%.

На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами, если бы ключ K замкнули на короткое время? Считать, что за это время пластина B не успевает заметно сдвинуться.

3.40. Из однородной проволоки постоянного сечения составлена показанная на рис. 98 цепь.

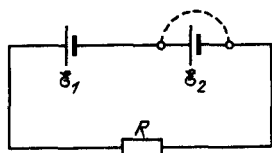


Рис. 91



Рис. 92

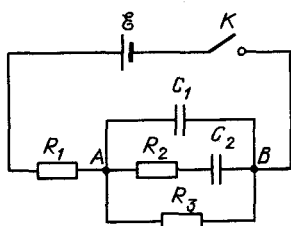


Рис. 93

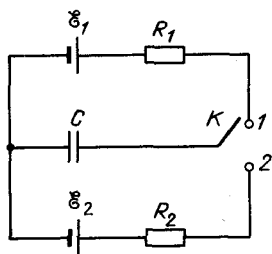


Рис. 94

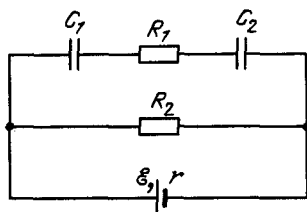


Рис. 95

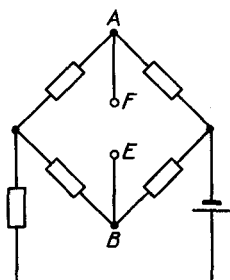


Рис. 96

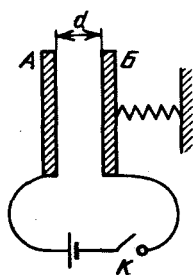


Рис. 97

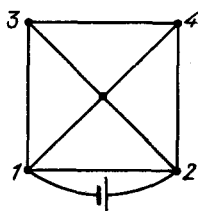


Рис. 98

Найдите отношение количества теплоты Q_{12}/Q_{34} , выделяющееся в единицу времени на участках 1—2 и 3—4.

3.41. Напряжение между анодом и катодом вакуумного диода равно U , анодный ток равен I .

Найти среднее давление $p_{\text{ср}}$ электронов на анод площадью S .

3.42. На клеммы AB (рис. 99) подается такое меняющееся во времени напряжение, что напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону, представленному на рис. 100.

Нарисуйте график зависимости напряжения от времени на клеммах CD .

3.43. Две батареи с э. д. с. $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R соединены, как показано на рис. 101.

Определите количество теплоты Q , выделяющееся на резисторе после переключения ключа K .

3.44. Электрическая цепь составлена из источника тока с э. д. с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и двух подключенных параллельно к источнику тока резисторов (рис. 102). Сопротивление одного из резисторов R_1 неизменно, а сопротивление другого R_2 можно подобрать так, чтобы выделяемая в этом резисторе мощность была максимальной.

Найдите значение R_2 , соответствующее этой максимальной мощности.

3.45. Конденсатор емкостью C_1 разряжается через резистор сопротивлением R . Когда сила тока разряда достигает значения I_0 , ключ K размыкают (рис. 103).

Найдите количество теплоты Q , которое выделится на резисторе, начиная с этого момента времени.

3.46. Батарея с э. д. с., равной $\mathcal{E}$, конденсаторы емкостями C_1 и C_2 и резистор сопротивлением R соединены, как показано на рис. 104.

Найдите количество теплоты Q , выделяющееся на резисторе после переключения ключа K .

3.47. В схеме, показанной на рис. 105, перед замыканием ключа K конденсатор емкостью C не был заряжен. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсатор зарядился до напряжения U .

Определите, какое количество теплоты Q_2 выделится за это время на резисторе сопротивлением R_2 . Э. д. с. источника тока равна $\mathcal{E}$, его внутренним сопротивлением пренебречь.

3.48. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми равно d , может скользить без трения перемычка, масса которой равна m . Рельсы соединены резистором сопротивлением R и помещены в вертикальное

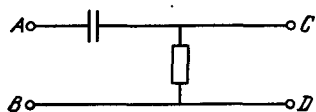


Рис. 99

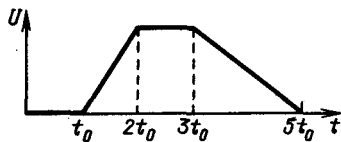


Рис. 100

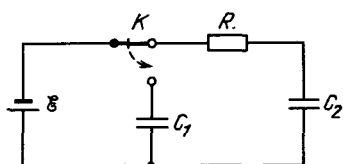


Рис. 101

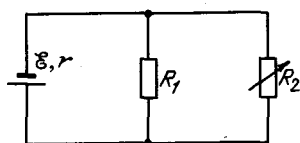


Рис. 102

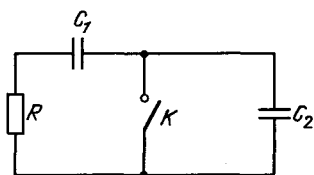


Рис. 103

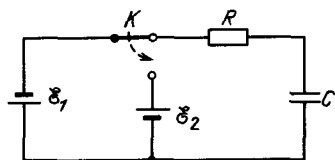


Рис. 104

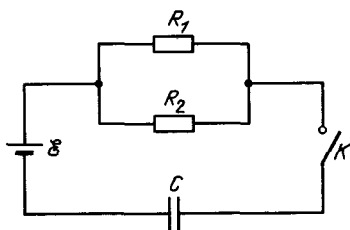


Рис. 105

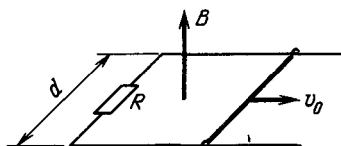


Рис. 106

однородное магнитное поле, индукция которого равна B . Перемычке сообщают скорость v_0 (рис. 106).

Найдите путь s , пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления индукции B ?

3.49. Как будут зависеть от времени показания гальванометра, включенного в цепь расположенного горизонтально кругового контура, если вдоль оси этого контура будет падать заряженный шарик?

3.50. В однородном постоянном во времени магнитном поле, индукция которого B направлена вверх, движется подвешенный на нерастяжимой нити длины l маленький заряженный шарик. Масса шарика равна m , заряд q , период обращения T . Найдите радиус r окружности, по которой движется шарик, если нить все время натянута.

3.51. В однородном магнитном поле с индукцией B с постоянной скоростью v движется металлический шарик радиуса r .

Укажите точки шарика, разность потенциалов $\Delta\varphi_{\max}$ между которыми будет максимальна, и определите эту разность потенциалов. Считать, что направление скорости составляет с направлением магнитной индукции угол α .

3.52. По обмотке длинного цилиндрического соленоида радиуса R протекает постоянный ток, создающий внутри соленоида однородное магнитное поле с индукцией B . Между витками соленоида в него влетает по радиусу (перпендикулярно оси соленоида) электрон со скоростью v (рис. 107). Отклоняясь в магнитном поле, электрон спустя некоторое время покинул соленоид.

Определите время t движения электрона внутри соленоида.

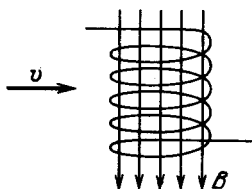


Рис. 107

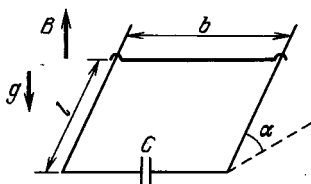


Рис. 108

3.53. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой m . Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкостью C , и вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого

В направлена вертикально. В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии l от основания «горки» (рис. 108).

Определите время t , за которое перемычка достигнет основания «горки» после того, как ее отпустят. Какую скорость v_x она будет иметь у основания? Сопротивлением направляющих и перемычки пренебречь.

3.54*. Квадратная недеформируемая сверхпроводящая рамка массой m со стороной a расположена горизонтально и находится в неоднородном магнитном поле, индукция которого меняется в пространстве по закону $B_x = -\alpha x$, $B_y = 0$, $B_z = \alpha z + B_0$

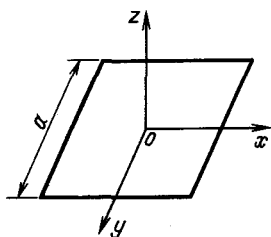


Рис. 109

(рис. 109). Индуктивность рамки равна L . В начальный момент времени центр рамки совпадает с началом координат O , а стороны параллельны осям x и y . Ток в рамке в этот момент равен нулю. Рамку отпускают.

Как она будет двигаться и где окажется спустя время t после начала движения?

3.55. Длинная цилиндрическая катушка, намотанная на каркас диаметром D_1 , имела индуктивность L_1 . При подключении катушки к источнику тока внутри нее создавалось магнитное поле с индукцией B_1 . Потом катушку решили переделать. Ее размотали и тот же провод намотали на каркас диаметром D_2 . Индуктивность катушки стала L_2 .

Определите индукцию B_2 магнитного поля внутри новой катушки при подключении ее к тому же источнику тока. Считать, что длина провода намного больше длины катушек.

3.56*. Две длинные цилиндрические катушки с равномерной намоткой одинаковой длины и почти одинакового радиуса имеют индуктивности L_1 и L_2 . Их вставили друг в друга (соосно) и присоединили к цепи так, как показано на рис. 110. Направление тока в цепи и в витках катушек показано стрелками.

Найдите индуктивность L такой составной катушки.

3.57. Лебедка приводится в движение электродвигателем с независимым возбуждением, питающимся от батареи с э. д. с. $\mathcal{E} = 300$ В. Без груза конец троса с крюком поднимается со скоростью $v_1 = 4$ м/с, с грузом массой $m = 10$ кг со скоростью $v_2 = 1$ м/с.

Определите, с какой скоростью v' будет двигаться груз и какова должна быть его масса m' , чтобы лебедка развивала максимальную мощность. Массой троса с крюком пренебречь.

3.58. Схема с идеальным диодом включена в сеть переменного тока (рис. 111).

Определите, в каких пределах изменяется напряжение между точками A и K .

3.59. Конденсатор неизвестной емкости, катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены к источнику переменного напряжения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ (рис. 112). Сила тока в цепи равна $I = (\mathcal{E}_0/R) \cos \omega t$.

Определите амплитуду напряжения U_0 между обкладками конденсатора.

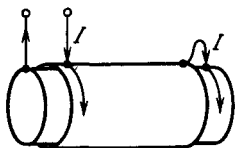


Рис. 110

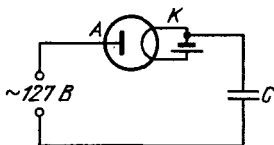


Рис. 111

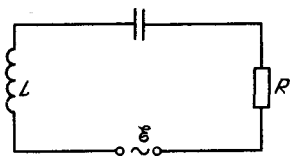


Рис. 112

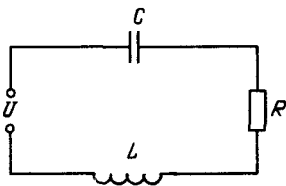


Рис. 113

3.60. Под действием постоянного напряжения U конденсатор емкостью $C = 10^{-11}$ Ф, входящий в схему, указанную на рис. 113, заряжается до заряда $q_1 = 10^{-9}$ Кл. Индуктивность катушки равна $L = 10^{-5}$ Гн, сопротивление резистора $R = 100$ Ом.

Определите амплитуду установившихся колебаний заряда q_0 конденсатора при резонансе, если амплитуда внешнего синусоидального напряжения равна $U_0 = U$.

3.61. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый заряжена до напряжения U и в начальный момент времени подключена к катушке индуктивностью L , так что образовался колебательный контур (рис. 114). Спустя интервал времени t один из конденсаторов пробивается и сопротивление между его обкладками становится равным нулю.

Найдите амплитуду колебаний заряда q_0 на непробитом конденсаторе.

3.62. Как можно избежать аварии, связанной с перегоранием обмотки сверхпроводящего соленоида?

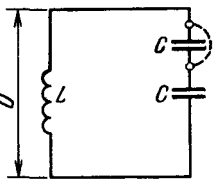


Рис. 114

4. ОПТИКА



4.1. Точечный источник S находится на оси полого конуса с зеркальной внутренней поверхностью (рис. 115). С помощью собирающей линзы на экране $\mathcal{E}$ получают изображение источника, создаваемое лучами, однократно отраженными от зеркальной поверхности конуса (прямые лучи от источника на линзу не попадают).

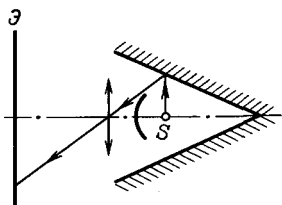


Рис. 115

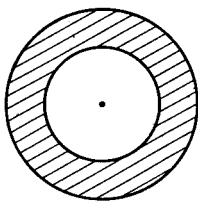


Рис. 116

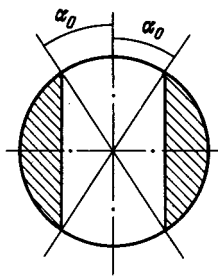


Рис. 117

Что произойдет с изображением, если линзу закрыть диафрагмами, такими, как на рис. 116 и 117?

4.2. На достаточно удаленные предметы смотрят через собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см, располагая глаз на расстоянии $a = 36$ см от линзы.

Оцените минимальный размер экрана, который нужно расположить за линзой так, чтобы он перекрыл все поле изображения. Где следует расположить экран? Считать, что зрачок глаза равен $r \approx 1,5$ мм.

4.3*. Цилиндрический прозрачный сосуд высоты l ($l \ll R_c$, R_c — радиус сосуда) заполнен идеальным газом с молярной массой μ , температурой T под давлением p_0 . Зависимость показателя преломления n газа от его плотности ρ удовлетворяет соотношению $n = 1 + \alpha\rho$. Сосуд привели во вращение с угловой скоростью ω вокруг оси. Вдоль оси на сосуд падает узкий параллельный световой пучок радиуса r_n .

Определите радиус R пятна на экране, расположенном перпендикулярно оси сосуда за ним на расстоянии L . Считать, что изменение давления газа в каждой точке сосуда вследствие вращения мало по сравнению с p_0 . Влиянием торцов сосуда на ход световых лучей пренебречь.

4.4. Подзорная труба, имеющая угловое увеличение $k = 20$, состоит из двух собирающих тонких линз — объектива с фокусным расстоянием $F = 0,5$ м и окуляра, который можно подстраивать по глазу в пределах от $D_- = -7$ до $D_+ = +10$ дптр

(при подстройке окуляр перемещается относительно объектива).

Начиная с какого минимального расстояния a от объектива можно рассматривать удаленные предметы ненапряженным нормальным глазом при помощи этой трубы?

4.5. Можно ли с помощью рассеивающей линзы увеличить освещенность некоторых участков поверхности экрана?

4.6. Точно над карандашом, расположенным вертикально над водой, находится точечный источник света. На дне сосуда с водой видна тень карандаша. Если карандаш опускают в воду, то, когда он входит в нее, размер темного пятна увеличивается. Если затем карандаш вытаскивают из воды, то на месте темного появляется светлое пятно.

Объясните описанные явления.

4.7. Если смотреть на освещенную поверхность через широкое отверстие корпуса шариковой ручки, то вокруг узкого отверстия в корпусе видно несколько концентрических темных и светлых колец.

Объясните, почему наблюдаются эти кольца.

4.8. Точечный источник света S находится на расстоянии $l = 1$ м от экрана. В экране напротив источника сделано отверстие диаметром $d = 1$ см, в которое проходит свет.

Между источником и экраном помещен прозрачный цилиндр (рис. 118), показатель преломления которого равен $n = 1,5$, длина $l = 1$ м, а диаметр тот же, что и у отверстия.

Как изменится световой поток через отверстие? Поглощением света в веществе пренебречь.

4.9. Объектив и окуляр оптической трубы представляют собой двояковыпуклые симметричные линзы, изготовленные из стекла с показателем преломления $n_{\text{ст}} = 1,5$. Труба настроена на бесконечность, при этом расстояние между объективом и окуляром равно $L_0 = 16$ см.

Определите расстояние L , на котором должны находиться объектив и окуляр трубы, настроенной на бесконечность, если между окуляром и объективом будет налита вода ($n_{\text{в}} = 1,3$).

4.10. На поверхности стеклянного шара находятся паук и муха. Где на поверхности шара должна находиться муха, чтобы паук смог ее увидеть? Считать, что радиус шара много больше размеров паука и мухи. Показатель преломления для стекла равен $n_{\text{ст}} = 1,43$.

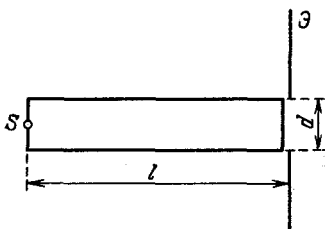


Рис. 118

4.11. Точечный источник света S расположен вне цилиндра на его оси вблизи торца (основания).

Найдите минимальный показатель преломления n материала цилиндра, при котором ни один луч, вошедший через основание, не выйдет через боковую поверхность наружу.

4.12. В концы трубы, внутренняя боковая поверхность которой зачернена, вставлены две собирающие линзы. Диаметры линз равны диаметру трубы. Фокусное расстояние одной линзы в два раза больше фокусного расстояния другой. Линзы находятся на таком расстоянии друг от друга, что параллельные лучи света, падающие вдоль оси трубы на одну линзу, выходят из второй линзы также параллельным пучком. Когда широкий пучок света падает на линзу с большим фокусным расстоянием, то на экране получается светлое пятно с освещенностью E_1 . Теперь перевернем трубу так, чтобы свет падал на линзу с меньшим фокусным расстоянием. На экране получается светлое пятно с освещенностью E_2 .

Определите, во сколько раз изменится освещенность на экране.

4.13. Начинаящий фотограф, знаток геометрической оптики, фотографировал с некоторой выдержкой фасад здания с расстояния 100 м. Подойдя к зданию на расстояние 50 м, чтобы получить снимок в большем масштабе, он решил, зная, что площадь изображения увеличится в четыре раза, соответственно увеличить в четыре раза и выдержку. Дома, проявив пленку, он обнаружил, что первый снимок получился хорошо, для второго же выдержка оказалась неправильной.

Определите, во сколько раз нужно было на самом деле изменить выдержку и почему.

4.14*. На одном берегу залива, который образует клин с углом α , живет рыбак; его дом находится в точке A (рис. 119). Расстояние от точки A до ближайшей к ней точки залива C равно h , а расстояние до конца залива, т. е. до точки D , равно l . На другом берегу залива в точке B находится дом приятеля рыбака. Точка B расположена симметрично (относительно залива) точке A . В распоряжении рыбака имеется лодка.

Определите минимальное время t , необходимое рыбаку, чтобы он из своего дома смог добраться до дома приятеля при условии, что рыбак может двигаться по суше со скоростью v и плыть по заливу в лодке со скоростью, в два раза меньшей ($n = 2$).

4.15. Изображение точечного источника S' , находящегося от прозрачного шара на расстоянии b , создано благодаря небольшой диафрагме только лучами, близкими к оптической оси (рис. 120).

Где будет изображение, если распилить шар пополам перпендикулярно горизонтальной оси и плоскую поверхность левой половины посеребрить?

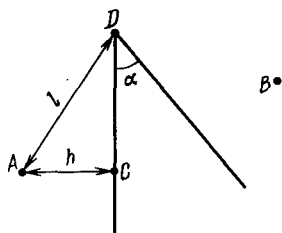


Рис. 119

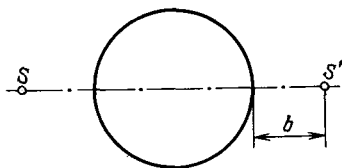


Рис. 120

4.16. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора $D = 40$ см много больше толщины стекла.

Определите площадь S обзора дна из такого иллюминатора. Показатель преломления воды равен $n_v = 1,4$, расстояние до дна $h = 5$ м.

4.17*. Предположим, что ваш собеседник, с которым вы разговариваете, сидя напротив него за столом, носит очки.

Сможете ли вы определить, каким дефектом зрения — дальнорукостью или близорукостью — он обладает? Естественно, как воспитанный человек, вы при этом не станете просить собеседника дать вам примерить его очки и вообще не будете заводить о них разговор.

4.18. Человек идет по прямой, образующей угол α с плоскостью зеркала, со скоростью v .

Определите, с какой скоростью $v_{\text{отн}}$ он приближается к своему изображению. Считать предмет и его изображение симметричными относительно плоскости зеркала.

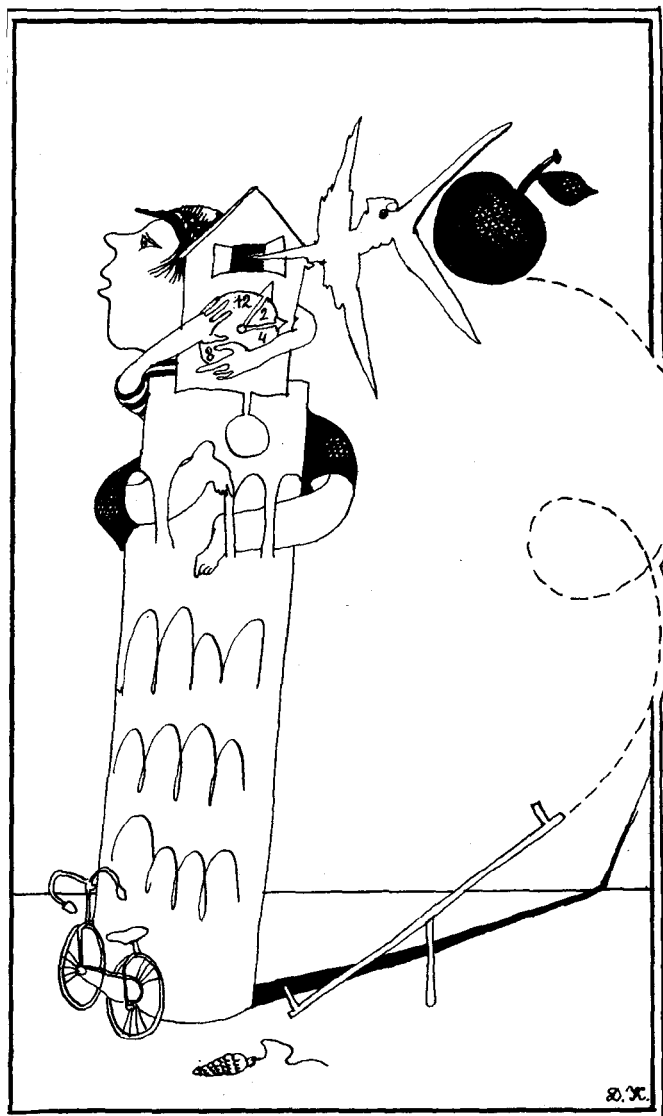
4.19. На сферическое зеркало радиуса $R = 5$ см падают параллельно его оптической оси два луча — один проходит от оси на расстоянии $h_1 = 0,5$ см, другой на расстоянии $h_2 = 3$ см.

Определите расстояние Δx между точками, в которых эти лучи пересекают оптическую ось после отражения от зеркала.

4.20. Внутренняя поверхность конуса, покрытая отражающим слоем, образует коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него натянута тонкая светящаяся нить.

Определите минимальный угол α раствора конуса, при котором лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза.

1. МЕХАНИКА



1.1. Предположим сначала, что трение отсутствует. Тогда вследствие закона сохранения энергии скорость тела v после спуска по наклонной плоскости с высоты h равна скорости, которую нужно сообщить телу, чтобы оно поднялось на ту же высоту h . Поскольку при подъеме и спуске ускорение по модулю одинаковое, время подъема будет равно времени спуска.

При учете силы трения скольжения скорость v_1 тела после спуска в конце пути меньше скорости v (из-за работы силы трения), а скорость v_2 , которую нужно сообщить телу для подъема, больше v по той же причине. Поскольку спуск и подъем происходят с постоянными (хотя и разными) ускорениями, а пройденные пути одинаковы, то время спуска t_1 и время подъема t_2 найдем из уравнений

$$s = v_1 t_1 / 2, \quad s = v_2 t_2 / 2,$$

где s — длина проходимого вдоль наклонной плоскости пути. Так как выполняется неравенство $v_1 < v_2$, то легко получим, что $t_1 > t_2$. Таким образом, при наличии силы трения скольжения время спуска с высоты h больше времени подъема на ту же высоту.

При решении задачи не принималась во внимание сила сопротивления воздуха. Тем не менее легко показать, что если наряду с силой тяжести и силой нормальной реакции наклонной плоскости имеется сила сопротивления воздуха, то независимо от конкретного вида последней время спуска всегда будет больше времени подъема. Действительно, если тело в процессе подъема оказалось на промежуточной высоте h' , то, чтобы оно смогло подняться на высоту h , его скорость v' на высоте h' при наличии силы сопротивления должна быть больше, чем при движении без сопротивления — часть кинетической энергии при последующем подъеме перейдет в теплоту. При спуске с высоты h тело, оказавшись на высоте h' , из-за работы силы сопротивления будет иметь скорость v'' , которая меньше скорости тела, спускающегося в отсутствие силы сопротивления. Таким образом, проходя одну и ту же точку наклонной плоскости, на подъеме тело имеет скорость большую, чем на спуске. Поэтому небольшой участок наклонной плоскости вблизи точки h' тело на подъеме пройдет быстрее, чем на спуске. Разбивая весь путь тела на небольшие участки, видим, что на подъеме каждый такой участок будет пройден телом быстрее, чем на спуске. Следовательно, и общее время подъема будет меньше времени спуска.

1.2. Поскольку после начала торможения локомотив движется равнозамедленно, то он остановится через время $t = v/a = 50$ с, за которое он пройдет путь $s = v^2/(2a) = 375$ м. Таким образом, через 1 минуту после начала торможения локомотив будет находиться на расстоянии $l = L - s = 25$ м от светофора.

1.3. В момент выключения пилотом двигателя вертолет находился на высоте $h = at_1^2/2$. Учитывая, что звук на земле перестал быть слы-

шен спустя время t_2 , получим уравнение

$$t_2 = t_1 + \frac{at_1^2}{2c},$$

где справа мы учли время подъема вертолета на высоту h и время, которое шел звук с высоты h до земли. Решая полученное квадратное уравнение, найдем величину

$$t_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}t_2} - \frac{c}{a}.$$

Мы отбросили второй корень уравнения, поскольку он не имеет физического смысла.

Скорость вертолета v в момент прекращения работы двигателя с учетом числовых данных задачи найдем из соотношения

$$v = at_1 = a \left[\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}t_2} - \frac{c}{a} \right] = \sqrt{c^2 + 2act_2} - c = 80 \text{ м/с.}$$

1.4. Спустя время t_1 материальная точка, двигаясь с ускорением a , пройдет путь $s = at_1^2/2$ и будет иметь скорость $v = at_1$. Выберем координатную ось x , как показано на рис. 121. Здесь O — точка, из которой

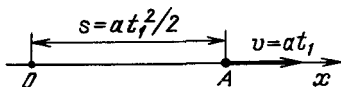


Рис. 121

началось движение, A — та точка, где тело оказалось спустя время t_1 . Учитывая смену знака ускорения и применяя формулу для пути при равнопеременном движении, найдем время t_2 , за которое тело переместится из точки A снова в точку O :

$$0 = at_1^2/2 + at_1t_2 - at_2^2/2;$$

отсюда $t_2 = t_1(1 + \sqrt{2})$.

Время t , прошедшее от начала движения до возврата в исходное положение, найдем по формуле

$$t = t_1 + t_2 = t_1(2 + \sqrt{2}).$$

1.5. Будем рассматривать относительное движение тел с точки зрения 1-го тела. Тогда в начальный момент времени 1-е тело покоится (оно будет находиться в покое и в последующие моменты времени), а 2-е движется ему навстречу со скоростью $v_1 + v_2$. Его ускорение постоянно, равно по модулю $a_1 + a_2$ и направлено против направления его начальной скорости. Условие встречи означает, что расстояние, на котором скорость 2-го тела обратится в нуль, должно быть больше,

чем расстояние между телами в начале движения; отсюда получаем

$$l_{\max} = (v_1 + v_2)^2 / [2(a_1 + a_2)].$$

1.6. Поскольку движение шариков происходит по вертикальной прямой, направим координатную ось вертикально вверх. Построим график зависимости проекции скорости шариков от времени на эту ось — рис. 122 для 1-го шарика ($v_1(t)$), рис. 123 для 2-го ($v_2(t)$) (моменты начала движения пока никак не связаны между собой). Эти графики

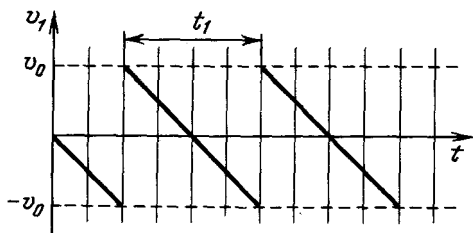


Рис. 122

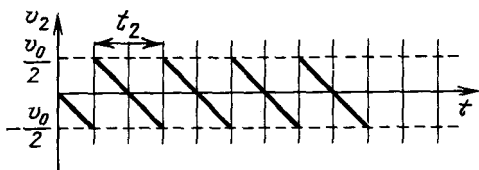


Рис. 123

будут представлять бесконечный набор одинаково наклоненных (ускорение одинаковое) участков прямых. По оси времени эти отрезки отстоят друг от друга: для 1-го шарика на величину $t_1 = 2\sqrt{2h_1/g}$, для 2-го на величину $t_2 = 2\sqrt{2h_2/g}$. Так как по условию задачи $h_1 = 4h_2$, то $t_1 = 2t_2$, т. е. для 2-го шарика движение будет возобновляться вдвое чаще. Из соотношения начальных высот следует, что максимально достижимые шариками скорости также будут отличаться в два раза (см. рис. 122, 123):

$$v_{1\max} = 2v_{2\max} = \sqrt{2h_1g} = v_0.$$

Для того чтобы скорости шариков совпали в какой-нибудь момент и по модулю, и по направлению, имеется две возможности. Либо впервые скорости шариков совпали спустя $\tau = nt_1$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$) от начала движения в течение интервала времени $t_1/4$, а потом они совпали спустя время $3t_1/4$ от начала движения и совпадали в течение интервала $t_1/2$. Впоследствии с периодичностью t_1 совпадение скоростей будет продолжаться в течение интервала времени $t_1/2$. Дру-

гая возможность состоит в том, что 2-й шарик начал движение спустя время $\tau = t_1/2 + nt_1$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$). Спустя интервал времени $t_1/4$ скорости шариков впервые совпадают, и полное совпадение скоростей длится в течение интервала времени $t_1/2$. Далее картина повторяется с периодичностью t_1 .

При других моментах начала движения 2-го шарика из-за кратности периодов повторяемости движений шариков графики скоростей не будут иметь общих точек, если их соответствующим образом «наложить», поэтому задача не будет иметь решений.

1.7*. Рассмотрим движение одного шарика, свободно падающего вблизи оси симметрии с высоты H , начиная с момента его соударения с поверхностью. В момент удара шарик имеет начальную скорость $v_0 = \sqrt{2gH}$ (поскольку удар абсолютно упругий), направление скорости v_0 составляет угол 2α с вертикалью (рис. 124).

Пусть спустя время t после соударения с поверхностью смещение шарика по горизонтали равно s , тогда $v_0 \sin 2\alpha \cdot t = s$. Отсюда получаем $t = s / (v_0 \sin 2\alpha) = s / (\sqrt{2gH} \sin 2\alpha)$, где $v_0 \sin 2\alpha$ — горизонтальная составляющая начальной скорости шарика (за время t шарик больше не ударяется о поверхность). Высота, на которой будет находиться шарик спустя время t , равна

$$\Delta h = h_0 + v_0 \cos 2\alpha \cdot t - gt^2/2,$$

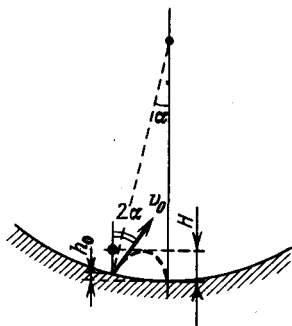


Рис. 124

где $v_0 \cos 2\alpha$ — вертикальная составляющая начальной скорости шарика.

Поскольку шарик начал падать с высоты H вблизи оси симметрии (угол α мал), можно считать, что $h_0 \approx 0$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$, $\cos 2\alpha \approx 1$, $s \approx R\alpha$. Учитывая эти и полученные выше соотношения, найдем условия попадания шарика в низшую точку сферической поверхности:

$$t = s / (\sqrt{2gH} \sin 2\alpha) = R / (2\sqrt{2gH}),$$

$$\Delta h \approx v_0 t - gt^2/2 = R/2 - R^2/(16H) = 0.$$

Отсюда получаем, что $H = R/8$.

1.8. Так как стенка гладкая, то удар о стенку не изменяет вертикальную составляющую скорости шарика. Поэтому полное время движения шарика t_1 представляет собой полное время подъема и спуска на первоначальную высоту в поле силы тяжести тела, брошенного вверх со скоростью $v_0 \sin \alpha$. Следовательно, $t_1 = 2v_0 \sin \alpha / g$. Движение шарика по горизонтали складывается из двух участков пути: до соударения со стенкой он двигался со скоростью $v_0 \cos \alpha$; после соударения

шарик пролетел назад такой же путь, но с другой скоростью. Чтобы рассчитать скорость обратного движения шарика, заметим, что скорость сближения шарика и стенки (по горизонтали) была равна $v_0 \cos \alpha + v$. Поскольку удар абсолютно упругий, то после удара шарик будет удаляться от стенки со скоростью $v_0 \cos \alpha + v$, поэтому относительно земли он будет иметь горизонтальную скорость

$$(v_0 \cos \alpha + v) + v = v_0 \cos \alpha + 2v.$$

Если до удара о стенку шарик летел время t , то, приравнявая пути, пройденные им до и после соударения, получим уравнение

$$v_0 \cos \alpha \cdot t = (t_1 - t)(v_0 \cos \alpha + 2v).$$

Отсюда, учитывая, что полное время движения шарика равно $t_1 = 2v_0 \sin \alpha / g$, получим

$$t = v_0 \sin \alpha (v_0 \cos \alpha + 2v) / [g (v_0 \cos \alpha + v)].$$

1.9*. На рис. 125 приведен вид сверху на траекторию движения шарика. Поскольку соударения шарика со стенкой и дном колодца упругие, модуль горизонтальной составляющей скорости шарика остается неизменным и равным v . Расстояния по горизонтали между точками, в которых происходят два последовательных соударения, равны $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = 2r \cos \alpha$. Время между двумя последовательными соударениями шарика со стенкой колодца равно $t_1 = 2r \cos \alpha / v$.

Вертикальная составляющая скорости шарика при соударении со стенкой не изменяется, а при соударении с дном меняет знак на противоположный. Модуль вертикальной составляющей скорости при первом ударе о дно равен $\sqrt{2gH}$, время движения от верха колодца до дна равно $t_2 = \sqrt{2H/g}$.

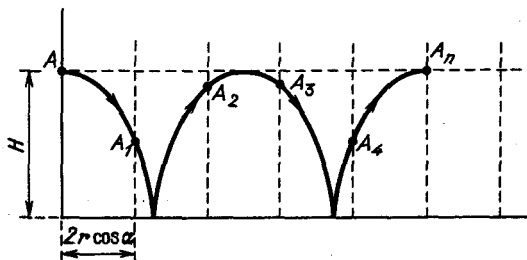


Рис. 126

На рис. 126 представлена плоская вертикальная развертка многогранника $A_1A_2A_3\dots$; участки траектории движения шарика внутри колодца на такой развертке — параболы (целые параболы — участки траектории между последовательными ударами о дно). Шарик сможет «выбраться» из колодца, если момент максимального подъема по параболе совпадает с моментом соударения со стенкой (т. е. в момент максимального подъема шарик окажется в точке A_n края колодца). При этом времена t_1 и t_2 будут связаны соотношением

$$nt_1 = 2kt_2,$$

где n и k — целые взаимно простые числа. Подставляя значения t_1 и t_2 , находим соотношение между v , H , r и α , при котором шарик может «выбраться» из колодца:

$$nr \cos \alpha / v = k \sqrt{2H/g}.$$

1.10. Из всех возможных траекторий снаряда выберем ту, которая касается укрытия. Рассмотрим движение снаряда в системе координат, оси которой направлены так, как показано на рис. 127. В этой системе

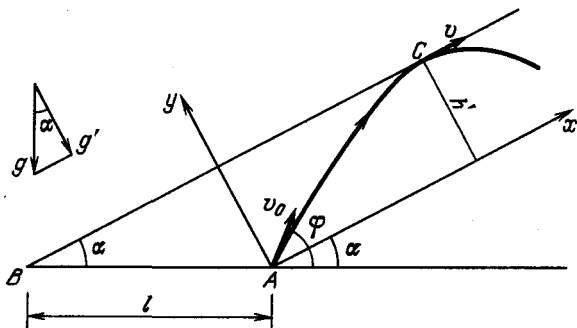


Рис. 127

«горизонтальная» (вдоль оси Ax) составляющая начальной скорости снаряда равна $v_{0x} = v_0 \cos(\varphi - \alpha)$, а «вертикальная» (вдоль оси Ay) составляющая равна $v_{0y} = v_0 \sin(\varphi - \alpha)$, где φ — угол, который составляет с горизонтом направление начальной скорости снаряда.

Точка C , в которой траектория снаряда касается укрытия, определяет максимальную высоту h' поднятия снаряда над «горизонтом», равную, как видно из рис. 127, $l \sin \alpha$. В этой точке составляющая полной скорости v снаряда на ось Ay равна нулю и

$$h' = v_{0y}^2 / (2g'),$$

где $g' = g \cos \alpha$ — «ускорение свободного падения» в системе координат xAy . Таким образом,

$$v_0^2 \sin^2(\varphi - \alpha) = 2gl \cos \alpha \sin \alpha.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если по условию задачи

$$v_0^2 < 2gl \cos \alpha \sin \alpha = gl \sin 2\alpha,$$

то ни одна из траекторий снаряда не коснется укрытия и максимальная дальность полета $L_{\max}$ будет у снаряда, пущенного под углом $\varphi = \pi/4$ к горизонту; при этом $L_{\max} = v_0^2/g$.

Если по условию задачи выполняется соотношение

$$v_0^2 \geq gl \sin 2\alpha,$$

то для того, чтобы траектория касалась укрытия, снаряд должен быть пущен под углом

$$\varphi = \varphi_{\text{кас}} = \alpha + \arcsin \sqrt{gl \sin 2\alpha} / v_0.$$

Если при этом по условию задачи выполняется неравенство

$$v_0^2 / (v_0^2 + 2gl) \leq \sin 2\alpha,$$

что в свою очередь означает выполнение условия $\varphi_{\text{кас}} \geq \pi/4$ (покажите!), то угол вылета снаряда с максимальной дальностью полета равен $\varphi = \pi/4$ и $L_{\max} = v_0^2/g$. Если же по условию задачи выполняется обратное неравенство

$$v_0^2 / (v_0^2 + 2gl) > \sin 2\alpha,$$

что в свою очередь означает выполнение условия $\varphi_{\text{кас}} < \pi/4$, то

$$\varphi = \varphi_{\text{кас}} = \alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0},$$

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \left(\alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0} \right).$$

1.11. Предположим, что град падает вертикально со скоростью v . В системе отсчета, связанной с автомашиной, угол падения града на

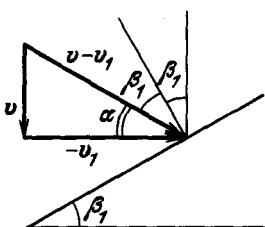


Рис. 128

лобовое стекло равен углу отражения. Скорость града при этом до попадания на стекло будет равна $v - v_1$ (рис. 128). Поскольку после отражения градины (с точки зрения водителя) летят вертикально вверх, то угол отражения, а значит, и угол падения равны β_1 (β_1 — угол наклона лобового стекла автомашины). Следовательно, $\alpha + 2\beta_1 = \pi/2$, причем $\operatorname{tg} \alpha = v/v_1$. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\pi/2 - 2\beta_1) = \operatorname{ctg} 2\beta_1$, $v/v_1 = \operatorname{ctg} 2\beta_1$. Поэтому для

отношения скоростей двух автомашин получим условие

$$v_1/v_2 = \operatorname{ctg} 2\beta_2 / \operatorname{ctg} 2\beta_1 = 3.$$

1.12. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с точками A и B . В этой системе отсчета скорости точек A и B будут равны нулю.

Поскольку расстояния AC и BC постоянны, точка C , с одной стороны, может двигаться по окружности радиуса AC с центром в точке A , с другой стороны, — по окружности радиуса BC с центром в точке B . Поэтому направление скорости точки C должно быть перпендикулярно как прямой AC , так и прямой BC . Поскольку точки A , B и C не лежат на одной прямой, то направление скорости точки C было бы перпендикулярно двум пересекающимся прямым AC и BC , что невозможно. Следовательно, скорость точки C в движущейся системе равна нулю, а в исходной системе (связанной с землей) скорость точки C равна скорости точек A и B .

Если бы точка C лежала на прямой AB и ее скорость (в системе отсчета, связанной с листом фанеры) не была бы равна нулю, то спустя небольшой интервал времени либо расстояние AC , либо расстояние BC должно увеличиться, чего не может быть.

Следовательно, при рассматриваемом движении листа фанеры скорости всех его точек одинаковы.

1.13. Пусть машина заехала в небольшой просвет между двумя другими автомашинами. При этом она расположена по отношению к тротуару так, как показано на рис. 129. Поставим вопрос: как легче машине теперь выехать — передним или задним ходом? Поскольку поворачиваются только передние колеса, то при любом маневрировании машины центр окружности O , по которой машина выезжает (вперед или назад), всегда лежит на прямой, проходящей через центры задних колес. Таким образом, при выезде задним ходом траектория машины скорее «заденет» заднюю машину, чем при выезде передним ходом (центр соответствующей окружности сдвинут назад по отношению к середине машины). Легко понять, что выезд машины — это обращенный во времени въезд. Поэтому заезжать в небольшой просвет следует задним ходом.

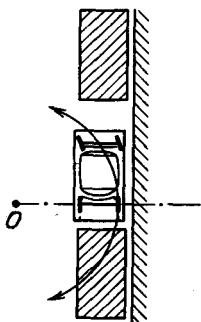


Рис. 129

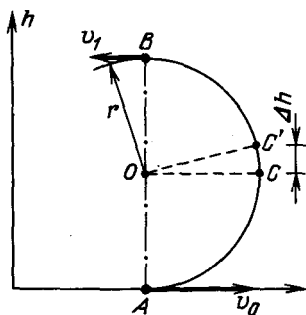


Рис. 130

1.14*. Рассмотрим движение самолета, начиная с момента его перехода на круговую траекторию (рис. 130). По условию задачи

в верхней точке траектории B скорость самолета равна $v_1 = v_0/2$, поэтому радиус r описываемой самолетом окружности найдем из соотношения

$$v_0^2/4 = v_0^2 - 2a_0 \cdot 2r,$$

которое получается из закона движения самолета при $h = 2r$. Для точки траектории C , где скорость самолета направлена вверх, общее ускорение будет складываться из центростремительного ускорения $a_{ц} = v_C^2/r$ ($v_C^2 = v_0^2 - 2a_0r$, где v_C — скорость самолета в точке C) и тангенциального ускорения a_t (это ускорение отвечает за изменение модуля скорости).

Чтобы найти тангенциальное ускорение, рассмотрим небольшое перемещение самолета из точки C в точку C' . Тогда $v_{C'}^2 = v_0^2 - 2a_0(r + \Delta h)$. Поэтому $v_{C'}^2 - v_C^2 = -2a_0\Delta h$, где Δh — изменение высоты самолета при перемещении его в точку C' . Разделим обе части полученного соотношения на тот промежуток времени Δt , за который это перемещение произошло:

$$(v_{C'}^2 - v_C^2)/\Delta t = -2a_0\Delta h/\Delta t.$$

Тогда, устремив точку $C' \rightarrow C$ и $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$2v_C a_t = -2a_0 v_C.$$

Отсюда $a_t = -a_0$. Общее ускорение самолета в момент, когда его скорость направлена вертикально вверх, получим в виде

$$a = \sqrt{a_0^2 + (v_C^2/r)^2} = a_0 \sqrt{109/3}.$$

1.15. Пусть скорость капле над человеком относительно карусели направлена под углом α к вертикали. Этот угол определяется из треугольника скоростей, изображенного на рис. 131.

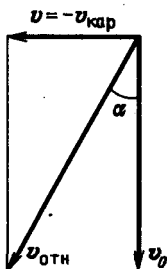


Рис. 131

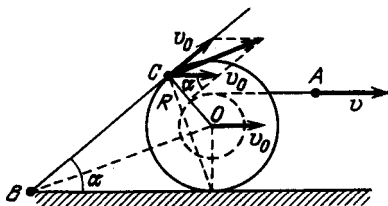


Рис. 132

Так как, согласно закону сложения скоростей, $v_0 = v_{отн} + v_{кар}$, где $v_{кар}$ — скорость карусели в месте нахождения человека, то $v_{отн} = v_0 - v_{кар}$. Скорость карусели равна $v_{кар} = \omega r$. Следовательно, $\text{ctg } \alpha = v_0/(\omega r)$.

Итак, ось зонта должна быть наклонена под углом $\alpha = \operatorname{arccotg} [v_0/(\omega r)]$ к вертикали в направлении движения карусели и перпендикулярна радиусу карусели.

1.16*. Пусть в некоторый момент времени доска касается катушки в точке C . Скорость точки C складывается из скорости v_0 оси катушки O и равной ей по модулю (проскальзывания нет) скорости точки C (относительно точки O), касательной к окружности в точке C . Если угловая скорость доски в этот момент времени равна ω , то линейная скорость той точки доски, которая касается катушки, будет равна $\omega R \operatorname{tg}^{-1}(\alpha/2)$ (рис. 132). Поскольку доска все время касается катушки, скорость точки C относительно доски будет направлена вдоль доски, откуда $\omega R \operatorname{tg}^{-1}(\alpha/2) = v_0 \sin \alpha$. Из отсутствия проскальзывания катушки по горизонтальной поверхности следует, что

$$v_0/R = v/(R+r).$$

Поэтому для угловой скорости ω получим выражение

$$\omega = \frac{v}{R+r} \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2v \sin^2(\alpha/2)}{(R+r) \cos(\alpha/2)}.$$

1.17. После перемотки толстой ленты она будет занимать часть катушки площадью $S_1 = \pi(r_K^2 - r_H^2) = 8\pi r_H^2$. Тогда длина намотанной ленты будет $l = S_1/d = 8\pi(r_H^2/d)$, где d — толщина толстой ленты.

После перемотки тонкой ленты она будет занимать часть катушки площадью $S_2 = \pi(r_K'^2 - r_H^2)$, где r_K' — конечный радиус намотки во втором случае. Так как длины лент одинаковы, а толщина ленты во втором случае вдвое меньше, чем в первом, можно написать

$$l = 2\pi(r_K'^2 - r_H^2)/d, \quad r_K'^2 - r_H^2 = 4r_H^2.$$

Следовательно, конечный радиус r_K' намотки во втором случае равен

$$r_K' = \sqrt{5} r_H.$$

Число оборотов N_1 и N_2 катушки, сделанных при перемотке в первом и втором случаях, можно записать в виде

$$N_1 = \frac{2r_H}{d}, \quad N_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)r_H}{d/2},$$

откуда $t_2 = (\sqrt{5}-1)t_1$.

1.18. Пусть начальный радиус намотки был $4r$, тогда при уменьшении радиуса вдвое (до $2r$) площадь намотки уменьшится на величину

$$S = \pi(16r^2 - 4r^2) = 12\pi r^2,$$

что равно произведению длины смотавшейся пленки l_1 на ее толщину d . При прослушивании записи скорость движения ленты v постоянна, поэтому $l_1 = vt_1$, и можно написать соотношение

$$12\pi r^2 = vt_1 d. \quad (1)$$

Когда радиус катушки на кассете уменьшится еще раз вдвое (с $2r$ до r), площадь катушки уменьшится на величину $\pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$, т. е.

$$3\pi r^2 = vt_2 d, \quad (2)$$

где t_2 — время, за которое уменьшился радиус катушки во втором случае. Поделив уравнения (1) и (2) почленно друг на друга, найдем

$$t_2 = t_1/4 = 5 \text{ мин.}$$

1.19. Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком O' . В этой системе отсчета скорость точки O равна $v_1/\cos\alpha$ и направлена вверх, так как нить нерастяжима и относительно колечка O' веревка выбирается с постоянной скоростью v_1 . Поэтому относительно прямой AA' , связанной с землей, скорость колечка O будет равна

$$v_2 = \frac{v_1}{\cos\alpha} - v_1 = v_1 \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$$

и направлена вверх.

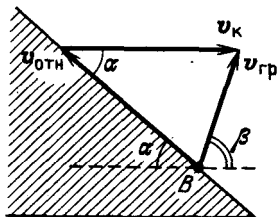


Рис. 133

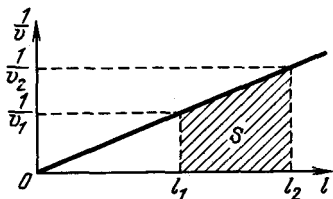


Рис. 134

1.20. К моменту времени t от начала движения клин пройдет расстояние $s = at^2/2$ и приобретет скорость $v_k = at$. За это время грузик переместится вдоль клина на такое же расстояние s , а его скорость относительно клина будет равна $v_{отн} = at$ и направлена вдоль клина вверх. Скорость $v_{гр}$ грузика относительно земли равна $v_{гр} = v_{отн} + v_k$, т. е. (рис. 133)

$$v_{гр} = 2v_k \sin(\alpha/2) = [2a \sin(\alpha/2)] t,$$

а угол, который скорость $v_{гр}$ составляет с горизонтом, равен

$$\beta = (\pi - \alpha)/2 = \text{const.}$$

Таким образом, грузик движется вдоль прямой, составляющей с горизонтом угол $\beta = (\pi - \alpha)/2$; ускорение грузика относительно земли, пока он находится на клине, равно

$$a_{гр} = 2a \sin(\alpha/2).$$

1.21. Скорость муравья меняется со временем не по линейному закону. Поэтому средняя скорость на разных участках пути различна,

и пользоваться для решения известными формулами для средней скорости нельзя.

Разобьем путь муравья от точки A до точки B на малые участки, проходимые за одинаковые промежутки времени Δt . Тогда $\Delta t = \Delta l / v_{cp}(\Delta l)$, где $v_{cp}(\Delta l)$ — средняя скорость на данном отрезке Δl . Эта формула подсказывает идею решения задачи: нарисуем зависимость величины $1/v_{cp}(\Delta l)$ от l на пути от точки A до точки B . Этот график — отрезок прямой (рис. 134); заштрихованная на рисунке площадь S под этим отрезком численно равна искомому времени. Вычислим ее:

$$S = \frac{1/v_1 + 1/v_2}{2} (l_2 - l_1) = \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_1} \frac{l_2}{l_1} \right) (l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1}$$

(так как $1/v_2 = (1/v_1) l_2/l_1$). Таким образом, муравей добегит от точки A до точки B за время

$$t = \frac{4 \text{ м}^2 - 1 \text{ м}^2}{2 \cdot 2 \text{ м/с} \cdot 10^{-2} \cdot 1 \text{ м}} = 75 \text{ с.}$$

1.22. Очевидно, все участки дымного следа в горизонтальном направлении движутся со скоростью ветра. Рассмотрим траекторию движения паровоза относительно системы отсчета, движущейся вместе с ветром (рис. 135). Точки дымного следа A' и B' соответствуют дыму,

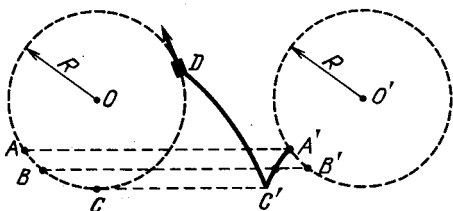


Рис. 135

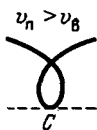


Рис. 136

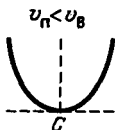


Рис. 137

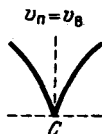


Рис. 138

выпущенному паровозом в точках A и B его круговой траектории относительно земли. При этом очевидно, что $AA' \parallel BB'$. Легко понять, что траектория паровоза относительно системы отсчета, движущейся вместе с ветром, будет представлять собой траекторию точки колеса радиуса R , которое вращается со скоростью v_n и катится против ветра (влево) со скоростью $v_в$. Как известно, эта траектория называется

циклоидой. В зависимости от соотношения скоростей v_{π} и v_b траектория существенно различна в своей нижней части. Она либо образует петлю — случай $v_{\pi} > v_b$ (рис. 136), либо имеет место плавный переход, когда $v_{\pi} < v_b$ (рис. 137), либо, наконец, образует острый «клюв», когда $v_{\pi} = v_b$ (рис. 138). Последний случай отвечает нашей задаче. Таким образом, скорость ветра равна $v_b = v_{\pi} = 10$ м/с, а чтобы найти ее направление, проведем из острия «клюва» касательную CC' к траектории движения паровоза (окружности) относительно земли.

1.23*. Пусть карусели повернулись на некоторый угол φ (рис. 139). Построим точку O ($OA = R$) такую, что точки $O, C, A, И$ будут лежать на одной прямой. Тогда нетрудно видеть, что $OH = R + r$ в любой момент времени. Кроме того, точка O относительно Игоря неподвижна (Слава все время находится напротив Игоря). Поэтому с точки зрения Игоря Никита будет двигаться поступательно по окружности радиуса $R + r$ с центром в точке O , которая относительно земли движется по окружности радиуса R с центром в точке A . Слава с точки зрения Никиты будет поступательно двигаться по окружности радиуса $R + r$ с центром в точке O , неподвижным относительно Никиты. Однако относительно земли точка O движется по окружности радиуса r с центром в точке B .

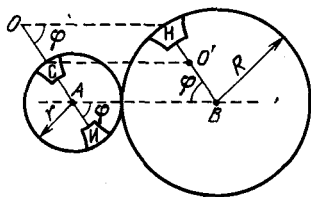


Рис. 139

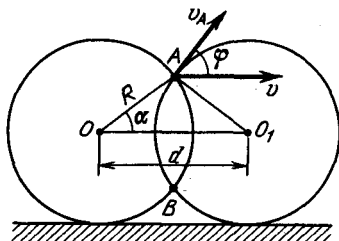


Рис. 140

1.24. Поскольку обруч с центром в точке O_1 покоится, скорость v_A верхней точки A «пересечения» обручей в любой момент времени должна быть направлена по касательной к окружности с центром O_1 (рис. 140). Отрезок AB в любой момент времени делит расстояние $d = OO_1$ между центрами обручей пополам, поэтому горизонтальная проекция скорости v_A все время равна $v/2$. Следовательно, скорость v_A составляет с горизонтом угол $\varphi = \pi/2 - \alpha$ и равна

$$v_A = v / (2 \cos \varphi) = v / (2 \sin \alpha).$$

Поскольку $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (d/2R)^2}$, то скорость верхней точки «пересечения» обручей равна

$$v_A = \frac{v}{2 \sqrt{1 - (d/2R)^2}}.$$

1.25. Из условия задачи следует, что во время движения конструкции между длинами l_1, l_2, l_3 отрезков A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 сохраняется соотношение

$$l_1 : l_2 : l_3 = 3 : 5 : 6.$$

Поэтому скорости точек A_1, A_2, A_3 относятся как

$$v_{A_1} : v_{A_2} : v_{A_3} = 3 : 5 : 6$$

и, следовательно (рис. 141),

$$v_{A_1} = v/2, \quad v_{A_2} = 5v/6.$$

Рассмотрим теперь движение среднего звена ($A_1B_2A_2C_2$) в тот момент, когда углы конструкции прямые. В системе отсчета, движущейся со скоростью v_{A_1} , в этот момент скорость v'_{B_2} точки B_2 направлена

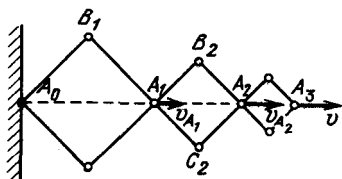


Рис. 141

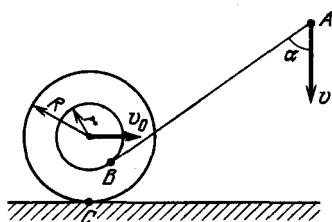


Рис. 142

вдоль стороны B_2A_2 ; скорость точки A_2 направлена горизонтально и равна

$$v'_{A_2} = v_{A_2} - v_{A_1} = v/3.$$

Из условия нерастяжимости стержня B_2A_2 вытекает, что

$$v'_{B_2} = v'_{A_2} \sin(\pi/4) = v\sqrt{2}/6.$$

Скорость точки B_2 относительно неподвижной системы отсчета найдем, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$v_{B_2}^2 = v_{A_1}^2 + v_{B_2}'^2 + (2\sqrt{2}/2)v_{A_1}v_{B_2}' = (17/36)v^2,$$

$$v_{B_2} = (\sqrt{17}/6)v.$$

1.26. Если нить тянуть так, как показано на рис. 142, катушка будет катиться вправо, вращаясь по часовой стрелке вокруг своей оси.

Для точки B сумма проекций скорости v_0 поступательного движения и линейной скорости вращательного движения (с угловой скоростью ω) на направление нити равна v :

$$v = v_0 \sin \alpha - \omega r.$$

Так как по условию задачи катушка движется по горизонтальной поверхности без проскальзывания, то сумма проекций соответствующих скоростей для точки C равна нулю:

$$v_0 - \omega R = 0.$$

Решая полученные уравнения, находим, что скорость v_0 равна

$$v_0 = vR / (R \sin \alpha - r).$$

Очевидно, что при $R \sin \alpha = r$ (это соответствует случаю, когда точки A , B и C лежат на одной прямой) выражение для v_0 теряет смысл. Заметим также, что найденное выражение описывает движение катушки как вправо (когда точка B находится выше прямой AC и $R \sin \alpha > r$), так и влево (когда точка B находится ниже прямой AC и $R \sin \alpha < r$).

1.27. Скорости точек заготовки, лежащих в данный момент на отрезке AB , равномерно меняются от v_1 в точке A до v_2 в точке B . Следовательно, скорость точки O (рис. 143) в данный момент равна нулю. Точка O — мгновенный центр вращения. (Поскольку заготовка объемная, точка O лежит на мгновенной оси вращения, которая перпендикулярна плоскости рисунка.) Понятно, что скорость v_1 в данный момент имеют точки заготовки, лежащие на окружности радиуса OA , а скорость v_2 — точки, лежащей на окружности радиуса OB . (В объемной заготовке точки с такими скоростями лежат на цилиндрических поверхностях, радиусы которых равны соответственно OA и OB .)

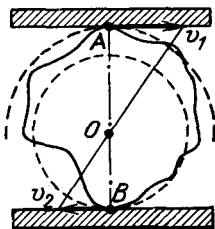


Рис. 143

1.28. Для описания движения бруска выберем систему отсчета, связанную с лентой транспортера. Тогда в начальный момент времени брусок имел скорость $v_0 = v_0 + v$, а его движение происходило с постоянным ускорением $a = -\mu g$. Для момента времени t , когда скорость бруска станет равной нулю, получим уравнение $0 = v_0 + v - \mu g t$. Отсюда найдем скорость ленты транспортера: $v = \mu g t - v_0 = 3$ м/с.

1.29. Запишем уравнение движения тела по наклонной плоскости. Пусть его мгновенная координата равна x (смещение от вершины наклонной плоскости), тогда

$$ma = mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \cdot bx,$$

где m — масса тела, a — его ускорение. Полученное уравнение движения по своему виду напоминает уравнение колебаний тела, подвешенного на пружине жесткости $k = mg \cos \alpha \cdot b$, в поле «силы тяжести» $mg \sin \alpha$. Аналогия с колебательным движением и помогает решить задачу.

Найдем положение тела x_0 , для которого сумма действующих на тело сил равна нулю — это будет «положением равновесия» при колебательном движении тела. Очевидно, $mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \cdot bx_0 = 0$; отсюда

да находим $x_0 = (1/b) \operatorname{tg} \alpha$. В этот момент тело будет иметь скорость v_0 , которую получим из закона изменения механической энергии тела:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \sin \alpha \cdot x_0 - \frac{kx_0^2}{2} = mg \sin \alpha \cdot x_0 - \frac{mgb \cos \alpha}{2} x_0^2,$$

$$v_0^2 = 2gx_0 \sin \alpha - gb x_0^2 \cos \alpha = \frac{g}{b} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

При последующем движении тело сместится еще на величину x_0 — «амплитудное» значение колебаний, что легко получить из «закона сохранения механической энергии». Частоту соответствующего колебательного движения найдем из соотношения $k/m = gb \cos \alpha = \omega_0^2$.

Таким образом, тело, пройдя после «положения равновесия» еще расстояние $x_0 = (1/b) \operatorname{tg} \alpha$, остановится. В этот момент возвращающая сила «пропадет», так как она есть не что иное, как сила трения скольжения. Как только тело остановится, сила трения скольжения изменит направление и превратится в силу трения покоя, равную $mg \sin \alpha$. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью в месте остановки тела равен $\mu_{\text{ост}} = b \cdot 2x_0 = 2 \operatorname{tg} \alpha$, т. е. его заведомо хватит, чтобы тело оставалось в покое и дальше.

С точки зрения колебательного подхода к описанию данного движения полное время движения тела займет половину «периода колебаний». Таким образом,

$$t = T/2 = 2\pi/(2\omega_0) = \pi/\sqrt{gb \cos \alpha}.$$

1.30. Сила трения саней с грузом $F_{\text{тр}}(x)$ прямо пропорциональна длине x въехавшей на песок части саней; запишем уравнение движения саней при их торможении по песку в первом случае:

$$ma = -mg(x/l)\mu,$$

где m — масса, a — ускорение, l — длина, μ — коэффициент трения саней о песок. Как и в решении задачи 1.29, мы получили «уравнение колебаний». Поэтому торможение саней при въезде на песок соответствует движению груза на пружине (жесткости $k = (mg/l)\mu$), которому сообщили в положении равновесия скорость v_0 . Тогда зависимость от времени въехавшей на песок части саней $x(t)$ и их скорость $v(t)$ получим в виде

$$x(t) = x_0 \sin \omega_0 t, \quad v(t) = v_0 \cos \omega_0 t,$$

причем

$$x_0 = v_0/\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{(g/l)\mu}.$$

Нетрудно понять, что время до полной остановки саней равно четверти «периода колебаний»; таким образом,

$$t_1 = \pi/(2\omega_0) = (\pi/2)\sqrt{l/(\mu g)}.$$

Во втором случае (после резкого толчка) движение можно рассматривать, как если бы сани, въезжая на песок, имели скорость $v_1 > v_0$ и, пройдя расстояние x_0 , затормозились до скорости v_0 (с этого момента и наступает второй случай). При этом интересующее нас движение саней после толчка предстанет в виде части общего колебательного движения по закону

$$x(t) = x_1 \sin \omega_0 t, \quad v(t) = v_1 \cos \omega_0 t$$

с момента времени t_2 , когда скорость саней стала равной v_0 . Как и прежде, $x_1 = v_1/\omega_0$. Кроме того,

$$[mg/(2l)] \mu x_0^2 = mv_1^2/2 - mv_0^2/2;$$

отсюда $v_1 = x_0 \omega_0 \sqrt{2}$.

После толчка сани пройдут путь

$$x_1 - x_0 = v_1/\omega_0 - v_0/\omega_0 = (1/\omega_0)(v_1 - v_0) = x_0(\sqrt{2} - 1).$$

Следовательно, отношение путей торможения равно

$$(x_1 - x_0)/x_0 = \sqrt{2} - 1.$$

Для нахождения времени движения саней после толчка мы должны определить время движения саней от положения x_0 до положения x_1 , используя формулу $x(t) = x_1 \sin \omega_0 t$. Для этого найдем t_2 по формуле

$$x_0 = x_1 \sin \omega_0 t_2.$$

Так как $x_1 = \sqrt{2}x_0$, то $\omega_0 t_2 = \pi/4$. Следовательно, $t_2 = \pi/(4\omega_0) = t_1/2$. Поскольку $t_3 = t_1 - t_2$, где t_3 — время движения саней после толчка, получим искомое соотношение:

$$t_3/t_1 = 1/2.$$

1.31. Сила тяжести груза $mg = 60$ Н значительно больше силы, с которой надо тянуть веревку, чтобы удержать груз. Это определяется существенными силами трения веревки о бревно.

Сначала силы трения препятствуют соскальзыванию груза под действием силы тяжести. Полный расчет распределения сил трения, действующих на веревку, довольно сложен, поскольку сила натяжения веревки в местах ее соприкосновения с бревном меняется от F_1 до mg . В свою очередь сила давления веревки на бревно также меняется, будучи пропорциональной в каждой точке соответствующей локальной силе натяжения веревки. Соответственно и силы трения, действующие на веревку, определяются именно указанными силами давления. Однако для решения задачи достаточно заметить, что полная сила трения $F_{\text{тр}}$ (слагающие которой пропорциональны в каждой точке силе реакции бревна) будет с соответствующими коэффициентами пропорциональна силам натяжения веревки на концах; в частности, с некоторым коэффициентом k она будет равна большей силе натяжения: $F_{\text{тр}} = kmg$.

Это означает, что отношение большей силы натяжения к меньшей есть величина постоянная для данного расположения веревки и бревна: $mg/T_1 = 1/(1 - k)$, поскольку $T_1 = mg - kmg$.

Когда мы хотим поднять груз, концы веревки как бы меняются местами. Сила трения теперь направлена против силы T_2 и уже не помогает, а мешает. Отношение большей силы натяжения, равной теперь T_2 , к меньшей — mg будет, очевидно, таким же, как и в первом случае: $T_2/(mg) = 1/(1 - k) = mg/T_1$. Отсюда находим, что

$$T_2 = (mg)^2/T_1 = 90 \text{ Н.}$$

1.32. Рассмотрим, что происходит, когда водитель поворачивает передние колеса покоящегося автомобиля (речь будем вести про одну шину). В начальный момент колесо не деформировано (в смысле кручения), при этом участок шины площади S касается земли. Водитель при помощи рулевого управления деформирует покоящуюся шину до тех пор, пока момент сил $\mathcal{M}_S$, приложенных к колесу (и стремящихся его повернуть), не станет больше максимально возможного момента сил трения покоя шины площади S . При этом силы трения перпендикулярны плоскости касания колеса.

Пусть теперь автомобиль движется. Силы трения покоя приложены к тому же участку шины площади S , причем они достигают почти максимального значения и лежат в плоскости колеса. Приложения к колесу небольшого момента сил $\tilde{\mathcal{M}}_S$ будет достаточно, чтобы повернуть колесо, так как противодействовать этому моменту будет теперь суммарный момент «косых» сил трения покоя, который значительно меньше, чем в случае автомобиля, находящегося в покое. По сути дела, составляющая сил трения покоя, создающая момент сил, препятствующих повороту колеса, при движущемся автомобиле аналогична силе жидкого трения, так как для движущегося колеса пропадает явление застоя при поворотном движении. Таким образом, небольшой момент сил способен легко повернуть движущееся колесо, причем, чем больше скорость движения (тем ближе к предельному значению силы трения покоя), тем легче повернуть колесо.

1.33. Выберем систему координат, как указано на рис. 144. Пусть вектор $\vec{OA}$ является вектором начальной скорости v . Тогда вектор $\vec{AB}$ есть изменение скорости за время Δt . Поскольку сила, действующая на

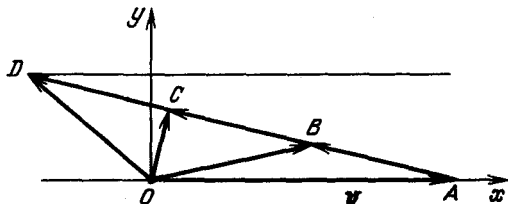


Рис. 144

тело, постоянна, то вектор $\vec{BC}$, равный вектору $\vec{AB}$ есть изменение скорости за следующий интервал времени Δt . Поэтому спустя интервал времени $3\Delta t$ после начала действия силы направление скорости тела изобразится вектором $\vec{OD}$, причем $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD}$. Пусть проекции вектора $\vec{AB}$ на оси x и y равны Δv_x и Δv_y , тогда получим два уравнения:

$$(v + \Delta v_x)^2 + \Delta v_y^2 = v^2/4,$$

$$(v + 2\Delta v_x)^2 + (2\Delta v_y)^2 = v^2/16.$$

Учитывая, что конечная скорость удовлетворяет соотношению

$$v_k^2 = (v + 3\Delta v_x)^2 + (3\Delta v_y)^2,$$

получим с использованием предыдущих уравнений, что

$$v_k = (\sqrt{7}/4)v.$$

1.34. Поскольку движение происходит в горизонтальной плоскости, вертикальная составляющая силы, действующей на грузик, равна mg , а горизонтальная $F^2 - (mg)^2 = mg\sqrt{\alpha^2 - 1}$, где $\alpha = 1,25$ (рис. 145). Горизонтальное ускорение груза (и вагона) определяется этой горизонтальной силой: $ma = mg\sqrt{\alpha^2 - 1}$; следовательно, $a = g\sqrt{\alpha^2 - 1} = (3/4)g = 7,5 \text{ м/с}^2$.

На первом участке движения вагон ускоряется до скорости $v = at_1 = (3/4)gt_1 = 30 \text{ м/с}$, проходя путь s_1 вперед по прямой:

$$s_1 = at_1^2/2 = (3/8)gt_1^2 = 60 \text{ м}.$$

Далее время, равное $t_2 = 3 \text{ с}$, он идет с постоянной скоростью v и проходит путь

$$s_2 = vt_2 = 90 \text{ м}.$$

Таким образом, через 7 секунд после начала движения вагон оказывается впереди на расстоянии $s_1 + s_2 = 150 \text{ м}$ от исходного положения.

На третьем участке вагон движется по закруглению дороги вправо. Так как скорость вагона, движущегося по рельсам, все время направлена вдоль вагона, то постоянное (в течение времени $t_3 = 25,12 \text{ с}$) поперечное ускорение $a = (3/4)g$ является *центростремительным*, т. е. вагон движется по окружности с постоянной скоростью v : $a = v^2/R$, радиус окружности $R = v^2/a = 120 \text{ м}$. Путь вагона вдоль окружности будет равен

$$s_3 = R\phi = vt_3,$$

откуда угол поворота вагона вокруг центра окружности равен $\phi = vt_3/R = 6,28 = 2\pi \text{ рад}$, т. е. вагон описывает полную окружность.

На последнем участке вагон тормозится и останавливается, поскольку ускорение вдоль вагона равно первоначальному и действует столько же времени. Поэтому $s_4 = s_1 = 60 \text{ м}$. Вагон остановится на

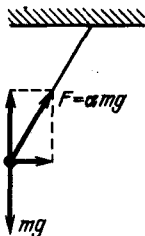


Рис. 145

расстоянии $s = 2s_1 + s_2 = 210$ м впереди по отношению к первоначальному положению (рис. 146).

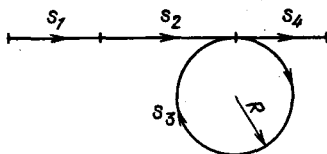


Рис. 146

1.35. Пусть в результате приложения силы F шарнир сместится вниз на малую величину Δx , а стержни удлинятся на величину Δl (рис. 147). Тогда жесткость k системы стержней найдем из уравнения $k\Delta x = 2k_0\Delta l \cos \alpha'$, где $2\alpha'$ — угол между стержнями после смещения. Так как смещение малое, то

$$\alpha' \approx \alpha, \Delta l \approx \Delta x \cos \alpha;$$

отсюда получаем, что $k \approx 2k_0 \cos^2 \alpha$.

1.36. Предположим сначала, что сила сопротивления воздуха отсутствует. Тогда шарики встретятся, если вертикальная составляющая начальной скорости 2-го шарика равна вертикальной составляющей скорости 1-го шарика:

$$v_1 = v_2 \sin \alpha;$$

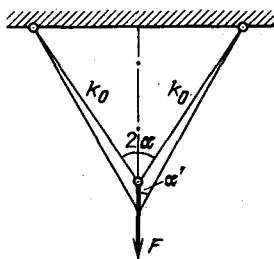


Рис. 147

отсюда $\sin \alpha = v_1/v_2 = 10/20 = 1/2$, $\alpha = 30^\circ$. При этом время движения шариков до встречи равно $t = s/(v_2 \cos \alpha) \approx 0,6$ с.

Поскольку шарики тяжелые, то легко оценить роль силы сопротивления воздуха. Общий характер движения 1-го шарика существенно не изменится, поскольку ускорение, обусловленное силой сопротивления, даже при массе шариков по 10 г и при максимальной скорости 1-го шарика $v_1 = 10$ м/с равно $a_{\max} = 1$ м/с². Это ускорение не более чем на 1% изменяет общее время движения 1-го шарика. Поскольку сила сопротивления воздуха направлена против скорости шарика, то добиться того, чтобы 2-й шарик столкнулся с 1-м, можно, сообщив ему одинаковую с 1-м составляющую скорости по вертикали при условии, что в последующие моменты времени вертикальные проекции ускорений шариков одинаковы в любой момент времени. Для этого угол α , образуемый скоростью 2-го шарика с горизонтом, в момент вылета должен быть равен 30° .

1.37. Запишем уравнение движения шарика в момент, когда пружина сжата на величину Δx :

$$ma = mg - k\Delta x.$$

Пока ускорение шарика положительно, его скорость возрастает. В момент обращения ускорения в нуль скорость шарика достигнет максимального значения. Пружина при этом сожмется на величину Δl , причем

$$mg - k\Delta l = 0;$$

отсюда

$$\Delta l = mg/k.$$

Таким образом, когда скорость шарика достигнет максимального значения, шарик будет находиться от поверхности стола на высоте

$$h = l - mg/k.$$

1.38*. Легко показать, что шарик достигнет положения равновесия при угле отклонения α нити от вертикали, определяемом уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu v / (mg).$$

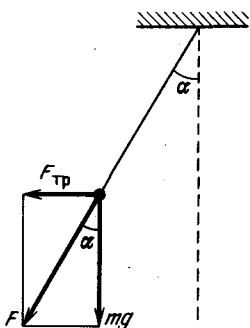


Рис. 148

При колебательном движении шарика на него будет действовать постоянная большая сила $F = \sqrt{(mg)^2 + (\mu v)^2}$ и небольшая тормозящая сила (рис. 148). Следовательно, движение шарика будет эквивалентно движению слабо затухающего математического маятника с ускорением свободного падения g' , равным

$$g' = \frac{g}{\cos \alpha} = g \frac{\sqrt{(mg)^2 + (\mu v)^2}}{mg} = g \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v}{mg}\right)^2}.$$

Период малых (но все-таки затухающих) колебаний шарика найдем из соотношения

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g'/l - \mu^2/(4m^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(g/l) \sqrt{1 + (\mu v/mg)^2} - \mu^2/(4m^2)}}$$

1.39. Запишем условие равновесия небольшого участка нити, который до подвешивания имел длину Δx и находился от точки подвеса на расстоянии x (рис. 149):

$$\frac{m}{L} \Delta x g + T(x + \Delta x) = T(x),$$

где L — длина резиновой нити в нерастянутом состоянии. Таким образом, видно, что после подвешивания натяжение по длине нити будет равномерно падать от значения mg до нуля.

В связи с этим относительные удлинения небольших участков нити одинаковой длины в ненапряженном состоянии после подвешива-

ния также линейно будут спадать от максимального до нуля. Поэтому полусумма удлинений двух симметрично расположенных относительно середины нити участков будет равна удлинению центрального участка, который испытывает натяжение $mg/2$. Поэтому общее удлинение нити Δl будет таким, как если бы на нее действовала сила $mg/2$ в точке подвеса и в нижнем конце, а нить была бы невесома; отсюда

$$\Delta l = mg/(2k).$$

1.40. Считаем, что выполняется условие $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$, иначе равновесие невозможно. Левая пружина была растянута с силой T_1 , уравнивающей силу тяжести груза m_2g : $T_1 = m_2g$. Условие равновесия груза m_3 состояло в следующем:

$$m_3g + T_2 - F_H = 0,$$

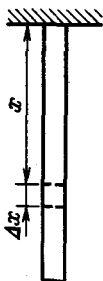


Рис. 149

где T_2 — сила натяжения правой пружины, F_H — сила натяжения веревки, переброшенной через блок (см. рис. 14). Эта веревка удерживает грузы массами m_1 и m_2 , откуда

$$F_H = (m_1 + m_2)g.$$

Получим выражение для силы натяжения T_2 :

$$T_2 = (m_1 + m_2 - m_3)g.$$

После перерезания нижней нити уравнения движения всех грузов находим в виде следующей системы:

$$m_2a_2 = m_2g - T_1, \quad m_3a_3 = T_2 + m_3g - F_H,$$

$$m_1a_1 = m_1g + T_1 - F_H, \quad -m_4a_4 = m_4g - T_2.$$

Используя найденные ранее выражения для сил T_1 , T_2 и F_H , получим

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = (m_3 + m_4 - m_1 - m_2)g/m_4.$$

1.41. Сразу после расторможения верхнего блока левый груз имеет скорость v , направленную вверх, а правый покоится. Ускорения грузов будут такими же, как если бы свободный конец веревки не двигался с постоянной скоростью, а был закреплен. Найдем их из следующих уравнений:

$$ma_1 = T_1 - mg, \quad ma_2 = T_2 - mg,$$

$$2T_1 = T_2, \quad a_1 = -2a_2.$$

где m — масса каждого груза, T_1 , T_2 — силы натяжения веревок, действующие на левый и правый груз. Решая систему уравнений, получим $a_1 = -(2/5)g$, $a_2 = (1/5)g$. Таким образом, ускорение левого груза на-

правлено вниз, правого — вверх. Время падения левого груза найдем из уравнения

$$h - vt - 0,4gt^2/2 = 0;$$

отсюда

$$t = 2,5v/g + \sqrt{6,25v^2/g^2 + 5h/g}.$$

Правый груз все это время будет двигаться вверх. Следовательно, первым на полу окажется левый груз.

1.42. Каждый раз брусок будет двигаться по наклонной плоскости с постоянным ускорением, причем

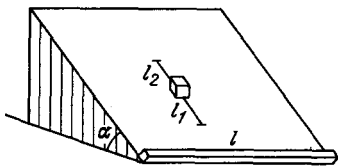


Рис. 150

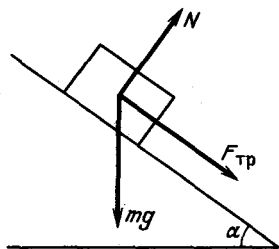


Рис. 151

модули ускорений при движении вниз, вверх и вдоль горизонтальной направляющей будут соответственно равны (рис. 150):

$$a_1 = \mu g \cos \alpha - g \sin \alpha, \quad a_2 = \mu g \cos \alpha + g \sin \alpha, \quad a = \mu g \cos \alpha.$$

Здесь α — угол, образуемый наклонной плоскостью с горизонтом, μ — коэффициент трения. Отсюда получим соотношение

$$a = (a_1 + a_2)/2.$$

Расстояния, пройденные в указанных условиях задачи бруском при равнопеременном движении с начальной скоростью v до остановки, можно записать в виде

$$l_1 = v^2/(2a_1), \quad l_2 = v^2/(2a_2), \quad l = v^2/(2a).$$

Учитывая связь ускорений a_1 , a_2 и a , найдем расстояние l , пройденное бруском вдоль горизонтальной направляющей планки,

$$l = 2l_1l_2/(l_1 + l_2).$$

1.43. Запишем уравнения движения бруска в проекции на ось, проведенную вдоль наклонной плоскости вниз. При движении бруска вверх, учитывая все действующие на него силы: силу тяжести mg , силу реакции опоры N и силу трения $F_{тр}$ (рис. 151), уравнение примет вид

$$mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = ma_1,$$

и соответственно при движении вниз

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_2.$$

Пусть при подъеме и спуске тело прошло расстояние s . Тогда время подъема t_1 и время спуска t_2 определим из уравнений

$$s = a_1 t_1^2 / 2, \quad s = a_2 t_2^2 / 2.$$

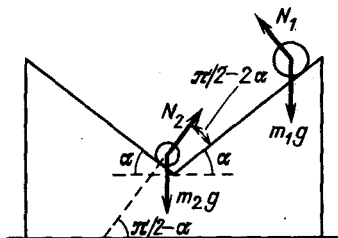
По условию задачи $2t_1 = t_2$; отсюда $4a_2 = a_1$. Следовательно,

$$g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha = 4(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha),$$

и окончательно

$$\mu = 0,6 \operatorname{tg} \alpha.$$

1.44. Если нижний шарик будет очень легким, он начнет подниматься на подставку. Найдем его предельную массу m_2^0 , при которой он еще не начал подниматься, но уже перестал давить на правую наклонную плоскость. При этом, поскольку подставка невесома, должны быть равны горизонтальные составляющие сил давления (равные по модулю силам реакции опоры), действующие на подставку со стороны шариков (рис. 152), иначе «подставка» приобрела бы бесконечно большое ускорение:



$$N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \alpha, \quad N_1 = N_2.$$

Рис. 152

Кроме того, так как нижний шарик не поднимается, то составляющие ускорений шариков на нормаль к правой наклонной плоскости должны быть равны (в этом направлении у них нет относительного смещения). Как видно из рис. 152, угол между направлением силы реакции подставки N_2 и правой наклонной плоскостью равен $\pi/2 - 2\alpha$, и, следовательно, последнее условие можно записать в виде

$$(m_1 g \cos \alpha - N_1) / m_1 = (m_2^0 g \cos \alpha - N_2 \cos 2\alpha) / m_2^0;$$

откуда получим, что $m_2^0 = m_1 \cos 2\alpha$. Таким образом, нижний шарик будет «забираться» вверх, если выполнено условие

$$m_2 < m_1 \cos 2\alpha.$$

1.45. До тех пор пока цилиндр не оторвется от опор, ось цилиндра будет всегда находиться точно посередине между опорами. Следовательно, горизонтальная составляющая скорости оси цилиндра равна $v/2$. Поскольку все точки оси цилиндра движутся по окружности с центром в точке A , полная скорость u каждой точки оси направлена в любой момент времени перпендикулярно радиусу $OA = r$. Следовательно, все точки оси движутся с центростремительным ускорением $a_{ц} = u^2 / r$.

Запишем уравнение движения точки O в проекции на «центростремительную» ось:

$$mg \cos \alpha - N = ma_{\text{ц}} = \mu^2/r, \quad (1)$$

где N — сила реакции со стороны неподвижной опоры. Из условия, что расстояние между точками опор равно $r\sqrt{2}$, следует отсутствие вклада силы реакции со стороны подвижной подставки на «центростремительную» ось. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой цилиндр давит на неподвижную опору. Из уравнения (1) находим

$$N = mg \cos \alpha - \mu^2/r.$$

В тот момент, когда расстояние между точками опор A и B (рис. 18) равно $AB = r\sqrt{2}$,

$$\cos \alpha = r\sqrt{2}/(2r) = 1/\sqrt{2}.$$

Горизонтальная составляющая скорости точки O равна $u \cos \alpha = v/2$, откуда $u = v\sqrt{2}$. Таким образом, при $AB = r\sqrt{2}$ сила давления цилиндра равна

$$N = mg/\sqrt{2} - mv^2/(2r).$$

Для того чтобы цилиндр не оторвался от опор до того, как AB станет равным $r\sqrt{2}$, должно выполняться условие $g/\sqrt{2} > v^2/(2r)$, т. е. $v < \sqrt{gr\sqrt{2}}$.

1.46. На цилиндр действуют: сила тяжести m_1g , сила нормальной реакции N_1 со стороны левой наклонной плоскости и сила нормальной реакции N_3 со стороны клина (сила N_3 направлена горизонтально). Запишем уравнение движения цилиндра в проекции на ось x_1 , направленную вдоль левой наклонной плоскости (рис. 153):

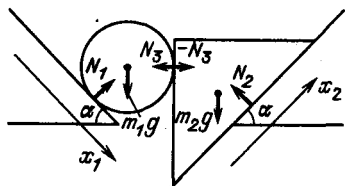


Рис. 153

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - N_3 \cos \alpha, \quad (1)$$

где a_1 — проекция ускорения цилиндра на ось x_1 .

На клин действуют: сила тяжести m_2g , сила нормальной реакции N_2 со стороны правой наклонной плоскости и сила нормальной реакции со стороны цилиндра, которая, согласно третьему закону Ньютона, равна $-N_3$. Запишем уравнение движения клина в проекции на ось x_2 , направленную вдоль правой наклонной плоскости:

$$m_2 a_2 = -m_2 g \sin \alpha + N_3 \cos \alpha. \quad (2)$$

В процессе движения клин соприкасается с цилиндром; поэтому, если перемещение клина вдоль оси x_2 равно Δx , то центр цилиндра (вместе с вертикальной гранью клина) сместится по горизонтали на

$\Delta x \cos \alpha$. При этом вдоль левой наклонной плоскости (вдоль оси x_1) центр цилиндра сместится на Δx . Это означает, что в процессе движения клина и цилиндра выполняется соотношение

$$a_1 = a_2. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1)–(3), найдем силу $N = N_3$, с которой клин давит на цилиндр:

$$N_3 = [2m_1 m_2 / (m_1 + m_2)] \operatorname{tg} \alpha.$$

1.47. До тех пор пока груз касается тела, скорость последнего равна горизонтальной составляющей скорости груза, а ускорение тела равно горизонтальной составляющей ускорения груза.

Пусть a — полное ускорение груза, тогда можно написать: $a = a_t + a_{\text{ц}}$, где $a_{\text{ц}}$ — центростремительное ускорение груза при его движении по окружности радиуса l , т. е. $a_{\text{ц}} = v^2/l$, где v — скорость груза (рис. 154).

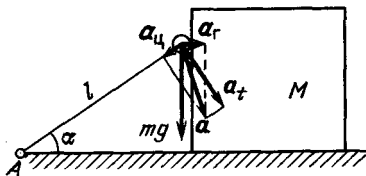


Рис. 154

Горизонтальная составляющая ускорения груза равна

$$a_r = a_t \sin \alpha - (v^2/l) \cos \alpha.$$

С таким ускорением движется и тело. Напишем уравнение движения тела:

$$N = M a_r = M a_t \sin \alpha - M (v^2/l) \cos \alpha.$$

где N — сила нормального давления на тело со стороны груза. В момент отрыва груза $N = 0$ и

$$a_t \sin \alpha = (v^2/l) \cos \alpha.$$

Ускорение a_t в момент отрыва сообщается грузу только силой тяжести:

$$a_t = g \cos \alpha.$$

Таким образом, скорость груза в момент отрыва равна

$$v = \sqrt{gl \sin \alpha},$$

а скорость тела в тот же момент

$$u = v \sin \alpha = \sin \alpha \sqrt{gl \sin \alpha}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgl \sin \alpha = mgl \sin \alpha + mv^2/2 + Mv^2 \sin^2 \alpha/2.$$

Подставив в это равенство найденное выражение для v в момент

отрыва и значение $\sin \alpha = \sin \pi/6 = 1/2$, найдем отношение M/m :

$$M/m = (2 - 3 \sin \alpha) / \sin^3 \alpha = 4.$$

Скорость тела в момент отрыва груза равна

$$u = v \sin \alpha = (1/2) \sqrt{gl/2}.$$

1.48. На стержень действуют три силы: сила T натяжения нити, сила тяжести mg и сила реакции со стороны стенки $R = N + F_{\text{тр}}$ (N — сила нормальной реакции стенки, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, $F_{\text{тр}} \leq \mu N$).

В состоянии равновесия стержня сумма моментов этих сил относительно любой точки равна нулю. Чтобы это условие выполнялось, линия действия силы R должна проходить через точку пересечения линий действия сил T и mg (моменты сил T и mg относительно этой точки равны нулю).

В зависимости от соотношения между углами α и β точка пересечения линий действия сил T и mg может лежать: 1) выше перпендикуляра AM_0 к стене (точка M_1 на рис. 155); 2) ниже этого перпендикуляра (точка M_2); 3) на нем (точка M_0). Соответственно сила трения либо направлена вдоль AC вверх ($F_{\text{тр}1}$), либо — вдоль AC вниз ($F_{\text{тр}2}$), либо равна нулю. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

1) Условие равновесия стержня:

$$T \cos \alpha + F_{\text{тр}1} - mg = 0, \quad N - T \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

— равенство нулю суммы проекций всех сил на оси y и x соответственно; а также равенство моментов сил относительно точки A :

$$mgd_1 = Td_2, \quad \text{или} \quad (mgl/2) \sin \beta = (Tl/3) \sin(\alpha + \beta), \quad (2)$$

где d_1 и d_2 — плечи сил mg и T соответственно. Из (1) и (2) имеем

$$\mu_1 \geq \frac{F_{\text{тр}1}}{N} = \frac{2}{3} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\text{tg} \beta} - \frac{1}{\text{tg} \alpha} \right);$$

этот случай осуществляется при условии $2 \text{tg} \alpha > \text{tg} \beta$.

2) Написав условия равновесия, найдем

$$\mu_2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\text{tg} \alpha} - \frac{2}{\text{tg} \beta} \right).$$

Этому случаю соответствует условие $2 \text{tg} \alpha < \text{tg} \beta$.

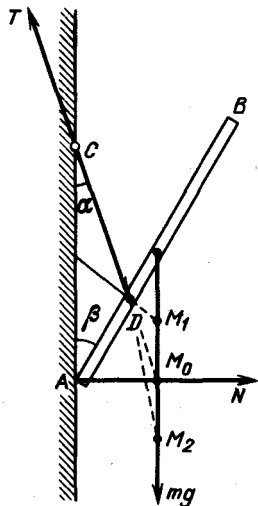


Рис. 155

3) В этом случае стержень находится в равновесии при любом значении μ_3 : $2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Таким образом, при произвольном соотношении между углами α и β стержень находится в равновесии, если

$$\mu \geq \frac{1}{3} \left| \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2}{\operatorname{tg} \beta} \right|.$$

1.49*. Рассмотрим, как будет двигаться малый диск сразу после соприкосновения с большим.

Выберем два одинаковых небольших участка малого диска, расположенных на одном диаметре симметрично относительно центра этого диска O' . На рис. 156 точки A_1 и A_2 — центры масс таких участков.

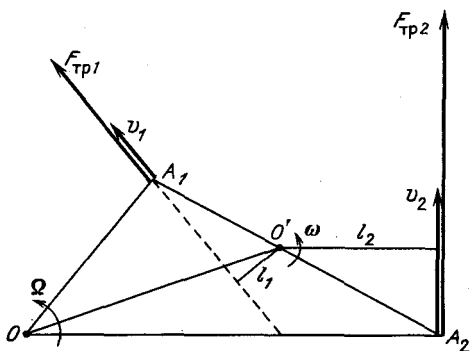


Рис. 156

В момент касания дисков (когда малый диск еще покоится) скорости v_1 и v_2 тех точек большого диска, которые соприкасаются с точками A_1 и A_2 малого диска, направлены так, как показано на рис. 156 ($v_1 = \Omega \cdot OA_1$, $v_2 = \Omega \cdot OA_2$). Понятно, что вдоль скоростей v_1 и v_2 будут направлены в момент касания силы трения $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$, действующие со стороны большого диска на центры масс выбранных участков A_1 и A_2 малого диска ($F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2}$). Поскольку плечо l_1 силы $F_{\text{тр}1}$ относительно оси малого диска меньше плеча l_2 силы $F_{\text{тр}2}$ (рис. 156), суммарный момент пары сил $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$ будет закручивать малый диск в направлении вращения большого диска.

Рассмотрев аналогичные пары участков малого диска, приходим к выводу, что сразу после касания малый диск начнет закручиваться в направлении вращения большого диска.

Пусть в некоторый момент времени угловая скорость малого диска стала равной ω . Скорости участков с центрами масс в точках A_1 и A_2 будут равны $v'_1 = v'_2 = \omega r$, где $r = O'A_1 = O'A_2$ (рис. 157). Силы трения $F'_{\text{тр}1}$ и $F'_{\text{тр}2}$, действующие на эти участки, будут направлены вдоль векторов $v_1 - v'_1$ (относительная скорость точки большого диска, ка-

сающейся точки A_1) и $v_2 - v'_2$ (относительная скорость точки большого диска, касающейся точки A_2). Понятно, что момент пары сил $F'_{\text{тр}1}$ и $F'_{\text{тр}2}$ будет раскручивать малый диск (т. е. угловая скорость диска будет меняться), если $v'_1 = v'_2 < B_1 B_2 / 2 = \Omega r$ (см. рис. 157; для удобства сравнения векторы, «относящиеся» к точке A_2 , перенесены в точку A_1).

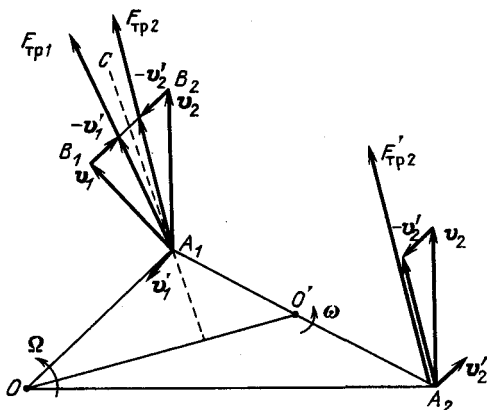


Рис. 157

Таким образом, пока $\omega < \Omega$, имеется отличный от нуля момент сил трения, раскручивающих малый диск. При $\omega = \Omega$ относительные скорости участков с центрами масс в точках A_1 и A_2 направлены перпендикулярно отрезку OO' (вдоль отрезка A_1C на рис. 157) и момент сил трения относительно оси малого диска равен нулю. Следовательно, и в дальнейшем малый диск будет вращаться с установившейся угловой скоростью Ω .

При $\omega = \Omega$ все силы трения, действующие на аналогичные пары участков малого диска, будут равны по модулю и направлены одинаково — перпендикулярно отрезку OO' . Согласно третьему закону Ньютона, результирующая всех сил трения, действующих на большой диск, будет приложена к точке большого диска, касающейся центра O' малого диска, и равна μmg . Чтобы компенсировать тормозящий момент этой силы, к оси большого диска надо приложить момент сил, равный

$$M = \mu mgd.$$

1.50. После установления поступательного движения системы отношение сил трения $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$, действующих на первую и вторую палочки, будет равно отношению сил давления соответствующих участков: $F_{\text{тр}1}/F_{\text{тр}2} = N_1/N_2$. Поскольку каждая из сил давления пропорциональна массе: $N_1 = m_1g$, $N_2 = m_2g$, то отношение сил трения получим в виде

$$F_{\text{тр}1}/F_{\text{тр}2} = m_1/m_2. \quad (1)$$

С другой стороны, из равенства моментов этих сил относительно вершины прямого угла (рис. 158 — вид сверху) получим

$$l F_{\text{тр}1} \cos \varphi = l F_{\text{тр}2} \sin \varphi, \quad (2)$$

где l — расстояние от вершины до центров масс палочек. Из уравнений (1) и (2) находим, что $\operatorname{tg} \varphi = m_1/m_2$, где $\varphi = \alpha - \pi/2$. Следовательно, угол $\alpha = \pi/2 + \operatorname{arctg}(m_1/m_2)$.

1.51. Если нога футболиста при ударе движется со скоростью u , то в системе отсчета, связанной с ногой футболиста, скорость мяча равна $v + u$ (ось движения расположена по направлению движения мяча). После абсолютно упругого удара скорость мяча в этой же системе будет $-(v + u)$, а его скорость относительно земли $-(v + u) - u$. Если после удара мяч остановился, то $v + 2u = 0$; отсюда $u = -v/2 = -5$ м/с. Знак минус указывает, что нога футболиста должна двигаться в ту же сторону, что и мяч до удара.

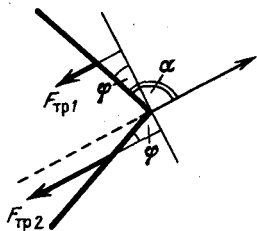


Рис. 158

1.52. Поскольку после попадания пули в тело уменьшается вертикальная составляющая скорости системы тело — пуля (закон сохранения импульса), то время падения тела на землю увеличится.

Чтобы определить время падения тела на землю, найдем время падения t_1 тела до попадания в него пули и время t_2 движения тела вместе с пулей. Итак, пусть t_0 — время свободного падения тела с высоты h . Тогда первую половину пути тело пройдет за время $t_1 = \sqrt{h/g} = t_0/\sqrt{2}$. В момент попадания в тело массой m пули массой M его импульс был направлен вертикально вниз и равен

$$mv = mg t_0/\sqrt{2}.$$

Попавшая в тело горизонтально летящая пуля не изменит вертикальной составляющей импульса образовавшейся системы, поэтому скорость системы тело — пуля в вертикальном направлении будет равна

$$u = \frac{m}{m+M} v = \frac{m}{m+M} g \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Оставшуюся половину пути система тело — пуля пройдет за время t_2 , которое можно найти из уравнения

$$h/2 = ut_2 + gt_2^2/2.$$

Откуда находим время t_2 :

$$t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m^2 + (m+M)^2} - M}{m+M}.$$

Таким образом, общее время падения тела на землю будет равно ($M \gg m$)

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m^2 + (m+M)^2} + m}{m+M} \approx \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

1.53. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса системы. Выберем систему координат так, как указано на рис. 159: ось x совпадает с направлением скорости v_1 тела массой m_1 , ось y направлена вдоль скорости v_2 тела массой m_2 . После слипания

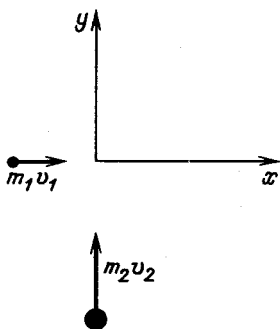


Рис. 159

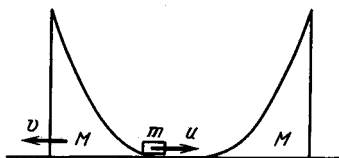


Рис. 160

тела полетят со скоростью u , причем

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u_x, \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_y.$$

До соударения кинетическая энергия системы была равна

$$W'_k = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2.$$

Кинетическая энергия системы после соударения (слипания) тел станет равной

$$W''_k = \frac{m_1 + m_2}{2} (u_x^2 + u_y^2) = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Таким образом, в результате соударения выделится количество теплоты, равное

$$Q = W'_k - W''_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2) \approx 4,3 \text{ Дж.}$$

1.54. Так как трение отсутствует, то в горизонтальном направлении на нашу систему не действуют внешние силы (рис. 160). Для определения скорости v левого клина и скорости u шайбы сразу после спуска можно воспользоваться законом сохранения энергии и законом сохранения импульса:

$$Mv^2/2 + mu^2/2 = mgh, \quad Mv = mu.$$

Поскольку в момент наивысшего подъема шайбы на правый клин на высоту $h_{\max}$ их скорости будут одинаковы, закон сохранения импульса запишем в виде

$$mu = (M + m)V,$$

где V — общая скорость шайбы и правого клина. Кроме того, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{M + m}{2} V^2 + mgh_{\max}.$$

Совместное решение вышенаписанных уравнений дает выражение для максимальной высоты подъема шайбы на правый клин:

$$h_{\max} = h \frac{M^2}{(M + m)^2}.$$

1.55. До тех пор пока шайба не окажется в наинизшем положении, брусок будет касаться стены. К этому моменту времени шайба приобретет скорость v , которую найдем из закона сохранения энергии: $v^2 = 2gr$. При последующем движении системы шайба будет «забираться» на правую половину бруска, все время ускоряя его вправо (рис. 161), пока наконец скорости шайбы и бруска не сравняются. Далее шайба относительно бруска начнет соскальзывать вниз, при этом, пока она опять не пройдет низшее положение, брусок все еще будет ускоряться. Таким образом, максимальная скорость бруска будет в моменты прохождения шайбой низшего положения при ее движении назад относительно бруска.

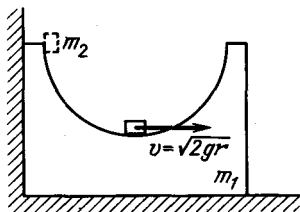


Рис. 161

Чтобы найти максимальную скорость бруска, запишем закон сохранения импульса после того, как брусок «оторвется» от стены:

$$m_2 \sqrt{2gr} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

и закон сохранения энергии для моментов прохождения шайбой низшего положения:

$$m_2 gr = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Написанная система уравнений имеет два решения:

$$1. v_1 = 0, \quad v_2 = \sqrt{2gr},$$

$$2. v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gr}, \quad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gr}.$$

Решение 1 отвечает моментам времени, когда шайба движется, а брусок находится в покое. Нас интересует решение 2, отвечающее тем моментам времени, когда брусок имеет максимальную скорость:

$$v_{1\max} = 2m_2 \sqrt{2gr} / (m_1 + m_2).$$

1.56. Перейдем в систему отсчета, связанную с коробкой. Поскольку удары шайбы о коробку абсолютно упругие, то скорость шайбы относительно коробки будет периодически менять свое направление, оставаясь равной по модулю v . Нетрудно понять, что характер движения шайбы будет повторяться через время $2\Delta t$, где $\Delta t = (D - 2r)/v$ — время пролета шайбы от одного соударения с коробкой до следующего (центр шайбы всякий раз проходит путь $D - 2r$ со скоростью v).

Возвращаясь в систему отсчета, связанную с землей, можно построить график зависимости скорости центра шайбы от времени $v_{\text{ш}}(t)$. Располагая зависимостью $v_{\text{ш}}(t)$, легко построить график зависимости перемещения центра шайбы от времени $x_{\text{ш}}(t)$ (рис. 162).

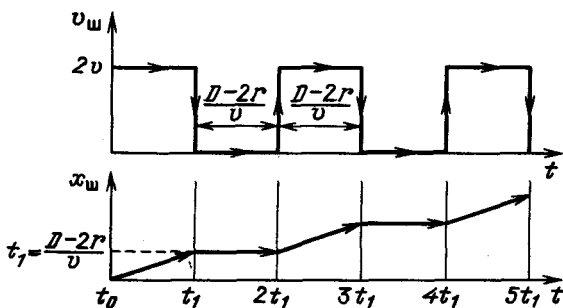


Рис. 162

1.57. Силы, действующие на систему обруч — шайба, — это сила тяжести и сила нормальной реакции со стороны плоскости. Обе эти силы направлены вдоль вертикали. Следовательно, центр масс системы в горизонтальном направлении не перемещается.

Поскольку трение между обручем и плоскостью отсутствует, обруч движется поступательно. Согласно закону сохранения импульса, в любой момент времени

$$Mu + mv_x = 0, \quad (1)$$

где u и v_x — горизонтальные проекции скоростей центра обруча и шайбы. Так как v_x периодически меняет знак, то и u «синхронно» меняет знак. Общий характер движения обруча таков: шайба на участках BC и BE — центр обруча движется вправо; шайба на участках CD и DE — центр обруча движется влево (рис. 163).

Скорости шайбы v и обруча u связаны законом сохранения энергии:

$$mgr(1 + \cos \varphi) = mv^2/2 + Mu^2/2. \quad (2)$$

Движение шайбы относительно неподвижного наблюдателя можно представить в любой момент времени как суперпозицию двух движений: движения относительно центра обруча со скоростью v_t , направленной по касательной к обручу, и движения вместе с обручем со

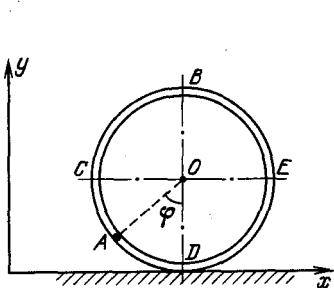


Рис. 163

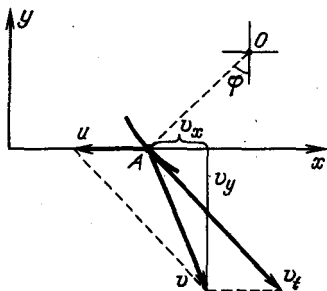


Рис. 164

скоростью u , направленной горизонтально (рис. 164). Как видно из рисунка,

$$v_y / (v_x + v_y) = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1)–(3), найдем скорость центра обруча в тот момент, когда радиус-вектор точки, в которой находится шайба, составляет угол φ с вертикалью:

$$u = m \cos \varphi \sqrt{2gr(1 + \cos \varphi) / [(M + m)(M + m \sin \varphi)]}.$$

1.58. В момент обрыва правой нити на стержень действуют: сила натяжения T левой нити и силы N_1 и N_2 нормального давления грузов массами m_1 и m_2 (рис. 165). Поскольку стержень невесом (его масса равна нулю), уравнения его поступательного и вращательного движений примут вид

$$-T + N_1 - N_2 = 0, \quad N_1 l = 2N_2 l.$$

Из второго уравнения (условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки O) следует

$$N_1 = 2N_2. \quad (1)$$

С учетом этих соотношений получаем (см. рис. 165)

$$T = N_1 - N_2 = N_2. \quad (2)$$

Ускорения грузов массами m_1 и m_2 в первый момент после обрыва правой нити будут направлены вертикально (точка O неподвижна,

стержень нерастяжим) и связаны соотношением

$$a_2 = 2a_1. \quad (3)$$

Запишем уравнения движения грузов в этот момент:

$$m_1 g - N'_1 = m_1 a_1, \quad m_2 g + N'_2 = m_2 a_2,$$

где N'_1 и N'_2 — силы реакции стержня, действующие на грузы массами m_1 и m_2 . Поскольку $N'_1 = N_1$ и $N'_2 = N_2$, то

$$m_1 g - 2N_2 = m_1 a_1, \quad m_2 g + N_2 = 2m_2 a_1.$$

Отсюда находим N_2 , а следовательно (см. (2)), и силу натяжения нити T :

$$T = N_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g.$$

1.59. Пусть за малый промежуток времени Δt после начала движения системы колечко опустилось на расстояние Δx от точки A и приобрело скорость v (рис. 166). Скорость поступательного движения обручей в этот момент должна быть равна $u = v \operatorname{tg} \alpha$ (Δt настолько ма-

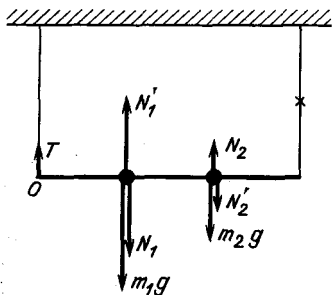


Рис. 165

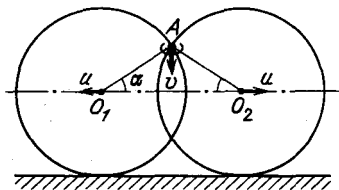


Рис. 166

ло, что угол α практически не изменился). Следовательно, такова же линейная скорость всех точек обручей. Согласно закону сохранения энергии,

$$mg \Delta x = 2Mu^2 + mv^2/2 = 2Mv^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + mv^2/2,$$

где Mu^2 — кинетическая энергия каждого обруча в данный момент. Из этого равенства находим

$$\frac{v^2}{2\Delta x} = \frac{m}{4M \operatorname{tg}^2 \alpha + m} g = \frac{1}{1 + 4(M/m) \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ можно считать, что $v^2 = 2a \Delta x$, где a — ускорение колечка в начальный момент времени. Следовательно,

$$a = \frac{1}{1 + 4(M/m) \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

1.60. Пусть за малый промежуток времени Δt после начала движения веревка переместилась на расстояние Δl и приобрела скорость v . Так как Δt мало, можно считать, что

$$v^2 = 2a \Delta l, \quad (1)$$

где a — ускорение всех точек веревки в начальный момент времени.

Из закона сохранения энергии (трение отсутствует) следует, что

$$Mv^2/2 = \Delta W_{\text{п}}, \quad (2)$$

где M — масса всей веревки, $\Delta W_{\text{п}}$ — изменение потенциальной энергии веревки за время Δt . Очевидно, что $\Delta W_{\text{п}}$ соответствует перераспределению массы веревки, в результате которого кусок веревки длиной Δl «переходит» из точки A в точку B (см. рис. 31). Таким образом,

$$\Delta W_{\text{п}} = (M/l) gh \Delta l. \quad (3)$$

Из (1)–(3) находим условие движения веревки в начальный момент времени:

$$a = gh/l.$$

1.61. Очевидно, в момент удара только крайние кубики соприкасаются с шайбой. Сила, действующая на каждый из этих кубиков, направлена перпендикулярно грани касания шайбы с соответствующим кубиком и проходит через его центр (диаметр шайбы равен ребру кубика!). Поэтому средний кубик в результате этого удара останется неподвижным. Для крайних кубиков и шайбы можно написать закон сохранения импульса по направлению скорости шайбы v :

$$mv = 2mu \cdot \sqrt{2}/2 + mv',$$

здесь m — масса каждого кубика и шайбы, v' — скорость шайбы после соударения, u — скорость каждого из крайних кубиков. Закон сохранения энергии дает уравнение

$$v^2 = 2u^2 + v'^2.$$

В результате получаем, что $u = v/\sqrt{2}$, $v' = 0$. Следовательно, после удара скорости крайних кубиков составляют углы 45° со скоростью v , шайба останавливается, средний кубик так и останется неподвижным.

1.62. В данном случае закон сохранения импульса удастся применить в несколько неожиданном виде. При взрыве шарика составляющая импульса шарика вдоль трубы остается равной нулю, так как трение отсутствует и силы реакции направлены перпендикулярно скоростям частей. Неупругие соударения также не изменяют продольной составляющей импульса системы. Следовательно, окончательная скорость образовавшегося после всех соударений тела равна нулю.

1.63. Для того чтобы выделившееся количество теплоты было максимальным, необходимо выполнение следующих условий:

- 1) потенциальная энергия тел в начальный момент должна быть максимальной;
- 2) тела должны столкнуться одновременно в нижней точке чаши;
- 3) скорость тел сразу после столкновения должна быть равна нулю.

При выполнении этих условий весь запас начальной потенциальной энергии тел перейдет в теплоту. Следовательно, тела в начальный момент должны быть расположены на кромке чаши на высоте r над ее нижней точкой. Расположение тел должно быть таким, чтобы их суммарный импульс перед соударением был равен нулю (тогда после соударения слипшееся тело останется неподвижным в нижней точке чаши). Поскольку значения импульсов тел в любой момент времени относятся, как 3:4:5, расположение тел в начальный момент должно быть таким, как на рис. 167 (вид сверху). После предоставления тел самим себе количество теплоты, которое выделится в системе, максимально и равно $Q = 4mgr$.

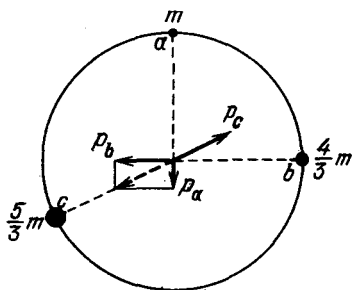


Рис. 167

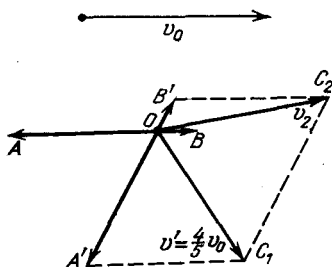


Рис. 168

1.64. Пусть вначале относительно неподвижной системы отсчета протон покоится, а α -частица имеет скорость v_0 . Процесс их упругого соударения описывается законом сохранения импульса:

$$4mv_0 = mv_1 + 4mv_2,$$

и законом сохранения энергии:

$$4mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + 4mv_2^2/2,$$

где v_1 и v_2 — скорости протона и α -частицы в неподвижной системе отсчета после соударения, m и $4m$ — массы протона и α -частицы.

Рассмотрим процесс соударения этих частиц в системе центра масс, т. е. в инерциальной системе отсчета, движущейся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью

$$v' = 4mv_0/(m + 4m) = (4/5)v_0$$

(в числителе первой дроби стоит полный импульс системы, в знамена-

теле — ее полная масса). На рис. 168 изображены скорость v_0 и скорости α -частицы (вектор $\vec{OB}$) и протона (вектор $\vec{OA}$) в системе центра масс до соударения: $OB = (1/5)v_0$, $OA = (4/5)v_0$. Согласно закону сохранения импульса, после соударения векторы $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ скоростей α -частицы и протона должны лежать на одной прямой и должно выполняться соотношение $OB' : OA' = 1 : 4$ (см. рис. 168); согласно закону сохранения энергии, $OB' = OB$ и $OA' = OA$ (покажите!).

Скорости α -частицы и протона в неподвижной системе отсчета изображены на рисунке векторами $\vec{OC}_2 = \vec{OB}' + v'$ и $\vec{OC}_1 = \vec{OA}' + v'$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно определить максимально возможную длину вектора $\vec{OC}_1$, т. е. в равнобедренном треугольнике $OA'C_1$ необходимо определить максимально возможную длину основания при неизменных длинах боковых сторон. Очевидно, что максимум $\vec{OC}_1$ равен $2 \cdot (4/5)v_0 = 1,6v_0$. Эта ситуация отвечает центральному удару.

1.65. Шины автомобиля в песке проминают след. Чем больше давление на песок, тем больше глубина следа, тем больше вероятность машине застрять. Если шины значительно спущены, то площадь соприкосновения шин с песком увеличивается. Давление на песок при этом уменьшается, следовательно, уменьшается и глубина следа.

1.66. Сложное движение тела внутри трубы в любой момент времени можно представить как суперпозицию двух независимых движений — движения вдоль оси трубы и движения по окружности в плоскости, перпендикулярной оси трубы (рис. 169). Отрыв тела от поверхности трубы скажется только на втором движении — тело не будет двигаться по окружности. Поэтому мы рассмотрим только это движение.

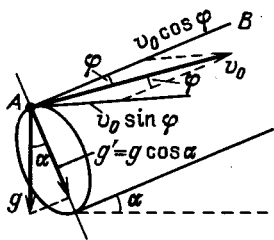


Рис. 169

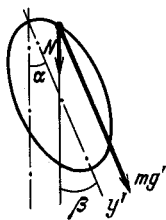


Рис. 170

На тело, движущееся по окружности, действует сила N нормальной реакции со стороны стенок трубы (вектор N лежит в плоскости, перпендикулярной оси трубы) и «сила тяжести» $mg' = mg \cos \alpha$. Напишем условие движения тела по окружности:

$$mg' \cos \beta + N = mv^2/r, \quad (1)$$

где β — угол, который составляет радиус-вектор той точки окружности,

в которой в данный момент находится тело, с «вертикалью» y (рис. 170). Чтобы тело не отрывалось от поверхности трубы, должно выполняться условие $N = mv^2/r - mg' \cos \beta \geq 0$, откуда следует

$$v^2 \geq g'r \cos \beta. \quad (2)$$

Связь скорости v , с которой в данный момент движется тело по окружности, с начальной скоростью v_0 найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии: при любом значении угла β должно выполняться соотношение

$$mv^2/2 + mg'r \cos \beta = m(v_0 \sin \varphi)^2/2 + mg'r;$$

отсюда

$$v^2 = v_0^2 \sin^2 \varphi + 2g'r - 2g'r \cos \beta. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), найдем, при каких значениях v_0 тело не оторвется от трубы:

$$v_0^2 \geq 3g'r \cos \beta / \sin^2 \varphi - 2g'r / \sin^2 \varphi.$$

Поскольку это условие должно выполняться при любом значении $\beta \in [0, 2\pi]$, окончательно имеем

$$v_0^2 \geq g'r / \sin^2 \varphi = gr \cos \alpha / \sin^2 \varphi.$$

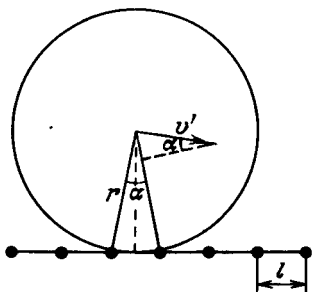


Рис. 171

1.67*. Пусть в некоторый момент времени колесо находится в одном из положений, когда его центр масс расположен над прутком и его скорость равна v . В момент удара о следующий прут (рис. 171) центр масс колеса имеет некоторую скорость v' , направленную перпендикулярно линии, соединяющей его с первым прутком.

Эта скорость находится из закона сохранения энергии:

$$mgh + mv^2/2 = mv'^2/2.$$

Здесь $h = r - \sqrt{r^2 - l^2/4} \approx l^2/(8r)$. Получаем

$$v' = v \sqrt{1 + gl^2/(4rv^2)}.$$

По условию задачи (движение без подскоков) удар колеса о прут абсолютно неупругий. Это означает, что при ударе гасится проекция импульса колеса на прямую, соединяющую центр колеса с прутком. Тем самым при каждом ударе происходит потеря (переход в теплоту) энергии, равной

$$\Delta W = m(v' \sin \alpha)^2/2,$$

где $\sin \alpha \approx l/r$. Чтобы скорость v оставалась постоянной, нужно, чтобы работа силы натяжения T веревки на пути l компенсировала эту потерю энергии. Таким образом,

$$Tl = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{gl^2}{4rv^2} \right) \frac{l^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$T = \frac{mv^2 l}{2r^2} \left(1 + \frac{gl^2}{4rv^2} \right) \approx \frac{mv^2 l}{2r^2}.$$

1.68. Поскольку проскальзывания нет, то при перекатывании через границу раздела плоскостей ось колесной пары вращается вокруг точки O (рис. 172). В момент отрыва сила давления колесной пары на плоскость и сила трения равны нулю, поэтому угол β , при котором происходит отрыв, находится из условия

$$mg \cos \beta = mv_1^2/r.$$

Из закона сохранения энергии получаем

$$mv^2/2 = mv_1^2/2 - mgr(1 - \cos \beta).$$

Отрыва не происходит, если определяемый из этих уравнений угол β не меньше α и, следовательно,

$$\cos \beta \leq \cos \alpha.$$

Отсюда вытекает, что условие

$$v \leq \sqrt{gr(3 \cos \alpha - 2)}$$

есть условие перекатывания колесной пары через границу раздела без отрыва. Если $3 \cos \alpha - 2 < 0$, т. е. $\alpha > \arccos(2/3)$, то отрыв произойдет при любой скорости v .

1.69. Потенциальная энергия системы в начальный момент складывается из потенциальной энергии обода, равной $mg(r + h)$, и потенциальной энергии части ленты, лежащей на наклонной плоскости, $\rho gh^2/(2 \sin \alpha)$. Полная конечная энергия системы также будет чисто потенциальной и равной ввиду отсутствия трения начальной энергии. Конечная энергия складывается из энергии обода mgr и энергии намотавшейся на него ленты. Центр масс последней будем считать совпадающим с центром масс обода. Это предположение верно, если длина намотавшейся ленты много больше длины окружности обода. Тогда потенциальная энергия намотавшейся ленты есть

$$\rho(h/\sin \alpha + s)gr,$$

причем длина ленты равна $h/\sin \alpha + s$, где s — искомое расстояние,

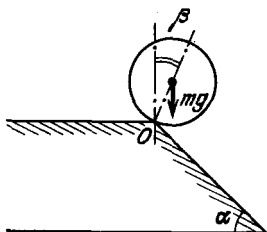


Рис. 172

пройденное ободом от основания наклонной плоскости до точки остановки.

Из закона сохранения энергии получаем

$$mg(r+h) + \rho g \frac{h^2}{2 \sin \alpha} = mgr + \rho g r \left(\frac{h}{\sin \alpha} + s \right);$$

отсюда

$$s = \frac{mg + \rho(h/\sin \alpha)(r - h/2)}{\rho r}.$$

1.70. Установившимся движением системы в воздухе будет вертикальное падение шариков с постоянной скоростью. Силы сопротивления воздуха F , действующие на нижний (более тяжелый) и верхний шарики, одинаковы, поскольку одинаковы скорости и размеры шариков. Поэтому уравнения движения шариков запишутся в виде

$$m_1 g - T - F = 0, \quad m_2 g + T - F = 0.$$

Решая эту систему, получим силу натяжения нити

$$T = (m_1 - m_2)g/2.$$

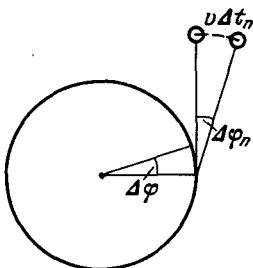


Рис. 173

1.71*. В каждый момент времени через точку касания нити с цилиндром проходит мгновенная ось вращения шарика. Это означает, что сила натяжения нити перпендикулярна скорости шарика, откуда следует, что эта сила не совершает работы. Тем самым кинетическая энергия шарика не меняется, и его скорость остается по модулю равной v .

Чтобы найти зависимость l от t , мысленно разобьем размотавшуюся к моменту t часть нити на очень большое число N малых равных кусочков длины $\Delta l = l/N$ каждый. Пусть разматывание n -го кусочка продолжалось время Δt_n . За это время конец нити переместился на расстояние $v \Delta t_n$, а сама нить повернулась на угол $\Delta \varphi_n = v \Delta t_n / (n \Delta l)$ (рис. 173). На этот же угол повернулся и радиус, проведенный в точку касания нити с цилиндром, т. е.

$$\Delta \varphi_n = \Delta \varphi = \Delta l / r;$$

отсюда

$$\Delta t_n = n (\Delta l)^2 / (vr).$$

Тогда

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_N = \frac{1 (\Delta l)^2}{vr} + \frac{2 (\Delta l)^2}{vr} + \dots + \frac{N (\Delta l)^2}{vr} = \frac{(\Delta l)^2}{vr} \frac{N(N+1)}{2}.$$

Поскольку $\dot{N}$ велико,

$$t = (\Delta l)^2 N^2 / (2vr) = l^2 / (2vr), \quad l = \sqrt{2vrt}.$$

1.72. За время T голубой шарик пройдет расстояние $\omega(l/\sqrt{3})T = 2\pi l/\sqrt{3}$ (рис. 174; $\omega = 2\pi/T$ — частота вращения). За это же время центр масс зеленого и белого шариков переместится на расстояние $\omega(l/2\sqrt{3})T = \pi l/\sqrt{3}$. Одновременно стержень, соединяющий зе-

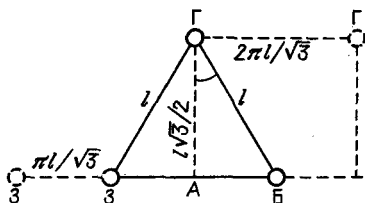


Рис. 174

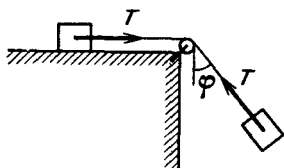


Рис. 175

ленный и белый шарик, повернется на угол 2π , так как период обращения этих шариков вокруг их центра масс совпадает с периодом T . Поэтому искомое расстояние равно

$$L = l \sqrt{3/4 + (\pi \sqrt{3} + 1/2)^2}$$

или при другом расположении шариков (белый и зеленый на рисунке нужно поменять местами)

$$L = l \sqrt{3/4 + (\pi \sqrt{3} - 1/2)^2}.$$

1.73. На центр масс системы, состоящей из брусков и нити, действует в горизонтальном направлении только сила со стороны блока. Ясно, что горизонтальная составляющая этой силы, равная $T(1 - \cos \varphi)$, где T — сила натяжения нити, всегда направлена вправо (рис. 175). Поскольку в начальный момент центр масс находится над блоком и покоится, в процессе движения он будет смещаться по горизонтали вправо. Отсюда следует, что левый брусок достигнет блока раньше, чем правый ударится о стол, поскольку в противном случае центр масс оказался бы в момент удара слева от блока.

1.74. Благодаря начальным условиям (левый груз неподвижен, правому сообщена скорость v) левый груз будет двигаться по прямой, правый помимо движения по прямой будет совершать колебания. В некоторый момент времени на левый груз по вертикали действует сила $mg - T$, на правый $mg - T \cos \varphi$ (рис. 176; вертикальная ось направлена вниз). Здесь T — сила натяжения нити. Отсюда следует,

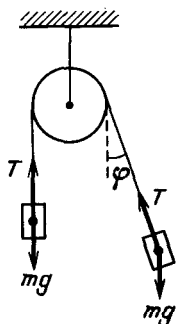


Рис. 176

что разность вертикальных составляющих ускорений правого (a_1) и левого (a_2) грузов, равная

$$a_1 - a_2 = \left(g - \frac{T}{m} \cos \varphi \right) - \left(g - \frac{T}{m} \right) = \frac{T}{m} (1 - \cos \varphi),$$

всегда неотрицательна. Поскольку относительное расстояние и относительная скорость грузов по вертикали в начальный момент равны нулю, то с течением времени разность ординат правого и левого грузов будет увеличиваться, т. е. в любой момент времени правый груз находится ниже левого.

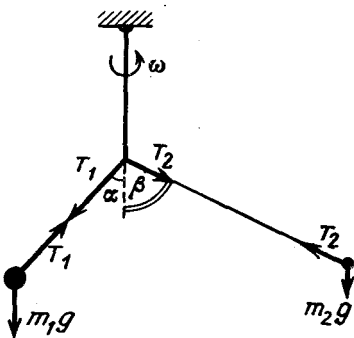


Рис. 177

1.75. Пусть правая нить отклонилась на угол β от вертикали, а левая — на угол α (рис. 177). Чтобы стержень не отклонялся от вертикального положения, необходимо выполнение равенства

$$T_1 \sin \alpha = T_2 \sin \beta, \quad (1)$$

где T_1 , T_2 — силы натяжения соответствующих нитей.

Запишем уравнения движения обоих тел в вертикальном и горизонтальном направлениях:

$$T_1 \sin \alpha = m_1 \omega^2 l_1 \sin \alpha, \quad T_1 \cos \alpha = m_1 g,$$

$$T_2 \sin \beta = m_2 \omega^2 l_2 \sin \beta, \quad T_2 \cos \beta = m_2 g.$$

Решив полученную систему уравнений с учетом (1), найдем

$$\omega = g^{1/2} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 l_1^2 - m_2^2 l_2^2} \right)^{1/4} \approx 14 \text{ рад/с.}$$

1.76. Обозначим через l_1 и l_2 длины пружин, соединяющих ось вращения с первым шариком и шарики между собой. Так как шарики движутся по окружности, то уравнения их движения примут вид

$$m \omega^2 l_1 = k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0),$$

$$m \omega^2 (l_1 + l_2) = k(l_2 - l_0);$$

отсюда

$$l_1 = \frac{l_0}{1 - 3m\omega^2/k + (m\omega^2/k)^2},$$

$$l_2 = \frac{(1 - m\omega^2/k) l_0}{1 - 3m\omega^2/k + (m\omega^2/k)^2}.$$

Решение имеет физический смысл, если выполняются неравенства

$$1 - 3m\omega^2/k + (m\omega^2/k) > 0, \quad 1 - m\omega^2/k \geq 0.$$

Пусть $m\omega^2/k = x$. Так как $m\omega^2/k > 0$, из второго условия следует $0 < x < 1$. Первое условие дает

$$x^2 - 3x + 1 > 0,$$

откуда либо $x > (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2,6$, либо $x < (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0,4$. Следовательно, область допустимых значений x есть $0 < x < (3 - \sqrt{5})/2$, откуда

$$\omega < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}}.$$

1.77. Изменение кинетической энергии тела W_k при небольшом перемещении Δs записывается в виде

$$\Delta W_k = F \Delta s,$$

где F — сила, действующая на тело. Поэтому на графике зависимости кинетической энергии от перемещения при прямолинейном движении сила в некоторой точке траектории движения определяется как тангенс

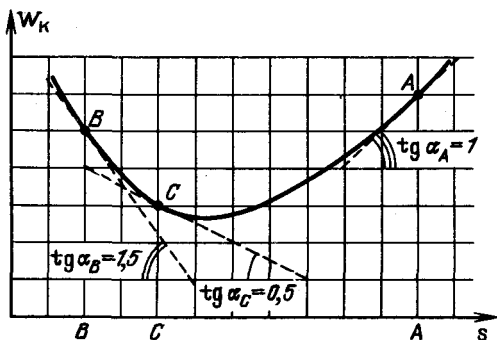


Рис. 178

угла наклона касательной в соответствующей точке графика. Используя график, приведенный в условии задачи, построением (рис. 178) находим $F_C \approx -1$ Н, $F_B \approx -3$ Н.

1.78. Количество выделившейся теплоты будет максимальным при условии, что брусок пройдет максимальное расстояние относительно транспортера. Для этого необходимо, чтобы около ролика A скорость бруска относительно земли стала равной нулю (см. рис. 41). Начальная скорость относительно земли, которую при этом

должен иметь брусок, определяется условиями

$$-v_0 + at = 0, \quad l = v_0 t - at^2/2,$$

где $a = \mu g$ — ускорение, сообщаемое бруску силой трения. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{2\mu gl}.$$

Время движения бруска по ленте транспортера до ролика А равно

$$t = \sqrt{2l/(\mu g)}.$$

До остановки брусок пройдет по ленте путь, равный

$$s_1 = l + vt = l + v\sqrt{2l/(\mu g)}.$$

Далее брусок начнет двигаться равноускоренно вправо. Интервал времени, спустя который прекратится проскальзывание, равен $\tau = v/a = v/\mu g$. За это время относительно земли брусок переместится на расстояние

$$s = at^2/2 = v^2/(2\mu g).$$

Так как по условию задачи $v < \sqrt{2\mu gl}$, то за время τ брусок не соскользнет с транспортера, т. е. $s < l$.

Путь, который за это время брусок пройдет относительно ленты транспортера, равен

$$s_2 = |v^2/2a - vt| = v^2/(2\mu g).$$

Полный путь бруска относительно ленты равен

$$s = s_1 + s_2 = l + v\sqrt{2l/(\mu g)} + v^2/(2\mu g) = (v + \sqrt{2\mu gl})^2/(2\mu g).$$

Количество теплоты, выделившееся за счет работы силы трения, равно

$$Q = \mu mgs = m(v + \sqrt{2\mu gl})^2/2.$$

1.79. В первом случае (движение трубы без проскальзывания) первоначальный запас потенциальной энергии в поле силы тяжести переходит в кинетическую энергию движения трубы, которая делится поровну между энергией вращения и энергией поступательного движения. Во втором случае (движение с проскальзыванием) не вся потенциальная энергия перейдет в энергию движения в конце горки из-за работы силы трения. А поскольку эта энергия также распределится поровну между энергиями поступательного и вращательного движения, то во втором случае скорость трубы в конце горки будет меньше.

1.80. После того как пружину отпустили, устанавливается ее равномерное растяжение. При этом возникают очень быстрые колебания самой пружины, которые также быстро затухают. За это время груз практически не успевает сместиться, т. е. если, совершая работу A , середину пружины сместили на расстояние x , то теперь вся пружина рас-

тянута на x . Значит, ее потенциальная энергия, которая при последующем колебательном движении груза равна максимальной кинетической, равна $W_k = kx^2/2$, где k — жесткость всей пружины. При оттягивании пружины вниз за середину удлинялась лишь ее верхняя половина, жесткость которой составляет $2k$, и работа, равная потенциальной энергии растяжения верхней части пружины, $A = 2k(x^2/2) = kx^2$. Отсюда можно заключить, что максимальная кинетическая энергия груза при последующем движении равна $W_k = A/2$.

1.81. Ввиду замкнутости системы звезды будут вращаться вокруг своего центра масс по концентрическим окружностям. Уравнения движения звезд имеют вид

$$m_1 \omega_1^2 l_1 = F, \quad m_2 \omega_2^2 l_2 = F; \quad (1)$$

здесь ω_1, ω_2 — угловые скорости вращения звезд; l_1, l_2 — радиусы их орбит; F — сила взаимодействия звезд, равная $Gm_1 m_2 / l^2$, где l — расстояние между звездами, G — гравитационная постоянная. Из определения центра масс следует, что

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad l_1 + l_2 = l. \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получаем

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{G(m_1 + m_2)/l^3} = l^{-1} \sqrt{G(m_1 + m_2)/l},$$

а искомый период обращения этих звезд равен

$$T = 2\pi l \sqrt{l/[G(m_1 + m_2)]}.$$

1.82. Пусть v_1 — скорость станции до столкновения, v_2 — скорость станции и метеорита сразу после столкновения, m — масса метеорита, $10m$ — масса станции.

До столкновения станция двигалась вокруг планеты по круговой орбите радиуса R , поэтому скорость станции v_1 находится из уравнения

$$10mv_1^2/R = G \cdot 10mM/R^2.$$

Отсюда $v_1 = \sqrt{GM/R}$. Скорости u, v_1 и v_2 , согласно закону сохранения импульса, связаны соотношением

$$mu + 10mv_1 = 11mv_2.$$

Напишем закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y (рис. 179):

$$10mv_1 = 11mv_{2x}, \quad (1)$$

$$mu = 11mv_{2y}. \quad (2)$$

После столкновения станция переходит на эллиптическую орбиту. Энергия станции с застрявшим в ней метеоритом при движении по

этой эллиптической орбите остается постоянной. Следовательно,

$$-G \frac{11mM}{R} + \frac{11m}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = -G \frac{11mM}{R/2} + \frac{11m}{2}V^2, \quad (3)$$

где V — скорость станции в момент наибольшего сближения с планетой. Здесь мы используем формулу для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух тел (m_1 и m_2): $W_{\pi} = -Gm_1m_2/r$. Согласно второму закону Кеплера, скорость V и скорость v_2 станции сразу после столкновения связаны соотношением

$$VR/2 = v_{2x}R. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (1) — (4) и учитывая, что $v_1 = \sqrt{GM/R}$, находим скорость метеорита перед столкновением:

$$u = \sqrt{58GM/R}.$$

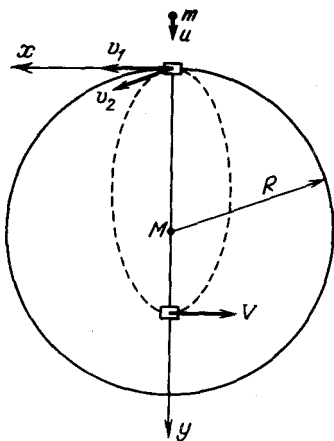


Рис. 179

1.83. Для тела массой m , покоящегося на экваторе планеты, кото-

рая имеет радиус R и вращается с угловой скоростью ω , уравнение движения имеет вид

$$m\omega^2 R = mg' - N,$$

где N — сила реакции поверхности планеты, $g' = 0,01g$ — ускорение свободного падения на планете. По условию задачи тела на экваторе невесомы, т. е. $N = 0$. Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, где T — период обращения планеты вокруг оси, равный продолжительности земных суток, получим

$$R = (T^2/4\pi^2)g'.$$

Подставляя значения $T = 8,6 \cdot 10^4$ с, $g' \approx 0,1$ м/с², получим

$$R \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ м} = 18\,000 \text{ км}.$$

1.84. Запишем уравнения движения Нептуна и Земли вокруг Солнца (для простоты рассуждений предположим, что орбиты круговые):

$$m_N \omega_N^2 R_N = GMm_N/R_N^2,$$

$$m_3 \omega_3^2 R_3 = GMm_3/R_3^2.$$

Здесь m_N , m_3 , ω_N , ω_3 , R_N , R_3 — массы, угловые скорости, радиусы орбит Нептуна и Земли соответственно, а M — масса Солнца. Учтем те-

Теперь связь между угловой скоростью и периодом обращения вокруг Солнца:

$$\omega_H = 2\pi/T_H, \quad \omega_3 = 2\pi/T_3.$$

Здесь T_H — период обращения Нептуна, а T_3 — период обращения Земли вокруг Солнца. В результате находим, что период обращения Нептуна вокруг Солнца равен

$$T_H = T_3 \sqrt{R_H^3/R_3^3} \approx 165 \text{ лет.}$$

Аналогичный результат получится и для эллиптических орбит из 3-го закона Кеплера.

1.85. Рассмотрим два пути решения задачи.

1. Условия равновесия грузов имеют вид (рис. 180)

$$T_1 = m_1 g, \quad T_2 = m_2 g,$$

$$Mg = T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2, \quad T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2.$$

Из этих соотношений можно найти углы, соответствующие положению равновесия системы:

$$\sin \alpha_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2Mm_1}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2Mm_2}.$$

Очевидно, что равновесие осуществимо не всегда. Действительно, для равновесия необходимо выполнение условий $0 < \alpha_1 < \pi/2$ и $0 < \alpha_2 < \pi/2$, т. е.

$$0 < \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2Mm_1} < 1, \quad 0 < \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2Mm_2} < 1.$$

Из этих неравенств следует, что вся система будет находиться в равновесии лишь при выполнении условий

$$M < m_1 + m_2, \quad M^2 > |m_1^2 - m_2^2|.$$

2. Рассмотрим равновесие узла А. В этом случае на него действуют три силы:

$$T_1 = m_1 g, \quad T_2 = m_2 g, \quad T_3 = Mg.$$

Для равновесия узла необходимо, чтобы три силы T_1 , T_2 , T_3 образовали треугольник. Поскольку в треугольнике сумма длин двух сторон не меньше третьей, получим соотношение между массами m_1 , m_2 , M , обеспечивающее равновесие узла А:

$$m_1 + m_2 > M, \quad M + m_1 > m_2, \quad M + m_2 > m_1.$$

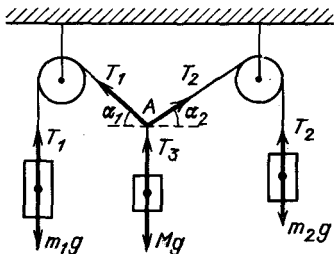


Рис. 180

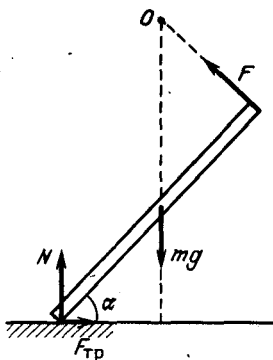


Рис. 181

1.86. Рассмотрим условия равновесия стержня в тот момент, когда он наклонен к горизонту под углом α . Силы, действующие на стержень, изображены на рис. 181. При решении задачи удобнее всего воспользоваться равенством нулю суммы моментов сил относительно точки пересечения линий действия силы тяжести mg и приложенной человеком перпендикулярно стержню силы F (точка O) — при этом моменты данных сил равны нулю.

Пусть длина стержня равна $2l$, тогда плечо силы реакции опоры N составляет $l \cos \alpha$, а плечо силы трения — $l/\sin \alpha + l \sin \alpha$, и условие равновесия записывается в виде

$$Nl \cos \alpha = F_{\text{тр}} l \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right) = F_{\text{тр}} l \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha};$$

отсюда

$$F_{\text{тр}} = N \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = N \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = N \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

С другой стороны, сила трения не может превышать значения μN — силы трения скольжения, поэтому

$$\mu \geq \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Это неравенство должно выполняться при всех значениях угла α . Следовательно, для нахождения минимального коэффициента трения $\mu_{\min}$ необходимо найти максимум функции $(2x^2 + 1/x^2)^{-1}$, где $x^2 = \operatorname{tg} \alpha$. Из тождества $2x^2 + 1/x^2 = (\sqrt{2}x - 1/x)^2 + 2/\sqrt{2}$ следует, что максимальное значение $1/(2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$ равно $1/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$ и достигается при $x^2 = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}/2$. Таким образом, искомый минимальный коэффициент трения равен

$$\mu_{\min} = \sqrt{2}/4.$$

1.87. Поскольку шарнир C находится в равновесии, сумма сил, действующих на него, равна нулю. Записывая силы, действующие на шарнир C , в проекции на ось, перпендикулярную AC , получим

$$(m + m_{\text{ш}})g \sin \alpha = T \cos \alpha, \quad (1)$$

где $m_{\text{ш}}$ — масса шарнира. Аналогично, из условия равновесия шарнира D и условия горизонтальности среднего стержня следует, что

$$T \cos \alpha = F \cos \beta + m_{\text{ш}}g \sin \alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$F = \frac{T \cos \alpha - m_{ш} g \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta} \geq mg \sin \alpha.$$

Таким образом, минимальная сила $F_{\min}$, при которой средний стержень сохраняет горизонтальное положение, равна

$$F_{\min} = mg \sin \alpha = mg/2$$

и направлена перпендикулярно стержню BD .

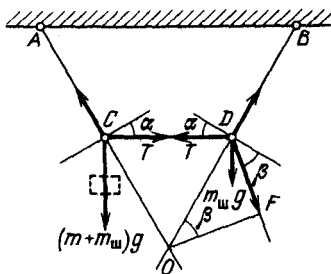


Рис. 182

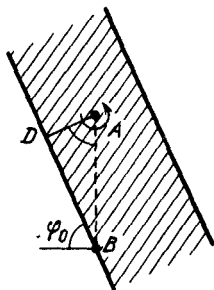


Рис. 183

1.88. Из условия задачи следует, что коэффициент трения скольжения карандаша по наклонной плоскости удовлетворяет условию $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$. Действительно, карандаш, положенный перпендикулярно образующей, находится в равновесии, а это означает, что $mg \sin \alpha = F_{\text{тр}}$, где mg — сила тяжести, $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Но $F_{\text{тр}} \leq \mu mg \cos \alpha$. Следовательно, $mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha$, откуда $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, ни при каких значениях угла φ карандаш по наклонной плоскости скользить не будет.

Скатывание карандаша может начаться при таком угле φ_0 , когда вектор силы тяжести «выйдет» за пределы участка соприкосновения карандаша и наклонной плоскости (на рис. 183 этот участок заштрихован). Для нахождения этого угла спроецируем на наклонную плоскость центр масс карандаша (точку A) и отметим точку пересечения вертикали, проходящей через его центр масс, с наклонной плоскостью (точку B). Очевидно, при различной ориентации карандаша, если его центр масс остается на месте, точки A и B будут неподвижны, причем если сторона шестиугольного поперечного сечения карандаша равна $2l$, то $AB = 2l \cos 30^\circ \operatorname{tg} \alpha$ (причем $2l \cos 30^\circ$ — это радиус вписанной в шестиугольное сечение окружности).

Пока точка B лежит в заштрихованной области, карандаш не будет скатываться.

Напишем условие начала скатывания карандаша:

$$AD / \cos \varphi_0 = AB, \quad \text{или} \quad l / \cos \varphi_0 = l \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \arccos(1/\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha).$$

Таким образом, если угол φ удовлетворяет условию

$$\arccos(1/\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha) \leq \varphi \leq \pi/2,$$

карандаш находится в равновесии. Выражение для угла φ_0 имеет смысл при условии $\operatorname{tg} \alpha > 1/\sqrt{3}$. Тот факт, что карандаш, положенный параллельно образующей, скатывается, означает, что $\operatorname{tg} \alpha > 1/\sqrt{3}$ (покажите это самостоятельно).

1.89. Пусть сечение поверхности описывается функцией $y(x)$, изображенной на рис. 184. Поскольку стержень должен в любом положении находиться в равновесии, это равновесие может быть только безразличным, т. е. центр масс стержня должен находиться на одном уровне при любом положении стержня. Если конец стержня, опирающийся на поверхность, имеет абсциссу x , то ордината y_0 другого его конца, касающегося вертикальной стенки, находится из условия

$$l^2 = [y(x) - y_0]^2 + x^2, \quad y_0 = y(x) \pm \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Поскольку стержень однороден, его центр масс находится в середине стержня. Полагая для определенности ординату центра масс равной нулю, получим

$$[y_0 + y(x)]/2 = 0,$$

отсюда

$$y(x) = \pm \sqrt{l^2 - x^2}/2.$$

Физический смысл имеет лишь решение со знаком минус. Итак, сечение поверхности описывается в общем случае функцией

$$y(x) = a - \sqrt{l^2 - x^2}/2,$$

где a — произвольная постоянная.

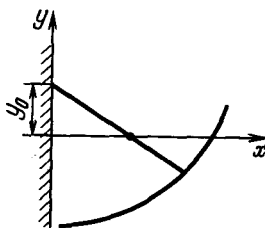


Рис. 184

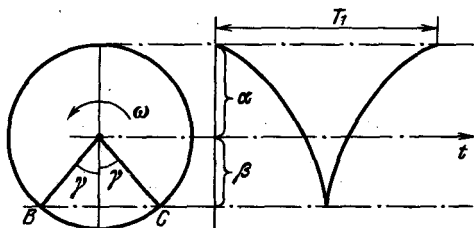


Рис. 185

1.90. В отсутствие стенки угол отклонения математического маятника меняется по гармоническому закону с периодом T и угловой

амплитудой α . Такое же движение совершает проекция точки, обращающейся по окружности радиуса α с угловой скоростью $\omega = 2\pi/T$. Абсолютно упругий удар жесткого стержня о стенку при угле отклонения β соответствует мгновенному перескоку из точки B в точку C (рис. 185). Период уменьшается на $\Delta t = 2\gamma/\omega$, где $\gamma = \arccos(\beta/\alpha)$. Следовательно,

$$T_1 = 2\pi/\omega - 2\gamma/\omega,$$

а искомое отношение равно

$$\frac{T_1}{T} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\beta}{\alpha}.$$

1.91*. Пусть шарик массой m , падая с высоты h , упруго ударяется о неподвижную горизонтальную поверхность. Считая, что время соударения шарика с поверхностью мало по сравнению с интервалом времени Δt между двумя последовательными соударениями, найдем

$$\Delta t = 2\sqrt{2h/g}.$$

За каждое соударение импульс шарика меняется на величину $\Delta p = 2mv = 2m\sqrt{2gh}$. Поэтому за одно соударение с горизонтальной поверхностью получаем тот же импульс $\Delta p = 2m\sqrt{2gh}$.

Чтобы найти среднюю силу, действующую со стороны шарика на горизонтальную поверхность, рассмотрим интервал времени $\tau \gg \Delta t$. За время τ импульс, передаваемый горизонтальной поверхности, равен

$$\Delta P = \Delta p \frac{\tau}{\Delta t} = 2m \frac{\sqrt{2gh} \tau}{2\sqrt{2h/g}} = mg\tau.$$

Следовательно, усредненную по интервалу времени τ силу, действующую на горизонтальную поверхность со стороны прыгающего шарика, найдем из соотношения

$$F_{\text{ср}} = \Delta P/\tau = mg.$$

По условию задачи масса M чашки весов намного больше массы m шарика. Поэтому на медленное колебательное движение чашки весов будут накладываться почти периодические удары шарика. Средняя сила, действующая на чашку со стороны шарика, будет равна $F_{\text{ср}} = mg$. Следовательно, искомое смещение Δx положения равновесия весов будет равно

$$\Delta x = mg/k.$$

1.92. Сила, действующая на бусинку, находящуюся в какой-либо точке A , в направлении, касательном к проволоке, равна $F = mg \cos \alpha$, где α — угол между касательной в точке A и осью ординат (рис. 186). Для того чтобы длина участка проволоки от начала координат до бусинки менялась по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила

F в точке A была пропорциональна длине l_A . Но $F \leq mg$, а l_A неограниченно возрастает. Следовательно, должна существовать точка B , в которой условие пропорциональности нарушается. Это означает, что колебания с амплитудой l_B уже не могут быть гармоническими.

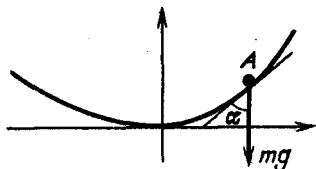


Рис. 186

1.93. Из уравнений движения брусков

$$ma_1 = F_{\text{упр}}, \quad 2ma_2 = -F_{\text{упр}},$$

где $F_{\text{упр}}$ — сила упругости пружины, следует, что их ускорения в каждый

момент времени связаны соотношением $a_2 = -a_1/2$. Отсюда вытекает, что в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс брусков, последние совершают колебания в противофазе, причем относительные смещения брусков относительно их положений равновесия связаны тем же соотношением, что и ускорения:

$$\Delta x_2 = -\Delta x_1/2.$$

Тогда

$$F_{\text{упр}} = -(3/2)k \Delta x_1 = 3k \Delta x_2.$$

Следовательно, период малых продольных колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{2m/(3k)}.$$

1.94. Отметим горизонтальный диаметр $AB = 2r$ бревна в момент, когда бревно проходит положение равновесия.

Рассмотрим теперь бревно в момент времени, когда нити подвеса отклонены от вертикали на какой-либо малый угол α (рис. 187). Если

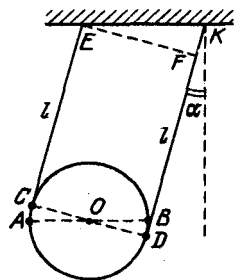


Рис. 187

проскальзывания нитей нет, то нетрудно из геометрических соображений получить, что отмеченный диаметр AB всегда в процессе колебания бревна остается горизонтальным. Действительно, если $EF \perp DK$, то $FK = 2r \tan \alpha \approx 2r\alpha$. Но $BD \approx FK/2 \approx r\alpha$. Следовательно, как и указывалось, $\angle BOD = \alpha$.

Так как диаметр AB с течением времени остается горизонтальным, то бревно движется плоскопараллельно, т. е. скорости всех его точек одинаковы в каждый данный момент времени. Поэтому движение бревна синхронно колебанию математического маятника с длиной подвеса l . Таким образом, период малых колебаний бревна равен

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

1.95. Период колебания маятника в направлении, перпендикулярном рельсам, равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l/g}$$

(l — длина невесомой нерастяжимой нити), так как груз M при этом покоится (рис. 188).

Период колебаний в плоскости, параллельной рельсам («параллельные» колебания), найдем из условия неподвижности центра масс системы. Положение центра масс системы определяется уравнением $ml_1 = M(l - l_1)$. Таким образом, шарик совершает колебания при неподвижной точке O , находясь от нее на расстоянии $l_1 = Ml/(M + m)$. Отсюда период «параллельных» колебаний маятника будет равен

$$T_2 = 2\pi\sqrt{Ml/[(m + M)g]}.$$

Следовательно,

$$T_2/T_1 = \sqrt{M/(m + M)}.$$

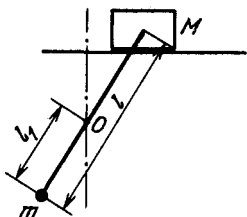


Рис. 188

1.96. Со стороны стержней на груз действует сила $F_1 = 2F_n \cos \alpha$, на пружину — $F_2 = 2F_n \sin \alpha$ (см. рис. 48). Согласно закону Гука, $F_2 = (1,5l - 2l \sin \alpha)k$, где k — жесткость пружины. В результате

$$F_1 = 1,5lk \operatorname{ctg} \alpha - 2lk \cos \alpha.$$

Чтобы найти период малых колебаний, нужно определить силу ΔF , действующую на груз при малом изменении высоты груза Δh относительно положения равновесия $h_0 = 2l \cos \alpha_0$. Получим

$$\Delta F = 1,5lk \Delta(\operatorname{ctg} \alpha) - 2lk \Delta(\cos \alpha),$$

где

$$\Delta(\operatorname{ctg} \alpha) = \left(\frac{d \operatorname{ctg} \alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = -\frac{\Delta\alpha}{\sin^2 \alpha_0}, \quad \Delta(\cos \alpha) = -\sin \alpha_0 \cdot \Delta\alpha.$$

Следовательно, поскольку $\Delta h = -2l \sin \alpha_0 \Delta\alpha$, то

$$\Delta F = -1,5k \frac{l \Delta\alpha}{\sin^2 \alpha_0} + 2kl \sin \alpha_0 \Delta\alpha = -5kl \Delta\alpha = -5k \Delta h,$$

так как $\sin \alpha_0 = 1/2$.

Период малых колебаний груза найдем по формуле $T = 2\pi\sqrt{m/(5k)}$, где m — масса груза, определяемая из условия равновесия:

$$1,5kl \operatorname{ctg} \alpha_0 - 2lk \cos \alpha_0 = mg,$$

$$m = (\sqrt{3}/2)(kl/g).$$

Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{3l/(10g)}.$$

1.97. Кинетическая энергия обруча в каждый момент времени складывается из кинетической энергии движения центра масс обруча и кинетической энергии вращения обруча вокруг центра масс. Так как скорость точки A обруча все время равна нулю, то обе части кинетической энергии равны (скорость центра масс равна линейной скорости вращения относительно центра масс). Поэтому полная кинетическая энергия обруча равна mv^2 (m — его масса, v — скорость его центра масс). Согласно закону сохранения энергии, $mv^2 = mg(r - h_A)$, где h_A — высота центра масс обруча над точкой A в каждый момент времени. Следовательно, скорость центра масс обруча равна $v = \sqrt{g(r - h_A)}$. В то же время скорость маятника B в момент, когда он находится на высоте h_A над осью вращения A , равна $v = \sqrt{2g(r - h_A)}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше. Таким образом, маятник достигнет положения равновесия в $\sqrt{2}$ раз быстрее, чем обруч, т. е. за время

$$t = \tau/\sqrt{2} \approx 0,35 \text{ с.}$$

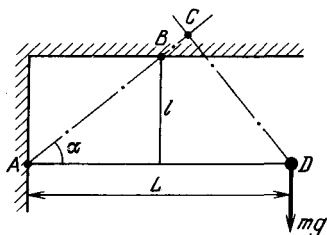


Рис. 189

1.98. Заметим, что малые колебания груза происходят относительно неподвижной оси AB (рис. 189). Пусть $DC \perp AB$. Тогда малые колебания груза эквива-

лентны колебаниям математического маятника той же массы, но с длиной подвеса

$$l' = L \sin \alpha = L \frac{l}{\sqrt{l^2 + (L/2)^2}}$$

и ускорением свободного падения

$$g' = g \cos \alpha = g \frac{L/2}{\sqrt{l^2 + (L/2)^2}},$$

где $L = AD$.

Таким образом, искомый период малых колебаний системы будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{l'/g'} = 2\pi \sqrt{2l/g}.$$

1.99. Для решения задачи достаточно заметить, что движение качелей есть вращение вокруг оси, проходящей через точки крепления веревок, т. е. система представляет собой «наклонный математический маятник» (рис. 190). Составляющая силы тяжести mg , направленная вдоль оси вращения, не влияет на колебания, а перпендикулярная составляющая $mg \sin \alpha$ является фактически возвращающей силой. В ре-

зультате, используя формулу для периода математического маятника, найдем

$$T = 2\pi \sqrt{h/(g \sin \alpha)},$$

где

$$h = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

поэтому период малых качаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{l_1 l_2 / (ag)}.$$

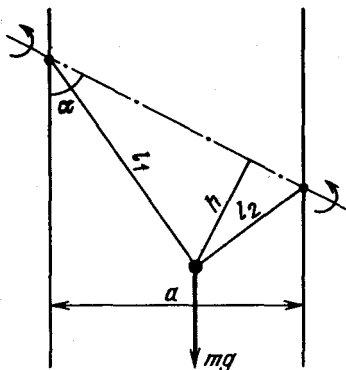


Рис. 190

1.100. Период математического маятника обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения:

$$T \sim 1/\sqrt{g}.$$

Пусть модуль ускорения лифта равен a . Тогда период маятника при движении лифта вверх с ускорением a будет пропорционален

$$T_{\text{в}} \sim 1/\sqrt{g + a},$$

при движении лифта вниз с ускорением a

$$T_{\text{н}} \sim 1/\sqrt{g - a}.$$

Ясно, что время, которое отсчитывают маятниковые часы при движении вверх с ускорением a , пропорционально отношению времени $t_{\text{в}}$ равноускоренного движения вверх к периоду $T_{\text{в}}$:

$$t'_{\text{в}} = t_{\text{в}}/T_{\text{в}} \sim t_{\text{в}}\sqrt{g + a}.$$

Время, которое отсчитывают маятниковые часы при движении вниз с ускорением a , равно

$$t'_{\text{н}} = t_{\text{н}}/T_{\text{н}} \sim t_{\text{н}}\sqrt{g - a}.$$

По условию задачи времена равноускоренного движения вниз и вверх равны: $t_{\text{н}} = t_{\text{в}} = t_1/2$, где t_1 — полное время движения лифта с ускорением. В итоге время, которое отсчитывают маятниковые часы за рабочий день, равно

$$t' \approx (t_1/2) [\sqrt{(g + a)/g} + \sqrt{(g - a)/g}] + t_0.$$

Здесь t_0 — время движения лифта без ускорения. Неподвижные маятниковые часы показали бы время

$$t \approx t_1 + t_0.$$

Легко убедиться, что выполняется неравенство $\sqrt{g+a} + \sqrt{g-a} < 2\sqrt{g}$. Действительно,

$$\left(\frac{\sqrt{g+a} + \sqrt{g-a}}{2\sqrt{g}} \right)^2 = \frac{g + \sqrt{g^2 - a^2}}{2g} < 1.$$

Отсюда вытекает, что маятниковые часы в лифте в среднем идут медленнее: $t' < t$, и, следовательно, лифтер переработает.

1.101. Как следует из закона Паскаля, в сообщающихся сосудах давления газа на одинаковой высоте совпадают. Поскольку трубы манометра сообщаются с атмосферой, давление внутри них будет меняться с высотой по тому же закону, что и давление атмосферного воздуха. Это означает, что давление воздуха на жидкость, находящуюся в различных коленах манометра, одинаково и равно давлению атмосферного воздуха на той высоте, где находится манометр. Таким образом, показания манометра нулевые, поскольку нет разности давлений.

1.102. Выберем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии совпадающим с дном внешней трубки. Тогда в начальный момент потенциальная энергия ртути равна

$$W_n = 2Sl\rho_{\text{рт}}g(l/2) = \rho_{\text{рт}}gSl^2.$$

Потенциальная энергия ртути в конечный момент (момент отрыва внутренней трубки, рис. 191) равна (по условию $l > h$)

$$W_k = 2Sx\rho_{\text{рт}}g(x/2) + Sh\rho_{\text{рт}}g(x + h/2),$$

где x — уровень ртути во внешней трубке в момент отрыва; этот уровень находится из условия постоянства объема ртути:

$$2Sx + Sh = 2Sl, \quad x = l - h/2.$$

Разность потенциальных энергий равна сумме искомой работы A внешних сил и работы силы атмосферного давления, действовавшего на поверхность ртути во внешней трубке и на верхний (запаянный) конец внутренней трубки. Смещение уровня ртути во внешней трубке равно $l - x$, соответствующая работа силы атмосферного давления равна $p_0S(l - x) = \rho_{\text{рт}}gSh(l - x)$.

Смещение запаянного конца внутренней трубки равно $l - (l + x)$, соответствующая работа равна $-p_0Sx = -\rho_{\text{рт}}gShx$.

В итоге искомая работа внешних сил равна

$$A = W_k - W_n - \rho_{\text{рт}}gSh(l - 2x) = \rho_{\text{рт}}gSh(l - 3h/4).$$

1.103. Давление у дна «вертикального» цилиндра равно $p = p_0 + \rho_b gh$, где p_0 — атмосферное давление, ρ_b — плотность воды, g — ускорение свободного падения. По закону Паскаля то же давление действует на нижний край поршня, находящегося в «горизонтальном» цилиндре. Вообще давление воды на часть поршня, отстоящую от нижнего края на расстояние x по вертикали, равно $p - \rho_g x$ (рис. 192).

Рассмотрим части поршня, представляющие собой узкие (шириной Δx) горизонтальные полоски, отстоящие на равные расстояния a от его центров. Сила давления воды на верхнюю полоску равна

$$[p - \rho_{\text{в}} g (r + a)] \Delta S,$$

а сила давления на нижнюю

$$[p - \rho_{\text{в}} g (r - a)] \Delta S,$$

где ΔS — площадь полоски. Сумма этих сил пропорциональна площади полоски, причем коэффициент пропорциональности, равный $2(p - \rho_{\text{в}} g r)$, не зависит от a . Отсюда следует, что полная сила давления воды на поршень равна

$$(p - \rho_{\text{в}} g r) \pi r^2 = [p_0 + \rho_{\text{в}} g (h - r)] \pi r^2.$$

Чтобы поршень находился в равновесии, необходимо равенство этой силы силе атмосферного давления, действующей на поршень слева и равной $p_0 \pi r^2$. Отсюда

$$h = r,$$

т. е. поршень находится в равновесии, если уровень воды в вертикальном цилиндре равен радиусу горизонтального. Из рассмотрения видно, что равновесие устойчивое.

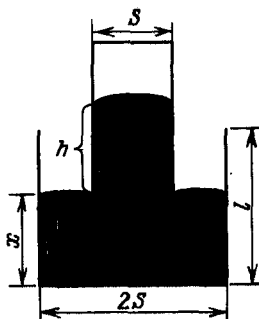


Рис. 191

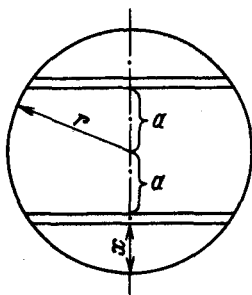


Рис. 192

1.104. Условием полного погружения тела является

$$M \geq \rho_{\text{в}} V,$$

где M — масса тела, V — его объем. В нашем случае получим

$$M = m_{\text{пр}} + m_{\text{ал}}, \quad V = m_{\text{пр}} / \rho_{\text{пр}} + m_{\text{ал}} / \rho_{\text{ал}}.$$

Отсюда следует, что минимальная масса проволоки равна

$$m_{\text{ал}} = \frac{\rho_{\text{ал}} (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{пр}})}{(\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}}) \rho_{\text{пр}}} m_{\text{пр}} \approx 1,6 m_{\text{пр}}.$$

1.105. Ясно, что в положении равновесия шар находится на некоторой высоте h над дном водоема, а цепь частично лежит на дне, частично висит в воде между дном и шаром, причем висящий участок цепи вертикален (рис. 193). Данные задачи таковы, что можно заранее утверждать, что шар целиком находится под водой (в противном случае почти вся цепь оказалась бы висящей, что невозможно ввиду большой плотности железа). Высота h в таком случае получится из условия

равенства суммарной силы тяжести шара и висящего участка цепи

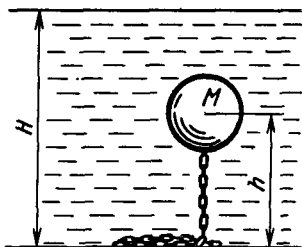


Рис. 193

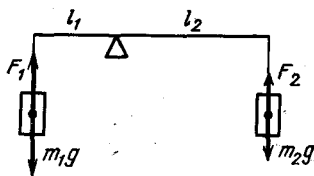


Рис. 194

и действующей на них выталкивающей силы:

$$\left(M + m \frac{h - D/2}{l}\right)g = \rho_v \left(V + \frac{m}{\rho_{\text{ж}}} \frac{h - D/2}{l}\right)g.$$

Отсюда

$$h = \frac{D}{2} + \frac{\rho_v V - M}{m(1 - \rho_v/\rho_{\text{ж}})}l = 1,6 \text{ м.}$$

Глубина, на которой плавает шар, равна $H - h = 1,4$ м.

1.106. Условием равновесия рычага является равенство моментов сил (рис. 194). В воздухе этими силами являются силы тяжести тел m_1g и m_2g . Поскольку они различны, различны и соответствующие плечи l_1 , l_2 , так как

$$m_1gl_1 = m_2gl_2.$$

При погружении рычага в воду на тела дополнительно к силе тяжести начинает действовать выталкивающая сила со стороны воды, которая пропорциональна объему тела. В силу условий задачи $F_1 = F_2$. В таком случае

$$(m_1g - F_1)l_1 \neq (m_2g - F_2)l_2.$$

Поэтому равновесие рычага нарушится.

1.107. Объем погруженной в воду части каждой коробочки меняется на одну и ту же величину $\Delta V = m/\rho_v$, где m — масса предмета, ρ_v — плотность воды. Поскольку изменение уровня воды в каждом из сосудов определяется только величиной ΔV и сосуды одинаковы, уровни воды в них изменятся на одну и ту же величину.

1.108. Пусть объем стального шарика равен V , а объем его части, погруженной в ртуть, равен V_0 до наливания воды и V_1 после того, как вода полностью закроет шарик. Величина V_0 находится из условия

$$\rho_{\text{ст}} V = \rho_{\text{рт}} V_0,$$

где $\rho_{\text{ст}}$ и $\rho_{\text{рт}}$ — плотности стали и ртути. Поскольку давление воды передается через ртуть на нижнюю часть шарика, выталкивающая сила, действующая на него со стороны воды, равна $\rho_{\text{в}}(V - V_1)g$, где $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды, а выталкивающая сила со стороны ртути — $\rho_{\text{рт}} V_1 g$. Условие плавания шарика теперь примет вид

$$\rho_{\text{ст}} V = \rho_{\text{рт}} V_1 + \rho_{\text{в}}(V - V_1),$$

откуда

$$V_1 = \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}} V.$$

Таким образом, отношение объемов погруженной в ртуть части шарика в первом и втором случаях равно

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{рт}}} \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}} = \frac{1 - \rho_{\text{в}}/\rho_{\text{рт}}}{1 - \rho_{\text{в}}/\rho_{\text{ст}}}.$$

Поскольку $\rho_{\text{рт}} > \rho_{\text{ст}}$, то $V_0 > V_1$, т. е. объем погруженной в ртуть части шарика при наливании воды уменьшится.

1.109. Известно, что при таянии льда, плавающего в сосуде с водой, уровень воды не меняется. В нашем случае будем считать уровень воды в начальный момент (отсчитываемый от дна сосуда) равным h_0 , уровень поверхности масла h (рис. 195). Если бы в сосуде находилась только вода, то ее уровень h_1 при условии неизменного положения куска льда относительно сосуда подчинялся бы условиям

$$h_0 < h_1 < h.$$

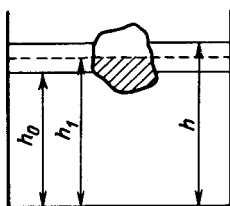


Рис. 195

При таянии вода, образующаяся из льда, имеет объем, равный объему заштрихованной области на рисунке. Поскольку часть этого объема выходит за пределы поверхности воды ($h_1 > h_0$), то при таянии льда уровень воды повышается. С другой стороны, поскольку $h_1 < h$, масло заполняет образующуюся «лунку», т. е. общий уровень жидкости в сосуде понижается.

1.110. Пусть x — длина части палочки, свешивающейся внутрь стакана, а y — длина ее наружной части. Тогда длина палочки равна $x + y$. Центр палочки находится на расстоянии $(x + y)/2$ от ее концов и на расстоянии $(y - x)/2$ от наружного края. Условия равновесия получим из равенства нулю суммы моментов сил относительно края стакана:

$$(F_{\text{ш}} - F_{\text{А}})x = Mg(y - x)/2,$$

где $F_{\text{ш}} = m_{\text{ш}}g = \rho_{\text{ал}}gV$ — сила тяжести шарика, а $F_A = \rho_{\text{в}}gV/2$ — выталкивающая сила (сила Архимеда), причем $V = (4/3)\pi r^3$ — объем шарика.

Искомое отношение равно

$$y/x = 1 + 2(F_{\text{ш}} - F_A)/(Mg) \approx 1,5.$$

1.111. При свободном падении сила давления атмосферного воздуха больше не компенсируется весом столба ртути независимо от высоты столба. В результате ртуть заполнит трубку барометра целиком, т. е. до деления 1050 мм.

1.112. В сосуде с жидкостью, движущемся в горизонтальном направлении с ускорением a , поверхность жидкости становится наклонной плоскостью. Угол наклона φ определяется теми условиями, что сумма силы давления F и силы тяжести mg , действующих на элемент поверхности, равна ma и сила давления нормальна к поверхности. Отсюда

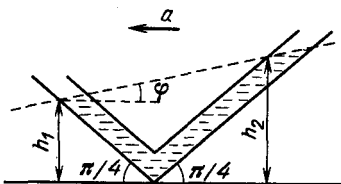


Рис. 196

$$\operatorname{tg} \varphi = a/g.$$

В силу закона сообщающихся сосудов поверхности жидкости в коленях манометра принадлежат упомянутой выше наклонной плоскости (рис. 196). Из геометрических соображений очевидно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1);$$

отсюда

$$a = g(h_2 - h_1)/(h_2 + h_1).$$

1.113. На слой воздуха, находящийся на расстоянии x от начала салона и имеющий толщину Δx , действует сила давления, равная

$$[p(x + \Delta x) - p(x)] S,$$

где S — площадь поперечного сечения салона. Поскольку относительно салона воздух покоится, уравнение движения рассматриваемой массы воздуха имеет вид

$$\rho S \Delta x a = [p(x + \Delta x) - p(x)] S.$$

Устремляя Δx к нулю, получаем

$$dp/dx = \rho a;$$

отсюда

$$p(x) = p_1 + \rho ax.$$

Поскольку среднее давление в салоне остается неизменным и равным атмосферному давлению p_0 , постоянная p_1 находится из условия

$$p_0 = p_1 + \rho a l / 2,$$

где l — длина салона. Таким образом, в середине салона давление равно атмосферному, а в начале и в конце салона давление соответственно меньше и больше атмосферного на величину

$$\Delta p = \rho a l / 2 \approx 0,03 \text{ Па}.$$

1.114. Рассмотрим условия равновесия относительно трубки массы воды, находящейся между поперечными сечениями, отстоящими на x и $x + \Delta x$ от оси вращения. Эта часть жидкости, масса которой равна $\rho_b S \Delta x$, равномерно вращается с угловой скоростью ω под действием сил давления, действующих на ее боковые поверхности. Обозначая давление в сечении x как $p(x)$, находим

$$[p(x + \Delta x) - p(x)] S = \rho S \Delta x \omega^2 (x + \Delta x / 2).$$

Устремляя Δx к нулю, получаем уравнение

$$dp/dx = \rho_b \omega^2 x;$$

отсюда

$$p(x) = \rho_b \omega^2 x^2 / 2 + p_0.$$

Используя данные задачи

$$p_1 = p(r_1) = \rho_b \omega^2 r_1^2 / 2 + p_0,$$

$$p_2 = p(r_2) = \rho_b \omega^2 r_2^2 / 2 + p_0,$$

находим угловую скорость вращения трубки:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\rho_b} \frac{p_2 - p_1}{r_2^2 - r_1^2}}.$$

1.115. Пусть показатель степени α таков, что тело, имеющее начальную скорость v , проходит в среде конечное расстояние $s(v)$. Поскольку скорость тела при его движении в среде монотонно уменьшается, ясно, что $s(v) > s(v_1)$ при $v > v_1$. Очевидно также, что $s(v)$ стремится к нулю при $v \rightarrow 0$. Условием остановки тела является равенство работы A силы сопротивления начальной кинетической энергии тела:

$$mv^2/2 = A. \quad (1)$$

Поскольку сила сопротивления монотонно убывает вместе со скоростью тела в процессе его движения, то

$$A \leq \mu v^\alpha s(v). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$s(v) \geq \frac{m}{2\mu} v^{2-\alpha},$$

откуда следует, что при $\alpha \geq 2$ нарушается условие $\lim_{v \rightarrow 0} s(v) = 0$. Таким образом, при $\alpha \geq 2$ тело не может затормозиться на конечном участке пути.

1.116. Сила притяжения тела массой m к Марсу на его поверхности в соответствии с законом всемирного тяготения равна $G \frac{M_M m}{R_M^2}$, где M_M — масса Марса, а R_M — его радиус. Это значит, что ускорение свободного падения на поверхности Марса равно $g_M = GM_M/R_M^2$. Если масса марсианской атмосферы равна m_M , то она притягивается к поверхности с силой $m_M g_M$, которая и представляет собой силу давления атмосферы, т. е. давление на поверхности Марса равно $p_M = m_M g_M / (4\pi R_M^2)$. Аналогично для соответствующих параметров на Земле $p_3 = m_3 g_3 / (4\pi R_3^2)$. Отношение масс атмосфер Марса и Земли равно

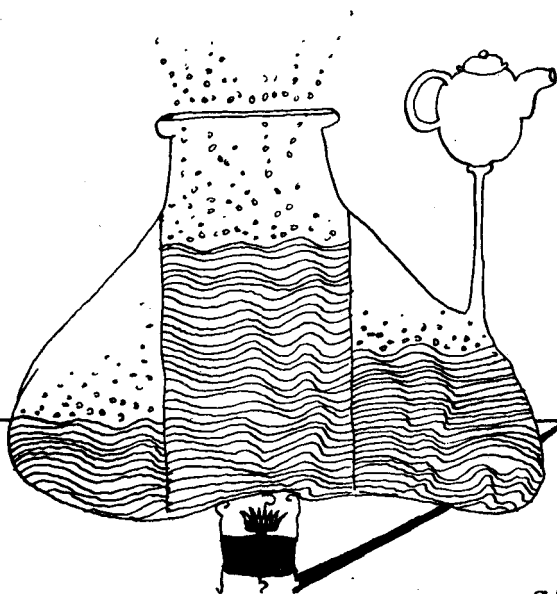
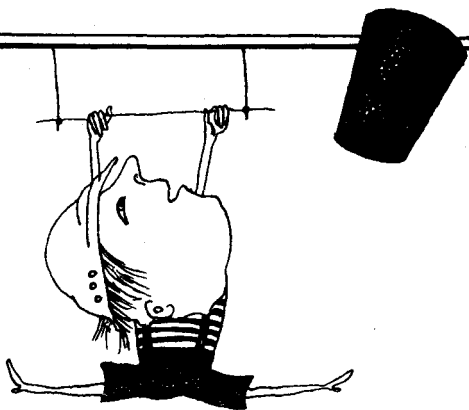
$$\frac{m_M}{m_3} = \frac{p_M \cdot 4\pi R_M^2 g_3}{p_3 \cdot 4\pi R_3^2 g_M};$$

учитывая, что $M_M = (4/3)\pi R_M^3 \rho_M$ (и аналогично для Земли), получаем, подставляя данные из условия,

$$\frac{m_M}{m_3} = \frac{p_M}{p_3} \frac{R_M}{R_3} \frac{\rho_3}{\rho_M} \approx 3,4 \cdot 10^{-3}.$$

Отметим, что при решении задачи мы фактически считали атмосферу расположенной вблизи поверхности планеты. Это действительно так: высота атмосферы много меньше радиуса планет (например, на Земле на высоте 10 км уже нечем дышать, а радиус Земли равен $R_3 \approx 6400$ км!).

2. ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА



2.1. Так как вертикальные цилиндры представляют собой сообщающиеся сосуды, то после увеличения массы 1-го поршня равновесие наступит лишь после того, как он «ляжет» на дно своего цилиндра, а весь газ перейдет во 2-й цилиндр. Поскольку давление газа и его температура остаются неизменными, то и полный объем, занимаемый газом, должен остаться неизменным. Отсюда заключаем, что $S_1 h_0 + S_2 h_0 = S_2 h$, где S_1 и S_2 — поперечные сечения поршней 1-го и 2-го цилиндров, а h — высота, на которой будет находиться 2-й поршень, т. е. как раз искомая разность высот (ведь 1-й поршень лежит на дне). Вначале давления, создаваемые поршнями, были одинаковы; таким образом,

$$m_1 g / S_1 = m_2 g / S_2,$$

$$S_1 / S_2 = m_1 / m_2,$$

а, значит,

$$h = h_0 (m_1 / m_2 + 1) = 0,3 \text{ м.}$$

2.2. Если температура стенок сосуда T_c совпадает с температурой газа T , то молекула, ударяясь о стенку, меняет нормальную компоненту импульса p_x на $-p_x$. Значит, суммарное изменение импульса равно $2p_x$. Когда температура стенок $T_c > T$, газ нагревается. Это означает, что молекулы газа отскакивают от стенки с большей скоростью, чем налетают, а следовательно, и с большим импульсом. В результате изменение импульса будет больше, чем $2p_x$ (рис. 197).

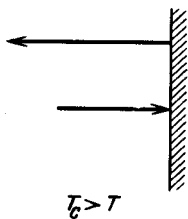


Рис. 197

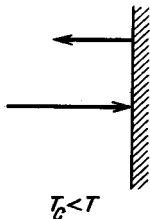


Рис. 198

Если же $T_c < T$, то газ охлаждается, т. е. молекулы газа отскакивают от стенки с меньшим импульсом, чем налетают на нее. Ясно, что изменение импульса в этом случае будет меньше, чем $2p_x$ (рис. 198). Так как в соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса пропорционально средней силе, то давление газа на стенки больше, когда стенки теплее газа ($T_c > T$).

2.3. Работа A газа за цикл определяется площадью на pV -диаграмме, ограниченной циклом, т. е. площадью трапеции (см. рис. 57):

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2 + V_4 - V_1)/2.$$

Нетрудно выразить все величины через давление и объем в точке 1: p_1 и V_1 . Действительно, из закона Гей-Люссака следует, что $V_3 = V_2 T_3 / T_2 = V_1 T_3 / T_2$ и $V_4 = V_1 T_4 / T_1 = V_1 T_2 / T_1$, а из закона Шарля — $p_2 = p_1 T_2 / T_1$. Подставляя эти значения в выражение для

работы, находим

$$A = p_1 V_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2 \right).$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона для n молей идеального газа позволяет написать $p_1 V_1 = nRT_1$, и в результате окончательно получим

$$A = nR(T_2 - T_1)(T_2/T_1 + T_3/T_2 - 2).$$

2.4. Из рис. 58 видно, что на участках $1-2$ и $3-4$ реализуется прямая пропорциональная зависимость давления от температуры, т. е., как следует из закона Менделеева – Клапейрона, объем газа при этом не меняется, а значит, и работы газ не совершает. Необходимо, таким образом, найти работу газа лишь при изобарических процессах $2-3$ и $4-1$. На участке $2-3$ совершенная работа будет равна $A_{23} = p_2(V_3 - V_2)$, а на участке $4-1$ $A_{41} = p_1(V_1 - V_4)$. Полная работа A газа за цикл равна

$$A = p_2(V_3 - V_2) + p_1(V_1 - V_4).$$

Уравнение Менделеева – Клапейрона для 3 молей идеального газа записывается в виде $pV = 3RT$, и, следовательно,

$$p_1 V_1 = 3RT_1, \quad p_1 V_4 = 3RT_4, \quad p_2 V_2 = 3RT_2, \quad p_2 V_3 = p_3 V_3 = 3RT_3.$$

Подставляя эти значения в выражение для работы, окончательно получаем

$$A = 3R(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) = 2 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 20 \text{ кДж}.$$

2.5. Выполнение цикла $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов $1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ и $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ (см. рис. 59). Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на pV -диаграмме. Однако если в первом цикле она положительна, то во втором отрицательна (работа совершается над газом). Нетрудно найти работу A_1 , совершенную в первом цикле:

$$A_1 = (p_0 - p_1)(V_2 - V_1)/2.$$

Что касается цикла $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$, то соответствующий ему на pV -диаграмме треугольник подобен треугольнику, отвечающему первому циклу. В результате работа A_2 во втором цикле будет

$$A_2 = -A_1 (p_2 - p_0)^2 / (p_0 - p_1)^2.$$

(Площади подобных треугольников относятся, как квадраты длин соответственных элементов, в данном случае – высот.) Полная работа A за цикл $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ будет, таким образом, равна

$$A = A_1 [1 - (p_2 - p_0)^2 / (p_0 - p_1)^2] \approx 750 \text{ Дж}.$$

2.6. Согласно 1-му закону термодинамики, при переходе газа из состояния 1 (p_0, V_0) в состояние 2 (p_1, V_1) (рис. 199) количество теплоты ΔQ_1 , полученное газом, равно

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + A_1,$$

где ΔU_1 — изменение его внутренней энергии, а A_1 — работа, совершенная газом, причем

$$A_1 = (p_0 + p_1)(V_1 - V_0)/2.$$

При переходе газа из состояния 1 в состояние 3 (p_2, V_2) (точки 2 и 3 лежат на одной изотерме) выполняются соотношения

$$\Delta Q_2 = \Delta U_2 + A_2,$$

$$A_2 = (p_0 + p_2)(V_2 - V_0)/2.$$

Рис. 199

Поскольку конечная температура газа в состоянии 2 и в состоянии 3 одна и та же, то $\Delta U_1 = \Delta U_2$. Чтобы выяснить, в каком из процессов газу сообщается большее количество теплоты, надо сравнить работы A_1 и A_2 . Сделаем это:

$$A_1 - A_2 = (p_0 + p_1)(V_1 - V_0)/2 - (p_0 + p_2)(V_2 - V_0)/2 =$$

$$= [(p_0 V_1 - p_0 V_2) + (p_2 V_0 - p_1 V_0)]/2 < 0,$$

так как $p_0 V_1 < p_0 V_2$, $p_2 V_0 < p_1 V_0$. Следовательно, $A_2 > A_1$ и $\Delta Q_2 > \Delta Q_1$, т. е. в процессе $1 \rightarrow 3$ газу сообщается большее количество теплоты.

2.7. Поскольку водород диффундирует через все перегородки, то он равномерно распределится по всему сосуду, и давление водорода во всех трех частях сосуда будет равно

$$p_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} \frac{RT}{V}$$

(ведь если газ проходит через перегородку, то в равновесии его давление по обе стороны перегородки должно быть одинаковым).

Азот может диффундировать лишь через правую перегородку, поэтому он заполнит среднюю и правую части сосуда (см. рис. 61) общим объемом $(2/3)V$; его давление будет

$$p_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} \frac{3RT}{2V}.$$

Кислород не диффундирует через перегородки, и давление кислорода в средней части сосуда равно

$$p_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}} \frac{3RT}{V}.$$

Согласно закону Дальтона, давление во всех трех частях сосуда будет равно сумме парциальных давлений находящихся там газов, т. е.

$$p_1 = p_{\text{H}_2} \approx 1,3 \cdot 10^9 \text{ Па} = 1,3 \text{ ГПа},$$

$$p_2 = p_{\text{H}_2} + p_{\text{O}_2} + p_{\text{N}_2} \approx 4,5 \cdot 10^9 \text{ Па} = 4,5 \text{ ГПа},$$

$$p_3 = p_{\text{H}_2} + p_{\text{N}_2} \approx 2,0 \cdot 10^9 \text{ Па} = 2,0 \text{ ГПа}.$$

2.8*. Определим сначала скорость спускаемого аппарата. Для этого заметим, что изменение давления Δp с изменением высоты Δh связано соотношением

$$\Delta p = -\rho g \Delta h, \quad (1)$$

где ρ — плотность газа. Из закона Менделеева — Клапейрона следует, что $p = (\rho/\mu) RT$ (здесь T — температура газа именно в той точке, вблизи которой мы интересуемся изменением давления). Учитывая, что $\Delta h = -v \Delta t$, где v — скорость спуска аппарата, Δt — время спуска, можно записать выражение (1) в виде

$$\frac{\Delta p}{p} = g \frac{\mu v \Delta t}{RT}. \quad (2)$$

Зная отношение $\Delta p/\Delta t$, т. е. тангенс угла наклона касательной в конечной точке A графика, с помощью соотношения (2) найдем скорость v . (Отметим, что, поскольку в левой части (2) стоит отношение $\Delta p/p$, нам безразлично, каков масштаб графика по оси ординат.) Находя из графика $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ и подставляя $\mu = 44$ г/моль для CO_2 , получим, что скорость спуска аппарата космического корабля равна

$$v = \frac{RT}{g\mu} \frac{\Delta p}{p \Delta t} = \frac{8,3 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \cdot 7 \cdot 10^2 \text{ К}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \cdot 1150 \text{ с}} \approx 11,5 \text{ м/с}.$$

Перейдем теперь к решению второй части задачи. Учитывая, что скорость аппарата равна $v = 11,5$ м/с, на высоте $h = 15$ км над поверхностью планеты он был за 1300 с до посадки, т. е. этому соответствует время $t = 2350$ с. С помощью соотношения $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ в этой точке графика из выражения (2) найдем искомую температуру T_h :

$$T_h = \frac{g\mu v}{R} \left(\frac{p \Delta t}{\Delta p} \right)_t \approx 430 \text{ К}.$$

2.9. Так как поршень, когда на него положили груз, переместился на расстояние h , то это означает, что объем газа уменьшился на величину hS и стал равным $V - hS$. Давление газа под поршнем равно атмосферному давлению p_0 плюс давление Mg/S , создаваемое грузом, т. е. $p_0 + Mg/S$. В результате можно записать уравнения Менделеева — Клапейрона для газа до того, как на поршень положили груз, и после

этого:

$$p_0 V = nRT_H, \quad (1)$$

$$(p_0 + Mg/S)(V - hS) = nRT_K. \quad (2)$$

Здесь T_H и T_K — начальная и конечная температуры газа.

Поскольку по условию задачи газ теплоизолирован, то, как следует из 1-го закона термодинамики, вся совершенная над ним работа A пойдет на изменение внутренней энергии газа, т. е. $A = (3/2)nR(T_K - T_H)$ (внутренняя энергия 1 моля идеального газа $U = (3/2)RT$). Нетрудно сообразить, что работа равна $A = Mgh$, значит,

$$Mgh = (3/2) nR(T_K - T_H). \quad (3)$$

Вычитая почленно из (2) уравнение (1) и используя для $T_K - T_H$ выражение (3), получим уравнение для определения h :

$$MgV/S - Mgh - p_0 hS = (2/3) Mgh. \quad (4)$$

Отсюда найдём, что

$$h = \frac{MgV}{S(p_0 S + Mg/3)},$$

и, подставляя h в уравнение (2), определим конечную температуру газа:

$$T_K = \frac{(p_0 S + Mg)(3p_0 S - 2Mg)V}{(3p_0 S + Mg)SnR}.$$

2.10. В соответствии с 1-м законом термодинамики подведенное к газу количество теплоты Q идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы A :

$$Q = \Delta U + A.$$

Внутреннюю энергию 1 моля идеального газа U можно записать в виде $U = c_V T = (3/2) RT$, т. е. $\Delta U = (3/2) R \Delta T$. Работа, совершаемая газом при постоянном давлении p , равна $A = p \Delta V = pS \Delta x$, где Δx — смещение поршня. Давление газа равно

$$p = p_0 + Mg/S,$$

т. е. представляет собой сумму атмосферного давления и давления, создаваемого поршнем. Наконец, из закона Менделеева — Клапейрона $pV = RT$ можно найти связь между изменением объема ΔV и изменением температуры ΔT при постоянном давлении:

$$p \Delta V = R \Delta T.$$

Подставляя выражения для ΔU и A в 1-й закон термодинамики и учитывая связь между ΔV и ΔT , получим

$$Q = p \Delta V + (3/2) p \Delta V = (5/2) pS \Delta x. \quad (1)$$

Поскольку за единицу времени нагреватель выделяет количество теплоты q , то $Q = q \Delta t$, где Δt — соответствующий промежуток времени. Скорость движения поршня равна $v = \Delta x / \Delta t$, и из выражения (1) находим

$$v = \frac{2}{5} \frac{q}{p_0 S + Mg}.$$

2.11*. При очень сильном сжатии газа начинает сказываться отталкивание между его молекулами — необходимо учитывать конечность их размеров. Это означает, что при прочих равных условиях давление реального газа превосходит давление идеального газа тем больше, чем сильнее сжат газ. В результате, если при постоянной температуре произведение pV идеального газа постоянно, то для реальных газов оно будет расти по мере уменьшения объема газа.

2.12*. Рассмотрим промежуточное положение поршня, когда он сместился на величину y от своего первоначального положения. Пусть при этом давление газа в правой части сосуда равно p_2 , а в левой p_1 . Поскольку поршень при этом находится в равновесии, то сумма сил, действующих на поршень, равна нулю:

$$(p_2 - p_1)S - 2ky = 0, \quad (1)$$

где S — площадь поршня.

При последующем небольшом перемещении поршня Δy полная работа газа ΔA равна $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$, где ΔA_2 — работа газа правой части, ΔA_1 — работа газа левой части, причем

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = p_2 \Delta y S - p_1 \Delta y S = (p_2 - p_1) \Delta y S = 2ky \Delta y. \quad (2)$$

Таким образом, к моменту смещения поршня на величину $x = l/2$ полная работа газа будет равна сумме потенциальных энергий, запасенных в пружинах:

$$A = 2 \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2. \quad (3)$$

Если к газу в правой части подвели количество теплоты Q , а газ в левой части передал количество теплоты Q' термостату, то полное сообщенное системе количество теплоты будет $Q - Q'$, и можно написать (1-й закон термодинамики)

$$Q - Q' = 2 \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \Delta U, \quad (4)$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа. Поскольку поршень не теплопроводящий, то температура газа слева не меняется и все изменение внутренней энергии газа ΔU обусловлено нагревом газа справа на ΔT , причем для n молей идеального газа $\Delta U = n(3/2) R \Delta T$.

Повышение температуры ΔT найдем из условия равновесия в конце процесса.

Давление газа p в правой части сосуда в соответствии с законом Менделеева — Клапейрона равно $p = nR(T + \Delta T)/[S(l + l/2)]$, с другой стороны, оно должно быть равно сумме давления газа слева $p' = nRT/[S(l - l/2)]$ и давления, создаваемого пружинами, $p'' = 2kl/(2S)$, т. е.

$$2nR(T + \Delta T)/(3Sl) = 2nRT/(Sl) + kl/S.$$

Отсюда находим, что $\Delta T = 2T + 3kl^2/(2nR)$, и окончательно с помощью (4) получаем

$$Q' = Q - 3nRT - (5/2)kl^2.$$

2.13. Пусть T_1 — начальная температура газа под поршнем, T_2 — температура газа после того, как системе сообщено количество теплоты ΔQ . Поскольку трение отсутствует и сосуд теплоизолирован, вся теплота ΔQ идет на изменение ΔW внутренней энергии системы, т. е.

$$\Delta Q = \Delta W.$$

Изменение внутренней энергии системы складывается из изменения внутренней энергии газа и изменения потенциальной энергии сжатой пружины (так как теплоемкостью сосуда, поршня и пружины пренебрегаем).

Внутренняя энергия 1 моля идеального одноатомного газа при нагревании от температуры T_1 до температуры T_2 увеличивается на

$$\Delta W_1 = (3/2)R(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Потенциальная энергия сжатой пружины изменяется на величину

$$\Delta W_2 = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2), \quad (2)$$

где k — жесткость пружины, а x_1 и x_2 — значения абсолютного смещения левого конца (деформации) пружины при температурах газа T_1 и T_2 соответственно. Найдем связь между параметрами газа под поршнем и деформацией пружины.

Из условия равновесия поршня следует, что

$$p = F/S = kx/S, \quad x = pS/k, \quad (3)$$

где p — давление газа, S — площадь поршня. Согласно закону Менделеева — Клапейрона, для 1 моля идеального газа $pV = RT$. При деформации x пружины объем газа под поршнем равен $V = xS$ и $p = RT/(xS)$. Подставляя это выражение для p в (3), находим

$$x^2 = RT/k. \quad (4)$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии сжатой пружины при нагревании системы равно

$$\Delta W_2 = (R/2)(T_2 - T_1).$$

Полное изменение внутренней энергии системы при нагревании от температуры T_1 до температуры T_2 равно

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = 2R(T_2 - T_1),$$

и теплоемкость системы составит

$$C = \Delta Q / \Delta T = \Delta U / (T_2 - T_1) = 2R.$$

2.14. Проанализируем работу тепловой машины, использующей цикл, который состоит из двух изотерм и двух изохор (рис. 200). Пусть температура холодильника T_1 (соответствующая нижней изотерме), а нагревателя T_2 (соответствующая верхней изотерме). На изохорическом участке 1—2 объем газа не меняется, т. е. работы он не совершает, однако его температура увеличивается от T_1 до T_2 , и, значит, к газу подводится некоторое количество теплоты Q_1 . На изотермическом участке 2—3 внутренняя энергия газа постоянна и вся подводимая теплота Q_2 идет на совершение работы: $Q_2 = A_2$.

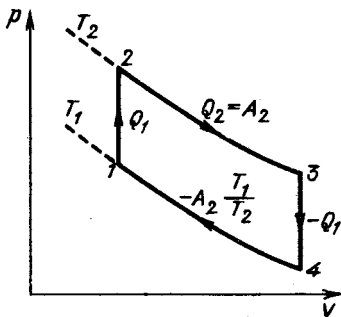


Рис. 200

На изохорическом участке 3—4 температура газа возвращается к своему начальному значению T_1 , т. е. от газа отбирается количество теплоты Q_1 . При изотермическом процессе 4—1 совершаемая газом работа отрицательна и, следовательно, от него также отбирается теплота. Таким образом, полная теплота, подведенная за один цикл к газу, составляет $Q_1 + A_2$. Работа газа за цикл, как видно из рис. 200, складывается из положительной работы A_2 на участке 2—3 и отрицательной A_4 на участке 4—1.

Сравним давления в точках, соответствующих одинаковым объемам, на участках 4—1 и 2—3. Из закона Шарля следует, что отношение этих давлений равно T_1/T_2 , а, значит, работа газа $A_4 = -(T_1/T_2)A_2$. Полная работа за цикл будет

$$A = A_2 + A_4 = (1 - T_1/T_2)A_2,$$

а к. п. д.

$$\eta = \frac{A}{Q_1 + A_2} = \frac{1 - T_1/T_2}{1 + Q_1/A_2} < 1 - T_1/T_2,$$

т. е. к. п. д. тепловой машины, использующей цикл, состоящий из двух изотерм и двух изохор, меньше к. п. д. $1 - T_1/T_2$ идеальной тепловой машины Карно.

2.15*. Найдем вначале ускорение свободного падения $g_{\text{п}}$ на поверхности планеты. С одной стороны, известно, что сила притяжения тела массы m к планете равна $mg_{\text{п}}$, с другой стороны, из закона всемирного тяготения следует, что она равна GmM/r^2 , где G — гравитационная постоянная. Отсюда получаем $g_{\text{п}} = GM/r^2$. Давление p , создаваемое атмосферным столбом высоты h на поверхности планеты, будет равно

$$p = \rho g_{\text{п}} h, \quad (1)$$

где ρ — плотность атмосферы. Здесь при определении давления атмосферного столба ускорение свободного падения считаем не зависящим от высоты. Это предположение оправданно, поскольку по условию задачи высота атмосферы намного меньше радиуса планеты r ($h \ll r$).

Написав уравнение Менделеева — Клапейрона для массы M газа, занимающей объем V , в виде $pV = (M/\mu)RT$ и учитывая, что $\rho = M/V$, находим

$$\rho = p\mu/(RT).$$

Подставляя это выражение для ρ в (1) и сокращая на p , определяем температуру T атмосферы на поверхности планеты:

$$T = \mu g_{\text{п}} h / R = \mu GMh / (Rr^2).$$

2.16. Здесь необходимо учитывать, что передаваемая в единицу времени теплота пропорциональна разности температур. Введем обозначения: T_{y1} , T_{y2} и $T_{к1}$, $T_{к2}$ — температуры на улице и в комнате в первом и втором случаях. Тепловая мощность, рассеиваемая батареей в комнате, равна $k_1(T - T_{к1})$, где k_1 — некоторый коэффициент. Тепловая мощность, рассеиваемая из комнаты на улицу, будет $k_2(T_{к1} - T_{y1})$; здесь k_2 — некоторый другой коэффициент. В условиях теплового равновесия рассеиваемая батареей мощность равна мощности, рассеиваемой из комнаты на улицу. В результате можно написать

$$k_1(T - T_{к1}) = k_2(T_{к1} - T_{y1}),$$

и аналогично во втором случае

$$k_1(T - T_{к2}) = k_2(T_{к2} - T_{y2}).$$

Поделив одно уравнение на другое, находим

$$(T - T_{к1}) / (T - T_{к2}) = (T_{к1} - T_{y1}) / (T_{к2} - T_{y2}).$$

Отсюда определяем T :

$$T = (T_{к2}T_{y1} - T_{к1}T_{y2}) / (T_{к2} + T_{y1} - T_{y2} - T_{к1}) = 60^\circ\text{C}.$$

2.17. Полное количество теплоты q , выделяемое космическим объектом в единицу времени, пропорционально его объему, т. е. $q = \alpha R^3$, где α — некоторый коэффициент. Поскольку количество теплоты, отданное единицей поверхности, пропорционально T^4 и в равновесии вся выделяемая теплота рассеивается в пространство, то можно записать $q = \beta R^2 T^4$ (площадь поверхности пропорциональна R^2 и β — некоторый коэффициент). Приравняв два выражения для q , найдем

$$T^4 = (\alpha/\beta) R.$$

Следовательно, 4-я степень температуры объекта пропорциональна его радиусу, и, значит, при уменьшении радиуса в два раза температура уменьшится лишь в $\sqrt[4]{2} \approx 1,19$ раза.

2.18*. Для определенности будем считать, что жидкость, текущая по внутренней трубе 2, уменьшает свою температуру, т. е. $T_{н2} > T_{к2}$, а, значит, $T_{н1} < T_{к1}$. Поскольку площадь сечения потока жидкости, текущей по внешней трубе 1 ($2S - S = S$), равна площади сечения потока жидкости, текущей по внутренней трубе 2 (S), и их скорости совпадают, то уменьшение температуры жидкости, текущей по трубе 2, по мере удаления от входного конца равно уменьшению температуры жидкости, текущей по трубе 1. Другими словами, разность температур жидкостей остается постоянной по всей длине теплообменника, и, следовательно,

$$T_{н2} - T_{к1} = T_{к2} - T_{н1}. \quad (1)$$

Постоянство разности температур ведет к тому, что скорость передачи теплоты постоянна вдоль теплообменника. Количество теплоты Q , переданное от жидкости, текущей по трубе 2, к жидкости, текущей по трубе 1, за время t , равно

$$Q = S_{бок} k t (T_{н2} - T_{к1}); \quad (2)$$

здесь $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности внутренней трубы, $S_{бок} = 2\pi r l$, где r — радиус внутренней трубы, т. е. $\pi r^2 = S$, $r = \sqrt{S/\pi}$. Теплота Q идет на нагревание жидкости, текущей по трубе 1: за время t по внешней трубе 1 проходит масса жидкости $m = \rho v t S$, а ее температура повышается от $T_{н1}$ до $T_{к1}$; значит,

$$Q = \rho v t S c (T_{к1} - T_{н1}). \quad (3)$$

Приравнявая выражения (2) и (3), получаем

$$2\pi \sqrt{S/\pi} l k (T_{н2} - T_{к1}) = \rho v S c (T_{к1} - T_{н1}).$$

Отсюда можем найти $T_{к1}$, а с помощью (1) и $T_{к2}$. В результате будем иметь

$$T_{к1} = T_{н2} + (T_{н1} - T_{н2}) [1 + 2\sqrt{\pi/S} l k / (\rho v c)]^{-1},$$

$$T_{к2} = T_{н1} + (T_{н2} - T_{н1}) [1 + 2\sqrt{\pi/S} l k / (\rho v c)]^{-1},$$

2.19*. Ясно, что после перераспределения давление газа максимально у задней (по отношению к направлению движения) стенки сосуда, так как именно сила давления со стороны этой стенки сообщает газу ускорение a . Обозначим его $p_{\max}$. С другой стороны, $p_{\max} \leq p_{\text{нас}}$. Учитывая, что $p_{\text{нас}} \gg p$ и, следовательно, силой давления со стороны передней стенки можно пренебречь, с помощью 2-го закона Ньютона получим

$$p_{\max} = m_T a / S \leq p_{\text{нас}},$$

где m_T — масса вещества, находящегося в сосуде в газообразном состоянии. Следовательно, при $a \leq p_{\text{нас}} S / M$ конденсации происходить не будет, а при $a > p_{\text{нас}} S / M$ масса газа станет равной $m = p_{\text{нас}} S / a$ и в сосуде окажется масса жидкости, равная

$$m_{\text{ж}} = M - m = M - p_{\text{нас}} S / a.$$

2.20. Кипение воды представляет собой процесс интенсивного образования пузырьков пара. В пузырьках находится насыщенный водяной пар, и их образование возможно, если давление насыщенного водяного пара достигает атмосферного давления (760 мм рт. ст., или 10^5 Па). Как известно, это условие выполняется при температуре, равной температуре кипения воды: $T_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$ (или 373 К). По условию задачи давление насыщенного водяного пара на планете равно $p_0 = 760$ мм рт. ст., а, значит, температура на планете $T = T_{\text{к}} = 373$ К. Из уравнения Менделеева — Клапейрона вытекает, что

$$\rho = p_0 \mu / (RT_{\text{к}}),$$

где μ — молярная масса воды, а p_0 — атмосферное давление. Подставляя числовые значения, находим $\rho = 0,58$ кг/м³.

2.21. Если в холодную погоду мы выдыхаем изо рта воздух, то он резко охлаждается. Как известно, при уменьшении температуры давление насыщенных паров падает. Водяной пар в выдыхаемом воздухе при охлаждении становится насыщенным и превращается в мельчайшие капельки воды — «пар».

Если приоткрыть дверь в теплую избу в морозный день, то проникающий с улицы холодный воздух охлаждает пары воды в воздухе избы. Это опять-таки приводит к тому, что пар становится насыщенным, и мы видим «пар» — капельки сконденсировавшейся воды.

2.22*. Задачу проще всего решать графически. Полное давление p в сосуде складывается из давления насыщенных паров воды $p_{\text{нас}}$ и давления водорода p_{H_2} . Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, давление водорода равно

$$p_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{H}_2} V} RT = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} T = 4,15 \cdot 10^3 T,$$

где p_{H_2} измеряется в паскалях. Зависимость $p_{\text{H}_2}(T)$ линейная; поэтому,

вычислив $p_{H_2}(T)$ при двух значениях температур, например при

$$T_1 = 373 \text{ К}, \quad p_{H_2} = 15,5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$T_2 = 453 \text{ К}, \quad p_{H_2} = 18,8 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

построим график $p_{H_2}(T)$.

Пользуясь указанием в условии задачи, строим график функции $p_{\text{нас}}(T)$. «Складывая» графики $p_{H_2}(T)$ и $p_{\text{нас}}(T)$, получаем график зависимости полного давления в сосуде от температуры $p(T)$ (рис. 201). Из полученного графика $p(T)$ по заданным в условии задачи начальному

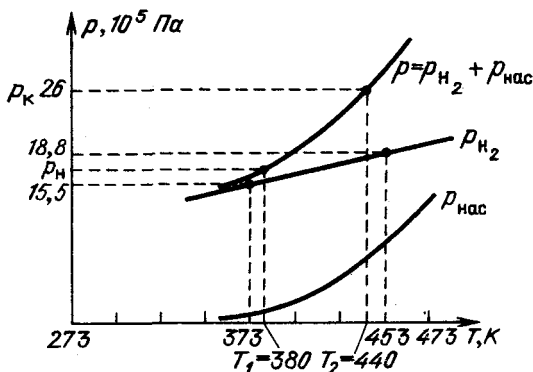


Рис. 201

и конечному давлению находим начальную и конечную температуры в сосуде:

$$p_n = 17 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad T_1 = T_n \approx 380 \text{ К},$$

$$p_k = 26 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad T_2 = T_k \approx 440 \text{ К}.$$

Найдем теперь массу испарившейся воды. Считая пары воды идеальным газом, определим начальное p_{n1} и конечное p_{n2} давления паров воды в сосуде. Для этого воспользуемся полученными графиками. При $T_1 = 380 \text{ К}$ давление водорода равно $p'_{H_2} \approx 15,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и

$$p_{n1} = p_n - p'_{H_2} \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

При $T_2 = 440 \text{ К}$ $p''_{H_2} \approx 18 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и

$$p_{n2} = p_k - p''_{H_2} \approx 8 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Напишем уравнение состояния для паров воды при p_{n1} , T_1 и p_{n2} , T_2 :

$$p_{n1} V = \frac{m_{n1}}{\mu_n} R T_1, \quad p_{n2} V = \frac{m_{n2}}{\mu_n} R T_2,$$

где $m_{п1}$, $m_{п2}$ — начальная и конечная массы паров в сосуде. Отсюда находим массу испарившейся воды:

$$\begin{aligned}\Delta m = m_{п2} - m_{п1} &= \frac{\mu_{п} V}{R} \left(\frac{p_{п2}}{T_2} - \frac{p_{п1}}{T_1} \right) = \\ &= \frac{18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8,3 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}} \left(\frac{8 \text{ Па}}{440 \text{ К}} - \frac{1,5 \text{ Па}}{380 \text{ К}} \right) \cdot 10^5 = \\ &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 6 \text{ г.}\end{aligned}$$

2.23. Если h — высота столбика воды в капилляре, то температура капилляра и, следовательно, воды на этой высоте равна

$$T_h = T_b h/l.$$

Вода в капилляре удерживается силами поверхностного натяжения. Если σ_h — поверхностное натяжение при температуре T_h , то

$$h = 2\sigma_h/(\rho_b g r),$$

где ρ_b — плотность воды. Отсюда находим

$$\sigma_h = \rho_b g r h/2 = (\rho_b g r l/2)(T_h/T_b).$$

Пользуясь указанием в условии задачи, строим график функции $\sigma(T)$. Температура T_h на уровне максимального поднятия воды определяется точкой пересечения графиков зависимости $(\rho_b g r l/2) T/T_b$ и зависимости $\sigma(T)$. Из рис. 202 видно, что $T_h \approx 80^\circ\text{C}$. Следовательно,

$$h = l T_h/T_b \approx 6,4 \text{ см.}$$

Задачу можно решить и аналитически, если заметить, что зависимость $\sigma(T)$ является практически линейной.

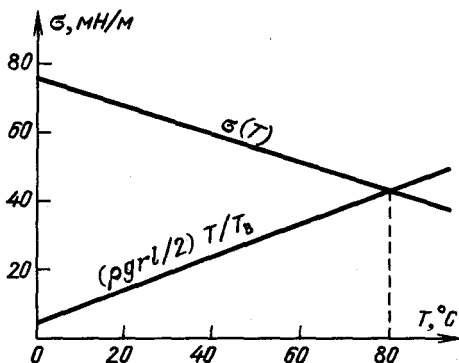


Рис. 202

2.24. Условие равновесия мыльной пленки пузыря заключается в том, что давление воздуха в нем $p_{п1}$ равно сумме внешнего давления

p_1 и избыточного давления $4\sigma/r$, создаваемого поверхностным натяжением. Обратим внимание, что в мыльном пузыре имеются две границы раздела воздух — мыльная пленка, каждая из которых создает давление $2\sigma/r$. Именно поэтому полное избыточное давление будет равно $2 \cdot 2\sigma/r = 4\sigma/r$. Итак, сначала можно записать условие равновесия в виде

$$p_{n1} = p_1 + 4\sigma/r.$$

После того как радиус пузыря уменьшился вдвое, поверхностное натяжение будет создавать давление $8\sigma/r$. По условию задачи температура поддерживается постоянной, а значит, в соответствии с законом Бойля — Мариотта при уменьшении объема пузыря в 8 раз (радиус уменьшился в 2 раза) давление воздуха в нем будет $8p_{n1}$, и можно написать

$$8p_{n1} = p_2 + 8\sigma/r.$$

Подставляя сюда p_{n1} из первого уравнения, окончательно находим

$$p_2 = 8p_1 + 24\sigma/r.$$

2.25. В печи возможны большие перепады температуры. Если кирпичи и раствор сделаны из разных материалов, т. е. из материалов с разными температурными коэффициентами расширения, то печь растрескается.

2.26. Пусть в результате смешивания жидкостей, начальные температуры которых были T_1 и T_2 , температура смеси в сосуде стала равной T . Так как сосуд теплоизолирован ($\Delta Q = 0$), то

$$c_1 m_1 (T - T_1) + c_2 m_2 (T - T_2) = 0;$$

отсюда

$$m_1/m_2 = (c_2/c_1)(T - T_2)(T_1 - T)^{-1}.$$

Согласно условию задачи, $2(T_1 - T) = T_1 - T_2$, а, значит, $T - T_2 = T_1 - T$, и отношение $(T - T_2)/(T_1 - T) = 1$. Таким образом,

$$m_1/m_2 = c_2/c_1,$$

т. е. отношение масс жидкостей равно обратному отношению их теплоемкостей.

2.27. В первом случае нагревание воды в пробирке в основном будет происходить за счет конвекции, так как более теплая вода легче, чем холодная. Во втором случае остывание будет происходить только за счет теплообмена между слоями воды в пробирке. Так как условия теплообмена между пробиркой и внешней водой остаются одинаковыми, то $t_1 < t_2$.

Заметим, что если поменять параметры задачи: $20^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}$ и $80^\circ\text{C} \rightarrow 4^\circ\text{C}$, то ответ будет обратный. Вода в пробирке будет нагреваться дольше, чем остывать. Причина здесь в аномалии воды — в интервале $0-4^\circ\text{C}$ более холодная вода легче, чем более теплая.

2.28. Поток теплоты в единицу времени $q = \Delta Q/\Delta t$ через поверхность контакта исследуемой системы (сосуд — вода, сосуд — вода — шарик) с окружающей средой зависит от разности температур:

$$\Delta Q/\Delta t = \alpha F (T_c - T);$$

здесь t — время, T_c — температура сосуда, T — температура окружающей среды, F — некоторая функция температуры. Коэффициент α определяется условиями контакта исследуемых систем с окружающей средой. В нашем случае для обоих сосудов условия контакта одинаковы, поэтому коэффициент α для обоих случаев одинаков. Потеря сосудом некоторого количества теплоты ΔQ приведет к снижению температуры сосуда на ΔT_c .

Для сосуда с водой получим

$$\Delta Q_1 = (M_b c_b + m_c c_c) \Delta T_c,$$

где M_b и c_b — масса и удельная теплоемкость воды, m_c и c_c — аналогичные величины для сосуда. Для сосуда с водой и шариком находим

$$\Delta Q_2 = (M_b c_b + m_b c_b + m_{ш} c_{ш}) \Delta T_c,$$

где $m_{ш}$ и $c_{ш}$ — масса и удельная теплоемкость шарика. По условию задачи $m_c \ll M_b$, $m_{ш} = M_b$. Кроме того, $c_c \ll c_b$. Поэтому можем написать

$$\Delta Q_1 = M_b c_b \Delta T_c, \quad \Delta Q_2 = M_b (c_b + c_{ш}) \Delta T_c.$$

Нетрудно видеть, что изменение температуры на ΔT_c в обоих сосудах проходит за разные времена Δt_1 и Δt_2 , причем

$$\frac{\Delta T_c}{F(T_c - T)} = \frac{\alpha}{M_b c_b} \Delta t_1, \quad \frac{\Delta T_c}{F(T_c - T)} = \frac{\alpha}{M_b (c_b + c_{ш})} \Delta t_2;$$

отсюда получим

$$\Delta t_1/\Delta t_2 = c_b/(c_b + c_{ш}).$$

Поэтому и для общих времен охлаждения сосудов t_1 и t_2 будет выполнено соотношение

$$t_2/t_1 = (c_b + c_{ш})/c_b = k; \text{ отсюда } c_{ш}/c_b = k - 1.$$

2.29. Если уровень заполнения калориметра после установления теплового равновесия повысился, это означает, что часть воды замерзла (при замерзании объем воды увеличивается). Между тем можно утверждать, что не вся вода замерзла — в противном случае ее объем увеличился бы в $\rho_b/\rho_{л} \approx 1,1$ раза, а уровень заполнения калориметра увеличился бы на $(h/3)(1,1 - 1) \approx 2,5$ см, тогда как по условию $\Delta h = 0,5$ см. Итак, приходим к выводу, что установившаяся температура в калориметре равна 0°C .

Используя это условие, запишем уравнение теплового баланса:

$$c_v m_v (T_v - 0^\circ\text{C}) = -\lambda \Delta m + c_l m_l (0^\circ\text{C} - T_l), \quad (1)$$

где T_l — начальная температура льда, а Δm — масса замерзшей воды. Как уже отмечалось, при замерзании объем увеличивается в ρ_v/ρ_l раз, значит,

$$\Delta h S = (\rho_v/\rho_l - 1) \Delta m / \rho_v, \quad (2)$$

здесь S — площадь поперечного сечения калориметра. Подставляя Δm из (2) в (1) и используя соотношения $m_v = (h/3) \rho_v S$, $m_l = (h/3) \rho_l S$, получаем

$$c_v S \frac{h}{3} \rho_v T_v = -\lambda S \Delta h \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_v - \rho_l} - c_l \rho_l S T_l \frac{h}{3}.$$

Отсюда

$$T_l = -\frac{\lambda}{c_l} \frac{3 \Delta h}{h} \frac{\rho_v}{\rho_v - \rho_l} - \frac{c_v}{c_l} \frac{\rho_v}{\rho_l} T_v \approx -54^\circ\text{C}.$$

2.30*. 1) Считая воду и лед несжимаемыми, найдем уменьшение температуры смеси в результате увеличения внешнего давления:

$$\Delta T = (p_1/p) \cdot 1 \text{ К} \approx 0,18 \text{ К}.$$

Столь малое изменение температуры указывает на то, что растает лишь небольшая масса льда, т. е. $\Delta m \ll m_l$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$A = \lambda \Delta m - (c_l + c_v) m \Delta T.$$

Оценим работу A внешней силы. Изменение объема смеси в результате таяния льда массы Δm равно

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_l} - \frac{\Delta m}{\rho_v} = \Delta m \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v \rho_l} \ll 0,1 \frac{m}{\rho_l} \sim 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Мы учли, что плотность воды при замерзании уменьшается примерно на 10%, т. е. $(\rho_v - \rho_l)/\rho_v \approx 0,1$. В результате имеем оценку

$$A \leq p_1 \Delta V = 0,25 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты ΔQ , необходимое для нагревания массы m льда и массы m воды на температуру ΔT , равно

$$\Delta Q = (c_l + c_v) m \Delta T \approx 1,1 \text{ кДж}.$$

Видно, что $A \ll \Delta Q$; поэтому можно считать, что $\lambda \Delta m = \Delta Q$, откуда

$$\Delta m = \Delta Q / \lambda = 3,2 \text{ г}.$$

Изменение объема за счет таяния этой массы льда равно

$$\Delta V_1 = \Delta m \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}} \approx 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3.$$

Учитывая, что при медленном увеличении давления изменение объема $\Delta V_1 \sim \Delta p$, найдем работу внешней силы:

$$A = p_1 \Delta V_1 / 2 \approx 0,44 \text{ Дж.}$$

2) Примем во внимание сжимаемость льда и воды. Изменение объема льда и воды будет равно

$$\Delta V' = \frac{p_1}{p'} 10^{-2} V_{\text{ов}} + \frac{p_1}{2p'} 10^{-2} V_{\text{ол}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где $V_{\text{ов}} = 10^{-3} \text{ м}^3$ и $V_{\text{ол}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ — начальные объемы воды и льда.

Работа A' внешней силы, затраченная на сжатие смеси, равна

$$A' = p_1 \Delta V' / 2 \approx 2,5 \text{ Дж.}$$

Полная работа внешней силы равна

$$A_{\text{полн}} = A + A' \approx 3 \text{ Дж.}$$

Ясно, что, поскольку опять $A_{\text{полн}} \ll \Delta Q$, масса растаявшего льда будет такой же, как в случае 1.

2.31. Учитывая, что плотность газа равна $\rho = M/V$, можем записать уравнение состояния водяных паров в виде $p = (\rho/\mu)RT$, где ρ , μ — плотность и молярная масса водяного пара. Кипение происходит, когда давление насыщенных паров становится равным атмосферному.

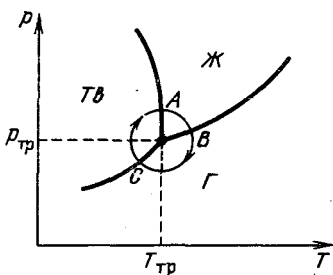


Рис. 203

Если температура кипения подсоленной воды повысилась, то при неизменном атмосферном давлении это означает, что плотность насыщенных водяных паров должна уменьшиться.

2.32. Рассмотрим цикл, окружающий тройную точку: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ (рис. 203); при этом по очереди происходят следующие превращения фаз: плавление $\rightarrow$ испарение $\rightarrow$ превращение газа непосредственно в твердое тело.

Из 1-го начала термодинамики при условии, что цикл неограниченно сжимается в тройную точку, получим для массы m вещества

$$m\lambda + mq - mv = 0,$$

так как работа системы за цикл равна нулю, притока тепла извне нет,

а, значит, полное изменение внутренней энергии также равно нулю (правая часть уравнения). Отсюда находим удельную теплоту сублимации воды в тройной точке:

$$v = \lambda + q = 2,82 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг.}$$

2.33. Концентрация налитого на горизонтальную поверхность раствора сахара практически не меняется.

После установления равновесия концентрация раствора в сосуде будет равна

$$c = c_1 h_1 / h$$

(изменение концентрации происходит за счет испарения из раствора молекул воды — увеличение концентрации, либо за счет конденсации молекул пара в сосуд — уменьшение концентрации). Давление насыщенного пара над раствором в цилиндрическом сосуде меньше, чем над раствором на дне, на $\Delta p = 0,05 p_{\text{нас}} (c - c_2)$. Эта разность давлений уравнивается давлением столба пара высоты h :

$$\rho_{\text{п}} g h = 0,05 p_{\text{нас}} (c - c_2).$$

Отсюда находим

$$h = 0,05 p_{\text{нас}} (c - c_2) / (\rho_{\text{п}} g).$$

Плотность $\rho_{\text{п}}$ пара при температуре $T = 293 \text{ К}$ найдем из уравнения газового состояния:

$$\rho_{\text{п}} = -p_{\text{нас}} M / (RT).$$

Таким образом, высота столба пара h , удовлетворяет квадратному уравнению

$$h = (0,05 c_2 R T / \mu g) (2 h_1 / h - 1).$$

Подставляя приведенные в условии числовые данные и решая квадратное уравнение, находим

$$h \approx 16,4 \text{ см.}$$

Интересно отметить, что, как следует из рассмотренной задачи, если под колпаком будут находиться два одинаковых сосуда с растворами разных концентраций, то испарение будет происходить из раствора с меньшей концентрацией. И наоборот, водяной пар будет концентрироваться в раствор с большей концентрацией. Таким образом, концентрации будут стремиться выравниваться. Именно с этим физическим явлением связано намокание сахара, соли и т. п. в атмосфере влажного воздуха.

2.34. Поскольку нижний конец трубы поддерживается при температуре T_1 , большей температуры плавления, чугун внизу будет расплавлен. Температура границы между расплавленным и твердым чугуном, естественно, равна температуре плавления $T_{\text{пл}}$.

Так как температуры верхнего и нижнего концов трубы поддерживаются постоянными, количество теплоты, проходящей за единицу времени через поперечное сечение трубы, в любом месте трубы должно быть одним и тем же. Другими словами, поток теплоты через расплавленный и твердый чугун должен быть одним и тем же (кирпичная труба плохо проводит тепло и теплообменом через ее стенки можно пренебречь).

Поток теплоты пропорционален теплопроводности, площади поперечного сечения и разности температур, приходящейся на единицу длины. Пусть l_1 — длина нижней части трубы, где чугун расплавлен, а l_2 — длина верхней части, где чугун находится в твердой фазе. Условие постоянства потока теплоты запишется тогда в виде (сечение трубы постоянно)

$$\kappa_{\text{ж}}(T_1 - T_{\text{пл}})/l_1 = \kappa_{\text{тв}}(T_{\text{пл}} - T_2)/l_2,$$

где $\kappa_{\text{ж}}$ и $\kappa_{\text{тв}}$ — теплопроводность жидкого и твердого чугуна. Учитывая, что $\kappa_{\text{ж}} = k\kappa_{\text{тв}}$, находим

$$l_1 = l_2 k (T_1 - T_{\text{пл}}) / (T_{\text{пл}} - T_2).$$

Полная длина трубы равна $l_1 + l_2$. Значит, расплавленным металлом занята часть трубы, определяемая отношением

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{k(T_1 - T_{\text{пл}})}{k(T_1 - T_{\text{пл}}) + (T_{\text{пл}} - T_2)}.$$

2.35*. Полное количество теплоты Q , излучаемой в пространство в единицу времени, останется прежним, так как оно определяется энергоснабжением при работе аппаратуры станции. Поскольку в пространство излучает лишь внешняя поверхность экрана и это излучение определяется только его температурой, то температура экрана должна быть равна начальной температуре станции $T = 500$ К. Экран, однако, излучает точно такое же количество теплоты Q и вовнутрь. Это излучение попадает на оболочку станции и поглощается ею. Таким образом, полный подвод теплоты в единицу времени к станции складывается из выделяемой при работе приборов теплоты Q и поглощаемой от внутренней поверхности экрана теплоты Q , т. е. равен $2Q$. Из условия теплового баланса оно же должно и излучаться; значит,

$$Q/(2Q) = T^4/T_x^4,$$

где T_x — искомая температура оболочки станции. Окончательно находим

$$T_x = \sqrt[4]{2} T \approx 600 \text{ К.}$$

2.36. Как видно из графика, первые 50 минут температура смеси не менялась и оставалась равной 0°C . Все это время теплота, получаемая смесью из комнаты, шла на таяние льда. Через 50 минут весь лед

растаял и температура воды начала повышаться. За 10 минут (от $\tau_1 = 50$ до $\tau_2 = 60$ мин) температура повысилась на $\Delta T = 2^\circ\text{C}$. Теплота, поступившая к воде из комнаты за это время, равна $q = c_m m_w \Delta T = 84$ кДж. Значит, за первые 50 минут к смеси из комнаты поступило количество теплоты $Q = 5q = 420$ кДж. Эта теплота и пошла на таяние массы $m_{\text{л}}$ льда: $Q = \lambda m_{\text{л}}$. Таким образом, масса льда в ведре, внесенном в комнату, равна

$$m_{\text{л}} = Q/\lambda \approx 1,2 \text{ кг.}$$

2.37*. Обозначим коэффициент пропорциональности между рассеиваемой на резисторе мощностью и разностью температур резистора и окружающего воздуха через α . Тогда, поскольку при $T_3 = 80^\circ\text{C}$ сопротивление резистора равно R_1 , а напряжение на нем U_1 , то рассеиваемая мощность равна U_1^2/R_1 , и мы можем записать, что

$$U_1^2/R_1 = \alpha(T_3 - T_0). \quad (1)$$

При повышении приложенного напряжения температура резистора растет, так как увеличивается выделяемая при прохождении тока теплота. Когда температура достигнет величины $T_1 = 100^\circ\text{C}$, сопротивление резистора скачком увеличится в два раза. Выделяемая на нем теплота уменьшится, и, если напряжение не очень велико, отвод теплоты окажется более быстрым, чем ее выделение. Это приведет к падению температуры до $T_2 = 99^\circ\text{C}$, но тогда сопротивление скачком уменьшится до прежней величины и процесс начнет повторяться. Таким образом в цепи возникнут колебания тока, связанные со скачкообразной зависимостью сопротивления резистора от температуры.

Температура резистора во время этих колебаний почти постоянна (она изменяется в пределах от $T_2 = 99^\circ\text{C}$ до $T_1 = 100^\circ\text{C}$), так что можно считать теплоотвод постоянным, и отводимая мощность составляет $\alpha(T_1 - T_0)$. Тогда, вводя t_1 — время нагрева (от 99 до 100°C), t_2 — время охлаждения и $t_1 + t_2 = T$ — период колебаний, можно написать уравнения теплового баланса:

$$U_2^2 t_1 / R_1 = \alpha(T_1 - T_0) t_1 + C(T_1 - T_2), \quad (2)$$

$$U_2^2 t_2 / R_2 = \alpha(T_1 - T_0) t_2 - C(T_1 - T_2).$$

Используя найденное из (1) значение α , находим

$$t_1 = \frac{C(T_1 - T_2)}{U_2^2/R_1 - U_1^2(T_1 - T_0)/[R_1(T_3 - T_0)]},$$

$$t_2 = \frac{C(T_1 - T_2)}{U_1^2(T_1 - T_0)/[R_1(T_3 - T_0)] - U_2^2/R_2}.$$

Подставляя числовые значения величин, получаем, что $t_1 = t_2 = 3/32 \text{ с} \approx 0,1 \text{ с}$, а $T \approx 0,2 \text{ с}$.

Максимальное и минимальное значения тока легко находим, так как в процессе колебаний сопротивление скачком изменяется от $R_1 = 50$ до $R_2 = 100$ Ом; следовательно,

$$I_{\max} = U_2/R_1 = 1,6 \text{ A}, \quad I_{\min} = U_2/R_2 = 0,8 \text{ A}.$$

Хочется обратить внимание на тот факт, что описываемая в задаче ситуация отвечает фазовому переходу 1-го рода в материале, из которого сделан резистор. При нагревании при температуре $T_1 = 100^\circ\text{C}$ происходит переход материала в новую фазу (этот переход, например, может быть связан с перестройкой кристаллической решетки материала резистора). Обратный переход происходит при более низкой температуре $T_2 = 99^\circ\text{C}$ — это явление так называемого гистерезиса, свойственного фазовым переходам 1-го рода.

2.38. Капли дождя, попав на кирпич, в первый момент образуют пленку на его поверхности (рис. 204). Кирпич имеет пористую структуру. Поры представляют собой капилляры. За счет сил поверхностного



Рис. 204

натяжения вода втягивается в поры-капилляры. Капилляры соединены между собой. Их размеры различны: узких капилляров больше, чем широких. В широких капиллярах втягивающая сила поверхностного натяжения меньше, чем в узких. Поэтому в широких капиллярах водяная пленка должна вздуться и лопнуть. Это и является причиной шипения.

2.39. Совершаемая газом работа A складывается из двух частей: работы A_1 против силы атмосферного давления и работы A_2 против силы тяжести. Граница раздела газ — ртуть до полного вытеснения ртути перемещается на $2l + l/2 = (5/2)l$, и, значит,

$$A_1 = (5/2)p_0Sl.$$

Работа A_2 против силы тяжести равна изменению потенциальной энергии ртути при ее вытеснении. Вся ртуть в результате вытеснения поднимается на высоту l относительно горизонтального участка; это и надо считать конечной высотой центра масс ртути. Начальное положение центра масс ртути, как нетрудно видеть, равно $h_0 = l/8$. Отсюда можно заключить, что

$$A_2 = Mg(l - l/8) = (7/8)Mgl,$$

где $M = 2lS\rho_{\text{рт}}$ — масса ртути. Окончательно находим

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2} p_0 S l + \frac{7}{4} \rho_{\text{рт}} g S l^2 \approx 7,7 \text{ Дж.}$$

2.40. Работа A , которую совершила внешняя сила в результате наложения и последующего снятия нагрузки, определяется площадью фигуры $ABCD$ (см. рис. 69). В соответствии с 1-м законом термодинамики изменение внутренней энергии стержня (стержень теплоизолирован) и будет равно этой работе, т. е.

$$\Delta W = A = kx_0(x - x_0).$$

С другой стороны, $\Delta W = C \Delta T$, где ΔT — изменение температуры стержня, и в результате находим

$$\Delta T = \Delta W / C = kx_0(x - x_0) / C.$$

2.41. Пусть цилиндр заполнился водой до уровня x от нижнего основания. Изменение выталкивающей силы равно увеличению силы тяжести, действующей на цилиндр с водой. Это позволяет сделать вывод, что $\Delta h = x$. Из условия равновесия цилиндра можем написать

$$p_2 S = p_0 S + mg,$$

где p_2 — давление газа в цилиндре после того, как в него вошла вода, т. е. $p_2 = p_0 + mg/S$. Используя закон Бойля — Мариотта, напомним, что $p_2(h - \Delta h) = p_1$, где p_1 — начальное давление газа. Окончательно находим

$$p_1 = (p_0 + mg/S)(1 - \Delta h/h).$$

2.42. Выберем начало отсчета вдоль оси x так, как показано на рис. 205. Тогда сила, действующая на клин, зависит лишь от координаты x фронта ударной волны. Горизонтальная составляющая этой силы равна

$$F_x = p_0 c x \operatorname{tg} \alpha = p_0 c x a / b = p_0 c a v t / b,$$

где $x = vt$ — координата фронта волны к моменту времени t от начала прохождения волны через клин. Ускорение, сообщаемое клину в данный момент времени, равно

$$a_t = F_x / m = p_0 c a v t / (b m).$$

В тот момент времени t_0 , когда фронт волны дойдет до дальней грани клина, т. е. координата фронта будет равна $b = vt_0$, ускорение

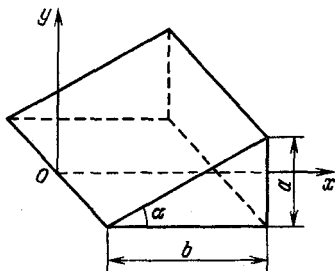


Рис. 205

клина составит

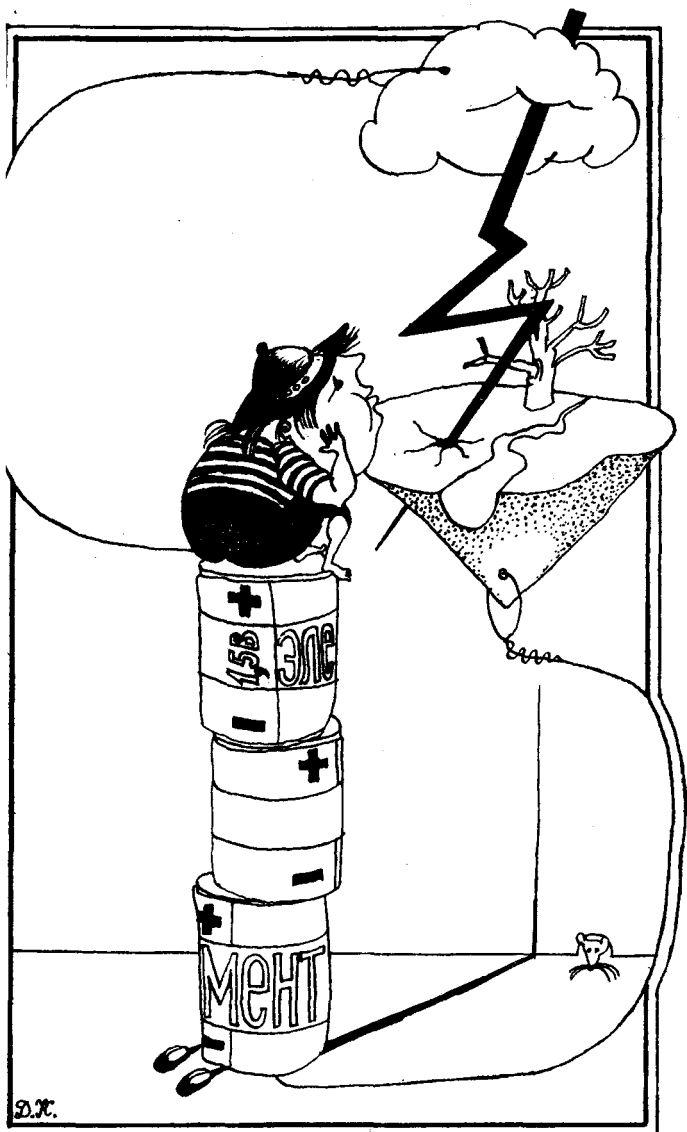
$$a_{t_0} = p_0 c a / m.$$

Поскольку ускорение клина линейно зависит от времени, для вычисления скорости u клина к моменту времени t_0 воспользуемся средним значением ускорения $a_{\text{ср}} = p_0 c a / (2m)$:

$$u = a_{\text{ср}} t_0 = p_0 a b c / (2 m v).$$

Когда весь клин окажется в области повышенного давления, результирующая сила, действующая на клин, будет равна нулю. Как видно из ответа задачи, условие $u \ll v$ означает, что $p_0 \ll 2 m v^2 / (a b c)$.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



3.1. Из-за поляризации диэлектрического стержня AB на точечный заряд $+q_1$ помимо точечного заряда $-q_2$ будут действовать поляризационные заряды, образовавшиеся на концах стержня (рис. 206). Сила притяжения со стороны отрицательного заряда, возникшего на конце A , будет больше силы отталкивания положительного заряда, возникшего на

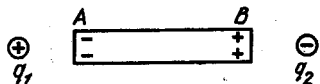


Рис. 206

конце B . Таким образом, общая сила, действующая на заряд $+q_1$, увеличится.

3.2. В непосредственной близости от каждого из точечных зарядов вклад в общую напряженность поля от другого заряда пренебрежимо мал, поэтому линии напряженности выходят (входят) равномерным пространственным пучком, общее их число пропорционально модулю заряда. Внутри конуса с углом 2α при вершине вблизи заряда $+q_1$ попадает только часть линий. Отношение их числа к общему числу выходящих из заряда $+q_1$ линий напряженности равно отношению площадей соответствующих сферических сегментов:

$$\frac{2\pi R^2(1 - \cos \alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$

Поскольку линии напряженности связывают между собой равные по модулю заряды, то число линий, выходящих из заряда $+q_1$ внутри угла 2α , равно числу линий, входящих в заряд $-q_2$ под углом 2β . Следовательно,

$$|q_1|(1 - \cos \alpha) = |q_2|(1 - \cos \beta);$$

отсюда

$$\sin(\beta/2) = \sin(\alpha/2) \sqrt{|q_1|/|q_2|}.$$

Если $\sqrt{|q_1|/|q_2|} \sin(\alpha/2) > 1$, то линия напряженности не войдет в заряд $-q_2$.

3.3. Прежде чем перейти к решению задачи 3.3, сформулируем теорему, полезную для решения и более сложных задач. Ниже будет дано доказательство этой теоремы применительное к конкретному случаю, рассмотренному в задаче 3.3.

Если заряд с постоянной плотностью σ распределен по участку сферической поверхности радиуса R , то проекция создаваемой этим зарядом напряженности электрического поля в центре сферической поверхности на произвольное направление a будет равна

$$E_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R^2} S_{\perp a},$$

где $S_{\perp a}$ — площадь проекции этого участка поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению a .

Рассмотрим некоторый участок сферической поверхности — «дольку» и сориентируем ее так, как указано на рис. 207 — плоскость симметрии «дольки» совместим с осями Oz и Ox . Из симметрии расположения заряда очевидно, что общая напряженность в центре системы координат (точка O) будет направлена против оси Oz (если $\sigma > 0$), а составляющие напряженности по осям Ox и Oy будут равны нулю.

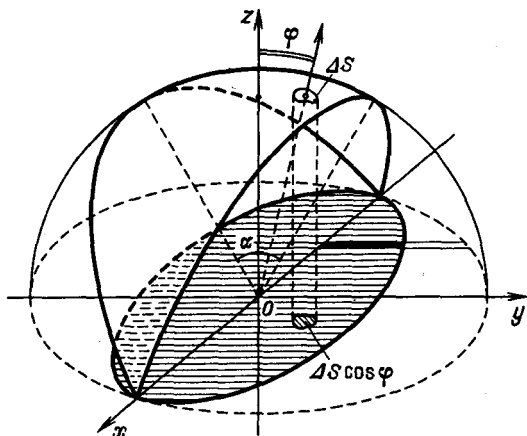


Рис. 207

Рассмотрим небольшой участок поверхности «дольки» ΔS . Вертикальную составляющую напряженности в точке O , создаваемую участком ΔS , определим по формуле

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R^2} \Delta S \cos \varphi,$$

где φ — угол между нормалью к площадке и вертикалью. Но $\Delta S \cos \varphi$ — это площадь проекции участка ΔS на горизонтальную плоскость. Отсюда полная напряженность в точке O находится по формуле

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma S}{R^2},$$

где S — площадь заштрихованной фигуры на рис. 207 — проекции «дольки» на горизонтальную плоскость xOy . Так как площадь любой узкой полоски этой области (черного участка на рис. 207) в $\sin(\alpha/2)$ раз меньше площади соответствующей полоски большого круга, то и вся площадь заштрихованной области в $\sin(\alpha/2)$ раз будет меньше площади большого круга. Отсюда

$$E' = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} \pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma \sin(\alpha/2)}{4\epsilon_0}.$$

В случае полусферы $\alpha = \pi$ и

$$E = \sigma / (4\epsilon_0).$$

3.4. Из соображений симметрии легко понять, что вектор напряженности электрического поля «дольки», угол раствора которой равен α , лежит в плоскостях продольной и поперечной симметрии «дольки». Пусть модуль этого вектора равен E . Воспользуемся принципом суперпозиции и дополним «дольку» до полусферы, заряженной с той же поверхностной плотностью. Тогда приложим к исходной «дольке» еще одну с углом раствора $\pi - \alpha$. Пусть модуль вектора напряженности поля, создаваемого добавочной «долькой» в центре сферы, равен E' . Легко понять, что векторы E и E' взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма представляет собой вектор напряженности поля полусферы в ее центре. По условию задачи эта сумма равна E_0 . Поскольку угол между векторами E и E_0 равен $\pi/2 - \alpha/2$, то

$$E = E_0 \sin(\alpha/2).$$

3.5*. Рассмотрим случай, когда конденсаторы ориентированы друг на друга одноименно заряженными пластинами (рис. 208). Поле, создаваемое первым конденсатором на оси на расстоянии x от положительно заряженной пластины, равно

$$E(x) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+l)^2} \right] \approx \frac{2q_1 l}{4\pi\epsilon_0 x^3} \quad (x \gg l).$$

Сила, действующая на второй конденсатор, находящийся на расстоянии d от первого, равна

$$F = q_2 [E(d) - E(d+l)] = \frac{q_1 q_2 l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d^3} - \frac{1}{(d+l)^3} \right] \approx \frac{3q_1 q_2 l^2}{2\pi\epsilon_0 d^4}.$$

Значит, в этом случае конденсаторы будут отталкиваться.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для случая, когда конденсаторы ориентированы друг на друга разноименно заряженными пластинами. При этом конденсаторы будут притягиваться с той же силой

$$F = \frac{3}{2} \frac{q_1 q_2 l^2}{\pi\epsilon_0 d^4}.$$

Рис. 208

3.6. Выберем два небольших произвольных участка площадью ΔS_1 и ΔS_2 , принадлежащих первой и второй полусферам. Пусть расстояние между этими участками равно r_{12} . Силу взаимодействия этих участков ΔF_{12} определим из закона Кулона:

$$\Delta F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \sigma_1 \Delta S_1 \sigma_2 \Delta S_2 = \frac{\Delta S_1 \Delta S_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \sigma_1 \sigma_2.$$

При нахождении общей силы взаимодействия полусфер мы должны, исходя из принципа суперпозиции, просуммировать силы ΔF_{12} для всех взаимодействующих пар участков, так что результирующая сила взаимодействия полусфер F примет вид

$$F = k\sigma_1\sigma_2,$$

где коэффициент k определяется лишь геометрией расположения зарядов и выбором системы единиц. Если бы полусферы были заряжены с одинаковой поверхностной плотностью заряда σ , соответствующая сила взаимодействия полусфер $\tilde{F}$ была бы равна

$$\tilde{F} = k\sigma^2,$$

где коэффициент k тот же, что и в предыдущей формуле.

Найдем силу $\tilde{F}$. Для этого рассмотрим «верхнюю» полусферу. Небольшой ее участок площадью ΔS несет заряд $\Delta q = \sigma \Delta S$ и находится под действием электрического поля, напряженность которого E' составляет половину напряженности сферы радиуса R , равномерно заряженной по поверхности с плотностью заряда σ . (Мы должны исключить из напряженности ту ее часть, которая создается самим зарядом Δq .) На заряд Δq действует сила

$$\Delta F = \Delta q E' = \sigma \Delta S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{4\pi R^2}{R^2 \cdot 2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S,$$

которая направлена перпендикулярно поверхности участка. Чтобы найти силу, действующую на верхнюю полусферу, заметим, что из выражения для силы ΔF следует, что полусфера как бы находится под действием эффективного давления $p = \sigma^2/(2\epsilon_0)$. Отсюда общая сила $\tilde{F}$, действующая на верхнюю полусферу, равна

$$\tilde{F} = p\pi R^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2$$

(хотя в выражение ΔF для силы, действующей на участок ΔS , дает вклад не только «нижняя» полусфера, но и все остальные участки «верхней» полусферы, в общем выражении для силы взаимодействия полусфер, найденном выше, силы взаимодействия участков верхней полусферы между собой взаимно сократятся.)

Поскольку $\tilde{F} = k\sigma^2$, получим следующее выражение для силы взаимодействия полусфер в случае их разной поверхностной плотности зарядов:

$$F = k\sigma_1\sigma_2 = \frac{\pi R^2}{2\epsilon_0} \sigma_1\sigma_2.$$

3.7. Плотность зарядов, наведенных на сфере, пропорциональна напряженности электрического поля: $\sigma \sim E$. Сила, действующая

на половинки сферы, пропорциональна напряженности:

$$F \sim \sigma SE \sim R^2 E^2,$$

где S — площадь половинки сферы, R — ее радиус. При изменении радиуса сферы в n раз, а напряженности поля в k раз, сила F изменится в $k^2 n^2$ раз. Поскольку толщина стенок сферы остается постоянной, сила, разрывающая сферу и приходящаяся на единицу длины, должна быть прежней, т. е. $k^2 n^2 / n = 1$, $k = 1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, минимальная напряженность поля, которое разорвет проводящую оболочку вдвое большего радиуса, равна

$$E_1 = E_0 / \sqrt{2}.$$

3.8. Пусть расстояние от большого шара до каждого небольшого шарика равно l , расстояние между шариками d , радиус каждого шарика r . При соединении большого шара с первым шариком их потенциалы сравниваются:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{l} + \frac{q_1}{r} \right) = \varphi, \quad (1)$$

где Q — заряд большого шара, φ — его потенциал. При соединении большого шара со вторым шариком получим аналогичное уравнение, отвечающее равенству потенциалов большого шара и второго шарика:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{l} + \frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{r} \right) = \varphi. \quad (2)$$

(Мы предположили, что при каждом заряде шариков заряд и потенциал большого шара меняются незначительно.) При соединении большого шара с третьим шариком, когда первый и второй заряжены, соответствующее уравнение равенства потенциалов примет вид

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{l} + \frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{d} + \frac{q_3}{r} \right) = \varphi. \quad (3)$$

Заряд q_3 найдем, решая уравнения (1)–(3):

$$q_3 = q_2^2 / q_1.$$

3.9. Заряд q_1 шара найдем по формуле

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 \varphi_1 r_1.$$

После соединения шара и оболочки весь заряд q_1 перетечет с шара на оболочку и распределится равномерно по поверхности оболочки. Ее потенциал φ_2 (совпадающий с новым значением потенциала шара) будет равен

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

3.10. Запишем условие равенства потенциала сферы, а значит, и любой точки пространства внутри нее (в частности, центра) нулю к моменту времени t , причем выделим три интервала времени:

$$1) t < a/v, \quad 2) a/v \leq t < b/v, \quad 3) t \geq b/v.$$

Обозначим заряд сферы $q(t)$. Для момента времени t внутри первого интервала 1 получим

$$q_1/a + q_2/b + q(t)/(vt) = 0;$$

отсюда

$$q(t) = -v(q_1/a + q_2/b)t, \quad I_1(t) = -v(q_1/a + q_2/b).$$

Для момента времени t внутри интервала 2 получим, что поля внутри сферы и вне нее независимы; отсюда

$$\frac{q(t) + q_1}{vt} = -\frac{q_2}{b}, \quad I_2(t) = -v\frac{q_2}{b}.$$

Наконец, как только сфера поглотит внутри себя оба точечных заряда q_1 и q_2 , протекание тока по «заземляющему» ее проводнику прекратится, и

$$I_3(t) = 0.$$

Итак,

$$I(t) = \begin{cases} -v(q_1/a + q_2/b), & t < a/v, \\ vq_2/b, & a/v \leq t < b/v, \\ 0, & t \geq b/v. \end{cases}$$

3.11. Учитывая связь между емкостью конденсатора, напряжением и зарядом на нем, можно записать уравнения для трех конденсаторов:

$$\Phi_A - \Phi_0 = q_1/C_1, \quad \Phi_B - \Phi_0 = q_2/C_2, \quad \Phi_D - \Phi_0 = q_3/C_3,$$

где C_1 , C_2 и C_3 — емкости соответствующих конденсаторов, а q_1 , q_2 и q_3 — заряды на их обкладках. Согласно закону сохранения заряда, $q_1 + q_2 + q_3 = 0$; поэтому потенциал общей точки O равен

$$\Phi_0 = (\Phi_A C_1 + \Phi_B C_2 + \Phi_D C_3)/(C_1 + C_2 + C_3).$$

3.12*. Так как листок металлический, заряды должны перераспределиться по его поверхности так, чтобы поле внутри листка отсутствовало. В первом приближении можно считать это распределение равномерным как по верхней, так и по нижней поверхности листка с плотностью $-\sigma$ и σ соответственно. Из принципа суперпозиции получим условие отсутствия поля внутри листка:

$$q/(4\pi\epsilon_0 l^2) - \sigma/\epsilon_0 = 0.$$

Учтем теперь неоднородность поля точечного заряда, так как именно вследствие нее возникнет сила взаимодействия F . Верхняя поверхность листка должна притягиваться с силой $\sigma Sq/(4\pi\epsilon_0 l^2)$, а нижняя — отталкиваться с силой $\sigma Sq/[4\pi\epsilon_0(l+d)^2]$. Следовательно, сила притяжения F листка к заряду равна

$$F = \frac{\sigma Sq}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left[1 - \frac{1}{(1+d/l)^2} \right] \approx \frac{q^2 S d}{8\pi^2 \epsilon_0 l^5}.$$

3.13. Нетрудно понять, что схема, предложенная в задаче, представляет собой «правильный» тетраэдр, в ребра которого «включены» шесть одинаковых конденсаторов. Поэтому из соображений симметрии ясно, что, к какой бы паре точек мы ни подключили источник, всегда найдется конденсатор, который не будет заряжен (конденсатор ребра, скрещенного с ребром подключения источника).

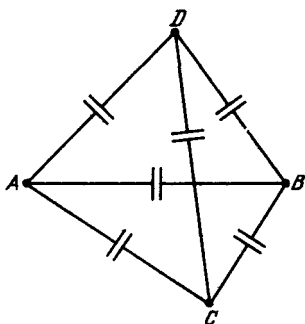


Рис. 209

Например, на рис. 209 при подключении источника к точкам A и B конденсатор, соединяющий точки C и D , не будет заряжен, поскольку потенциалы точек C и D равны.

3.14. Емкость нелинейного конденсатора равна

$$C = \epsilon C_0 = \alpha UC_0,$$

где C_0 — емкость конденсатора без диэлектрика. На нелинейном конденсаторе заряд будет равен $q_n = CU = \alpha C_0 U^2$, а на обычном соответственно $q_0 = C_0 U$. Из закона сохранения заряда

$$q_n + q_0 = C_0 U_0$$

получаем искомое напряжение

$$U = (\sqrt{4\alpha U_0 + 1} - 1)/(2\alpha) = 12 \text{ В.}$$

3.15. Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с движущимся центром нити. Тогда в начальный момент времени шарики имеют одинаковую скорость v . Первоначальный запас энергии в системе равен

$$W_1 = q^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 2l) + 2mv^2/2.$$

В момент наибольшего сближения энергия системы равна

$$W_2 = q^2/(4\pi\epsilon_0 d).$$

Из закона сохранения энергии получим ответ:

$$d = 2lq^2/(q^2 + 8\pi\epsilon_0 mv^2 l).$$

3.16. Пусть v_1 и v_2 будут соответственно скорости 1-го и 2-го шариков после выключения однородного электрического поля. По условию задачи угол между скоростью v_1 и начальной скоростью v равен 60° . Поэтому изменение импульса Δp_1 1-го шарика равно

$$\Delta p_1 = q_1 E \Delta t = m_1 v \sin 60^\circ.$$

Здесь мы использовали условие $v_1 = v/2$, из которого следует, что направление изменения импульса 1-го шарика Δp_1 перпендикулярно направлению его скорости v_1 .

Так как $E \parallel \Delta p_1$ и направление изменения импульса 2-го шарика параллельно направлению Δp_1 , то для скорости 2-го шарика получим (легко догадаться, кстати, что знаки зарядов шариков совпадают)

$$v_2 = v \operatorname{tg} 30^\circ = v/\sqrt{3}.$$

Соответствующее изменение импульса 2-го шарика равно

$$\Delta p_2 = q_2 E \Delta t = m_2 v / \cos 30^\circ.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 \sin 60^\circ}{m_2 / \cos 30^\circ}, \quad \frac{q_2}{m_2} = \frac{4}{3} \frac{q_1}{m_1} = \frac{4}{3} k_1.$$

3.17. Кинетическую энергию 1-го освобожденного шарика на бесконечности (спустя большой промежуток времени) найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{N-1}} \right),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ — расстояния от 1-го шарика до того момента, как он был освобожден, до остальных шариков по кругу, a_1 и a_{N-1} — расстояния до ближайших соседей, т. е. $a_1 = a_{N-1} = a$ ($N = 1977$).

При движении 2-го шарика влиянием 1-го освобожденного шарика пренебрегаем; тогда

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{N-2}} \right),$$

т. е. в скобках не хватает одного ближайшего соседа. Таким образом,

$$K = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

или

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 K a}.$$

3.18. Согласно закону сохранения импульса,

$$mv = (m + M)u,$$

где m — масса ускоренной частицы, M — масса атома, а u — их скорость сразу после соударения.

Обозначив через $W_{\text{и}}$ энергию ионизации, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$mv^2/2 = W_{\text{и}} + (m + M)u^2/2.$$

Исключив из этих уравнений скорость u , получим

$$mv^2/2 = W_{\text{и}}(1 + m/M).$$

Если m — масса электрона, то $m/M \ll 1$ и необходимая для ионизации кинетическая энергия равна

$$mv^2/2 \approx W_{\text{и}}.$$

В случае столкновения атома с ионом, масса которого $m \approx M$, $mv^2/2 \approx 2W_{\text{и}}$, т. е. энергия иона, необходимая для ионизации, должна быть в два раза больше, чем энергия электрона.

3.19. Из равенства электрической и упругой сил, действующих на незакрепленный шарик,

$$q^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot 4l^2) = kl,$$

получается следующее соотношение для длины нерастянутой пружины l :

$$l^3 = q^2/(16\pi\epsilon_0 k),$$

где k — жесткость пружины, q — заряды шариков.

Пусть незакрепленный шарик отклонили на малое по сравнению с l расстояние x относительно положения равновесия. Потенциальная энергия системы следующим образом зависит от x :

$$W(x) = \frac{1}{2} k(l - x)^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l - x)} \approx \frac{5}{2} kl^2 + kx^2.$$

Здесь мы учли соотношение между q , k и l , полученное ранее, и в выражении

$$\frac{1}{2l - x} = \frac{1}{2l(1 - x/2l)} = \frac{1}{2l} \left\{ 1 + \left(\frac{x}{2l} \right) + \left(\frac{x}{2l} \right)^2 + \dots \right\}$$

оставили слагаемые с точностью до $[x/(2l)]^2$. Таким образом, растянутая пружина обладает как бы вдвое большей жесткостью, и отношение частот гармонических колебаний системы равно

$$v_2/v_1 = \sqrt{2k}/\sqrt{k} = \sqrt{2}.$$

3.20. Рассмотрим два заряженных шарика как единую механическую систему. Кулоновское взаимодействие между шариками является внутренним, поэтому оно не влияет на движение центра масс. Единственная внешняя сила, действующая на систему, — сила тяжести,

только она и будет определять движение центра масс системы. Так как массы шариков равны, то начальное положение центра масс находится на высоте $(h_1 + h_2)/2$ и его начальная скорость v направлена горизонтально. В дальнейшем центр масс будет двигаться по параболе, характеризующейся уравнением

$$h = (h_1 + h_2)/2 - (g/2)(x/v)^2, \quad (1)$$

где x — координата центра масс по горизонтали, h — по вертикали. Когда 1-й шарик упал на землю на расстоянии $x = l$, высота H центра масс системы, как это следует из выражения (1), была равна

$$H = (h_1 + h_2)/2 - (g/2)(l/v)^2.$$

Поскольку массы шариков одинаковы, то 2-й шарик должен находиться в этот момент на высоте $H_2 = 2H$. Таким образом,

$$H_2 = h_1 + h_2 - g(l/v)^2.$$

3.21. Пусть сопротивление половины витка равно R . Тогда в первом случае мы имеем параллельное соединение пятнадцати сопротивлений величины R каждое; общее сопротивление равно $R/15$.

Во втором случае мы получим последовательное соединение этих же пятнадцати сопротивлений; общее сопротивление будет $15R$. Таким образом, при разматывании мотка сопротивление проволоки увеличится в 225 раз.

3.22. Из соображений симметрии нетрудно заметить, что потенциалы точек A и C (рис. 210) в любой момент времени будут одинаковыми, поэтому замыкание ключа K не приведет к изменению работы схемы, а сама спираль AC не будет накалива.

3.23. После добавления двух проводников цепь примет вид, изображенный на рис. 211. В силу

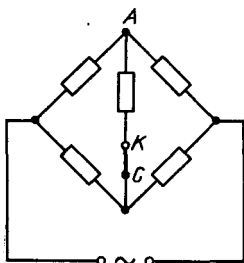


Рис. 210

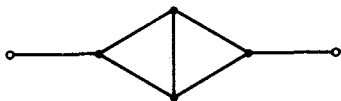


Рис. 211

симметрии образовавшейся схемы центральный проводник не будет участвовать в процессах переноса электрического заряда. Поэтому, если исходное сопротивление цепи R_1 было равно $R_1 = 5r$, где r — сопротивление одного проводника, то после изменения схемы новое ее сопротивление R_2 станет равным

$$R_2 = 2r + 2r/2 = 3r.$$

Таким образом,

$$R_2/R_1 = 3/5.$$

3.24. Общее сопротивление R_{AB} каркаса легко вычисляется, учитывая, что по ребру CD из соображений симметрии ток не течет: $R_{AB} = R/2$, где R — сопротивление каждого из ребер, поэтому

$$I = 2U/R,$$

где U — поданное напряжение.

Изменить общий ток можно двумя способами: 1) убрать одно из ребер: AD , AC , BC или BD — изменение тока при этом будет одинаковым; 2) убрать ребро AB . В случае 1 изменение тока будет равно $\Delta I = -(2/5) U/R = -I/5$, в случае 2 общее сопротивление равно R , поэтому $\Delta I = -U/R = -I/2 = \Delta I_{\max}$.

3.25. Из соображений симметрии потенциалы точек C и D равны, поэтому данную схему можно заменить на эквивалентную (мы объединим узлы C и D , рис. 212). Сопротивление между точками A и B схемы найдем по формулам сопротивления для параллельного и последовательного соединений проводников. Отсюда

$$R_{C(D)B} = \frac{R/2(R/2 + R)}{R/2 + R/2 + R} = \frac{3}{4} \frac{R}{2} = \frac{3}{8} R,$$

$$R_{AC(D)B} = \frac{R}{2} + \frac{3}{8} R = \frac{7}{8} R,$$

$$R_{AB} = \frac{R(7/8)R}{R + (7/8)R} = \frac{7}{15} R.$$

Таким образом, ток I в подводящих проводах найдем по формуле

$$I = \frac{U}{(7/15)R} = \frac{15}{7} \frac{U}{R}.$$

3.26*. Для решения задачи представим схему цепи в более симметричном виде (рис. 213). Полученную схему не удастся упростить путем разъединения или соединения узлов (или путем удаления каких-нибудь проводников), чтобы упрощенная схема представляла собой лишь параллельные и последовательные соединения проводников. Однако, поскольку любая задача на постоянный ток имеет единственное решение, попытаемся «угадать», используя симметрию схемы, сходство в силах токов, протекающих по цепи.

Подадим на нашу цепь напряжение U . Проставим во всех участках цепи токи. В данном случае нам понадобится не девять величин

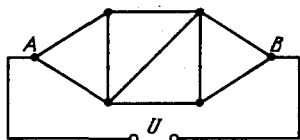


Рис. 213

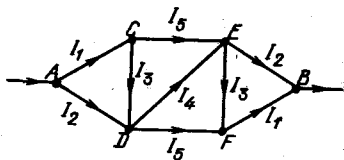


Рис. 214

(как было бы при произвольных значениях сопротивлений участков цепи), а лишь пять величин: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 (рис. 214). При таких токах первое правило Кирхгофа, записанное для узла C :

$$I_1 = I_3 + I_5,$$

и узла D :

$$I_2 + I_3 = I_4 + I_5,$$

автоматически выполняется для узлов E и F (именно в этом проявилось себя равенство сопротивлений всех резисторов схемы). Запишем теперь второе правило Кирхгофа, чтобы получить систему пяти независимых уравнений:

$$(I_2 + I_5 + I_1)R = U,$$

$$(I_3 + I_4)R = I_5R,$$

$$(I_1 + I_3)R = I_2R,$$

где R — сопротивление каждого резистора. Решая систему пяти уравнений, выразим все токи в цепи через ток I_1 :

$$I_2 = \frac{6}{5}I_1, \quad I_3 = \frac{I_1}{5}, \quad I_4 = \frac{3}{5}I_1, \quad I_5 = \frac{4}{5}I_1.$$

Кроме того,

$$U = (I_1 + \frac{4}{5}I_1 + \frac{6}{5}I_1)R.$$

Следовательно, $U/I_1 = 3R$.

Учитывая, что сопротивление цепи R_{AB} удовлетворяет уравнению $R_{AB} = U/(I_1 + I_2)$, находим, что

$$R_{AB} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{I_1 + (6/5)I_1} = \frac{5}{11} \frac{U}{I_1}.$$

Отсюда с учетом полученного выше соотношения искомое сопротивление равно

$$R_{AB} = (15/11)R.$$

3.27. Из соображений симметрии исходная схема может быть заменена на эквивалентную (рис. 215); при этом мы заменим «внутренний» треугольник из бесконечного числа звеньев резистором сопротивления $R_{AB}/2$, причем сопротивление R_{AB} таково, что $R_{AB} = R_x$, $R_{AB} = a\rho$. После упрощения схема представляет собой систему последовательных и параллельных соединений проводников. Для нахождения величины R_x получим уравнение

$$R_x = R \left(R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2} \right) \left(R + R + \frac{RR_x/2}{R + R_x/2} \right)^{-1}.$$

Решая его, находим

$$R_{AB} = R_x = R(\sqrt{7} - 1)/3 = a\rho(\sqrt{7} - 1)/3.$$

3.28. Из соображений симметрии, если из схемы убрать первое звено, то сопротивление оставшейся цепи между точками C и D будет равно $R_{CD} = kR_{AB}$. Поэтому эквивалентная схема бесконечной

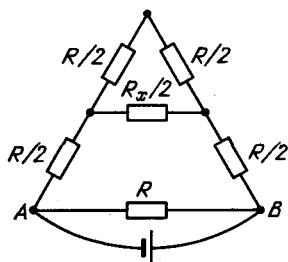


Рис. 215

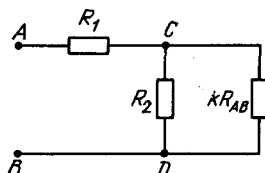


Рис. 216

цепочки примет вид, изображенный на рис. 216. Отсюда, применяя формулы для расчета сопротивлений последовательного и параллельного соединения резисторов, получим

$$R_{AB} = R_1 + R_2 k R_{AB} / (R_2 + k R_{AB}).$$

Решая квадратное уравнение относительно величины R_{AB} , найдем (в частности, при условии $k = 1/2$)

$$R_{AB} = (R_1 - R_2 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 6R_1 R_2})/2.$$

3.29. Реостат вместе с нагрузкой эквивалентен резистору сопротивлением

$$R_1 = \frac{R}{2} + \frac{R R/2}{R + R/2} = \frac{5}{6} R.$$

Отсюда общий ток в цепи I_1 равен

$$I_1 = \frac{U}{(5/6)R} = \frac{6}{5} \frac{U}{R}.$$

Напряжение на нагрузке $U_{1\text{нагр}}$ будет равно

$$U_{1\text{нагр}} = U - I_1 \frac{R}{2} = \frac{2}{5} U.$$

Если сопротивление нагрузки станет равным $2R$, общий ток I_2 будет равен

$$I_2 = \frac{U}{\frac{R}{2} + \frac{(R/2)(2R)}{R/2 + 2R}} = \frac{10}{9} \frac{U}{R}$$

Напряжение на нагрузке станет равным $U_{2\text{нагр}}$:

$$U_{2\text{нагр}} = U - I_2 \frac{R}{2} = \frac{4}{9} U.$$

Таким образом, напряжение на нагрузке изменится в $k = U_{2\text{нагр}}/U_{1\text{нагр}}$ раз:

$$k = U_{2\text{нагр}}/U_{1\text{нагр}} = 10/9.$$

3.30. В первом случае выполняется условие $I_1 = I_2$, причем $I_1 = \alpha_1 n_1$, $I_2 = \alpha_2 n_2$, следовательно, $\alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2$. Во втором случае $I'_1 R_1 = I'_2 R_x$, где R_x — сопротивление второго резистора. Кроме того, $I'_1 = \alpha_1 n'_1$, $I'_2 = \alpha_2 n'_2$, поэтому

$$R_1 \alpha_1 n'_1 = R_x \alpha_2 n'_2.$$

Окончательно получим

$$R_1 n'_1/n_1 = R_x n'_2/n_2.$$

Таким образом,

$$R_x = R_1 n_2 n'_1 / (n_1 n'_2).$$

3.31. Условием того, что проволока нагревается, а затем плавится, является превышение выделившегося джоулева тепла над количеством теплоты, уходящей в окружающую среду:

$$I^2 R > kS(T - T_{\text{ср}}).$$

По условию задачи для того, чтобы первая проволока расплавилась, необходимо пропустить через нее ток, больший чем 10 А. Поэтому

$$k \cdot 4d_1 l (T_{\text{пл}} - T_{\text{ср}}) = I_1^2 R_1,$$

где l — длина проволок, $T_{\text{пл}}$ — температура плавления материала проволок, I_1 , R_1 — ток и сопротивление первой проволоки.

Сопротивление второй проволоки равно $R_2 = R_1/16$. Таким образом, чтобы вторая проволока расплавилась, необходимо через нее

пропустить ток I_2 , удовлетворяющий соотношению

$$I_2^2 R_2 > k \cdot 4d_2 l (T_{\text{пл}} - T_{\text{ср}}).$$

Окончательно получим

$$I_2 > 8I_1 = 80 \text{ А.}$$

3.32. Пусть э. д. с. второго источника равна $\mathcal{E}_2$. Тогда по условию задачи

$$I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) / (R + R_x) = \mathcal{E}_2 / R,$$

где R — сопротивление переменного резистора при одинаковом токе. Отсюда получим ответ:

$$R_x = \mathcal{E}_1 / I.$$

3.33. Сила тока I_1 , протекающего через контур до замыкания источника тока с э. д. с. $\mathcal{E}_2$, удовлетворяет условию

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) / (R + r_1 + r_2),$$

где r_1 и r_2 — внутренние сопротивления источников тока. После замыкания накоротко источника тока с э. д. с. $\mathcal{E}_2$ силу тока I_2 через резистор сопротивлением R найдем по формуле

$$I_2 = \mathcal{E}_1 / (R + r_1).$$

Очевидно, что если

$$\mathcal{E}_1 / (R + r_1) > (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1) / (R + r_1 + r_2),$$

то ответ на вопрос задачи будет утвердительным.

Итак, если выполнено неравенство $\mathcal{E}_1 (R + r_1 + r_2) > (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) (R + r_1)$, а значит, $\mathcal{E}_1 r_2 > \mathcal{E}_2 (R + r_1)$, то ток в цепи увеличивается. Если, наоборот, $\mathcal{E}_1 r_2 < \mathcal{E}_2 (R + r_1)$, то замыкание источника тока приводит к уменьшению тока в цепи.

3.34*. Воспользуемся тем фактом, что любую схему «черного ящика» из резисторов можно привести к виду (рис. 217), где величины

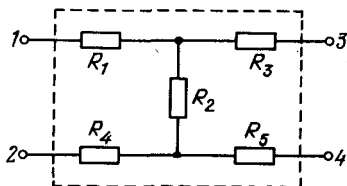


Рис. 217

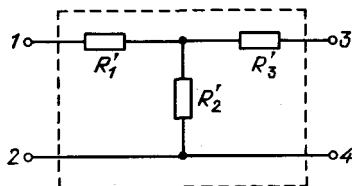


Рис. 218

$R_1, R_2, \dots, R_5$ выражаются через сопротивления исходных резисторов схемы «черного ящика» (убедиться в этом можно, используя в исходной схеме преобразования типа звезда — треугольник и наоборот). По

условию задачи через резисторы сопротивлением R_1 и R_4 , а также R_3 и R_5 каждый раз протекают равные по значению токи (либо вообще не текут, когда клеммы разомкнуты). Воспользовавшись этим обстоятельством, схему для простоты рассмотрения приведем к виду, изображенному на рис. 218. Тогда по условию задачи

$$N_1 = \frac{U^2}{R'_1 + R'_2}, \quad N_2 = \frac{U^2}{R'_1 + R'_2 R'_3 / (R'_2 + R'_3)},$$

$$N_3 = \frac{U^2}{R'_2 + R'_3}, \quad N_4 = \frac{U^2}{R'_3 + R'_1 R'_2 / (R'_1 + R'_2)}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$N_1 N_4 = N_2 N_3.$$

Следовательно,

$$N_4 = N_2 N_3 / N_1 = 40 \text{ Вт.}$$

3.35. В первый момент времени после замыкания ключа K конденсаторы не заряжены, поэтому напряжение между точками A и B равно нулю (см. рис. 93). Силу тока I_1 в цепи в этот момент времени найдем из условия

$$I_1 = \mathcal{E} / R_1.$$

В установившемся режиме ток между точками A и B будет течь через сопротивления R_1 и R_3 . Поэтому силу тока I_2 , спустя большой промежуток времени, найдем по формуле

$$I_2 = \mathcal{E} / (R_1 + R_3).$$

3.36. Рассмотрим установившийся режим, когда напряжение на конденсаторе практически не меняется и равно в среднем $U_{\text{уст.}}$.

При очередном замыкании ключа в положение 1 за небольшой интервал времени Δt заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta t (\mathcal{E}_1 - U_{\text{уст.}}) / R_1.$$

При замыкании ключа в положение 2 заряд изменится на величину

$$\Delta t (\mathcal{E}_2 - U_{\text{уст.}}) / R_2.$$

Суммарное изменение заряда за цикл должно быть равно нулю:

$$(\mathcal{E}_1 - U_{\text{уст.}}) / R_1 + (\mathcal{E}_2 - U_{\text{уст.}}) / R_2 = 0.$$

Отсюда напряжение $U_{\text{уст.}}$ и заряд конденсатора $q_{\text{уст.}}$ в установившемся режиме найдем по формулам

$$U_{\text{уст.}} = (\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2) / (R_1 + R_2),$$

$$q_{\text{уст.}} = C U_{\text{уст.}} = C (\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2) / (R_1 + R_2).$$

3.37. Постоянный ток через конденсаторы емкостью C_1 и C_2 не течет. Поэтому в установившемся режиме через источник тока будет течь ток, равный

$$I = \mathcal{E}/(r + R_2).$$

Так как конденсаторы соединены последовательно, то их заряды q будут одинаковы, причем

$$q/C_1 + q/C_2 = IR_2.$$

Следовательно,

$$q = \mathcal{E}R_2C_1C_2/[(r + R_2)(C_1 + C_2)].$$

Напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах соответственно найдем по формулам

$$U_1 = q/C_1 = \mathcal{E}R_2C_2/[(r + R_2)(C_1 + C_2)],$$

$$U_2 = q/C_2 = \mathcal{E}R_2C_1/[(r + R_2)(C_1 + C_2)].$$

3.38*. Включим мысленно между точками A и F последовательно два идеальных (без внутреннего сопротивления) источника тока с э. д. с., равными $-U_0$ и U_0 . Такое включение, очевидно, ничего не изменит. Зависимость между силой тока, текущего через включенный резистор сопротивлением R , и э. д. с. источников будет иметь вид

$$I = \alpha\mathcal{E} - \beta U_0 + \beta U_0,$$

где $\mathcal{E}$ — э. д. с. источника, содержащегося в схеме, а коэффициенты α и β зависят от сопротивлений схемы.

Если между точками A и F включить лишь один идеальный источник с э. д. с., равной $-U_0$, то разность потенциалов между точками A и B станет равной нулю. Значит, два первых члена в уравнении для I компенсируются: $I = \beta U_0$. Коэффициент β равен, очевидно, $1/(R + R_{\text{эф}})$, где $R_{\text{эф}}$ — сопротивление между точками A и B при отключенном сопротивлении R . Эта формула справедлива и для случая $R = 0$, что соответствует включению амперметра; при этом

$$I_0 = U_0/R_{\text{эф}}.$$

Следовательно, искомая сила тока равна

$$I = U_0 I_0 / (R I_0 + U_0).$$

3.39. Когда ключ K замкнут, напряжение на конденсаторе поддерживается постоянным и равно $\mathcal{E}$ — э. д. с. батареи. Пусть смещение пластины B при достижении нового положения равновесия равно $-x_1$. Заряд на конденсаторе при этом будет равен $q_1 = C_1 \mathcal{E} = \epsilon_0 S \mathcal{E} / (d - x_1)$, где S — площадь пластин конденсатора. Напряженность поля в конденсаторе равна $E_1 = \mathcal{E} / (d - x_1)$, но она создается двумя пластинами; поэтому напряженность поля, создаваемая одной пластиной, равна $E_1/2$,

и для силы, действующей на пластину B , можем написать

$$E_1 q_1 / 2 = \varepsilon_0 S \mathcal{E}^2 / [2(d - x_1)^2] = kx_1, \quad (1)$$

где k — жесткость пружины.

Рассмотрим ситуацию, когда ключ K замкнули на короткое время. Конденсатор при этом получил заряд $q_2 = \varepsilon_0 S \mathcal{E} / d$ (пластины не успели сдвинуться), который в дальнейшем остается постоянным. Пусть в новом положении равновесия смещение пластины B составляет x_2 , тогда напряженность поля в конденсаторе равна $E_2 = q_2 / [C_2(d - x_2)]$ и $C_2 = \varepsilon_0 S / (d - x_2)$. Условие равновесия пластины B запишется при этом так:

$$E_2 q_2 / 2 = q_2^2 / (2\varepsilon_0 S) = \varepsilon_0 S \mathcal{E}^2 / (2d^2) = kx_2. \quad (2)$$

Поделив почленно уравнения (1) и (2), найдем $x_2 = x_1 [(d - x_1) / d]^2$. Учитывая, что по условию задачи $x_1 = 0,1d$, получим ответ:

$$x_2 = 0,08d.$$

3.40. Представим центральное соединение проводов в виде двух узлов, соединенных проводом 5—6, как это показано на рис. 219. Тогда из соображений симметрии следует, что ток по этому проводу не течет. Поэтому в исходной схеме центральное соединение можно

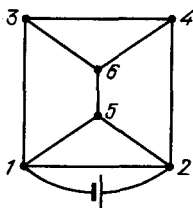


Рис. 219

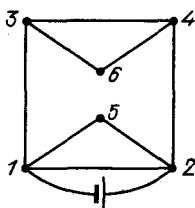


Рис. 220

убрать, и мы приходим к схеме, показанной на рис. 220. По условию задачи

$$R_{12} = R_{13} = R_{34} = R_{24} = r,$$

$$R_{15} = R_{25} = R_{36} = R_{46} = r / \sqrt{2}.$$

Пусть напряжение между точками 1 и 2 равно U . Тогда в единицу времени на участке 1—2 выделится количество теплоты

$$Q_{12} = U^2 / r.$$

Из закона Ома получаем силу тока, протекающего по участку 3—4:

$$I_{34} = U / [r(\sqrt{2} + 3)].$$

В единицу времени на участке 3 — 4 выделится количество теплоты

$$Q_{34} = I_{34}^2 r = U^2 / [r(\sqrt{2} + 3)^2].$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$Q_{12}/Q_{34} = (\sqrt{2} + 3)^2 = 11 + 6\sqrt{2}.$$

3.41. Поскольку анодный ток равен I , то число носителей заряда (электронов) n , подлетающих к аноду в единицу времени, найдем по формуле

$$n = I/|e|,$$

где e — заряд одного носителя. Импульс Δp , передаваемый носителями заряда аноду в единицу времени, равен

$$\Delta p = nmv,$$

где m — масса носителя, v — его скорость. Этот импульс равен средней силе, действующей на анод со стороны оседающих на него носителей заряда. Так как $mv^2/2 = |e|U$, где U — разность потенциалов анода и катода, то среднее давление $p_{\text{ср}}$ электронов на анод найдем по формуле

$$p_{\text{ср}} = \frac{nmv}{S} = \frac{I}{S} \frac{m}{|e|} \sqrt{\frac{2|e|U}{m}} = \frac{I}{S} \sqrt{\frac{2mU}{|e|}}.$$

3.42. Нетрудно сообразить, что за время от 0 до t_0 напряжение на конденсаторе равно нулю, заряд его также равен нулю, ток через конденсатор не течет, а, значит, U_{CD} все это время равно нулю (рис. 221).

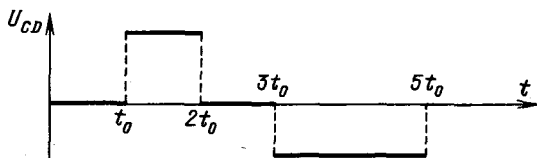


Рис. 221

За время от t_0 до $2t_0$ напряжение на конденсаторе, а следовательно, и заряд на обкладках растут линейно, а, значит, в цепи течет постоянный ток, поэтому напряжение U_{CD} постоянно. В интервале времени от $2t_0$ до $3t_0$ напряжение на конденсаторе не меняется; значит, ток не течет и U_{CD} равно нулю. Наконец, в интервале от $3t_0$ до $5t_0$ конденсатор разряжается, ток, текущий через резистор, отрицателен и постоянен, и его значение в два раза меньше тока в интервале времени от t_0 до $2t_0$.

3.43. До переключения ключа K заряд конденсатора равен

$$q_1 = \mathcal{E}_1 C,$$

причем на нижней пластине окажется положительный заряд, а на верхней — отрицательный.

После переключения ключа K в процессе перезарядки на верхней пластине окажется положительный, а на нижней отрицательный заряд, равный

$$q_2 = \mathcal{E}_2 C.$$

Таким образом, источник тока с э. д. с. $\mathcal{E}_2$ совершит работу $\mathcal{E}_2(q_1 + q_2)$. Искомое количество теплоты, выделяющееся при этом на резисторе, равно

$$Q = \mathcal{E}_2(q_1 + q_2) - \left(\frac{q_2^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} \right) = \frac{C(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{2}.$$

3.44. Найдем силу тока I , текущего в цепи через источник тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Напряжение на каждом из резисторов R_1 и R_2 определим по формуле

$$U_{R_2} = \mathcal{E} - Ir = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{r R_1 + R_2(r + R_1)}.$$

Мощность N_{R_2} , выделяемую на резисторе R_2 , найдем по формуле

$$\begin{aligned} N_{R_2} &= \frac{U_{R_2}^2}{R_2} = \left[\frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{r R_1 + R_2(r + R_1)} \right]^2 \frac{1}{R_2} = \\ &= \frac{\mathcal{E}^2 R_1^2}{(r R_1)^2 / R_2 + 2r R_1(r + R_1) + (r + R_1)^2 R_2}. \end{aligned}$$

Максимальной мощности будет соответствовать минимум знаменателя. Учитывая классическое неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, получим, что при $R_2 = r R_1 / (r + R_1)$ знаменатель дроби минимален и выделяемая на резисторе R_2 мощность максимальна.

3.45. В момент, когда ток через резистор достигает значения I_0 , заряд конденсатора емкостью C_1 равен

$$q_1 = C_1 I_0 R.$$

Энергия, запасенная в конденсаторе в этот момент, равна

$$W_1 = q_1^2 / (2C_1).$$

После размыкания ключа, в конце процесса перезарядки, общий заряд на конденсаторах равен q_1 , а напряжения на обкладках обоих конденсаторов равны. Запишем эти условия в виде двух уравнений:

$$q_1' + q_2' = q_1, \quad q_1' / C_1 = q_2' / C_2,$$

где q'_1 и q'_2 — заряды конденсаторов после перезарядки. Отсюда получим

$$q'_1 = q_1 C_1 / (C_1 + C_2), \quad q'_2 = q_1 C_2 / (C_1 + C_2).$$

Полная энергия системы после перезарядки равна

$$W_2 = q'^2_1 / (2C_1) + q'^2_2 / (2C_2) = q'^2_1 / [2(C_1 + C_2)].$$

Количество теплоты, выделившейся в резисторе за это время, равно

$$Q = W_1 - W_2 = (I_0 R)^2 C_2 / [2(C_1 + C_2)].$$

3.46. До переключения ключа K ток через резистор сопротивлением R не течет, и заряд конденсатора емкостью C_2 найдем по формуле

$$q = \mathcal{E} C_2.$$

Энергия, запасенная в этом конденсаторе, определяется по формуле

$$W_{C_2} = \mathcal{E}^2 C_2 / 2.$$

После переключения ключа K заряд q перераспределится между двумя конденсаторами так, что заряд q_1 на конденсаторе емкостью C_1 и заряд q_2 на конденсаторе емкостью C_2 найдем по формулам

$$q_1 + q_2 = q, \quad q_1 / C_1 = q_2 / C_2.$$

Полная энергия двух конденсаторов будет равна

$$W_{C_1+C_2} = q^2 / [2(C_1 + C_2)] = \mathcal{E}^2 C_2^2 / [2(C_1 + C_2)].$$

Поэтому выделившееся на резисторе количество теплоты Q получится из соотношения

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2 C_2}{2} - \frac{\mathcal{E}^2 C_2}{2} \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{\mathcal{E}^2 C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)}.$$

3.47. Пусть к моменту, когда напряжение на конденсаторе стало равно U , через источник тока протек заряд q . Очевидно, что $q/U = C$. Из закона сохранения энергии получим

$$\mathcal{E} q = Q + q^2 / (2C),$$

где Q — количество теплоты, выделившееся на обоих резисторах. Поскольку резисторы соединены параллельно, то $Q_1/Q_2 = R_2/R_1$; отсюда

$$Q_2 = C \left(\mathcal{E} U - \frac{U^2}{2} \right) \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{C U R_1}{2(R_1 + R_2)} (2\mathcal{E} - U).$$

3.48. При движении переключки меняется поток магнитной индукции через контур, образуемый переключкой, рельсами и резистором. В контуре возникает э. д. с. индукции и появляется ток. В результате действия магнитного поля на ток, текущий по переключке, переключка будет тормозиться.

Найдем тормозящую силу F . Пусть скорость движения перемычки в некоторый момент времени равна v . За малый промежуток времени Δt перемычка переместится вдоль рельсов на малое расстояние $\Delta x = v \Delta t$. Изменение площади контура будет равно $vd \Delta t$, поток магнитной индукции за это время изменится на $\Delta \Phi = Bvd \Delta t$, в контуре появится э. д. с., равная

$$\mathcal{E} = -\Delta \Phi / \Delta t = -Bvd,$$

и по перемычке, согласно закону Ома, будет течь ток $I = \mathcal{E} / R$. Сила, действующая на перемычку со стороны магнитного поля, будет равна

$$F = IBd = -B^2 d^2 v / R.$$

Направлена сила F , согласно правилу Ленца, против скорости движения перемычки v .

Напишем теперь уравнение движения перемычки (на малом перемещении Δx):

$$ma = F = -B^2 d^2 v / R,$$

или, учитывая, что $a = \Delta v / \Delta t$, $v = \Delta x / \Delta t$,

$$m \Delta v = -B^2 d^2 \Delta x / R.$$

Мы видим, что изменение скорости движения перемычки пропорционально изменению ее координаты x (в начальный момент $x_0 = 0$). Значит, полное изменение скорости $v_k = v_0 = 0 - v_0 = -v_0$ связано с изменением координаты (с полным перемещением s) соотношением

$$m(-v_0) = -B^2 d^2 s / R.$$

Отсюда находим путь s , пройденный перемычкой до полной остановки:

$$s = mRv_0 / B^2 d^2.$$

В том случае, когда направление индукции B составляет угол α с нормалью к плоскости рельсов,

$$s = mRv_0 / (B^2 d^2 \cos^2 \alpha).$$

Действительно, э. д. с. индукции и, следовательно, ток, текущий по перемычке, определяются потоком магнитной индукции через контур, а поток в этом случае определяется проекцией индукции B на нормаль к плоскости контура.

3.49. Линии индукции магнитного поля, создаваемого падающим заряженным шариком, лежат в горизонтальной плоскости. Поэтому поток магнитной индукции Φ_B через площадь, ограниченную контуром, в любой момент равен нулю, так что показания гальванометра будут нулевыми.

3.50. Выберем систему координат xOy , центр которой совпадает с мгновенным положением шарика (рис. 222). Ось Ox — «центростремительная», ось Oy направлена вертикально, как и индукция магнитного поля B .

Система уравнений, описывающих движение шарика (считаем, что шарик движется по окружности против часовой стрелки), запишется в виде

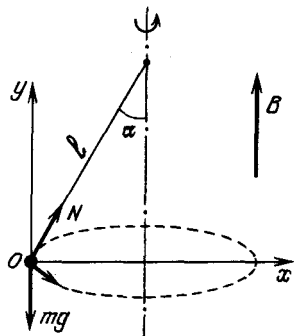


Рис. 222

$$N \sin \alpha - qvB = mv^2/(l \sin \alpha),$$

$$N \cos \alpha = mg.$$

Кроме того,

$$2\pi r/v = T, \quad r = l \sin \alpha.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$r = \sqrt{\frac{l^2 - (T/2\pi)^2}{[2\pi/(gT) \pm qB/(mg)]^2}}.$$

Знак плюс, если шарик вращается против часовой стрелки, и знак минус, если по часовой стрелке (смотреть надо сверху).

3.51. При движении металлического шарика в магнитном поле из-за действия силы Лоренца на свободные электроны последние распределятся по поверхности шарика таким образом, чтобы результирующее электрическое поле внутри шарика было однородным и своим действием компенсировало действие магнитного поля. После этого направленного движения электронов внутри металла прекратится. Таким образом, напряженность этого поля равна

$$E_{\text{рез}}q + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0,$$

отсюда

$$E_{\text{рез}} = [\mathbf{B} \times \mathbf{v}].$$

Мы приходим к выводу, что внутри шарика появляется однородное электрическое поле величиной

$$|E_{\text{рез}}| = |\mathbf{B}||\mathbf{v}| \sin \alpha.$$

Максимальная разность потенциалов $\Delta\varphi_{\text{max}}$ возникнет между точками диаметра шарика, параллельного вектору $E_{\text{рез}}$, причем

$$\Delta\varphi_{\text{max}} = |E_{\text{рез}}| \cdot 2r = |\mathbf{B}||\mathbf{v}| \sin \alpha \cdot 2r.$$

3.52. Индукция магнитного поля соленоида направлена вдоль его оси, поэтому сила Лоренца, действующая на электрон в любой момент времени, будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси соленоида.

мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно $\mathcal{E}$). Итак,

$$I = CbB(\Delta v/\Delta t) \cos \alpha = CbBa \cos \alpha,$$

где a — ускорение, с которым движется переключатель.

На переключатель действуют сила тяжести и сила Ампера. Напишем уравнение движения переключателя:

$$ma = mg \sin \alpha - IbB \cos \alpha = mg \sin \alpha - Cb^2 B^2 a \cos^2 \alpha.$$

Отсюда найдем

$$a = mg \sin \alpha / (m + Cb^2 B^2 \cos^2 \alpha).$$

Время, за которое переключатель достигнет основания «горки», определим из условия $l = at^2/2$:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{mg \sin \alpha} (m + Cb^2 B^2 \cos^2 \alpha)}.$$

Скорость переключателя у основания равна

$$v_k = at = \sqrt{\frac{2lmg \sin \alpha}{m + Cb^2 B^2 \cos^2 \alpha}}.$$

3.54*. Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную сверхпроводящим контуром, постоянен. Действительно, $\Delta\Phi/\Delta t = \mathcal{E}$, но $\mathcal{E} = IR = 0$ (поскольку $R = 0$), следовательно, $\Phi = \text{const}$.

Магнитный поток через площадку, ограниченную контуром, складывается из потока внешнего магнитного поля и потока магнитного поля, создаваемого током I , текущим через контур. Таким образом, магнитный поток, пронизывающий рамку, в любой момент времени равен

$$\Phi = a^2 B_0 + a^2 \alpha z + LI.$$

Так как в начальный момент ($z = 0$, $I = 0$) $\Phi = B_0 a^2$, в любой другой момент времени сила тока I будет определяться соотношением

$$LI = -\alpha z a^2, \quad I = -\alpha z a^2 / L.$$

Результирующая сила, действующая со стороны магнитного поля на рамку с током I , равна сумме сил, действующих на те стороны рамки, которые параллельны оси y , т. е.

$$F = 2a|\alpha x|I = a^2 \alpha I,$$

и направлена вдоль оси z .

Таким образом, уравнение движения рамки имеет вид

$$m\ddot{z} = -mg + a^2 \alpha I = -mg - a^4 \alpha^2 z / L.$$

Это уравнение аналогично уравнению колебаний тела массой m ,

подвешенного на пружине жесткостью $k = a^4 \alpha^2 / L$:

$$m\ddot{z} = -mg - kz.$$

Из этой аналогии ясно, что рамка будет совершать гармонические колебания вдоль оси z около положения равновесия, определяемого из условия

$$\frac{a^4 \alpha^2}{L} z_0 = -mg, \quad z_0 = -\frac{mgL}{a^4 \alpha^2}.$$

Частота этих колебаний рамки будет равна

$$\omega = \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{Lm}}.$$

Координата рамки через время t после начала движения равна

$$z = \frac{mgL}{a^4 \alpha^2} \left[-1 + \cos \left(\frac{a^2 \alpha}{\sqrt{Lm}} t \right) \right].$$

3.55. Площади поперечного сечения катушек равны $S_1 = \pi D_1^2 / 4$, $S_2 = \pi D_2^2 / 4$. Воспользуемся известной формулой для потока магнитной индукции $\Phi = LI = BSN$. Отсюда получим $B = L' / (SN)$. Поэтому

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{S_1 N_1}{S_2 N_2} \frac{I_2}{I_1}.$$

Но $I_1 = I_2$, так как провод и источник тока остались прежними. Отношение числа витков найдем по формуле $N_1 / N_2 = D_2 / D_1$. Тогда получим

$$B_2 / B_1 = L_2 S_1 D_2 / (L_1 S_2 D_1) = L_2 D_1 / (L_1 D_2)$$

Следовательно, индукция магнитного поля внутри новой катушки равна

$$B_2 = B_1 L_2 D_1 / (L_1 D_2).$$

3.56*. Пусть N_1 — число витков катушки с индуктивностью L_1 , N_2 — число витков катушки с индуктивностью L_2 . Заметим, что составную катушку, индуктивность L которой мы ищем, можно рассматривать как катушку с числом витков $N = N_1 + N_2$. Если знать связь между индуктивностью и числом витков, то тогда можно выразить L через L_1 и L_2 . Для данных геометрических размеров катушки такая связь действительно должна существовать, потому что индуктивность определяется только геометрическими размерами и числом витков катушки (имеются в виду длинные цилиндрические катушки с равномерной намоткой). Найдем эту связь.

Из принципа суперпозиции для магнитного поля следует, что магнитное поле, создаваемое током I в катушке данных размеров, про-

порционально числу витков в ней. Действительно, удвоение числа витков в катушке можно рассматривать как замену каждого витка на два новых, близко расположенных. Эти два витка дадут вдвое большее поле, чем один виток, так как поля от двух витков складываются. Таким образом, поле в катушке при удвоении числа витков увеличивается вдвое. Итак $B \sim N$ (B – магнитная индукция, ток фиксирован). Заметим, что магнитный поток, охватываемый витками катушки, равен

$$\Phi = BNS \sim BN \sim N^2.$$

Осталось учесть, что

$$L = \Phi/I \sim N^2.$$

Таким образом, мы получили, что $L = kN^2$ при данной геометрии. Далее учтем, что $N_1 = \sqrt{L_1/k}$, $N_2 = \sqrt{L_2/k}$, поэтому $L = k(N_1 + N_2)^2$. Следовательно,

$$L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2}.$$

3.57. Для двигателя с независимым возбуждением получим схему, изображенную на рис. 224. В первом случае, т. е. когда лебедка не нагружена, $0 = I_1 = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_1)/r$, где r – внутреннее сопротивление двигателя, $\mathcal{E}_1$ – наводимая э. д. с., причем $\mathcal{E}_1 = \alpha v_1$. Таким образом, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, откуда $\alpha = \mathcal{E}/v_1$. Во втором случае расходуемая мотором мощность равна

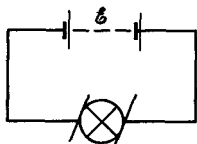


Рис. 224

$$\mathcal{E}_2 I_2 = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_2) \mathcal{E}_2 / r = mgv_2.$$

Наводимая э. д. с. индукции равна $\mathcal{E}_2 = \alpha v_2$. Таким образом, для внутреннего сопротивления двигателя находим

$$r = (\mathcal{E} - \alpha v_2) \alpha / (mg).$$

В случае выделения максимальной мощности можно написать

$$N_{\max} = (\mathcal{E} - \mathcal{E}') \mathcal{E}' / r = m' g v',$$

причем максимальное значение выделяемой мощности, как нетрудно показать, $\mathcal{E}' = \alpha v'$ достигается при условии $\mathcal{E}' = \mathcal{E}/2$ (максимум знаменателя). Отсюда

$$v' = \mathcal{E} / (2\alpha) = v_1 / 2 = 2 \text{ м/с},$$

$$m' = mv_1 / [2(v_1 - v_2)] = 10 \frac{2}{3} \approx 6,7 \text{ кг}.$$

3.58. Нарисуем графики зависимостей от времени внешнего напряжения $U_{\text{вн}}(t)$, тока в цепи $I_c(t)$ (который протекает только в одном направлении, когда диод открыт), напряжения на конденсаторе $U_c(t)$ и напряжения на диоде $U_{\text{АК}}(t)$ (рис. 225).

Таким образом, напряжение между точками А и К меняется в пределах от 0 до $-2U_0$.

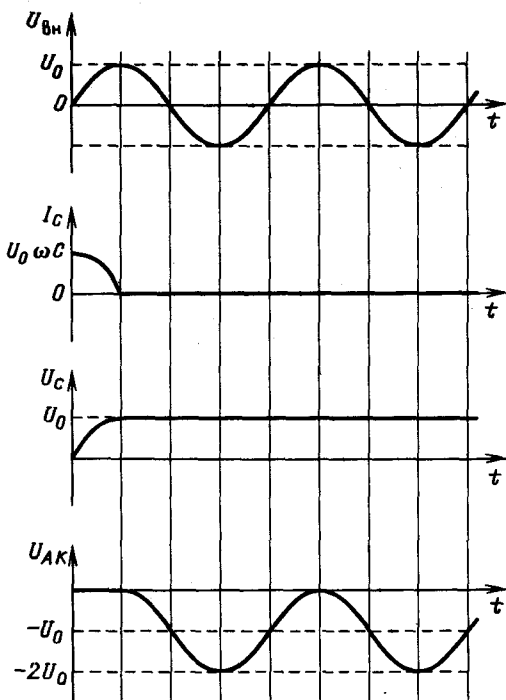


Рис. 225

3.59. Так как ток и напряжение изменяются синфазно и амплитуда тока равна $I = \mathcal{E}_0/R$ (т. е. вклады C и L скомпенсировались), то

$$1/(\omega C) = \omega L.$$

Из соотношений $U_C = q/C$, $dq/dt = I$ получаем

$$U_C = \mathcal{E}_0 \sin \omega t / (R\omega C).$$

Поэтому амплитуда напряжения между обкладками конденсатора равна

$$U_0 = \mathcal{E}_0 \omega L / R.$$

3.60. При установившихся колебаниях работа внешнего источника тока должна равняться выделяемой на сопротивлении теплоте. Для этого должны быть равны амплитуды внешнего напряжения и напряжения на сопротивлении: $R I_0 = U_0$. Поскольку ток в цепи и заряд на

конденсаторе связаны уравнением $I = dq/dt$, амплитуды тока I_0 и заряда q_0 находят по формуле

$$I_0 = \omega_0 q_0,$$

где резонансная частота ω_0 равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

По условию задачи

$$U_0 = U = q_1/C;$$

отсюда

$$q_0 = (q_1/R)\sqrt{L/C} = 10^{-8} \text{ Кл.}$$

3.61. При $0 < t < \tau$ в контуре будут происходить колебания заряда, причем

$$q = (CU/2)\cos\omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{2/(LC)}.$$

В момент времени τ пробитый конденсатор имел заряд $(CU/2)\cos\omega_0\tau$ и обладал энергией $(CU^2/8)\cos^2\omega_0\tau$. После пробоя эта энергия перешла в теплоту и была потеряна для системы. Оставшаяся энергия равна

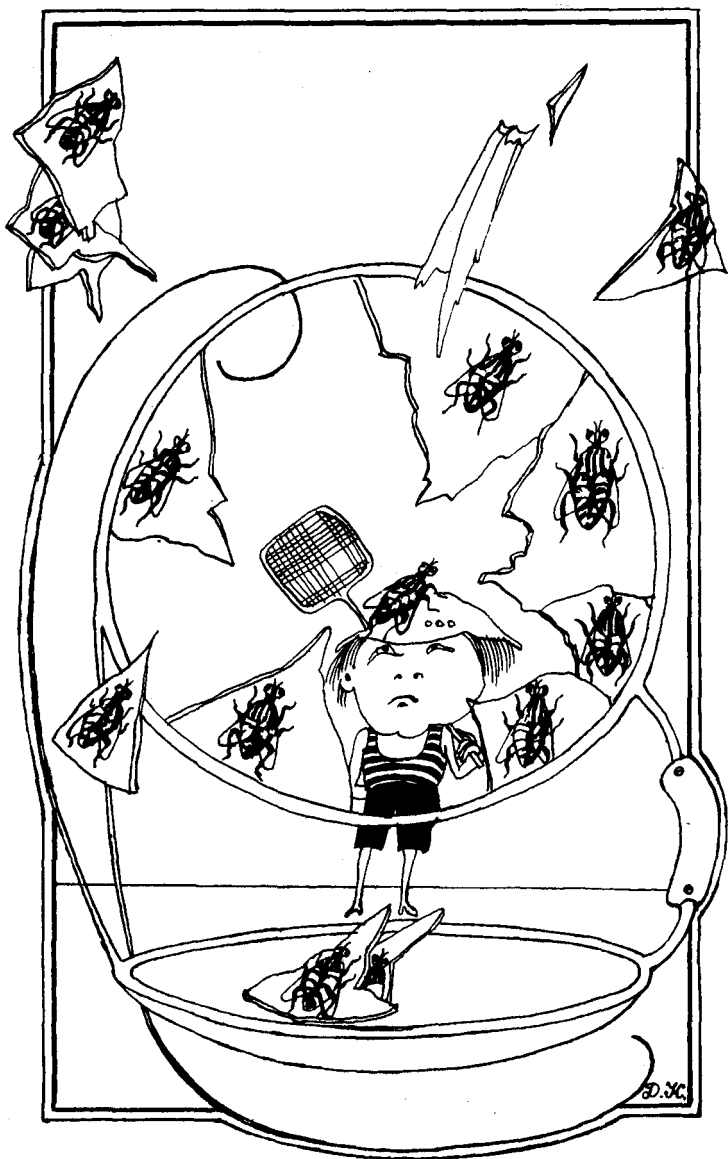
$$W = CU^2/4 - (CU^2/8)\cos^2\omega_0\tau.$$

Амплитуду колебаний заряда после пробоя найдем из условия $W = q_0^2/(2C)$; отсюда

$$q_0 = (CU/2)\sqrt{2 - \cos^2\omega_0\tau}.$$

3.62. Достаточно зашунтировать сверхпроводящую обмотку резистором с малым сопротивлением, способным выдержать большую температуру. Тогда в рабочем состоянии ток будет идти по обмотке, сколь бы мало ни было сопротивление резистора. Если же участок обмотки утратит сверхпроводящие свойства, т. е. у него будет большое сопротивление, то ток потечет через шунтирующее сопротивление. В этом случае теплота выделится на резисторе.

4. ОПТИКА



4.1. Лучи, однократно отраженные от зеркальной поверхности конуса, распространяются так, как если бы они шли от совокупности точечных мнимых источников, расположенных по окружности. Каждый такой источник симметричен источнику S относительно соответствующей образующей конуса. Изображением этих источников на экране будет кольцо. Существенно, что пучок лучей, попадающий от каждого мнимого источника на линзу, плоский: он проходит не через всю поверхность линзы, а пересекает линзу вдоль соответствующего диаметра. Поэтому степень ослабления такого пучка диафрагмой зависит от формы и ориентации диафрагмы.

Симметричная кольцевая диафрагма (см. рис. 116) в равной мере ослабит пучки, идущие от всех мнимых источников. В этом случае освещенность кольца на экране уменьшится равномерно. Диафрагма, изображенная на рис. 117, пропустит целиком пучки, плоскости которых образуют с вертикалью углы $\alpha < \alpha_0$. Следовательно, освещенность верхних и нижних частей кольца на экране не изменится. Прочие пучки будут срезаться диафрагмой, причем тем сильнее, чем ближе плоскость пучка к горизонтальной плоскости. Поэтому на боковых участках кольца по мере изменения угла α от α_0 до $\pi/2$ освещенность будет уменьшаться.

4.2. Пренебрежем сначала размерами зрачка, считая его точечным. Ясно, что из прошедших через линзу лучей в глаз попадут те и только те, которые перед попаданием на линзу прошли через точку B (рис. 226), сопряженную с той точкой, в которой расположен зрачок. Расстояние b от линзы до точки B найдем, воспользовавшись формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad b = \frac{aF}{a - F} = 12 \text{ см.}$$

Теперь понятно, что экран должен совпадать с действительным изображением зрачка в плоскости S . Из рис. 226 видно, что радиус минимального экрана равен

$$R = \frac{b}{a} r \approx 0,5 \text{ мм}$$

и его надо расположить в плоскости S с центром в точке B .

4.3*. Найдем сначала распределение давления газа вблизи оси сосуда. Рассмотрим элемент объема газа $\Delta r \Delta S$ (рис. 227). Центробежное ускорение этого элемента $a = \omega^2 r$ обеспечивается разностью соответствующих давлений:

$$[p(r + \Delta r) - p(r)] \Delta S = \rho \Delta r \Delta S \omega^2 r.$$

Поэтому для изменения давления получим уравнение

$$dp/dr = \rho \omega^2 r.$$

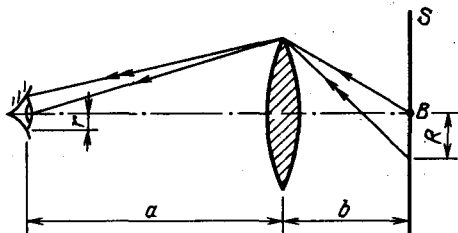


Рис. 226

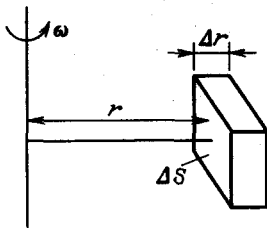


Рис. 227

Так как для идеального газа выполняется соотношение $\mu p = \rho RT$ (R — универсальная газовая постоянная), то

$$dp/dr = p(\mu\omega^2/RT)r.$$

Согласно условию задачи, при $r \leq r_n$ $p(r) - p_0 \ll p_0$; следовательно,

$$p(r) \approx p_0 \left(1 + \frac{\mu\omega^2}{2RT} r^2 \right).$$

Соответственно для плотности газа при $r \leq r_n$ получим

$$\rho(r) \approx \rho_0 \left(1 + \frac{\mu\omega^2}{2RT} r^2 \right), \quad \rho_0 = p_0 \frac{\mu}{RT},$$

а для показателя преломления имеем

$$n(r) = n_0 + kr^2, \quad n_0 = 1 + \alpha\rho_0, \quad k = \frac{\alpha\rho_0}{2} \left(\frac{\mu\omega}{RT} \right)^2.$$

Найдем теперь угол преломления луча, проходящего через сосуд на расстоянии r от оси. Оптический путь, пройденный им в сосуде, равен $n(r)l$.

Оптическая разность хода $\delta_{\text{опт}}$ двух близких лучей после прохождения сосуда должна равняться геометрической разности хода δ , вызванной отклонением лучей от первоначального направления распространения. В этом случае интерференция лучей приведет к их усилению (принцип Гюйгенса). Из рис. 228 следует, что

$$\delta_{\text{опт}} = [n(r + \Delta r) - n(r)] l, \quad \delta = \Delta r \sin \varphi.$$

Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{\delta}{\Delta r} = \frac{[n(r + \Delta r) - n(r)] l}{\Delta r} = 2klr.$$

Здесь можно сделать следующий вывод. Если рассматривать узкий пучок

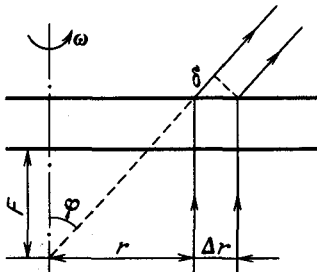


Рис. 228

света такой, что угол отклонения φ будет мал, то $\varphi \sim r$, т.е. вращающийся сосуд будет работать как рассеивающаяся линза с фокусным расстоянием $F = (2kl)^{-1}$.

Итак, для максимального угла отклонения получим

$$\sin \varphi_{\max} = 2klr_{\Pi}.$$

Поэтому искомый радиус пятна на экране равен

$$R = r_{\Pi} + L \operatorname{tg} \varphi_{\max}.$$

В приближении рассеивающей линзы получим

$$R \approx r_{\Pi} + L\varphi_{\max} \approx r_{\Pi} + 2klr_{\Pi}L = r_{\Pi} \left[1 + \alpha p_0 l L \left(\frac{\mu\omega}{RT} \right)^2 \right].$$

4.4. Рассматриваемая в задаче подзорная труба — системы Кеплера. Угловое увеличение $k = F/f$, поэтому фокусное расстояние окуляра равно $f = F/k = 2,5$ см. При приближении рассматриваемого предмета из бесконечности до минимально возможного расстояния a изображение предмета в объективе будет перемещаться из фокальной плоскости в сторону окуляра на расстояние x , которое можно найти по формуле линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{F+x} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{F+x} = \frac{a-F}{aF}, \quad x = \frac{aF}{a-F} - F \approx \frac{F^2}{a},$$

т. к. $a \gg F$. Таким образом, надо найти x . Окуляр трубы — лупа; при рассматривании предметов через лупу ненапряженным, т.е. аккомодированным на бесконечность, глазом предмет должен располагаться в фокальной плоскости лупы. Искомое расстояние x равно смещению фокальной плоскости окуляра при его настройке; при этом, очевидно, окуляр надо отодвигать от объектива.

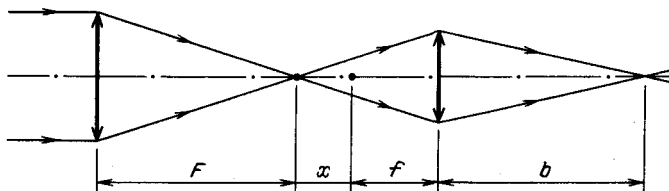


Рис. 229

Как видно из рис. 229, при рассматривании бесконечно удаленных предметов через сдвинутый окуляр пучок света на выходе из окуляра будет сходящимся. При падении на трубу параллельного пучка лучей такое положение окуляра необходимо для дальнзорного глаза, оптическая сила которого в ненапряженном состоянии недостаточна для собирания параллельного пучка света на сетчатке. Максимальный сдвиг окуляра соответствует оптической силе $D_+ = +10$ дптр. Очки

с такой оптической силой собирают параллельный пучок света на расстоянии $b = 1/D_+$. Это расстояние b и определяет расстояние x :

$$\frac{1}{f+x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \text{отсюда} \quad x = \frac{f^2}{b-f} = \frac{5}{6} \text{ см.}$$

Искомое расстояние равно

$$a \approx \frac{F^2}{x} = \frac{0,25 \cdot 6 \text{ м}^2}{5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 30 \text{ м.}$$

4.5. Можно. Ответ следует из рис. 230. Искомые области заштрихованы.

4.6. Когда карандаш входит в воду, поверхность воды около карандаша образует рассеивающую линзу — лучи от источника света отклоняются от оси карандаша. Поэтому под карандашом образуется большое темное пятно (рис. 231).

Когда карандаш вытаскивают из воды, поверхность воды около карандаша образует собирающую линзу — лучи от источника света отклоняются к оси карандаша. Поэтому под карандашом образуется светлое пятно (рис. 232).

4.7. Ответ следует из рис. 233. Первое светлое кольцо образуют лучи, испытывающие одно отражение от стенок корпуса до выхода из него (пример такого луча обозначен цифрой 1). Второе светлое кольцо образуют лучи с двумя отражениями (на рисунке этот луч обозначен цифрой 2) и т. д. Понятно, что, чем больше отражений, тем больше света поглощается корпусом

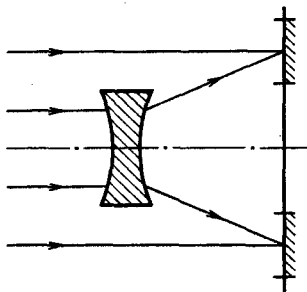


Рис. 230

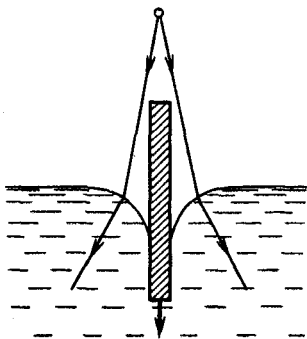


Рис. 231

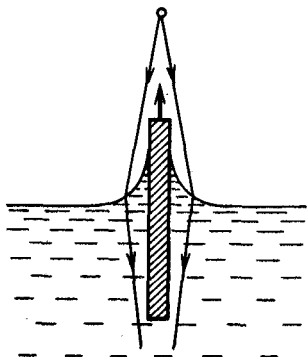


Рис. 232

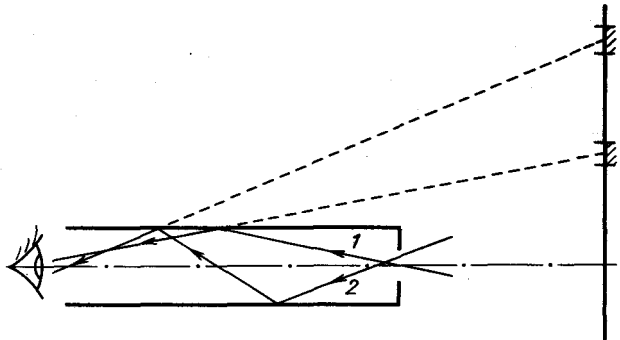


Рис. 233

шариковой ручки. Поэтому чем дальше светлое кольцо от центра, тем оно менее светлое.

4.8. Покажем, что все лучи, идущие от точечного источника в направлении к экрану, после преломления окажутся внутри цилиндра и после многократных отражений от его боковой поверхности в конце концов пройдут через отверстие в экране.

Действительно, предельный луч от точечного источника света S , угол падения которого на левое основание цилиндра равен $\pi/2$, после преломления будет образовывать угол α с осью цилиндра, причем $\sin \alpha = 1/n$ (по закону преломления). Угол падения φ этого луча на боковую поверхность цилиндра удовлетворяет условию $\alpha + \varphi = \pi/2$ (рис. 234). Так как

$$\sin \alpha = 1/n = 1/1,5 < \sqrt{2}/2,$$

то $\alpha < \pi/4$, а $\varphi > \pi/4$, т. е. угол падения на боковую поверхность цилиндра будет больше угла полного внутреннего отражения. Поэтому впоследствии этот луч не сможет выйти из цилиндра нигде, кроме как через правое основание. Любой другой луч, выходящий из источника в сторону экрана с отверстием, после преломления в левом основании цилиндра пойдет под меньшим углом к оси, а тем самым упадет на боковую поверхность под углом, заведомо большим угла полного внутреннего отражения. Прозрачный цилиндр, таким образом, «соберет» в отверстие лучи, попадающие в телесный угол 2π стерадиан.

В отсутствие цилиндра в отверстие экрана попадал световой поток, сосредоточенный внутри телесного угла $\pi d^2/(4l)^2$. Таким образом, световой поток через отверстие в присутствии прозрачного цилиндра

увеличится в

$$\frac{2\pi}{\pi d^2 / (4l)^2} = 8 \cdot 10^4 \text{ раз.}$$

4.9. Толщину линзы объектива найдем из геометрических соображений (рис. 235). Действительно,

$$r_1^2 = (2R_1 - h)h \approx 2R_1h, \quad h = r_1^2 / (2R_1),$$

где R_1 — радиус кривизны объектива.

Запишем равенство оптических путей ABF и CDF в случае, когда в трубу налита вода:

$$(f_1 - h)n_{\text{в}} + 2hn_{\text{ст}} = n_{\text{в}}l_1 + h.$$

Здесь f_1 — фокусное расстояние линзы объектива, когда налита вода.

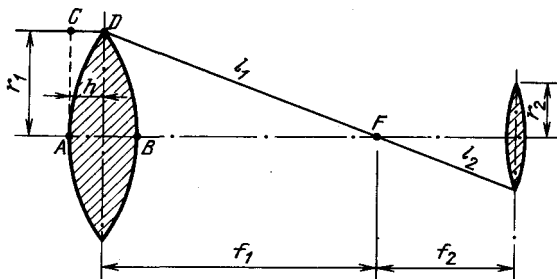


Рис. 235

Подставляя значения h и $l_1 = \sqrt{f_1^2 + r_1^2} \approx f_1 + r_1^2 / (2f_1)$, получим

$$\frac{r_1^2}{2f_1} n_{\text{в}} = \frac{r_1^2}{2R_1} [(n_{\text{ст}} - 1) + (n_{\text{ст}} - n_{\text{в}})].$$

Отсюда

$$f_1 = \frac{R_1 n_{\text{в}}}{(n_{\text{ст}} - 1) + (n_{\text{ст}} - n_{\text{в}})}.$$

В случае, когда в трубе нет воды, фокусное расстояние линзы объектива равно

$$f_1^{(0)} = \frac{R_1}{2(n_{\text{ст}} - 1)}.$$

Поэтому

$$f_1 = f_1^{(0)} \frac{2(n_{\text{ст}} - 1)n_{\text{в}}}{(n_{\text{ст}} - 1) + (n_{\text{ст}} - n_{\text{в}})}.$$

Аналогичный расчет для фокусных расстояний f_2 (с водой) и $f_2^{(0)}$ (без воды) линзы окуляра дает следующий результат:

$$f_2 = f_2^{(0)} \frac{2(n_{\text{ст}} - 1)n_{\text{в}}}{(n_{\text{ст}} - 1) + (n_{\text{ст}} - n_{\text{в}})}.$$

Таким образом,

$$L = f_1 + f_2 = (f_1^{(0)} + f_2^{(0)}) \frac{2(n_{\text{ст}} - 1)n_{\text{в}}}{(n_{\text{ст}} - 1) + (n_{\text{ст}} - n_{\text{в}})}.$$

Так как $f_{10}^{(0)} + f_{20}^{(0)} = L_0$, то искомое расстояние между объективом и окуляром равно

$$L = L_0 \frac{2(n_{\text{ст}} - 1)n_{\text{в}}}{2n_{\text{ст}} - n_{\text{в}} - 1} = 30 \text{ см.}$$

4.10. Пусть паук находится в точке A (рис. 236), расположенной над верхней точкой D шара. Поверхность шара, соответствующая дуге окружности BDB' , является видимой для паука. Точки B и B' — точки пересечения касательных, проведенных из точки A к поверхности шара. Луч AB будет распространяться внутри шара по отрезку BC . Угол α находится из условия

$$\sin \alpha = 1/n_{\text{ст}},$$

где $n_{\text{ст}}$ — коэффициент преломления стекла. Этот луч выйдет из шара по направлению CA' . Поэтому часть поверхности шара, соответствующая дуге $CD'C'$, будет также видимой (для примера показано прохождение луча $AKLM$).

Невидимой для паука будет поверхность шарового пояса, которой соответствуют дуги BC и $B'C'$.

Угол γ определяется из условия

$$\cos \gamma = R/(R + h),$$

Рис. 236

где R — радиус шара, h — высота паука над поверхностью шара. Так как по условию $R \gg h$, то $\gamma \approx 0$. Заметим теперь, что $\beta = \pi - 2\alpha$, а $\sin \alpha = 1/n_{\text{ст}}$. Поэтому

$$\beta = \pi - 2 \arcsin(1/n_{\text{ст}}) \approx \pi/2.$$

Итак, видимой для паука является противоположная для него половина поверхности шара; там и должна находиться муха.

4.11. Через боковую поверхность цилиндра не выйдет ни один луч, если для луча с углом падения $\gamma \approx \pi/2$ (рис. 237) угол падения α на внутреннюю поверхность будет удовлетворять соотношению $\sin \alpha > 1/n$. В этом случае на боковой поверхности луч испытает полное внутреннее отражение.

Из геометрических соображений следует, что

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \quad \sin \beta = 1/n.$$

Таким образом,

$$n_{\min} = \sqrt{2}.$$

4.12. Из условия задачи следует, что фокусы обеих линз совмещены, т. е. расстояние между линзами равно $3f$, где f — фокусное расстояние более слабой линзы.

В первом случае все лучи, попавшие в трубу, выйдут из нее и образуют круглое пятно радиуса $r/2$, где r — радиус трубы (рис. 238). Во втором случае из трубы выйдут только те лучи, которые до трубы шли на расстоянии, меньшем чем $r/2$, от оси трубы. А на экране эти лучи образуют

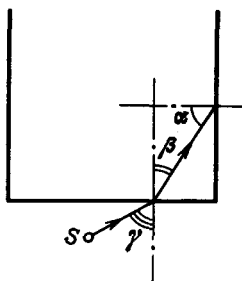


Рис. 237

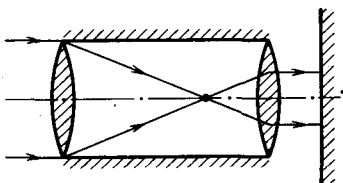


Рис. 238

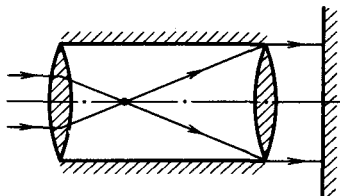


Рис. 239

круглое пятно радиуса r (рис. 239). Таким образом, если J — сила света, падающего на трубу, то отношение освещенностей пятен до и после перевертывания трубы равно

$$E_1 = \frac{J}{\pi (r/2)^2}, \quad E_2 = \frac{J/4}{\pi r^2}, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{16}.$$

4.13. В аппарат поступает свет, отраженный от поверхности фасада. Отражение света от штукатурки можно считать практически не зависящим от угла отражения. В этом случае на объектив аппарата падает световая энергия от объекта, пропорциональная телесному углу, под которым виден из объектива фасад. При сокращении расстояния до объекта в два раза телесный угол увеличивается в четыре раза, и на объектив от той же площади объекта падает в четыре раза больше световой энергии.

При таких больших расстояниях до объекта расстояние от объектива до пленки в аппарате практически не изменяется при выставлении на объективе расстояния до объекта, т. е. при фокусировании последнего, и равно фокусному расстоянию объектива. Телесный угол, внутри которого энергия от объектива падает на площадь изображения, зави-

сит линейно от телесного угла, под которым виден фасад, т. е. линейно зависит от расстояния до объекта. В этом случае освещенность площади изображения (она по условию равномерно распределена по этой площади), которая и определяет выдержку, пропорциональна соответствующей энергии, падающей на объектив от фасада, и обратно пропорциональна площади изображения. Так как это отношение практически не зависит от расстояния до объекта при данных условиях, то выдержку менять было не нужно.

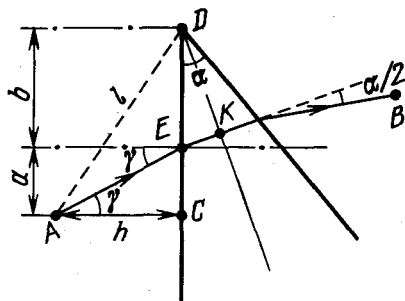


Рис. 240

4.14*. Задача является аналогом оптической задачи, в которой рассматривается преломление плоской волны в призме. При этом лучу света, идущему от точки A в точку B (рис. 240),

согласно законам геометрической оптики, требуется наименьшее время по сравнению со всеми другими траекториями.

Рыбак должен двигаться по траектории «луча света», т. е. подойти к точке E залива под углом γ , переплыть залив в лодке перпендикулярно биссектрисе угла α и двигаться далее по суше в направлении к точке B .

Угол γ найдем из закона преломления ($n = 2$):

$$\sin \gamma = n \sin (\alpha / 2) .$$

Расстояние a равно

$$a = h \operatorname{tg} \gamma = h \frac{n \sin (\alpha / 2)}{\sqrt{1-n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}} .$$

Расстояние b найдем из уравнения $a+b=\sqrt{l^2-h^2}$. Отсюда

$$b = \sqrt{l^2-h^2} - h \frac{n \sin (\alpha / 2)}{\sqrt{1-n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}} .$$

Если $b > 0$, т. е. $l^2-h^2 > h^2 \frac{n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}{1-n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}$, то рыбак должен воспользоваться лодкой. Отдельные участки пути при этом будут равны

$$EK = p = b \sin \frac{\alpha}{2} = \left(\sqrt{l^2-h^2} - h \frac{n \sin (\alpha / 2)}{\sqrt{1-n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}} \right) \sin \frac{\alpha}{2} ,$$

$$AE = q = \frac{h}{\cos \gamma} = \frac{h}{\sqrt{1-n^2 \sin ^2 (\alpha / 2)}} .$$

Итак, если $\frac{l^2 - h^2}{h^2} > \frac{n^2 \sin^2(\alpha/2)}{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}$, то искомое время равно

$$t = 2 \left(\frac{q}{v} + \frac{p}{v/n} \right) =$$

$$= \frac{2h}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}} + \frac{n \sqrt{l^2 - h^2} \sin(\alpha/2)}{h} - \frac{n^2 \sin^2(\alpha/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}} \right) =$$

$$= \frac{2h}{v} \left(\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h} n \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Если $\frac{l^2 - h^2}{h^2} \leq \frac{n^2 \sin^2(\alpha/2)}{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}$, то $t = \frac{2l}{v}$.

4.15. В силу симметрии изображение точечного источника S будет опять на расстоянии b от шара, но с другой стороны (рис. 241).

4.16. Наблюдатель внутри ко-
рабля сможет увидеть лишь те лучи,
для которых $\sin \alpha < 1/n_{\text{ст}}$ (если
 $\sin \alpha > 1/n_{\text{ст}}$, то такой луч испытает

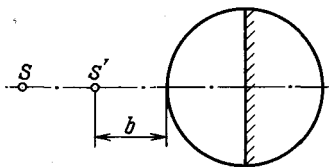


Рис. 241

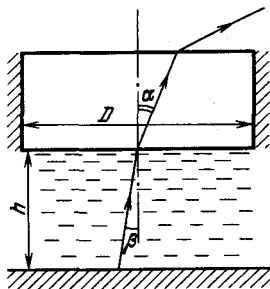


Рис. 242

полное внутреннее отражение и не попадет к наблюдателю, рис. 242). Для угла β имеем соотношение

$$n_{\text{в}} \sin \beta = n_{\text{ст}} \sin \alpha, \quad \sin \beta = \frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}} \sin \alpha,$$

где $n_{\text{ст}}$ — показатель преломления стекла. Так как $|\sin \alpha| < 1/n_{\text{ст}}$, то $|\sin \beta| < 1/n_{\text{в}}$. Поэтому наблюдатель сможет видеть только те объекты, свет от которых попадает на иллюминатор с углом падения $\beta \leq \arcsin(1/n_{\text{в}})$. Из рис. 242 ясно, что радиус R круга на дне, доступного наблюдению, будет $R \approx h \operatorname{tg} \beta$, и искомая площадь ($h \operatorname{tg} \beta \gg D/2$) равна

$$S = \pi R^2 \approx \pi h^2 / (n_{\text{в}}^2 - 1) \approx 82 \text{ м}^2.$$

4.17*. Близорукие люди носят рассеивающие очки, уменьшающие оптическую силу их глаз, а дальнорукые — собирающие. Нетрудно сообразить, что глаз за рассеивающей линзой будет казаться уменьшенным, а за собирающей — увеличенным. Однако если вы не видели вашего собеседника без очков, то определить, увеличены или

уменьшены его глаза, очень трудно, особенно если очки не слишком сильные. Проще всего определить, куда сдвигается видимый край лица за очками по отношению к соседним частям лица: если внутрь, то это рассеивающие линзы — у собеседника близорукость; если наружу, то собирающие линзы — дальнозоркость.

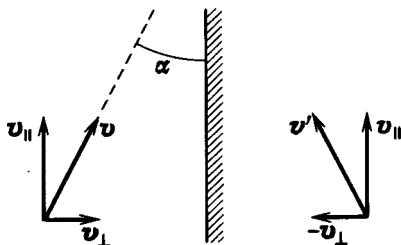


Рис. 243

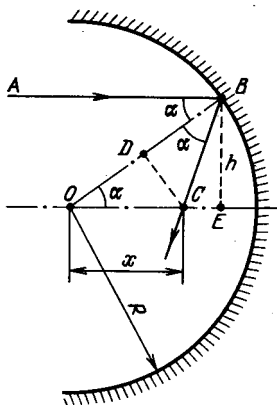


Рис. 244

4.18. Разложим вектор скорости человека v на две составляющие — одну параллельную зеркалу $v_{\parallel}$ и другую — перпендикулярную зеркалу $v_{\perp}$: $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ (рис. 243). Очевидно, что скорость изображения будет равна $v' = v_{\parallel} - v_{\perp}$. Поэтому скорость, с которой человек приближается к своему изображению, находится как скорость человека относительно своего изображения по формуле

$$v_{\text{отн}} = 2v_{\perp} = 2v \sin \alpha.$$

4.19. Пусть O — центр сферической поверхности зеркала, ABC — луч, который падает на расстоянии BE от оси зеркала. $OB = R$ (рис. 244). Из прямоугольного треугольника OBE найдем, что $\sin \alpha = h/R$. Треугольник OBC равнобедренный, так как $\angle ABO = \angle OBC$ по закону отражения, а $\angle BOC = \angle ABO$ как внутренние, накрест лежащие углы. Отсюда $OD = DB = R/2$. Из треугольника ODC находим

$$x = R/(2 \cos \alpha) = R^2/(2\sqrt{R^2 - h^2})$$

(C — точка пересечения отраженного от зеркала луча с оптической осью).

Для луча, проходящего на расстоянии h_1 , ввиду того что $h_1^2 \ll R^2$, $x_1 \approx R/2$ с погрешностью около 0,5%. Для луча, проходящего на расстоянии h_2 , расстояние $x_2 = 3,125$ см. Окончательно получим

$$\Delta x = x_2 - x_1 \approx 0,6 \text{ см} \neq 0 (!)$$

4.20. Рассмотрим некоторую светящуюся точку A нити и произвольный луч AB , выходящий из нее. Проведем плоскость через этот луч и светящуюся нить. Из геометрии задачи очевидно, что данный луч при всевозможных отражениях всегда будет оставаться в построенной плоскости (рис. 245). После первого отражения от конической поверхности луч AB пойдет так, как если бы он вышел из точки A' — мнимого изображения точки A . А чтобы после первого отражения

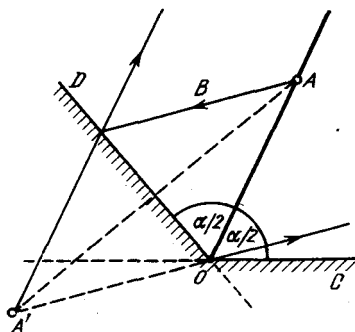


Рис. 245

ни один выходящий из точки A луч больше ни разу не попал на зеркало, необходимо, чтобы точка A' лежала не выше прямой OC — второй образующей конуса, лежащей в плоскости луча (точка O — вершина конической поверхности). Это будет иметь место, если

$$\angle A'OD + \angle AOD + \angle AOC = 3(\alpha/2) \geq 180^\circ.$$

Следовательно,

$$\alpha_{\min} \geq 120^\circ.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

	Задачи	Решения
1. Механика	5	61
2. Теплота и молекулярная физика	30	125
3. Электричество и магнетизм	41	149
4. Оптика	56	179

*Александр Иванович Буздин
Вячеслав Анатольевич Ильин
Игорь Владимирович Кривченко
Сергей Сергеевич Кротов
Никита Алексеевич Свешников*

**ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ФИЗИЧЕСКИХ
ОЛИМПИАД**

Под редакцией С. С. Кротова