

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ В МГУ В 2000

Сборник содержит программу вступительных экзаменов по физике и задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах на факультет наук о материалах, на химический факультет, на факультет вычислительной математики и кибернетики, а также на физический факультет. Кроме того, в сборник включены задачи, предлагавшиеся на олимпиадах "Абитуриент МГУ-2000".

Все задачи даны с подробными решениями. Особое внимание уделено обоснованию применения тех или иных законов, допущений и анализу полученного ответа.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия со школьниками.

Авторский коллектив:

Алешкевич В.А., Грачев А.В., Грибов В.А., Дорофеев О.Ф., Зоте-ев А.В., Куприянов А.К., Никитин С.Ю., Николаев И.П., Погожее В.А., Подымова Н.Б., Полякова М.С., Семенов М.В., Скипетрова Л.А., Склянкин А.А., Степанова В.С., Чесноков С.С., Шмальгаузен В.И., Якута А.А.

СОДЕРЖАНИЕ

Программа вступительного экзамена по физике	3
Факультет наук о материалах	
Условия задач	11
Решения задач	14
Химический факультет	
Условия задач	20
Решения задач	26
Факультет вычислительной математики и кибернетики	
Условия задач	34
Решения задач	39
Физический факультет	
Условия задач	
I. Механика	52
II. Молекулярная физика и термодинамика	56
III. Электричество и магнетизм	59
IV. Оптика	62
Решения задач	
I. Механика.	64
II. Молекулярная физика и термодинамика	86
III. Электричество и магнетизм	99
IV. Оптика	112

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе программы средней общеобразовательной школы. По сравнению с программами вступительных экзаменов в вузы прошлых лет данная программа более конкретизирована, отдельные вопросы сформулированы в более развернутом виде. Это облегчит абитуриенту подготовку, поскольку формулировки большинства пунктов программы по существу являются развернутым планом ответа. В программу включено несколько вопросов (выделены *курсивом*), которые рассмотрены в школьных учебниках, изданных в 1978-1989 гг., и в дополнительной литературе, указанной в конце программы. Теоретические вопросы билетов вступительных экзаменов формируются из вопросов данной программы.

При проведении экзамена основное внимание уделяется пониманию материала, а не его механическому воспроизведению. Поэтому при подготовке основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для средней школы, указанных в конце настоящей программы.

I. МЕХАНИКА

I.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движение. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение.

Равномерное движение по окружности. *Угловая скорость*. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

1.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы.

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная и способы ее измерения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. *Центр масс*. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел в поле тяжести Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

I.4. Статика твердого тела

Сложение сил. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие тел.

I.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, погруженных в жидкость или газ. Плавание тел.

I.6. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине (пружинный маятник). Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волны. Фронт волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн.

Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Массы и размеры молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

II.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам. Расчет работы газа с помощью pV -диаграмм. *Теплоемкость идеального одноатомного газа при изохорном и изобарном процессах.*

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

II.3. Изменение агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояние вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. *Поле уединенной заряженной проводящей сферы.*

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. *Потенциал поля точечного заряда.* Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Емкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. *Емкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.* Энергия электростатического поля заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

III.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования постоянного тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Измерение тока и разности потенциалов в цепи.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Закон электролиза (закон Фарадея).

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. *P-n-переход* и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

III.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

III.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции.

Энергия магнитного поля катушки индуктивности с током.

III.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращения энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Изобретение радио Поповым.

IV. ОПТИКА

IV.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Законы отражения света. Плоское зеркало.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. *Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.*

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

IV.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты Эйнштейна.

V. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Перышкин А.В., Родина Н.А.* Физика. Учебник для 7-го кл. средн. шк. М.; Просвещение, 1991 и последующие издания (или Физика-6 тех же авторов предыдущих лет издания).

2. *Перышкин А.В., Родина Н.А.* Физика. Учебник для 8-го кл. средн. шк. М.; Просвещение, 1991 и последующие издания (или Физика-7 тех же авторов предыдущих лет издания).

3. *Кикоин И.К., Кикоин А.К.* Физика. Учебник для 9-го кл. средн. шк. М.; Просвещение, 1990 и последующие издания (или Физика-8 тех же авторов предыдущих лет издания).

4. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б.* Физика. Учебник для 10-го кл. средн. шк. М.; Просвещение, 1990 и последующие издания (или *Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я.* Физика-9. М.; Просвещение, 1980 и последующие издания).

5. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б.* Физика. Учебник для 11-го кл. средн. шк. М.; Просвещение, 1991 и последующие издания (или *Буховцев Б.Б., Мякишев Г.Я.* Физика-10. М.; Просвещение, 1974 и последующие издания).

6. Задачи вступительных экзаменов (и олимпиад) по физике. М.; Изд-во физического факультета МГУ, 1992 и последующие годы.

7. *Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я.* Задачи по физике для поступающих в вузы. М.; Наука, 1978 и последующие издания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландсберг Г.С.* Элементарный учебник физики, тт. 1-3. М.; Высшая школа, 1975 и последующие издания.

2. *Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д.* Справочное руководство по физике. М.; Наука, 1975 и последующие издания.

3. *Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М.* Сборник задач по элементарной физике. М.; Наука, 1974 и последующие издания.

4. *Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М., Калачевский Н.Н., Ко-соуров Г.Н., Мазанько И.П.* Сборник задач по физике. М.; Наука, 1971 и последующие издания.

5. *Гольдфарб Н.И.* Сборник вопросов и задач по физике. М.; Высшая школа, 1973 и последующие издания.

ФАКУЛЬТЕТ НАУК О МАТЕРИАЛАХ

В соответствии с Правилами приема в МГУ абитуриенты ФНМ сдавали на выбор экзамен по физике или химии. Письменный экзамен по физике длился четыре часа и оценивался по десятибалльной системе.

У С Л О В И Я З А Д А Ч

ВАРИАНТ 1Ф-2000

1. Покоившееся тело падает с высоты H , проходя в последнюю секунду падения третью часть пути. Определить H . Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2 .

2. Один раз камень бросают со скоростью v_1 по горизонтальной поверхности льда, а второй раз – со скоростью v_2 под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. В каком случае камню была сообщена большая скорость и во сколько раз, если в обоих случаях перемещения камня оказались равными? Коэффициент трения камня о лед равен $\mu = 0,02$. Сопротивлением воздуха пренебречь и считать, что во втором случае после падения камень не перемещался.

3. Вверх по наклонной плоскости в направлении ее наиболее крутого подъема пущена шайба. Через некоторое время она останавливается и соскальзывает вниз. Каково отношение времени спуска шайбы t_1 ко времени ее подъема t_2 , если коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,07$, а наклон самой плоскости к горизонту $\alpha = 60^\circ$?

4. В гладком вертикальном цилиндре под подвижным поршнем площадью S и массой M в объеме V содержится газ при температуре T . На сколько увеличится температура газа, если на его нагревание затратить количество теплоты Q , атмосферное давление равно p_0 , а теплоемкость газа при изохорическом процессе равна C_V ?

5. В некоторой среде распространяется волна. За время, в течение которого частица среды совершает $n = 140$ колебаний, волна распространяется на расстояние $l = 110 \text{ м}$. Найти длину волны λ .

6. Электрическая цепь, показанная на рис. 1, состоит из двух конденсаторов емкостью $C_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$ и $C_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$, двух источников постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ В}$, амперметра A и ключа K .

Найти величину заряда, который пройдет через амперметр, после перевода ключа К из положения 1 в положение 2.

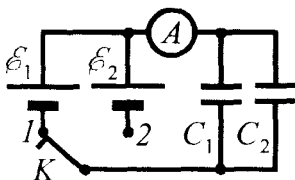


Рис. 1.

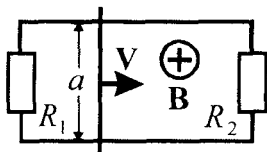


Рис. 2.

7. Прямоугольная проволочная рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ Тл так, что силовые линии поля перпендикулярны плоскости рамки. В боковые стороны рамки, длина которых $a = 5$ см, включены резисторы, сопротивления которых равны $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 2,5$ Ом и много больше сопротивлений всех прочих элементов цепи. По рамке со скоростью $V = 1$ см/с скользит проводник так, что он остается параллельным боковым сторонам рамки (см. рис. 2). Найти величину индукционного тока, текущего по этому проводнику.

8. На расстоянии $a = 15$ см за линзой поставлено плоское зеркало, плоскость которого перпендикулярна оптической оси линзы. Перед линзой находится предмет, а его действительное перевернутое изображение, даваемое рассматриваемой оптической системой, находится в плоскости линзы, причем величина изображения равна величине самого предмета. Определить фокусное расстояние линзы.

ВАРИАНТ 2Ф–2000

1. Тело, брошенное вертикально вверх, проходит в первую секунду половину высоты подъема. Какой путь пройдет тело в последнюю секунду падения? Величину ускорения свободного падения g считать равной 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Из одной точки по одному и тому же азимуту одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью u_0 под углами $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами спустя время $\Delta t = 1$ с после начала движения, если $u_0 = 10 \text{ м/с}$.

3. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H и ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной

плоскости (см. рис. 3). После этого тело поднимается на высоту $h = H/2$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Считая удар абсолютно упругим, найти коэффициент трения μ между телом и плоскостью.

4. Из баллона объемом $V = 10$ л, содержащего азот под давлением $p_1 = 5 \cdot 10^6$ Па при температуре $T_1 = 280$ К, вытекло 0,2 кг газа. После этого газ нагрели до температуры $T_2 = 300$ К. Найти давление газа в баллоне после нагрева. Молярная масса азота $\mu = 28$ г/моль, значение универсальной газовой постоянной R принять равной $8,31$ Дж/(моль·К).

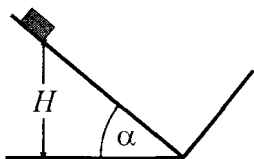


Рис. 3.

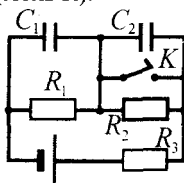


Рис. 4.

5. Волна с частотой $f = 5$ Гц распространяется в пространстве со скоростью $v = 3$ м/с. Найти разность фаз колебаний в двух точках пространства, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 20$ см и расположенных на прямой, совпадающей с направлением распространения волны.

6. Два конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рис. 4. Сопротивления резисторов равны $R_1 = 300$ Ом и $R_2 = R_3 = 100$ Ом. При разомкнутом ключе K конденсатор C_2 имеет заряд $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какой заряд установится на конденсаторе C_1 , если ключ K замкнуть? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

7. Квадратная рамка со стороной $a = 0,1$ м и массой $m = 0,01$ кг лежит на непроводящей горизонтальной плоскости в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, направленной перпендикулярно одной из сторон рамки. Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала подниматься? Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с².

8. Фотограф с лодки фотографирует предмет, лежащий на дне прямо под ним на глубине $h = 2$ м. Во сколько раз изображение на пленке будет меньше предмета, если фокусное расстояние объектива $F = 10$ см, расстояние от объектива до поверхности воды равно $l = 50$ см, а показатель преломления воды $n = 1,33$?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ВАРИАНТ 1Ф-2000

1. Обозначим через $t_1 + 1$ время падения тела (в секундах). Тогда из условия задачи следует, что тело за время t_1 проходит высоту $2H/3$, т.е. $2H/3 = gt_1^2/2$. Поэтому $t_1 = \sqrt{4H/3g}$. Скорость тела в этот момент времени равна $v_1 = gt_1$. За оставшееся время $t_2 = 1$ с перемещение тела равно $H/3 = gt_1 t_2 + gt_2^2/2$. Подставляя в эту формулу выражение для t_1 и учитывая, что по условию $g = 10 \text{ м/с}^2$, а $t_2 = 1$ с, получим уравнение для вычисления высоты в метрах: $H - \sqrt{120H} - 15 = 0$. Полагая $\sqrt{H} = x$, получим:

$$x^2 - \sqrt{120}x - 15 = 0, \quad x_{1,2} = \sqrt{30} \pm \sqrt{45}.$$

По условию $x > 0$, поэтому $x \approx 5,5 + 6,7 = 12,2$ и высота $H \approx 149 \text{ м}$.

2. При движении по льду камень приобретает ускорение $a = -\mu g$, и величина его перемещения до остановки равна $\Delta r_1 = -v_1^2/2a = v_1^2/2\mu g$. Когда же камень бросают под углом к горизонту, величина его перемещения до точки падения равна $\Delta r_2 = v_2^2 \sin 2\alpha/g$. По условию задачи $\Delta r_1 = \Delta r_2$, откуда несложно найти, что $v_1/v_2 = \sqrt{2\mu \sin 2\alpha} = 0,2$.

3. При движении шайбы вниз уравнение ее движения имеет вид:

$$ma_1 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

а при движении вверх

$$ma_2 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha.$$

По условию задачи $\frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2}$, откуда следует, что отношение времени соскальзывания t_1 ко времени подъема t_2 равно:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 0,07}{\sqrt{3} - 0,07}} \approx 1,04.$$

4. Из условия задачи следует, что масса газа m и его давление остаются постоянным, причем $p = p_0 + Mg/S$. Пусть в исходном состоянии

объем газа равен V_1 а после нагревания – V_2 . Тогда согласно уравнению

Клапейрона–Менделеева: $V_1 = \frac{mR}{\mu p} T$, а $V_2 = \frac{mR}{\mu p} (T + \Delta T)$. Поэтому

$V_2 - V_1 = \frac{mR}{\mu p} \Delta T$. На основании первого закона термодинамики, количество

теплоты Q , полученное газом, расходуется на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение работы $\Delta A = p \Delta V$:

$$Q = \Delta U + p \Delta V = C_V \Delta T + \frac{mR}{\mu} \Delta T.$$

Из последнего выражения следует, что изменение температуры

$$\Delta T = \frac{Q}{C_V + mR/\mu} = \frac{QT}{C_V T + (p_0 + Mg/S)V}.$$

5. По определению длина волны λ связана со скоростью ее распространения v соотношением:

$$\lambda = vT.$$

В то же время из условия задачи следует, что $v = l/t$, $T = t/n$, а потому

$$\lambda = l/n \approx 0,79 \text{ м}.$$

6. При нахождении ключа в положении 1 (см. рис. 1) заряды на конденсаторах C_1 и C_2 равны $Q_1 = C_1 \mathcal{E}_1$ и $Q_2 = C_2 \mathcal{E}_1$ соответственно, где $\mathcal{E}_1$ – величина ЭДС первого источника. Общий заряд на конденсаторах равен $Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \mathcal{E}_1$. После переключения ключа в положение 2 заряды на конденсаторах C_1 и C_2 становятся равными $Q'_1 = C_1 \mathcal{E}_2$ и $Q'_2 = C_2 \mathcal{E}_2$ соответственно. Поскольку полярность зарядов на обкладках конденсаторов остается той же, что и в исходном состоянии, при дозарядке конденсаторов через амперметр протечет заряд, величина которого равна

$$\Delta q = |\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2|(C_1 + C_2) = 2,5 \text{ мкКл}.$$

7. Поскольку ЭДС индукции возникает в контуре, где R_1 и R_2 оказываются соединенными параллельно, то их общее сопротивление находится из соотношения: $R_0^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$.

Величина ЭДС, возникающая при заданном в условии движении проводника, равна $\mathcal{E} = a \nu B$. Поэтому сила индукционного тока I равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{a \nu B}{R_1 R_2} (R_1 + R_2) = 1,25 \text{ мА}.$$

8. Пусть d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, а F — фокусное расстояние линзы. Из формулы линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ следует, что $d = \frac{F f}{f - F}$. По условию задачи величина изображения L равна величине самого предмета l . Поэтому

$$1 = \frac{l}{L} = \frac{d}{f} = \frac{F}{f - F}.$$

Следовательно, $F = 0,5 f$. С другой стороны, по условию задачи $f = 2a$. Поэтому $F = a = 15 \text{ см}$.

ВАРИАНТ 2Ф–2000

1. По условию задачи $H/2 = v_0 t_0 - g t_0^2/2 = v_0 - 5$, т.к. $t_0 = 1 \text{ с}$. Из этого выражения следует, что $H = 2(v_0 - 5)$. Общее время подъема t определяется выражением $v_0 - g t = 0$, откуда $t = v_0/g$. Учитывая, что $H = g t^2/2 = 2 g t - 10$, получаем следующее уравнение для времени подъема:

$$4 g t - 20 = g t^2 \text{ или } t^2 - 4 t + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $t_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2}) \text{ с}$, или $t_1 \approx 0,6 \text{ с}$ и $t_2 \approx 3,4 \text{ с}$.

По условию первый корень не может быть решением задачи. Поэтому $t \approx 3,4 \text{ с}$. Путь, пройденный телом за последнюю секунду падения, равен высоте, на которую тело поднимется за первую секунду подъема

$$h = H/2 = g t^2/4 \approx 29 \text{ м}.$$

2. Обозначим через x_1 и y_1 координаты первого тела, а через x_2 и y_2 — координаты второго тела. Тогда при условии, что оба тела совершают свободное падение, т.е. при $t \leq t_n = 2 v_0 \sin \alpha / g$

$$x_{1,2} = v_0 t \cos \alpha_{1,2}, \quad y_{1,2} = v_0 t \sin \alpha_{1,2} - g t^2/2.$$

Полагая, как и в предыдущей задаче, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, получаем, что время полета первого тела $t_{п1} = 1 \text{ с}$, а время полета второго тела $t_{п2} \approx 1,7 \text{ с}$. Следовательно, вплоть до заданного момента оба тела совершают свободное падение, а расстояние между телами в этот времени равно

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \sqrt{[x_1(\Delta t) - x_2(\Delta t)]^2 + [y_1(\Delta t) - y_2(\Delta t)]^2} = \\ &= v_0 \Delta t \sqrt{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 + (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)^2} = \\ &= v_0 \Delta t \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + 4 \cos^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = \\ &= 2 v_0 \Delta t \left| \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right| \approx 5,2 \text{ м}. \end{aligned}$$

3. Длина наклонной плоскости $l = H / \sin \alpha$. Величина силы трения скольжения $F = \mu m g \cos \alpha$. Если тело после упругого удара поднялось на высоту $h = H/2$, то согласно закону изменения механической энергии должно иметь место следующее соотношение:

$$m g H = m g h + \mu m g \frac{H}{\sin \alpha} \cos \alpha + \mu m g \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

Из этого выражения после несложных преобразований получим:

$$\mu = \frac{H - h}{H + h} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

4. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева масса азота, первоначально находившегося в баллоне, была равна $m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT}$. Следовательно, после утечки и нагревания оставшегося газа его давление должно стать равным $p_2 = \frac{m_1 - m}{\mu V} R T_2$, или $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} - \frac{m}{\mu V} R T_2 \approx 3,6 \text{ МПа}$.

5. Из уравнения плоской синусоидальной волны $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ следует, что разность фаз колебаний между двумя точками пространства вдоль направления распространения волны определяется выражением $\Delta \varphi = k(x_2 - x_1) = k l$, где $k = 2\pi / \lambda$, т.е.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi l f}{v} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад} = 120^\circ.$$

6. Поскольку в установившемся режиме заряды конденсаторов не изменяются, то при разомкнутом ключе через резисторы согласно закону Ома должен протекать ток $I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$, а заряд конденсатора C_2 должен быть равен $Q_2 = C_2 I R_2$. Из этих выражений следует, что ЭДС источника $\mathcal{E} = Q_2 \frac{R_1 + R_2 + R_3}{C_2 R_2}$. После замыкания ключа, разряда конденсатора C_2 и дозаряда конденсатора C_1 напряжение на резисторе R_1 (и на конденсаторе C_1) станет равным $U_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3}$, а искомый заряд конденсатора C_1 будет равен $Q_1 = C_1 U_1 = Q_2 R_1 C_1 \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_3) R_2 C_2} = 7,5 \text{ мкКл}$.

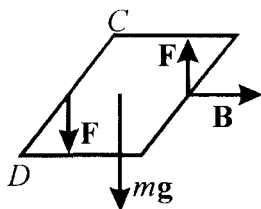


Рис. 5.

7. При пропускании тока I через рамку на ее стороны, перпендикулярные полю, действуют силы Ампера, направленные вертикально, величины которых равны $F = I a B$. Кроме того, на рамку действует сила тяжести mg и сила реакции N со стороны плоскости. На рис. 5 показаны сила тяжести и силы Ампера. Рамка начнет подниматься, поворачиваясь вокруг стороны CD , когда момент aF пары сил Ампера начнет превышать момент силы тяжести относительно оси, совпадающей с этой стороной, т.е. относительно нее момент силы реакции опоры равен нулю, т.е. при условии $aF \geq amg/2$. Поэтому искомая сила тока

$$I \geq mg/(2aB) = 5 \text{ А}.$$

8. Для решения задачи достаточно вспомнить, что под поверхностью жидкости все предметы кажутся немного приподнятыми. Действительно, рассмотрим луч, идущий из жидкости почти перпендикулярно ее поверх-

ности. Согласно обозначениям на рис. 6 с учетом малости углов α и β можно утверждать, что $OK/KB = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$, а $AD/OD = \operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta$. В то же время, согласно закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n = OD/BK$. Поэтому предмет, находящийся на глубине $AK = h$, можно заменить предметом, находящимся в воздухе на расстоянии $d = l + h/n$ от объектива фотоаппарата,

а его изображение согласно формуле тонкой линзы

$(\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F})$ будет находиться от объектива на расстоянии

$f = Fd/(d - F)$. На рис. 7 показано построение изображения

стрелки длиной b_1 , даваемого тонкой линзой L . Из этого

рисунка следует, что размер изображения b_2 можно найти

из соотношения $b_1/b_2 = d/f$.

Подставляя в это выражение ранее найденные значения f и

d , получаем, что размер изображения на пленке будет в

$$k = \frac{b_1}{b_2} = \frac{d - F}{F} = \frac{l + h/n - F}{F} \approx 19 \text{ раз меньше самого предмета.}$$

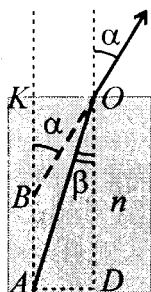


Рис. 6.

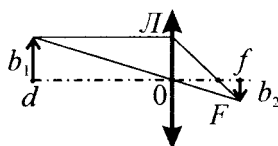


Рис. 7.

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вступительный экзамен по физике на химическом факультете МГУ традиционно проводится в устной форме. Экзаменационные билеты содержат одну задачу и два теоретических вопроса, которые составлены в полном соответствии с программой вступительных экзаменов по физике, приведенной в этом сборнике. Для ознакомления приведен полный текст четырех экзаменационных билетов, использовавшихся на экзаменах в 2000 году.

Экзаменационный билет № 5.

1. Тело массой $M = 5$ кг, лежащее на гладком горизонтальном столе, прикреплено к стене невесомой пружиной с коэффициентом жесткости $k = 2$ кН/м. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летевшая вдоль оси пружины со скоростью $V = 50$ м/с. Найти максимальную величину силы, с которой пружина действует на стену в процессе возникших колебаний.

2. Идеальный газ. Изотермический, изохорный и изобарный процессы. Уравнение Клапейрона–Менделеева (уравнение состояния идеального газа).

3. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение энергии атомом. Спектральный анализ.

Экзаменационный билет № 7.

1. Луч света падает нормально на боковую грань прозрачной призмы. После прохождения через призму луч отклоняется на угол $\varphi = 4^\circ$ от первоначального направления. Преломляющий угол призмы $\delta = 8^\circ$. Найти показатель преломления материала, из которого сделана призма.

2. Давление в жидкостях и газах. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст. Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Сообщающиеся сосуды.

3. Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа – диод.

Экзаменационный билет № 14.

1. Артиллерийское орудие массой $M = 2000$ кг установлено на крепостной стене на высоте $H = 20$ м. Начальная скорость отдачи орудия равна $V = 2$ м/с. На каком расстоянии от стены снаряд упадет на землю при горизонтальном выстреле из такого орудия? Масса снаряда $m = 10$ кг. Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

2. Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях. Превращения энергии при гармонических колебаниях.

3. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Экзаменационный билет № 20.

1. Параллельно отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки влетает пучок электронов, движущихся со скоростью $V_0 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Через промежуток времени $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ с их скорость оказывается равной $V = 1 \cdot 10^7$ м/с. Считая, что поле между пластинами однородно, найти его напряженность E . Модуль удельного заряда электрона считать равным $e/m = 1,8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

2. Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах. Масса и размер молекул.

3. Электрический ток. Условия существования тока в цепи. Закон Ома для участка цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для полной цепи.

Далее приводятся условия и решения всех экзаменационных задач, предлагавшихся на экзамене по физике на химическом факультете МГУ летом 2000 г.

У С Л О В И Я З А Д А Ч

1. Два груза одинаковой массы $m = 0,5$ кг связаны легкой нерастяжимой нитью и движутся вертикально вверх под действием силы F , приложенной к одному из грузов. Нить обрывается при величине силы $F = F_1 \geq 20$ Н. При какой величине силы $F = F_2$ разорвется нить, если нижний груз закрепить неподвижно? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

2. Ракета, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, взлетает с постоянным ускорением $a = 3,3$ м/с². С какой скоростью ракета упадет на Землю, если ее двигатель проработает в течение $\tau = 10$ с? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

3. Артиллерийское орудие массой $M = 2000$ кг установлено на крепостной стене на высоте $H = 20$ м. Начальная скорость отдачи орудия равна $V = 2$ м/с. На каком расстоянии от стены снаряд упадет на землю при горизонтальном выстреле из такого орудия? Масса снаряда $m = 10$ кг. Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

4. Двое рабочих должны выкопать цилиндрический колодец глубиной $H = 2$ м. До какой глубины h следует копать первому рабочему, чтобы работа оказалась распределенной поровну? Считать, что грунт однороден и рабочие поднимают его до поверхности Земли.

5. При выстреле из пушки массой $M = 800$ кг вылетает снаряд под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. При этом пушка за счет отдачи откатывается в горизонтальном направлении с начальной скоростью $V = 0,5$ м/с. Найти изменение импульса системы пушка-снаряд в результате такого выстрела. Трением пренебречь.

6. Тело массой $M = 5$ кг, лежащее на гладком горизонтальном столе, прикреплено к стене невесомой пружиной с коэффициентом жесткости $k = 2$ кН/м. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летевшая вдоль оси пружины со скоростью $V = 50$ м/с. Найти максимальную величину силы, с которой пружина действует на стену в процессе возникших колебаний.

7. На дне вертикального цилиндрического сосуда радиусом $R = 10$ см лежит шар радиусом $r = 5$ см. Плотность материала шара в два раза меньше, чем плотность воды. Какой объем воды следует налить в сосуд, чтобы шар перестал оказывать давление на дно сосуда?

8. В гладком цилиндре под тяжелым поршнем массой $M = 10$ кг и сечением $S = 14$ см² находится идеальный газ. На сколько процентов изменится высота столба газа в цилиндре, если его поместить в лифт, движущийся с ускорением $a = 4$ м/с², направленным вертикально вниз? Считать, что температура газа в цилиндре не изменяется, атмосферное давление равно $p_0 = 10^5$ Па, а ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с².

9. Рабочим телом тепловой машины является один моль идеального одноатомного газа. Рабочий цикл машины, показанный на рис. 8, состоит из адиабатного расширения 1–2, изотермического сжатия 2–3 и изохорного процесса 3–1. При этом ее КПД равен $\eta = 20\%$, а работа, совершаемая над газом в процессе изотермического сжатия, равна $A = 25$ Дж. Найти разность ΔT максимальной и минимальной температур газа в цикле. Универсальную газовую постоянную считать равной $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

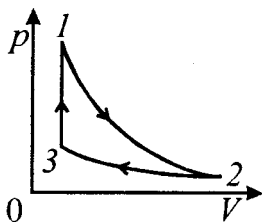


Рис. 8.

10. В двух баллонах объемами $V_1 = 25$ л и $V_2 = 50$ л находится влажный воздух при одинаковой температуре. Относительная влажность воздуха в первом баллоне $\varphi_1 = 40\%$, а во втором – $\varphi_2 = 20\%$. Какой будет относительная влажность, если баллоны соединить трубкой и дождаться установления равновесия? Температуру считать постоянной.

11. В однородном электрическом поле подвешена на невесомой и нерастяжимой нити бусинка массой $m = 100$ мг, несущая заряд $q = 2$ мкКл. Напряженность поля равна 500 В/м, силовые линии направлены вертикально вниз. Нить отклонили на угол $\alpha = 90^\circ$ от вертикали и отпустили. Найти силу натяжения нити в момент прохождения ею вертикального положения. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 10$ м/с².

12. От верхней пластины горизонтально расположенного плоского конденсатора падает дробинка массой $m = 20$ мг. При абсолютно упругом ударе о нижнюю пластину на дробинку переходит заряд $q = 50$ нКл. Найти скорость дробинки непосредственно перед ударом о верхнюю пластину. Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 50$ В.

13. Протон, ускоренный электрическим полем, попадает в магнитное поле и движется по дуге окружности с радиусом $R = 0,3$ м. При этом вектор скорости протона изменяет свое направление, поворачиваясь на угол $\Delta\varphi = 45^\circ$ за время $\Delta t = 10^{-7}$ с. Найти ускоряющую разность потенциалов U . Действием силы тяжести на протон пренебречь. Заряд протона считать равным $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а его массу — $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

14. К клеммам источника постоянного тока, замкнутого на нагрузку с сопротивлением $R = 8$ Ом, подключен конденсатор C . Если конденсатор включить в эту цепь последовательно, то заряд на его обкладках окажется больше в $k = 1,5$ раза. Найти внутреннее сопротивление источника.

15. Мощность электрического нагревателя, подключенного к бытовой электросети, равна $P = 840$ Вт. За какое время τ можно вскипятить $m = 1$ кг воды, если воспользоваться двумя такими нагревателями, соединив их последовательно и подключив к той же сети? Начальная температура воды $t = 20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ Дж/(г·К). Потери тепла не учитывать.

16. Елочная гирлянда состоит из $N = 20$ одинаковых лампочек, соединенных последовательно. Каждая из них рассчитана на напряжение $U_0 = 6$ В.

Гирлянду включают в электрическую сеть с напряжением $U = 220$ В через дополнительный резистор с сопротивлением R . Резистор подбирают так, чтобы лампочки работали в номинальном режиме. Найти, какая часть k общей мощности, потребляемой от сети, теряется на резисторе.

17. Параллельно отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки влетает пучок электронов, движущихся со скоростью $V_0 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Через промежуток времени $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ с их скорость оказывается равной $V = 1 \cdot 10^7$ м/с. Считая, что поле между пластинами однородно, найти его напряженность E . Модуль удельного заряда электрона считать равным $e/m = 1,8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

18. Оптическая сила лупы $D = +12,5$ дптр. На каком расстоянии от лупы следует поместить предмет, чтобы увидеть его изображение, увеличенное в $k = 4$ раза?

19. Луч света падает нормально на боковую грань прозрачной призмы. После прохождения через призму луч отклоняется на угол $\varphi = 4^\circ$ от первоначального направления. Преломляющий угол призмы $\delta = 8^\circ$. Найти показатель преломления материала, из которого сделана призма.

20. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,4$ мкм. Энергия светового потока, падающего на катод за время $\Delta t = 10$ с, равна $W = 0,15$ Дж. Определить силу тока насыщения фотоэлемента при таком освещении. Модуль заряда электрона считать равным $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а постоянную Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. На рис. 9 изображены силы, действующие на каждый из грузов: $m_1 g$ — сила тяжести, F_n — сила натяжения нити. Как следует из второго закона Ньютона, в первом случае нить обрывается при достижении системой ускорения

$$a = \frac{F_1 - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

При этом натяжение нити оказывается равным:

$$F_n = m_2(g + a). \quad (2)$$

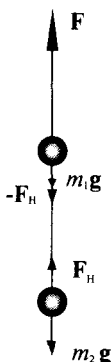
Остается определить, при каком значении силы, действующей на верхний груз, будет достигаться такое же натяжение нити при закрепленном нижнем грузе:

$$F_2 - m_1 g - F_n = 0. \quad (3)$$

Из этих уравнений при $m_1 = m_2 = m$ следует, что

$$F_2 = m_1 g + F_n = m_1 g + \frac{m_2 F_1}{m_1 + m_2} = m g + \frac{F_1}{2} = 15 \text{ Н.}$$

Рис. 9.



2. Искомую скорость V_1 найдем, исходя из закона сохранения механической энергии системы ракета—Земля. В момент времени τ она складывается из потенциальной и кинетической энергий. Соответствующие значения высоты и скорости ракеты в момент отключения двигателей найдем из очевидных кинематических соотношений: $H = 0,5 a \tau^2$, $V = a \tau$. Приравняв полную механическую энергию ракеты на высоте H ее кинетической энергии в момент падения на Землю, получим:

$$\frac{m V^2}{2} + m g H = \frac{m V_1^2}{2}.$$

Наконец, сокращая на m и используя ранее написанные соотношения, определим искомую скорость:

$$V_1 = a \tau \sqrt{1 + g/a} \approx 66 \text{ м/с.}$$

3. Согласно закону сохранения импульса начальная скорость V_0 снаряда при вылете из пушки в горизонтальном направлении равна $V_0 = M V / m$. Учитывая, что для свободного падения с нулевой начальной

скоростью c с высоты H необходимо время $t = \sqrt{2H/g}$, определим искомое расстояние:

$$L = V_0 t = \frac{MV}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 800 \text{ м.}$$

4. При рытье колодца глубиной x работа по выемке грунта на поверхность Земли равна изменению потенциальной энергии этого грунта:

$$A = 0,5 m g x,$$

т.к. центр тяжести этого грунта изначально находится на расстоянии $0,5x$ от поверхности Земли. Поскольку масса грунта $m = \rho S x$, где S – площадь поперечного сечения колодца, ρ – плотность грунта, то $A = 0,5 \rho S g x^2$.

Обратим внимание на то, что величина работы пропорциональна *квадрату* глубины колодца. Обозначим через A_h работу первого рабочего, а A_H – полную работу по выкапыванию колодца глубиной H . По условию

$$A_h/A_H = 0,5.$$

Учитывая закономерность, установленную ранее, получим $h^2/H^2 = 0,5$. Поэтому искомая глубина равна $h = H/\sqrt{2} \approx 1,41$ м.

5. Отметим, прежде всего, что импульс системы пушка–снаряд изменяется при выстреле в результате действия на систему внешней силы – силы реакции опоры. Однако сохраняется горизонтальная составляющая импульса системы, поскольку реакция опоры не имеет проекции на это направление. Если скорость вылетающего из пушки снаряда обозначить v , то согласно сказанному должны иметь место следующие равенства:

$$0 = m v \cos \alpha - M V \text{ и } \Delta p = m v \sin \alpha,$$

а потому искомое изменение импульса системы $\Delta p = M V \operatorname{tg} \alpha = 400 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

6. Максимальная сила, с которой пружина действует на стену в процессе колебаний, – это сила упругости, равная по закону Гука:

$$F_{\max} = k x_m, \quad (1)$$

где x_m – величина максимальной деформации пружины, т.е. амплитуда возникших колебаний. Чтобы найти ее, достаточно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии. Первый закон, как известно, вполне

применим к абсолютно неупругому удару (крайне малым импульсом силы упругости пренебрегаем, считая соударение мгновенным):

$$m V = (M + m) u. \quad (2)$$

Это равенство связывает импульс летящей пули и импульс системы пуля–тело сразу после застревания пули в теле; u – скорость тела в указанный момент времени. В последующие моменты времени в системе действуют лишь консервативные силы, а потому должен выполняться закон сохранения механической энергии, т.е. должно иметь место равенство:

$$0,5(m + M)u^2 = 0,5k x_m^2. \quad (3)$$

Равенство (3) связывает максимальные значения кинетической и потенциальной энергий системы. Подставляя u из уравнения (2) в уравнение (3), находим сначала x_m , а затем, с помощью (1), окончательно определяем искомое значение силы:

$$F_{max} = mV \sqrt{\frac{k}{M + m}} \approx 10 \text{ Н.}$$

7. На шар действуют три силы: сила тяжести $m g$, архимедова сила F_A и сила реакции опоры со стороны дна N . При равновесии

$$m g - N - F_A = 0.$$

Сила Архимеда связана с объемом ν погруженной части шара:

$$F_A = \rho_1 g \nu,$$

где ρ_1 – плотность воды. Поскольку плотность материала шара в два раза меньше плотности воды, то масса шара $m = 0,5\rho_1 V$, где V – объем шара.

Сила давления шара на дно сосуда P по 3-му закону Ньютона равна силе реакции опоры N и по условию задачи должна стать равной нулю, т.е.

$$P = N = 0.$$

Следовательно, в воде должна находиться ровно половина шара. Поэтому необходимое количество воды равно разности объемов цилиндра радиусом R и высотой r и половины объема шара радиусом r :

$$\Delta V = \pi R^2 r - \frac{2}{3} \pi r^3 = (R^2 - 2r^2/3) \pi r \approx 1,3 \text{ л.}$$

8. Условие равновесия поршня в исходном состоянии и уравнение его движения с ускорением a можно представить в виде:

$$M g + p_0 S - p_1 S = 0, \quad (1)$$

$$M g + p_0 S - p_2 S = M a, \quad (2)$$

где $p_0 S$, $p_1 S$, $p_2 S$ – соответствующие силы давления атмосферы и газа на поршень. Поскольку температура газа остается неизменной, то по закону Бойля–Мариотта:

$$p_1 S h_1 = p_2 S h_2, \quad (3)$$

где h_1 и h_2 – высоты столба газа в неподвижном и движущемся с ускорением цилиндре.

Искомая величина $x = \frac{h_2 - h_1}{h_1} \cdot 100\%$ с учетом (3) может быть записана в виде $x = (p_1/p_2 - 1) \cdot 100\%$. Выразив p_1 и p_2 из (1) и (2), получим:

$$x = \frac{\Delta h}{h} = \left(\frac{Mg + p_0 S}{M(g - a) + p_0 S} - 1 \right) \cdot 100\% = \frac{Ma}{p_0 S + M(g - a)} \cdot 100\% = 20\%.$$

9. При адиабатическом расширении газ не получает и не отдает теплоту ($Q_{12} = 0$). В рассматриваемой задаче газ получает количество теплоты Q_{31} при изохорическом нагреве на участке 3–1, а отдает Q_{23} при изотермическом сжатии на участке 2–3. По определению КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_{31} - Q_{23}}{Q_{31}} = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{31}}.$$

Поскольку при изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не изменяется, то согласно первому закону термодинамики $Q_{23} = A$. При изохорном нагреве $Q_{31} = \nu C_V (T_1 - T_3)$, где ν – число молей, равное 1 по условию задачи; $C_V = 1,5 R$ – изохорная молярная теплоемкость идеального одноатомного газа. Таким образом:

$$\eta = 1 - \frac{2A}{3R(T_1 - T_3)}.$$

Из диаграммы процесса (см. рис. 8) видно, что T_1 – максимальное, а $T_2 = T_3$ – минимальное значение температуры газа в заданном цикле. Поэтому искомая разность температур

$$\Delta T = \frac{2A}{3R(1 - \eta)} \approx 2,5 \text{ К}.$$

10. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для водяных паров в сосудах до и после их соединения:

$$\mu p_1 V_1 = m_1 RT, \quad \mu p_2 V_2 = m_2 RT, \quad (1)$$

$$\mu p(V_1 + V_2) = (m_1 + m_2) RT, \quad (2)$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления паров в первом и втором баллонах, p – установившееся парциальное давление паров после соединения баллонов, m_1 и m_2 – массы водяных паров в первом и втором баллонах. Из формул (1) можно выразить m_1 и m_2 и, подставив в (2), получить:

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2. \quad (3)$$

По определению, относительная влажность $\varphi = p/p_n$, где p и p_n – парциальное давление и давление насыщенных паров при заданной температуре. Из приведенного определения и соотношения (3) найдем искомую влажность:

$$\varphi = \frac{p}{p_n} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 27\%.$$

11. На бусинку при движении действуют три силы: сила натяжения нити F_n (по направлению нити вверх); сила тяжести mg и кулоновская сила qE (направлены вертикально вниз). В тот момент, когда нить проходит вертикальное положение, все три силы направлены вдоль одной прямой. По второму закону Ньютона:

$$mV^2/l = F_n - mg - qE. \quad (1)$$

Здесь l – длина нити, V – скорость бусинки в нижней точке траектории. Величину V можно найти, пользуясь законом сохранения энергии:

$$0,5mV^2 = mgl + q\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между двумя точками поля, соответствующими начальному положению бусинки и нижней точке траектории. Поскольку электрическое поле однородно, то $\Delta\varphi = El$ и

$$0,5mV^2 = mgl + qEl. \quad (2)$$

Исключив из формул (1) и (2) величину V , определим искомую силу:

$$F_n = 3(mg + qE) = 6 \text{ мН}.$$

12. Наиболее краткий способ решения задачи опирается на применение закона сохранения энергии. Сопоставим два состояния дробинки: первое – соответствует моменту начала падения дробинки от верхней пластины; второе – соответствует моменту подлета дробинки к этой пластине после удара о нижнюю пластину. Сравнивая полную энергию дробинки в этих двух состояниях, заметим, что потенциальная энергия в поле тяготе-

ния Земли не изменилась, а кинетическая энергия увеличилась на величину $\Delta E_k = 0,5 m V^2$, где V – скорость подлета к пластине.

Увеличение энергии произошло за счет работы сил электростатического поля, под действием которого зарядившаяся дробинка притягивается к верхней пластине. Поскольку разность потенциалов между пластинами равна ЭДС источника, эта работа равна $A = q \mathcal{E}$. Учитывая, что по закону сохранения энергии $\Delta E_k = A$, определим искомую скорость дробинки:

$$V = \sqrt{2q\mathcal{E}/m} = 0,5 \text{ м/с}.$$

13. При прохождении первоначально покоившимся протоном уско-
ряющей разности потенциалов U по закону сохранения энергии он должен приобрести скорость $V = \sqrt{2eU/m}$.

Поскольку угловая скорость равномерно движущегося по окружности протона $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ связана с его линейной скоростью соотношением: $\omega = V/R$, то искомая разность потенциалов должна быть равна

$$U = \frac{m}{2e} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right)^2 R^2,$$

причем входящая в это выражение величина угла $\Delta\phi$ должна быть измере-
на в радианах. Поскольку $\Delta\phi = 45^\circ = \pi/4$ рад, то с учетом заданных в усло-
вии величин получим $U \approx 29 \text{ кВ}$.

14. По закону Ома для замкнутой цепи сила тока в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r},$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС источника, r – его внутреннее сопротивление. Если конденса-
тор подключен к клеммам источника, то напряжение на его обкладках
равно напряжению на клеммах источника: $U_1 = \mathcal{E} - Ir$, а его заряд равен

$$q_1 = C U_1.$$

Во втором случае, когда конденсатор включен в цепь последователь-
но, после заряда конденсатора ток в цепи отсутствует, и напряжение на
обкладках конденсатора $U_2 = \mathcal{E}$, а его заряд равен $q_2 = C \mathcal{E}$. По условию
 $q_2/q_1 = k$. Поэтому искомое внутреннее сопротивление источника равно:

$$r = (k-1)R = 4 \text{ Ом}.$$

15. При последовательном соединении двух одинаковых нагревателей (если считать, что сопротивление каждого нагревателя остается равным R) их общее сопротивление $R_1 = 2R$, а выделяющаяся тепловая мощность по закону Джоуля–Ленца равна $P_1 = U^2/R_1 = P/2$.

Для того чтобы вскипятить, то есть нагреть до температуры кипения $t_k = 100^\circ\text{C}$ массу воды m , требуется количество теплоты $Q = cm(t_k - t_1)$. Следовательно, искомое время будет равно:

$$\tau = \frac{Q}{P_1} = \frac{2cm(100^\circ - t_1)}{P} = 800 \text{ с.}$$

16. При последовательном соединении ламп и дополнительного резистора сумма падений напряжения на всех участках цепи должна быть равна напряжению сети, т.е. $IR + NU_0 = U$. При этом выделяющаяся на резисторе мощность по закону Джоуля–Ленца будет равна $N_R = I^2 R$, а полная мощность, потребляемая от сети, будет равна $N = IU$. Из сказанного следует, что искомая величина $k = N_R/N$ должна быть равна

$$k = \frac{U - NU_0}{U} = 0,45.$$

17. При движении электрона в однородном поле конденсатора на него действует постоянная сила $F = eE$, где e – заряд электрона, E – напряженность поля. По второму закону Ньютона эта сила сообщает электрону постоянное ускорение $a = F/m$, где m – масса электрона. При движении электрона это ускорение определяет изменение только той составляющей V_E скорости электрона, которая направлена вдоль поля. Через промежуток времени τ указанная составляющая должна стать равной $V_E = a\tau$.

Поскольку вдоль пластин на электрон не действуют силы, составляющая его скорости, параллельная пластинам, остается постоянной и равной V_0 . Поэтому согласно теореме Пифагора квадрат скорости электрона через время τ должен стать равным $V^2 = V_0^2 + V_E^2 = V_0^2 + (eE\tau/m)^2$. Из этого выражения следует, что искомая напряженность поля равна

$$E = \frac{\sqrt{V^2 - V_0^2}}{e\tau/m} \approx 8,9 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

18. Обозначим через d расстояние от предмета до линзы и через f расстояние от линзы до изображения предмета. Как известно, линзу используют для получения мнимого изображения. Тогда согласно формуле линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D.$$

Подчеркнем, что в этой формуле под d и f подразумеваются расстояния, то есть положительные величины. Как известно, увеличение, даваемое линзой, $k = f/d$. Исключив из записанных формул f , получим

$$d = \frac{k-1}{kD} = 6 \text{ см.}$$

19. По условию задачи луч падает на боковую грань призмы нормально и потому, не преломляясь, проходит внутри призмы до второй боковой грани, как показано на рис. 10. Преломление на этой грани описывается законом Снеллиуса: $\sin \beta / \sin \alpha = n$. Здесь учтено, что относительный показатель преломления стекла относительно воздуха равен n . Согласно обозначениям на рис. 10 $\varphi + \alpha = \beta$, а $\alpha = \delta$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Учитывая малость углов δ и φ можно считать, что $\sin \delta \approx \delta$, $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\sin(\delta + \varphi) \approx \delta + \varphi$. Учитывая эти соотношения, определим искомый показатель преломления:

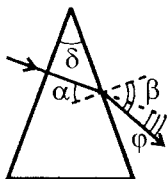


Рис. 10.

$$n = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \delta} \approx 1 + \frac{\varphi}{\delta} = 1,5.$$

20. Энергию светового потока можно представить как произведение энергии отдельного кванта света с заданной частотой ν , числа n фотонов, падающих на фотокатод в единицу времени, и времени освещения Δt , т.е. $W = h\nu \cdot n \cdot \Delta t$. Длина волны λ света связана со скоростью c света в вакууме и его частотой ν соотношением $\lambda = c/\nu$. Считая, что каждый фотон выбивает из катода один электрон и при токе насыщения все выбитые электроны достигают анода, определим искомый ток:

$$I_{\text{нас}} = ne = \frac{W \lambda e}{hc \Delta t} \approx 5 \text{ мА.}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

В 2000 году на ВМиК проводилась устная олимпиада по физике «Абитуриент-2000». Задания, предлагаемые абитуриентам и участникам олимпиады, содержали одну задачу и два теоретических вопроса из программы вступительных экзаменов по физике, приведенной в этом сборнике. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиаде и вступительных экзаменах по физике на ВМиК в 2000 году.

У С Л О В И Я З А Д А Ч

I. Механика

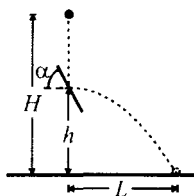


Рис. 11.

I.1. Маленький шарик падает с высоты $H = 2$ м без начальной скорости. На высоте $h = 0,5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о гладкую закрепленную площадку, наклоненную под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту (см. рис. 11). Найти дальность полета шарика L .

I.2. Автомобиль трогается с места с ускорением $a_1 = 2$ м/с². При скорости $v = 50$ км/ч ускорение автомобиля стало равным $a_2 = 1$ м/с². С какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

I.3. Маленькое тело A соскальзывает без начальной скорости по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной ее радиусу (см. рис. 12).

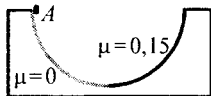


Рис. 12.

Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая – шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0,15$. Определить ускорение a тела в тот момент, как только оно перейдет на шероховатую поверхность. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

I.4. Два маленьких шарика массами $m_1 = 6$ г и $m_2 = 4$ г, несущие заряды $q_1 = 10^{-6}$ Кл и $q_2 = -5 \cdot 10^{-6}$ Кл соответственно, удерживаются на расстоянии

$l = 2$ м друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив второму из них скорость $u_0 = 3$ м/с, направленную от первого шарика вдоль линии, соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние L разойдутся шарики друг от друга? Силу тяжести не учитывать.

1.5. На двух гвоздях, вбитых в стену в точках A и B (см. рис. 13), повешена веревка. Расстояние между гвоздями по горизонтали $b = \sqrt{3}$ м $\approx 1,73$ м, разность высот, на которых вбиты гвозди, $a = 1$ м, длина веревки равна $a + b$. На веревке на расстоянии a от точки A подвешивают груз, который не касается стены. Найти отношение β сил натяжения веревки слева и справа от груза. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Веревку считать невесомой и нерастяжимой.

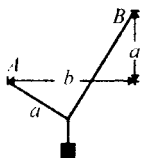


Рис. 13.



Рис. 14.

1.6. На наклонном дне сосуда, наполненного водой, покоится на маленьких подставках алюминиевый кубик с ребром $a = 10$ см, как показано на рис. 14. Определить суммарную силу трения между кубиком и подставками. Угол наклона дна сосуда к горизонту $\alpha = 30^\circ$, плотности алюминия и воды, соответственно, $\rho_a = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_v = 10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

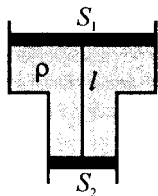


Рис. 15.

1.7. В сосуде, вертикальное сечение которого показано на рис. 15, находятся в равновесии два невесомых поршня, соединенные невесомой нерастяжимой нитью. Пространство между поршнями заполнено жидкостью, плотность которой равна $\rho = 10^3$ кг/м³. Найти силу натяжения нити T , если площади поршней $S_1 = 0,1$ м² и $S_2 = 0,05$ м², а длина нити $l = 0,5$ м. Трением поршней о стенки сосуда пренебречь, ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

1.8. Тело массой $M = 10$ кг, насаженное на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной с неподвижной вертикальной стенкой. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с параллельно оси стержня. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой $A = 10$ см. Найти период T колебаний тела.

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $L = 50$ см каждая. На какую величину Δt нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

II.2. В лифте, движущемся с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$, направленным вверх, находится цилиндрический сосуд, закрытый поршнем массой $M = 20$ кг и площадью $S = 100 \text{ см}^2$. Под поршнем находится идеальный газ. Поршень расположен на расстоянии $h = 22$ см от дна сосуда. Определить, на какую величину Δh переместится поршень, если лифт будет двигаться с тем же по модулю ускорением, направленным вниз. Температура газа не изменяется. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

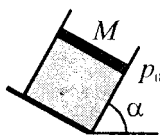


Рис. 16.

II.3. В закрепленном под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту цилиндре (см. рис. 16) может без трения двигаться поршень массой $M = 10$ кг и площадью $S = 50 \text{ см}^2$. Под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают так, что поршень перемещается на расстояние $l = 5$ см. Какое количество теплоты Q было сообщено газу? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

III. Электродинамика

III.1. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см, несущие заряды $q_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -10^{-9}$ Кл соответственно, соединяют тонким проводом. Какой заряд q протечет по проводу после соединения шаров?

III.2. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см, несущие одинаковые заряды, взаимодействуют с силой $F = 10^{-4}$ Н. Найти силу взаимодействия этих шаров F' по прошествии достаточно большого промежутка времени после их соединения друг с другом тонким проводом.

III.3. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом нагревательный элемент развивает мощность $W_1 = 50$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $W_2 = 72$ Вт. Найти сопротивление R нагревателя.

III.4. Конденсатор емкостью $C = 0,1$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 100$ В, подсоединяют к катушке индуктивностью $L = 1$ мГн. Найти силу тока I через катушку спустя время $t_0 = 0,785 \cdot 10^{-5}$ с после подключения конденсатора. Сопротивлением проводов пренебречь.

III.5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L и четырех конденсаторов, соединенных, как показано на рис. 17. Во сколько раз изменится период собственных колебаний в контуре после замыкания ключа K ? $C_1 = 10^{-8}$ Ф, $C_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ Ф.

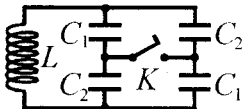


Рис. 17.

III.6. В цепи, показанной на рис. 18, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до напряжения $U_1 = 200$ В, а конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. До какого максимального напряжения $U_{2\max}$ может зарядиться конденсатор C_2 в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа? Сопротивлением проводов пренебречь.

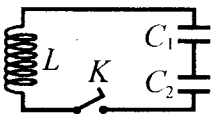


Рис. 18.

III.7. Катушка индуктивностью $L = 3$ мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рис. 18), один из которых, емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф, заряжен до напряжения $U_1 = 150$ В, а второй, емкостью $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ Ф, разряжен. Найти максимальную силу тока $I_{\max}$ в этой цепи после замыкания ключа?

IV. Оптика

IV.1. Две призмы с равными углами при вершине $\alpha = 5^\circ$, имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу. При освещении этой системы параллельным пучком света, падающим нормально на

переднюю грань призмы, выходящий пучок света отклоняется от первоначального на угол $\varphi = 3^\circ$ (см. рис. 19). Найти разность Δn показателей преломления материалов призмы. При расчетах положить $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\sin \varphi \approx \varphi$.

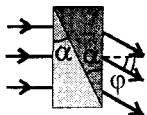


Рис. 19.

IV.2. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом $R = 1$ м, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ можно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

IV.3. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара под углом $\alpha = 45^\circ$. Найти показатель преломления стекла n , если известно, что угол между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара, $\gamma = 30^\circ$.

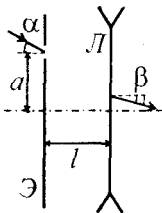


Рис. 20.

IV.4. На расстоянии l перед тонкой рассеивающей линзой L расположен экран $\mathcal{E}$ с малым отверстием, находящимся на расстоянии a от главной оптической оси линзы. На экран под углом α к оси линзы, как показано на рис. 20, падает параллельный пучок света. Под каким углом β к главной оптической оси выйдет пучок из линзы, если ее фокусное расстояние равно f ?

IV.5. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $b = 80$ см от нее находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Известно, что если переместить экран на расстояние $d = 40$ см в сторону линзы, то размер пятна света, создаваемого источником на экране, в результате не изменится. Определить расстояние a от источника света до линзы.

IV.6. Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием f , расположенных друг за другом так, что их фокусы и главные оптические оси совпадают. Предмет находится на расстоянии $a < f$ перед первой линзой. На каком расстоянии b от второй линзы будет располагаться изображение предмета?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1. Рассмотрим соударение шарика с закрепленной подставкой. При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шарика сохраняется, откуда следует, что модуль v_1 скорости шарика после удара равен модулю v_0 его скорости перед ударом. При этом нормальная к площадке составляющая скорости шарика после удара меняет направление на противоположное, а касательная к площадке составляющая скорости остается неизменной (см. рис. 21). Следовательно, при упругом соударении с неподвижной площадкой угол α_1 между нормалью к площадке $\mathbf{n}$ и скоростью после удара $\mathbf{v}_1$ равен углу α между нормалью и скоростью перед ударом $\mathbf{v}_0$. По условию задачи $\alpha = 45^\circ$, поэтому $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_0$, причем скорость $\mathbf{v}_1$ шарика непосредственно после удара направлена горизонтально.

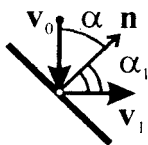


Рис. 21.

По закону сохранения энергии, при падении шарика с высоты $H - h$ величина его скорости $v_0 = \sqrt{2g(H - h)}$. Падение шарика после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью $v_1 = v_0$. Дальность полета шарика равна $L = v_1 \tau$, где $\tau = \sqrt{2h/g}$ — время падения с высоты h . Из полученных соотношений следует, что искомая дальность полета равна:

$$L = 2\sqrt{h(H - h)} \approx 1,7 \text{ м.}$$

1.2. Поскольку при движении автомобиля по горизонтальной дороге приложенные к нему вертикальные силы уравновешены, исключим эти силы из рассмотрения. В горизонтальном направлении на автомобиль действуют две силы: сила трения покоя, приложенная к его ведущим колесам со стороны дорожного покрытия, и сила сопротивления воздуха. Первая из этих сил возникает при передаче крутящего момента от двигателя к ведущим колесам и обычно называется силой тяги двигателя. По условию задачи при движении автомобиля она постоянна. Вторая из перечисленных сил представляет собой силу вязкого трения, которая в рамках принятой модели пропорциональна скорости автомобиля.

Пусть F величина силы тяги двигателя автомобиля, m – масса автомобиля, а k – коэффициент вязкого трения. Тогда уравнение движения автомобиля в момент времени t будет иметь вид: $ma(t) = F - kv(t)$. По условию в момент начала движения ($v = 0$) ускорение автомобиля равно a_1 , при скорости v ускорение равно a_2 , а при движении со скоростью v_0 ускорение равно нулю. Следовательно, $ma_1 = F$, $ma_2 = F - kv$ и $F = kv_0$, а потому искомая скорость равна:

$$v_0 = va_1/(a_1 - a_2) = 100 \text{ км/ч.}$$

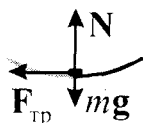


Рис. 22.

1.3. Силы, действующие на тело в момент, когда оно оказывается на шероховатой поверхности, изображены на рис. 22, где введены следующие обозначения: $F_{\text{тр}}$ – сила трения, N – нормальная составляющая силы реакции, mg – сила тяжести. В соответствии с этим, полное ускорение тела a удобно разложить на две составляющие: касательную a_t и нормальную a_n к поверхности полусферы. Тогда величина у-

скорения тела равна $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Записывая уравнения движения тела в проекциях на касательное и нормальное к поверхности полусферы направления, имеем в рассматриваемый момент времени:

$$ma_t = F_{\text{тр}} = \mu N, \quad ma_n = N - mg.$$

Учитывая, что $a_n = v^2/R$, где v – скорость тела, из последнего уравнения получим: $N = mv^2/R + mg$. Величину v в нижней точке полусферы найдем, используя закон сохранения механической энергии, применимый в данном случае, т.к. вплоть до этой точки тело скользило по гладкой поверхности: $0,5mv^2 = mgR$. Объединяя записанные соотношения, находим:

$$a_n = 2g, \quad a_t = 3\mu g, \quad a = g\sqrt{9\mu^2 + 4} = 20,5 \text{ м/с}^2.$$

Отметим, что полученный результат позволяет также легко найти угол α , который образует ускорение тела с вертикалью в рассматриваемый момент времени. В самом деле, $\alpha = \arctg a_t/a_n = \arctg 1,5\mu \approx 12^\circ 40'$.

1.4. Движение шариков происходит под действием силы электростатического притяжения, которая является внутренней силой для рассматриваемой системы. Следовательно, суммарный импульс шариков остается

постоянным. Запишем закон сохранения импульса в проекции на координатную ось, положительное направление которой совпадает с направлением начальной скорости второго шарика:

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

где v_1 и v_2 – проекции скоростей шариков в произвольный момент времени.

Кулоновские силы являются потенциальными, поэтому полная механическая энергия системы также сохраняется. Потенциальная энергия электростатического взаимодействия двух точечных зарядов равна

$$W_{\text{п}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r – расстояние между зарядами. Заметим, что для разноименных зарядов потенциальная энергия отрицательна и возрастает при удалении зарядов друг от друга. В соответствии с этим кинетическая энергия шариков будет убывать по мере увеличения расстояния между ними, и закон сохранения энергии запишется в виде:

$$\frac{m_2 v_0^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

При удалении шариков на максимальное расстояние их относительная скорость $v_{\text{отн}} = v_1 - v_2$ обратится в нуль. Это утверждение становится очевидным, если перейти в систему отсчета, связанную с одним из шариков. В этой системе движение второго шарика подобно движению камня, брошенного вертикально вверх от поверхности Земли. Ясно, что момент остановки второго шарика относительно первого действительно соответствует максимальному удалению шариков друг от друга. Таким образом, когда расстояние между шариками максимально, $v_1 = v_2 = v$. Используя это равенство, преобразуем исходную систему уравнений к виду:

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2)v, \quad \frac{m_2 v_0^2}{2} - \frac{q_1 |q_2|}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{q_1 |q_2|}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Исключая из этой системы v , находим искомое расстояние:

$$L = \frac{l}{1 - \frac{2\pi\epsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|}} \approx 3,9 \text{ м.}$$

Элементарный анализ показывает, что ответ теряет смысл при

$$\frac{2\pi\epsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|} \geq 1,$$

т.е. при: $W_{0к} \geq (1 + m_2/m_1)|W_{0п}|$, где $W_{0к} = 0,5m_2 v_0^2$ – начальная кинетическая, а $W_{0п} = q_1 |q_2| / (4\pi\epsilon_0 l)$ – начальная потенциальная энергии системы. Физический смысл этого результата таков: если начальная кинетическая энергия системы равна или превышает взятую с коэффициентом $\alpha = (1 + m_2/m_1)$ величину начальной потенциальной энергии притяжения зарядов, то шарики разойдутся на бесконечно большое расстояние и никогда не сблизятся. Когда массы шариков соизмеримы, коэффициент α отличен от единицы. Это отражает тот факт, что начальная кинетическая энергия системы в процессе взаимодействия шариков перераспределяется между ними. Если неограниченно увеличивать массу m_1 первоначально неподвижного шарика, то множитель α устремится к единице. Бесконечно тяжелый шарик будет оставаться неподвижным. Если при этом $W_{0к} < |W_{0п}|$, то тело, притягивающееся к неподвижному шарiku – притягивающему силовому центру, не сможет удалиться от этого центра на бесконечность.

1.5. Груз находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести mg и сил натяжения левого T_1 и правого T_2 отрезков веревки (см.

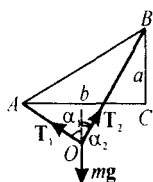


Рис. 23.

рис. 23), причем векторная сумма этих сил равна нулю. Из условия равновесия груза следует, в частности, что: $T_1 \sin \alpha_1 = T_2 \sin \alpha_2$, где α_1 и α_2 – углы между вертикалью и левым и правым отрезками веревки соответственно. Из равенства $\triangle ABC$ и $\triangle AOB$ вытекает, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$. Учитывая это, из уравнения равновесия получаем, что: $\beta = T_1/T_2 = \tan \alpha_2$. С другой стороны, $a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2 = b$, или $a \cos \alpha_2 + b \sin \alpha_2 = b$. Следовательно, $\cos \alpha_2 =$

$$= \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = 30^\circ, \text{ а искомое отношение}$$

$$\beta = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$$

1.6. Кубик находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести mg , архимедовой силы F_A и силы реакции со стороны подставок, которую, в свою очередь, удобно разложить на две составляющие: нор-

мальную N к наклонному дну и силу трения о подставку $F_{\text{тр}}$ (см. рис. 24). Отметим, что наличие подставок, на которых покоится кубик, играет в

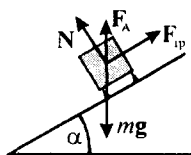


Рис. 24.

задаче важную роль, т.к. именно благодаря им вода окружает кубик со всех сторон и для определения силы, с которой вода действует на него, можно воспользоваться законом Архимеда. Если бы кубик лежал непосредственно на дне сосуда, и вода под него не подтекала, то результирующая поверхностных сил давления воды на кубик не выталкивала бы его вверх, а, наоборот, еще сильнее прижимала ко дну.

В нашем случае на кубик действует выталкивающая сила $F_A = \rho_a a^3 g$, направленная вверх. Проецируя все силы на координатную ось, параллельную дну сосуда, запишем условие равновесия кубика в виде:

$$F_{\text{тр}} = (mg - F_A) \sin \alpha.$$

Учитывая, что масса кубика $m = \rho_a a^3$, получаем ответ:

$$F_{\text{тр}} = (\rho_a - \rho_w) a^3 g \sin \alpha = 8,5 \text{ Н.}$$

1.7. Поршни находятся в равновесии под действием сил, величины и направления которых указаны на рис. 25. Для облегчения анализа рисунка точки приложения некоторых сил условно смещены от их истинных положений. На самом деле точки приложения всех сил расположены на оси симметрии системы.

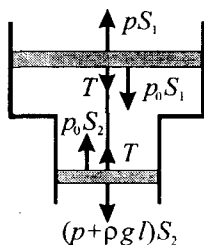


Рис. 25.

Будем использовать следующие обозначения: T – величина силы натяжения нити, которая в силу невесомости нити одинакова во всех ее точках, p_0 – атмосферное давление, p – давление жидкости на уровне верхнего поршня. Поршни находятся в равновесии при выполнении условий: $p_0 S_1 + T = p S_1$ для верхнего поршня, и $(p + \rho g l) S_2 = p_0 S_2 + T$ для нижнего поршня.

Из первого уравнения получаем, что $T = (p - p_0) S_1$. Отсюда видно, что ответ зависит от разности $p - p_0$. Решая совместно эти уравнения, определим искомую силу натяжения:

$$T = \frac{\rho g l S_1 S_2}{S_1 - S_2} = 500 \text{ Н.}$$

1.8. Считая, что длительность взаимодействия пули с телом при соударении пренебрежимо мала, можно утверждать, что во время соударения импульс системы "пуля + тело" сохраняется, т.е. $mv = (M + m)u$, где u – скорость тела с застрявшей в нем пулей сразу после соударения. Приобретая такую скорость, тело с пулей начинает совершать гармонические колебания, причем в момент наибольшего отклонения от положения равновесия начальная кинетическая энергия системы полностью переходит в потенциальную энергию сжатой пружины:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{k A^2}{2}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{M + m}{k} = \frac{(M + m)^2 A^2}{m^2 v^2}.$$

Как известно, период свободных колебаний груза массой m , прикрепленного к пружине жесткостью k , равен: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Используя эту формулу, находим искомый период колебаний тела:

$$T = 2\pi \frac{M + m}{mv} A \approx 1,26 \text{ с.}$$

II. Молекулярная физика и термодинамика

II.1. Пусть давление газа в цилиндре при нагревании изменяется от начального значения p до конечного p_1 . При этом длина столба газа во второй части цилиндра, где температура постоянна, должна уменьшиться на величину l . Согласно закону Бойля–Мариотта, начальное и конечное давления во второй части цилиндра должны удовлетворять соотношению:

$$LSp = (L - l)Sp_1,$$

где S – площадь поршня. Согласно же объединенному газовому закону при повышении температуры на величину Δt в первой части цилиндра указанные давления должны удовлетворять соотношению:

$$\frac{LSp}{T} = \frac{(L + l)Sp_1}{T + \Delta t},$$

где $T \approx 273 + t$. Исключая из этих соотношений p и p_1 , получаем ответ:

$$\Delta t = \frac{2lT}{L - l} \approx 400 \text{ К.}$$

II.2. Поршень, покоящийся в движущемся лифте, относительно инерциальной системы отсчета движется с ускорением лифта a . Если ускорение направлено вверх, то уравнение движения поршня можно представить в виде: $Ma = p_1 S - p_0 S - Mg$. Если же ускорение направлено вниз, то $Ma = Mg + p_0 S - p_2 S$. Здесь p_1 и p_2 – значения давления газа под поршнем соответственно в первом и втором случаях. Поскольку температура газа остается неизменной, то согласно уравнению Бойля–Мариотта давления p_1 и p_2 должны удовлетворять соотношению: $h S p_1 = (h + \Delta h) S p_2$.

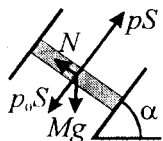
Решая совместно приведенные уравнения, находим ответ:

$$\Delta h = \frac{2 M a h}{p_0 S + (g - a) M} = 4 \text{ см.}$$

II.3. При нагревании газ перемещает поршень, совершая изобарное расширение. Поскольку изобарическая молярная теплоемкость идеального одноатомного газа $c_{p\mu} = 2,5 R$, то для нагревания ν молей газа на ΔT градусов при постоянном давлении газу необходимо сообщить количество теплоты $Q = 2,5 \nu R \Delta T$.

Записывая уравнения начального и конечного состояний газа, имеем:

$$pV = \nu RT, \quad p(V + lS) = \nu R(T + \Delta T),$$



где p – давление газа, V – начальный объем газа, T – его начальная температура. Отсюда $\nu R \Delta T = p l S$. Для определения давления газа воспользуемся условием механического равновесия поршня под действием сил, величины и направления которых, изображены на рис. 26:

Рис. 26.

$$p S = p_0 S + M g \sin \alpha.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$Q = 2,5 l (p_0 S + M g \sin \alpha) \approx 74 \text{ Дж.}$$

III. Электродинамика

III.1. Поскольку по условию задачи шары достаточно удалены друг от друга, их потенциалы до соединения проводом можно определить по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы. Имеем:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

После соединения шаров проводом заряды на них перераспределяются так, что потенциалы шаров станут равными друг другу, т.е.:

$$\varphi'_1 = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \varphi'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Следовательно, $q'_1/r_1 = q'_2/r_2$. Пренебрегая емкостью провода, получим согласно закону сохранения заряда $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$.

Из последних двух уравнений находим заряды на шарах после их соединения:

$$q' = \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_1, \quad q' = \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_2.$$

Следовательно, по проводу после соединения шаров должен протечь заряд

$$q = q_1 - q'_1 = q'_2 - q_2 = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} \approx 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

III.2. Повторяя рассуждения, приведенные в задаче III.1, находим заряды на шарах после соединения их проводом:

$$q'_1 = \frac{2q r_1}{r_1 + r_2}, \quad q'_2 = \frac{2q r_2}{r_1 + r_2},$$

где q – заряд на каждом из шаров до их соединения. По закону Кулона сила взаимодействия шаров до и после соединения равна, соответственно:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ и } F' = \frac{q'_1 q'_2}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

где R – расстояние между шарами. Объединяя полученные выражения, находим ответ:

$$F' = F \cdot \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{8}{9} \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

III.3. Мощность, развиваемая нагревательным элементом с сопротивлением R , подключенным к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r , равна $W_1 = \mathcal{E}^2 R / (r + R)^2$. При подключении этого же элемента к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, значения ЭДС и внутреннего сопротивления удваиваются, и нагреватель развивает мощность $W_2 = 4\mathcal{E}^2 R / (2r + R)^2$. Из этих двух соотношений сле-

дует, что $\sqrt{W_2/W_1} = 2(r+R)/(2r+R)$. Решая последнее уравнение, получаем ответ:

$$R = 2r \frac{\sqrt{W_2/W_1} - 1}{2 - \sqrt{W_2/W_1}} = 1 \text{ Ом.}$$

III.4. При подключении заряженного конденсатора к катушке в образовавшемся контуре возникают электромагнитные колебания. Поскольку сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало, эти колебания следует считать гармоническими, причем частота этих колебаний должна быть равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а заряд конденсатора будет меняться во времени по закону $q(t) = q_0 |\cos(\omega_0 t)|$, где $q_0 = CU$ – его начальный заряд. При этом суммарная энергия электрического и магнитного поля в контуре должна сохраняться, т.е. должно выполняться соотношение:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{LI^2(t)}{2}.$$

Следовательно, величина тока через катушку в заданный момент t_0

$$I(t_0) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{q_0^2 - q^2(t_0)} = U \sqrt{\left(1 - \cos^2 \frac{t_0}{\sqrt{LC}}\right) \frac{C}{L}} = U \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \left| \sin \frac{t_0}{\sqrt{LC}} \right| \approx 0,7 \text{ А.}$$

III.5. Поскольку период электромагнитных колебаний в контуре без потерь определяется формулой Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, отношение периода колебаний T'' после замыкания ключа к периоду колебаний T' до его замыкания $\alpha = \frac{T''}{T'} = \sqrt{\frac{C''}{C'}}$, где $C' = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ и $C'' = \frac{C_1 + C_2}{2}$ – емкости батареи конденсаторов при разомкнутом и замкнутом ключе, соответственно.

Отсюда получаем ответ:

$$\alpha = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} = 1,25.$$

III.6. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения

на конденсаторах ток в цепи обращается в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q , а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1 U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре. В силу того, что в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль,

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{(C_1 U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}.$$

Отсюда $q = 2U_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем ответ:

$$U_{2max} = \frac{2U_1 C_1}{C_1 + C_2} \approx 364 \text{ В}.$$

III.7. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания. При этом ток в цепи и напряжение на катушке сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Следовательно, когда сила тока в цепи достигает максимального значения I_{max} , напряжение на катушке обращается в нуль, а потому напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах в этот момент времени должны стать равными по величине и противоположными по знаку. Пусть $U = |U_1| = |U_2|$. Из условия задачи и закона сохранения заряда следует, что величина суммарного заряда на соединенных между собой обкладках конденсаторов должна быть равна величине начального заряда конденсатора C_1 , т.е. $(C_1 + C_2)U = C_1 U_1$. Согласно же закону сохранения энергии искомая величина тока I_{max} должна удовлетворять соотношению

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \frac{L I_{max}^2}{2}.$$

Объединяя полученные выражения, находим ответ:

$$I_{max} = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)L}} = 0,75 \text{ А}.$$

IV. Оптика

IV.1. Ход одного из лучей показан на рис. 27, где рассмотрен случай $n_2 < n_1$, при котором выходящий из системы луч отклоняется вниз. По закону преломления: $n_2/n_1 = \sin \alpha / \sin \beta$. Учитывая, что преломляющие углы

являются достаточно малыми, получим: $n_2/n_1 = \alpha/\beta$, а $n_2 = \varphi/\gamma$. Поэтому $n_1 = \beta\varphi/(\alpha\gamma)$. Из рис. 27 видно, что $\gamma = \beta - \alpha$. Поэтому

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\varphi}{\beta - \alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) = \frac{\varphi}{\alpha} = 0,6.$$

IV.2. Искомое положение источника изображено на рис. 28. Оно определяется из условия, что касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела "вода – воздух" под предельным углом полного внутреннего отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, т.к. часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытают полное внутреннее отражение на границе раздела сред. Если переместить источник на меньшую глубину, свет по-прежнему не выйдет из воды, если же, наоборот, погрузить источник глубже, чем H_{max} , то найдется часть лучей, которые будут падать на границу под углами, меньшими предельного угла полного внутреннего отражения, и пройдут в воздух. Из сказанного следует, что мини-

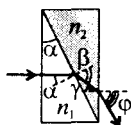


Рис. 27.

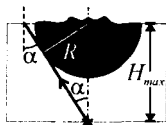


Рис. 28.

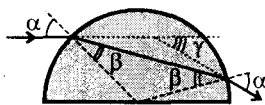


Рис. 29.

мальный угол α падения луча на границу "вода – воздух" определяется равенством $\sin \alpha = R/H_{max}$. Поскольку при полном отражении $\sin \alpha = n^{-1}$, то искомая глубина должна быть равна

$$H_{max} = Rn = 1,33 \text{ м.}$$

IV.3. Световой луч испытывает преломление дважды: при входе в стеклянный шар и при выходе из него. При этом нормали к преломляющей поверхности в точках падения луча совпадают с радиусами шара, проведенными в эти точки. Из рис. 29 видно, что угол между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара, $\gamma = 2(\alpha - \beta)$, где α – угол падения луча на поверхность шара, совпадающий с углом преломления на выходе луча из шара, β – угол преломления на границе "воздух – стекло", совпадающий с углом падения на границу "стекло – воздух". По закону преломления:

$n = \sin \alpha / \sin \beta$. Поскольку $\beta = \alpha - 0,5\gamma$, то искомый показатель преломления

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - 0,5\gamma)} = \sqrt{2}.$$

IV.4. Ход падающего и преломленного в линзе лучей изображен на рис. 30. При построении преломленного луча использована побочная оптическая ось AO , параллельная

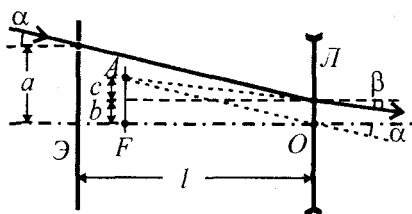


Рис. 30.

падающему на линзу лучу. Согласно известному свойству тонкой рассеивающей линзы продолжение выходящего из линзы луча должно пересекаться с фокальной плоскостью в той же точке A , в которой эту плоскость пересекает параллельная падающему лучу побочная оптическая ось. С учетом того, что фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно, из $\triangle AOF$ находим: $|f| \operatorname{tg} \alpha = c + b$. Поскольку $c = |f| \operatorname{tg} \beta$, то $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - b/|f|$. Принимая во внимание, что $b = a - l \operatorname{tg} \alpha$, получаем ответ:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left[\left(1 + \frac{l}{|f|} \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{|f|} \right] = \operatorname{arctg} \left[\left(1 - \frac{l}{f} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{f} \right].$$

IV.5. Все световые лучи, испущенные источником S и прошедшие через линзу L , пересекаются на ее главной оптической оси в точке S' , являющейся изображением источника (см. рис. 31). Пройдя далее до экрана, они образуют на нем освещенное круглое пятно. Из рисунка видно, что размер пятна не изменится, если расстояние d , на которое перемещают экран, удовлетворяет соотношению: $b - c = d/2$.

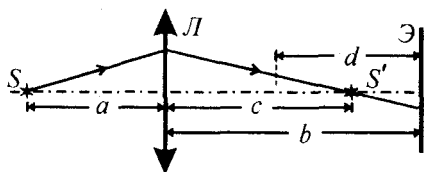


Рис. 31.

С другой стороны, по формуле тонкой линзы расстояния a и c от линзы до предмета и его изображения, соответственно, и фокусное расстояние линзы f должны удовлетворять соотношению:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$. Используя полученное выше соотношение, после несложных преобразований получаем:

$$a = \frac{(2b - d)f}{2b - d - 2f} = 30 \text{ см.}$$

IV.6. Для построения изображения точки предмета C воспользуемся двумя лучами, ход которых изображен на рис. 32. Один из этих лучей выходит из точки C параллельно главной оптической оси O_1O_2 системы и после

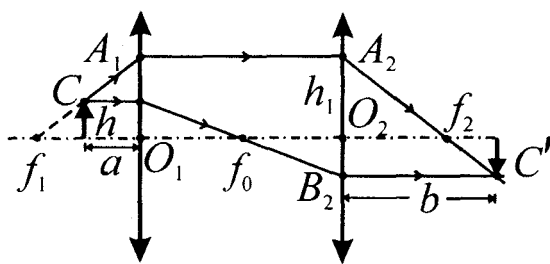


Рис. 32.

первой линзе пересекает оптическую ось в правом фокусе этой линзы (точка f_0 на рисунке). Второй луч направлен так, что его продолжение пересекает оптическую ось в левом фокусе первой линзы (точка f_1 на рисунке), в результате чего после преломления в первой линзе он идет параллельно главной оптической оси. Преломляясь во второй линзе, эти лучи пересекаются в точке C' .

Пусть высота предмета равна h . Из $\triangle f_1 A_1 O_1$ находим, что $h_1 = h \frac{f}{f - a}$. Из подобия $\triangle A_2 B_2 C'$ и $\triangle A_2 O_2 f_2$ следует, что $b = f \frac{A_2 B_2}{A_2 O_2} = f \frac{h_1 + h}{h_1}$. Подставляя в последнее выражение найденное ранее значение h_1 , получаем искомое расстояние:

$$b = 2f - a.$$

У С Л О В И Я З А Д А Ч

В 2000 году на физическом факультете проводились устные олимпиады по физике «Абитуриент-2000» в марте и мае месяцах. Задания, предлагаемые абитуриентам и участникам олимпиады, содержали две задачи и два теоретических вопроса из программы вступительных экзаменов по физике, приведенной в этом сборнике. Ниже приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиаде и вступительных экзаменах по физике на физическом факультете в 2000 году.

I . М Е Х А Н И К А

- I.1. На полу около стены стоит гладкий клин. На его плоскости, образующей с горизонтом угол φ лежит груз, удерживаемый невесомой нерастяжимой нитью. Один конец нити прикреплен к стене так, что участок нити между стеной и клином горизонтален. Остальная часть нити лежит на наклонной плоскости (см. рис. 33). Найти зависимость от времени t скорости движения груза относительно пола после начала движения клина от стены с ускорением a , параллельным горизонтальному участку нити.

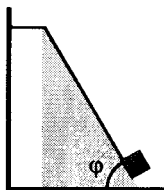


Рис. 33.

- I.2. На цилиндрическую часть катушки радиусом r , лежащей на столе, намотана легкая нерастяжимая нить, отрезок AB которой горизонтален (см. рис. 34). В момент времени $t = 0$ точку нити A начинают тянуть с постоянным горизонтальным ускорением a . При этом катушка начинает двигаться без проскальзывания так, что ее ось не изменяет своей ориентации. Через какое время длина горизонтального участка нити изменится в n раз, если длина отрезка AB была равна L_0 , а внешний радиус катушки равен R ?

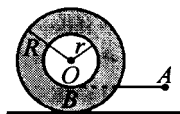


Рис. 34.

- I.3. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой M , а на ней находится груз массой m . К грузу прикреплена невесомая гладкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок, закрепленный на доске. Свободный конец нити тянут с силой F так, как показано на рис. 35. При этом отрезки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны, а вся нить располагается в одной вертикальной

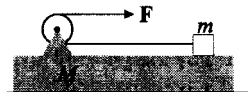


Рис. 35.

плоскости. Коэффициент трения груза о доску равен μ . Найти ускорение груза относительно стола.

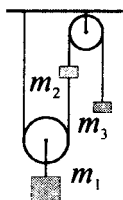


Рис. 36.

1.4. В системе, показанной на рис. 36, грузы массами m_2 и m_3 прикреплены к концам невесомой нерастяжимой нити. На такой же нити, один конец которой закреплен, а другой прикреплен к грузу массой m_2 , висит подвижный блок. К оси этого блока на легких нерастяжимых нитях подвешен груз массой m_1 . Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Пренебрегая трением и массой блоков, найти ускорение груза m_1 .

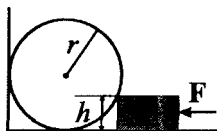


Рис. 37.

1.5. Твердый шар радиусом r и массой m лежит на полу, касаясь вертикальной стены. К нему прижимают с силой F , направленной горизонтально, брусок высотой h ($h < r$) так, как показано на рис. 37. Пренебрегая трением, найти силу давления f шара на пол.

1.6. На горизонтальной крышке стола лежит однородный куб массой m , к середине верхнего ребра которого прикреплена легкая нить. Коэффициент трения куба о крышку равен μ , причем $\mu < 0,5$. С какой минимальной силой и в каком направлении нужно тянуть за нить, чтобы куб начал опрокидываться без скольжения?

1.7. На горизонтальном диске на расстоянии R от оси лежит маленькая шайба. Диск медленно раскручивают так, что его угловая скорость равномерно возрастает со временем. Через время t после начала раскручивания шайба начала скользить по диску. Найти коэффициент трения шайбы о диск, если за время t диск сделал n оборотов.

1.8. На поворотах скоростных трасс дорожное полотно делают наклонным. Пренебрегая влиянием воздуха, найти допустимую скорость автомобиля на повороте радиусом R , где дорожное полотно образует с горизонтом угол α . Считать, что траектория автомобиля лежит в горизонтальной плоскости, коэффициент трения колес о дорогу равен $\mu < 1$, все колеса являются ведущими, а размеры автомобиля много меньше R .

1.9. Однородное тонкостенное кольцо массой m скатывается без проскальзывания по закреплённому желобу так, что его плоскость все время остается в плоскости вертикального сечения желоба, имеющего форму дуги окружности радиусом R (см. рис. 38). Радиус кольца r много меньше R . Найти силу, с которой кольцо будет действовать в нижней точке на желоб, если на высоте $h = R/2$ от этой точки кольцо имело скорость v .

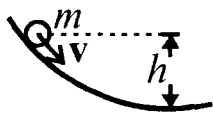


Рис. 38.

1.10. В лежащий на гладкой горизонтальной плоскости кубик массой $M = 1 \text{ кг}$ попадает летевшая со скоростью $v = 200 \text{ м/с}$ пуля массой $m = 20 \text{ г}$. Скорость пули была направлена вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр кубика, перпендикулярно одной из его боковых граней. Сколько тепла выделилось бы, если бы пуля вылетела из кубика со скоростью в $n = 2$ раза меньше, а изменением потенциальной энергии кубика и пули можно было бы пренебречь?

1.11. На тонкостенный обод заторможенного велосипедного колеса, ось которого расположена горизонтально и закреплена, намотана тонкая нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к ободу, а на другом конце висит груз массой m . Радиус колеса равен R , масса обода равна M . Пренебрегая трением, массой спиц, втулки и нити, найти величину ускорения A точек обода колеса через промежуток времени t после отпускания колеса, если в течение этого времени груз двигался поступательно.

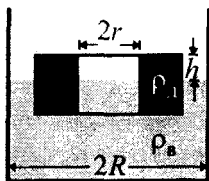


Рис. 39.

1.12. В цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом R , частично заполненном водой, плавает, выступая из воды на высоту h , однородное деревянное кольцо с плотностью ρ_d (см. рис. 39). Радиус отверстия в кольце равен r . В отверстие медленно налили столько масла с плотностью ρ_m , что его верхний уровень достиг верха кольца. В результате уровень воды вне кольца поднялся на некоторую высоту x . Найти x .

I.13. Лежащий в сосуде шар из материала с плотностью ρ_1 имеет герметичную сферическую полость, радиус которой вдвое меньше радиуса R шара. Центр полости находится на расстоянии $R/2$ от центра шара. К точкам на поверхности шара, находящимся на концах диаметра, проходящего через центры шара и полости, приклеены две одинаковые невесомые нерастяжимые нити, длина каждой из которых больше R . Расстояние между точками крепления других концов нитей к горизонтальному дну сосуда равно $2R$. В сосуд наливают жидкость с плотностью ρ до тех пор, пока шар не окажется полностью погруженным в жидкость. При этом обе нити оказываются натянутыми (см. рис. 40). При каких значениях отношения ρ/ρ_1 возможна такая ситуация?

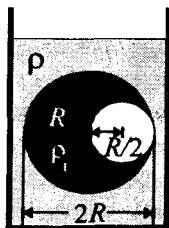


Рис. 40.

кам на поверхности шара, находящимся на концах диаметра, проходящего через центры шара и полости, приклеены две одинаковые невесомые нерастяжимые нити, длина каждой из которых больше R . Расстояние между точками крепления других концов нитей к горизонтальному дну сосуда равно $2R$. В сосуд наливают жидкость с плотностью ρ до тех пор, пока шар не окажется полностью погруженным в жидкость. При этом обе нити оказываются натянутыми (см. рис. 40). При каких значениях отношения ρ/ρ_1 возможна такая ситуация?

I.14. На прикрепленную нижним концом к столу стоящую вертикально невесомую пружину положили легкую чашку, а в нее насыпали песок. Масса чашки с песком равна M . После удара чашка начала совершать вертикальные гармонические колебания с амплитудой A и периодом T . Сколько песка нужно резко сбросить, когда чашка находится на максимальной высоте, чтобы ее колебания прекратились?

I.15. Шайба, скользящая по гладкому горизонтальному льду, попадает на участок, неравномерно посыпанный мелким песком. Коэффициент трения шайбы по мере ее удаления x от границы участка возрастает по закону $\mu = kx$. Через какое время шайба остановится после ее попадания на указанный участок? Размеры шайбы значительно меньше пройденного ею пути.

I.16. На гладкой плоскости, образующей с горизонтом угол α , лежит доска массой M , упирающаяся нижней кромкой в легкую пружину, другой конец которой закреплен. Сила упругости пружины направлена вдоль оси симметрии доски. В свою очередь, ось доски перпендикулярна ребру двугранного угла, образованного плоскостью с горизонтом. На середину доски опускают без начальной скорости брусок массой m . При каком коэффициенте трения между доской и бруском он будет оставаться неподвижным относительно доски при ее дальнейшем движении?

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В комнате на столе стоят два одинаковых стакана. Температура в комнате 20°C . В первый стакан быстро наливают $m = 200$ г воды с температурой $t = 0^\circ\text{C}$, а во второй кладут $\Delta m = 10$ г льда с той же температурой и наливают $m - \Delta m = 190$ г воды с температурой 0°C . Температура воды в первом стакане через время $\tau_1 = 2$ мин увеличилась на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$. Через какое время после заполнения второй стакан нагреется до той же температуры? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 336$ Дж/г, теплоемкость воды $c = 4,2$ Дж/(г · К). Теплоемкостью стаканов пренебречь.

II.2. Абсолютно жесткий сосуд, заполненный гелием при нормальных условиях, движется со скоростью $v = 500$ м/с. На сколько процентов отличалось бы установившееся после остановки сосуда давление от первоначального, если бы отсутствовал теплообмен гелия с сосудом?

II.3. В запаянной с обоих концов U-образной трубке, частично заполненной водой, в одном из колен находится воздух, а из другого колена воздух полностью удален. При температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$ уровень воды в колене, содержащем воздух, ниже запаянного торца трубки на $L_1 = 80$ см, а перепад уровней воды в коленах равен $h_1 = 50$ см. Найти изменение разности уровней воды в коленах после нагревания трубки до температуры $t_2 = 87^\circ\text{C}$, пренебрегая тепловым расширением и объемом испарившейся воды.

II.4. Прямоугольный сосуд разделен на две равные части гладким толстым поршнем, ось которого горизонтальна. Левая часть сосуда длиной L полностью заполнена ртутью. При этом ртуть практически не оказывает давления на верхнюю грань сосуда. В правой части сосуда находится воздух. Пренебрегая тепловым расширением сосуда, поршня и ртути, а также давлением насыщенных паров ртути, найти перемещение поршня при медленном уменьшении абсолютной температуры сосуда с содержимым в $n = 1,5$ раза. Считать, что при конечной температуре ртуть остается жидкой.

II.5. В цилиндре под поршнем в объеме $V_1 = 5$ л находится воздух с насыщенными парами воды при температуре $t_1 = 17^\circ\text{C}$. Объем воздуха медленно уменьшили до величины $V_2 = 1$ л, одновременно увеличив температуру до $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Найти относительную влажность воздуха в конечном состоянии. Давление насыщенных паров воды при начальной температуре равно $p_{\text{н1}} = 17$ мм рт. ст.

II.6. В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой M находится сухой воздух при температуре T_0 . Площадь поперечного сечения поршня равна S , атмосферное давление p_a . В цилиндр впрыснули некоторое количество воды, а затем его медленно нагрели до такой температуры T , при которой испарилась лишь часть воды, а давление ее насыщенных паров стало равным p_n . Во сколько раз при этом изменился объем воздуха под поршнем?

II.7. В гладком вертикальном цилиндре под поршнем в объеме $V = 6$ л находятся частично сжатая пружина и насыщенные пары воды. На поршень медленно насыпали столько песка, что объем пара уменьшился в $n = 3$ раза. Сколько тепла при этом было отведено от цилиндра, если температура в нем оставалась неизменной и равной $t = 100^\circ\text{C}$? Удельная теплота парообразования воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ равна $r = 2,26$ кДж/г.

II.8. Найти удельную теплоемкость идеального одноатомного газа, если нагревание осуществляется так, что среднеквадратичная скорость u теплового движения его атомов массой m увеличивается прямо пропорционально давлению p .

II.9. Давление одного моля идеального одноатомного газа изохорически изменили от начального до некоторого значения. Затем изобарически уменьшили объем газа в $n = 6$ раз. После этого газ изохорически перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k = 1,5$ раза превышает его температуру в начальном состоянии и полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найти отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе.

II.10. В качестве рабочего вещества теплового двигателя используется один моль идеального газа, состояние которого изменяется так, как показано на pV -диаграмме, изображенной на рис. 41, причем прямые 1-2 и 4-3 параллельны друг другу. Температуры газа по шкале Кельвина в точках 1, 2 и 3 равны T_1 , T_2 и T_3 . Найти работу газа за цикл.

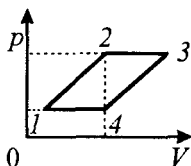


Рис. 41.

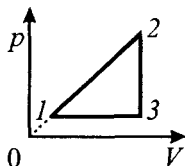


Рис. 42.

II.11. На pV -диаграмме, изображенной на рис. 42, показано изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной в данном цикле равно $n = 4$. Во сколько раз отличается КПД η этого цикла от максимально возможного при заданном значении n ?

II.12. Какую минимальную мощность должен потреблять мотор морозильника, работающего по циклу Карно, в камере которого поддерживается температура $t_1 = -23^\circ\text{C}$, если в нее через стенки поступает количество теплоты, равное $q = 0,1$ МДж за время $\tau = 1$ ч? Температура радиатора морозильника равна $t_2 = 57^\circ\text{C}$, а КПД мотора равен $\eta_m = 0,8$.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

III.1. Три маленьких проводящих шарика, каждый из которых имеет заряд q , удерживают в вершинах правильного треугольника со стороной L . Масса первого шарика равна m , а два других имеют массы, равные M . Шарiki массой M скреплены между собой легкой тонкой нерастяжимой нитью. Найти скорость первого шарика через достаточно большой промежуток времени после одновременного отпуска всех шариков, полагая, что на шарiki не действуют никакие другие тела, а ориентация нити остается неизменной.

III.2. При подключении первого аккумулятора к нагрузке его КПД оказался равным $\eta_1 = 0,5$, а второго – $\eta_2 = 0,6$. Каким будет КПД батареи из этих аккумуляторов, если при работе на ту же нагрузку их включить последовательно?

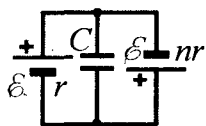


Рис. 43.

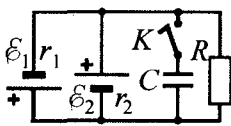


Рис. 44.

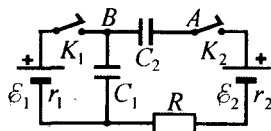


Рис. 45.

III.3. В схеме, показанной на рис. 43, использованы две батареи с одинаковыми ЭДС ε , но различающимися в $n = 3$ раза внутренними сопротивлениями. Определить ЭДС этих элементов, если заряд конденсатора емкостью C равен q .

III.4. Найти заряд, который установится на конденсаторе C после замыкания ключа K в схеме, показанной на рис. 44. Параметры элементов схемы даны на рисунке.

III.5. В схеме, показанной на рис. 45, ключ K_1 первоначально был замкнут, ключ K_2 – разомкнут. Затем, после размыкания ключа K_1 , ключ K_2 замыкают. Какое напряжение установится между точками A и B , если пер-

воначально конденсатор C_2 был разряжен? Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

III.6. В схеме, показанной на рис. 46, все конденсаторы разряжены, а двойной ключ K находится в разомкнутом состоянии. Его перевели в положение 1, а затем, спустя достаточно большое время, — в положение 2. Параметры элементов схемы указаны на рис. 14. Считая диоды D_1 и D_2 идеальными, найти заряд, который установится на конденсаторе C_2 .

III.7. В вакууме создано однородное постоянное магнитное поле с индукцией B . Область пространства, где есть магнитное поле, имеет форму цилиндра радиусом R , ось которого параллельна B . К этой области вдоль одного из радиусов со скоростью v подлетает электрон. Найти время движения электрона в магнитном поле.

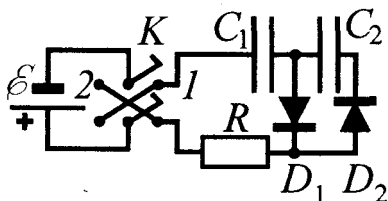


Рис. 46.

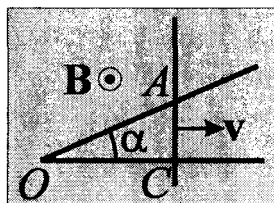


Рис. 47.

III.8. На концах тонкого жесткого невесомого горизонтального диэлектрического стержня закреплены два маленьких шарика, каждый из которых имеет массу m и заряд q . Стержень медленно раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Когда угловая скорость вращения стержня становится равной ω , стержень разрывается. При какой угловой скорости разорвался бы стержень, если бы он находился в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B ?

III.9. Тонкий гладкий прямой проводник с малым сопротивлением согнут под углом α и помещен в однородное магнитное поле с индукцией B так, что плоскость, в которой располагается проводник, перпендикулярна линиям поля. По этому проводнику с постоянной скоростью v (см. рис. 47) скользит тонкий проводник AC , сопротивление единицы длины

которого равно ρ . Найти количество теплоты, которое выделится за время смещения проводника AC на расстояние L от точки O . Индуктивностью проводников и сопротивлением контактов между ними пренебречь.

III.10. По тонкому диэлектрическому кольцу массой m , лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, равномерно распределен заряд Q . Кольцо находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B . Найти угловую скорость, которую приобретет кольцо после включения магнитного поля.

III.11. Плоскую рамку, состоящую из небольшого числа N витков тонкого провода, вращают вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости рамки, с угловой скоростью ω в однородном вертикальном магнитном поле. Концы обмотки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно R . Пренебрегая индуктивностью обмотки, определить величину B индукции магнитного поля, если площадь каждого из витков равна S , а для поддержания вращения к рамке необходимо прикладывать момент сил, в среднем равный $M_{\text{ср}}$.

III.12. В схеме, показанной на рис. 48, ключ K из разомкнутого состояния 0 переводят в положение 1 , а затем, через достаточно большой промежуток времени, — в положение 2 . Первоначально оба конденсатора были разряжены. Пренебрегая сопротивлением элементов схемы, найти амплитуду тока через индуктивность $L = 30 \text{ мГн}$, если ЭДС батареи $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$, емкости конденсаторов $C_1 = 2 \text{ мкФ}$, $C_2 = 1 \text{ мкФ}$.

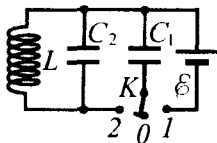


Рис. 48.

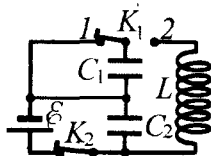


Рис. 49.

III.13. В схеме, приведенной на рис. 49, ключ K_1 первоначально находился в положении 1 , а ключ K_2 был замкнут. Затем ключ K_2 разомкнули, а ключ K_1 перевели в положение 2 . Пренебрегая сопротивлением всех проводников и батареи, определить максимальную силу тока через катушку индуктивности. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

IV. ОПТИКА

IV.1. Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с показателями преломления $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,6$. Один из углов этих клиньев равен $\alpha = 1^\circ$. За пластинкой расположена линза с фокусным расстоянием $F = 180$ см, а за ней экран, причем главная плоскость линзы и плоскость экрана параллельны передней и задней плоскостям пластинки. Если на переднюю плоскость пластинки направить нормально к ней параллельный пучок света, на экране будет наблюдаться светлая точка. На сколько сместится эта точка, если убрать пластинку?

IV.2. Диск радиусом R из льда с показателем преломления $n = 1,3$ разрезали перпендикулярно его плоскости по диаметру. Перпендикулярно плоскости разреза на одну из половин диска направили узкий параллельный пучок света, который вышел параллельно падающему пучку на некотором расстоянии L от него. Найти расстояние L , если интенсивности падающего и выходящего пучков почти одинаковы.

IV.3. На собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см падает пучок света, параллельный ее главной оптической оси. За этой линзой соосно с ней на некотором расстоянии L расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = -20$ см так, что после прохождения через нее свет собирается в некоторой точке S . На сколько сместится эта точка, если линзы поменять местами?

IV.4. На переднюю стенку куба из стекла с показателем преломления n нормально падает параллельный пучок монохроматического света. В кубе есть клиновидная щель, грань AB которой параллельна передней стенке, а грань AC образует с ней малый угол α (см. рис. 50). При этом на матовой задней стенке куба наблюдаются интерференционные полосы. Во сколько раз изменится ширина полос, если щель заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления n_1 ($n_1 < n$)?

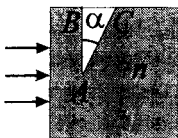


Рис. 50.

IV.5. Точечный источник S , дающий свет с длиной волны λ , помещен в

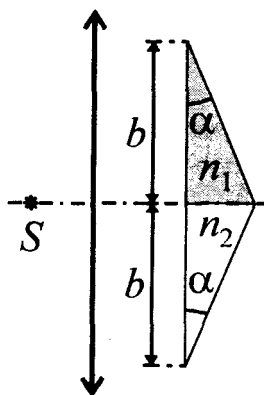


Рис. 51.

фокус собирающей линзы. За линзой находится призма, склеенная из двух стекол с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$). Ось линзы проходит через источник и перпендикулярна основанию призмы (см. рис. 51). Размер основания призмы $2b$ меньше диаметра линзы. Преломляющие углы призмы $\alpha \ll 1$ рад. Найти максимальное число интерференционных полос, которые можно наблюдать на экране, расположенном перпендикулярно оси линзы за призмой.

IV.6. На плоский экран, в котором сделаны

две узкие кольцевые концентрические прорези, нормально падает параллельный монохроматический пучок видимого света. Радиус первой кольцевой прорези

$r_1 = 0,7$ мм, а второй — $r_2 = 2r_1$. Найти длину волны λ падающего света, если на прямой, проходящей через центр прорезей перпендикулярно экрану, на расстоянии $L = 1$ м по другую сторону от него наблюдается интерференционный минимум.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

I. МЕХАНИКА

I.1. Из условия задачи ясно, что после начала движения клина ($t = 0$) груз будет двигаться по его поверхности лишь ограниченное время, а именно вплоть до того момента τ , когда точка крепления нити к грузу достигнет вершины клина. Поскольку иное специально не оговорено в условии задачи, будем считать, что клин движется поступательно, и нить к грузу прикреплена так, что последний при движении клина также движется поступательно. Именно в этих предположениях и будем искать ответ на вопрос задачи для промежутка времени $0 < t < \tau$. Поскольку до момента времени $t = 0$ клин покоился, а затем его начали двигать с постоянным ускорением a , скорость клина относительно пола в момент времени t будет равна $v(t) = at$. Поэтому относительно неподвижной лабораторной системы

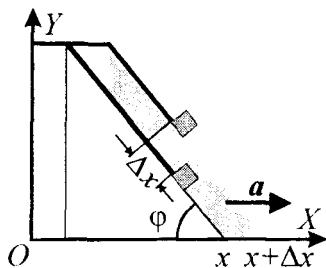


Рис. 52.

координат, ось OX которой параллельна отрезку нити, не лежащему на клине, а ось OY направлена вертикально вверх (см. рис. 52), клин за достаточно малый промежуток времени Δt переместится на расстояние $\Delta x(t, t + \Delta t) = v_x(t) \Delta t = at \Delta t$.

По условию задачи нить следует считать нерастяжимой. Поэтому за указанное время длина отрезка нити, лежащего на клине, уменьшится на ту же величину $\Delta x(t, t + \Delta t)$, и груз переместится по клину

на то же самое расстояние. С помощью рис. 52 легко доказать, что проекция перемещения груза на ось OX за рассматриваемый промежуток времени равна $\Delta x_{\text{гр}}(t, t + \Delta t) = (1 - \cos \varphi) \Delta x(t, t + \Delta t) = (1 - \cos \varphi) at \Delta t$, а на ось OY — $\Delta y_{\text{гр}}(t, t + \Delta t) = \Delta x(t, t + \Delta t) \sin \varphi = at \Delta t \sin \varphi$. Поскольку по определению $v_{\text{гр}x}(t) = \Delta x_{\text{гр}}(t, t + \Delta t) / \Delta t$ и $v_{\text{гр}y}(t) = \Delta y_{\text{гр}}(t, t + \Delta t) / \Delta t$, то для моментов времени $0 < t < \tau$ при сделанных выше предположениях составляющие скорости груза относительно пола равны $\Delta v_{\text{гр}x}(t) = (1 - \cos \varphi) at$ и $\Delta v_{\text{гр}y}(t) = at \sin \varphi$, а искомая величина скорости груза

$$v_{\text{гр}}(t) = \sqrt{v_{\text{гр}x}^2(t) + v_{\text{гр}y}^2(t)} = 2 at \sin(\varphi/2).$$

1.2. По условию задачи при перемещении точки нити A катушка движется по плоскости, сохраняя ориентацию своей оси. Следовательно, считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью v_0 , равной скорости движения оси катушки, и вращения с угловой скоростью ω вокруг этой оси. Поскольку качение катушки происходит без проскальзывания, то $\omega = v_0/R$. Из сказанного следует, что в тот момент, когда скорость оси катушки равна v_0 , скорость точки B должна быть равна $v_B = v_0 - \omega r = (R-r)v_0/R$, а потому при движении катушки с течением времени длина отрезка нерастяжимой нити AB должна уменьшаться.

Учитывая, что по условию задачи отрезок нити AB остается горизонтальным, а первоначально покоившуюся точку A перемещают с постоянным ускорением a , коллинеарным нити, искомым промежуток времени τ должен удовлетворять уравнению: $L(\tau) = L_0/n = L_0 - (a_0 - a)\tau^2/2$, где $a_0 = aR/(R-r)$ – ускорение центра катушки. Из этих уравнений следует, что $anr\tau^2 = 2L_0(n-1)(R-r)$, и с учетом условия $0 \leq \tau$ интересующий промежуток времени равен

$$\tau = \sqrt{2L_0(n-1)(R-r)/(anr)}.$$

1.3. Будем решать задачу при следующих стандартных предположениях: действием воздуха на тела системы можно пренебречь и лабораторную систему отсчета, относительно которой стол неподвижен, можно считать инерциальной. Кроме того, будем считать, что блок к доске и нить к грузу прикреплены так, что под действием силы F может возникнуть лишь поступательное движение этих тел. Поскольку нить является гладкой, то действующие со стороны нити на блок силы не могут иметь составляющей, направленной по касательной к блоку. Полагая, как обычно, что ось, вокруг которой мог бы вращаться блок, совпадает с его геометрической осью, можно утверждать, что при любом натяжении нити блок не будет вращаться. Поэтому, учитывая невесомость нити, можно утверждать, что величина силы натяжения во всех точках нити должна быть одинакова и равна величине приложенной к ее свободному концу силе F . Следовательно-

но, на груз со стороны нити должна действовать сила, равная $-F$. Поскольку нить невесома, то сумма сил, действующих на нее, должна быть равна нулю, а потому, вспоминая третий закон Ньютона, можно утверждать, что со стороны нити на блок должна действовать сила $2F$.

Из условия задачи ясно, что если движение груза по доске и может иметь место, то груз при этом будет двигаться по доске к блоку. Следовательно, сила трения $f_{\text{тр}}$, действующая на груз со стороны доски, может быть направлена только так, как показано на рис. 53. На этом же рисунке

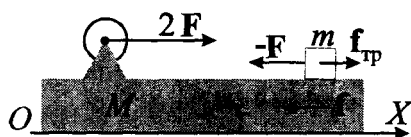


Рис. 53.

показаны сила $-F$, действующая на груз со стороны нити, сила трения $f = -f_{\text{тр}}$, действующая на доску со стороны груза, и ось OX используемой при решении задачи лабораторной системы отсчета. Поскольку по условию задачи доска находится на гладкой горизонтальной поверх-

ности и толщина доски постоянна, то уравнения движения груза и доски в проекциях на ось OX должны иметь вид: $ma_x = f_{\text{тр}} - F$ и $MA_x = 2F - f_{\text{тр}}$, где a_x и A_x – проекции ускорений груза и доски на ось OX .

Учитывая, что груз при указанных условиях не движется по вертикали, на основании второго закона Ньютона можно утверждать, что величина N нормальной составляющей силы реакции доски на груз равна mg , где g – величина ускорения свободного падения. Тангенциальная же составляющая силы реакции доски на груз – сила сухого трения $f_{\text{тр}}$ – согласно закону Кулона не может быть по модулю больше μN .

Очевидно, что при достаточно большом коэффициенте трения груз не будет скользить по доске. Поэтому его ускорение относительно доски будет равно нулю и, следовательно, $A_x = a_x$. В этом случае, складывая приведенные выше уравнения движения груза и доски, получим: $A_x = a_x = F/(m + M)$. Поскольку при этом сила сухого трения является силой сухого трения покоя, то ее величина не может превышать своего максимального значения, т.е. $f_{\text{тр}} \leq \mu mg$. Из сказанного следует, что груз не

будет скользить по доске, если $\mu \geq \mu_{\min} = \frac{(2m + M)F}{(m + M)mg}$. Если же $\mu < \mu_{\min}$,

то, полагая, как обычно, величину коэффициента трения скольжения не зависящей от скорости скольжения и равной максимальному значению коэффициента трения покоя, из приведенных выше соотношений получим: $a_x = \mu g - F/m$. Итак, при выполнении сделанных предположений искомое ускорение груза относительно стола равно:

$$a = F \cdot \begin{cases} \frac{1}{m+M} & \text{при } \mu \geq \frac{(2m+M)F}{(m+M)mg}, \\ \mu g - \frac{1}{m} & \text{при } \mu < \frac{(2m+M)F}{(m+M)mg}. \end{cases}$$

1.4. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение тел системы и считать лабораторную систему, относительно которой покоится ось неподвижного блока, инерциальной. Поскольку отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны и действующие

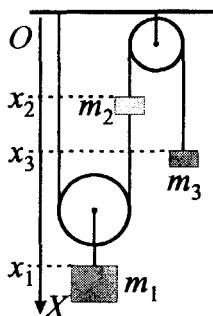


Рис. 54.

на грузы силы тяжести направлены вертикально, можно утверждать, что и ускорения грузов должны быть направлены вертикально. Если использовать обозначения, показанные на рис. 54, то, учитывая, что по условию задачи нити являются нерастяжимыми, и считая блоки идеальными цилиндрами, вращающимися вокруг своих геометрических осей, можно утверждать, что координаты грузов должны удовлетворять соотношениям: $2x_1(t) - x_2(t) = C_1$, $x_2(t) + x_3(t) = C_2$, где C_1 и C_2 – постоянные величины, определяемые длиной нитей и радиусами блоков. Из этих соотношений следует, что проекции ускорений грузов на ось OX не являются независимыми и подчиняются соотношению: $2a_{x1} = a_{x2} = -a_{x3}$.

Поскольку по условию задачи нити являются невесомыми, а массой блоков и трением в их осях следует пренебречь, то величина силы натяжения нити, перекинутой через подвижный блок, в любом ее сечении должна быть неизменной, как и величина силы натяжения второй нити, перекинутой через неподвижный блок. Если величину силы натяжения первой нити обозначить F_1 , а второй – F_2 , то на основании второго закона Ньютона можно утверждать, что уравнения движения грузов в проекциях на ось выбранной лабораторной системы отсчета должны иметь вид:

$$m_1 a_{x1} = m_1 g - 2F_1, \quad m_2 a_{x2} = m_2 g + F_1 - F_2, \quad m_3 a_{x3} = m_3 g - F_2,$$

где g – величина ускорения свободного падения. Умножив последние два уравнения почленно на 2 и -2 соответственно и затем сложив их с уравнением движения первого груза, с учетом полученного ранее соотношения между ускорениями грузов определим искомое ускорение первого груза:

$$a_1 = \frac{m_1 + 2(m_2 - m_3)}{m_1 + 4(m_2 + m_3)} g.$$

1.5. Поскольку шар и брусок по условию задачи следует считать гладкими, то действующие на эти тела силы реакции опор могут иметь лишь составляющие, направленные по нормальным к границам этих тел в точках их соприкосновения с другими телами. Обозначим силы, действующие на шар со стороны пола и со стороны бруска, n и N , соответственно. Как обычно, будем считать инерциальной лабораторную систему, относительно которой пол и стена неподвижны, и пренебрежем влиянием воздуха на

рассматриваемые тела. Тогда, с учетом обозначений, приведенных на рис. 54, на основании второго и третьего законов Ньютона можно утверждать, что шар и брусок могут оставаться неподвижными, если $n_y + N \sin \alpha = mg$ и $F = N \cos \alpha$, где g – величина ускорения свободного падения. Обратившись вновь к рис. 55, можно доказать, что вплоть до момента отрыва

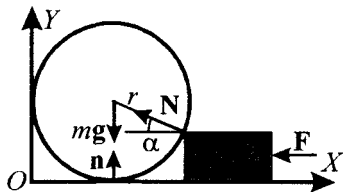


Рис. 55.

шара от пола величина угла α должна удовлетворять соотношению: $\operatorname{tg} \alpha = (r-h)/\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$, а потому $n_y = mg - (r-h)F/\sqrt{(2r-h)h}$. В условии задачи специально не оговорено, что между шаром и полом существуют силы притяжения. Поэтому можно утверждать, что при наличии контакта шара с полом возможные значения нормальной составляющей силы реакции пола на шар должны удовлетворять условию: $n_y > 0$. Следовательно, при наличии контакта шара с полом действующая на брусок сила не может превышать определенного значения, а именно ее величина должна удовлетворять неравенству: $F < mg\sqrt{(2r-h)h}/(r-h)$. Учитывая, что

согласно третьему закону Ньютона искомая сила $\mathbf{f}$ давления шара на пол должна быть равна $-\mathbf{n}$, получим:

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \begin{cases} m - \frac{(r-h)F}{g\sqrt{(2r-h)h}} & \text{при } F < \frac{mg\sqrt{(2r-h)h}}{r-h} = F_1, \\ 0 & \text{при } F \geq F_1. \end{cases}$$

1.6. При решении задачи будем полагать, что крышка стола покоится относительно инерциальной системы отсчета, куб и крышка являются твердыми телами и можно пренебречь действием воздуха. По условию задачи под действием приложенной к нити силы куб должен начать поворачиваться без скольжения. Поскольку нить прикреплена к середине одного из верхних горизонтальных ребер и ее тянут перпендикулярно этому ребру, из соображений симметрии можно утверждать, что куб должен начать поворачиваться вокруг одного из нижних ребер, параллельных тому ребру, к середине которого прикреплена нить. На рис. 56 показаны сечения куба

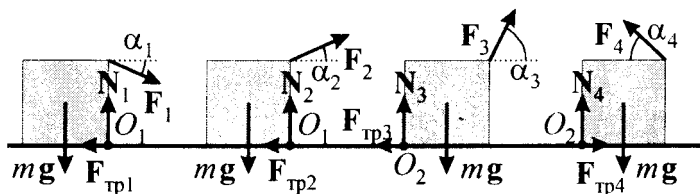


Рис. 56.

вертикальной плоскостью, в которой располагается нить. Здесь же показаны силы, действующие на куб, когда за нить тянут вниз или вверх под углом α_i к горизонту с силой F_i такой, что при ее незначительном увеличении куб начал бы поворачиваться. В первом случае угол наклона нити к горизонту α_1 будем считать отрицательным, а во всех остальных – положительным, причем $0 < \alpha_2 \leq \pi/4$, $\pi/4 < \alpha_3 \leq \pi/2$. Поскольку куб является однородным, действующая на него сила тяжести mg (где g – ускорение свободного падения) приложена к центру куба. Результирующая сил реакции крышки, как это обычно и делают, изображена в виде двух составляющих: нормальной N_i и тангенциальной $F_{трi}$. Точки приложения этих составляющих в первом и втором случаях обозначены на рис. 56 символом O_1 , а в третьем и четвертом – O_2 .

Поскольку куб не должен скользить по крышке, при сделанных выше предположениях и с учетом соглашения о правиле знаков при отсчете угла наклона нити к горизонту, согласно первому закону Ньютона должны выполняться равенства:

$$N_i - mg + F_i \sin \alpha_i = 0, \quad (1)$$

$$F_{\text{тр}i} - F_i \cos \alpha_i = 0, \quad (2)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Поскольку при незначительном увеличении силы, действующей на куб со стороны нити, он начинает поворачиваться, то алгебраическая сумма моментов сил в рассматриваемых случаях должна быть равна нулю. Поэтому в первом и втором случаях, выбирая в качестве оси вращения ребро куба, проходящее через точку O_1 , и вспоминая определение момента силы относительно данной оси, в соответствии со сказанным получим:

$$0,5amg - aF_i \cos \alpha_i = 0, \quad (3_{1,2})$$

где $i = 1, 2$. В третьем и четвертом случаях из сказанного ранее следует, что

$$0,5amg - aF_3 \sin \alpha_3 + aF_3 \cos \alpha_3 = 0, \quad (3_3)$$

$$0,5amg - aF_4 \sin \alpha_4 - aF_4 \cos \alpha_4 = 0. \quad (3_4)$$

Во всех случаях согласно закону Кулона величина тангенциальной составляющей силы реакции крышки – силы сухого трения покоя – не может превышать произведения коэффициента трения на величину нормальной составляющей силы реакции опоры, т.е. должно соблюдаться неравенство

$$F_{\text{тр}i} \leq \mu N_i. \quad (4)$$

Из уравнений (3_{1,2}) следует, что величина силы натяжения нити в первом и втором случаях должна быть равна $F_i = mg/2\cos\alpha_i$, причем согласно уравнениям (1), (2) из неравенства (4) в этих случаях $\text{tg}\alpha_i \leq 2 - 1/\mu$. Поскольку по условию задачи $\mu < 0,5$, то $\text{tg}\alpha_i < 0$. Учитывая, что в первом случае $-\pi/2 < \alpha_1 \leq 0$, а во втором случае $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/4$, можно утверждать, что второй случай при заданных условиях не реализуется, а в первом случае $\cos\alpha_1 \leq \mu/\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}$ и, следовательно,

$$F_{1\min} = \frac{\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}}{2\mu} mg,$$

причем $\sqrt{5 - 4/\mu + 1/\mu^2} > 1$, т.к. $\mu < 0,5$.

В третьем случае согласно уравнению (3₃) $F_3 = \frac{mg}{2(\sin \alpha_3 - \cos \alpha_3)}$, а из соотношений (1), (2) и (4) вытекает, что $\cos \alpha_3 \leq (\sin \alpha_3 - 2 \cos \alpha_3)\mu$. Следовательно, этот случай может иметь место, причем

$$F_{3min} = \frac{mg}{2} < F_{1min}, \quad (5_3)$$

и нить следует тянуть вертикально вверх.

Наконец, в четвертом случае из уравнения (3₄) получим

$$F_4 = \frac{mg}{2(\sin \alpha_4 + \cos \alpha_4)} = \frac{mg}{2\sqrt{2} \sin(\alpha_4 + \pi/4)}, \quad (5_4)$$

причем из соотношений (1), (2) и (4) следует, что

$$\operatorname{ctg} \alpha_4 \leq \frac{\mu}{1 - 2\mu}. \quad (5_{4a})$$

Поскольку максимального значения синус угла достигает тогда, когда угол становится равным $\pi/2$, то искомая величина силы натяжения нити минимальна при $\alpha_4 = \pi/4$ и равна

$$F_4\left(\alpha_4 = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{mg}{2\sqrt{2}}.$$

Конечно, это утверждение будет верно, если при этом выполняется соотношение (5_{4a}), т.е. имеет место неравенство $1/3 \leq \mu$.

Если же $0 \leq \mu \leq 1/3$, то нить следует тянуть под углом $\alpha_4 = \arccos[\mu/\sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2}]$. При этом искомая сила натяжения нити должна быть равна

$$F_4(0 \leq \mu \leq 1/3) = mg \frac{\sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2}}{2(1-\mu)}.$$

Итак, при $0 \leq \mu \leq 1/3$ нить следует тянуть так, как показано на рис. 24, под углом $\alpha_4 = \arccos[\mu / \sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2}]$ к горизонту с силой

$$F(0 \leq \mu \leq 1/3) = mg \frac{\sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2}}{2(1-\mu)}.$$

Если же $1/3 \leq \mu < 0,5$, то к нити следует прикладывать силу, направленную под углом $\alpha_4 = \pi/4$ к горизонту, величина которой не превышает указанное выше значение и равна

$$F(1/3 \leq \mu < 0,5) = \frac{mg}{2\sqrt{2}}.$$

1.7. Поскольку диск первоначально покоился и его угловую скорость увеличивают с постоянным угловым ускорением ε , по аналогии с законами изменения проекции скорости и координаты точки при прямолинейном равнопеременном движении можно утверждать, что к моменту времени τ после начала раскручивания угловая скорость диска должна стать равной $\omega(\tau) = \varepsilon \tau$, а диск должен повернуться на угол $\varphi(\tau) = \varepsilon \tau^2 / 2$. Поскольку за один оборот диск поворачивается на угол 2π , а по условию задачи диск за время τ совершил n оборотов, то из написанных выше выражений следует, что диск раскручивали с угловым ускорением $\varepsilon = 4\pi n / \tau^2$.

По определению длина дуги окружности радиуса R , заключенная между радиусами, образующими угол φ , равна $R\varphi$. Следовательно, тангенциальная составляющая ускорения точки диска, находящейся на расстоянии R от оси вращения, равна $a_\tau = \varepsilon R$. Вспоминая, что нормальная составляющая ускорения точки, движущейся с угловой скоростью ω по дуге с радиусом кривизны R , равна $a_n(\tau) = R\omega^2(\tau)$, можно утверждать, что ускорение шайбы к моменту времени τ относительно системы отсчета, в которой ось диска неподвижна, должно стать равным $a(\tau) = \sqrt{a_n^2(\tau) + a_\tau^2}$.

Считая, как обычно, указанную систему отсчета инерциальной и пренебрегая действием воздуха на шайбу, можно утверждать, что ускорение шайбы обусловлено действием на нее только тангенциальной составляющей силы реакции диска, т.к. плоскость диска по условию задачи горизон-

тальна. Поэтому согласно второму закону Ньютона максимальное значение тангенциальной составляющей силы реакции диска – силы сухого трения – должно быть равно $F_{\tau \max} = m a(\tau)$. Учитывая, что при выполнении сделанных ранее предположений шайба прижимается к диску только за счет действия на нее силы тяжести, получим, что нормальная составляющая силы реакции диска должна быть равна $N = m g$, где g – ускорение свободного падения. Поэтому, вспоминая закон Кулона для сил сухого трения, можно утверждать, что $\mu = F_{\tau \max} / N$. Подставляя в это выражение ранее полученные соотношения, определим искомый коэффициент трения шайбы о диск:

$$\mu = \frac{4 \pi n R \sqrt{16 \pi^2 n^2 + 1}}{g \tau^2}.$$

1.8. Будем, как обычно, лабораторную систему отсчета, неподвижную относительно полотна дороги, считать инерциальной. Поскольку в соответствии с условием задачи следует пренебречь размерами автомобиля и влиянием на него воздуха (в том числе и аэродинамическими силами, которые могут прижимать автомобиль к дороге или приподнимать его), то уравнение движения автомобиля в указанной системе отсчета согласно второму закону Ньютона будет иметь вид:

$$m a = m g + F, \quad (1)$$

где m – масса автомобиля, a – его ускорение, g – ускорение свободного падения, а F – сила реакции дороги, действующая на автомобиль. По условию задачи автомобиль движется в горизонтальной плоскости по дуге окружности радиусом R с постоянной по величине скоростью. Следовательно, ускорение автомобиля должно быть направлено горизонтально к центру дуги окружности, а его величина должна быть равна $a = v^2 / R$, где v – модуль скорости автомобиля. Поскольку скорость автомобиля не изменяется по величине и все колеса автомобиля являются ведущими, то сила реакции дороги должна лежать в вертикальной плоскости, проходящей через центр кривизны траектории автомобиля и сам автомобиль. Если силу реакции F , как обычно, представить в виде двух составляющих, одна из которых перпендикулярна полотну дороги (нормальная составляющая F_n), а

другая параллельна ему (тангенциальная составляющая F_t), то уравнение (1) движения автомобиля в проекциях на оси декартовой системы координат, показанной на рис. 57, можно представить в виде:

$$mv^2/R = F_n \sin \alpha + F_{tx}, \quad 0 = F_n \cos \alpha + F_{ty} - mg. \quad (2)$$

где F_{tx} и F_{ty} – проекции составляющей F_t на оси OX и OY , а F_n – модуль составляющей F_n . При этом было учтено, что нормальная составляющая может быть направлена только вверх перпендикулярно полотну дороги.

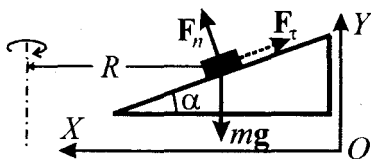


Рис. 57.

Если бы на колеса автомобиля не действовала сила трения, т.е. составляющая F_t была бы равна нулю, то согласно системе уравнений (2) скорость автомобиля при сделанных допущениях была бы равна $v_0 = \sqrt{gR \operatorname{tg} \alpha}$. При

$v < v_0$ и отсутствии сил трения автомобиль под действием составляющей силы тяжести, направленной вниз, начал бы соскальзывать. Следовательно, при $v < v_0$ автомобиль будет двигаться заданным образом, если составляющая F_t будет направлена вверх вдоль дороги, т.е. так, как показано на рис. 56 пунктирной линией. При этом согласно системе уравнений (2) составляющие силы реакции дороги должны удовлетворять соотношениям:

$$F_n = \left(g \cos \alpha + \frac{v^2}{R} \sin \alpha \right) m, \quad F_t = \left(g \sin \alpha - \frac{v^2}{R} \cos \alpha \right) m, \quad (3)$$

где F_t – модуль составляющей F_t . Отсюда, учитывая, что тангенциальная составляющая согласно закону Кулона для сил сухого трения не может превышать μF_n , т.е.

$$\frac{F_t}{F_n} = \frac{g R \operatorname{tg} \alpha - v^2}{g R + v^2 \operatorname{tg} \alpha} \leq \mu, \quad (4)$$

при $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ получим:

$$\sqrt{g R \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}} \leq v \leq \sqrt{g R \operatorname{tg} \alpha}, \quad (5)$$

а при $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ скорость движения автомобиля в рассматриваемом случае должна удовлетворять условию: $0 \leq v \leq v_0$.

При $v > v_0$ сила трения со стороны дороги должна быть направлена вниз, а вместо неравенства (4) должно выполняться соотношение:

$$\frac{F_{\tau}}{F_n} = \frac{v^2 - g R \operatorname{tg} \alpha}{g R + v^2 \operatorname{tg} \alpha} \leq \mu. \quad (6)$$

Следовательно, если $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$, то скорость автомобиля должна удовлетворять неравенствам:

$$v_0 = \sqrt{g R \operatorname{tg} \alpha} < v \leq \sqrt{g R \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}}, \quad (7)$$

если же $\mu \geq \operatorname{ctg} \alpha$, то ограничения на максимальную величину скорости автомобиля нет.

Поскольку по условию задачи коэффициент трения не превышает единицы, то искомая скорость v движения автомобиля должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$0 \leq v \leq \sqrt{g R \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}} = v_{\max} \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \alpha < \mu,$$

$$v_{\min} = \sqrt{g R \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}} \leq v \leq v_{\max} \quad \text{при} \quad \mu \leq \operatorname{tg} \alpha < 1/\mu,$$

$$v_{\min} \leq v < \infty \quad \text{при} \quad 1/\mu \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

1.9. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение кольца. Поскольку кольцо скатывается без проскальзывания, то величина скорости v центра кольца и угловая скорость его вращения относительно горизонтальной оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, должны удовлетворять соотношению $v = \omega r$. Отсюда с учетом того, что кольцо тонкое, следует, что скорость любой i -й точки кольца $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{i\text{вр}}$, где $\mathbf{v}_{i\text{вр}}$ — скорость этой точки

относительно центра кольца. Поэтому кинетическая энергия катящегося без проскальзывания кольца должна быть равна:

$$W_k = \sum_i m_i v_i^2 / 2 = \sum_i m_i (v^2 + v_{\text{вп}}^2 - 2 \mathbf{v} \mathbf{v}_{\text{вп}}) / 2 = \sum_i m_i v^2 - \mathbf{v} \sum_i m_i \mathbf{v}_{\text{вп}} = m v^2,$$

т.к. массы диаметрально противоположных точек кольца m_i в силу его однородности равны, а их скорости, обусловленные вращением колеса вокруг своей оси, равны по величине $\omega r = v$, но направлены в противоположные стороны.

Поскольку кольцо скатывается без проскальзывания, то действующая на него со стороны желоба сила сухого трения является силой трения покоя и ее работа над кольцом и желобом равна нулю. Поэтому если, как обычно, считать систему «кольцо – желоб – Земля» изолированной, т.е. пренебречь влиянием внешних тел, и пренебречь силами трения качения, можно утверждать, что для этой системы должен выполняться закон сохранения механической энергии. Учитывая, что масса Земли во много раз больше массы кольца, можно пренебречь изменением скорости Земли при изменении положения кольца, а лабораторную систему считать инерциальной. Тогда, с учетом сказанного ранее, можно утверждать, что при изменении положения кольца приращение кинетической энергии рассматриваемой системы тел должно быть равно убыли ее потенциальной энергии. Если скорость кольца в нижней точке траектории обозначить v_n , то приращение кинетической энергии кольца при его скатывании до нижней точки желоба будет равно $\Delta W_k = m v_n^2 - m v^2$. При этом убыль потенциальной энергии указанной системы, считая ускорение свободного падения g постоянным и учитывая, что по условию задачи $h = R/2 \gg r$, получим равной $\Delta W_n = (h - r) m g \approx m g R/2$. Из сказанного следует, что в нижней точке траектории скорость кольца должна стать равной $v_n = \sqrt{v^2 + g R/2}$. Поскольку в этой точке ускорение кольца направлено вертикально вверх и равно v_n^2 / R , тангенциальная составляющая действующей на кольцо силы реакции желоба (сила сухого трения покоя) равна нулю, а величина нормальной составляющей N указанной силы согласно второму закону Ньютона должна быть равна $(g + v_n^2 / R) m$. Следовательно, согласно третьему закону Ньютона искомая сила, с которой кольцо действует на желоб, равна

$$F = -N = (v^2/gR + 1,5)mg.$$

1.10. Если, как обычно, считать, что лабораторная система отсчета, относительно которой кубик первоначально покоился, является инерциальной, и пренебречь влиянием воздуха, то можно утверждать, что механическая система «пуля – кубик» в горизонтальном направлении не подвергается действию каких-либо тел, т.к. плоскость, на которой лежит кубик, является по условию задачи гладкой горизонтальной. Следовательно, в горизонтальном направлении импульс этой системы тел должен оставаться неизменным. Поскольку скорость пули v в момент попадания в кубик была направлена вдоль горизонтальной прямой, перпендикулярной грани кубика и проходящей через его центр, можно считать, что за время движения в кубике скорость пули не изменит своего направления, а кубик в момент вылета из него пули будет двигаться поступательно со скоростью V , удовлетворяющей соотношению: $mv = mv/n + MV$.

При движении пули в кубике разрушается его материал, в кубике возникают упругие и пластические деформации и, вообще говоря, некоторая часть кубика может быть оторвана от него. Возникают деформации и в самой пуле. Все это должно сопровождаться переходом части кинетической энергии пули не только в тепловую энергию, но и в энергию звуковых волн, порожденных ударом, и в энергию, соответствующую изменениям механических и, вообще говоря, химических свойств материала кубика и пули. Поскольку по условию задачи изменением потенциальной энергии кубика и пули следует пренебречь, то можно полагать, что убыль механической энергии пули и кубика обусловлена только выделением тепла. Тогда на основании закона сохранения энергии можно найти *максимальное* количество теплоты, которое могло бы выделиться в рассматриваемом процессе, из соотношения: $Q = mv^2/2 - mv^2/2n^2 - MV^2/2$. Решая совместно оба полученные уравнения, найдем *максимальное* количество теплоты, которое могло бы выделиться в результате столкновения пули с кубиком:

$$Q = \left[1 - \frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{m}{M} \right] \frac{mv^2}{2} \approx 300 \text{ Дж}.$$

1.11. Как и обычно, будем считать лабораторную систему отсчета, в которой ось обода неподвижна, инерциальной. По условию задачи обод следует считать недеформируемым и вращающимся вокруг своей геометрической оси, а нить нерастяжимой. Поэтому можно утверждать, что в тот момент времени t , когда скорость груза становится равной $u(t)$, точно такую же по величине линейную скорость должна иметь и любая точка тонкого обода. Следовательно, пренебрегая в соответствии с условием задачи массой нити, спиц и втулки, можно считать, что в указанный момент времени кинетическая энергия системы «колесо – нить – груз – Земля» должна стать равной $W_k(t) = (M + m)v^2/2$. При этом мы считаем, что кинетическая энергия Земли при опускании груза остается неизменной. Последнее утверждение может показаться неверным. Действительно, если пренебречь влиянием на рассматриваемые тела других тел, то указанную систему следует считать изолированной. Следовательно, поскольку импульс вращающегося вокруг неподвижной оси однородного твердого обода равен нулю, и импульс нити следует считать равным нулю (по условию задачи масса нити равна нулю), то на основании закона сохранения импульса нужно считать, что приращения импульсов груза и Земли по отношению к инерциальной системе отсчета должны быть одинаковыми по величине. Однако, учитывая, что масса Земли во много раз больше массы груза, изменением скорости Земли по отношению к инерциальной системе отсчета, обусловленным движением груза, следует пренебречь. Поэтому следует пренебречь не только изменением кинетической энергии Земли, но и ее ускорением, обусловленным движением груза, т.е. действительно можно считать лабораторную систему инерциальной.

По условию указанную систему тел следует считать и консервативной. Поэтому на основании закона сохранения механической энергии можно утверждать, что приобретенная системой к моменту времени t кинетическая энергия равна убыли потенциальной энергии этой системы, обусловленной опусканием груза на высоту h . Очевидно, возможные перемещения груза малы по сравнению с радиусом Земли, а потому действующую на груз силу тяжести mg , где g – ускорение свободного падения, необходимо считать постоянной. Тогда из сказанного следует, что в любой допустимый по условию задачи момент времени t должно выполняться соотношение:

$$0,5(M + m)v^2(t) = mgh(t).$$

Поскольку на груз со стороны Земли действует не зависящая от положения груза сила тяжести, и согласно сказанному выше величина тангенциальной составляющей ускорения точек обода a_τ и величина ускорения груза a должны быть равны, можно считать, что в любой момент времени t ускорение груза остается неизменным. Поэтому можно утверждать, что

$$v(t) = at \text{ и } h(t) = 0,5at^2.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущее уравнение, получим:

$$a = \frac{mg}{M + m}.$$

Учитывая, наконец, что нормальная составляющая ускорения точки, движущейся по окружности радиусом R со скоростью v , равна $a_n = v^2/R$ и направлена перпендикулярно тангенциальной составляющей ее ускорения, определим искомое ускорение точек обода колеса в заданный момент времени $t = \tau$:

$$A = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{mg\sqrt{R^2 + [mg\tau^2(M + m)]^2}}{(M + m)R}.$$

1.12. При решении задачи будем, поскольку иное не оговорено в условии, полагать сосуд с плавающим в нем кольцом и водой покоящимися относительно лабораторной системы отсчета, которую, в свою очередь, будем считать инерциальной. Поскольку по условию задачи кольцо является однородным, все нижние точки кольца должны располагаться на одной горизонтальной плоскости, а давление воды в любой нижней точке кольца должно быть равно $p_a + \rho_b g(H - h)$, где p_a — атмосферное давление, g — ускорение свободного падения, а H — высота кольца. С другой стороны, это давление должно быть равно давлению, обусловленному действием сил тяжести и воздуха на кольцо, т.е. должно выполняться соотношение: $p_a + \rho_b g(H - h) = p_a + \rho_d gH$. Следовательно, можно утверждать, что

$$\rho_b(H - h) = \rho_d H. \quad (1)$$

По условию задачи в отверстие в кольце налили столько масла, что его уровень достиг верха кольца. Такая ситуация возможна лишь в том случае, если плотность масла не превышает плотности дерева, поскольку давление во всех точках горизонтальной плоскости, совпадающей с нижними точками кольца, согласно закону сообщающихся сосудов должно быть неизменным. Учитывая, что масло заливали медленно, можно утверждать, что даже если масло имеет максимально допустимую плотность, равную плотности дерева, нижний уровень масла не может опуститься ниже указанной плоскости. Если же плотность масла меньше плотности дерева, то из отверстия в кольцо масло вытеснит лишь часть воды. Толщина h_1 слоя воды, оставшейся внутри кольца, при $\rho_m < \rho_d$ должна удовлетворять уравнению

$$\rho_b (H - h) = \rho_b h_1 + \rho_m (H - h_1). \quad (2)$$

При заливании масла глубина погружения кольца в воду изменяться не может, поскольку масло не может вытекать из кольца, а потому должно оставаться справедливым соотношение (1). Из сказанного ясно, что одновременно с увеличением объема залитого в кольцо масла уровень воды в сосуде и кольцо будут подниматься. Поскольку в условии задачи высота сосуда не указана, ее следует считать столь большой, что вода не выливается через края сосуда. Поэтому, пренебрегая, как это обычно и делается в подобных задачах, сжимаемостью воды и масла, можно утверждать, что искомая высота x подъема воды должна удовлетворять уравнению

$$x R^2 = (H - h - h_1) r^2. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) – (3), определим искомую высоту подъема воды:

$$x = \frac{h r^2 \rho_m}{(\rho_b - \rho_m) R^2}.$$

I.13. Как и в предыдущей задаче, будем считать сосуд с его содержимым покоящимися относительно лабораторной системы отсчета, а ее, в свою очередь, будем считать инерциальной. На рис. 58 показаны силы, действующие на шар: силы натяжения нитей T_1 и T_2 , сила Архимеда F_1 , действующая на шар со стороны жидкости, сила тяжести F_3 , которая должна была бы действовать на шар, если бы он не имел полости, и сила

F_2 , противоположная силе тяжести, которая должна была бы действовать на вещество шара, изъятые из него. При выборе направлений сил T_1 и T_2 было учтено, что по условию задачи обе нити натянуты. Следовательно, указанные силы должны быть направлены вертикально вниз, поскольку шар покоится относительно инерциальной системы отсчета, действующие на шар сила тяжести и сила Архимеда направлены по вертикали, расстояние между точками крепления нитей к дну сосуда равно диаметру шара, а нить может оказывать силовое действие только тогда, когда она испытывает действие сил, стремящихся увеличить длину нити.

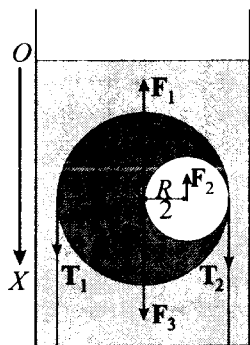


Рис. 58.

Поскольку шар покоится относительно инерциальной системы отсчета, то, во-первых,

ускорение его центра масс должно быть равно нулю, а во-вторых, должно быть равно нулю и его угловое ускорение.

Первое условие означает, что сумма всех сил, действующих на шар, равна нулю. Если записать это условие в проекции на ось OX , направление которой совпадает с направлением ускорения свободного падения g , то оно будет иметь вид:

$$T_1 + T_2 + F_3 - F_1 - F_2 = 0, \quad (1)$$

где символами T_i и F_i обозначены модули соответствующих сил.

Второе условие сводится к требованию, чтобы была равна нулю сумма моментов всех действующих на шар сил относительно любой оси. Поскольку все силы, действующие на шар, лежат в вертикальной плоскости, в которой лежат точки крепления нитей к шару, то с учетом выполнения соотношения (1) второе требование эквивалентно требованию равенства нулю суммы моментов всех действующих на шар сил относительно любой горизонтальной оси, перпендикулярной ранее указанной вертикальной плоскости. Выберем из всех подобных возможных осей ту, которая проходит через точку крепления первой нити к шару. Тогда, вспоминая, что момент силы относительно оси равен произведению плеча силы относительно

но этой оси на величину силы, и считая моменты сил, стремящихся вызвать вращение шара по часовой стрелке, положительными, получим:

$$RF_3 + 2RT_2 - RF_1 - 1,5RF_2 = 0. \quad (2)$$

Поскольку объем шара радиусом r равен $V(r) = 4\pi r^3/3$, модули сил F_1 , F_2 и F_3 должны удовлетворять соотношениям:

$$F_3 = 4\pi R^3 \rho_1 g/3 = 8F_2, \quad F_1 = F_3 \rho/\rho_1.$$

Из этих соотношений и уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{T_1}{F_3} = \frac{\rho}{2\rho_1} - \frac{15}{32} \quad \text{и} \quad \frac{T_2}{F_3} = \frac{\rho}{2\rho_1} - \frac{13}{32}.$$

На основании последних соотношений можно утверждать, что обе нити будут натянуты, если отношение плотности жидкости к плотности материала шара будет больше 15/16, т.к. отношение модулей не равных нулю векторов должно быть величиной положительной.

I.14. По условию задачи чашка с песком после удара совершает вертикальные гармонические колебания. Такое движение, очевидно, возможно лишь при соблюдении следующих условий. Во-первых, на движущиеся части этой системы не действуют диссипативные силы, т.е. не действуют силы сопротивления со стороны окружающей среды, а силы деформации пружины являются полностью упругими. Во-вторых, результирующая действующих на чашку с песком сил тяжести и сил, обусловленных деформацией пружины, направлена вертикально и совпадает с осью пружины. Наконец, песок остается неподвижным относительно чашки, движущейся поступательно. Поэтому, если считать, что между отдельными песчинками и чашкой отсутствуют силы притяжения – песок свободно лежит на чашке – максимальное ускорение песчинок, направленное вниз, не может превышать ускорения свободного падения g . Вспоминая, что при прямолинейных гармонических колебаниях с частотой ω амплитуда ускорения в ω^2 раз превышает амплитуду смещения, можно утверждать, что задача будет иметь решение, если $4\pi^2 A/T^2 < g$, т.к. $\omega = 2\pi/T$.

Будем, как обычно, считать лабораторную систему отсчета, в которой покоится стол, инерциальной. Тогда можно утверждать, что перед ударом в положении равновесия величина деформации пружины ΔL , масса чашки с песком M и жесткость пружины k должны удовлетворять условию: $Mg = k\Delta L$. Поскольку при максимальном смещении чашки с песком вверх величина деформации пружины станет равной $\Delta L - A$, то чашка останется в этом положении, если с нее резко сбросить такую массу песка m , что $(M - m)g = (\Delta L - A)k$, т.е. искомая масса песка должна быть равна $m = Ak/g$. Определить жесткость пружины можно, воспользовавшись законом сохранения механической энергии. Действительно, систему «чашка с песком – пружина – Земля» при сделанных выше предположениях можно считать изолированной консервативной. Поэтому приращение потенциальной энергии этой системы при подъеме чашки из положения равновесия на максимальную высоту должно быть равно кинетической энергии чашки в положении равновесия, т.е. $MgA + (\Delta L - A)^2 k/2 - (\Delta L)^2 k/2 = Mv_0^2/2$ или $kA^2/2 = Mv_0^2/2$. Учитывая, что при заданном движении амплитуда скорости в ω раз превышает амплитуду смещения, т.е. $v_0 = \omega A = 2\pi A/T$, получим $k = 4\pi^2 M/T^2$. Следовательно, массу чашки с песком необходимо уменьшить на величину

$$m = \frac{4\pi^2 AM}{gT^2}.$$

Поскольку, как было выяснено выше, решение задачи возможно при выполнении неравенства $4\pi^2 A/T^2 < g$, найденная масса m меньше первоначальной массы M чашки с песком, а т.к. чашка легкая, то полученное выражение является ответом на вопрос задачи.

1.15. По условию задачи шайба движется прямолинейно в горизонтальной плоскости. Будем, как обычно, считать, что система отсчета, неподвижная относительно льда, является инерциальной, а ее ось OX совпадает с направлением движения шайбы. Будем также считать, что влиянием воздуха на шайбу можно пренебречь, а действующая на шайбу сила сухого трения скольжения не зависит от скорости шайбы и равна максимальному значению силы сухого трения покоя. Тогда на основании второго закона Ньютона можно утверждать, что уравнение движения шайбы в проекции

на ось OX должно иметь вид: $m\ddot{x} = -\mu mg = -kmgx$, где m – масса шайбы, а g – величина ускорения свободного падения. Из полученного уравнения следует, что ускорение шайбы $\ddot{x}$ прямо пропорционально смещению шайбы от границы участка и направлено к этой границе, т.е. изменяется так же, как ускорение груза пружинного маятника. Следовательно, закон движения шайбы, начиная с момента времени $t = 0$, когда шайба попадает на посыпанный песком участок, до момента времени $t = \tau$, когда шайба останавливается, должен иметь вид $x(t) = x_{\max} \sin \omega t$, где $\omega = \sqrt{k g}$. Поскольку скорость шайбы в указанный промежуток времени изменяется по закону $v(t) = \dot{x}(t) = \omega x_{\max} \cos \omega t$, то момент остановки шайбы должен удовлетворять соотношению: $\omega \tau = \pi/2$. Таким образом, искомый промежуток времени равен

$$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{k g}}.$$

I.16. Будем решать задачу, пренебрегая влиянием воздуха на движение тел и считая, как обычно, лабораторную систему отсчета, относительно которой покоится плоскость, инерциальной. Кроме того, будем полагать, что деформации пружины являются абсолютно упругими. По условию задачи сила упругости пружины направлена вдоль оси симметрии доски, а брусок кладут на середину покоящейся доски. Учитывая, что ось доски перпендикулярна ребру двугранного угла, образованного гладкой наклонной плоскостью с горизонтом, можно считать, что линии действия всех сил, приложенных к доске и бруску, лежат в вертикальной плоскости, проходящей через указанную ось. Поэтому можно утверждать, что после отпускания бруска доска вместе с ним начнет двигаться поступательно с ускорением, направленным вдоль оси доски вниз. Совместим с этим направлением ось OX и выберем начало отсчета совпадающим с тем положением, в котором находился бы нижний край доски при недеформированной пружине. Тогда, учитывая, что силы трения между доской и бруском согласно третьему закону Ньютона равны по величине и противоположны по направлению, уравнения движения бруска и доски в проекции на ось OX согласно второму закону Ньютона можно представить в виде:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha + F_{\text{тр}x}, \quad M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}x} - kx,$$

где g – величина ускорения свободного падения, а $F_{\text{тр}x}$ – проекция на ось OX силы трения покоя, действующей на брусок со стороны доски. Из второго уравнения следует, что пока на доску не положили брусок, координата ее нижнего края в положении равновесия ($\ddot{x} = 0$) должна была быть равна $x_0 = (Mg \sin \alpha)/k$. Складывая почленно приведенные уравнения, получим $(M + m)\ddot{x} = (M + m)g \sin \alpha - kx$. Следовательно, после того, как на доску положили брусок, координата нижнего края доски в новом равновесном положении станет равной $x_1 = [(M + m)g \sin \alpha]/k$, а уравнение движения доски с бруском можно представить в виде $(M + m)\ddot{x} = -k(x - x_1)$. Из этого уравнения следует, что ускорение движущихся тел пропорционально их смещению от положения равновесия и направлено к этому положению. Следовательно, после отпускания бруска доска вместе с ним будет совершать гармонические колебания вдоль оси OX с частотой $\omega = \sqrt{k/(M + m)}$ и амплитудой $|x_{\text{max}}| = x_1 - x_0 = (mg \sin \alpha)/k$. Поскольку проекция на ось OX действующей на брусок силы тяжести положительна, а его ускорение в крайнем нижнем положении направлено вверх вдоль оси OX и максимально по величине, то согласно уравнению движения именно в этом положении величина силы сухого трения покоя должна стать максимальной и равной $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = (g \sin \alpha + |\ddot{x}_{\text{max}}|)m = [(M + 2m)mg \sin \alpha]/(M + m)$, т.к. амплитуда ускорения в ω^2 раз превышает амплитуду смещения и равна $|\ddot{x}_{\text{max}}| = kx_{\text{max}}/(M + m)$. С другой стороны, согласно закону Кулона максимальная величина силы сухого трения покоя равна произведению коэффициента трения на величину нормальной составляющей силы реакции опоры, т.е. $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = \mu mg \cos \alpha$. Поэтому искомый коэффициент трения должен удовлетворять неравенству:

$$\mu \geq \frac{2m + M}{m + M} \text{tg} \alpha.$$

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. Поскольку воду в стаканы наливают быстро, а теплоемкостью стаканов по условию задачи следует пренебречь, можно считать, что теплообмен воды с окружающей средой начинается только после того, как вода оказалась налитой в стаканы. Кроме того, будем считать, что температура содержимого стаканов во всех точках изменяется одинаково, т.е. нагревание содержимого стаканов осуществляется квазиравновесно, а температура воздуха в комнате остается неизменной. Вспоминая, что температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении равна $t = 0^\circ\text{C}$, на основании определения удельной теплоемкости и удельной теплоты плавления найдем количества теплоты, необходимые для нагревания содержимого первого и второго стаканов: $q_1 = c m \Delta t$, $q_2 = \lambda \Delta m + c m \Delta t$. Учитывая, что температура содержимого стаканов за интересующие промежутки времени изменяется незначительно по сравнению со средней разностью температур комнаты и воды в стаканах, можно считать, что скорость теплообмена содержимого стаканов с окружающей средой остается постоянной и одинаковой в обоих случаях. Следовательно, можно утверждать, что $q_1/\tau_1 = q_2/\tau_2$, где τ_2 – искомое время нагревания второго стакана. Решая это уравнение совместно с двумя ранее составленными, найдем интересное время:

$$\tau_2 = \left(1 + \frac{\lambda \Delta m}{c m \Delta t} \right) \tau_1 = 10 \text{ мин.}$$

II.2. Будем считать, что в движущемся со скоростью v сосуде гелий находится в состоянии термодинамического равновесия, а скорость сосуда задана относительно некоторого инерциального наблюдателя. Тогда можно утверждать, что кинетическая энергия гелия относительно указанного наблюдателя, обусловленная упорядоченным движением его атомов, равна $W_k = m v^2 / 2$, где m – масса гелия в сосуде. После остановки сосуда через некоторое время гелий согласно нулевому постулату термодинамики должен перейти в новое состояние термодинамического равновесия. Поскольку сосуд по условию задачи является абсолютно жестким и нет теплообмена гелия с окружающими телами, внутренняя энергия гелия согласно закону сохранения энергии после установления нового состояния термодина-

мического равновесия должна увеличиться на величину, равную W_k . Будем, как обычно, считать гелий идеальным газом. Поскольку гелий является одноатомным газом, его внутренняя энергия (как и любого идеального одноатомного газа) определяется лишь кинетической энергией хаотического движения атомов и равна $W_{in} = 1,5 \nu RT$, где ν – число молей газа, T – температура газа по шкале Кельвина, а $R \approx 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная. Поскольку число молей гелия, находящегося в сосуде, равно m/μ , где $\mu = 4$ г/моль – молярная масса гелия, то после остановки сосуда и установления в нем термодинамического равновесия температура гелия должна увеличиться на $\Delta T = \mu \nu^2 / 3R$. По условию задачи сосуд был заполнен гелием при нормальных условиях, т.е. давление гелия в сосуде и его температура при заполнении были равны $p = 1$ атм и $T \approx 273$ К. Учитывая, что объем и число молей гелия остаются неизменными, на основании закона Шарля для идеальных газов можно утверждать, что $p/T = (p + \Delta p)/(T + \Delta T)$, где Δp – изменение давления гелия после остановки сосуда и установления в нем состояния термодинамического равновесия. Решая это уравнение с учетом полученных ранее соотношений, определим искомое относительное изменение давления гелия в сосуде:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\mu \nu^2}{3RT} \approx 15\%.$$

И.3. При решении задачи будем полагать, что 1) трубка покоится относительно лабораторной системы отсчета, являющейся инерциальной; 2) трубка имеет постоянное поперечное сечение; 3) колена трубки располагаются строго вертикально; 4) давление в коленах трубки над поверхностью воды не изменяется по мере удаления от этой поверхности; 5) нагревание трубки осуществляется столь медленно, что в трубке все время имеет место состояние термодинамического равновесия; 6) изменение состояния находящегося в трубке воздуха в рассматриваемом диапазоне температур и давлений с требуемой точностью описывается уравнением Клапейрона–Менделеева.

При соблюдении этих предположений можно утверждать, что давление на поверхность воды в колене, из которого удален воздух, равно давлению насыщенных паров воды, а в другом колене равно сумме парциальных давлений воздуха и насыщенных паров воды. Поэтому перепад уровней воды в коленах трубки должен быть равен парциальному давлению

воздуха. Следовательно, если измерять давления в разных частях трубки в единицах высоты водяного столба, то парциальное давление воздуха p_1 при начальной температуре должно быть равно h_1 . При нагревании уровень воды в колене, содержащем воздух, должен понижаться, т.к. давление на поверхность воды в этом колене при неизменном ее уровне должно было бы возрасть быстрее, чем в другом колене, не только за счет роста давления насыщенных паров воды, но и за счет роста давления воздуха. В дополнение к сделанным предположениям, будем считать, что при нагревании до конечной температуры уровень воды в колене, содержащем воздух, остается выше верхней точки среднего сечения трубки, а потому воздух не может проникнуть в другое колено. Тогда на основании объединенного газового закона можно утверждать, что парциальное давление воздуха при конечной температуре должно стать равным

$$p_2 = h_2 = \frac{h_1 L_1 T_2}{L_2 T_1}, \quad (1)$$

где $T_i \approx t_i + 273$ – абсолютная температура содержимого трубки в начальном ($i = 1$) и конечном ($i = 2$) состояниях, а L_2 – высота столба воздуха при конечной температуре. При выводе этого соотношения учитывалось сделанное выше предположение о постоянстве поперечного сечения трубки. В соответствии с условием задачи и сделанными предположениями естественно пренебречь сжимаемостью воды, а потому считать ее объем неизменным. Тогда можно утверждать, что искомое изменение разности уровней воды в коленях трубки $x = h_2 - h_1$ должно быть величиной положительной и удовлетворять условию $L_2 - L_1 = x/2$. Используя два последних соотношения, уравнение (1) можно представить в виде:

$$L_1 h_1 T_2 = (L_1 + x/2)(h_1 + x) T_1.$$

Из этого уравнения следует, что искомое изменение разности уровней воды в коленях трубки после ее нагревания при выполнении сделанных выше предположений должно быть равно

$$x = \sqrt{(L_1 + h_1/2)^2 + 2 h_1 L_1 (T_2 - T_1)/T_1} - (L_1 + h_1/2) \approx 7,4 \text{ см.}$$

II.4. Как обычно, при решении данной задачи будем полагать, что сосуд и его содержимое покоятся относительно лабораторной системы отсчета, а эта система является инерциальной. Поскольку поршень толстый, а его ось горизонтальна, то его плоскости, соприкасающиеся с ртутью и

воздухом, всегда должны оставаться вертикальными. Наконец, учитывая, что по условию задачи поршень является гладким, можно утверждать, что он будет находиться в равновесии при равенстве сил, действующих на него со стороны ртути и воздуха. В исходном состоянии ртуть полностью заполняла левую часть сосуда, но не оказывала давления на его верхнюю грань. По условию задачи следует пренебречь давлением насыщенных паров ртути. Будем также пренебрегать сжимаемостью ртути и считать плотность воздуха внутри заполненной им части сосуда постоянной при неизменных температуре и объеме. Тогда можно утверждать, что при первоначальной температуре давление воздуха должно было быть равным $p_1 = \rho g h/2$, где ρ – плотность ртути, g – ускорение свободного падения, а h – высота поршня. Поскольку при медленном охлаждении давление воздуха при неизменном его количестве должно медленно падать, можно пренебречь ускорением поршня и считать, что уровень ртути в левой части сосуда понижается монотонно. Если высоту столба ртути при конечной температуре обозначить h_2 (см. рис. 59), то давление воздуха в правой части

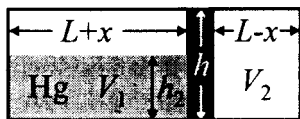


Рис. 59.

сосуда при конечной температуре с учетом сделанных предположений должно удовлетворять соотношению $p_2 h = \rho g h_2^2/2$. Поскольку ртуть мы считаем несжимаемой и в соответствии с условием следует пренебречь тепловым расширением сосуда с поршнем, то интересующее нас перемещение поршня x должно удовлетворять соотношению: $hL = h_2(L+x)$, т.к. площадь сечения сосуда постоянна.

Полагая, как обычно, что при реализуемых в ходе охлаждения условиях поведение воздуха описывается уравнениями, справедливыми для идеальных газов, на основании объединенного газового закона получим: $p_1 V_1 = n p_2 V_2$, или $p_1 L = n p_2 (L-x)$. Для упрощения дальнейших вычислений обозначим $x/L = z$. Тогда из составленных ранее уравнений следует, что $p_1/p_2 = h^2/h_2^2 = (1+z)^2 = (1-z)n$. Последнее соотношение эквивалентно уравнению $z^2 + (2+n)z + 1 - n = 0$. Решая это уравнение и выбирая корень, удовлетворяющий допустимым значениям z , найдем интересующее перемещение поршня:

$$x = 0,5(\sqrt{n(n+8)} - 2 - n)L = 0,25(\sqrt{57} - 7)L \approx 0,14L.$$

II.5. Поскольку изменение объема и температуры влажного воздуха по условию задачи происходит медленно, можно считать, что в цилиндре под поршнем воздушно-паровая смесь все время находится в состоянии термодинамического равновесия. Кроме того, при решении задачи будем, как обычно, предполагать, что к парам воды вплоть до точки насыщения применимы законы идеальных газов. Тогда, учитывая неизменность количества воды в цилиндре под поршнем, можно утверждать, что парциальное давление паров воды в начальном и конечном состояниях должно удовлетворять объединенному газовому закону, если, конечно, найденное в соответствии с указанным уравнением давление не превышает давления насыщенных паров при конечной температуре. Поскольку в исходном состоянии абсолютная температура влажного воздуха равна $T_1 \approx t_1 + 273$, а парциальное давление паров воды $p_1 = p_{н1}$, то при конечной абсолютной температуре $T_2 \approx t_2 + 273$ парциальное давление паров воды должно стать равным $p_2 = p_1 V_1 T_2 / V_2 T_1 \approx 109$ мм рт.ст. Как известно, температура кипения жидкости в тонком приповерхностном слое равна той, при которой давление насыщенных паров этой жидкости становится равным давлению на поверхность жидкости. Поскольку при нормальном атмосферном давлении $p_a = 760$ мм рт.ст. температура кипения воды равна $t_2 = 100^\circ\text{C}$, а вычисленное значение парциального давления паров воды $p_2 < p_a$, то, вспоминая определение относительной влажности, используемое в метеорологии, можно утверждать, что искомая относительная влажность равна

$$r = \frac{p_2}{p_a} = \frac{p_{н1} V_1 T_2}{p_a V_2 T_1} \approx 14\%.$$

II.6. Будем, как обычно, полагать, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета, которую можно считать инерциальной. По условию задачи силами трения поршня о стенки цилиндра следует пренебречь. Учитывая, что нагревание цилиндра осуществляется медленно, можно утверждать, что в цилиндре имеет место состояние термодинамического равновесия, поршень при нагревании цилиндра перемещается практически без ускорения, а давление в цилиндре в начальном и конечном состояниях должно превышать атмосферное давление p_a на величину $\Delta p = M g / S$, где g – ускорение свободного падения, т.е. давление в цилиндре должно удовлетворять соотношению: $p = p_a + \Delta p$. В исходном состоя-

нии под поршнем находился только сухой воздух. В конечном состоянии давление в цилиндре равно сумме парциального давления воздуха и насыщенных паров воды, т.к. по условию задачи в результате нагревания испарилась лишь часть воды. Поскольку количество молей воздуха ν остается неизменным, то полагая, как обычно, что при нагревании содержимого цилиндра от абсолютной температуры T_0 до температуры T давление воздуха в цилиндре изменяется в соответствии с уравнением Клапейрона–Менделеева, получим $p = \nu RT_0/V_0 = \nu RT/V + p_n$, где R – универсальная газовая постоянная, V_0 – первоначальный объем воздуха, а V – объем воздуха при температуре T . Решая это уравнение с учетом ранее найденного значения давления в цилиндре, определим искомое изменение объема воздуха под поршнем:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{(p_a S + M g) T}{[(p_a - p_n) S + M g] T_0}.$$

II.7. При решении данной задачи, как и предыдущей, будем считать лабораторную систему отсчета, относительно которой цилиндр неподвижен, инерциальной. Поскольку объем насыщенного пара уменьшается медленно, можно считать, что в цилиндре все время имеет место состояние термодинамического равновесия. Будем также считать, что деформация пружины при заданном изменении объема происходит абсолютно упруго, а потому изменение ее длины не может сопровождаться выделением тепла. Не может быть и выделения тепла за счет медленного перемещения поршня в гладком цилиндре. Следовательно, для поддержания неизменной температуры из цилиндра нужно отводить лишь то количество теплоты, которое выделяется за счет конденсации водяного пара. В дополнение к сказанному будем, как обычно, считать, что к насыщенному водяному пару применимо уравнение Клапейрона–Менделеева и поэтому отношение давления p_n насыщенного пара к его плотности ρ_n прямо пропорционально абсолютной температуре T , т.е. имеет место соотношение $p_n/\rho_n = RT/\mu$, где $R \approx 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ – универсальная газовая постоянная, а $\mu = 18 \text{ г}/\text{моль}$ – молярная масса воды. Тогда можно утверждать, что масса сконденсировавшегося пара

$$\Delta m = \frac{p_n \mu V}{RT} \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

где $T \approx t + 273$. Вспоминая, что удельные теплоты парообразования и конденсации равны, используя приведенное выше выражение, найдем искомое количество теплоты:

$$\Delta Q = r \Delta m = \frac{r p_n \mu V}{RT} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \approx 5,3 \text{ кДж}.$$

П.8. Как известно, частицы идеального газа не взаимодействуют между собой. Следовательно, внутренняя энергия такого газа определяется лишь кинетической энергией хаотического движения его частиц. При использовании шкалы температур Кельвина внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна $3RT/2$, где R – универсальная газовая постоянная. С другой стороны, кинетическая энергия одного моля частиц массой m , среднеквадратичная скорость которых равна u , равна $mu^2 N_A / 2$, где N_A – число Авогадро. Поэтому, вспоминая, что постоянная Больцмана $k = R/N_A$, можно утверждать, что абсолютная температура таких частиц $T = mu^2 / 3k$. По условию задачи нагревание ведется так, что среднеквадратичная скорость u теплового движения атомов и давление газа p связаны между собой соотношением: $u = \alpha p$, где α – постоянный коэффициент пропорциональности. Поэтому, учитывая, что согласно уравнению Клапейрона–Менделеева объем одного моля идеального газа при давлении p и температуре T равен $V = RT/p$, можно утверждать, что с ростом температуры объем газа и его давление p будут увеличиваться пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры. Следовательно, при заданном способе нагревания одновременно будет увеличиваться внутренняя энергия газа и газ будет совершать работу. Если, как

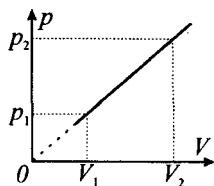


Рис. 60.

обычно, считать, что нагревание газа происходит столь медленно, что он практически все время находится в состоянии термодинамического равновесия, то зависимость давления газа от занимаемого им объема согласно сказанному должна иметь вид, показанный на pV -диаграмме (см. рис. 60).

Поскольку, силы, действующие на стенки сосуда со стороны газа, при квазиравновесном изменении его состояния направлены перпендикулярно стенкам, работа газа при увеличении его объема на величину ΔV при постоянном давлении p равна

$\Delta A = p \Delta V$. Поэтому можно утверждать, что работа газа при квазиравновесном изменении давления пропорциональна площади pV -диаграммы, ограниченной графиком $p(V)$, перпендикулярами, восстановленными к оси V в точках, соответствующих начальному $V_1 = V(T)$ и конечному $V_2 = V(T + \Delta T)$ объемам газа, и осью V . Используя формулу для вычисления площади трапеции, найдем работу моля газа при его нагревании от температуры T до температуры $T + \Delta T$:

$$A(T, T + \Delta T) = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{R \Delta T}{2},$$

т.к. согласно сказанному ранее при температуре T объем моля газа и его давление должны быть равны $V(T) = R \alpha \sqrt{\frac{mT}{3k}}$ и $p(T) = \alpha^{-1} \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. На основании этого с учетом первого закона термодинамики можно утверждать, что для увеличения температуры моля газа при заданных условиях на ΔT градусов необходимо затратить количество теплоты $\Delta Q = \Delta W_{\text{in}} + \Delta A = 2 R \Delta T$. Следовательно, молярная теплоемкость газа $c_\mu = 2 R$, а т.к. масса моля данного газа $\mu = m N_A$, то искомая удельная теплоемкость должна быть равна $c = c_\mu / \mu = 2 k / m$.

II.9. Будем считать, что все процессы в газе осуществляются столь медленно, что газ все время находится в состоянии термодинамического равновесия. Если давление, объем и абсолютную температуру газа по шкале Кельвина обозначить символами p , V и T с индексами «н» и «к», когда он находился в начальном и конечном состояниях, соответственно, то на основании уравнения Клапейрона–Менделеева можно утверждать, что

$$p_n = \frac{RT_n}{V_n} \quad \text{и} \quad p_k = \frac{RT_k}{V_k} = \frac{n k RT_n}{V_n}, \quad (1)$$

где R – универсальная газовая постоянная. При написании этих выражений было учтено, что количество газа остается неизменным и равно одному молю.

По условию задачи полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами при переводе его из начального состояния в конечное, равно нулю. Следовательно, согласно первому закону термодинамики

сумма приращения внутренней энергии ΔW_{in} и работы A газа при переходе его из начального состояния в конечное должна быть равна нулю. Поскольку внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа определяется только его температурой и равна $W_{in} = 1,5 RT$, то ее приращение за весь рассматриваемый процесс должно быть равно $\Delta W_{in} = 1,5 RT_n (k - 1)$. В силу того, что газ обладает свойством текучести, со стороны газа на ограничивающие его объем поверхности при квазиравновесном изменении параметров могут действовать силы, направленные только по нормали к этим поверхностям. Поэтому работа газа при изохорическом изменении его параметров должна быть тождественно равна нулю. При изобарическом же уменьшении объема работа газа должна быть отрицательной и равной $A = p(V_k - V_n) = pV_n(n^{-1} - 1)$, где p – давление газа в указанном процессе. Из сказанного следует, что изобарическое сжатие газа должно было осуществляться, когда его давление изохорически изменили от первоначального до величины

$$p = \frac{3RT_n(k-1)}{2V_n(1-n^{-1})}. \quad (2)$$

Сопоставляя между собой соотношения (1) и (2) и подставляя в них заданные числовые значения, получим

$$p_n : p : p_k = 1 : \frac{3(k-1)}{2(1-n^{-1})} : kn = 1 : 0,9 : 9.$$

Из этого выражения следует, что минимальным давление газа было при его изобарическом сжатии, а максимальным оно оказалось в конечном состоянии. Поэтому искомое отношение при указанных условиях равно

$$x = \frac{p_{max}}{p_{min}} = 10.$$

II.10. Согласно условию задачи давление газа во всех точках занимаемого им объема одинаково. Следовательно, можно утверждать, что изменение параметров газа во время цикла осуществляется квазиравновесно, а потому со стороны ограничивающих объем газа поверхностей на него могут действовать силы, направленные только по нормали к этим поверх-

ностям. Поэтому при увеличении объема на величину ΔV при неизменном давлении p работа газа будет равна $\Delta A = p \Delta V$. Для нахождения работы газа на участках 1-2 и 3-4 разделим весь диапазон изменения объема газа на этих участках на столь малые части ΔV , чтобы в пределах каждой из них давление можно было считать практически неизменным. Тогда работу газа на каждом из таких малых участков можно будет вычислить, воспользовавшись приведенным выше выражением. Просуммировав все вычисленные таким образом элементарные работы, можно доказать, что работа газа за цикл будет численно равна площади цикла на pV -диаграмме при надлежащем выборе масштабов по осям этой диаграммы. Следовательно, если p_1 – давление газа в точках 1 и 4, а p_2 – его давление в точках 2 и 3, то, вспоминая выражение для площади параллелограмма, можно утверждать, что газ за цикл должен совершить работу $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$, где V_1 – объем газа в точке 1, а V_2 – его объем в точке 2. Поскольку газ является идеальным и его количество равно одному молю, то на основании уравнения Клапейрона–Менделеева можно утверждать, что $p_i V_i = RT_i$, где R – универсальная газовая постоянная, а T_i – абсолютная температура газа по шкале Кельвина в точке с номером i . Используя эти соотношения, формулу для расчета работы газа можно переписать в виде:

$$A = (T_1 + T_2 - T_4) R - p_2 V_1. \quad (1)$$

Поскольку объем газа в точках 2 и 4 по условию задачи одинаков, а фигура, изображающая на pV -диаграмме заданный цикл, является параллелограммом, то длины отрезков 1-4 и 2-3 должны быть одинаковы, а потому $V_1 = 2V_2 - V_3$. Следовательно,

$$p_2 V_1 = (2T_2 - T_3) R. \quad (2)$$

Неизвестную температуру в точке 4 определим, учитывая, что объемы газа в точках 2 и 4 одинаковы, а на участке 4-1 газ сжимают изобарически. Следовательно, на основании закона Гей-Люссака можно утверждать, что $V_1/T_1 = V_2/T_4$ или с учетом полученных ранее соотношений

$$T_4 = T_1 \frac{V_2 p_2}{V_1 p_2} = \frac{T_1 T_2}{2T_2 - T_3}. \quad (3)$$

Подставляя найденные значения $p_2 V_1$ и T_4 в уравнение (1) и приводя подобные члены, выразим искомую работу газа за цикл через заданные температуры газа и величину универсальной газовой постоянной:

$$A = \left(T_1 - T_2 + T_3 - \frac{T_1 T_2}{2 T_2 - T_3} \right) R.$$

II.11. Как известно, коэффициент полезного действия цикла равен отношению работы, совершенной газом за цикл, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя за то же время. В рассматриваемом цикле изменение параметров газа происходило квазиравновесно, т.к. в противном случае в противоречии с условием задачи было бы невозможно ввести единое давление во всех частях объема, занятого газом, а потому было бы невозможно графически изобразить цикл.

В силу того, что газ обладает свойством текучести, при квазиравновесном изменении параметров газа, как отмечалось в решении предыдущей задачи, его работа за цикл численно равна площади фигуры, изображающей заданный цикл на pV -диаграмме, при надлежащем выборе масштабов на осях этой диаграммы. Будем обозначать давление газа, занимаемый им объем и его абсолютную температуру по шкале Кельвина соответственно символами p , V и T , снабжая их индексом, совпадающим с номером точки на pV -диаграмме. Вспоминая выражение для площади прямоугольного треугольника, на основании сказанного можно утверждать, что работа газа за цикл равна $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)/2$.

Определим теперь количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя. На участке 1-2 газ совершает работу $A_{12} = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2$ (см. доказательство в решении задачи II.8). При этом давление и объем газа увеличиваются при неизменном количестве вещества – один моль. Поэтому температура и внутренняя энергия газа должны возрастать. Следовательно, на этом участке газ должен получать тепло. Вспоминая, что внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна $1,5RT$, где R – универсальная газовая постоянная, на основании первого закона термодинамики найдем количество теплоты, полученное газом на этом участке: $Q_{12} = A_{12} + 1,5R(T_2 - T_1)$. На втором участке температура газа уменьшается, и газ не совершает работы. Следовательно, на этом участке

газ должен отдавать тепло холодильнику. Можно доказать, что и на третьем участке газ отдает тепло холодильнику. Таким образом, за цикл газ получает от нагревателя количество теплоты, равное Q_{12} .

Строя изотермы, соответствующие температурам газа в заданном цикле, можно доказать, что в точке 1 температура газа минимальна, а в точке 2 – максимальна. Поэтому можно утверждать, что согласно условию задачи и принятым обозначениям $T_2/T_1 = n$. В то же время, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева абсолютная температура газа в точке 3 должна быть равна $T_3 = p_1 V_2 / R$. Поскольку на участке 2-3 газ охлаждается изохорически, а на участке 3-1 изобарически, можно утверждать, что $T_3 = T_1 V_2 / V_1 = p_1 T_2 / p_2$. Отсюда, с учетом того, что $p_1 / V_1 = p_2 / V_2$ (точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат pV -диаграммы), получим: $T_3 = \sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{n} T_1$, $A = 0,5 R T_1 (\sqrt{n} - 1)^2$, $Q_{12} = 2 R T_1 (n - 1)$, а потому КПД заданного цикла $\eta = A / Q_{12} = (\sqrt{n} - 1) / [4(\sqrt{n} + 1)]$. Учитывая, что максимально достижимый КПД, получающийся при использовании цикла Карно, равен $\eta_K = 1 - T_x / T_n = 1 - n^{-1}$, где T_n – абсолютная температура нагревателя, а T_x – температура холодильника, найдем искомое отношение:

$$x = \frac{\eta_K}{\eta} = \frac{4(\sqrt{n} + 1)^2}{n} = 9.$$

II.12. По условию задачи морозильник работает по циклу Карно. В школьном курсе обычно не анализируется работа холодильных тепловых машин. Рассматриваются лишь тепловые двигатели. Однако поскольку цикл Карно является обратимым, соотношения между совершаемой рабочим веществом работой, получаемым от нагревателя и передаваемым холодильнику тепловой машины количествами теплоты не должны изменяться при изменении направления прохождения цикла.

По определению коэффициент полезного действия цикла теплового двигателя равен $\eta = A / Q_n$, где A – работа, совершенная рабочим веществом двигателя за цикл, а Q_n – количество теплоты, полученное этим веществом от нагревателя за то же время. Согласно второму закону термодинамики (в формулировке Карно), КПД цикла Карно определяется только абсолютными температурами нагревателя T_n и холодильника T_x и является максимально достижимым. Он не зависит от рабочего вещества двигателя

и равен $\eta = 1 - T_x/T_n$. Поэтому максимальная работа, которую может совершить рабочее вещество за цикл, равна $A = (1 - T_x/T_n)Q_n$. Вместе с тем, полагая, как обычно, изменение механической энергии рабочего вещества как целого за цикл равным нулю, на основании первого закона термодинамики можно утверждать, что количество теплоты, отданное за цикл этим веществом холодильнику двигателя, должно быть равно $Q_x = Q_n - A$. Таким образом, максимальная работа A , которую может совершить рабочее вещество за цикл, и количество теплоты Q_x , отдаваемое рабочим веществом холодильнику двигателя за это же время, должны удовлетворять соотношению: $A = Q_x (T_n/T_x - 1)$. Отметим, что мгновенная мощность, развиваемая рабочим веществом двигателя на различных участках цикла, не только не остается постоянной, но даже изменяет свой знак. Поэтому, говоря о мощности двигателя, речь ведут именно о средней за цикл мощности.

Поскольку длительность цикла тепловых машин обычно существенно меньше одного часа, на основании сказанного можно утверждать, что если в камеру морозильника за время τ поступает количество теплоты q , то минимальная мощность, которую нужно затратить, чтобы рабочее вещество морозильника поддерживало в камере неизменную температуру, должна быть $N = q(t_2 - t_1)/[(t_1 + 273)\tau]$. В общем случае это равенство не является точным, прежде всего потому, что время τ может быть и не кратно длительности цикла работы морозильника. Поэтому здесь и использовано приближенное соотношение для пересчета температуры, заданной по шкале Цельсия, в абсолютную температуру Кельвина. Отметим также, что исходные данные заданы двумя значащими цифрами, и поэтому даже если бы было известно, что за время τ совершается целое число циклов, использовать точное соотношение для пересчета температур нецелесообразно.

Наконец, поскольку КПД мотора по определению равен отношению развиваемой им мощности к потребляемой от источника, искомая минимальная мощность должна быть равна:

$$N_m = \frac{(t_2 - t_1)q}{(t_1 + 273)\tau\eta_m} \approx 11 \text{ Вт.}$$

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

III.1. При решении задачи будем полагать, что первоначально шарики удерживали неподвижно относительно инерциальной системы отсчета, и именно относительно этой системы будем определять скорость первого шарика. Поскольку в условии задачи специально не указывается, в какой среде находятся шарики, будем рассматривать простейший случай, полагая, что они находятся в вакууме.

По условию задачи шарики массой M скреплены тонкой нитью и удерживаются на расстоянии много больше их размеров. Поэтому при решении задачи можно пренебречь зарядами, находящимися на нити, и считать, что заряды на каждом из шариков распределены так же, как они распределились бы, если бы шарики были уединенными. Тогда, учитывая, что шарики являются проводящими, из соображений симметрии можно утверждать, что заряд каждого из шариков должен быть равномерно распределен по его поверхности, а электростатическое поле, создаваемое отдельным шариком, должно быть таким же, как и от точечного заряда q на расстояниях, превышающих радиус шарика.

Поскольку в условии задачи специально не оговаривается, что заряд шариков мал, будем, как обычно, пренебрегать силами гравитационного взаимодействия по сравнению с силами кулоновского взаимодействия между ними, т.е. считать, что $q^2 \gg 4\pi\epsilon_0 G m M$, где ϵ_0 — электрическая, а G — гравитационная постоянная. При выполнении этого условия можно утверждать, что между шариками должны действовать силы взаимного отталкивания, т.к. шарики заряжены одноименно.

После отпускания первый шарик начнет двигаться с ускорением, направленным вдоль прямой, перпендикулярной нити и проходящей через ее середину. С ускорением будут двигаться и два других шарика. Если считать, что ускорения шариков достаточно малы, можно пренебречь излучением. Поскольку на шарики и нить по условию задачи после их отпускания не действуют другие тела, то в выбранной системе отсчета суммарный импульс шариков должен оставаться неизменным. Учитывая сказанное и то, что шарики массой M связаны нерастяжимой нитью, ориентация которой не изменяется в процессе движения, из соображений симметрии приходим

к выводу, что скорости V шариков массой M должны быть равны и удовлетворять соотношению:

$$2MV + mv = 0,$$

где v – скорость первого шарика.

Очевидно, что по мере удаления первого шарика сила, действующая на него со стороны двух других шариков, будет уменьшаться, а потому ускорения шариков будут изменяться. Поэтому ответить на вопрос задачи на основании второго закона Ньютона будет довольно сложно. Однако ответ на этот вопрос легко получить из энергетических соображений. Действительно, по истечении достаточно большого промежутка времени первый шарик удалится на столь большое расстояние от двух других, что можно будет пренебречь его взаимодействием с ними. Поэтому на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что приращение кинетической энергии шариков должно быть равно убыли их потенциальной энергии. Утверждая это, мы по-прежнему пренебрегали, как это обычно и делается в подобных задачах, энергией электромагнитного излучения, возникающего из-за ускоренного движения заряженных шариков.

Вспоминая, что потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в вакууме на расстоянии r от него, равен $\varphi(r) = q(4\pi\epsilon_0 r)^{-1}$, если потенциал бесконечно удаленной от заряда точки считать равным нулю, на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что в момент отпускания потенциал электростатического поля, создаваемого двумя другими шариками в точке нахождения первого шарика, равен $\varphi_n = q(2\pi\epsilon_0 L)^{-1}$. Следовательно, по истечении достаточно большого промежутка времени должно иметь место соотношение: $2q\varphi_n = mv^2 + 2MV^2$. С учетом ранее сказанного из этого уравнения следует, что искомая скорость первого шарика должна стать равной

$$v = \frac{q}{\sqrt{\pi\epsilon_0 L m(1 + m/2M)}}.$$

III.2. Как известно, коэффициент полезного действия аккумулятора, подключенного к нагрузке, равен отношению мощности, выделяющейся на нагрузке, к мощности сторонних сил, т.е. $\eta = UI/\mathcal{E}I$, где U – напряжение на нагрузке, $\mathcal{E}$ – ЭДС аккумулятора, а I – ток в цепи. Поскольку согласно

закону Ома для замкнутой цепи $I = \mathcal{E}/(R + r)$, где R – сопротивление нагрузки, r – внутреннее сопротивление аккумулятора, а по закону Ома для участка цепи $U = IR$, то $\eta = R/(R + r)$. Из этого соотношения следует, что внутреннее сопротивление i -го аккумулятора можно вычислить по формуле $r_i = (\eta_i^{-1} - 1)R$. При последовательном соединении аккумуляторов (в зависимости от их включения) модуль суммарной ЭДС должен быть равен $|\mathcal{E}_\Sigma| = |\mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2|$, а внутреннее сопротивление батареи $r_\Sigma = r_1 + r_2$. Поскольку модуль напряжения на нагрузке в этом случае равен $U_\Sigma = |\mathcal{E}_\Sigma|R/(R + r_\Sigma)$, то искомый коэффициент полезного действия батареи должен быть равен

$$\eta_x = \frac{U_\Sigma}{|\mathcal{E}_\Sigma|} = \frac{R}{R + r_1 + r_2} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2} = 0,375.$$

III.3. По прошествии достаточно большого промежутка времени после соединения элементов конденсатор должен полностью зарядиться, и, следовательно, ток, протекающий через батарею, должен стать одинаковым. Сказанное верно при выполнении стандартного предположения, согласно которому сопротивление участка между обкладками конденсатора бесконечно велико. При этом согласно закону Ома для замкнутой цепи с учетом того, что положительный полюс одной батареи соединен с отрицательным полюсом другой, сила тока I должна удовлетворять соотношению: $2\mathcal{E} = (n + 1)rI$. При составлении этого соотношения, как обычно, считалось, что ЭДС источника и сила тока положительны, если ток внутри источника течет от его отрицательной клеммы к положительной.

Поскольку заряд q конденсатора по определению равен произведению его емкости на модуль разности потенциалов между обкладками, а по закону Ома для участка цепи, содержащей источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r , разность потенциалов между клеммами источника равна $\Delta\phi = \mathcal{E} - Ir$, искомая ЭДС источников должна быть равна

$$\mathcal{E} = (n + 1)q/[(n - 1)C] = 2q/C.$$

III.4. После замыкания ключа K по прошествии достаточно большого промежутка времени конденсатор C полностью зарядится и ток будет протекать, как и при разомкнутом ключе, только через источники и резистор.

При этом разность потенциалов между клеммами источников, обкладками конденсатора и на резисторе R должна быть одинаковой, если как обычно, считать соединяющие их провода идеальными, т.е. пренебречь омическим сопротивлением этих проводов. Считая, что эта разность потенциалов равна $\Delta\varphi$, причем верхняя обкладка конденсатора имеет более высокий потенциал, на основании закона Ома для участка цепи, сопротивление которого равно r_1 и который содержит источник с ЭДС $\mathcal{E}_1$, можно утверждать, что текущие через источники и резистор токи должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$I_1 r_1 = \Delta\varphi + \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 = \Delta\varphi - \mathcal{E}_2, \quad I_R R = \Delta\varphi. \quad (1)$$

При составлении этих уравнений токи, текущие от верхнего проводника, имеющего по предположению более высокий потенциал, считались положительными, а ЭДС источника считалась положительной, если внутри источника предполагаемое направление тока совпадало с направлением движения от отрицательного полюса источника к положительному.

При постоянных токах во всех проводниках схемы не может происходить накопления зарядов, т.к. в противном случае в этих проводниках должна была бы изменяться напряженность электрического поля и, следовательно, согласно закону Ома ток не мог бы оставаться постоянным. Поэтому на основании закона сохранения заряда можно утверждать, что сумма токов, рассчитанных согласно уравнениям (1), должна быть равна нулю. Из сказанного следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{r_1 \mathcal{E}_2 - r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) R} R.$$

Из этого выражения видно, что в зависимости от величин ЭДС источников и их внутренних сопротивлений найденное значение разности потенциалов может быть величиной как положительной, так и отрицательной. Поскольку заряд конденсатора есть величина неотрицательная, ответ на вопрос задачи можно представить в виде:

$$q = \frac{|r_1 \mathcal{E}_2 - r_2 \mathcal{E}_1|}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) R} RC.$$

III.5. Считая, что к моменту размыкания ключа K_1 конденсатор C_1 полностью зарядился, можно утверждать, что его заряд стал равным $q_1 = \varepsilon_1 C_1$. Как обычно, будем считать диэлектрик между пластинами конденсатора идеальным и будем пренебрегать токами утечки в разомкнутых цепях. Тогда можно утверждать, что после размыкания ключа K_1 суммарный заряд на соединенных с точкой B пластинах конденсаторов C_1 и C_2 не может изменяться.

После замыкания ключа K_2 по проводам, соединяющим конденсаторы, ключ K_2 и резистор R , в общем случае начнет протекать ток. Если индуктивность указанных проводов будет достаточно большой, то в цепи возникнут колебания, время затухания которых при прочих равных условиях будет тем меньше, чем больше сопротивление резистора R . В противном случае ток в указанной цепи после достижения максимальной величины будет монотонно стремиться к нулю. В обоих случаях по прошествии достаточно большого промежутка времени ток в рассматриваемой цепи прекратится. Очевидно, что при этом разность потенциалов между пластиной конденсатора C_1 , подключенной к резистору R , и точкой A должна быть равна ЭДС второго источника. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то изменения их зарядов после замыкания ключа K_2 должны быть одинаковыми, а т.к. конденсатор C_2 первоначально был разряжен, то его установившийся заряд q_2 согласно сказанному может быть найден из условия:

$$\frac{q_1 + q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon_2.$$

Подставляя в это выражение ранее найденное значение q_1 , определим искомое значение напряжения между точками A и B :

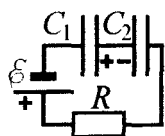
$$U_{AB} = U_{C_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{C_1 + C_2} C_1.$$

III.6. После перевода ключа K в положение I конденсатор C_1 начинает заряжаться через диод D_1 и резистор R , т.к. по условию задачи оба диода являются идеальными. Напомним, что идеальным называют такой диод, сопротивление которого равно нулю, если потенциал анода (основания треугольника, с помощью которого изображается диод) выше потенциала

катода, и бесконечно велико при обратной полярности приложенного напряжения.

Поскольку время, в течение которого ключ находился в положении 1, достаточно велико, следует считать, что к моменту перевода ключа K в положение 2 заряд конденсатора C_1 станет равным $q_{11} = C_1 \mathcal{E}$. При этом конденсатор C_2 должен оставаться незаряженным, т.к. включенный последовательно с ним диод D_2 находится в непроводящем состоянии. Итак, заряд конденсатора C_2 к указанному моменту равен $q_{21} = 0$.

После переключения ключа K в положение 2 эквивалентную схему цепи можно представить в виде, изображенном на рис. 61, т.к. в этом слу-



чае ранее открытый диод D_1 переходит в непроводящее состояние, а включенный последовательно с конденсатором C_2 диод D_2 можно заменить проводником с нулевым сопротивлением.

Рис. 61. Если установившиеся напряжения на первом и втором конденсаторах схемы после перевода ключа K в положение 2 обозначить u_1 и u_2 , а заряды этих конденса-

торов – соответственно q_{12} и q_{22} , то в соответствии с определением емкости конденсатора можно утверждать, что $q_{12} = C_1 u_1$, $q_{22} = C_2 u_2$. По прошествии достаточно большого промежутка времени после перевода ключа K в положение 2 напряжение на резисторе R должно стать равным нулю (конденсаторы полностью зарядились и, следовательно, ток в цепи прекратился). Поэтому сумма напряжений на конденсаторах через достаточно большой промежуток времени после перевода ключа K в положение 2 должна быть равна ЭДС батареи $\mathcal{E}$. В то же время, поскольку диод D_1 в этом положении ключа K все время находится в непроводящем состоянии, на основании закона сохранения заряда можно утверждать, что $q_{12} - q_{22} = -q_{11}$. С учетом двух предыдущих соотношений последнее выражение эквивалентно уравнению: $(\mathcal{E} - u_2)C_1 - u_2 C_2 = -\mathcal{E} C_1$. Решая это уравнение относительно u_2 , определим искомый заряд конденсатора C_2 :

$$q_{22} = \frac{2C_1 C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

III.7. Как и обычно, при решении данной задачи будем считать, что начальная скорость электрона задана относительно наблюдателя в инерци-

альной системе отсчета, а область, в которой имеется магнитное поле, почитается относительно этого наблюдателя. Будем также считать, что на электрон, помимо магнитного поля, не действуют никакие иные объекты.

Поскольку на движущийся в магнитном поле заряд q действует магнитная составляющая силы Лоренца $\mathbf{F}_{\text{лм}} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, то он, находясь в магнитном поле, будет двигаться с ускорением, направленным, как это следует из приведенного выражения, перпендикулярно плоскости, в которой расположены вектор его скорости $\mathbf{v}$ и вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B}$. Согласно законам электродинамики движущаяся с ускорением заряженная частица излучает электромагнитную энергию, пропорциональную квадрату ускорения, и поэтому, хотя по предположению на электрон не действуют никакие иные объекты, кроме магнитного поля, а силы магнитного поля лишь изменяют направление его скорости, не совершая над ним работу (они перпендикулярны вектору скорости электрона), строго говоря, энергия электрона, а следовательно, и его скорость, должны уменьшаться.

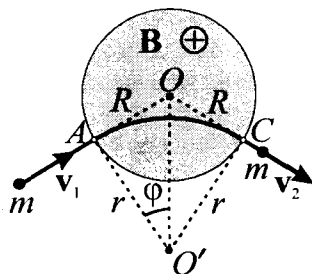


Рис. 62.

Пренебрегая потерями энергии электрона на излучение, как это обычно и делается в подобных задачах, будем считать, что величина скорости электрона остается неизменной. Тогда можно утверждать, что траектория электрона должна быть такой, как показано на рис. 62, т.е. в области магнитного поля электрон должен двигаться по дуге окружности.

Вспоминая выражение для центростремительного ускорения, определим радиус кривизны траектории электрона в магнитном поле: $r = mv/eB$, где e — величина заряда, а m — масса электрона. Из рис. 62 следует, что тангенс половины центрального угла $\angle AO'C = 2\varphi$, на который опирается дуга траектории, проходимой электроном в магнитном поле, определяется выражением $\operatorname{tg} \varphi = R/r$. Поэтому искомое время движения электрона при выполнении сделанных предположений должно быть равно:

$$\tau = \frac{2\varphi r}{v} = \frac{2m}{eB} \operatorname{arctg} \frac{eBR}{mv}.$$

III.8. Как обычно, будем считать, что движение стержня с шариками задано относительно инерциальной системы отсчета. Кроме того, будем пренебрегать действием сил сопротивления движению стержня с шариками, силами магнитного взаимодействия шариков друг с другом и силами тяжести. Поскольку шарiki заряжены одноименно и, следовательно, действующие между ними силы кулоновского взаимодействия F_k являются силами отталкивания, на любой из шариков со стороны стержня должна действовать сила, которая не только обеспечивает шарiku центростремительное ускорение, но и компенсирует действие кулоновской силы отталкивания и магнитной составляющей силы Лоренца $F_{\text{лм}}$ со стороны внешнего магнитного поля. Если величину силы натяжения, при которой происходит разрыв стержня, обозначить F_{max} , длину стержня считать равной $2L$, то искомая угловая частота вращения ω_x , при которой произошел бы разрыв стержня при наличии магнитного поля, должна удовлетворять уравнению $F_{\text{max}} = m\omega^2 L + F_k = m\omega_x^2 L + F_k \pm F_{\text{лм}}$. В этом уравнении знак «плюс» соответствует случаю, когда направление вращения и направление внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ связаны между собой правилом «правого винта», а знак «минус» – в противоположном случае. Из сказанного следует, что при двух возможных по условию задачи направлениях магнитного поля разрыв стержня должен произойти, когда его угловая скорость достигнет величины

$$\omega_x = \sqrt{(qB/2m)^2 + \omega^2} \mp qB/2m.$$

III.9. При движении проводника AC со стороны магнитного поля на перемещаемые вместе с ним носители заряда действует магнитная составляющая силы Лоренца: $\mathbf{F}_{\text{лм}} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Под ее действием происходит перераспределение свободных носителей заряда, и в замкнутом контуре AOC течет ток. Поскольку по условию задачи индуктивностью проводников (следовательно, и магнитным полем, создаваемым текущим по проводникам током) следует пренебречь, действующая в указанном контуре ЭДС должна быть равна $\mathcal{E}(t) = Bv x(t)$, где $x(t) = v t \operatorname{tg} \alpha$ – длина участка AC движущегося проводника по прошествии времени t после прохождения им вершины угла (точки O) согнутого проводника.

Отметим, что в данном случае величину ЭДС в контуре AOC можно было бы определить, пренебрегая по-прежнему магнитным полем текущего по проводникам контура тока и воспользовавшись законом электромагнитной индукции – правилом потока Фарадея–Максвелла. Однако извест-

но, что правило потока в тех случаях, когда хотя бы часть контура, по которому могут протекать индукционные токи, проходит в движущихся проводниках, может давать неверные результаты. Поэтому здесь ЭДС индукции и была определена с помощью силы Лоренца.

Поскольку по условию задачи сопротивление контактов и согнутого проводника мало по сравнению с сопротивлением движущегося проводника, в контуре AOC согласно закону Ома в момент времени t должен течь ток $I = \mathcal{E}/r(t) = \mathcal{E}/\rho v l \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, согласно закону Джоуля–Ленца в контуре AOC должна в этот момент выделяться тепловая мощность

$$N(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 r(t) = \frac{B^2 v^3 t \operatorname{tg} \alpha}{\rho}.$$

По условию задачи согнутый проводник является гладким. Поэтому можно считать, что выделение тепла обусловлено только протеканием тока

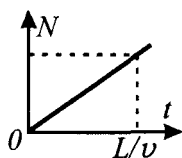


Рис. 63.

в контуре. На рис. 63 показана зависимость выделяющейся тепловой мощности от времени. Учитывая, что за малый промежуток времени Δt выделившееся количество теплоты равно $\Delta Q = N(t) \Delta t$, определим количество теплоты, выделяющееся за конечный промежуток времени, как площадь фигуры под графиком $N(t)$. Воспользовавшись формулой для расчета площади прямоугольного треугольника, получим, что при сделанных предположениях за время

смещения движущегося проводника на расстояние L от вершины угла согнутого проводника должно выделяться количество теплоты:

$$Q(0, L) = B^2 L^2 v \operatorname{tg} \alpha / 2\rho.$$

III.10. Как обычно, будем считать, что стол, на котором лежит кольцо, покоится относительно инерциального наблюдателя. Кроме того, будем пренебрегать влиянием воздуха на кольцо. Поскольку стол является гладким и горизонтальным, действующая со стороны стола сила реакции имеет лишь вертикальную компоненту, компенсирующую действие сил тяжести на кольцо. При изменении во времени индукции магнитного поля согласно закону электромагнитной индукции в этой области пространства должно возникать вихревое электрическое поле, линии напряженности которого лежат в горизонтальной плоскости. Величину напряженности этого поля

можно найти, воспользовавшись правилом потока Фарадея—Максвелла. Как известно, изменение во времени сцепленного с контуром магнитного потока должно порождать в этом контуре появление сторонних электрических сил, модуль ЭДС которых в системе СИ равен $\mathcal{E}(t) = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = S \left| \frac{dB}{dt} \right|$.

Учитывая, что кольцо является тонким и находится в однородном магнитном поле, можно утверждать, что площадь контура, ограниченного кольцом, равна $S = \pi R^2$, а т.к. все точки кольца находятся в идентичных условиях и длина окружности равна $2\pi R$, то напряженность стороннего электрического поля в любой точке кольца должна быть направлена вдоль касательной к его поверхности, а ее величина должна быть равна

$$E = \frac{R}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

Поскольку кольцо заряжено равномерно, то на любой малый

элемент кольца Δl будет действовать сила, направленная перпендикулярно радиусу, соединяющему этот элемент с центром кольца, и равная

$$|\Delta F_\tau| = E |\Delta q| = \frac{R}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| \frac{|Q| \Delta l}{2\pi R}.$$

Следовательно, согласно второму закону Ньютона величина тангенциальной составляющей ускорения любой точки

кольца при изменении индукции магнитного поля со скоростью $\frac{dB}{dt}$ должен

$$\text{на быть равна } |a_\tau| = \frac{|\Delta F_\tau|}{\Delta m} = \frac{R |Q|}{2m} \left| \frac{dB}{dt} \right|, \text{ т.е. за малый промежуток времени уг-}$$

$$\text{ловая скорость кольца должна измениться на величину } d\omega = \left| \frac{Q}{2m} dB \right|.$$

Учитывая, что кольцо первоначально покоилось, и суммируя приращения угловых скоростей, найдем искомую максимальную скорость, которую приобретет кольцо при выключении магнитного поля:

$$\omega_{\max} = \frac{|Q| B}{2m}.$$

III.11. Поскольку рамка состоит из небольшого числа витков тонкой проволоки, можно пренебречь потоком магнитного поля, пронизывающим материал ее проводников. Учитывая, что индуктивностью рамки следует

пренебречь, т.е. следует пренебречь потоком магнитного поля, созданного током в проводниках рамки, можно утверждать, что при надлежащем выборе начала отсчета времени сцепленный с рамкой поток в момент времени t будет равен $\Phi(t) = BNS \cos \alpha(t)$, где $\alpha(t) = \omega t$ – угол между вектором индукции $\mathbf{B}$ внешнего поля и нормалью к плоскости рамки. Изменение сцепленного с рамкой потока согласно закону электромагнитной индукции должно привести к возникновению сторонних электрических сил, энергетическая характеристика которых – ЭДС – равна $\mathcal{E}(t) = -d\Phi/dt = BNS\omega \sin \omega t$. Поскольку проводники рамки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно R , согласно закону Ома при сделанных предположениях ток в проводниках должен быть равен $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$. При этом в рамке по закону Джоуля–Ленца должна выделяться мгновенная тепловая мощность, равная $N_T(t) = RI^2(t)$.

Полагая, что ось рамки неподвижна относительно инерциальной системы отсчета и потенциальная энергия рамки во внешнем поле остается неизменной, на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что для поддержания неизменной скорости вращения рамки потери энергии, обусловленные выделением тепла, должны компенсироваться работой внешних сил. Напомним, что по определению момент силы относительно данной оси равен произведению плеча силы h на величину F этой силы. За достаточно малый промежуток времени Δt величину силы $F(t)$ можно считать неизменной, а перемещение точки приложения этой силы совпадающим с ее направлением и равным $\Delta r = \omega h \Delta t$. Следовательно, работа источника момента силы за достаточно малый промежуток времени должна быть равна $\Delta A(t) = F(t)\Delta r = M(t)\omega \Delta t$. Отсюда и из сказанного ранее следует, что мгновенная мощность внешней силы

$$\omega M(t) = N_T(t) = (BNS\omega \sin \omega t)^2 / R.$$

Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно 0,5, а среднее значение момента сил, действующих на рамку, по условию равно $M_{\text{ср}}$, из последнего соотношения находим искомую величину индукции магнитного поля:

$$B = \frac{\sqrt{2RM_{\text{ср}}}}{NS\sqrt{\omega}}.$$

III.12. Поскольку ключ K находился в положении 1 достаточно долго, можно утверждать, что к моменту его переключения в положение 2 конденсатор C_1 должен был приобрести заряд $q = \varepsilon C_1$. Учитывая, что заряд конденсатора C_2 к моменту подключения к нему конденсатора C_1 был равен нулю, а индуктивность участка цепи, содержащей конденсаторы и ключ, во много раз меньше заданной индуктивности катушки L , к моменту времени, когда напряжения на конденсаторах станут равными, через катушку протечет бесконечно малый заряд. Поэтому на основании закона сохранения заряда можно утверждать, что напряжение между обкладками конденсаторов к указанному моменту должно стать равным $V_0 = q/(C_1 + C_2)$, а электрическая энергия, запасенная в контуре, будет равна $W_3 = (C_1 + C_2)V_0^2/2$. В тот момент, когда напряжение между обкладками конденсаторов станет равным нулю, ток через индуктивность достигнет своего максимума I_0 . Учитывая заданные значения индуктивности и емкости элементов контура и полагая линейные размеры элементов контура много меньшими длины волны, соответствующей собственным колебаниям, возникшим после переключения ключа K в положение 2, можно, как это обычно и делается, пренебречь излучением контура. Поскольку сопротивлением элементов контура по условию задачи следует пренебречь, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что искомая амплитуда тока I_0 должна удовлетворять соотношению: $(C_1 + C_2)V_0^2 = LI_0^2$. Решая полученное уравнение, найдем интересующую амплитуду тока:

$$I_0 = \varepsilon C_1 / \sqrt{(C_1 + C_2)L} = 0,2 \text{ A}.$$

В заключение отметим, что в момент переключения ключа K в положение 2 в цепи, состоящей из конденсаторов схемы, части соединительных проводов и ключа K , из-за ее малой индуктивности возникают столь высокочастотные колебания, что к тому моменту, когда ток через индуктивность контура L становится значимым, излученная энергия должна стать равной $\Delta W = C_1 \varepsilon^2/2 - C_1^2 \varepsilon^2/[2(C_1 + C_2)]$, т.к. в противном случае не может быть выполнен закон сохранения заряда.

III.13. Поскольку ключ K_1 длительное время находился в положении 1, соединяя между собой пластины конденсатора C_1 , заряд этого конденсатора перед изменением положения ключей $q_{C_1} = 0$. В то же время за-

ряд верхней обкладки конденсатора C_2 , подключенной к отрицательному полюсу батареи через замкнутый ключ K_2 в соответствии с определением емкости конденсатора был равен $q_{C_2} = -\varepsilon C_2$.

Пренебрегая, как обычно, токами утечки в диэлектриках конденсаторов и между разомкнутыми клеммами ключей, на основании закона сохранения заряда можно утверждать, что в любой момент времени t сумма зарядов на соединенных между собой обкладках конденсаторов C_1 и C_2 должна удовлетворять соотношению: $q_{C_1}(t) + q_{C_2}(t) = q_{C_2}$, т.к. эти пластины после переключения ключей становятся изолированными от остальных частей схемы. Вместе с тем, после переключения ключа K_1 в положение 2 конденсаторы должны начать перезаряжаться через индуктивность L . Поскольку по условию задачи сопротивлением всех проводников схемы следует пренебречь, то, пренебрегая, как обычно, излучением электромагнитной энергии, можно утверждать, что в контуре, образованном последовательно соединенными конденсаторами и катушкой индуктивности должны возникнуть гармонические колебания. При этом в те моменты времени τ , когда ток в контуре становится максимальным: $I(\tau) = I_{\max}$, напряжение на катушке индуктивности $U_L(\tau) = L \dot{I}(\tau)$ должно становиться равным нулю. Поэтому можно утверждать, что заряды соединенных между собой обкладок конденсаторов в указанные моменты времени должны удовлетворять соотношению:

$$q_{C_1}(\tau)/C_1 - q_{C_2}(\tau)/C_2 = 0.$$

С другой стороны, при сделанных предположениях, вспоминая выражения для энергии магнитного поля катушки индуктивности с током и энергии электростатического поля заряженного конденсатора, на основании закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{L I_{\max}^2}{2} = \frac{q_{C_2}^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} \right).$$

Подставляя в это соотношение величину заряда, которую имел конденсатор C_2 в момент переключения ключа K_1 , найдем искомую максимальную силу тока

$$I_{\max} = \varepsilon \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2) L}}.$$

IV. ОПТИКА

IV.1. Падающие на пластинку лучи проходят первый клин, не изменяя направления распространения, т.к. по условию задачи на переднюю плоскость пластинки пучок падает нормально. Поэтому на границу раздела клиньев свет будет падать под углом α , равным преломляющему углу клиньев. На рис. 64 показан дальнейший ход одного из лучей. Если обозначить угол преломления на границе раздела клиньев β , а угол падения на заднюю грань пластинки δ , то, используя закон преломления и учитывая, что синус малого угла практически равен самому углу, измеренному в радианной мере, можно утверждать, что

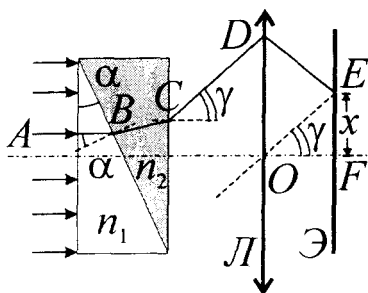


Рис. 64.

Из этих соотношений следует, что $\beta = \alpha n_1/n_2$ и $\gamma = \delta n_2$, причем $\delta = \alpha - \beta$. Из этих соотношений следует, что $\gamma = (n_2 - n_1)\alpha$. Поскольку при заданных условиях величина угла γ существенно меньше единицы, то тангенс этого угла следует считать равным самому углу, измеренному в радианной мере. Как известно, параллельный пучок лучей после прохождения положительной линзы собирается в той точке фокальной плоскости, в которой с этой плос-

костью пересекается побочная оптическая ось, параллельная лучам этого пучка. Обратившись к рис. 64 и учитывая сказанное, можно утверждать, что при наличии пластинки пучок должен собраться в точке E экрана, находящейся на расстоянии $x = \gamma F = (n_2 - n_1)\alpha F$ от точки пересечения плоскости экрана с главной оптической осью линзы. В отсутствие же пластинки падающий на линзу пучок должен сфокусироваться в главном фокусе F линзы. Следовательно, искомое смещение пучка должно быть равно

$$x = (n_2 - n_1)\alpha F \approx 3,1 \text{ мм.}$$

IV.2. По условию задачи, пучок света, падающий нормально на диаметрально плоскость разреза диска, должен выйти перпендикулярно указанной плоскости. Поэтому можно утверждать, что ход луча света в диске

должен быть симметричным относительно радиуса, перпендикулярного плоскости разреза. На рис. 65 показан ход двух лучей, удовлетворяющих этому условию, причем первый луч испытывает два, а второй – три отражения. Поскольку нормалью к боковой поверхности диска в заданной точке является радиус, проведенный в эту точку, то на основании закона зеркального отражения можно утверждать, что свет внутри диска должен распространяться вдоль сторон правильного многоугольника. Как известно, сумма углов правильного $2k$ -угольника равна $\beta_k = 2\pi(k-1)$. Поэтому угол α_k падения луча, испытывающего при распространении в половине диска

k отражений и выходящего параллельно падающему лучу, должен быть равен

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{4k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{\pi}{2}.$$

По условию задачи интенсивность выходящего пучка света должна лишь незначительно отличаться от интенсивности падающего пучка.

Это возможно только в том случае, если при отражении света на границе лед–воздух имеет место явление полного внутреннего отражения. Действительно, при нормальном падении на плоскую границу воздух–стекло ($n_{\text{ст}} \approx 1,5$) от этой границы, как известно, отражается примерно 4% световой энергии. Поскольку показатель преломления льда меньше показателя преломления стекла, следует ожидать, что в рассматриваемом случае коэффициент отражения будет существенно меньше указанного. Основываясь на опыте, можно пренебречь и поглощением света в однородном куске льда. Таким образом, для выполнения условий задачи необходимо, чтобы при отражении света на границе лед–воздух имело место явление полного внутреннего отражения, иначе значительная доля энергии падающего света уйдет в преломленные лучи. Как известно, явление полного внутреннего отражения возникает, когда синус угла падения становится равным обратной величине относительного показателя преломления, т.е. угол падения α удовлетворяет условию: $\alpha \geq \arcsin n^{-1} \approx 50,3^\circ$. Отсюда следует, что условия задачи будут выполнены, если при своем распространении в поло-

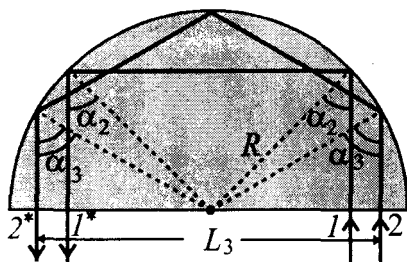


Рис. 65.

вине диска свет будет испытывать не менее трех отражений. Обратившись к рис. 65 и вспоминая, что длина катета равна длине гипотенузы, умноженной на синус противолежащего угла, определим возможные значения искомого расстояния:

$$L_k = 2R \sin \left[\left(1 - \frac{1}{k} \right) \frac{\pi}{2} \right], \text{ где } k = 3, 4, \dots$$

IV.3. Как известно, пучок, параллельный главной оптической оси собирающей линзы, после ее прохождения фокусируется в главном фокусе этой линзы, а затем становится расходящимся. Следовательно, чтобы после прохождения рассеивающей линзы выходящий из нее пучок оставался сходящимся в соответствии с условием задачи, рассеивающая линза долж-

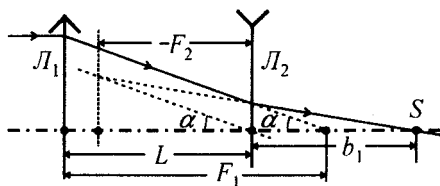


Рис. 66.

на находиться от собирающей на расстоянии меньше фокусного расстояния собирающей линзы. На рис. 66 показан ход одного из лучей заданного светового пучка при первоначальном расположении линз, удовлетворяющем условию задачи.

Если расстояние между линзами обозначить L , то с учетом ранее сказанного можно утверждать, что согласно формуле тонкой линзы выходящий из рассеивающей линзы пучок должен фокусироваться в точке S на расстоянии b_1 от этой линзы, удовлетворяющем соотношению:

$$b_1^{-1} - (F_1 - L)^{-1} = F_2^{-1}.$$

При составлении этого выражения было учтено, что для рассеивающей линзы L_2 согласно принятому правилу знаков расстояние до изображаемого ею мнимого источника (как и ее фокусное расстояние) следует считать отрицательным. Если же линзы поменять местами, то можно утверждать, что расстояние b_2 от собирающей линзы до точки пересечения выходящих из нее лучей можно вычислить из соотношения $b_2^{-1} + (L - F_2)^{-1} = F_1^{-1}$. Из сказанного выше следует, что условия задачи могут быть выполнены только при $L < F_1$, причем в этом случае искомое

смещение точки S должно быть равно $\Delta b = b_2 - b_1 = \frac{(F_1 - F_2)L}{L - F_1 - F_2} = 40 \text{ см.}$

IV.4. Падающий на переднюю грань куба параллельный пучок распространяется внутри однородного стекла, не изменяя своего направления. Не изменяет своего направления и часть пучка света, распространяющаяся в щели, пока не встретит на своем пути грань AC , т.к. передняя грань куба и грань щели AB по условию задачи перпендикулярны падающему световому пучку. На грани щели AC свет изменяет направление распространения из-за преломления. Учитывая, что угол α по условию задачи мал, а синус малого угла равен самому углу, измененному в радианной мере, на основании закона преломления в обозначениях, приведенных на рис. 67, найдем угол отклонения пучка от первоначального направления:

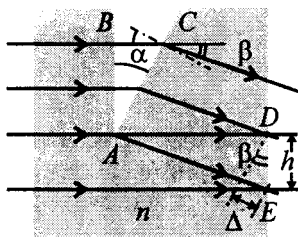


Рис. 67.

где n_i – абсолютный показатель преломления вещества, заполняющего щель.

$$\beta_i = \alpha - \alpha n_i / n,$$

где n_i – абсолютный показатель преломления вещества, заполняющего щель.

Поскольку в задаче прямо не оговаривается, чем первоначально была заполнена щель, следует считать, что первоначально в ней находился воздух, а потому с достаточной степенью точности можно положить $n_n = 1$. В конечном же состоянии $n_k = n_1$. Из рис. 67 видно, что на задней грани куба между точками D и E имеет место наложение прошедшего через щель и распространявшегося в стекле параллельных пучков света. Следовательно, только в этой области и может наблюдаться интерференционная картина. Поскольку фронт волны перпендикулярен оси параллельного пучка света, угол между фронтом преломленного на грани щели AC пучка света и задней гранью куба равен углу отклонения β . Из рис. 67 следует, что приращение разности хода между пересекающимися в области DE лучами увеличивается по мере смещения от точки D к точке E по закону: $\Delta = h \sin \beta = h \beta$. Последнее равенство имеет место в силу того, что при $\alpha \ll 1$ угол преломления β согласно полученной ранее формуле также должен быть много меньше одного радиана. Вспоминая, что ширина интерференционной полосы – это расстояние между ближайшими точками интерференционной картины с одинаковой освещенностью в направлении, перпендикулярном полосам, можно утверждать, что ширина интерференционной полосы будет равна h , если приращение раз-

ности хода между налагающимися лучами в соседних интерференционных полосах будет равно длине волны λ . Поэтому искомое отношение должно быть равно:

$$\frac{h_k}{h_n} = \frac{n-1}{n-n_1}.$$

IV.5. Поскольку точечный источник помещен в главный фокус линзы, то выходящий из линзы пучок света должен быть параллельным ее главной оптической оси. Учитывая, что по условию задачи эта ось перпендикулярна передней грани призмы, а диаметр линзы больше размеров этой грани, следует считать, что вся призма полностью залита светом и падающий на нее пучок проходит через ее переднюю грань, не изменяя своего направления распространения.

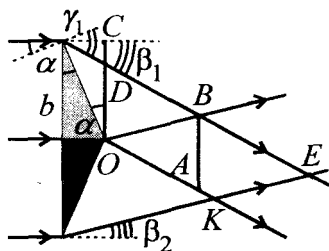


Рис. 68.

При выходе из призмы пучок света за счет преломления расщепляется на два пучка параллельных лучей. Согласно закону преломления с учетом принятых на рис. 68 обозначений можно утверждать, что оси выходящих пучков образуют с осью падающего на призму пучка углы β_1 и β_2 такие, что $\beta_1 = \gamma_1 - \alpha$ и $\beta_2 = \gamma_2 - \alpha$, причем $\sin \gamma_1 = n_1 \sin \alpha$ и $\sin \gamma_2 = n_2 \sin \alpha$. По условию задачи $\alpha \ll 1$. Вспоминая, что

синус малого угла можно считать примерно равным самому углу, измеренному в радианной мере, из предыдущих соотношений получим: $\beta_1 = (n_1 - 1)\alpha$, $\beta_2 = (n_2 - 1)\alpha$. По условию задачи $n_1 > n_2$. Следовательно, $\beta_1 > \beta_2$, как это и изображено на рис. 68. Поскольку интерференционная картина может наблюдаться только в области перекрытия выходящих из призмы пучков, т.е. внутри параллелограмма $OBEK$, а плоскость экрана перпендикулярна главной оптической оси линзы, максимальный размер интерференционной картины (в направлении, перпендикулярном интерференционным полосам) должен быть равен длине отрезка AB . Учитывая, что тангенс малого угла примерно равен самому углу, измеренному в радианной мере, обратившись к рис. 68, получим:

$$AB = OD = OC - DC = b - b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1 = [1 - (n_1 - 1)\alpha^2] b.$$

Для вычисления ширины Δ интерференционной полосы обратимся к рис. 69, на котором изображено сечение плоскостью чертежа той части экрана, которая находится в области перекрытия световых пучков. Пусть разность хода пересекающихся в точке L световых лучей 1 и 2 равна нулю. Тогда в этой точке будет наблюдаться интерференционный максимум нулевого порядка, а в точке M максимум первого порядка, если разность хода $x_1 + x_2$ попадающих в эту точку лучей 1' и 2' будет равна λ . Поскольку

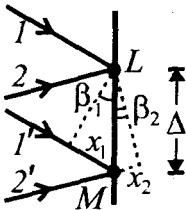


Рис. 69.

$x_1 = \Delta \sin \beta_1 = \Delta \beta_1$ и $x_2 = \Delta \sin \beta_2 = \Delta \beta_2$, то согласно сказанному ранее искомая ширина полосы может быть найдена из соотношения:

$$\lambda = (n_1 + n_2 - 2) \alpha \Delta.$$

Из этого соотношения видно, что ширина наблюдаемой интерференционной полосы не зависит от расстояния, на котором находится экран от призмы. Поэтому искомое максимальное число интерференционных полос равно целой части отношения

$$\frac{AB}{\Delta} = \frac{(n_1 + n_2 - 2)[1 - (n_1 - 1)\alpha^2]b\alpha}{\lambda}.$$

IV.6. Поскольку падающий нормально на экран пучок света является параллельным, то волновой фронт, т.е. геометрическое место точек, фазы колебаний в которых одинаковы, совпадает с поверхностью экрана. По условию задачи прорези в экране являются узкими. Поэтому можно считать, что расстояния от любой точки данной прорези до любой точки на оси, проходящей через центр прорези перпендикулярно плоскости экрана, одинаковы.

В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля все точки прорезей можно считать источниками вторичных волн, создающих излучение не только с одинаковыми частотами, но и равными начальными фазами. Поэтому можно утверждать, что волны, приходящие в любую точку на оси, в том числе и в точку A , находящуюся от экрана на расстоянии L , из всех точек данной прорези, будут иметь одинаковые фазы и, следовательно, будут усиливать друг друга. В то же время, как видно из рис. 70 разность хода волн, приходящих в точку A из точек прорезей, лежащих на одном радиу-

се, должна быть равна $\Delta = \sqrt{L^2 + r_2^2} - \sqrt{L^2 + r_1^2}$. Поскольку в точке A по условию задачи наблюдается интерференционный минимум, то эта разность хода должна быть равна нечетному числу половин длин волн падающего на экран света, т.е. $\Delta = 0,5(2n+1)\lambda$, где n – целое число. Учитывая, что $L \gg r_1$ и $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \delta/2$ при $\delta \ll 1$, полученное соотношение можно представить в виде:

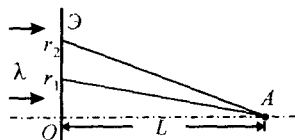


Рис. 70.

$$\Delta = \left(\sqrt{1 + \frac{r_2^2}{L^2}} - \sqrt{1 + \frac{r_1^2}{L^2}} \right) L \approx \frac{r_2^2 - r_1^2}{2L} = \frac{3r_1^2}{2L} = \frac{2n+1}{2} \lambda.$$

Из этого соотношения следует, что длина волны падающего на экран света должна быть равна

$$\lambda = \frac{3r_1^2}{(2n+1)L}.$$

Учитывая, что длины волн видимого света лежат в диапазоне $0,38 \text{ мкм} < \lambda < 0,76 \text{ мкм}$, а $L = 1 \text{ м}$ и $r_1 = 0,7 \text{ мкм}$, из этого выражения получим, что $n = 1$, и искомая длина волны света $\lambda = 0,49 \text{ мкм}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Программа вступительного экзамена по физике.....	3
Факультет наук о материалах	
Условия задач.....	11
Решения задач	14
Химический факультет	
Условия задач.....	20
Решения задач	26
Факультет вычислительной математики и кибернетики	
Условия задач.....	34
Решения задач	39
Физический факультет	
Условия задач	
I. Механика	52
II. Молекулярная физика и термодинамика	56
III. Электричество и магнетизм	59
IV. Оптика	62
Решения задач	
I. Механика	64
II. Молекулярная физика и термодинамика	86
III. Электричество и магнетизм	99
IV. Оптика.....	112

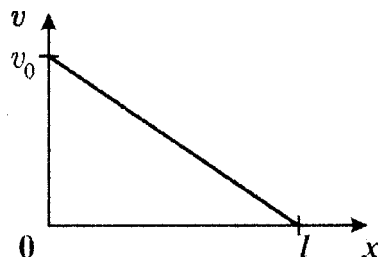


МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

11 класс, 1 тур

Задача 1

Телу массы m , находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили скорость v_0 в направлении оси Ox . График зависимости скорости тела v от его координаты x изображен на рисунке. Найти зависимость величины силы трения, действующей на тело, от координаты x .



Задача 2

Два закрытых сосуда емкостью $V_1 = 10$ литров и $V_2 = 20$ литров имеют жесткие стенки и поддерживаются при одинаковой постоянной температуре 0°C . Сосуды соединены короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В первом сосуде находится воздух под давлением $p_1 = 2$ атм при относительной влажности $r_1 = 20\%$. Во втором сосуде находится воздух под давлением $p_2 = 1$ атм при относительной влажности $r_2 = 40\%$. Кран постепенно открывают так, что процесс выравнивания давлений в сосудах можно считать изотермическим. Найти минимальную и максимальную относительную влажность воздуха в сосуде емкостью 10 литров.

Задача 3

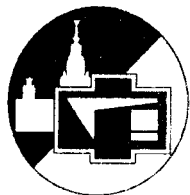
Заряженная частица двигалась в некоторой области пространства, где имеются взаимно перпендикулярные однородные поля: электрическое – с напряженностью E , магнитное – с индукцией B и поле силы тяжести g . Вектор скорости частицы при этом был постоянным и перпендикулярным магнитному полю. После того, как частица покинула эту область пространства и начала движение в другой области, где имеется только поле силы тяжести g , ее скорость начала уменьшаться. Через какое время после вылета частицы из первой области ее скорость достигнет минимального значения?

Задача 4

Одна из пластин плоского конденсатора в форме квадрата со стороной a закреплена горизонтально, на нее помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить вторая пластина конденсатора массой m , имеющая такие же размеры и форму, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды $+Q$ и $-Q$, и система приведена в равновесие. Верхнюю пластину сдвигают по горизонтали на расстояние $x \ll a$ параллельно одной из сторон квадрата и отпускают без начальной скорости. Найти период колебаний этой пластины. Толщина диэлектрика d существенно меньше смещения верхней пластины x . Электрическое сопротивление у пластин отсутствует.

Задача 5

В случае помутнения хрусталика людям делают операцию по замене естественного хрусталика на искусственный. Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет владельцу без очков четко видеть удаленные предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах – это называется аккомодацией), искусственный хрусталик жесткий и “перестраиваться” не может. Оценить оптическую силу очков, дающих возможность без труда читать книгу, находящуюся на расстоянии $d = 0,3$ м от глаза.



МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

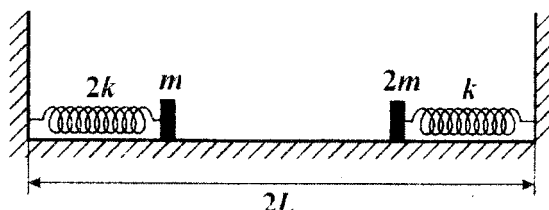
11 класс, 2 тур

Задача 1

На горизонтальной плоскости лежит полусфера радиуса R (выпуклой стороной вверх). Из точки, находящейся над центром полусферы, бросают горизонтально маленькое тело, которое падает на плоскость, не касаясь полусферы. Найти минимально возможную скорость тела в момент его падения на плоскость.

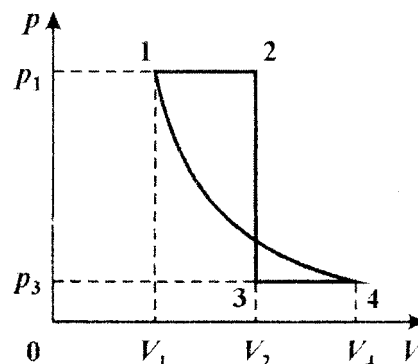
Задача 2

В системе, изображенной на рисунке, прикрепленные к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстояниях $L/2$ от стенок, к которым прикреплены концы пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны L . Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найти максимальную скорость, которую будут иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар при столкновении является центральным. Жесткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.



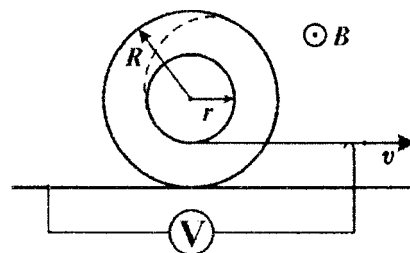
Задача 3

Тепловая машина, рабочим телом которой является одноатомный идеальный газ, совершает работу в цикле 1-2-3-4-1, состоящем из двух изобар, изохоры и адиабаты (см. рис.). Найти КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если $V_1 = 5$ л, $V_2 = 10$ л, $V_4 = 15$ л, $p_1 = 3,17 \cdot 10^5$ Па, $p_3 = 0,51 \cdot 10^5$ Па.



Задача 4

Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом r и двух крайних цилиндров радиусами $R > r$. Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещенный в однородное постоянное магнитное поле B , линии индукции которого параллельны оси катушки. К первому концу провода, лежащему на столе, подсоединяют идеальный вольтметр, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединенного с вольтметром, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном оси катушки (см. рис.). Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найти показания вольтметра.



Задача 5

На расстоянии $a = 20$ см от тонкой собирающей линзы вдоль ее главной оптической оси расположена тонкая короткая палочка. Длина ее действительного изображения, даваемого линзой, в $k = 9$ раз больше длины палочки. Во сколько раз изменится длина изображения, если сдвинуть палочку параллельно оси на $\Delta a = 5$ см дальше от линзы? Замечание: при $x \ll 1$ справедлива формула $1/(1+x) \approx 1-x$.