В.А.Алешкевич, В.Ю.Иванов, Ю.А.Кокшара, Г.А.Миронова, В.А.Погожев, М.В.Семенов

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ. Выпуск 7.

Москва, Изд-во физического факультета МГУ (НЭВЦ ФИПТ), 1998 — 80 с.

Сборник содержит программу вступительного экзамена по физике и задачи, предлагавшиеся на устных предварительных и вступительных экзаменах по физике на физическом факультете МГУ в 1997 году. Все задачи даны с подробными решениями. Особое внимание уделено обоснованию применения тех или иных законов, допущений и анализу полученного ответа.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и преподавателей, ведущих занятия со школьниками.

СОДЕРЖАНИЕ

| Программа | |
|-----------------------------------|----|
| Вступительного экзамена по физике | 3 |
| Основная литература | 11 |
| Дополнительная литература | 11 |
| Условия задач | 12 |
| І. Механика | 12 |
| II. Молекулярная физика и теплота | 17 |
| III. Электричество и магнетизм | 19 |
| IV. Оптика | 23 |
| Решения задач | 24 |
| І. Механика | 24 |
| II. Молекулярная физика и теплота | 43 |
| III Электричество и магнетизм | 54 |

68

IV Оптика

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе программы средней общеобразовательной школы. По сравнению с программами вступительных экзаменов в вузы прошлых лет данная программа более конкретизирована, отдельные вопросы сформулированы в более развернутом виде. Это облегчит абитуриенту подготовку, поскольку формулировки большинства пунктов программы по существу являются развернутым планом ответа. В программу включено несколько вопросов (выделены курсивом), которые рассмотрены в школьных учебниках, изданных в 1978-1989 гг. и в дополнительной литературе, указанной в конце программы. Теоретические вопросы билетов вступительных экзаменов формируются из вопросов данной программы.

При подготовке основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для средней школы, указанных в конце настоящей программы.

І. МЕХАНИКА

І.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Системы отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение.

Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движение твердого тела.

І.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы. Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная и способы ее измерения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. *Центр масс*. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.

І.З. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы $_{
m N3-}$ мерения работы и мощности.

Кинетическая энергия. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

І.4. Статика твердого тела

Сложение сил. Момент силы относительно оси вращения. Правило моментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

І.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт.ст. Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, погруженных в жидкость или газ. Плавание тел.

І.б. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

II.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам. Расчет работы газа с помощью PV-диаграмм. Теплоемкость идеального одноатомного газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

II.3. Изменения агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояния вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

III. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

III.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Поле заряженной проводящей сферы.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. *Потенциал поля точечного заряда*. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

III.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Измерение тока и разности потенциалов в цепи.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Закон электролиза (закон Фарадея).

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа - диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. P-n-переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Термистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

III.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

III.4. Электромагнитная индукция

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля.

III.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращения энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Изобретение радио Поповым. Простейший радиоприемник.

IV. ОПТИКА

IV.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Законы отражения света. Плоское зеркало.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

IV.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света.

Постулаты Эйнштейна. Связь между массой и энергией.

V. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Опыты Резерфорда по рассеянию а-частиц. Планетарная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение света атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика; Учеб. для 7 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Физика 6 тех же авторов предыдущих лет издания).
- 2. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика; Учеб. для 8 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Физика 7 тех же авторов предыдущих лет издания).
- 3. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика; Учеб. для 9 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1990 (или Физика 8 тех же авторов предыдущих лет издания).
- 4. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика; Учеб. для 10 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1990 (или Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. М.; Просвещение, 1980 и последующие издания).
- 5. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика; Учеб. для 11 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Буховцев Б.Б., Мякишев Г.Я. Физика 10. М.; Просвещение, 1974 и последующие издания).
- 6. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. М.; Наука, 1978 и последующие издания.

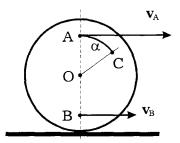
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. Т. 1-3. М.; Высшая школа, 1975 и последующие издания.
- 2. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Справочное руководство по физике. М.; Наука, 1975 и последующие издания.
- 3. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. М.; Наука, 1974 и последующие издания.
- 4. Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М., Калачевский Н.Н., Косоуров Г.Н., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. М.; Наука, 1971 и последующие издания.
- 5. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. М.; Высшая школа, 1973 и последующие издания.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

І. МЕХАНИКА

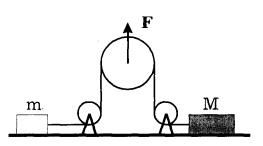
I.1. Стержень, поперечное сечение которого показано на рисунке, движется по плоскости так, что в некоторый момент



скорости его точек A и B параллельны плоскости и перпендикулярны оси стержня, а их величины равны v_A и v_B . Найти величину скорости точки C в этот момент времени, если $\angle AOC = \alpha$, и все указанные точки находятся на одинаковом расстоянии от оси стержня.

I.2. Вдоль наклонной плоскости скользит брусок. Некоторый участок AB он проходит, двигаясь равнопеременно, со средней скоростью \mathbf{v}_0 , причем в точке A его скорость на $\Delta\mathbf{v}$ меньше, чем в точке B. Найти скорость бруска в точке C, расположенной между точками A и B и отстоящей от точки A на 1/n часть длины участка AB.

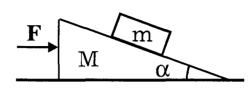
I.3. Два груза с массами m и M, лежащие на гладкой горизонтальной плоскости, соединены невесомой нерастяжимой



нитью, перекинутой через легкие блоки. В момент времени t=0 к верхнему блоку прикладывают силу **F**, направленную вертикально вверх. Найти зависимость относительной скорости грузов от времени.

I.4. На горизонтальной плоскости стоит гладкий клин массы M. На боковую поверхность клина, составляющую угол α с

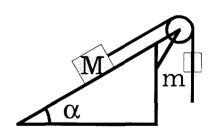
горизонтом, кладут брусок массы m, а к клину прикладывают силу **F** в горизонтальном направлении, как показано на рисунке. Найти ускорение клина.



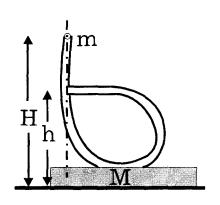
І.5. На полу клети, движущейся по вертикальным направляющим в стволе шахты, стоит цилиндр с гладкими стенками. В цилиндре под поршнем массы m и радиуса r находится газ. Клеть, приближаясь к следующему горизонту шахты, начинает плавно изменять свою скорость, а поршень — сжимать газ. Найти ускорение клети в тот момент, когда объем газа станет на n % меньше, чем при равномерном движении. Температура газа постоянна и равна T, а ускорение поршня близко к ускорению клети. Плотность газа под поршнем при равномерном движении клети равна р. Молярная масса газа равна m.

I.6. Через гладкий блок, закрепленный на гладкой неподвижной наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол lpha, перекинута легкая нерастяжимая нить. Один конец нити

прикреплен к бруску массы М, лежащему на плоскости, а свисающий конец пропущен через узкое отверстие в грузе массы m, как показано на рисунке. Если одновременно отпустить брусок и груз, нить будет проскальзывать через отверстие с постоянным ускорением а относительно груза. Найти силу натяжения нити.



I.7. На горизонтальной плоскости стоит подставка, на которой укреплена тонкая жесткая изогнутая трубка, как показано на рисунке. Масса подставки с трубкой равна М. Верхний

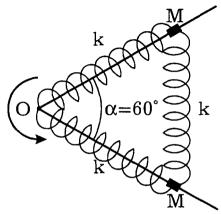


конец трубки расположен на высоте Н над плоскостью. Высота горизонтального участка трубки равна h, а его конец лежит на одной вертикали с серединой верхнего конца. В верхний конец опускают без начальной скорости небольшое тело массы m. На каком расстоянии по горизонтали от исходной точки тело упадет на плоскость при отсутствии сил трения?

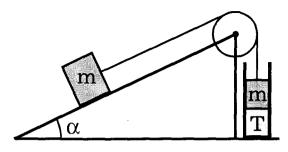
- I.8. Небольшой шайбе массы m ударом сообщили скорость v вверх вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. Шайба останавливается через время t после начала движения. Найти среднюю силу сопротивления, действовавшую на шайбу во время движения.
- I.9. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы М. На конец доски кладут шайбу массы m, которой ударом сообщают скорость v вдоль доски к ее противоположному концу. Коэффициент трения шайбы о доску равен µ. На какое расстояние от исходного положения переместится по доске шайба, если известно, что шайба не соскальзывает с доски?
- I.10. На легкой нерастяжимой нити длиной L висит небольшой шарик массы m. По шарику нанесли удар в горизонтальном направлении. Известно, что пока шарик после удара двигался по дуге окружности, он поднялся на высоту h. Найти среднюю силу, действовавшую на шарик во время удара, если длительность удара t много меньше периода малых колебаний шарика. Трением пренебречь.

I.11. На невесомый гладкий стержень, согнутый под углом $\alpha = 60^\circ$ в горизонтальной плоскости, надеты две небольшие оди-

наковые муфты М, соединенные между собой и с вершиной угла тремя легкими одинаковыми пружинами. Длина недеформированной пружины равна L, жесткость – k. Какую работу нужно совершить, чтобы раскрутить эту систему вокруг вертикальной оси, проходящей через точку О, до такой скорости, при которой длина пружин увеличится в n раз?



- I.12. Из тонкого резинового шнура массы m жесткостью k изготовили кольцо радиуса r. Кольцо медленно раскручивают вокруг его оси. Найти радиус кольца при угловой скорости его вращения $\omega < 2\pi \sqrt{k/m}$.
- I.13. В вертикальном закрытом цилиндре высотой H с площадью дна S находится цилиндрический поплавок массы m высотой h с площадью поперечного сечения s. Центр тяжести поплавка лежит на его оси вблизи дна поплавка. Остальной объем цилиндра заполнен воздухом при давлении p_0 . В цилиндр через кран, расположенный y дна, начинают нагнетать жидкость плотностью ρ , поддерживая постоянной температуру в цилиндре, и поплавок начинает всплывать. При каком давлении воздуха поплавок коснется верхней крышки цилиндра, если средняя плотность поплавка меньше плотности жидкости, но много больше плотности воздуха?
- I.14. В цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем массы m находится ν молей идеального газа при температуре T. Поршень связан легкой нерастяжимой нитью,

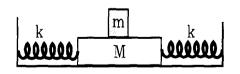


перекинутой через невесомый блок, с бруском той же массы, находящимся на наклонной плоскости, составляющей угол а с горизонтом. Найти частоту малых ко-

лебаний бруска при постоянной температуре газа. Трение отсутствует. Атмосферное давление равно p_a .

I.15. Груз массы m подвешен к потолку на трех невесомых пружинах так, что в положении равновесия оси всех пружин лежат в одной вертикальной плоскости, ось средней пружины жесткостью \mathbf{k}_1 вертикальна, а оси двух крайних пружин жесткостью \mathbf{k}_2 каждая образуют с осью средней пружины углы α . Найти период малых вертикальных колебаний груза.

І.16. К доске массы М, лежащей на гладком горизонтальном столе, прикреплены две легкие одинаковые растянутые пружины, другие концы которых прикреплены к вертикальным стенкам так, что их оси горизонтальны, совпадают и проходят через центр масс доски. На доску поставили кубик массы m так, что его центр находится над центром масс доски. На сколько можно сместить доску вдоль оси пружин, чтобы после ее отпускания кубик



совершал гармонические колебания, если жесткость каждой пружины равна k, а коэффициент трения кубика о доску равен m?

І.17. К грузу массы М, висящему на легкой пружине жесткостью k, на нити подвешен второй груз так, что центры масс грузов лежат на одной вертикали, совпадающей с осью пружины. После пережигания нити первый груз совершает гармонические колебания, при которых амплитуда его скорости равна v_m. Найти массу второго груза.

I.18. Расположенная вертикально стеклянная трубка частично погружена в воду. К открытому концу трубки подносят камертон, частота колебаний которого равна $\nu=1$ к Γ ц, и начинают изменять глубину погружения. Каждый раз, когда она изменяется на $\Delta h=17$ см, громкость звука усиливается. Найти скорость звука в воздухе.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

- II.1. Воздушный шар, масса оболочки которого вместе с грузом равна M=300 кг, надувают горячим воздухом. При какой температуре этого воздуха шар взлетит, если объем оболочки шара равен V=600 м³, температура окружающего воздуха $t=17^{\circ}\mathrm{C}$, атмосферное давление $p=10^{\circ}$ Па, а молярная масса воздуха $\mu=29$ г/моль?
- II.2. В закрытом теплоизолированном сосуде при температуре $t_1=527\,^\circ\mathrm{C}$ находился озон (O3), который через некоторое время превратился в кислород (O2). Во сколько раз в результате этого изменилось давление в сосуде, если на образование одного моля озона из кислорода нужно затратить $q=142\,\mathrm{kJm}$, а молярная теплоемкость кислорода при изохорическом нагревании равна $c_\mathrm{vm}=21\,\mathrm{Jm/monb\cdot K}$?
- II.3. В утренние часы над лугом образовался туман и выпала роса при температуре воздуха $t_1=10^{\circ}\mathrm{C}$, а днем при безветренной погоде воздух прогрелся до температуры $t_2=25^{\circ}\mathrm{C}$, и его абсолютная влажность увеличилась за счет испарения воды с луга на $\Delta \rho = 5 \text{ г/m}^3$. Найти относительную влажность днем. Давления насыщенных паров воды при утренней и дневной температурах равны $p_{v1}=9$ мм рт. ст. и $p_{v1}=24$ мм рт. ст.
- II.4. Для получения воды в пустыне предложен следующий способ: днем воздухом заполняют некоторый сосуд, а ночью содержимое сосуда изохорически охлаждается. При этом часть водяных паров конденсируется. Какой объем V воздуха

следует охладить, чтобы получить v=2 л воды, если днем температура $t_1=50^{\circ}\mathrm{C}$ и влажность воздуха r=30 %, ночью воздух охлаждается до температуры $t_2=0^{\circ}\mathrm{C}$? Давление насыщенных паров воды днем равно $p_{\mathrm{H}1}=12,3$ КПа, а ночью $-p_{\mathrm{H}2}=4,6$ мм рт. ст.

- II.5. В цилиндре под поршнем находятся воздух, водяные пары и вода. Число молей воздуха в n = 3 раза превышает число молей водяного пара, а масса воды равна массе водяных паров. Объем смеси изотермически увеличивают, пока вся вода не испарится. Найти отношение давлений в цилиндре в конечном и начальном состояниях.
- II.6. В сосуд объемом V=15 л, содержавший сухой воздух при нормальных условиях, ввели m=5 г воды, а затем сосуд закрыли. Найти относительную влажность воздуха после нагревания сосуда до температуры t=100°C.
- II.7. Закрытый с двух торцов цилиндр, ось которого горизонтальна, разделен на две части тонким гладким подвижным поршнем. В первой части находится m=1 г азота, а во второй M=2 г воды. Температура в цилиндре равна $t=100^{\circ}\mathrm{C}$, а объем цилиндра равен V=2 л. Какую часть объема V занимает азот?
- II.8. Насыщенный водяной пар находится в цилиндре под поршнем при температуре $t=100^{\circ}\mathrm{C}$ в объеме V=15 л. Пар изотермически сжимают, совершая над ним работу A=200 Дж. Сколько тепла при этом должно быть отведено, если удельная теплота парообразования воды при данной температуре r=2,26 кДж/r?
- II.9. Идеальный одноатомный газ нагревают так, что его давление, изменяясь пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры (p $\sim \sqrt{T}$), возрастает в n раз. Затем газ охлаждают, при этом его давление уменьшается пропорционально температуре (p $\sim T$) до начального. После этого газ изоба-

рически возвращают в исходное состояние. Найти КПД теплового двигателя, работающего по такому циклу.

- II.10. В тепловом двигателе моль идеального одноатомного газа расширяется изотермически и после изохорического охлаждения адиабатическим сжатием возвращается в исходное состояние. При этом КПД двигателя равно η , а максимальное изменение температуры газа ΔT . Найти работу газа при изотермическом расширении.
- II.11. Моль идеального одноатомного газа перевели из состояния 1 в состояние 2, увеличивая его объем и непрерывно подводя тепло от нагревателя. При этом температура газа в состоянии 2 оказалась равной температуре Т в состоянии 1, а его давление стало равным р. Затем газ изобарически сжали до объема V и из этого состояния 3 изохорически вернули в состояние 1. Найти работу газа на участке 1 ÷ 2, если КПД проведенного цикла равен η.
- II.12. Цикл теплового двигателя, использующего идеальный одноатомный газ в качестве рабочего вещества, состоит из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах равно α (>1), отношение объемов на изохорах равно β (>1). Найти КПД такого двигателя.

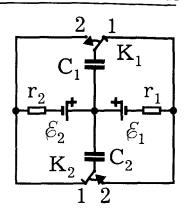
III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

III.1. Тонкое проволочное кольцо радиуса R закреплено так, что его плоскость вертикальна. Кольцо имеет заряд Q. Вдоль оси кольца расположена гладкая непроводящая спица, на которую надета бусинка массы m, имеющая заряд -q, противоположный по знаку заряду кольца. К бусинке с двух сторон прикреплены изолированные от нее одинаковые невесомые пружины жесткостью k каждая, оси которых совпадают со спицей, а концы закреплены так, что в положении равнове-

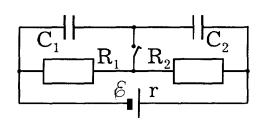
сия бусинка находится в центре кольца. Найти период малых колебаний бусинки.

- III.2. Точечные положительные заряды Q_1 и Q_2 закреплены на расстоянии 2L друг от друга. На прямой, проходящей через эти заряды, располагают точечный заряд q на расстоянии L от заряда Q_1 , вначале между зарядами Q_1 и Q_2 , а затем вне отрезка Q_1Q_2 . Отношение величин сил, действующих на заряд q в первом и во втором случаях, равно q0. Найти отношение зарядов q1 и q2.
- III.3. К концу тонкого вертикального вала на легкой нерастяжимой изолирующей нити длиной L подвешен небольшой по размерам шарик массы m, имеющий заряд q. Под шариком на расстоянии h находится равномерно заряженная с поверхностной плотностью о горизонтальная плоскость. Вал начинают медленно раскручивать. При каких угловых скоростях вращения вала нить будет устойчиво отклонена от вертикали?
- III.4. Первая и третья из трех тонких незаряженных концентрических металлических сфер соединены между собой тонким изолированным проводником, проходящим через малое отверстие во второй сфере. Сферы находятся в вакууме. Радиусы сфер равны $R_1=R,\,R_2=2R,\,R_3=4R.$ Найти изменение потенциала второй сферы после сообщения ей заряда q.
- III.5. Обкладки двух плоских конденсаторов соединены длинными проводами, в один из которых включен резистор. Первый конденсатор воздушный, а между обкладками второго находится гладкая пластина с диэлектрической проницаемостью є, полностью заполняющая зазор между обкладками. Конденсаторы имеют одинаковые размеры. Толщина зазора равна b, площадь обкладки s. Разность потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов равна ф. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить пластину из второго конденсатора?

III.6. Сколько тепла выделится в схеме, показанной на рисунке, после одновременного переключения ключей \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 из положения 1 в положение 2? Параметры элементов схемы даны на рисунке.



III.7. Найти изменение энергии конденсатора C_2 после замыкания ключа в схеме, изображенной на рисунке. Сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, внутреннее сопротивление и ЭДС батареи указаны на рисунке.

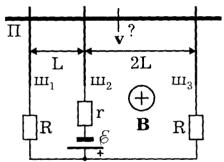


III.8. Два одинаковых резистора соединили параллельно и подключили к батарее, составленной из двух последовательно включенных одинаковых гальванических элементов. Затем резисторы соединили последовательно и подключили к параллельно соединенным ранее использовавшимся элементам. При этом мощность, выделяющаяся на каждом резисторе, уменьшилась в n = 4 раза. Найти отношение сопротивления резистора к внутреннему сопротивлению элемента.

III.9. Два гальванических элемента с одинаковыми ЭДС и внутренними сопротивлениями ${\bf r_1}=0.5$ Ом и ${\bf r_2}=1$ Ом соединили параллельно одноименными полюсами и подключили к резистору. При работе элементов происходит растворение их цинковых электродов. Найти отношение масс растворившегося цинка в этих элементах за некоторый промежуток времени.

III.10. Концы двух рельсов, лежащих на горизонтальной плоскости на расстоянии L друг от друга, подключены к конденсатору емкостью С. Рельсы находятся в однородном магнитном поле, индукция которого В направлена вертикально. На рельсы кладут перпендикулярно им металлический стержень массы т. К середине стержня параллельно рельсам прикладывают силу F. Пренебрегая трением и сопротивлением проводников, найти ускорение стержня.

 $\mathrm{III.11}$. Три одинаковые металлические параллельные шины $\mathrm{m_1},\ \mathrm{m_2},\ \mathrm{m_3},\$ лежащие в одной плоскости, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B},\$ перпендикулярной этой плоскости. Направление магнитного поля, ЭДС батареи, расстояния



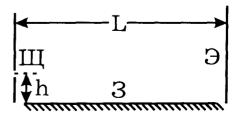
между шинами, и сопротивления резисторов даны на рисунке. По шинам, перпендикулярно им, равномерно движется металлическая перемычка П. С какой скоростью v должна двигаться перемычка, чтобы ток в средней шине был равен нулю? Сопротивлением шин, перемычки и контактов между ними пренебречь.

III.12. Прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, помещена в магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости рамки. Рамку поворачивают вокруг одной из ее сторон на 180° с постоянной угловой скоростью ω . При этом через рамку протекает заряд Q, а максимальный момент сил, действовавший на нее со стороны поля, равен M. Найти сопротивление рамки, пренебрегая ее индуктивностью.

IV. ОПТИКА

- IV.1. В лупу рассматривают конец иглы, ось которой совпадает с главной оптической осью лупы. Конец острия находится от лупы на расстоянии а, меньшем фокусного расстояния F лупы, и виден как конус с углом при вершине 2α . Какова реальная величина угла при вершине острия иглы?
- IV.2. Квадрат со стороной a=0.5 см расположен перед линзой с фокусным расстоянием F=10 см так, что одна пара его сторон перпендикулярна, а другая параллельна главной оптической оси линзы, причем эта ось проходит через центр квадрата. Расстояние от ближайшей стороны квадрата до линзы равно b=30 см. Найти площадь изображения квадрата.
- IV.3. Какова оптическая сила линзы, с помощью которой можно получить увеличенное или уменьшенное изображение предмета на экране, находящемся от него на расстоянии $L=0.9\,$ м, если отношение размеров получаемых изображений равно n=4?
- IV.4. Точечный источник монохроматического света с длиной волны λ расположен в фокусе тонкой линзы диаметра D с фокусным расстоянием F. За линзой перпендикулярно ее оптической оси находится экран. Из центральной части линзы вырезали полоску шириной L, и оставшиеся части линзы симметрично сдвинули. Какое максимальное число интерференционных полос можно наблюдать на экране, если L << D << F ?
- IV.5. Свет от узкой щели Щ, освещаемой монохроматическим источником, попадает на экран Э непосредственно и пос-

ле отражения от зеркала 3, плоскость которого перпендикулярна экрану. Если щель расположить на расстоянии L=2 м до экрана и на расстоянии h=2 мм от плоскости зеркала, то на



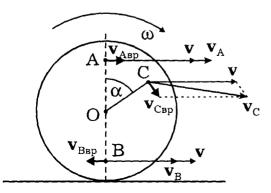
экране будут наблюдаться интерференционные полосы шириной $\Delta x = 0.25$ мм. Найти длину волны падающего на щель света.

IV.6. На дифракционную решетку с периодом d=64 мкм нормально падает параллельный пучок света, энергия фотона которого равна $W=4\cdot 10^{-19}$ Дж. За решеткой, параллельно ее плоскости, расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F=5 см, а за ней в фокальной плоскости находится экран. Найти расстояние между главными максимумами первого порядка на экране.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

І. МЕХАНИКА

І.1. Из условия задачи следует, что для рассматриваемого момента времени скорости всех точек стержня лежат в плоскостях, которые перпендикулярны оси стержня, т.е. стержень совершает плоское движение. Поскольку иное в условии задачи не оговорено, стержень следует считать твердым, и поэтому его движение для рассматриваемого момента времени можно представить, как сумму поступательного движения со скоростью v и вращения вокруг собственной оси с угловой скоростью Ф. При этом скорость i-ой точки стержня, положение которой относительно оси определяется вектором ri, равна векторной



сумме скорости **v** и скорости **v**_{iвр}, обусловленной вращением стержня вокруг своей оси. На рисунке показано направление скоростей **v**_i и их компонент **v** и **v**_{iвр} для точек A, B и C в предположении, что направление вращения стержня соответствует

показанному на этом же рисунке. Поскольку $v_{iвp}=\omega r_i$ и $r_A=r_B=r_C=r$, то в соответствии с рисунком и теоремой косинусов можно утверждать, что $v_A=v+\omega r$, $v_B=v-\omega r$ и $v_C^2=v^2+(\omega r)^2+2\omega v r\cos\alpha$.

Отсюда следует, что искомая величина скорости точки C равна

$$v_C = \sqrt{[v_A^2 + v_B^2 + (v_A^2 - v_B^2)\cos\alpha]/2}$$
.

I.2. Поскольку брусок на участке АВ по условию движется равнопеременно, то его ускорение вдоль наклонной плоскости должно оставаться постоянным на этом участке. Пусть величина этого ускорения равна а, и пусть брусок проходит этот участок за время t. Тогда в соответствии с условием должны выполняться соотношения

$$\Delta v = v_B - v_A = a \tau,$$

где v_в и v_д – величины скоростей бруска в точках В и А.

С другой стороны, из определения средней скорости и закона равнопеременного движения следует, что

$$v_0 \tau = v_A \tau + a \tau^2 / 2$$
.

Кроме того, поскольку движение равнопеременное,

$$v_A = v_0 - \Delta v/2$$
.

Учитывая, что v_0 $\tau/n=v_0$ $\Delta v/(a\,n)=(v_A+a\,t_{AC}/2)\,t_{AC}$, где $t_{AC}-$ время, необходимое для перемещения бруска из точки A в точку C, из полученных ранее соотношений следует, что при прохождении точки C брусок должен иметь скорость

$$v_C = v_A + a t_{AC} = \sqrt{(v_0 - \Delta v/2)^2 + 2 v_0 \Delta v/n}$$
.

І.З. Пренебрегая силами трения в осях блоков, массой блоков и силами трения, которые действуют на нить со стороны окружающей среды, можно доказать, что величина силы натяжения не может изменяться вдоль нити, т.к. по условию нить следует считать невесомой. Как обычно, будем считать, что грузы могут двигаться лишь поступательно. Тогда на основании II закона Ньютона можно утверждать, что уравнения движения грузов в проекциях на неподвижную горизонтальную ось, сов-

падающую с направлением движения груза массы m, должны иметь вид

$$ma = T$$
, $MA = -T$,

где T – величина силы натяжения нити, а и A – проекции ускорений грузов массы m и M на указанное направление. Поскольку грузы первоначально покоились, то κ моменту времени κ проекции скоростей грузов на выбранное направление будут равны, соответственно,

$$v = at u V = At$$
.

Из рисунка, приведенного в условии задачи, видно, что отрезки нити между верхним и нижними блоками вертикальны. Поскольку прикладываемая к оси верхнего блока силы F по условию также направлена вертикально, согласно II закону Ньютона с учетом ранее сделанных предположений относительно этого блока можно утверждать, что величины сил F и T должны удовлетворять соотношению

$$F = 2T$$
.

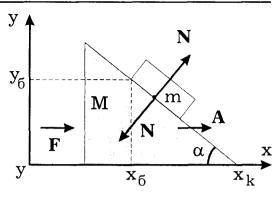
Отсюда следует, что искомая зависимость относительной скорости грузов от времени имеет вид

$$v_{oth} = v - V = \frac{m + M}{2 \, m \, M} \, F \, t \, .$$

І.4. При заданном направлении внешней силы **F** точки нижней грани бруска не могут отрываться от наклонной плоскости клина, пока брусок хотя бы частично не соскользнет с клина. Поскольку в условии специально не указано, что требуется найти решение и для таких моментов времени, то в соответствии с общепринятой практикой будем решать задачу для случая, когда брусок хотя бы частично еще не соскользнул с клина. Кроме того, как это обычно и делается в подобных задачах, будем считать, что все тела движутся поступательно. Учитывая, что по условию задачи клин движется по горизонтальной плоскости, выберем инерциальную систему отсчета так, как показано на рисунке. Очевидно, что при таком выборе проекция А_у ускорения клина **A** на ось 0Y должна быть равна нулю, а указанные на

рисунке координаты клина и бруска для любого из рассматриваемых моментов времени должны удовлетворять соотношению

$$y_6 = (x_\kappa - x_6) tg \alpha$$
.
Отсюда следует, что при указанных условиях



проекции $\mathbf{a}_{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{a}_{\mathbf{y}}$ ускорения а бруска на оси выбранной системы координат и проекция $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ ускорения \mathbf{A} клина на ось $0\mathbf{X}$ связаны между собой уравнением кинематической связи

$$a_y = (A_x - a_x) tg \alpha$$

Поскольку клин является гладким, то на него со стороны плоскости и бруска могут действовать только силы, направленные по нормалям к его соответствующим поверхностям. Если, как обычно, пренебречь силами трения со стороны окружающей среды, уравнения движения клина и бруска в соответствии со ІІ законом Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат должны иметь вид

$$M A_x = F - N \sin \alpha,$$

$$m a_x = N \sin \alpha, \quad m a_y = N \cos \alpha - m g,$$

где N— величина силы взаимодействия бруска и клина, g— величина ускорения свободного падения.

Решая эту систему уравнений с учетом уравнения кинематической связи, получим, что в рассматриваемом случае ускорение клина ${\bf A}$ должно быть направлено вдоль оси $0{\bf X}$, причем его проекция на эту ось равна

$$A_x = \frac{F - m g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Из этого выражения видно, что при $F < m g \sin \alpha \cos \alpha$ клин должен двигаться с ускорением, направленным

противоположно прикладываемой к нему силе ${\bf F}$, при ${\bf F}=m$ g sin $\alpha\cos\alpha$ клин должен оставаться неподвижным, а при ${\bf F}>m$ g sin $\alpha\cos\alpha$ клин должен двигаться с ускорением в направлении силы ${\bf F}$.

I.5. При равномерном движении клети, считая, как обычно в подобных задачах, лабораторную систему отсчета инерциальной, согласно II закону Ньютона можно утверждать, что сумма всех действующих на поршень сил: силы тяжести \mathbf{mg} , силы давления воздуха $\mathbf{F}_{_{\mathrm{B}}}$, силы давления газа $\mathbf{F}_{_{\mathrm{T}}}$ и силы со стороны цилиндра $\mathbf{F}_{_{\mathrm{H}}}$ — должна быть равна нулю. Поскольку цилиндр имеет гладкие вертикальные стенки, то из сказанного следует, что должно выполняться условие

$$p_a + m g/(\pi r^2) = p_r,$$

где p_a — давление воздуха в клети, p_r — давление газа под поршнем, g — величина ускорения свободного падения. Пренебрегая сжимаемостью газа за счет действия на него сил тяжести и полагая газ подчиняющимся уравнению Клапейрона-Менделеева, необходимо считать, что заданная плотность газа и его давление должны удовлетворять уравнению

$$\rho = M/V = p_r \mu/(RT)$$

где M и V — масса и объем газа, а R — универсальная газовая постоянная. Поэтому при равномерном движении клети должно выполняться соотношение

$$p_a + \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{\rho RT}{\mu}$$
.

По условию задачи при ускоренном движении клети объем газа уменьшается. При этом температура и количество газа в цилиндре остаются неизменными. Следовательно, давление газа должно увеличиться, и поскольку давление воздуха в клети можно считать постоянным, ускорение поршня а должно быть направлено вверх, а его величина должна удовлетворять уравнению

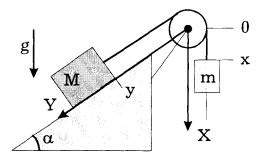
$$m\,a\,=\,\pi\,r^2\!\!\left(\frac{M\,R\,T}{\mu\,V\,(1-0.01\,n)}-\,p_a\,\right)\!-\,m\,g\,.$$

Отсюда в соответствии с условием задачи следует, что искомое ускорение клети

$$a_\kappa \, \approx \, a \, = \, - \, \frac{0.01 \, \pi \, \rho \, r^2 \, R \, T \, n}{\mu \, m \, (1 - 0.01 n) \, g} \, g \, . \label{eq:ak}$$

I.6. Для решения задачи выберем неподвижную относительно наклонной плоскости систему координат X0Y так, как показано на рисунке. Поскольку нить нерастяжима, а груз после отпускания (момент времени t=0) скользит относительно нити с постоянным ускорением, то координата у бруска и координата х груза для произволь-

ного момента времени $0 < t < t_{\rm k}$, где $t_{\rm k}$ — момент времени, когда либо брусок хотя бы частично начнет соскальзывать с наклонной плоскости, либо груз перестанет двигаться по нити, должны удовлетворять соотношению



$$x + y = C + a t^2/2$$
,

где С - длина отрезка нити от бруска до верхней точки груза перед их отпусканием. Поэтому проекция скорости груза на ось 0X

$$v_{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \{ [x(t + \Delta t) - x(t)] / \Delta t \}$$

и проекция скорости бруска на ось 0 У

$$V_{y}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \{ [y(t + \Delta t) - y(t)] / \Delta t \}$$

для указанных моментов времени связаны уравнением

$$v_x + V_y = \lim_{\Delta t \to 0} \{a \cdot (t + \Delta t + t)/2\} = a t.$$

Отсюда следует, что уравнение кинематической связи — соотношение между соответствующими координатами ускорения бруска и груза — имеет вид

$$a_x + A_y = a$$

Поскольку блок является гладким, а нить невесомой, то сила натяжения нити Т на отрезке ху остается постоянной по величине. Учитывая, что наклонная плоскость гладкая, и пренебрегая силами трения со стороны окружающей рассматриваемые тела среды, на основании II закона Ньютона уравнения движения бруска и груза для указанных моментов времени можно записать в виде

$$ma_x = mg - T$$
 и $MA_v = Mg \sin \alpha - T$,

где д - величина ускорения свободного падения.

Из приведенных уравнений кинематической связи и движения тел получим, что искомая величина силы натяжения нити при сделанных предположениях равна

$$T = \frac{g(1 + \sin \alpha) - a}{m + M} m M.$$

І.7. По условию перед вылетом из трубки тело некоторое время могло двигаться только в горизонтальном направлении, Поэтому скорость вылетающего из трубки тела должна быть направлена горизонтально. Поскольку ни на трубку с подставкой, ни на движущееся в трубке тело в горизонтальном направлении не действуют никакие другие тела, то на основании закона сохранения импульса можно утверждать следующее. Во-первых, центр масс системы "трубка с подставкой - тело" должен сохранять свое положение в горизонтальном направлении, по крайней мере, до тех пор, пока тело не упадет на плоскость. Следовательно, в момент вылета из трубки проекция тела на горизонтальную плоскость должна совпадать с его проекцией на эту же плоскость в момент опускания, т.к. по условию задачи нижний конец трубки лежит на одной вертикали с серединой верхнего конца, а трубка тонкая. Во-вторых, скорость тела у и скорость трубки с подставкой V в момент вылета должны быть направлены горизонтально в противоположные стороны, а их величины должны удовлетворять соотношению

$$m v = M V$$
.

Поскольку систему "трубка с подставкой — тело — Земля" согласно условию задачи следует рассматривать как консервативную изолированную, то на основании закона сохранения механической энергии можно утверждать, что в момент вылета тела из трубки должно выполняться условие

$$mgH = mgh + mv^{2}/2 + MV^{2}/2$$
.

Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости свободно падающего тела остается неизменной, а время свободного падения тела, брошенного горизонтально с высоты h, равно $\tau = \sqrt{2\,h/g}$, где g — величина ускорения свободного падения, из написанных ранее соотношений найдем искомое расстояние

$$x = v \sqrt{2 h/g} = 2\sqrt{h (H - h)/(1 + m/M)}$$
.

I.8. Как обычно, лабораторную систему отсчета, неподвижную относительно наклонной плоскости, будем считать инерциальной. Тогда согласно II закону Ньютона для любого момента времени t сумма проекций всех сил, действующих на шайбу, на нормаль к наклонной плоскости (ось 0Y) должна быть равна нулю, а на направление движения (ось 0X) — произведению массы шайбы на проекцию a_x ее ускорения на это направление

$$m a_x = -m g \sin \alpha - F(t)$$
,

где g — модуль ускорения свободного падения, а F(t) — мгновенное значение результирующей сил сопротивления движению шайбы со стороны наклонной плоскости и окружающей среды. Учитывая, что по определению

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt}$$

где v_x — проекция скорости шайбы на ось 0X, dv_x — проекция приращения скорости шайбы на то же направление за бесконечно малый промежуток времени dt, уравнение движения шайбы можно представить в виде

$$m dv_x = dp_x = -[m g \sin \alpha + F(t)]dt$$
.

Отсюда следует, что

$$\int_{v}^{0} m dv_{x} = -m v = -\int_{0}^{\tau} [m g \sin \alpha + F(t)] dt = -m g \tau \sin \alpha - F_{cp} \tau,$$

где
$$F_{\text{cp}} = au^{-1} \int\limits_0^{ au} F(t) \, dt$$
 — среднее значение силы сопротивления,

действовавшей на шайбу за все время ее движения. Отметим, что можно говорить о среднем значении силы сопротивления не только за определенный временной промежуток, но и на заданном отрезке ее траектории. Однако, из условия задачи нельзя сделать однозначного заключения о величине расстояния, пройденного шайбой после удара. Поэтому под искомым средним значением силы сопротивления следует понимать среднее значение этой силы за время движения, и оно равно

$$F_{cp} = (v/\tau - g \sin \alpha) m$$
.

1.9. Как обычно, при решении данной задачи будем считать, что из-за малой длительности удара изменением положения и скорости доски, как и изменением положения шайбы, за время удара можно пренебречь. Будем пренебрегать и действием на доску и шайбу всех сил, за исключением сил тяжести и силы реакции плоскости, по которой может двигаться доска. Лабораторную систему, неподвижную относительно указанной плоскости, будем считать инерциальной, а возникшее в результате удара движение шайбы — поступательным. Кроме того, будем считать, что толщина доски постоянна, и, следовательно, шайба может двигаться лишь горизонтально.

Поскольку плоскость является гладкой горизонтальной, то сила ее реакции может быть направлена только вертикально. Вертикально же направлены и силы тяжести. Поэтому согласно закону сохранения импульса горизонтальная составляющая импульса системы "шайба — доска" после удара изменяться не может. В силу сделанных предположений импульс рассматри-

ваемой системы сразу после удара должен быть равен импульсу шайбы, а после прекращения скольжения шайба и доска должны двигаться поступательно с такой скоростью v., что

$$(m+M)v_{\kappa}=mv.$$

При скольжении на шайбу и доску действуют силы сухого трения. При сделанных предположениях величина этих сил, в соответствии с законом сухого трения, равна μ mg, где g — величина ускорения свободного падения, причем направление силы трения, действующей на доску, совпадает с направлением движения доски, а на шайбу — противоположно направлению ее движения. Поэтому при наличии скольжения работа сил трения над доской к тому моменту, когда она переместилась от своего исходного положения на расстояние L, равна $A_{\text{тр.д.}} = \mu$ m g L > 0,

работа же сил трения над шайбой $A_{\rm тр.ш.} = -\mu$ m g (L+x) < 0, где L — перемещение доски относительно выбранной системы отсчета с момента начала движения, а x — перемещение шайбы относительно доски за тот же промежуток времени. За счет работы сил трения скорость доски увеличивается, а шайбы — уменьшается. Как только скорости доски и шайбы становятся одинаковыми, шайба перестает скользить по доске, и действие сил трения прекращается. Учитывая, что работа сил тяжести над телами системы равна нулю (направление этих сил перпендикулярно перемещениям тел) и что при сделанных предположениях кинетическая энергия рассматриваемых тел сразу после удара в выбранной системе отсчета равна кинетической энергии шайбы, а после прекращения скольжения — кинетической энергии шайбы и доски, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{(m + M) v_{\kappa}^2}{2} + \mu m g x_{\kappa},$$

где $\mathbf{x}_{_{\mathrm{K}}}$ — перемещение шайбы относительно доски за время действия сил трения скольжения. Отсюда с учетом соотношения между начальной и конечной скоростями шайбы найдем, что искомое перемещение в рамках сделанных предположений должно быть равно

$$x_{\kappa} = \frac{M v^2}{2 \mu g (m+M)}.$$

I.10. Поскольку длительность удара по шарику много меньше периода его малых колебаний, можно считать, что за время удара шарик не смещается от своего положения равновесия. Учитывая, что до удара сила натяжения нити и сила тяжести, действовавшие на шарик, были направлены вертикально, удар нанесен в горизонтальном направлении, и действием сил трения следует пренебречь, на основании закона сохранения импульса можно утверждать, что после удара шарик будет иметь скорость $v = f \, t/m$, где f - uскомая величина средней силы удара. После удара шарик начнет двигаться по дуге окружности радиуса L.

Если h < L, то шарик все время будет двигаться по дуге окружности. Тогда на основании закона сохранения механической энергии, рассматривая шарик, нить и Землю, как изолированную консервативную систему, можно утверждать, что должно выполняться соотношение

$$mv^2/2 = mgh$$

где g — ускорение свободного падения. Отсюда следует. что в рассматриваемом случае

$$f = m \sqrt{2gh} / \tau$$
.

Если L < h < 2L, то шарик сойдет с дуги окружности в точке, где сила натяжения нити обратится в нуль, а центростремительное ускорение будет обеспечиваться только проекцией силы тяжести на нить, т.е. когда его скорость за счет увеличения потенциальной энергии системы "шарик-нить-Земля" станет равной v_0 , удовлетворяющей условиям

$$m v_0^2 / L = m g (h - L) / L \, \mu \, m v^2 / 2 = m v_0^2 / 2 + m g h$$

Поэтому в данном случае искомое значение средней силы удара должно быть равно

$$f = m \sqrt{(3h - L)g} / \tau$$

Если же, наконец, h=2L, то шарик все время после удара будет двигаться по окружности, и можно определить лишь минимальное значение средней силы удара. Если обозначить скорость шарика в верхней точке траектории $v_{\rm s}$, то из условий

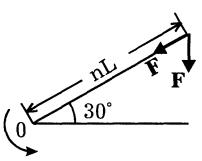
$$m v^2/2 = m v_B^2/2 + 2 m g L$$
 и $m v_B^2/L \ge m g$

следует, что в последнем случае

$$f \ge m \sqrt{5 g L} / \tau$$
.

I.11. На рисунке показаны силы ${f F}$, действующие в горизонтальном направлении на одну из муфт со стороны при-

крепленных к ней пружин, когда стержень вращается с такой угловой скоростью ω , при которой длина пружин увеличилась в п раз. При этом учтено, что оси пружин образуют правильный треугольник. Из приведенного рисунка с учетом II закона Ньютона и закона Гука следует, что



$$m \omega^2 n L = 1.5 F = 1.5 k L (n - 1)$$
.

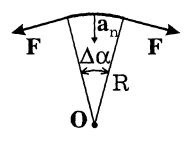
Пренебрегая силами трения и учитывая, что при раскручивании системы за счет совершенной работы увеличилась энергия упругой деформации пружин и кинетическая энергия муфт (кинетической энергией пружин и стержня по условию задачи следует пренебречь), на основании закона изменения механической энергии получим

$$A = 3 \frac{k (n - 1)^2 L^2}{2} + 2 \frac{m \omega^2 n^2 L^2}{2}.$$

Отсюда с учетом ранее полученного соотношения следует, что искомая работа равна

$$A = 1.5 k(n-1)(2n-1)L^{2}$$
.

I.12. Из кинематики известно, что ускорение движущейся по окружности радиуса R точки в общем случае можно представить в виде суммы двух компонент: компоненты \mathbf{a}_n , направленной по радиусу окружности к ее центру, называемой нормальным или центростремительным ускорением, и компоненты



а, направленной по касательной к окружности (тангенциальное ускорение). Поскольку угловая скорость точек кольца по условию изменяется медленно, то тангенциальной компонентой ускорения, существовавшей при раскручивании кольца, в момент времени, когда угловая скорость стала равной ю, следует пренебречь. Поэтому в дан-

ный момент будем пренебрегать и силами, действующими на кольцо со стороны окружающих тел.

Поскольку кольцо по условию является тонким и вращается вокруг своей оси, можно считать, что все точки шнура находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения и, следовательно, имеют одинаковое нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$. Это ускорение при сделанных предположениях могут обеспечить лишь силы натяжения, возникающие при увеличении радиуса кольца. На рисунке показан участок вращающегося кольца, ограниченный радиусами R, образующими малый угол $\Delta \alpha$, и -силы F, действующие на него со стороны соседних участков.

Согласно закону Гука, величина силы натяжения равна $F=2\,\pi\,k\,(R-r)$. Учитывая, что силы натяжения, действующие на концы рассматриваемого участка кольца, направлены перпендикулярно соответствующим радиусам, их результирующая равна $F\sin\Delta\alpha \approx F\Delta\alpha$ и направлена к оси вращения. Поэтому на основании II закона Ньютона можно утверждать, что

$$F \Delta \alpha = m \omega^2 R \Delta \alpha / (2\pi),$$

т.к. рассматриваемый участок кольца можно в силу малости угла $\Delta \alpha$ принять за материальную точку с массой m $R \Delta \alpha/(2\pi)$.

Из написанных соотношений следует, что при сделанных предположениях искомый радиус кольца при заданной угловой скорости вращения должен быть равен

$$R = \frac{4\pi^2 k r}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$

Из полученного выражения видно, что при увеличении угловой скорости вращения до $\omega_{\rm kp}=2\,\pi\,\sqrt{k/m}\,$ радиус кольца должен неограниченно возрастать, т.е. кольцо должно разорваться.

I.13. При решении задачи нагнетаемую в цилиндр жидкость и поплавок следует считать несжимаемыми. Следует также считать, что цилиндр покоится относительно инерциальной системы отсчета, ускорение поплавка при подъеме уровня жидкости в цилиндре близко к нулю, а находящийся в цилиндре воздух подчиняется законам идеальных газов.

Если высоту столба воздуха в цилиндре в момент касания поплавком верхней крышки обозначить H_{κ} , то в указанный момент объем воздуха, находящегося в цилиндре, должен быть равен $V_{\kappa} = H_{\kappa}(S-s)$. При этом силу взаимодействия поплавка и крышки можно считать еще равной нулю, и, следовательно, при сделанных допущениях действие силы тяжести на поплавок должно уравновешиваться разностью сил давления влажного воздуха и жидкости на него, т.е.

$$mg = \rho g s (h - H_{\kappa}),$$

где g — величина ускорения свободного падения. При этом было учтено, что средняя плотность поплавка много больше плотности воздуха и, следовательно, можно пренебречь изменением давления воздуха по мере подъема от поверхности жидкости до крышки цилиндра. Кроме того, считалось, что и давление паров жидкости остается постоянным в указанных пределах.

С другой стороны, поскольку температура воздуха в цилиндре остается неизменной, и неизменным следует считать количество воздуха между крышкой цилиндра и верхним уровнем жидкости, соглаено закону Бойля-Мариотта должно быть справедливо соотношение

$$p_0 (SH - sh) = pV_{\kappa},$$

где р — давление воздуха в момент касания поплавком крышки. Решая совместно написанные три уравнения, получим, что искомое давление воздуха в цилиндре при сделанных выше предположениях должно быть равно

$$p = p_0 \frac{SH - sh}{(S - s)(h - m/\rho s)}.$$

І.14. Если, как обычно, считать, что наклонная плоскость покоится относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то в положении равновесия, во-первых, сила натяжения нити, действующая на поршень, должна уравновешивать действие силы тяжести, силы атмосферного давления, силы давления газа и силы реакции стенок цилиндра на поршень. Во-вторых, должна быть равна нулю геометрическая сумма сил реакции наклонной плоскости, натяжения нити и тяжести, действующих на брусок. Поскольку сил трения нет и нить невесома, то сила натяжения не может изменять своей величины вдоль нити, и поэтому должны выполняться соотношения:

$$mg + Sp_a = F_p + Sp_{rp}$$
, $mg \sin \alpha = F_p$,

где g — величина ускорения свободного падения, p_{rp} — давление газа в цилиндре, а F_p — модуль силы натяжения нити при равновесии. При составлении этих уравнений в соответствии с рисунком, приведенным в условии задачи, считалось, что отрезок нити между блоком и поршнем вертикален, а между блоком и бруском — параллелен наклонной плоскости. Кроме того, было учтено, что силы натяжения нити, действующие на поршень и брусок, могут быть направлены только вверх вдоль осей соответствующих отрезков нити.

Если расстояние между дном поршня и дном цилиндра при равновесии обозначить L, то из уравнения Клапейрона-Менделеева следует, что давление газа под поршнем в рассматриваемом состоянии должно быть равно

$$p_{rp} = \frac{vRT}{SL}.$$

При смещении поршня от равновесного положения вниз по вертикали на расстояние х давление в цилиндре должно увеличиться до величины

$$p = \frac{vRT}{S(L-x)}$$

и, следовательно, поршень должен иметь ускорение, направленное вертикально вверх и равное

$$a = S(p - p_a)/m - g + F/m,$$

где F — величина силы натяжения нити, действующей на поршень в рассматриваемый момент времени. По условию блок невесом. Поэтому (с учетом ранее сделанных предположений) можно считать, что и на брусок нить в указанный момент времени будет действовать с силой, величина которой равна F, а ускорение бруска на основании II закона Ньютона должно быть равно по модулю

$$a_6 = g \sin \alpha - F/m$$

и направлено вниз вдоль наклонной плоскости. С другой стороны, в силу нерастяжимости нити и стандартных предположений о геометрии блока можно утверждать, что $a=a_6$, т.к. при малых колебаниях нить должна быть натянута.

Складывая почленно два последних уравнения и выражая из ранее составленных уравнений давление газа через положение поршня, получим

$$2 m a = \frac{vRT}{L(L-x)}x.$$

Из этого соотношения видно, что при малых смещениях (x << L) ускорение поршня пропорционально величине смещения и направлено противоположно этому смещению. Поэтому можно утверждать, что в рассматриваемой системе малые колебания бруска вблизи положения равновесия будут гармоническими, а искомая угловая частота этих колебаний должна быть равна

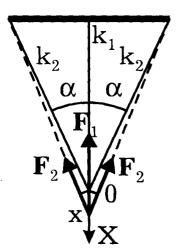
$$\omega = \frac{p_a\,S + m\,g\,(1-\sin\alpha)}{\sqrt{2\,m\,v\,R\,T}}\,, \label{eq:omega}$$

т.к. при гармонических колебаниях отношение величины смещения к модулю проекции ускорения на направление смещения обратно пропорционально квадрату угловой частоты колебаний, а из первых трех уравнений следует, что

$$L = \frac{vRT}{p_a S + mg(1 - \sin \alpha)}.$$

В заключение отметим, что колебания в данном случае следует считать малыми, если не только амплитуда \mathbf{x}_m смещений бруска и поршня от положения равновесия много меньше высоты L столба газа в цилиндре при равновесии, но и $\omega^2\,\mathbf{x}_m < g\sin\alpha$.

I.15. Будем решать задачу в лабораторной системе отсчета, ось 0X которой направлена вертикально вниз, а начало отсчета — точка 0 — совпадает с положением точки крепления пружин при равновесии груза. Если груз переместится вниз на не-



большое расстояние х, то оси крайних пружин займут положение, показанное на рисунке пунктирной линией. Поскольку смещение груза от положения равновесия мало, можно считать, что удлинение крайних пружин будет равно х cos α, а действующая со стороны каждой из крайних пружин сила будет направлена вверх под углом α к вертикали увеличится на величину $F_2 = k_2 x \cos \alpha$. Действующая же на груз сила со стороны средней пружины увеличится на величину $\mathbf{F}_1 = \mathbf{k}_1 \, \mathbf{x}$. Пренебрегая, как это обычно и делается в подобных задачах, силами трения и считая выб-

ранную лабораторную систему инерциальной, на основании сказанного выше и II закона Ньютона уравнение движения груза с учетом невесомости пружин можно представить в виде

$$m\ddot{x} = -k_1 x - 2k_2 x \cos^2 \alpha.$$

Из этого уравнения видно, что ускорение груза \ddot{x} пропорционально его смещению от положения равновесия и направлено в сторону, противоположную смещению. Поэтому при сделанных допущениях вертикальные колебания груза должны быть гармоническими. Учитывая, что при таких колебаниях квадрат угловой частоты ω равен модулю отношения ускорения груза к его смещению от положения равновесия, а произведение угловой частоты и периода колебаний равно 2π , вычислим искомый период малых вертикальных колебаний груза:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + 2k_2 \cos^2 \alpha}}.$$

І.16. Поскольку оси пружин параллельны гладкой горизонтальной поверхности стола, совпадают между собой и проходят через центр масс доски, центр масс кубика располагается над центром масс доски, а доску смещают от положения равновесия вдоль оси пружин, можно считать, что после ее отпускания доска и кубик будут двигаться поступательно. Принимая лабораторную систему отсчета, ось 0X которой совпадает с осью пружин, а начало отсчета — с положением центра масс доски при равновесии, за инерциальную, считая толщину доски постоянной, уравнения движения доски и кубика на основании II закона Ньютона можно записать в следующем виде

$$M \ddot{X} = -2 k X - F_{rp}, m \ddot{x} = F_{rp}.$$

Здесь X и \ddot{X} — координата и проекция ускорения доски на ось 0X, \ddot{x} — проекция ускорения кубика на указанную ось, а $F_{\tau p}$ — величина силы трения между доской и кубиком. При составлении уравнения движения доски считалось, что при всех допустимых деформациях силы, действующие на доску со стороны пружин, подчиняются закону Гука. Кроме того, мы пренебрегли силами трения, действующими на движущиеся тела со стороны окружающей их среды, т.к. в противном случае, очевидно, движение доски и кубика не могло бы быть гармоническим.

Поскольку в момент отпускания доски кубик неподвижен относительно нее, а в дальнейшем он должен совершать гармонические колебания, работа сил трения к любому последующему моменту времени должна быть равна нулю. Это возможно лишь в том случае, когда силы трения являются силами трения покоя. Следовательно, в интересующем случае ускорения кубика и доски должны быть одинаковыми, т.е. $\ddot{X}=\ddot{x}$. Учитывая, что максимальная величина силы сухого трения покоя равна произведению коэффициента трения на величину нормальной составляющей силы реакции опоры, т.е. в данном случае равна μ m g , где g — величина ускорения свободного падения, из написанных выше уравнений следует, что

$$\left|\mathbf{F}_{\mathrm{TP}}\right| = \frac{\left|2\,\mathrm{k}\,\mathrm{X}\right|\mathrm{m}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}} \leq \mu\,\mathrm{m}\,\mathrm{g}\;,$$

а искомая величина смещения доски должна удовлетворять неравенству

$$\left|X\right| \leq \frac{\mu g (m+M)}{2 k}.$$

I.17. Согласно условию задачи после пережигания нити груз массы М начнет подниматься вертикально вверх, а положение равновесия этого груза будет находится на высоте Н относительно его исходного положения, причем kH = mg, где m масса второго груза, д - величина ускорения свободного падения. При этом, как обычно, нить и пружина считались невесомыми. Следовательно, пренебрегая смещением груза массы М во время пережигания нити, т.е. полагая, что период колебаний первого груза много больше времени пережигания нити, в соответствии с условием задачи можно утверждать, что этот груз будет совершать гармонические колебания с амплитудой A = H = m g/k. Учитывая, что силами трения по условию задачи следует пренебречь, можно утверждать, что угловая частота этих колебаний $\omega = \sqrt{k/M}$. Поскольку амплитуда v_m скорости груза при гармонических колебаниях в ю раз больше амплитуды его смещения, то из написанных соотношений получим, что искомая масса второго груза равна

$$m = v_m \sqrt{k M} / g .$$

I.18. Усиление звука при изменении длины воздушного столба в трубке обусловлено явлением акустического резонанса. Поскольку при изменении глубины погружения трубки условия у ее верхнего торца и на границе воздух — вода внутри трубки остаются неизменными, новое усиление звука должно наблюдаться, когда длина воздушного столба в трубке изменяется на величину, равную половине длины волны звука. Поэтому $\Delta h = \lambda/2$. Учитывая, что скорость распространения волны v, частота колебаний v и длина волны v связаны соотношением $v = \lambda v$, получим, что искомая скорость звука равна

$$v = 2 \Delta h v = 340 \text{ m/c}$$
.

Отметим, что минимальная длина воздушного столба в трубке, при которой будет наблюдаться усиление звука, должна быть равна $\lambda/4 = \Delta h/2 = 8.5$ см , т.к. вблизи верхнего конца трубки — "свободного конца" — при резонансе должна находиться пучность, а вблизи нижнего конца воздушного столба — "закрепленного конца" — должен находиться узел стоячей волны.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

II.1. По мере нагревания воздуха сила тяжести, действующая на шар, должна уменьшаться, т.к. плотность воздуха, находящегося в оболочке, будет падать. Будем, поскольку другое не оговорено в условии задачи, считать, что находящийся вне шара воздух покоится относительно Земли, и лабораторная система отсчета является инерциальной.

На покоящийся шар со стороны окружающего воздуха действуют силы гидростатического давления. Величина равнодействующей этих сил, равной согласно закону Архимеда весу вытесненного шаром воздуха, при сделанных предположениях равна $F_A = m_B g$, где $m_B -$ масса вытесненного воздуха, а g -величина ускорения свободного падения. Поскольку абсолютная температура окружающего воздуха $T_B \approx 273 + t$, то полагая, как обыч-

но, что воздух подчиняется уравнению состояния идеальных газов, получим

$$m_{_{B}} = \frac{p V \mu}{R T_{_{B}}},$$

где $R \approx 8,31~$ Дж/моль · K- универсальная газовая постоянная.

Из условия задачи следует, что нагревание происходит столь медленно и теплопроводность оболочки столь мала, что во всех точках внутри оболочки температура воздуха устанавливается одинаковой. При этом можно считать, что давление воздуха в оболочке равно атмосферному. Тогда согласно уравнению Клапейрона-Менделеева при абсолютной температуре воздуха в оболочке, равной $T_{\rm x}$, масса содержащегося в ней воздуха должна быть равна

$$m = \frac{p \, V \, \mu}{R \, T_{\cdot \cdot \cdot}} \, .$$

Поскольку при сделанных выше предположениях шар должен начать взлетать, когда масса груза и оболочки с находящимся в ней воздухом станет меньше массы вытесненного шаром воздуха, то шар начнет подниматься при выполнении условия

$$M + \frac{p\,V\,\mu}{R\,T_{_{\boldsymbol{X}}}} < \frac{p\,V\,\mu}{R\,T_{_{\boldsymbol{B}}}}\,.$$

Следовательно, искомая температура при сделанных предположениях определяется условием

$$T_{_{X}} > \frac{p \, V \, \mu \, T_{_{B}}}{p \, V \, \mu - M \, R \, T_{_{B}}} \approx 496 \, K \approx 223^{\circ} \, C \, .$$

II.2. Если абсолютную температуру озона в сосуде обозначить \mathbf{T}_1 , а его давление — \mathbf{p}_1 , то, полагая объем сосуда неизменным и считая озон и кислород подчиняющимися уравнению состояния идеальных газов, можно утверждать, что давление в сосуде после превращения озона в кислород будет равно

$$p_2 = 3p_1T_2/(2T_1)$$
,

где ${\rm T_2}$ — абсолютная температура кислорода, поскольку из каждых двух молекул озона образуется три молекулы кислорода.

Изменение температуры в сосуде обусловлено выделением тепла при превращении озона в кислород. Пренебрегая теплоемкостью сосуда и учитывая, что сосуд является теплоизолирующим, т.е. все выделившееся при указанном процессе тепло идет только на изменение температуры газа в сосуде, на основании уравнения теплового баланса можно утверждать, что температура кислорода должна удовлетворять условию

$$q = 3c_{\nu\mu}(T_2 - T_1)/2$$
.

Из написанных соотношений следует, что давление в сосуде после превращения озона в кислород должно увеличиться в

$$n = \frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{2} + \frac{q}{T_1 c_{\nu\mu}} \approx 10$$
 pas,

так как $T_1 \approx t_1 + 273$.

II.3. Выпадение росы может наблюдаться только тогда, когда пары становятся насыщенными. Следовательно, давление паров воды в утренние часы было равно р_{н1}. Считая, как это обычно и делается, что к парам воды вплоть до точки насыщения применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, определим плотность насыщенных паров воды в утренние часы

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{p_{\text{H}1} \, \mu}{R \, T_{\text{I}}} \, , \label{eq:rho1}$$

где m — масса паров воды, содержавшихся в объеме воздуха V при абсолютной температуре $T_1 \approx t_1 + 273$, $\mu = 18$ г/моль — молярная масса воды, $R \approx 8{,}31$ Дж/моль · К — универсальная газовая постоянная.

Поскольку при дневной температуре $T_2 \approx t_2 + 273$ абсолютная влажность стала равна $\rho_2 = \rho_1 + \Delta \rho$, а давление насыщенных паров при дневной температуре равно $\rho_{\rm H2}$, то с учетом ранее сделанного предположения можно утверждать, что искомая относительная влажность должна быть равна

$$r_2 = \frac{\rho_1 + \Delta \rho}{\mu \, p_{_{_{\mathit{H}2}}}} \, R \, T_2 = \frac{p_{_{_{\mathit{H}1}}} \, T_2}{p_{_{_{\mathit{H}2}}} \, T_1} + \frac{\Delta \rho \, R \, T_2}{p_{_{_{_{\mathit{H}2}}}} \, \mu} \approx 61\% \, .$$

При расчете было учтено, что 1 мм рт. ст. ≈ 133 Па.

II.4. Будем считать, что пары воды вплоть до точки насыщения подчиняются уравнению Клапейрона-Менделеева. Поскольку согласно определению относительной влажности, используемому в метеорологии, относительная влажность равна отношению давления паров к давлению насыщенных паров этого же вещества при данной температуре, можно вычислить массу паров воды, содержащихся в объеме V при дневной (t_1) и ночной (t_2) температурах по формулам

$$r p_{H1} V \mu = m_1 R T_1, p_{H2} V \mu = m_2 R T_2,$$

где абсолютная температура $T_i \approx t_i + 273$, $\mu = 18$ г/моль — молярная масса воды, $R \approx 8{,}31$ Дж/моль · К — универсальная газовая постоянная. Считая, что плотность воды при ночной температуре $\rho \approx 1$ г/см 3 , а масса сконденсировавшейся в объеме V воды $\Delta m = m_1 - m_2 = \rho \, v$, определим искомый объем охлаждаемого воздуха

$$V = \frac{v \rho R T_1 T_2}{\mu (r p_{\mu 1} T_2 - p_{\mu 2} T_1)} \approx 100 \,\text{m}^3.$$

При расчете было учтено, что 1 мм рт. ст. ≈ 133 Па.

II.5. Если давление насыщенных паров воды в цилиндре обозначить $p_{_{\rm H}}$, абсолютную температуру — T, первоначальный объем газопаровой смеси — $V_{_0}$, а число молей пара — v, и полагать, что к воздуху и парам вплоть до точки насыщения применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, то указанные величины должны быть связаны между собой соотношением

$$p_{H} V_{0} = vRT,$$

где $R \approx 8,31$ Дж/моль · K — универсальная газовая постоянная, а первоначальное давление в цилиндре должно быть равно

$$p_0 = p_{_H} + \frac{n v R T}{V_0}.$$

При изотермическом увеличении объема смеси парциальное давление воздуха должно падать. Давление же паров воды не будет изменяться до тех пор, пока в цилиндре остается вода в конденсированном состоянии, если считать, что увеличение объема происходит столь медленно, что вещество под поршнем все время находится практически в равновесном состоянии. Отметим, что при нарушении этого условия в соответствии с определением вообще нельзя говорить о температуре, поскольку это понятие вводится только для систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия.

В конечном состоянии вся находящаяся в цилиндре вода должна испариться. Поскольку масса паров первоначально была равна массе сконденсированной воды, то в конечном состоянии водяной пар будет насыщенным, если объем газопаровой смеси увеличится до величины

$$V_{\kappa} = V_0 + \frac{vRT}{p_{_H}}.$$

Следовательно, при сделанных выше предположениях давление под поршнем должно стать равным

$$p_{\kappa} = p_{H} + \frac{n v R T}{V_{\kappa}},$$

а искомое отношение давлений должно быть равно

$$\frac{p_{\kappa}}{p_{\pi}} = \frac{2+n}{2(1+n)} = \frac{5}{8}.$$

II.6. Как известно, давление насыщенных паров воды $p_{_{\rm H}}$ при температуре $t=100^{\circ}\,{\rm C}$ равно нормальному атмосферному давлению $p_{_{\rm a}}\approx 101\,{\rm kHa}$. Полагая, что вся вода, впрыснутая в цилиндр, испарилась, а образовавшийся пар подчиняется уравнению состояния идеальных газов, вычислим парциальное давление паров воды в сосуде

$$p_B = \frac{m R(t + 273)}{\mu V} \approx 57.4 \text{ } \kappa \Pi a,$$

т.к. молярная масса воды $\mu=18$ г/моль, а универсальная газовая постоянная $R\approx 8{,}31$ Дж/моль \cdot К.

Поскольку полученное значение меньше давления насыщенных паров воды при заданной температуре, следует считать, что вся вода действительно испарилась. Поэтому согласно определению относительной влажности, используемому в метеорологии, искомая влажность должна быть равна

$$r = p_B/p_H \approx 57\%$$
.

II.7. Поскольку ось цилиндра горизонтальна, а поршень гладкий, поршень будет находится в равновесии, когда давления азота и воды на его поверхности будут равны. В общем случае возможны три ситуации: вся вода находится в конденсированном состоянии, испарилась часть воды и, наконец, вся вода находится в газообразном состоянии. В первом случае давление азота должно быть больше давления насыщенных паров воды р_н при заданной температуре, а в последнем — меньше р_и.

Если бы вся вода находилась в конденсированном состоянии, то она занимала бы объем $V_{\rm B}=M/\rho$, где $\rho-$ плотность воды при заданной температуре. Поскольку $\rho\approx 1\,{\rm r/cm^3}$, то занимаемый данной массой воды $M=2\,{\rm r}$ объем много меньше объема цилиндра $V=2\,{\rm n}$. Пренебрегая в соответствии с условием задачи объемом, занимаемым поршнем, и полагая, что азот подчиняется уравнению состояния идеального газа, определим давление, которое создавал бы азот в этом случае:

$$p_{1a} = mRT/(\mu V) \approx 0.55 \cdot 10^5 \, \Pi a$$
,

т.к. универсальная газовая постоянная $R\approx 8{,}31\,\mbox{Дж/моль}\cdot \mbox{K}$, абсолютная температура $T\approx t+273$ и молярная масса азота $\mu=28\,\mbox{г/моль}$.

Как известно, при $t=100^{\circ}$ С давление насыщенных паров воды равно $p_{_{\rm H}}=1$ атм $\approx 1{,}01\cdot 10^5$ Па. Следовательно, при заданных условиях находящаяся в цилиндре вода не может находиться полностью в конденсированном состоянии.

Если же предположить, что вся вода находится в газообразном состоянии и к ненасыщенным парам применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, то давление в цилиндре (пре-

небрегая объемом поршня и учитывая, что молярная масса воды $\mu_{\text{в}} = 18\,\text{г/моль}$) должно быть равно

$$p_2 = \left(\frac{m}{\mu} + \frac{M}{\mu_B}\right) \frac{RT}{V} \approx 2,28 \cdot 10^5 \text{ } \Pi \text{a} \text{ },$$

т.е. должно превышать давление насыщенных паров воды при заданной температуре.

Таким образом, часть воды в цилиндре находится в конденсированном состоянии, а остальная ее часть представляет собой насыщенный пар. Поэтому давление в цилиндре равно давлению насыщенных паров воды $p_{_{\rm H}}$, а искомая часть объема цилиндра, занятая азотом, равна

$$x = \frac{mRT}{\mu V p_H} \approx 0.55.$$

II.8. Поскольку сжатие насыщенного пара проводят изотермически, следует считать, что вещество в цилиндре находится все время практически в равновесном состоянии. Поэтому, пока не сконденсируется весь пар, давление в цилиндре — давление насыщенных паров воды при постоянной температуре — должно оставаться постоянным. Вспоминая, что давление насыщенных паров воды при $t=100^{\circ}\mathrm{C}$ равно $p_{_{\mathrm{H}}}\approx 1.01\cdot 10^{5}$ Па , вычислим, при каком изменении объема пара ΔV работа, совершаемая над паром при указанных условиях, будет равна заданной

$$\Delta V = \frac{A}{p_H} \approx 2\pi,$$

т.к. $1 \ n=10^{-3} \ m^3$. Полученная величина меньше начального объема пара. Поэтому, полагая, как обычно, что к парам вплоть до точки насыщения применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, можно определить массу сконденсировавшейся воды

$$\Delta m = \frac{p_H \Delta V \mu}{R T}$$

где $\mu=18$ г/моль — молярная масса воды, $R\approx 8{,}31$ Дж/моль \cdot К — универсальная газовая постоянная, а $T\approx t+273$ — темпера-

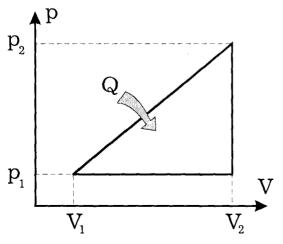
тура пара по шкале Кельвина. Отсюда на основании уравнения теплового баланса найдем искомое количество теплоты, которое должно быть отведено от пара при заданных условиях,

$$Q = r \Delta m = \frac{A \mu r}{R T} \approx 2.6$$
 кДж.

II.9. КПД теплового двигателя по определению равен:

$$\eta = A/Q$$
,

где A — работа, совершенная рабочим веществом двигателя за цикл, а Q — количество теплоты, полученное от нагревателя за то же время. Из условия задачи следует, что при нагревании зависимость давления газа p от его абсолютной температуры можно представить в виде p^2 = αT , где a — некоторая постоянная величина. Отсюда согласно уравнению Клапейрона-Менделева следует, что объем газа должен возрастать пропорционально его давлению по закону $V = v R p/\alpha$, где v — число молей газа, а R — универсальная газовая постоянная. Учитывая, что после нагревания газ охлаждают так, что его давление изменяется пропорционально температуре, в соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева можно утверждать, что на этом участке объем газа остается неизменным. На последнем учас-



тке газ возвращают в исходное состояние путем изобарического сжатия. Из сказанного следует, что рабочий цикл двигателя на рV-диаграмме должен иметь вид, показанный на рисунке. С учетом использованных на рисунке обозначений работа газа за один цикл

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)/2 = p_1^2 (n - 1)^2 v R/(2\alpha),$$

т.к. по условию $p_2 = n p_1$.

При изохорическом и последующем изобарическом сжатии внутренняя энергия газа уменьшается. Кроме того, на последнем этапе над газом совершают работу. Поэтому, согласно I началу термодинамики на этих участках газ должен отдавать тепло. Таким образом, газ получает тепло только на первом участке цикла, как и показано на рV-диаграмме сплошной стрелкой.

Воспользовавшись формулой для расчета площади трапеции, вычислим работу газа на этом участке

$$A_1 = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{v R p_1^2 (n^2 - 1)}{2\alpha}.$$

Если температуру газа в начале и конце первого участка обозначить T_1 и T_2 , то вспоминая, что изохорическая молярная теплоемкость одноатомного идеального газа равна 1,5R, найдем приращение внутренней энергии газа при нагревании

$$\Delta W_1 = 1.5 v R (T_2 - T_1) = 1.5 v R p_1^2 (n^2 - 1)/\alpha$$
.

Отсюда в соответствии с I началом термодинамики следует, что полученное газом за цикл тепло должно быть равно

$$Q = \Delta W_1 + A_1 = 2 v R p_1^2 (n^2 - 1) / \alpha$$
.

Таким образом, искомый КПД двигателя равен

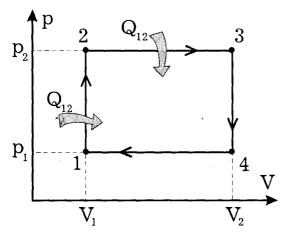
$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{n-1}{4(n+1)}.$$

II.10. При изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа остается неизменной, т.к. при таком процессе температура должна оставаться постоянной. Следовательно, согласно I началу термодинамики теплота Q_{12} , полученная от нагревателя, и совершенная газом при изотермическом расширении работа A_{12} должны быть равны друг другу. При изохорическом охлаждении работа газа равна нулю, а уменьшение внутренней энергии — температура газа уменьшается — обусловлено

передачей газом определенного количества теплоты холодильнику. На последнем участке цикла — при адиабатическом сжатии — над газом совершается работа A_{31} без какого-либо теплообмена с окружающими телами. Следовательно, на этом участке сумма приращения внутренней энергии газа ΔW_{31} и совершенной им работы A_{31} должна быть равна нулю. Поскольку молярная изохорическая теплоемкость одноатомного идеального газа равна 1,5R, где R — универсальная газовая постоянная, и максимальное изменение температуры газа за цикл равно ΔT , то $A_{31} = -1,5$ R ΔT . Вспоминая, что КПД теплового двигателя равно отношению работы, совершенной рабочим веществом за цикл, к количеству теплоты, полученному им за тот же период, т.е. $\eta = (A_{12} + 0 + A_{31})/Q_{12} = 1 + A_{31}/Q_{12}$, определим искомую работу газа при изотермическом расширении:

$$A_{12} = Q_{12} = \frac{A_{31}}{\eta - 1} = \frac{3R\Delta T}{2(1 - \eta)}$$

II.11. По условию задачи на первом участке цикла газ, непрерывно получая тепло от нагревателя, расширяется и, следовательно, совершает работу. Поскольку температуры газа в начале (точка 1) и в конце (точка 2) этого участка одинаковы, то совершенная газом на этом участке работа A,, должна быть рав-



на количеству теплоты Q_{12} , полученной газом. При изобарическом сжатии (участок 2) температура газа в соответствии с уравнением состояния идеальных газов должна непрерывно падать. Поскольку при этом над газом совершают положительную работу, то согласно I началу термоди-

намики газ на этом участке должен отдавать тепло. На последнем участке цикла газ изохорически возвращают в исходное состояние. Следовательно, на этом участке температура газа должна увеличиться до первоначальной. Поскольку при изохорическом процессе работа газа равна нулю, то увеличение температуры и, следовательно, внутренней энергии газа, на третьем участке может произойти только за счет теплоты, получаемой от нагревателя.

Если абсолютную температуру газа в начале третьего участка обозначить \mathbf{T}_3 , то полученное газом тепло на третьем участке должно быть равно

$$Q_{31} = c_{v\mu} (T - T_3) = 1.5 R(T - T_3)$$

т.к. количество газа равно одному молю и молярная теплоем-кость одноатомного идеального газа при изохорическом процессе равна 1,5 R, где R — универсальная газовая постоянная. Температуры T и T_3 согласно уравнению Клапейрона-Менделеева можно определить из соотношений:

$$pV_2 = RT$$
 и $pV = RT_3$,

где V_2 — объем газа в точке 2. Учитывая, что $A_{12}=Q_{12}$, $A_{23}=p\,(V-V_2)$ и КПД цикла $\eta=(A_{12}+A_{23})/(Q_{12}+Q_{31})$, из написанных уравнений получим, что искомая работа газа на первом участке равна

$$A_{12} = \frac{(1.5 \eta + 1)(RT - pV)}{1 - \eta}$$
.

II.12. Если минимальные значения давления и объема газа обозначить \mathbf{p}_1 и \mathbf{V}_1 , то $\mathbf{p}\mathbf{V}$ -диаграмму заданного цикла можно изобразить так, как показано на рисунке. На этом рисунке стрелками на изобарах и изохорах указано направление изменения параметров газа на соответствующих участках цикла. На первом участке давление газа возрастает при неизменном объеме. Следовательно, температура газа растет за счет получаемого от нагревателя тепла \mathbf{Q}_{12} , что показано на диаграмме стрелкой. Если абсолютную температуру газа в точке 1 обозначить \mathbf{T}_1 , а в точке $\mathbf{2} - \mathbf{T}_2$, то согласно уравнению Клапейрона-Менделеева

 $p_1\ V_1=R\ T_1$, а $p_2\ V_1=R\ T_2$, где R — универсальная газовая постоянная. Поскольку $p_2/p_1=\alpha$ и молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорическом процессе равна 1,5 R, то $Q_{12}=1,5\ R(\alpha-1)\ T_1$. При изобарическом нагревании газ должен получить от нагревателя количество теплоты, равное $Q_{23}=2,5\ R\alpha(\beta-1)T_1$, т.к. молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при изобарическом процессе равна 2,5 R и температура газа в точке 3 равна $T_3=p_2\ V_2/R=\alpha\beta\, p_1\ V_1/R=\alpha\beta\, T_1$. Поскольку на двух последних участках цикла газ должен отдавать тепло, то полученное от нагревателя за один цикл количество теплоты должно быть равно $Q_{\rm H}=Q_{12}+Q_{23}$. Совершенная же газом работа за цикл равна

 $A=(p_2-p_1)(V_2-V_1)=p_1\ V_1\,(\alpha-1)(\beta-1)=R\ T_1\,(\alpha-1)(\beta-1)$. Отсюда следует, что искомый КПД теплового двигателя равен

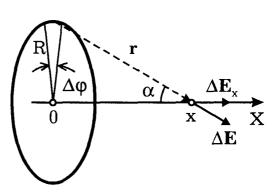
$$\eta = \frac{A}{Q_w} = \frac{2(\alpha-1)(\beta-1)}{5\alpha\beta - 2\alpha - 3}.$$

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

III.1. Поскольку оси пружин и спицы совпадают с осью кольца, и размерами бусинки, которая может перемещаться только по спице, как обычно, можно пренебречь, имеет место осевая симметрия в расположении тел. Поэтому можно считать, что по тонкому проводящему кольцу заряд Q распределен равномерно. Учитывая это и то, что в положении равновесия бусинка находится в центре кольца, можно утверждать, что при равновесном положении бусинки деформации одинаковых пружины должны быть одинаковы. Отсюда следует, что при смещении бусинки вдоль оси кольца на расстояние x от равновесного положения равнодействующая сил упругих деформаций пружин \mathbf{F}_{π} будет направлена к положению равновесия вдоль оси пружин, а по величине, согласно закону $\mathbf{\Gamma}$ ука, она должна быть равна $\mathbf{2}$ k \mathbf{x} .

Наряду с силами упругих деформаций пружин, на бусинку при ее смещении от положения равновесия будут действовать электрические силы со стороны заряженного кольца. Чтобы определить величину и направление этих сил, рассмотрим часть дуги кольца, ограниченную центральным углом $\Delta \phi$, показанным на рисунке. При достаточно малой величине угла $\Delta \phi$ размерами указанного участка дуги кольца можно пренебречь. Учитывая, что заряд этого участка, согласно сказанному выше, должен быть равен $\Delta Q = Q \Delta \phi/(2\pi)$, можно утверждать,

что напряженность поля ΔE , создаваемого этим зарядом в точке, находящейся на оси на расстоянии х от центра кольца, будет направлена так, как показано на рисунке (считая, конечно, заряд кольца положительным), а ее величина должна быть равна



$$\Delta E = \frac{Q \, \Delta \phi}{8 \, \pi^2 \, \epsilon_0 \, (R^2 + x^2)} \, , \label{eq:delta_E}$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Диаметрально противоположный участок кольца таких же размеров в рассматриваемой точке создает поле с напряженностью $\Delta \mathbf{E}_1$, составляющая которой, перпендикулярная оси $0\mathbf{X}$, имеет ту же величину, но направлена противоположно аналогичной компоненте поля $\Delta \mathbf{E}$. Поэтому на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что напряженность поля, создаваемого всем кольцом, направлена вдоль оси $0\mathbf{X}$ и равна

$$E = \frac{Q\cos\alpha}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(R^2+x^2)} = \frac{Q\,x}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\sqrt{(R^2+x^2)^3}}\,. \label{eq:energy}$$

Отсюда, пренебрегая размерами бусинки, получаем, что электрическая сила, действующая на нее, в соответствии с определением напряженности электрического поля равна $\mathbf{F_3} = \mathbf{q}\mathbf{E}$ и направлена вдоль оси к плоскости кольца, т.к. знаки зарядов кольца и бусинки противоположны.

Будем, как это обычно и делается, считать лабораторную систему отсчета, относительно которой кольцо неподвижно, инерциальной и пренебрегать силами трения, действующими на движущиеся части. Тогда, пренебрегая в соответствии с условием массой пружин, на основании II закона Ньютона уравнение движения бусинки в проекции на ось 0X можно представить в виде

$$\label{eq:mx} m\ddot{x} = -F_\pi \, - \, F_\vartheta \, \equiv - \! \left(2\,k + \frac{q\,Q}{4\,\pi\epsilon_0\,\sqrt{\left(R^2\,+\,x^2\,\right)^3}} \right) \! x \, ,$$

где \ddot{x} — проекция ускорения бусинки на ось 0X. Поскольку требуется определить период малых колебаний, то следует считать, что амплитуда колебаний бусинки много меньше радиуса кольца, а потому всегда должно соблюдаться неравенство |x| << R, и уравнение движения можно представить в виде

$$m\ddot{x} = -\left(2k + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)x.$$

Из полученного уравнения видно, что ускорение бусинки прямо пропорционально ее смещению от положения равновесия и направлено к этому положению. Следовательно, после малого отклонения от положения равновесия бусинка будет совершать гармонические колебания. Вспоминая, что при прямолинейных гармонических колебаниях квадрат угловой частоты ω равен модулю отношения ускорения колеблющегося тела к его смещению от положения равновесия в тот же момент времени, а период колебаний обратно пропорционален угловой частоте, получим, что искомый период малых колебаний равен

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{2\,k + q\,Q/(4\,\pi\,\epsilon_0\,R^3)}}\;. \label{eq:T}$$

III.2. Согласно закону Кулона величина силы, действующей на заряд q со стороны заряда Q,, в обоих случаях равна

$$\mathbf{F}_{q1} = \frac{q \, \mathbf{Q}_1}{4 \, \pi \, \boldsymbol{\epsilon}_0 \, \mathbf{L}^2} \, \mathbf{i} \,,$$

где ${\bf i}$ — единичный вектор, направленный от заряда ${\bf Q}_1$ к заряду ${\bf q}$, а ${\bf \epsilon}_0$ — электрическая постоянная. В первом случае, когда заряд ${\bf q}$ располагается между зарядами ${\bf Q}_1$ и ${\bf Q}_2$, со стороны заряда ${\bf Q}_2$, на него действует сила

$$\mathbf{F}_{q21} = -\frac{q Q_2}{4 \pi \varepsilon_0 L^2} \mathbf{i} ,$$

а во втором -

$$\mathbf{F}_{q22} = \frac{q \, \mathbf{Q}_2}{4 \, \pi \, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, 9 \, \mathbf{L}^2} \, \mathbf{i} \, .$$

Если искомое отношение зарядов обозначить k и учесть, что отношение величин сил, действующих на заряд q в первом и втором случаях, равно n, то из написанных ранее выражений следует, что

$$n = \frac{|Q_2 - Q_1|}{Q_1 + Q_2/9} = 9 \frac{|1 - k|}{1 + 9 k},$$

причем $k \ge 0$ поскольку заряды Q, и Q, положительные.

При $k \le 1$ из последнего соотношения вытекает, что k = (1-n/9)/(n+1). Отсюда, в свою очередь, поскольку $k \ge 0$, следует, что допустимые значения n должны удовлетворять требованию: $0 \le n \le 9$. Если же k > 1, то k = (1+n/9)/(1-n), т.е. для n допустимы значения, удовлетворяющие неравенствам: $0 \le n < 1$. Наконец, при значениях n > 9 задача не имеет решения.

Итак, при $0 \le n < 1$ искомое отношение $k = Q_1/Q_2$ может быть равно либо (1+n/9)/(1-n), либо (1-n/9)/(n+1); при $0 \le n \le 9$ искомое отношение определяется однозначно и равно (1-n/9)/(n+1), а при n>9 задача не имеет решения.

III.3. В вертикальном направлении на шарик действует сила тяжести ${\bf F}_{\rm g}=m\,{\bf g}$, где ${\bf g}$ — ускорение свободного падения, и сила ${\bf F}$ со стороны зарядов на горизонтальной плоскости. По условию задачи заряды по плоскости распределены равномерно. Как известно, напряженность электрического поля, создаваемого такой плоскостью, направлена перпендикулярно к ней, а его величина не зависит от удаления от плоскости и равна $\sigma/(2\,\epsilon_0)$,

где ϵ_0 — электрическая постоянная. Если $\sigma>0$, то силовые линии поля направлены от плоскости, а при $\sigma<0$ — к ней. Из сказанного в соответствии с определением напряженности электрического поля следует, что силу ${\bf F}$ можно найти из выражения

$$\mathbf{F} = -\frac{q\,\sigma}{2\,\epsilon_0\,g}\mathbf{g}$$

Пренебрегая, как это обычно и делается в подобных задачах, силами вязкого трения со стороны окружающей среды и, учитывая, что кроме названных сил на шарик действует еще сила **T** натяжения нити, на основании II закона Ньютона можно утверждать, что равнодействующая указанных сил должна быть равна произведению массы шарика на его ускорение, поскольку радиус шарика по условию задачи мал.

Пусть при угловой скорости вращения вала, равной ω , нить образует с вертикалью угол α . Учитывая, что при постоянной скорости вращения вала и $\alpha \neq 0$ ускорение шарика равно $a_n = \omega^2 L \sin \alpha$ и направлено горизонтально к оси вращения, сумма вертикальных составляющих действующих на шарик сил должна быть равна нулю, а необходимое ускорение шарику обеспечивает горизонтальная составляющая силы натяжения нити, получим

$$T \sin \alpha = [m g - q \sigma/(2 \epsilon_0)] tg \alpha = m \omega^2 L \sin \alpha$$
.

Отсюда следует, что нить будет устойчиво отклонена от вертикали, если угловая скорость вращения вала удовлетворяет соотношению

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{q\,\sigma}{2\,\epsilon_0\,\,m\,\,L}}\,,$$

т.к. $\cos \alpha$ при $\alpha \neq 0$ меньше единицы.

III.4. В исходном состоянии разность потенциалов между сферами равна нулю, т.к. из-за отсутствия зарядов на сферах электрическое поле между ними отсутствует. При сообщении второй сфере заряда q по проводнику, соединяющему первую и третью сферы, должен протечь заряд такой величины, чтобы

потенциалы первой и третьей сфер вновь оказались равными. Поскольку проводник, соединяющий эти сферы, тонкий, можно пренебречь зарядами, находящимися на этом проводнике, и следовательно, пренебречь электрическим полем, порождаемым зарядами этого проводника. Далее, поскольку отверстие во второй сфере, через которое проходит названный проводник, мало, а центры сфер совпадают, можно считать, что силовые линии поля должны быть направлены вдоль радиусов сфер, т.е. картина силовых линий между ними и снаружи должна иметь такой же вид, как и от точечных зарядов, находящихся в центре сфер.

Если в результате перераспределения зарядов между первой и третьей сферами после сообщения заряда ${\bf q}$ второй сфере заряд первой сферы (с учетом его знака) стал равным ${\bf q}_1$, то напряженность поля между этими сферами в соответствии со сказанным должна быть равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{q}_1 \, \mathbf{r}}{4 \, \pi \, \varepsilon_0 \, \mathbf{r}^3} \,,$$

где ε_0 — электрическая постоянная, а между второй и третьей сферами —

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q})\,\mathbf{r}}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\mathbf{r}^3}\,.$$

Напомним, что разность потенциалов между двумя точками по определению равна отношению работы сил поля при перемещении пробного заряда из первой точки во вторую к величине этого заряда, а потенциал поля, создаваемого точечным зарядом Q в вакууме на расстоянии R от него, равен

$$\phi(R) = \frac{Q}{4 \, \pi \, \epsilon_0 \, R} \, , \label{eq:phiR}$$

если считать, что на бесконечно большом расстоянии от этого заряда потенциал поля равен нулю. Отсюда следует, что разность потенциалов между первой и второй сферами при сделанных допущениях должна стать равной

$$\phi(R_1) - \phi(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

а между второй и третьей -

$$\phi(R_2) - \phi(R_3) = \frac{q_1 + q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right).$$

С другой стороны, ток в соединительном проводнике, вызванный сообщением заряда q второй сфере, прекратится, когда потенциалы первой и третьей сфер станут равными, т. е. когда будет выполнено условие $\phi(R_1) - \phi(R_2) = \phi(R_3) - \phi(R_2)$. Из этого условия следует, что заряд первой сферы после установления равновесия должен быть равен

$$q_1 = q \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2 - R_3}{R_3 - R_1},$$

и следовательно, искомое изменение потенциала второй сферы будет равно

$$\begin{split} \Delta \phi &= \phi(R_2) - 0 = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \Bigg[\frac{q}{R_3} + (q_1 + q) \Bigg(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \Bigg) \Bigg] = \\ &= \frac{q}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \frac{1}{R_2} \Bigg(1 - \frac{R_1 \, (R_2 - R_3)^2}{R_2 \, R_3 \, (R_3 - R_1)} \Bigg) = \frac{5 \, q}{48 \, \pi \, \epsilon_0 \, R} \, . \end{split}$$

III.5. Если начать извлекать диэлектрическую пластину, емкость второго конденсатора будет уменьшаться, а потому разность потенциалов между его обкладками должна начать увеличиваться. Емкость же первого конденсатора $C = \epsilon_0 \, \mathrm{s/b}$, где $\epsilon_0 - \mathrm{s/b}$, где ϵ_0

чение. Поскольку пластина является гладкой, то в указанной ситуации можно будет пренебречь и силами трения, а искомая работа согласно закону сохранения энергии должна быть равна разности энергий заряженных конденсаторов в отсутствии и при наличии пластины между обкладками одного из них.

Согласно закону сохранения заряда суммарный заряд конденсаторов $q=C\left(\epsilon+1\right)\phi$ после удаления пластины должен остаться неизменным, хотя их емкость уменьшится до величины 2C. Поскольку энергия конденсатора емкостью C, заряд которого равен q, равна $W=q^2/(2\,C)$, то изменение энергии конденсаторов после извлечения пластины, и следовательно, искомая работа должны быть равны

$$A_{min} \; = \frac{q^2}{2\,C} \bigg(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\epsilon} \bigg) = \frac{\epsilon_0 \; s \, \phi^2 \; (\epsilon^2 - 1)}{4 \; b} \, . \label{eq:Amin}$$

III.6. После соединения элементов схемы при нахождении ключей в положении 1 между обкладками конденсатора С, установится разность потенциалов, равная ЭДС первого источника \mathcal{E}_{i} , а второго – \mathcal{E}_{i} , т.к. после зарядки конденсаторов токи через указанные источники протекать не будут. Следовательно, заряд первого конденсатора в этом состоянии будет равен $\mathbf{q}_{11} = \mathbf{C}_1 \, \mathcal{E}_1$, а второго — $\mathbf{q}_{21} = \mathbf{C}_2 \, \mathcal{E}_2$. После переключения ключей в положение 2 должен начаться процесс перезарядки конденсаторов, в результате которого заряды конденсаторов $\mathbf{C}_{_1}$ и $\mathbf{C}_{_2}$ должны стать равными $q_{12} = C_1 \mathcal{E}_2$ и $q_{22} = C_2 \mathcal{E}_1$, соответственно. Таким образом, после изменения положения ключей и установления нового положения равновесия через первый источник должен протечь заряд $\Delta q_1 = q_{22} - q_{21} = C_2 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$, а через второй – $\Delta q_2 = q_{12} - q_{11} = C_1 (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)$. При этом сторонние силы источников, как следует из определения ЭДС, совершат работу $\mathbf{A} = \mathscr{E}_1 \, \Delta \mathbf{q}_1 + \mathscr{E}_2 \, \Delta \mathbf{q}_2$, а энергия конденсаторов изменится на величину $\Delta W = C_1 (\tilde{\mathcal{E}}_2^2 - \mathcal{E}_1^2)/2 + C_2 (\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2)/2$.

Если, как это обычно и делается в подобных задачах, считать, что процесс перезарядки конденсаторов протекал достаточно медленно, то можно пренебречь излучением электромагнитной энергии и, следовательно, на основании закона сохратиться в подобательно в подобате

нения энергии можно утверждать, что искомое количество выделившейся в схеме теплоты должно быть равно

$$\Delta Q = A - \Delta W = \frac{(C_1 + C_2)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{2}$$
.

Отметим, что процесс перезарядки будет протекать тем медленнее, чем больше величины сопротивлений в ветвях схемы. Следовательно, полученное решение соответствует максимально возможному количеству теплоты, которое могло выделиться на сопротивлениях схемы при заданных условиях.

III.7. Согласно закону Ома для замкнутой цепи, если пренебрегать сопротивлением соединительных проводов, установившаяся разность потенциалов между клеммами батареи как при разомкнутом, так и при замкнутом ключе, должна быть равна

$$\Delta \phi = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + r}.$$

При этом заряды конденсаторов C_1 и C_2 при разомкнутом ключе (считая, как обычно, что до включения батареи оба конденсатора были разряжены) должны быть одинаковы и равны

$$q_{H} = \Delta \phi \left(\frac{1}{C_{1}} + \frac{1}{C_{2}}\right)^{-1} = \frac{\mathcal{E} C_{1} C_{2} (R_{1} + R_{2})}{(C_{1} + C_{2})(R_{1} + R_{2} + r)}.$$

После замыкания ключа начинается перезаряд конденсаторов, в результате чего разности потенциалов между пластинами конденсаторов должны в установившемся режиме стать равными падениям напряжения на сопротивлениях, параллельно которым в этом случае оказываются подключенными конденсаторы. Отсюда следует, что между пластинами второго конденсатора должна установиться разность потенциалов

$$\Delta\phi_{2\kappa} = \frac{\mathscr{E}\,R_2}{R_1 + R_2 + r}\,. \label{eq:deltaphi}$$

По определению заряд q конденсатора емкостью C и разность потенциалов $\Delta \phi$ между его пластинами связаны соотношением $q = C \Delta \phi$. Вспоминая, что энергия заряженного кон-

денсатора может быть вычислена по формуле $\Delta W = C \Delta \phi^2/2$, с помощью полученных ранее соотношений вычислим искомое изменение энергии конденсатора C_{γ} после замыкания ключа:

$$\Delta W = \frac{C_2 \Delta \phi_{2\kappa}^2}{2} - \frac{q_{\pi}^2}{2C_2} = \frac{\mathcal{E}^2 (R_1 + R_2)^2 C_2}{2(R_1 + R_2 + r)^2} \left[\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 - \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 \right].$$

III.8. Если сопротивление резистора обозначить R, внутреннее сопротивление гальванического элемента — r, а его ЭДС — 6, то, пренебрегая, как это обычно и делается, сопротивлением соединительных проводов, на основании закона Ома для полной цепи можно утверждать, что через источники в первом случае должен протекать ток, равный

$$I = \frac{2 \mathcal{E}}{2 r + R/2},$$

т.к. два одинаковых последовательно соединенных источника по своему действию эквивалентны источнику с вдвое большей ЭДС и с вдвое большим внутренним сопротивлением, а сопротивление двух одинаковых параллельно включенных резисторов равно половине сопротивления одного из них. При этом через каждый резистор должен протекать ток $I_1 = I/2$.

При параллельном соединении одинаковых источников их с точки зрения расчета электрической цепи можно заменить источником с ЭДС, равной ЭДС одного источника, и внутренним сопротивлением, равным половине сопротивления одного источника. Поэтому, вспоминая, что сопротивление двух последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений, можно утверждать (по-прежнему пренебрегая сопротивлением соединительных проводов), что текущий через резистор ток будет равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r/2 + 2R}.$$

Поскольку по условию задачи во втором случае мощность, выделяющаяся на резисторе, в n раз меньше, чем в первом, то согласно закону Джоуля-Ленца и написанным выражениям дол-

жно выполняться соотношение $n = I_1^2/I_2^2$, или

$$\sqrt{n} = \frac{r/2 + 2R}{2r + R/2}.$$

Поэтому искомое отношение сопротивления резистора к внутреннему сопротивлению элемента равно

$$\frac{R}{r} = \frac{4\sqrt{n-1}}{4-\sqrt{n}} = 3.5.$$

III.9. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, как это обычно и делается в подобных задачах, можно утверждать, что разности потенциалов между клеммами гальванических элементов, подключенных к резистору, должны быть одинаковыми. Следовательно, на основании закона Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, можно утверждать, что при заданном соединении элементов должно выполняться соотношение: $𝓔 - I_1 \, r_1 = 𝓔 - I_2 \, r_2$, где $𝓔 − ЭДС элементов, а <math>I_1$ и I_2 − токи, текущие через первый и второй элементы, соответственно. Поскольку перенос зарядов в гальванических элементах осуществляется за счет упорядоченного движения только ионов, то на основании закона Фарадея для электролиза следует считать, что за один и тот же промежуток времени массы растворившегося цинка в элементах должны быть пропорциональны текущим через них токам. Отсюда и из ранее написанного соотношения найдем искомое отношение масс цинка, растворившегося в элементах за один и тот же промежуток времени:

$$m_1/m_2 = I_1/I_2 = r_2/r_1 = 2$$
.

III.10. Под действием силы ${\bf F}$ при заданных условиях стержень должен начать двигаться в горизонтальном направлении, перпендикулярно своей оси. При этом на свободные заряды, перемещающиеся вместе со стержнем со скоростью у перпендикулярно линиям индукции магнитного поля, будет действовать сила Лоренца так, как действовало бы электрическое поле с напряженностью ${\bf E}_{\rm n}={\bf v}\,{\bf B}$, направленной вдоль оси стержня. Поскольку рельсы гладкие, стержень будет сколь-

зить по ним без вращения, и все точки стержня должны двигаться с одинаковыми скоростями. Следовательно, напряженность поля E_π во всех точках стержня должна быть одинаковой. Поэтому действие указанного электрического поля на отрезке стержня длиной L можно охарактеризовать ЭДС $\mathscr E=v\,B\,L$. В результате действия этой ЭДС между пластинами конденсатора должна существовать разность потенциалов $\Delta \phi = \mathscr E$, т.к. сопротивлением всех проводников и контактов по условию задачи следует пренебречь. Сказанное верно в предположении, которое обычно и делается при решении подобных задач, что можно пренебречь магнитным полем, порождаемым током в элементах схемы, по сравнению с внешним магнитным полем. Иными словами, мы пренебрегаем индуктивностью контура, образуемого стержнем, рельсами и конденсатором с проводниками, соединяющими его с рельсами.

При изменении скорости движения стержня разность потенциалов между обкладками конденсатора будет изменяться. Следовательно, должен изменяться и заряд конденсатора $Q = C \ \Delta \phi$. Это означает, что по проводникам течет ток, величину которого можно определить из соотношения

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} C \ B \ L \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = C \ B \ L \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = C \ B \ L \ a(t),$$

где a(t) - ускорение стержня в момент времени t.

Из-за протекания тока по стержню на него будет действовать сила Ампера $\mathbf{F}_{A}=\mathrm{IL}\,\mathbf{B}$, направленная согласно правилу Ленца в сторону, противоположную направлению силы \mathbf{F} , вызывающей появление индукционного тока в рассматриваемом контуре. Если, как обычно, лабораторную систему отсчета, относительно которой заданная плоскость и источник магнитного поля \mathbf{B} покоятся, считать инерциальной, то на основании II закона Ньютона в соответствии со сделанными выше предположениями можно утверждать, что уравнение движения стержня в проекции на направление силы \mathbf{F} должно иметь вид

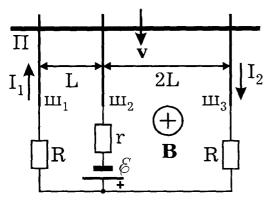
$$m a(t) = F - F_A = F - B^2 L^2 C a(t)$$
.

Из этого уравнения следует, что искомое ускорение стержня должно быть равно

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{m} + \mathbf{B}^2 \, \mathbf{L}^2 \, \mathbf{C}},$$

т.е. не зависит от времени и совпадает с направлением действия силы ${\bf F}$ (вне зависимости от того, направлена эта сила к концу рельсов, где находится конденсатор, или в противоположную сторону).

III.11. При движении перемычки на находящиеся в ней электроны со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Действие этой силы с точки зрения расчета токов, как известно,



эквивалентно действию источника с ЭДС \mathcal{E}_i , равной скорости изменения потока $d\Phi_i/dt$, сцепленного с рассматриваемым контуром. Если, как это обычно и делается, пренебречь магнитным полем, порождаемым током в проводниках схемы, по сравнению с внешним магнитным по-

лем, то ЭДС индукции в контуре, содержащем шины $\mathbf{m_1}$ и $\mathbf{m_2}$, при заданном характере движения перемычки со скоростью у должна быть равна $\mathcal{E}_1 = \mathrm{vBL}$, а во втором — в два раза больше, т.к. расстояние между шинами $\mathbf{m_3}$ и $\mathbf{m_2}$ вдвое превышает расстояние между шинами первого контура, а внешнее магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости шин и однородно. Вместе с тем, согласно закону Ома для полной цепи, ток в замкнутом контуре равен отношению алгебраической суммы ЭДС, действующих в нем, к полному сопротивлению контура. Отсюда следует, что ток в средней шине будет равен нулю, если по шинам $\mathbf{m_1}$ и $\mathbf{m_3}$ будут течь равные токи так, как показано на рисунке. Следовательно,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}}{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}}{\mathbf{R}} \,,$$

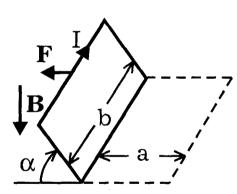
причем скорость перемычки должна быть направлена к источнику. Отсюда следует, что искомая скорость перемычки равна

$$v = \frac{2\mathcal{E}}{BL}$$

и направлена к источнику в схеме, т.е. так, как указано на рисунке стрелкой.

III.12. При повороте рамки во внешнем магнитном поле в ней возникает индукционный ток. Поскольку в условии задачи сказано, что следует пренебречь индуктивностью рамки, то следует пренебречь и магнит-

ным полем токов в рамке. Учитывая, что рамка изготовлена из тонкого проводника, будем пренебрегать и магнитным потоком, пронизывающим этот проводник. Тогда магнитный поток, сцепленный с рамкой, когда она повернулась на угол с от исходного положения, в соответствии с обозначениями, приведенными на



рисунке, будет равен $\Phi = B$ b a $\cos \alpha$, а величина действующей в рамке в этот момент времени $t = \alpha/\omega$ ЭДС по закону электромагнитной индукции Фарадея должна быть равна

$$\mathscr{E}(t) = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| B \text{ b a } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos \omega \left(t + \Delta t \right) - \cos \omega \, t}{\Delta t} \right| = \left| - \, B \text{ b a } \omega \sin \omega t \right|$$

Поскольку индуктивностью рамки мы пренебрегли, то согласно закону Ома для полной цепи по рамке с сопротивлением R в этот момент должен течь ток $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$, создающий в соответствии с правилом Ленца момент, препятствующий вращению рамки. Согласно закону Ампера на верхнюю сторону рамки

действует сила $F(t) = I(t)\, B\, b$, направленная перпендикулярно как вектору индукции B, так и указанной стороне рамки. Момент этой силы относительно оси поворота, совпадающей по условию с нижней стороной рамки, равен

$$M(t) = F(t) a \sin \alpha(t) = \omega (B b a \sin \omega t)^2 / R$$
.

Учитывая, что $0 \le \omega t \le \pi$, из предыдущего выражения получим, что максимальная величина тормозящего момента будет тогда, когда рамка повернется на угол $\alpha = \pi/2$, причем $M_{max} = M = \omega (B \, b \, a)^2 / R$.

Во время поворота величина тока в рамке не остается постоянной, хотя его направление при заданном повороте и остается неизменным. Вычислить протекший по рамке заряд за время ее поворота можно, вспоминая, что по определению сила тока в момент времени t

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$I(t) = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \right|,$$

из сопоставления двух последних выражений получим:

$$Q = Q(\pi/\omega) - Q(0) = |\Phi(\pi/\omega) - \Phi(0)|/R = 2 B b a/R$$
.

Таким образом, искомое сопротивление рамки при выполнении сделанных выше предположений должно быть равно:

$$R = \frac{4 M}{\omega \Omega^2}.$$

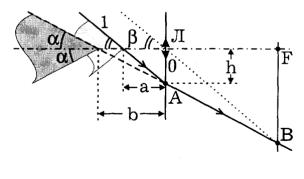
IV. ОПТИКА

IV.1. Будем решать эту задачу, предполагая, как обычно, что лупу можно считать тонкой линзой, и справедливы правила построения изображения в параксиальном приближении. В этом приближении, как известно, изображение получается стигматичным, т.е. все лучи, исходящие из какой-либо точки предмета, после преломления пересекаются в одной точке. Поэтому для

построения изображения можно использовать даже те лучи, которые из-за ограниченности диаметра линзы реально не проходят через нее. Принципиально та или иная точка предмета не может наблюдаться, если к наблюдателю от данной точки не попадает ни одного луча.

Первый вопрос, который возникает при решении этой задачи, заключается в том, какова реальная форма острия иглы. Ответить на этот вопрос можно, воспользовавшись обратимостью хода световых лучей. На основании этого закона найдем форму острия по его изображению. Поскольку конец острия находится от лупы на расстоянии, меньшем фокусного, то его изображение будет мнимым и будет располагаться по ту же сторону от лупы, где находится острие. Если начать строить отдельные точки поверхности острия с помощью лучей, реально проходящих через лупу, то получить правильное представление о форме острия будет крайне сложно из-за того, что даже незначительные ошибки при проведении лучей, направления распространения которых отличаются незначительно, могут привести к значительным погрешностям нахождения точки пересечения этих лучей. Чтобы избежать этой трудности, рассмотрим ход луча, совпадающего с одной из образующих конуса изображения острия. Ясно, что соответствующие точки поверхности острия дол-

жны находиться на этом луче. Следует считать, что игла находится в однородной среде. Поэтому указанный луч должен совпадать с некоторой прямой, и, следовательно, рассматриваемый конец острия имеет вид конуса.



Пусть указанный луч пересекает главную плоскость лупы в точке A, а ее фокальную плоскость – в точке B, как показано на рисунке. Поскольку в параксиальном приближении в фокаль-

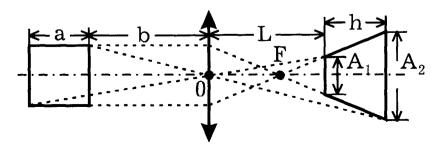
ной плоскости должны пересекаться все лучи, падающие на линзу параллельным пучком, и луч, идущий через оптический центр линзы (точка 0), не преломляется, то интересующий нас луч должен совпадать с лучом 1. Пусть угол наклона этого луча к главной оптической оси лупы равен b. Тогда из условия задачи и приведенного рисунка следует, что тангенсы половин углов при вершине иглы и ее изображения удовлетворяют соотношениям: $tg \alpha = h/b$ и $tg \beta = h/a$, где h- расстояние от оптического центра лупы до точки падения на нее указанного выше луча, а b- удаление вершины изображения острия иглы от линзы. Поскольку получаемое изображение является мнимым, то согласно формуле тонкой линзы в параксиальном приближении должно быть выполнено соотношение $a^{-1}-b^{-1}=F^{-1}$. Следовательно,

$$tg\beta = \frac{Ftg\alpha}{F-a}$$
,

а потому искомый угол можно найти из соотношения:

$$2\beta = 2 \arctan \frac{F \operatorname{tg} \alpha}{F - a}$$
.

IV.2. Построение изображения квадрата, показанное на рисунке, выполнено в предположении, что линза является тонкой, а световые пучки, с помощью которых формируется изображение, являются достаточно узкими, т.е. справедливо так называемое параксиальное приближение. В этом случае лучи, падающие на линзу параллельно ее главной оптической оси, после преломления проходят через главный фокус F, а лучи, идущие через оптический центр линзы (точка 0), проходят через линзу



без преломления. Поэтому изображение квадрата, все точки которого находятся от линзы на расстояниях, больших фокусного, будет действительным и таким, как показано на рисунке, т.е. будет иметь вид равнобочной трапеции.

Согласно формуле тонкой линзы, справедливой при указанных предположениях, расстояния от линзы до изображений наиболее удаленной и ближайшей к ней сторон квадрата должны быть равны:

$$L = \frac{(a+b)F}{a+b-F} \quad \text{M} \quad L+h = \frac{bF}{b-F},$$

где h - высота трапеции.

Определим теперь длины оснований трапеции A_1 и A_2 . Из формулы для поперечного увеличения (либо непосредственно из подобия соответствующих треугольников на приведенном рисунке) следует, что

$$A_1 = \frac{a\,L}{a+b} = \frac{a\,F}{a+b-F} \quad \text{if} \quad A_2 = \frac{a\,(L+h)}{b} = \frac{a\,F}{b-F} \,.$$

Поскольку площадь трапеции равна половине произведения суммы длин оснований на высоту, то искомая площадь изображения квадрата при соблюдении указанных выше предположений должна быть равна

$$s = \frac{a^2 F^3 (a + 2b - 2F)}{2(b - F)^2 (a + b - F)^2} \approx 3 \text{ mm}^2.$$

IV.3. Пусть расстояние между предметом и линзой равно A, а между линзой и изображением предмета — В. Поскольку иное в задаче не оговорено, будем считать линзу тонкой, а размеры предмета и его расположение такими, что справедливо параксиальное приближение. Тогда согласно формуле тонкой линзы указанные расстояния и оптическая сила линзы D должны удовлетворять соотношению

$$D = A^{-1} + B^{-1},$$

причем по условию задачи с учетом одного из указанных предположений должно соблюдаться равенство

$$L = A + B$$

Из этих двух соотношений следует, что на экране четкое изображение предмета будет и в том случае, если предмет поместить на расстоянии В перед линзой, а расстояние между линзой и экраном сделать, естественно, равным А. С другой стороны, отношение размера изображения, даваемого линзой, к реальному размеру предмета — поперечный коэффициент увеличения — в указанных случаях будет равен

$$k_1 = B/A$$
 или $k_2 = A/B$.

По условию задачи $n=k_1/k_2$. Из написанных соотношений следует, что при заданных условиях и сделанных предположениях искомая оптическая сила линзы должна быть равна

$$D = (1 + \sqrt{n})^2 / (L \sqrt{n}) = 5 \, \text{дптр}.$$

IV.4. На рис. 1 схематически показано взаимное положение источника S, одной из частей линзы (J_1) после ее сдвига и двух крайних лучей, выходящих из этой части линзы. В параксиальном приближении можно утверждать, что все выходящие из части J_1 линзы лучи должны быть параллельны побочной оптической оси S0, т.к. источник по условию расположен в фокальной плоскости линзы. Угол наклона α этой оптической оси к прямой SC, проходящей через источник перпендикулярно главной плоскости линзы, можно определить из соотношения: $tg\alpha = L/(2F)$. В силу симметрии расположения частей линзы ясно, что выходящий из второй ее части пучок так же будет

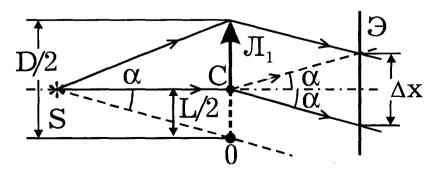


Рис. 1.

параллельным, но отклонится на угол α в другую сторону от прямой SC. На рис. 1 один из крайних лучей этого пучка изображен пунктирной линией со стрелкой.

На рис. 2 показаны по два луча, проходящих через первую и вторую части линзы, причем одна пара этих лучей пересекается в точке экрана «0», через которую проходит продолжение прямой SC. Из симметрии опыта следует, что эти лучи проходят одинаковые расстояния от точечного источника S до точки пересечения. Поэтому в точке «0» должен наблюдаться интерференционный максимум нулевого порядка. В точке «1» будет наблюдаться максимум первого порядка, если разность хода попадающих в эту точку лу-

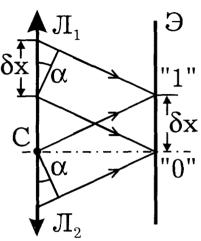


Рис. 2.

чей будет равна длине волны λ света, испускаемого источником S. Если расстояние между точками «0» и «1» обозначить δx , то учитывая, что направления луча и нормали к волновому фронту в изотропной среде совпадают в каждой точке, можно утверждать, что $\delta x = \lambda/(2\sin\alpha)$ и не зависит от расстояния между линзой и экраном. Более того, все расстояния между соседними интерференционными максимумами в данном опыте должны быть одинаковыми.

Поскольку интерференционная картина может наблюдаться только в области перекрытия пучков, то размер этой картины будет наибольшим, если экран Θ расположить так, как показано на рис. 1. Из этого рисунка следует, что максимальный размер области перекрытия пучков, проходящих через обе части линзы, $\Delta x = (D-L)/2$. Следовательно, искомое максимальное число интерференционных полос, которые могут наблюдаться в данном опыте, должно быть равно

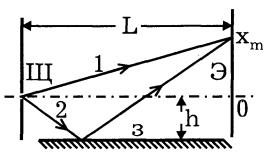
$$N_{max} = E\left\{\frac{(D-L)\sin\alpha}{\lambda}\right\} + 1,$$

где символ E означает, что берется целая часть от выражения, стоящего в фигурных скобках. Учитывая, что по условию L << D < F , из полученного ранее соотношения следует, что tg $\alpha <<$ 1. Поэтому следует считать, что при измерении угла а в радианной мере tg $\alpha \approx \alpha \approx \sin \alpha$, а максимальное число наблюдаемых интерференционных полос можно определить по формуле:

$$N_{max} \approx E \left\{ \frac{DL}{2F\lambda} \right\},$$

если предполагать, что ширина L вырезанной полоски значительно превышает длину волны света λ (~0,5 мкм), испускаемого источником.

 $IV.5.\ По$ условию щель является достаточно узкой. Поэтому можно считать, что освещаемая щель, подобно светящейся нити, испускает свет, интенсивность которого не зависит от направления в области, находящейся за экраном со щелью. Рассмотрим два луча, выходящие из одной точки и идущие в плоскости, перпендикулярной щели, как показано на рисунке. Пусть первый из этих лучей попадает непосредственно в точку экрана, находящуюся на расстоянии $h+x_m$ от плоскости зеркала, а вто-



рой луч попадает в указанную точку после отражения от зеркала. Если в указанной точке наблюдается интерференционный максимум и отраженная волна совпадает по фазе с падающей, то оптическая разность хода этих лучей должна быть кратна целому числу длин волн l излучения источника. Если же при отражении происходит потеря полуволны, то в данной точке будет наблюдаться интерференционный максимум при разности хода указанных лучей, кратной нечетному числу полуволн, испускаемых источником. Из сказанного ясно, что ширина интерференционной полосы должна быть одинаковой в обоих случаях. Для определенности будем считать, что при отражении фаза волны не изменяется. Поскольку в условии задачи не оговаривается, каким веществом заполнено пространство между экраном со щелью и экраном, на котором наблюдается интерференционная картина, следует считать, что это вещество является однородным изотропным и его абсолютный показатель преломления равен единице. Поэтому указанная оптическая разность хода будет равна геометрической разности длин отрезков лучей от щели до точки наблюдения. Отсюда, воспользовавшись теоремой Пифагора, получим:

$$m\,\lambda = \sqrt{L^2 + (2\,h + x_m)^2} \, - \sqrt{L^2 + x_m^2} \; , \label{eq:lambda}$$

где m — целое число, называемое порядком интерференции. По условию h << L . Поскольку в условии задачи не указаны значения m (хотя бы по порядку величины) при которых ширина интерференционной полосы равна Δx , будем, как обычно, считать, что эти значения не очень велики. Тогда следует считать, что и x_m << L . При этих допущениях, воспользовавшись формулой приближенного вычисления $\sqrt{1+\delta}\approx 1+\delta/2$, справедливой при δ << 1, можно преобразовать написанное выше уравнение следующим образом:

$$\frac{m\,\lambda}{L} = \sqrt{1 + \left(\frac{2\,h + x_m}{L}\right)^2} \, - \sqrt{1 + \left(\frac{x_m}{L}\right)^2} \, \approx \frac{2\,h\,(h + x_m)}{L^2} \,. \label{eq:lambda}$$

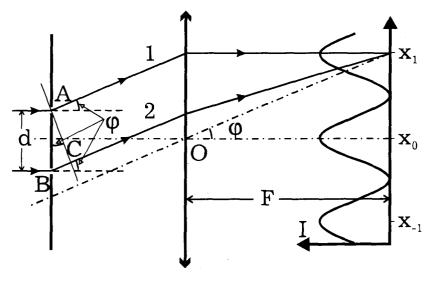
Отсюда, учитывая, что $\Delta x = x_m - x_{m-1}$, определим искомую длину волны:

$$\lambda = \frac{2 h \Delta x}{L} = 0.5 \text{ MKM}.$$

Отметим, что рассмотренную схему в оптике называют интерференционной схемой с зеркалом Ллойда.

IV.6. Наблюдаемые на экране за линзой чередующиеся светлые и темные полосы — результат интерференции световых пучков, образующихся в результате дифракции света на решетке. Действительно, согласно теории Максвелла свет можно рассматривать, как электромагнитные волны, а прозрачную щель решетки можно заменить совокупностью тонких светящихся нитей, параллельных краям щели. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждая такая нить излучает когерентные цилиндрические волны с одинаковой фазой, так как волновой фронт первичного светового пучка по условию задачи совпадает с плоскостью решетки. То, что параллельный пучок лучей, проходя через собирающую линзу, фокусируется в одном из ее побочных фокусов, с точки зрения волновой теории означает, что все приходящие сюда световые лучи имеют одинаковую фазу, и поэтому здесь наблюдается интерференционный максимум.

На рисунке показаны две соседние щели дифракционной решетки, линза и распределение интенсивности I света в фокальной плоскости линзы, которое наблюдалось бы, если бы решетка состояла всего из двух достаточно узких щелей. При увеличении числа щелей максимумы на экране постепенно становятся все более и более узкими. Если же увеличивать размер



щели, то некоторые из максимумов могут пропасть. Условие гашения максимума, который мог бы наблюдаться при достаточно малой ширине щели под углом α к оси падающего нормально на решетку параллельного пучка света, можно найти, приравнивая разность хода крайних лучей, проходящих через одну щель, целому числу длин волн падающего света, т.е.

$$b \sin \alpha = m \lambda$$
,

где b — ширина щели, а m — произвольное целое число. Поскольку в условии задачи ничего не говорится о ширине щелей решетки, будем, как это обычно и делается, считать, что щели достаточно узкие, и гашения максимумов низких порядков не происходит. При таком предположении в побочном фокусе \mathbf{x}_1 будет наблюдаться максимум первого порядка, если разность хода BC между лучами 1 и 2, идущими от участков соседних щелей, находящихся на расстоянии d, равна длине падающей волны λ , т.е. λ = d sin ϕ , где ϕ — угол между главной $O\mathbf{x}_0$ и побочной $O\mathbf{x}_0$ оптическими осями линзы.

С другой стороны, согласно Планку, монохроматический свет можно представить как поток фотонов, каждый из которых несет энергию $W=h\,\nu$, где $h\approx 6.63\cdot 10^{-34}\, \text{Дж}\cdot c$ — постоянная Планка, а ν — частота колебаний в световом пучке. Поскольку иное в задаче не оговорено, будем считать, что эксперимент проводится в воздухе, и поэтому скорость распространения света $c\approx 3\cdot 10^8\,\text{м/c}$. Учитывая, что $c=\lambda\,\nu$, из написанных соотношений можно определить угол ϕ , соответствующий направлению на первый дифракционный максимум:

$$\sin \varphi = \lambda/d = h c/(W d) \approx 7.8 \cdot 10^{-3}$$
,

а затем и искомое расстояние между максимумами первого порядка

$$\Delta x = 2 F tg \phi \approx 2 F h c/(W d) \approx 0.78 mm$$
.

При вычислениях было учтено, что при $\phi << 1 \sin \phi \approx \phi \approx t g \, \phi$, если угол измерять в радианной мере.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА

| ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ | ర |
|-----------------------------------|----|
| ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА | 11 |
| ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА | |
| УСЛОВИЯ ЗАДАЧ | 12 |
| І. МЕХАНИКА | 12 |
| II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА | 17 |
| III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ | 19 |
| IV. ОПТИКА | 23 |
| РЕШЕНИЯ ЗАДАЧРЕШЕН | 24 |
| I. МЕХАНИКА | 24 |
| АТОПЕТ И АЗИКИФ КАНЧКІЦУЗІСОМ | 43 |