## В.А.Алешкевич, Ю.А.Кокшаров, Г.А.Миронова, В.А.Погожев, А.В.Селиверстов. М.В.Семенов

# ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ. Выпуск 8 Москва, Изд-во физического факультета МГУ, 1999—76 с.

Сборник содержит программу вступительных экзаменов по физике и задачи, предлагавшиеся на физико-математической олимпиаде (в марте и мае) и на вступительном экзамене (в начале июля) по физике на физическом факультете МГУ в 1998 году. Все задачи даны с подробными решениями. Особое внимание уделено обоснованию применения тех или иных законов, допущений и анализу

полученного ответа.

Для учащихся старших классов, абитуриентов, учителей и п	реподавателей,
ведущих занятия со школьниками.	
СОДЕРЖАНИЕ	
Условия задач	10
І. Механика	10
II. Молекулярная физика и термодинамика	14
III. Электричество и магнетизм	17
IV. Оптика	21
Решения задач	22
І. Механика	22
II. Молекулярная физика и термодинамика	42
III. Электричество и магнетизм	53
IV. Оптика	67

#### программа вступительного экзамена по физике

#### ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая программа составлена на основе программы средней общеобразовательной школы. По сравнению с программами вступительных экзаменов в вузы прошлых лет данная программа более конкретизирована, отдельные вопросы сформулированы в более развернутом виде. Это облегчит абитуриенту подготовку, поскольку формулировки большинства пунктов программы по существу являются развернутым планом ответа. В программу включено несколько вопросов (выделены курсивом), которые рассмотрены в школьных учебниках, изданных в 1978-1989 гг. и в дополнительной литературе, указанной в конце программы. Теоретические вопросы билетов вступительных экзаменов формируются из вопросов данной программы.

При подготовке основное внимание следует уделить выявлению сущности физических законов и явлений, умению истолковать физический смысл величин и понятий, а также умению применять теоретический материал к решению задач. Необходимо уметь пользоваться при вычислениях системой СИ и знать внесистемные единицы, указанные в программе.

Глубина ответов на пункты программы определяется содержанием опубликованных учебников для средней школы, указанных в конце настоящей программы.

#### І. МЕХАНИКА

#### І.1. Кинематика

Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Системы отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь.

Скорость. Сложение скоростей.

Ускорение.

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.

Криволинейное движение.

Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.

Поступательное и вращательное движение твердого тела.

### І.2. Динамика

Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна.

Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.

Инертность тел. Масса. Плотность.

Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы.

Третий закон Ньютона.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная и способы ее измерения. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука, Модуль Юнга.

Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Центр масс. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая коємическая скорость.

### І.3. Законы сохранения в механике

Импульс (количество движения) материальной точки. Импульс силы. Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы измерения работы и мощности.

Кинетическая энергия. Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил.

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тел вблизи поверхности Земли. Потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Закон сохранения механической энергии.

### І.4. Статика твердого тела

Сложение сил. Момент силы относительно оси врашения. Правило тмоментов.

Условия равновесия тела. Центр тяжести тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел.

#### І.5. Механика жидкостей и газов

Давление. Единицы измерения давления: паскаль, мм рт.ст.

Закон Паскаля. Гидравлический пресс. Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Сообщающиеся сосуды.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Изменение атмосферного давления с высотой.

Закон Архимеда для тел, погруженных в жидкость или газ. Плавание тел.

#### І.б. Механические колебания и волны. Звук

Понятие о колебательном движении. Период и частота колебаний.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Превращения энергии при гармонических колебаниях. Затухающие колебания.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Длина волны. Скорость распространения волн. Фронт волны.

Интерференция волн. Принцип Гюйгенса. Дифракция волн. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость и высота звука.

## II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

## II.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. Броуновское движение. Масса и размер молекул. Моль вещества. Постоянная Авогадро. Характер движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах.

Тепловое равновесие. Температура и ее физический смысл. Шкала температур Цельсия.

Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Постоянная Больцмана. Абсолютная температурная шкала.

Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Изотермический, изохорный и изобарный процессы.

### II.2. Элементы термодинамики

Термодинамическая система. Внутренняя энергия системы. Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Теплоемкость тела. Понятие об адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам. Расчет работы газа с помощью РV-диаграмм. Теплоемкость идеального одноатомного газа при изохорном и изобарном процессах.

Необратимость процессов в природе. Второй закон термодинамики. Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

## II.3. Изменения агрегатного состояния вещества

Парообразование. Испарение, кипение. Удельная теплота парообразования. Насыщенный пар. Зависимость давления и плотности насыщенного пара от температуры. Зависимость температуры кипения от давления. Критическая температура.

Влажность. Относительная влажность.

Кристаллическое и аморфное состояния вещества. Удельная теплота плавления.

Уравнение теплового баланса.

#### ІІІ. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## III.1. Электростатика

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Проводники и диэлектрики. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие электрически заряженных тел. Электроскоп. Точечный заряд. Закон Кулона.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Однородное электрическое поле. Напряженность электростатического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Поле заряженной проводящей сферы.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Потенциал поля точечного заряда. Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности.

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Электроемкость. Конденсаторы. Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. Послеоовательное и параллельное соединение конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Энергия электрического поля.

#### III.2. Постоянный ток

Электрический ток. Сила тока. Условия существования тока в цепи. Электродвижущая сила (ЭДС). Напряжение.

Закон Ома для участка цепи. Омическое сопротивление проводника. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Последовательное и параллельное соединение проводников.

Закон Ома для полной цепи. Источники тока, их соединение. Измерение тока и разности потенциалов в цепи.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электрический ток в металлах.

Электрический ток в электролитах. Закон электролиза (закон Фарадея).

Электрический ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Электронная лампа - диод. Электронно-лучевая трубка.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. Р-п-переход и его свойства. Полупроводниковый диод. Транзистор. Тер-мистор и фоторезистор.

Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Понятие о плазме.

#### III.3. Магнетизм

Магнитное поле. Действие магнитного поля на рамку с током. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Линии магнитной индукции. Картины магнитного поля прямого тока и соленоида.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Ферромагнетики.

## III.4. Электромагнитная индукция ,

Магнитный поток. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля.

### III.5. Электромагнитные колебания и волны

Переменный электрический ток. Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Трансформатор. Передача электрической энергии.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращения энергии в колебательном контуре. Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Затухающие электромагнитные колебания.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Резонанс в электрических цепях.

Открытый колебательный контур. Опыты Герца. Электромагнитные волны. Их свойства. Шкала электромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн. Изобретение радио Поповым. Простейший радиоприемник.

#### IV. ОПТИКА

## IV.1. Геометрическая оптика

Развитие взглядов на природу света. Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча.

Законы отражения света. Плоское зеркало.

Законы преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления. Ход лучей в призме. Явление полного (внутреннего) отражения.

Тонкие линзы. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Формула линзы. Увеличение даваемое линзами.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз.

#### IV.2. Элементы физической оптики

Волновые свойства света. Поляризация света. Электромагнитная природа света.

Скорость света в однородной среде. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Интерференция света. Когерентные источники. Условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Дифракция света. Опыт Юнга. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционная решетка.

Корпускулярные свойства света. Постоянная Планка. Фотоэффект. Законы фотоэффекта. Фотон. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света. Постулаты Эйнштейна. Связь между массой и энергией.

#### V. ATOM И АТОМНОЕ ЯЛРО

Опыты Резерфорда по рассеянию о-частиц. Планетарная модель атома. Квантовые поступаты Бора. Испускание и поглощение света атомом. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

Экспериментальные методы регистрации заряжечных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, пузырьковая камера, фотоэмульсионный метод.

Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер. Понятие о ядерных реакциях. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. Цепные ядерные реакции. Термоядерная реакция.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации.

#### ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика; Учеб. для 7 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Физика 6 тех же авторов предыдущих лет издания).
- 2. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика; Учеб. для 8 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Физика 7 тех же авторов предыдущих лет издания).
- 3. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика; Учеб. для 9 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1990 (или Физика 8 тех же авторов предыдущих лет издания).

- 4. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика; Учеб. для 10 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1990 (или Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика 9. М.; Просвещение, 1980 и последующие издания).
- 5. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика; Учеб. для 11 кл. сред. шк. М.; Просвещение, 1991 (или Буховцев Б.Б., Мякишев Г.Я. Физика 10. М.; Просвещение, 1974 и последующие издания).
- 6. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. М.; Наука, 1978 и последующие издания.

## дополнительная литература

- 1. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. Т. 1-3. М.; Высшая школа, 1975 и последующие издания.
- 2. Яворский Б.М., Селезнев Ю.Д. Справочное руководство по физике. М.; Наука, 1975 и последующие издания.
- 3. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. М.; Наука, 1974 и последующие излания.
- 4. Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М., Калачевский Н.Н., Косоуров Г.Н., Мазанько И.П. Сборник задач по физике. М.; Наука, 1971 и последующие издания.
- 5. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. М.; Высшая школа, 1973 и последующие издания.

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

#### І. МЕХАНИКА

I.1. Стержень, поперечное сечение которого показано на рисунке, катится по плоскости без проскальзывания. Найти отношение скоростей точек А и В, находящихся от оси стержня на расстоянии в п раз меньшем его радиуса, в тот момент, когда они занимают положения, указанные на рисунке.

1.2. У мальчика, сидящего на расстоянии R от оси на вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  карусели, выпали из кармана с интервалом  $\tau$  два камушка. На каком расстоянии друг от друга ударятся о землю эти камушки, если высота, с которой они упали, равна h?



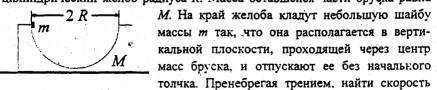
I.3. По гладкой плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, скользит клин массы M, на горизонтальной плоскости которого находится кубик массы m. При каком коэффициенте трения  $\mu$  кубика о клин кубик не будет

1.4. На горизонтальной плоскости стоит гладкий клин массы M с углом  $\alpha$  при основании. На клин положили брусок массы m, к которому прикреплена.

легкая нерастяжимая нить, проходящая через зажим, закрепленный на клине. С каким ус-

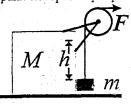
корением может двигаться клин после того, как брусок отпустят без начальной скорости, если максимальная сила трения нити о зажим равна F?

- I.5. Снаряд, вылетев из пушки со скоростью  $\upsilon$  под углом  $\alpha$  к горизонту, разорвался на две равные части в верхней точке траектории. Первая часть полетела вертикально вверх, а скорость второй части оказалась в n раз больше скорости первой. Найти расстояние между осколками через время  $\tau$  после взрыва, если к этому моменту еще ни один осколок не долетел до земли.
- I.6. На горизонтальном столе лежит небольшая шайба. После первого удара шайба остановилась, пройдя путь  $s_1=36\,\mathrm{cm}$ . Затем по шайбе был нанесен второй удар, после которого шайба переместилась на расстояние  $s_2=49\,\mathrm{cm}$ . На какое расстояние переместилась бы шайба, если по ней были бы одновременно нанесены оба удара так, что угол между направлениями ударов был бы равен  $\alpha=60^\circ$ ?
- I.7. Маленький шарик влетает со скоростью v в жесткую квадратную рамку, лежащую на горизонтальной плоскости, через небольшую шель в центре одной стороны и ударяется о другую сторону под углом 45°. Найти направление и величину скорости шарика после окончания всех соударений с рамкой. Удары считать абсолютно упругими, масса рамки равна массе шарика, центр масс рамки совпадает с ее геометрическим центром. Трения нет.
- I.8. В однородном бруске, стоящем на горизонтальном столе, вырезан цилиндрический желоб радиуса R. Масса оставшейся части бруска равна



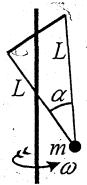
шайбы относительно бруска в нижней точке ее траектории.

I.9. На горизонтальной плоскости стоит кубик массы M, к верхней грани которого прикреплен легкий блок. Через блок перекинута невесомая



нерастяжимая нить, на конце которой закреплен груз массы m, касающийся вертикальной грани кубика. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз на высоту h, прикладывая к нити горизонтальную силу F? Считать, что трения нет, а кубик движется поступательно.

\* I.10.На внутренней поверхности вращающейся вокруг вертикальной оси кснической воронки лежит небольшая шайба. Коэффициент трения шайбы о поверхность воронки равен  $\mu$ . Найти угловую скорость вращения воронки, если угол при ее вершине равен  $2\alpha$ , а шайба находится на высоте h над вершиной воронки.



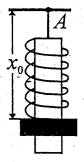
- I.11. Щарик массы m прикреплен двумя невесомыми нерастяжимыми нитями длиной L каждая к горизонтальной штанге, симметрично закрепленной на вертикальной оси, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ . Угол между нитями равен  $\alpha$ . Найти силы натяжения нитей.
- 1.12. Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли так, что все время находится на прямой, соединяющей Землю и Луну, на таком расстоянии, что действие их гравитационных сил на корабль уравновешено. Найти вес космонавта в корабле, если масса кос-

монавта равна m, отношение масс Земли и Луны равно k, радиус орбиты Луны в n раз больше радиуса Земли, а ускорение свободного падения у поверхности Земли равно g.

 $\checkmark$  I.13. Из листовой резины склеили трубку радиуса r и, заткнув один конец, стали надувать ее воздухом. Когда давление внутри трубки превысило

атмосферное на величину  $\Delta p$ , ее радиус увеличился на  $\Delta r$ . Найти период малых вертикальных колебаний груза массы m, подвешенного на полоске этой резины длиной L и шириной b. Считать, что при деформациях резина подчиняется закону Гука, а ее масса значительно меньше m.

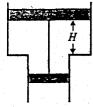
- I.14. К бруску массы m, лежащему на горизонтальной плоскости, прикреплена легкая пружина жесткости k, второй конец которой закреплен так, что пружина не деформирована, а ее ось горизонтальна и проходит через центр масс бруска. Брусок смещают вдоль оси пружины на расстояние  $\Delta L$  и отпускают без начальной скорости. Найти максимальную скорость бруска, если его коэффициент трения о плоскость равен  $\mu$ .
- I.15. После подвешивания грузика к невесомой пружине ее длина стала равна L. Найти длину  $L_0$  пружины в недеформированном состоянии, если период малых вертикальных колебаний грузика на этой пружине в n=3 раза меньше периода его малых колебаний в горизонтальном направлении.



- I.16. К верхнему торцу тяжелого стержня, подвешенного на нити, совпадающей с осью стержня, на невесомой пружине прикреплена легкая муфта. Верхний торец муфты находится на расстоянии  $x_0$  от точки A подвеса стержня, а пружина деформирована на величину  $\delta x$ , существенно меньшую ее длины в недеформированном состоянии. В некоторый момент (t=0) нить обрывается. Пренебрегая трением, найти закон движения муфты относительно точки A для последующих моментов времени.
- I.17. Водитель автомобиля, движущегося со скоростью  $\upsilon$  = 120 км/ч, подает звуковой сигнал. Во сколько раз изменится частота звука, воспринимаемая стоящим у дороги пешеходом, после того как автомобиль проедет мимо него? Скорость звука в воздухе равна c = 340 м/с.

# II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. В расположенной вертикально открытой с двух концов гладкой трубке находятся два тяжелых поршия, соединенные нитью, как показано



на рисунке. Между поршнями находится моль гелия. Общая масса поршней с нитью равна M, а площадь поперечного сечения верхнего поршня на  $\Delta S$  больше площади нижнего. На сколько должна измениться температура гелия, чтобы верхний поршень опустился на расстояние h < H, если атмосферное давление равно  $p_0$ ?

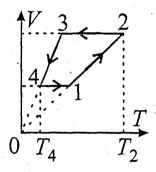
- II.2. Какое количество теплоты необходимо, чтобы при постоянном давлении p=1 атм перевести m=36 г воды, имеющей температуру  $t_1=20$ °C, в состояние с температурой  $t_2=120$ °C? При указанном процессе удельная теплоемкость воды c=4,2 Дж/(г·К), удельная теплота парообразования L=2,26 кДж/(г·К), а внутренняя энергия моля водяного пара в n=2 раза больше, чем внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа при той же температуре.
- 11.3. Влажную вату для просушки положили под колокол вакуумного насоса, производительность которого равна V=6 л/мин. Вскоре после начала откачки давление под колоколом упало и оставалось равным p=6,5 мм рт.ст. в течение  $\tau=20$  мин, а затем вновь начало резко падать. Считая температуру под колоколом постоянной и равной t=5°C, найти массу воды, находившейся в вате.
  - II.4. Объем влажного воздуха, находящегося под поршнем в цилиндре

при температуре  $T_1$ , изотермически уменьшают до такой величины  $V_1$ , что на стенках цилиндра появляется роса. Затем содержимое цилиндра медленно нагревают до температуры  $T_2$ , одновременно изменяя его объем до величины  $V_2$ . Найти относительную влажность воздуха в конечном состоянии, если давления насыщенных паров при начальной и конечной температурах равны  $p_{\rm H1}$  и  $p_{\rm H2}$ , соответственно.

- II.5. Находящийся в цилиндре под поршнем при температуре  $t_1 = 150$ °C пар изобарически охлаждают до некоторой температуры  $t_2$ . При этом  $n^{\frac{34}{2}}$  часть (n = 0,25) массы пара конденсируется, а объем вещества уменьшается на k = 40%. Найти температуру  $t_2$ , пренебрегая объемом сконденсировавшегося вещества.
- II.6. С молем гелия проводят циклический процесс, состоящий из четырех участков. На первом и втором участках газ охлаждают так, что его плотность остается неизменной на первом участке и увеличивается обратно пропорционально температуре на втором. Затем газ возвращают в исходное состояние, нагревая его сначала при неизменной плотности, а затем так, что его плотность изменяется обратно пропорционально температуре. Найти количество теплоты, полученной газом на последнем участке, если на втором участке его температура уменьшилась в k раз, а в исходном состоянии была равна  $T_1$ .
- II.7 Температуру моля идеального газа уменьшают в k раз без изменения его плотности. Затем температуру газа уменьшают так, что его плотность возрастает обратно пропорционально температуре в m раз. После нагревания при неизменной плотности газ возвращают в исходное состояние, нагревая его так, что плотность газа уменьшается обратно пропорцио-

нально температуре. Найти работу газа за цикл, если в исходном состоянии абсолютная температура была равна  $T_1$ .

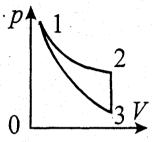
II.8. Гладкий теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен на две части теплопроводящим подвижным поршнем, ось которого расположена горизонтально. Первую часть сосуда заполнили гелием при температуре  $T_1$ , а вторую – аргоном при температуре  $T_2$ . При этом объем гелия оказался равным  $V_1$ , а аргона –  $V_2$ . При выравнивании температур поршень постепенно смещался, и когда температуры газов стали равными, объем гелия стал равным  $V_2$ . Пренебрегая теплоемкостью поршня и сосуда, определить конечную температуру газов.



II.9. Объем V и температуру T некоторого количества идеального одноатомного газа изменяют циклически в соответствии с VT-диаграммой, показанной на рисунке. Найти КПД этого цикла, если отношение тангенсов углов наклона прямых 3-4 и 1-2 к оси температур равно n, а отношение температур газа в состояниях 2 и 4 равно 3 n.

II.10. Сначала температуру одного моля идеального одноатомного газа изохорически увеличивают до некоторого значения. Затем его температуру увеличивают пропорционально объему по закону  $T=\alpha V$  до такой величины, что при последующем охлаждении по закону  $T=\beta V^2$  газ переходит в начальное состояние. Найти КПД указанного цикла, зная начальный объем газа  $V_0$  и постоянные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ .

II.11. КПД тепловой машины, цикл которой состоит из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1, равен  $\eta$ . Рабочее вещество машины  $-\nu$  молей



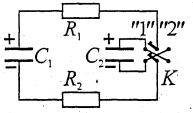
идеального газа. КПД машины, работающей по циклу Карно с температурами нагревателя и холодильника, равными, соответственно, максимальной и минимальной температурам рабочего вещества первой машины, равен  $\eta_{\rm K}$ . Найти работу газа в первой машине на участке 1-2, если в состоянии 1 внутренняя энергия газа равна  $W_1$ .

II.12. КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно 1-2-3-4-1, равен  $\eta_{\rm K}$ . В точке 1 температура и давдение рабочего вещества – идеального газа — максимальны. Если бы изменение состояния газа от точки 2 до точки 4 происходило так, что на pV-диаграмме этот участок имел бы вид отрезка прямой, а от точки 1 к точке 2 и от точки 4 к точке 1 — как и в цикле Карно, то КПД машины был бы равен  $\eta_1$ . Найти КПД машины при изменении состояния газа по циклу 2-3-4-2, считая, что участок 4-2 — такой же, как и в предыдущем цикле, а два других соответствуют участкам цикла Карно.

## ш. электричетво и магнетизм

III.1. Над идеально проводящей горизонтальной плоскостью на легкой нерастяжимой нити длиной L подвешен небольшой шарик массы m так, что он находится на высоте h (сравнимой с L) над плоскостью. Заряд шарика равен q. Найти период малых колебаний шарика, пренебрегая трением.

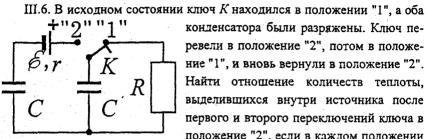
- III.2. Вокруг положительного точечного заряда  $\dot{q}$  по круговой орбите радиуса R движутся четыре одинаковые частицы, имеющие массу m и отрицательный заряд -q каждая, так, что расстояния между любыми двумя соседними движущимися частицами равны. Найти угловую скорость движения этих частиц, пренебрегая силами магнитного взаимодействия.
- III.3. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого равно b, помещен в однородное электрическое поле с напряженностью E, перпендикулярной его обкладкам. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы повернуть конденсатор на  $180^{0}$  вокруг оси, перпендикулярной E, если заряд конденсатора равен q, а поле, создаваемое зарядами  $\pm q$  обкладок конденсатора, противоположно внешнему полю E?
- III.4. На концах невесомого тонкого непроводящего стержня длины L закреплены два небольших шарика. Каждый шарик имеет массу m и заряд q. Стержень может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей перпендикулярно через стержень на расстоянии b от его конца, и находится в положении устойчивого равновесия в однородном горизонтальном электрическом поле с напряженностью E. Найти скорость шарика, удаленного от оси на расстояние b, в момент прохождения положения равновесия после отклонения стержня от исходного положения на угол  $\alpha$ .



III.5. Напряжения между обкладками одинаковых конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ с емкостью C=1 мк $\Phi$  в схеме, показанной на рисунке, равны  $U_1=300B$  и  $U_2=500\,\mathrm{B}$ , соответственно. В начале

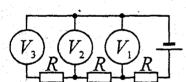
двойной ключ K из разомкнутого состояния переводят в положение "1".

Сколько тепла выделится на резисторе  $R_1$  после переключения ключа K в положение "2", если  $R_1/R_2 = n = 3$ ?



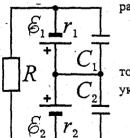
конденсатора были разряжены. Ключ перевели в положение "2", потом в положение "1", и вновь вернули в положение "2". Найти отношение количеств теплоты. выделившихся внутри источника после первого и второго переключений ключа в положение "2", если в каждом положении

ключ находился достаточно долго, и емкости обоих конденсаторов одинаковы.



III.7. К источнику подключены три одинаковых резистора и три одинаковых вольтметра так, как показано на схеме.

Найти показание второго вольтметра, если показание первого вольтметра равно  $V_1 = 10 \, \text{B}$ , а третьего вольтметра —  $V_3 = 6 \, \text{B}$ .



III.8. Найти отношение величин зарядов конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  в схеме, параметры элементов которой указаны на рисунке.

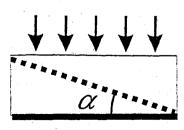
III.9. При длительной зарядке аккумулятора от источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 5B$  скорость вы-

деления водорода устанавливается равной m = 0.2 г/ч. При этом внутреннее сопротивление аккумулятора таково, что источник отдает ему максимальную мощность. Найти внутреннее сопротивление r источника, если ЭДС аккумулятора  $\mathcal{E}_a < \mathcal{E}/2$ .

- III.10. В вертикальном магнитном поле с индукцией B под углом  $\alpha$  к горизонту на расстоянии L друг от друга находятся две параллельные шины. Шины соединены друг с другом резистором с сопротивлением R. На шины, перпендикулярно им, кладут тонкий массивный проводящий брусок. С какой скоростью брусок будет равномерно скользить по шинам, если индуктивностью цепи, сопротивлением шин, бруска и контактов между ними можно пренебречь? Коэффициент трения бруска о шины равен  $\mu$ , причем  $\lg \alpha > \mu$ .
- III.11. Одновитковая рамка площадью S помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости рамки. Если рамку повернуть на  $180^{\circ}$  вокруг оси, лежащей в ее плоскости, то по рамке протечет заряд Q. Пренебрегая индуктивностью, найти среднюю тепловую мошность, выделяющуюся в рамке при ее вращении вокруг той же оси с угловой скоростью  $\omega$ .
- III. 12. Обмотка массивного ротора электродвигателя сделана в виде прямоугольной рамки плошадью S из N витков тонкого провода. Концы обмотки замкнуты между собой, а ее сопротивление равно R. Обмотки статора двигателя питаются переменным током и создают в роторе однородное магнитное поле, вектор индукции B которого перпендикулярен оси ротора и вращается вокруг нее с угловой скоростью  $\Omega$ . Найти средний тормозящий момент внешних сил, действующих на ротор, если его угловая скорость почти постоянна и равна  $\omega$ , причем  $\omega < \Omega$ .

## IV. ОПТИКА

- IV.1. С помощью тонкой линзы получили увеличенное в k=5 раз изображение предмета, расположенного вблизи главной оптической оси. Если расстояние между линзой и предметом увеличить на  $\Delta L=1$  см, то увеличение уменьшится в n=2 раза. Найти фокусное расстояние линзы.
- IV.2. На тонкую линзу с фокусным расстоянием F падает луч света под углом  $\alpha$  к главной плоскости линзы. После преломления этот луч выходит из линзы под углом  $\beta = k\alpha$  к ее главной плоскости. Найти расстояние от точки падения луча на линзу до ее оптического центра.
- IV.3. Фотоаппарат, имеющий объектив с фокусным расстоянием  $F=10\,\mathrm{cm}$ , установлен так, чтобы получить наиболее резкое изображение предмета, находящегося от него на расстоянии  $a=5\,\mathrm{m}$ . Найти глубину резкости, т.е. расстояния, на которые можно сместить предмет вдоль оси объектива от указанного положения без потери резкости изображения, если радиус светового пучка, проходящего через объектив, не превышает  $r=1\,\mathrm{cm}$ , а изображение можно считать резким, если диаметр изображения точки на фотопленке не превышает  $\phi=0.1\,\mathrm{mm}$ .



IV.4. Покрытое толстым однородным слоем эмульсии зеркало осветили нормально падающим монохроматическим параллельным пучком света. После проявления сделали срез эмульсии под углом  $\alpha=10^{-3}$  рад к плоскости зеркала. Найти длину волны использованного света. если

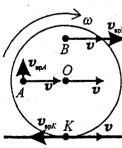
на срезе под микроскопом наблюдаются полосы с периодом b=0.3 мм, Усадкой эмульсии при обработке пренебречь, показатель преломления эмульсии  $\sim 1$ :

IV.5. Плосковыпуклую линзу, лежащую выпуклой стороной на стеклянной пластинке, освещают нормально падающим параллельным пучком света, импульс фотона которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью  $\nu=0.5$  км/с. Найти радиус  $k^{\text{TD}}$  (k=2) светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете, если радиус кривизны линзы равен R=0.5 м.

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## І. МЕХАНИКА

І.1. По условию задачи стержень, поперечное сечение которого пока-



зано на рисунке, катится по плоскости без проскальзывания. Следовательно, скорости всех точек стержня лежат в плоскостях, перпендикулярных оси стержня, т.е. стержень совершает плоское движение. Считая, как это обычно и делается в подобных задачах, стержень твердым, его движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью  $\boldsymbol{v}$  и вращения вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Поскольку стержень ка-

тится без проскальзывания, то скорости точек стержня, касающихся плоскости (в том числе и точки K) должны быть равны нулю, т.е.  $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\mathtt{вр}K}=0$ . Отсюда следует, что направление вращения стержня должно быть таким,

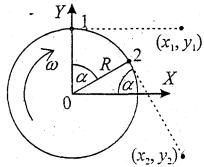
как показано на рисунке, и  $\omega = v_{\rm вр} K/R = v/R$ , где R – радиус стержня. Учитывая, что точки A и B находятся от оси стержня на расстоянии R/n, модуль составляющей их скорости, обусловленной вращением стержня,  $v_{\rm вр} A = v_{\rm вр} B = v/n$ . Составляющие же скорости этих точек, обусловленные поступательным движением, равны v. В интересующий нас момент точка A лежит на диаметре, параллельном плоскости качения, а точка B — на диаметре, перпендикулярном к этой плоскости. Поэтому указанные составляющие скорости точки A взаимно перпендикулярны, а точки B — параллельны и одинаково направлены (см. рис.). Из сказанного следует, что

$$|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{ap}A}| = v \sqrt{1 + n^{-2}}, |\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{ap}B}| = (1 + n^{-1}) v.$$

Из этих выражений находим, что искомое отношение скоростей

$$v_A/v_B = \sqrt{n^2 + 1}/(n+1)$$
.

I.2. Поскольку камушки выпадают из кармана, а не выбрасываются из него, можно считать, что начальные скорости камушков относительно земли равны скоростям тех точек карусели, в которых находился мальчик в моменты выпадения камушков. Другими словами, начальные скорости камушков направлены горизонтально и равны по модулю  $v = \omega R$ . Если, как обычно, пренебречь влиянием воздуха на камушки, то после выпадения камушки будут совершать свободное падение, т.е. двигаться относи-

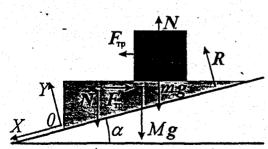


тельно поверхности земли в горизонтальном направлении со скоростью v вплоть до момента падения на землю. По вертикали камушки до падения должны переместиться на расстояние h, двигаясь с ускорением свободного падения g. Поэтому за время падения  $t_{\rm n} = \sqrt{2 \ h/g}$  камушки по горизонтали пролетят расстояние  $L = v \ t_{\rm n}$ . На рисунке пунктирными линиями по-

казаны проекции траекторий камушков на горизонтальную плоскость, а сплошными жирными линиями — оси лабораторной системы координат, которую будем использовать для решения задачи. Точки 1 и 2 соответствуют положениям камушков в момент их выпадения. Из рисунка и сказанного ранее следует, что первый камушек упадет на землю в точке с координатами  $x_1 = L$ ,  $y_1 = R$ . Поскольку за время  $\tau$  карусель, вращающаяся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , повернется на угол  $\alpha = \omega \tau$ , то координаты точки падения второго камушка равны  $x_2 = R \sin \alpha + L \cos \alpha$ ,  $y_2 = R \cos \alpha - L \sin \alpha$ . Учитывая, что искомое расстояние между точками падения камушков на землю  $\Delta L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , после преобразований получим

$$\Delta L = \sqrt{2(1-\cos\alpha)(R^2+L^2)} = 2R|\sin\omega\tau/2|\sqrt{1+2h\omega^2/g}$$
.

I.3. Будем решать задачу при следующих стандартных предположениях: действием воздуха на тела системы можно пренебречь, и систему отсчета, неподвижную относительно земли (лабораторную систему отсчета), можно считать инерциальной. Поскольку наклонная плоскость по условию задачи является гладкой, то сила реакции, действующая со стороны этой



плоскости на клин, имеет лишь одну нормальную составляющую R. Действующую же на кубик со стороны клина силу реакции можно представить в виде двух составляющих: вертикальной N и горизонтальной  $F_{\rm TP}$ . Если бы ко-

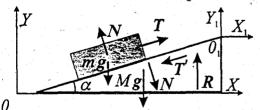
эффициент трения кубика о клин был равен нулю, то ускорение кубика в горизонтальном направлении в соответствии со вторым законом Ньютона должно было бы быть равно нулю, т.к. действующие в этом случае на кубик силы (N) и сила тяжести m g) направлены вертикально. При этом кубик

должен был бы скользить по клину, не перемещаясь в горизонтальном направлении относительно земли. Следовательно, сила трения  $F_{\rm тp}$ , действующая на кубик, должна быть направлена так, как показано на рисунке. На этом же рисунке показаны силы, действующие на клин, и лабораторная система координат XOY, используемая для решения задачи. Поскольку по условию кубик должен оставаться неподвижным относительно клина, его ускорение a должно совпадать с ускорением клина и быть направленным параллельно оси OX. Поэтому уравнения движения кубика и клина с учетом обозначений, показанных на рисунке, имеют вид

 $m\,a_{\rm x}=F_{\rm Tp}\cos\alpha+(m\,g-N)\sin\alpha,\ 0=(m\,g-N)\cos\alpha+F_{\rm Tp}\sin\alpha,$   $M\,a_{\rm x}=(M\,g+N)\sin\alpha-F_{\rm Tp}\cos\alpha,\ 0=R+F_{\rm Tp}\sin\alpha-(M\,g+N)\cos\alpha.$  Из этих уравнений следует, что  $a_{\rm x}=g\sin\alpha$ . Учитывая, что согласно закону Кулона сила сухого трения покоя  $F_{\rm Tp}\leq\mu\,N$ , получим, что искомый коэффициент трения при сделанных предположениях должен удовлетворять неравенству:

 $\mu \ge \operatorname{tg} \alpha$ .

I.4. Поскольку клин по условию задачи является гладким, сила R реакции плоскости, действующая на него, направлена вертикально, а сила N реакции клина на брусок направлена по нормали к плоскости касания бру-



ска и клина, т.е. так, как показано на рисунке. На этом же рисунке показаны силы тяжести mg и Mg, действующие на брусок и клин, а так же сила натяжения нити T, действующая на

брусок, и сила T', с которой нить действует на клин. Если, как обычно, нить считать невесомой, то на основании второго и третьего законов Ньютона следует утверждать, что T = -T' и отрезок нити между бруском и зажимом является прямолинейным. В соответствии с рисунком в условии задачи будем считать этот отрезок параллельным поверхности клина.

Тогда, пренебрегая, как обычно, действием воздуха и считая лабораторную систему отсчета X0Y инерциальной, уравнения движения клина и бруска в проекциях на оси этой системы отсчета можно представить в виде:

 $M A_x = N \sin \alpha - T \cos \alpha$ ,  $M A_y = -N \cos \alpha - M g - T \sin \alpha + R$ ,  $m a_x = T \cos \alpha - N \sin \alpha$ ,  $m a_y = T \sin \alpha + N \cos \alpha - m g$ , где  $A_x$  и  $A_y$  – проекции ускорения A клина на оси  $\partial X$  и  $\partial Y$ ,  $a_x$  и  $a_y$  – проекции ускорения a бруска на указанные оси.

Если ускорение бруска равно нулю, то из двух последних уравнений следует, что T=m  $g\sin\alpha$ . Следовательно, если  $F\geq T=m$   $g\sin\alpha$ , то и брусок и клин должны оставаться неподвижными, т.е. при  $F\geq m$   $g\sin\alpha$  ускорение клина A=0.

Если же  $F < m g \sin \alpha$ , то сила натяжения нити T при сделанных выше предположениях будет равна F – максимальной величине силы трения нити о зажим, и брусок должен скользить по клину, а клин, в свою очередь, так же должен двигаться с некоторым ускорением. Поскольку клин может двигаться только горизонтально, то  $A_{v} = 0$ . Ясно, что отличные от нуля компоненты ускорений клина и бруска не могут быть независимыми, т.к. брусок по условию может двигаться лишь по поверхности клина. В системе координат  $X_1 \theta_1 Y_1$ , неподвижной относительно клина, оси которой параллельны осям лабораторной системы отсчета ХОУ, приращения координат  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$  некоторой точки бруска должны удовлетворять условию:  $\Delta y_1 = \Delta x_1 \operatorname{tg} \alpha$ . Учитывая, что начала отсчета осей  $\partial Y$  и  $\partial_1 Y_1$  показанных на рисунке систем координат не смещаются по вертикали друг относительно друга при возможных перемещениях клина, можно утверждать, что  $\Delta y_1 = \Delta y$ . Вместе с тем, если клин испытывает перемещение  $\Delta X$ , а брусок относительно клина смещается на  $\Delta x_1$ , координаты точек бруска относительно оси  $\partial X$  изменяются на  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta X$ . Таким образом, приращения координат клина и бруска относительно осей лабораторной системы отсчета связаны между собой соотношением  $(\Delta x - \Delta X)$  tg  $\alpha = \Delta y$ . Учитывая, что полученное соотношение справедливо для любых моментов времени, когда брусок находится на клине, и вспоминая определение скорости и ускорения в данном направлении, на основании последнего соотношения можно утверждать, что составляющие ускорений бруска и клина, входящие в уравнения движения этих тел, связаны между собой соотношением:  $a_y = (a_x - A_x)$  tg  $\alpha$ . Из этого выражения и уравнения движения бруска следует, что  $m A_x \sin \alpha = m g \cos \alpha - N$ . Умножая обе части полученного соотношения на  $\sin \alpha$  и складывая результат с первым уравнением движения клина, получим, что ускорение клина при  $F < m g \sin \alpha$ 

$$A_{x} = \frac{m g \sin \alpha - F}{m \sin^{2} \alpha + M} \cos \alpha.$$

Таким образом:

$$A_{x} = \begin{cases} 0 & \text{при } F \ge m \text{ } g \sin \alpha \\ \frac{m g \sin \alpha - F}{m \sin^{2} \alpha + M} \cos \alpha & \text{при } F < m \text{ } g \sin \alpha \end{cases}$$

І.5. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение снаряда и его частей. Будем решать задачу, используя декартову систему координат, ось ОХ которой направлена вдоль горизонтальной составляющей начальной скорости снаряда, а ось 0Y – вертикально вверх. Обозначим скорости частей снаряда сразу после взрыва  $u_1$  и и2. Поскольку после взрыва первая часть снаряда по условию задачи полетела вертикально, то горизонтальная составляющая ее скорости сразу после взрыва  $u_{1x} = 0$ . С учетом всего сказанного, пренебрегая импульсом сил тяжести за время взрыва и массой сгоревшей во время взрыва части снаряда, на основании закона сохранения импульса можно утверждать, что горизонтальная составляющая скорости второго осколка  $u_{2x} = 2 v \cos \alpha$ . При этом было учтено, что снаряд разорвался на две равные части. Поскольку взрыв снаряда произошел в верхней точке траектории, то согласно закону сохранения импульса при сделанных предположениях вертикальные составляющие скоростей осколков должны удовлетворять соотношению:  $u_{1y} + u_{2y} = 0$ . Учитывая, что по условию задачи  $|u_2| = n|u_1|$ ,  $|u_1| = |u_{1y}|$  и  $|u_2| = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$ , из составленных уравнений следует, что скорость первого осколка сразу после взрыва при сделанных предположениях должна быть равна  $u_1 = 2 \ v \cdot (n^2 - 1)^{-0.5} \cos \alpha$ . После взрыва оба осколка совершают свободное падение. Следовательно, один осколок относительно другого движется с неизменной скоростью, а потому искомое расстояние должно быть равно  $L(\tau) = u_{on} \tau$ , где  $u_{on} = u_1 - u_2$ . Из этих соотношений после алгебраических преобразований получим:

$$L(\tau) = \tau \sqrt{(2 \upsilon \cos \alpha)^2 + (2 \upsilon_1)^2} = 2 \upsilon \tau \sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}} \cos \alpha.$$

І.б. При решении задачи будем полагать, что после каждого удара шайба движется поступательно. Отметим, что это возможно только в том случае, когда линия действия импульса сил, приложенных к шайбе во время удара, проходит через ее центр масс. Будем так же считать, что сопротивление движению шайбы обусловлено лишь действием на нее силы сухого трения со стороны стола, а величина силы сухого трения во всех трех случаях остается неизменной и равной мажимальному значению силы сухого трения покоя  $F = \mu \, m \, g$ , где  $\mu$  – коэффициент трения, m – масса шайбы, а д - ускорение свободного падения. Поскольку шайба после ударов движется по горизонтальной плоскости, следует считать, что потенциальная энергия системы «шайба-Земля» остается неизменной. Поэтому, обозначив скорость шайбы непосредственно после 🖰 удара  $v_i$ , на основании закона изменения кинетической энергии получим, что  $m v_i^2/2 = F s_i$ , т.к. направление силы сухого трения скольжения противоположно направлению движения шайбы. Учитывая, что во время третьего удара/импульс внешних сил по условию должен быть равен сумме импульсов сил, действовавших на шайбу при первых двух, можно утверждать, что скорость шайбы непосредственно после этого удара должна была бы стать равной  $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ . Отсюда следует, что после третьего удара кинетическая энергия шайбы  $W_{\kappa 3} = m v_3^2/2 = m (v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha)/2$ , а потому

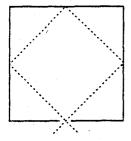
расстояние, на которое переместилась бы шайба после этого удара, должно быть равно  $s_3 = \frac{v_3^2}{2 \mu g} = s_1 + s_2 + 2\sqrt{s_1 s_2} \cos \alpha = 1,27 \text{ м}$ .

І.7. При решении задачи будем использовать такую инерциальную декартовую систему координат, относительно которой скорость шарика перед первым ударом можно представить в виде:  $\boldsymbol{v} = (i+j) \, \upsilon / \sqrt{2}$ , где i и j – единичные векторы, параллельные осям ОХ и ОУ, соответственно. Поскольку силы тяжести и реакции стола не совершают работы при движении рамки и шарика, удары этих тел по условию задачи являются абсолютно упругими и сил трения нет, то механическая энергия шарика и рамки должна оставаться неизменной. Неизменной должна оставаться и сумма импульсов этих тел. Согласно условию задачи при указанном выборе системы координат первый раз шарик должен удариться о середину стороны рамки, параллельной оси ОУ. Во время этого удара силы взаимодействия шарика и рамки могут быть направлены только перпендикулярно стороне рамки, о которую ударяется шарик, а потому линия действия этих сил должна проходить через центр масс рамки. Следовательно, после удара рамка должна двигаться поступательно параллельно оси OX со скоростью  $v_{pl}$  такой, что

$$m_{\rm ui} v = m_{\rm p} v_{\rm pl} + m_{\rm ui} v_{\rm uil} n m_{\rm ui} v^2 / 2 = m_{\rm p} v_{\rm pl}^2 / 2 + m_{\rm ui} v_{\rm uil}^2 / 2,$$

где  $v_{\rm mi}$  — скорость шарика после первого удара, а  $m_{\rm m}$  и  $m_{\rm p}$  — массы шарика и рамки, соответственно. Поскольку  $m_{\rm m}=m_{\rm p}=m$ , то указанным требованиям будет удовлетворять решение приведенной системы уравнений, имеющее вид:  $v_{\rm pl}=iv/\sqrt{2}$ ,  $v_{\rm ml}=jv/\sqrt{2}$ . Таким образом, после первого соударения шарик и рамка будут двигаться с равными по величине скоростями во взаимно перпендикулярных направлениях. Отсюда, пренебрегая размерами шарика и учитывая, что рамка квадратная, можно доказать, что вторично шарик ударится опять о середину стороны рамки, параллельной на этот раз оси  $\partial Y$ . Повторяя приведенные выше рассуждения, можно доказать, что после второго удара шарик остановится, а рамка будет дви-

гаться со скоростью  $\boldsymbol{v}_{\text{p}2} = \boldsymbol{v}$ . Отсюда следует, что и при третьем ударе шарик столкнется с серединой стороны рамки, т.е. траектория движения ша-



рика относительно рамки должна иметь вид, показанный на рисунке пунктирной линией. Поскольку после третьего удара скорости шарика и рамки (в выбранной системе координат) должны стать равными  $\boldsymbol{v}_{\text{m3}} = i\,\upsilon/\sqrt{2}$  и  $\boldsymbol{v}_{\text{p3}} = j\,\upsilon/\sqrt{2}$ , соответственно, то шарик через некоторое время должен оказаться возле щели, через которую он влетел в рамку. Следовательно, после третьего удара шарик

вылетит из рамки и будет двигаться со скоростью  $v_{\text{mx}} = v_{\text{m3}} = i \, v / \sqrt{2}$ .

1.8. После отпускания шайба начинает скатываться по желобу, оказывая на него определенное давление. В результате и брусок начинает двигаться с некоторым ускорением. Поскольку шайба первоначально была расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс бруска, и в момент отпускания имела нулевую скорость, линия действующей на брусок со стороны шайбы силы должна располагаться в указанной плоскости. Учитывая, что сила тяжести и сила реакции стола, действующие на брусок, направлены вертикально, а брусок может двигаться лишь в горизонтальном направлении, можно утверждать, что брусок будет двигаться поступательно. Будем, как обычно, считать лабораторную систему отсчета инершиальной. Если скорость бруска относительно этой системы в момент прохождения шайбой нижней точки траектории обозначить  $\boldsymbol{V}_{\text{н}}$ , то согласно закону сохранения импульса скорость шайбы  $\boldsymbol{v}_{\text{н}}$  в указанный момент времени должна удовлетворять соотношению:  $m \, \boldsymbol{v}_{\text{н}} + M \, \boldsymbol{V}_{\text{н}} = 0$ , т.к. в момент отпускания и шайба, и брусок были неподвижны.

Приращение кинетической энергии системы «шайба-брусок» обусловлено лишь работой сил тяжести над шайбой, т.к. по условию задачи силами трения следует пренебречь. Отсюда с учетом малости геометрических размеров шайбы следует, что в интересующий нас момент времени  $m\,v_{\rm H}^2 + M\,V_{\rm H}^2 = 2\,m\,g\,R$ , где g – ускорение свободного падения. Учитывая, что скорость шайбы относительно бруска  ${m v}_{
m oth} = {m v} - {m V}$ , и решая составленную систему уравнений, получим, что величина искомой скорости шайбы при сделанных предположениях должна быть равна

$$v_{\text{HOTH}} = \sqrt{2 g R (1 + m/M)}.$$

І.9. Поскольку под действием силы натяжения нити первоначально покоившийся груз начинает подниматься, то величина этой силы хотя бы незначительно должна превышать силу тяжести, действующую на груз. По условию задачи нить невесома, массой блока и трением в его оси следует пренебречь. Поэтому можно считать, что сила натяжения нити в любом ее поперечном сечении должна оставаться неизменной, а потому должно соблюдаться неравенство: F > m g, где g - величина ускорения свободного падения. С другой стороны, можно утверждать, что из-за действия нити на скрепленный с кубиком блок кубик должен начать двигаться в направлении силы F с некоторым ускорением. При этом кубик будет давить на груз. Поскольку касающаяся груза грань кубика вертикальна, кубик движется по горизонтальной плоскости поступательно, и груз первоначально касался кубика, то горизонтальная составляющая ускорения груза должна совпадать с ускорением кубика. Из сказанного следует, что уравнения движения кубика и груза в проекциях на горизонтальную (параллельную силе F) и направленную вертикально вверх оси лабораторной системы отсчета должны иметь вид:

$$M a_x = F - N$$
,  $m a_x = N$ ,  $m a_y = F - m g$ ,

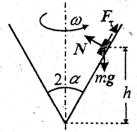
где N — величина силы давления кубика на груз. При составлении приведенной системы уравнений было учтено, что сил трения нет, а выбранная лабораторная система отсчета, как обычно, принималась за инерциальную.

Из приведенной системы уравнений следует, что вертикальная составляющая ускорения груза при заданных условиях постоянна и равна  $a_y = F/m - g$ . Поэтому для подъема груза на высоту h необходимо время  $\tau = \sqrt{2 \, h/a_y}$ . Учитывая, что ускорение кубика, равное горизонтальной со-

ставляющей ускорения груза, постоянно, найдем перемещение кубика за время подъема груза на заданную высоту:  $\Delta x = a_x \tau^2/2 = h \, a_x/a_y$ . При этом точка приложения силы F переместится в направлении действия этой силы на расстояние  $\Delta s = h + \Delta x$ , т.к. по условию задачи нить следует считать нерастяжимой. Из приведенных уравнений движения следует, что  $a_x = F/(m+M)$ . Поэтому для подъема груза на заданную высоту необходимо совершить работу

$$A = F h \left[ 1 + \frac{F m}{(m+M)(F-m g)} \right].$$

I.10. При решении задачи будем считать, что на шайбу, лежащую на внутренней поверхности вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  воронки,



действуют только сила тяжести mg и сила реакции со стороны воронки. Последнюю, как обычно, представим в виде двух составляющих: нормальной N, направленной перпендикулярно плоскости соприкосновения шайбы с воронкой, и тангенциальной  $F_{\tau}$ , лежащей в этой плоскости. Будем также считать, что лабораторная система отсчета, относительно которой ось воронки неподвижна, является инерциальной. Тогда на осно-

вании второго закона Ньютона, пренебрегая в соответствии с условием задачи размерами шайбы, можно утверждать, что

$$m a = m g + N + F_{\mathbf{f}}, \tag{1}$$

где a — ускорение шайбы относительно лабораторной системы отсчета, а g — ускорение свободного падения. Поскольку шайба остается неподвижной относительно воронки, траектория ее движения в выбранной лабораторной системе отсчета будет представлять собой окружность радиуса  $R = h \operatorname{tg} \alpha$ , лежащую в горизонтальной плоскости. Считая угловую скорость вращения воронки постоянной, можно утверждать, что ускорение шайбы направлено по радиусу к центру указанной окружности и равно  $a_{\rm n} = \omega^2 R$ . Поэтому на

основании уравнения (1) можно утверждать, что составляющая силы реакции воронки, перпендикулярная вертикальной плоскости, в которой располагается шайба и ось воронки, должна быть равна нулю. Далее, полагая тангенциальную составляющую направленной так, как показано на рисунке, из уравнения (1) получим:

$$m a_n = N \cos \alpha - F_{\mathbf{f}} \sin \alpha$$
 и  $0 = m g - N \sin \alpha - F_{\mathbf{f}} \cos \alpha$ . (2)  
Из этих уравнений следует, что

$$F_{\mathbf{T}} = m \left( g \cos \alpha - a_n \sin \alpha \right) \text{ if } N = m \left( g \sin \alpha + a_n \cos \alpha \right). \tag{3}$$

С другой стороны, составляющая силы реакции воронки  $F_{\tau}$  обусловлена сухим трением между шайбой и воронкой. Поэтому по закону Кулона величина этой составляющей не может превышать  $\mu$  N, а ее направление противоположно тому, в котором начала бы двигаться шайба при постепенном уменьшении коэффициента трения  $\mu$ . Отсюда следует, что проекция  $F_{\tau}$  на образующую воронки, на которой находится шайба, должна удовлетворять неравенству:

$$-\mu N \le F_{\mathbf{q}} \le \mu N. \tag{4}$$

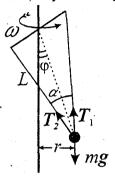
Подставляя в неравенство (4) соотношения (3), после алгебраических преобразований получим, что при сделанных предположениях искомая угловая скорость вращения воронки должна удовлетворять неравенству:

$$\sqrt{\frac{g(\operatorname{ctg}\alpha-\mu)}{h(\operatorname{tg}\alpha+\mu)}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{g(\operatorname{ctg}\alpha+\mu)}{h(\operatorname{tg}\alpha-\mu)}},$$

которое может иметь место лишь при  $\mu < \operatorname{tg} \alpha < 1/\mu$  .

I.11. Поскольку в условии задачи размеры шарика не указаны, будем решать задачу, считая его точечным. При установившемся движении, обусловленном равномерным вращением оси, траектория шарика должна иметь вид окружности, расположенной в горизонтальной плоскости, и ускорение шарика должно быть направлено к центру этой окружности. Если, как это обычно и делается при решении подобных задач, пренебречь влиянием воздуха и учесть, что шарик подвешен на одинаковых нитях, прикрепленных симметрично к горизонтальной штанге, то, обратившись к ри-

сунку, можно доказать, что радиус окружности равен  $r = L(\cos \alpha/2) \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между плоскостью, в которой располагаются нити, и осью



вращения. Кроме того, можно утверждать, что силы натяжения нитей должны быть равны по модулю, т.е.  $|T_1| = |T_2| = T$ . Отсюда в соответствии со вторым законом Ньютона следует, что уравнение движения шарика можно представить в виде:

$$m a_n = m \omega^2 r = 2 T (\cos \alpha/2) \sin \varphi,$$
  

$$m g = 2 T (\cos \alpha/2) \cos \varphi,$$
 (1)

где g - модуль ускорения свободного падения.

Возводя каждое из этих соотношений в квадрат и затем, складывая их, можно доказать, что сила

натяжения нитей при любых угловых скоростях вращения оси

$$T = \frac{m g}{2 \cos \alpha/2} \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2} \ge \frac{m g}{2 \cos \alpha/2}.$$

С другой стороны, из первого соотношения системы (1) вытекает, что при уменьшении угловой скорости вращения сила натяжения нитей должна неограниченно уменьшаться, если, конечно, считать, что  $\phi$  (а следовательно, и r) не равно нулю. Из сказанного следует, что при установившемся-движении шарика и  $\omega^2 \leq \omega_{\rm kp}^2 = \frac{g}{L\cos\alpha/2}$  нити должны распола-

гаться в одной вертикальной плоскости с осью вращения, т.е.  $\varphi = r = 0$ , а

$$T = \frac{m g}{2 \cos \alpha/2}$$
. Если же  $\omega > \omega_{\text{mp}}$ , то  $\varphi = \arccos \frac{g}{\omega^2 L \cos \alpha/2} \neq 0$ , и

$$T = \frac{m\,\omega^2 L}{2} > \frac{m\,g}{2\cos\alpha}.$$

1.12. При решении задачи будем считать геоцентрическую систему отсчета инерциальной, т.е. не будем учитывать орбитального движения Земли. Одновременно будем пренебрегать влиянием всех остальных небесных тел на движение Луны и космического корабля. По условию задачи

орбиту Луны следует считать круговой. Поэтому на основании второго закона Кеплера можно считать, что Луна по своей орбите движется равномерно. Следовательно, согласно законам кинематики ее ускорение направлено к центру Земли и равно  $a_n = \omega^2 R_n$ , где  $\omega$  – угловая скорость, а  $R_n$ - радиус орбиты Луны. При сделанных предположениях можно утверждать, что центростремительное ускорение Луны обусловлено действием на нее только гравитационных сил со стороны Земли, т.к. разумно считать массу космического корабля много меньшей массы Земли. Тогда на основании закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона, пренебрегая размерами Луны, получим  $m_{\pi} a_{\pi} = G m_{\pi} m_{\pi} / R_{\pi}^2$ , где G – гравитационная постоянная, а  $m_n$  и  $m_2$  – массы Луны и Земли, соответственно. Учитывая, что ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли  $g = G m_1 / R_1^2$ , из написанных ранее соотношений следует, что угловая скорость движения Луны, а следовательно, и космического корабля (т.к. он все время остается на прямой, соединяющей Землю и Луну) равна  $\omega = \sqrt{g/R_n}/n$ . Здесь было учтено, что по условию задачи  $R_1/R_3 = n$ .

По условию задачи космический корабль находится на таком расстоянии r от Земли, что гравитационные силы, действующие на него со стороны Земли и Луны, уравновещивают друг друга. Это согласно закону всемирного тяготения возможно только в том случае, если с учетом ранее сделанных предположений выполняется соотношение:  $m_3/r^2 = m_\pi/(R_\pi - r)^2$ . Поскольку по условию задачи  $m_3/m_\pi = k$ , то радиус орбиты корабля  $r = \sqrt{k}R_\pi/(1+\sqrt{k})$ . Следовательно, центростремительное ускорение корабля определяется соотношением:  $a_{\rm kn} = \omega^2 r = g \sqrt{k}/[n^2(1+\sqrt{k})]$ . Поскольку действие Земли и Луны на корабль взаимно компенсировано, а действием всех других небесных тел мы пренебрегаем и считаем геоцентрическую систему отсчета инерциальной, вычисленное ускорение может быть обеспечено только за счет работы двигателей самого корабля. Пренебрегая размерами корабля по сравнению с радиусом его орбиты, следует считать, что такое же ускорение относительно инерциальной

системы отсчета имеет и космонавт. Поэтому на основании второго закона Ньютона получаем, что на космонавта корабль должен действовать с силой  $F = m \ a_{\rm kn}$ . Следовательно, согласно третьему закону Ньютона вес космонавта в системе отсчета, связанной с кораблем, равен

$$P = \frac{m g \sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k}) n^2}.$$

I.13. Если пренебречь затуханием и учесть, что масса резиновой полоски много меньше массы груза, то уравнение его движения в проекции на ось 0X, направленную вертикально вниз, при малых колебаниях вдоль этой оси согласно второму закону Ньютона и закону Гука можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + mg,$$

где k — жесткость полоски,  $x_0$  — деформация полоски под действием неподвижно висящего на ней груза, x — смещение груза от равновесного положения, g — ускорение свободного падения. Поскольку при равновесии груза сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю, то m g = k  $x_0$ , и уравнение движения груза примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx$$
.

Следовательно, при соблюдении указанных предположений малые вертикальные колебания груз будут гармоническими, причем период этих колебаний должен быть равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Определить жесткость k резиновой полоски можно, например, из следующих соображений. Действие избыточного давления  $\Delta p$  в трубке, изготовленной из того же листа резины, из которого вырезана полоска, должно уравновешиваться силами натяжения резины. Согласно закону Гука линейная плотность сил натяжения, обусловленных увеличением радиуса трубки, т.е. величина силы натяжения в расчете на единицу длины трубки равна

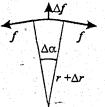
$$f = E h \frac{2\pi (r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = E h \frac{\Delta r}{r},$$

где E — модуль Юнга, а h — толщина листа резины. С другой стороны, величина силы избыточного давления  $\Delta f$ , действующей на узкую полоску трубки единичной длины, равна

$$\Delta f = (r + \Delta r) \, \Delta \alpha \, \Delta p \,,$$

где  $\Delta \alpha$  — величина центрального угла, под которым видны края этой полоски. Написанное выражение справедливо при условии, что  $\Delta \alpha \to 0$ . Условие равновесия рассматриваемой полоски трубки, обратившись к ри-

сунку, на котором показано ее поперечное сечение, можно записать в виде:



$$\Delta f = 2 f \sin \Delta \alpha / 2$$

$$\Delta f = f \, \Delta \alpha$$

или, учитывая, что  $\Delta \alpha \to 0$ ,  $\Delta f = f \Delta \alpha .$  Подставляя в это соотношение полученные ранее вы-

$$Eh = (1 + r/\Delta r)r\,\Delta p \; .$$

Наконец, учитывая, что жесткость полоски k = Ebh/L, после алгебраических преобразований найдем искомый период колебаний груза:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{(1+r/\Delta r)rb\,\Delta p}} \ .$$

І.14. Будем предполагать, что при заданном смещении бруска деформация пружины является полностью упругой. Тогда на основании закона Гука можно считать, что на брусок со стороны пружины в момент отпускания действует сила  $F_{np} = k \Delta L$ , направленная горизонтально вдоль оси пружины. Действующую же на брусок силу реакции плоскости можно представить в виде двух составляющих: перпендикулярной и параллельной этой плоскости. Величину нормальной составляющей силы реакции Л можно определить на основании второго закона Ньютона. предполагая, что система отсчета, неподвижная относительно этой плоскости, является

инерциальной, а брусок может двигаться только вдоль данной плоскости. Пренебрегая действием на брусок воздуха, получим: N-m g=0, где gвеличина ускорения свободного падения. Согласно закону Кулона при неподвижном бруске максимальная величина параллельной составляющей силы реакции - силы сухого трения покоя - равна  $\mu N$ . Поэтому при  $k \Delta L \leq \mu \, m \, g$  брусок после отпускания должен оставаться неподвижным. Если же  $k \Delta L > \mu m g$ , то после отпускания брусок начнет двигаться с некоторым ускорением. Поскольку линия действия силы со стороны пружины проходит через центр масс бруска, а сила трения направлена противоположно его скорости, брусок будет двигаться поступательно. При этом деформация пружины будет уменьшаться, а, следовательно, должно уменьшаться и ускорение бруска. В тот момент, когда сумма действующих на брусок сил обратится в нуль, скорость бруска станет максимальной, Если, как обычно, считать, что величина силы сухого трения скольжения не зависит от скорости и равна максимальному значению силы сухого трения покоя, то, пренебрегая в соответствии с условием задачи массой пружины, величину деформации  $\Delta x$  пружины в интересующий нас момент легко вычислить из соотношения  $k \Delta x = \mu m g$ . Вспоминая выражения для расчета кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела, потенциальной энергии упруго деформированной пружины и учитывая, что смещение бруска к этому моменту станет равным  $\Delta L - \Delta x$ , на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что максимальная скорость  $v_{\max}$  бруска должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{k \Delta L^2}{2} = \frac{k \Delta x^2}{2} + \frac{m v_{\text{max}}^2}{2} + \mu \, m \, g \left(\Delta L - \Delta x\right).$$

Из сказанного следует, что максимальная скорость бруска при сделанных предположениях должна быть равна

$$\upsilon_{\max} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \Delta L \leq \mu \, m \, g \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \left( \Delta L - \frac{\mu \, m \, g}{k} \right) \, \text{при } k \, \Delta L > \mu \, m \, g \end{cases}.$$

І.15. При решении задачи будем, как обычно, предполагать, что лабораторная система отсчета, относительно которой верхняя точка пружины остается неподвижной, является инерциальной. Следует также считать, что деформации пружины являются абсолютно упругими, а действием воздуха на пружину и груз можно пренебречь. Тогда согласно закону Гука масса груза m и жесткость пружины k должны удовлетворять условию:  $(L-L_0) k = m g$ , где g – величина ускорения свободного падения. Кроме того, при смещении груза вертикально вниз на расстояние х результирующая силы тяжести и силы упругой деформации пружины будет равна  $(x + L - L_0) k - m g = k x$  и направлена к положению равновесия. Следовательно, уравнение движения груза в проекции на вертикальную ось ОХ после смещения из равновесного положения, принятого за начало отсчета. будет иметь вид:  $m\ddot{x} = -kx$ . Поэтому при сделанных допущениях вертикальные колебания груза должны быть гармоническими. Учитывая, что при таких колебаниях квадрат угловой частоты  $\omega_{\rm k}$  равен модулю отношения ускорения груза к его смещению от положения равновесия, а произведение угловой частоты и периода колебаний равно  $2\pi$ , для периода малых вертикальных колебаний получим

$$T_{\rm B}=2\,\pi\,\sqrt{m/k}\;.$$

При незначительном отклонении груза в горизонтальном направлении от положения равновесия величина силы натяжения пружины, а следовательно, и ее длина, должны практически остаться неизменными. Учитывая, что при прохождении положения равновесия после такого отклонения скорость груза (а потому и его центростремительное ускорение) должна быть достаточно малой, можно пренебречь изменением длины пружины при таких колебаниях. Поэтому для вычисления периода малых колебаний груза в горизонтальном направлении можно воспользоваться формулой для периода колебаний математического маятника

$$T_{\rm r}=2\,\pi\,\sqrt{L/g}\;.$$

Поскольку по условию задачи  $n = T_{\rm r}/T_{\rm B}$ , то  $m \, g/k = L/n^2$ , а искомая длина пружины в недеформированном состоянии должна быть равна

$$L_0 = L - L/n^2 = 8L/9$$
.

І.16. Из условия задачи следует, что стержень и прикрепленная к нему муфта после обрыва нити могут двигаться только поступательно по вертикали. Поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно найти закон движения любой точки муфты. Если ось 0X направить вертикально вниз и выбрать начало отсчета на этой оси совпадающим с точкой A, то до момента обрыва нити координата x, точки C на оси стержня на уровне, на котором находился бы верхний торец муфты при недеформированной пружине, по условию задачи будет равна  $x_0 - \delta x$ . После обрыва нити (t > 0) на стержень будут действовать сила тяжести Mg и сила F со стороны пружины, т.к. сил трения нет. Полагая, как обычно, что точка А покоится относительно инерциальной системы отсчета, уравнение движения стержня можно записать в виде:  $M\ddot{x}_c = Mg + F_x$ , где  $\ddot{x}_c$  и  $F_x$  – проекции ускорения стержня и силы F на ось  $\partial X$ . По условию задачи масса муфты m много меньше массы стержня М. Учитывая, что в момент обрыва нити стержень и муфта покоились, можно предположить, что максимальное значение  $F_{\rm x}$ не должно превышать m g, а потому при t > 0 стержень будет двигаться практически с постоянным ускорением д. Следовательно, закон движения прЯ сделанном предположении  $x_c(t) = x_0 - \delta x + g t^2/2$ .

Поскольку на муфту действуют только сила тяжести и невесомая пружина, то уравнение движения муфты в проекции на ось  $\partial X$  будет иметь вид:  $m \ddot{x}_{\text{м}} = m g - F_{\text{x}}$ , где  $x_{\text{м}}$  — кородината верхнего торца муфты. Если коэффициент жесткости пружины обозначить k, то на основании закона Гука можно утверждать, что  $F_{\text{x}} = k \ x(t)$ , где  $x(t) = x_{\text{m}}(t) - x_{\text{c}}(t)$ . Поскольку  $\ddot{x}_{\text{м}} = \ddot{x} + \ddot{x}_{\text{c}} = \ddot{x} + g$ , то, уравнение движения муфты можно представить в виде:  $m \ddot{x} + m g = m g - k x$ , или  $m \ddot{x} = -k x$ . Учитывая, что  $x(0) = \delta x = m g/k$ , и в момент обрыва нити стержень и муфта покоились, т.е.  $\dot{x}(0) = 0$ , решение уравнения движения муфты относительно стержня можно записать в виде:  $x(t) = \delta x \cdot \cos t \sqrt{k/m}$ . Поскольку максимальное

значение косинуса не превышает единицы, то действительно  $|F_x| \le k \, \delta x = \pm m \, g$ , а потому искомый закон движения муфты относительно точки A при t > 0 будет иметь вид:

$$x_{\rm M}(t) = x(t) + x_{\rm c}(t) = x_0 + (\cos t \sqrt{g/\delta x} - 1)\delta x + g t^2/2$$
.

І.17. Звуковая волна в воздухе представляет собой последовательность разрежений и сжатий, распространяющихся со скоростью с, определяемой только свойствами воздуха. Расстояние между соседними максимумами сжатия (или разрежения), т.е. ближайшими точками вдоль направления распространения звука, колеблющимися с точностью до  $2\pi$  в одинаковой фазе, равно длине волны. Если бы автомобиль был неподвижен относительно воздуха, то это расстояние было бы равно  $\lambda_0 = c T_0$ , где  $T_0$  – период колебаний звукового сигнала. Полагая воздух в среднем неподвижным относительно дороги, а направление скорости автомобиля практически совпадающим с прямой, проведенной от автомобиля к пешеходу, можно утверждать, что расстояние между ближайшими друг к другу максимумами сжатия, воспринимаемыми пешеходом, будет отличаться от  $\lambda_0$  на величину смещения автомобиля за период колебаний, равную  $v T_0$ . Частота звука, воспринимаемого пешеходом, равна числу максимумов сжатия. приходящих к нему в расчете на единицу времени. Поэтому воспринимаемая пешеходом частота звука от приближающегося автомобиля должна быть равна  $v_+ = c/\lambda_+ = c/[(c-v) \cdot T_0] = v_0 c/(c-v)$ , а от удаляющегося –  $\nu_- = c/\lambda_- = c/[(c+\nu)\cdot T_0] = \nu_0 \ c/(c+\nu)$ , где  $\nu_0 = 1/T_0$  — частота звука, издаваемого автомобилем. Отсюда следует, что после того, как автомобиль проедет мимо пешехода, воспринимаемая пешеходом частота звука уменьшится в п раз, равное

$$n = \frac{v_+}{v} = \frac{c+v}{c-v} \approx 1,22.$$

## II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

II.1. При решении задачи будем предполагать, что лабораторная система отсчета, относительно которой рассматриваемая система тел неподвижна, является инерциальной. Тогда, учитывая, что трубка является гладкой, условия равновесия поршней и нити можно записать в виде:

гладкой, условия равновесия поршней и нити можно записать в виде:  $m_{\rm B}g+S_{\rm B}(p_0-p_{\rm B})+F_{\rm B}=0$ ,  $m_{\rm H}g-S_{\rm H}(p_0-p_{\rm H})-F_{\rm H}=0$ ,  $m_{\rm g}+F_{\rm H}-F_{\rm B}=0$ , где  $m_{\rm B}$  и  $m_{\rm H}$  — массы верхнего и нижнего поршней, m — масса нити, g — величина ускорения свободного падения, а  $p_{\rm B}$  и  $p_{\rm H}$  — давления телия в исходном состоянии вблизи обращенных друг к другу поверхностей верхнего и нижнего поршней, соответственно, а  $F_{\rm B}$  и  $F_{\rm H}$  — модули сил, с которыми нить действует на верхний и нижний поршни. Поскольку по условию задачи поршни тяжелые, то массой гелия следует пренебречь и считать, что давление гелия во всех точках одинаково, т.е.  $p_{\rm B}=p_{\rm H}=p$ . Учитывая, что  $m_{\rm B}+m_{\rm H}+m=M$  и  $S_{\rm B}-S_{\rm H}=\Delta S$ , из составленных выше уравнений следует, что поршни будут находиться в равновесии, если M  $g=(p-p_0)$   $\Delta S$ .

При медленном опускании поршней объем гелия должен уменьшаться, хотя его давление должно оставаться неизменным и равным p. Поэтому неизменной должна оставаться и сила натяжения нити, и ее длина (даже если нить деформируема). Учитывая это, можно утверждать, что при опускании верхнего поршня на расстояние h объем гелия должен уменьшиться на величину  $\Delta V = h \Delta S$ . Если, как обычно, считать гелий идеальным газом, то согласно уравнению Клапейрона-Менделеева уменьшение объема моля гелия при неизменном давлении связано с понижением его температуры на величину  $\Delta T$  соотношением:  $p \Delta V = R \Delta T$ , где R – универсальная газовая постоянная. Подставляя в это соотношение значения  $\Delta V$  и p, после алгебраических преобразований получим, что при соблюдении сделанных предположений температура гелия должна понизиться на  $\Delta T = (Mg + p_0 \Delta S) h/R.$ 

II.2. Как известно, давление насыщенных паров воды становится равным нормальному атмосферному давлению p = 1 атм при температуре  $t_3 = 100$ °C. Поэтому можно считать, что при меньших температурах нагревание воды сопровождается лишь увеличением ее внутренней энергии и совершением работы против сил внешнего давления за счет расширения воды без изменения ее фазового состояния. Последнее предположение будет справедливо либо при условии, что вода не соприкасается с газообразной средой, либо тогда, когда можно пренебречь ее испарением с открытой поверхности. Будем считать, что тепло к воде подводится достаточно медленно, и температура во всех точках воды одинаковая. Тогда для нагревания воды до температуры  $t_3$  в соответствии с определением удельной теплоемкости необходимое количество теплоты должно быть равно  $\Delta Q_1$  =  $=m~c~(t_3-t_1)$ . При достижении температуры  $t_3$ , поскольку в условии задачи нет специальных указаний, должен начаться процесс интенсивного парообразования - кипения. Считая, по-прежнему, что тепло подводится достаточно медленно, можно утверждать, что этот процесс является изобарически-изотермическим, и для перевода воды из конденсированного состояния в газообразное необходимо затратить количество теплоты  $\Delta Q_2 = m L$ . При дальнейшем нагревании водяной пар становится ненасыщенным, т.к. процесс нагревания по условию ведется при неизменном давлении, а давление насыщенных паров с ростом температуры увеличивается. Если, как обычно, считать, что к парам вплоть до точки насыщения применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, то при нагревании от температуры  $t_2$  до температуры  $t_2$  объем пара должен увеличиться на величину  $\Delta V = m R (t_2 - t_3)/(\mu p)$ , где  $R \approx 8.31 Дж/(моль · K)$  — универсальная газовая постоянная, а  $\mu = 18 \text{г/моль} - \text{молярная масса воды.}$  При этом пар совершит работу  $\Delta A = p \, \Delta V$  против сил внешнего давления. По условию задачи внутренняя энергия водяного пара в n=2 раза превышает внутреннюю энергию того же количества идеального одноатомного газа. Поэтому, вспоминая, что внутренняя энергия моля указанного газа равна- $W^\Gamma=1.5~R~T$ , где T — абсолютная температура газа, приращение внутренней энергии водяного пара равно  $\Delta W=1.5~n~m~R~(t_2-t_3)/\mu$ . Из приведенных выше соотношений и закона сохранения энергии следует, что искомое количество теплоты равно  $\Delta Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\Delta A+\Delta W=m\left[(t_3-t_1)~c+L+(1.5~n+1)~(t_2-t_3)~R/\mu\right]\approx 95~кДж$ .

II.3. Поскольку в начальный период откачки давление под колоколом вакуумного насоса быстро уменьшилось до величины p, а затем в течение довольно длительного времени  $\tau = 20$  мин оставалось неизменным при постоянной температуре, можно считать, что в начальный период из под колокола в основном откачивался воздух. Стабилизация же давления наступила тогда, когда из-за его снижения температура кипения воды - интенсивного перехода воды из конденсированной фазы в газообразную - стана равна t = 5°C. Вспоминая, что кипение в тонком слое жидкости начинается тогда, когда давление ее насыщенных паров становится равным давлению на открытую поверхность, можно утверждать, что при указанной температуре давление насыщенных паров воды равно р. Пренебрегая массой паров воды, откачанной в начальный период и оставшейся под колоколом к моменту нового резкого падения давления, можно считать, что вода, находившаяся в вате, после испарения при температуре t и давлении p должна была бы занимать объем, равный  $V \tau$ . При этом мы пренебрегаем парциальным давлением воздуха, находившегося под колоколом после окончания начального периода откачки. Считая, как обычно, что уравнение состояния паров вплоть до точки насыщения совпадает с уравнением состояния идеальных газов, с учетом сделанных предположений вычислим искомую массу воды:  $m = p V \mu \tau / (R T) \approx 0.81 \Gamma$ , т.к. универсальная газовая постоянная  $R \approx 8,31 \, \text{Дж/(моль · K)}$ , молярная масса воды  $\mu = 18 \, \text{г/моль}$  и абсолютная температура под колоколом  $T \approx 278 \, \mathrm{K}$ .

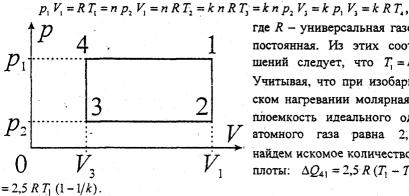
II.4. Вспоминая определение точки росы, можно утверждать, что когда объем влажного воздуха уменьшили до величины  $V_1$ , содержащийся в цилиндре пар стал насыщенным. Считая, что к парам вплоть до точки насыщения применимо уравнение Клапейрона-Менделеева, можно утверждать, что количество молей пара, находившегося в цилиндре под поршнем, равно  $v = p_{\rm H1} V_1/R \, T_1$ , где R — универсальная газовая постоянная. Если предположить, что в конечном состоянии парциальное давление паров меньше  $p_{\rm H2}$ , то с учетом сделанного выше предположения это давление должно быть равно  $p_2 = v \, R \, T_2/V_2$ . Поскольку согласно определению, используемому в метеорологии, относительная влажность равна отношению парциального давления паров к давлению насыщенных паров данного вещества при той же температуре, искомая относительная влажность должна быть равна

$$r = \begin{cases} \frac{p_{\text{H}1}V_1T_2}{p_{\text{H}2}V_2T_1} \cdot 100\% & \text{при } p_2 = \frac{p_{\text{H}1}V_1T_2}{V_2T_1} \leq p_{\text{H}2} \\ 100\% & \text{при } p_2 \geq p_{\text{H}2} \end{cases}$$

II.5. Из условия задачи следует, что находящийся в цилиндре пар в исходном состоянии был ненасыщенным. Будем, как это обычно и делают, считать, что вплоть до точки росы изменение объема пара при его охлаждении происходит так же, как и у идеального газа. Тогда можно утверждать, что в исходном состоянии объем пара должен был быть равным  $V_1 = R \, T_1 \, \nu/p$ , где  $R \approx 8,31 \, \text{Дж/(моль} \cdot \text{K})$ — универсальная газовая постоянная,  $\nu$ — количество пара (в молях), p— его давление, а  $T_1 \approx t_1 + 273$  — абсолютная температура в градусах шкалы Кельвина. Поскольку при изобарическом охлаждении до температуры  $t_2$  сконденсировалась  $n^{20}$  часть массы пара, следует считать, что в газообразной фазе в конечном состоянии осталось  $(1-n)\nu$  молей вещества. По условию задачи газообразная фаза в конечном состоянии имела объем  $V_2 = (1-0,01 \, k) \, V_1$ , который с учетом ранее сделанного предположения должен удовлетворять—уравнению  $pV_2 = (1-0,01 \, k) \, V_2 = (1-0,01 \, k) \, V_3$ 

 $= (1-n) v R T_2$ . Отсюда следует, что искомая температура равна  $T_2 = T_1 \frac{1 - 0.01 \, k}{1 - n} \approx 338 \, \text{K} \approx 65^{\circ} \text{C}$ .

II.6. По условию задачи в цикле используется неизменное количество - один моль - гелия. Поскольку гелий является одноатомным газом, то следует считать, что неизменной остается и масса гелия, используемого в цикле. Поэтому на первом и третьем участках цикла, где плотность гелия остается неизменной, постоянным должен оставаться и объем гелия. Считая, как обычно, что гелий при рассматриваемых процессах подчиняется уравнению состояния идеального газа, можно утверждать, что на втором и четвертом участках неизменным должно оставаться давление гелия. Построенная в соответствии со сказанным рУ-диаграмма заданного цикла показана на рисунке. Если считать, что давление гелия на первом участке уменьшается в n раз, т.е.  $p_1 = n$   $p_2$ , и учесть, что по условию задачи температура гелия на втором участке уменьшается в k раз, т.е.  $T_1 = T_2/k$ , то согласно уравнению Клапейрона-Менделеева должны выполняться следующие соотношения:



где R - универсальная газовая постоянная. Из этих соотношений следует, что  $T_1 = k T_4$ . Учитывая, что при изобарическом нагревании молярная теплоемкость идеального одноатомного газа равна 2,5 R, найдем искомое количество теплоты:  $\Delta Q_{41} = 2.5 R (T_1 - T_4) =$ 

II.7. Поскольку в условии задачи специально не оговаривается, что молярный состав газа изменяется, его следует считать неизменным. Поэтому на первом и третьем участках цикла должен оставаться неизменным объем газа. Учитывая, что уравнение состояния моля идеального газа имеет вид pV = RT, где R — универсальная газовая постоянная, а T — абсолютная температура газа, можно утверждать, что на втором и четвертом участках цикла давления газа постоянны. Если давления газа на этих участках обозначить  $p_2$  и  $p_1$ , а объемы газа на первом и третьем участках  $V_1$  и  $V_3$ , то pV-диаграмма заданного цикла будет иметь вид, показанный на рисунке к решению задачи II.6, а работа газа за один цикл будет равна  $A = (V_1 - V_3)(p_1 - p_2)$ . По условию задачи температура газа в точке 2 равна  $T_1/k$ , и поскольку отношение плотностей неизменной массы газа обратно пропорционально занимаемому им объему, то  $V_1/V_3 = \rho_3/\rho_1 = m$ , а искомая работа газа может быть вычислена по формуле:

$$A = R T_1 (1 - m^{-1})(1 - k^{-1}).$$

II.8. Поскольку ось цилиндра горизонтальна, то, пренебрегая силами трения поршня о стенки сосуда, можно утверждать, что при равновесии давления гелия и аргона на поршень должны быть одинаковыми. Будем также считать, что к этим газам применимо уравнение состояния идеального газа. Тогда, обозначив отношение числа  $\nu_1$  молей гелия к числу  $\nu_2$  молей аргона символом n, можно утверждать, что объемы гелия  $V_1$  и аргона  $V_2$  в исходном состоянии должны удовлетворять соотношению  $V_1$   $T_2 = nV_2$   $T_1$ , а после выравнивания температур (пренебрегая, конечно, деформациями сосуда) должно иметь место равенство  $V_2 = nV_1$ . Из приведенных выражений следует, что  $n = \sqrt{T_2/T_1}$ .

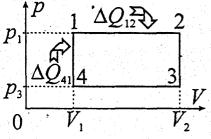
Вспоминая, что внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа, имеющего абсолютную температуру T, равна 1,5 R T, где R — универсальная газовая постоянная, внутренние энергии гелия и аргона в исходном и конечном состояниях должны быть равны  $W_{\rm H} = 1,5 \ R \ (\nu_1 T_1 + \nu_2 \ T_2)$ 

и  $W_{\rm k}=1,5~R~(\nu_1+\nu_2)~T_{\rm k}$ . Согласно условию задачи теплообменом газов с окружающей сосуд средой следует пренебречь. Поскольку следует пренебречь и теплоемкостью сосуда с поршнем, работа сил тяжести над телами системы равна нулю, и на поршень по предположению не действуют силы трения, то по закону сохранения энергии внутренняя энергия газов в исходном и конечном состояниях должна быть одинаковой. Следовательно, должно быть справедливым соотношение:  $nT_1+T_2=(n+1)T_{\rm k}$ . Подставляя в это соотношение ранее найденное значение n, получим, что при выполнении сделанных предположений искомая температура должна быть равна  $T_{\rm k}=\sqrt{T_1\,T_2}$ .

ІІ.9. Заданный цикл можно рассматривать в качестве рабочего цикла теплового двигателя, т.к. работа газа за такой цикл положительна. Как известно, максимальное значение КПД теплового двигателя равно отношению работы, совершенной ее рабочим веществом за цикл, к количеству теплоты, полученной этим веществом за то же время. В рассматриваемом цикле изменение параметров газа происходило квазиравновесно, т.к. в противном случае было бы невозможно ввести понятие температуры для всего объема газа, что противоречило бы условию задачи. В силу того, что газ обладает свойством текучести, со стороны газа на ограничивающие его объем поверхности в состоянии равновесия, могут действовать силы, направленные только по нормали к этим поверхностям. Поэтому работа газа при изобарическом увеличении его объема на величину  $\Delta V$  будет равна  $\Delta A = p \Delta V$ , где p – давление газа. Пользуясь этим выражением и разбивая заданный диапазон изменения объема газа на столь малые участки, чтобы в пределах каждого из них давление газа можно было бы считать постоянным, можно доказать, что при произвольном квазиравновесном изменении параметров работа газа за цикл будет пропорциональна площади, ограниченной линиями этого цикла, если его изобразить на pV-диаграмме.

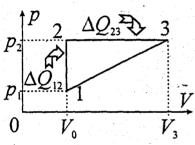
На участках 1-2 и 3-4 температура неизменного количества молей иде-

ального газа изменяется пропорционально его объему. Следовательно, на основании уравнения Клапейрона—Менделеева можно утверждать, что на этих участках изменение состояния газа происходит изобарически. На двух же других участках параметры газа изменяются изохорически. Поэтому pV-диаграмма заданного цикла имеет вид, показанный на рисунке, а работа газа за один цикл с учетом обозначений на этом рисунке равна  $\Delta A = (V_2 - V_1)(p_1 - p_3)$ . На участке 1-2 газ совершает работу  $\Delta A_{12} =$ 



 $2^{12}$  2  $= (V_2 - V_1) p_1$ , а его температура (следовательно, и внутренняя энергия) возрастает. Согласно первому закону термодинамики получаемое газом от нагревателя количество теплоты на этом участке должно быть равно  $\Delta Q_{12} = \Delta A_{12} + \Delta W_{12}$ , где  $\Delta W_{12}$  — приращение внутренней энергии газа на

П.10. Как обычно, будем считать, что изменение параметров газа происходит квазиравновесно. Вспоминая, что внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа с абсолютной температурой T равна 1,5 R T, где R — универсальная газовая постоянная, и что при изохорическом нагревании газ не совершает работы, на основании первого закона термодинамики можно утверждать, что газ на первом участке заданного цикла получает от нагревателя количество теплоты  $\Delta Q_{12} = 1,5$  R  $(T_2 - T_1)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — темпе-



ратуры газа до и после такого нагревания. На втором участке температура газа растет прямо пропорционально его объему. Поскольку давление p, объем V и абсолютная температура T моля идеального газа связаны между собой соотношением pV = RT, то на втором участке давление газа должно оста-

ваться неизменным, а газ при нагревании должен совершить работу  $\Delta A_{23} = (V_3 - V_0) \ p_2$ , где  $V_3$  — объем газа после его изобарического нагревания, а  $p_2$  — давление газа на этом участке. Если температуру газа в конце второго участка цикла обозначить  $T_3$ , то приращение внутренней энергии газа на этом участке должно быть равно  $\Delta W_{23} = 1,5\ R\ (T_3 - T_2)$ . Следовательно, газ на втором участке цикла должен был получить от нагревателя количество теплоты  $\Delta Q_{23} = \Delta A_{23} + \Delta W_{23}$ . При переводе газа в исходное состояние его температура и объем уменьшаются по закону  $p = R\ \beta\ V$ . Поэтому на последнем участке цикла газ должен отдавать тепло холодильнику, а диаграмма цикла в pV-координатах должна иметь вид, показанный на рисунке. Таким образом, полученное газом за цикл количество теплоты должно быть равно  $\Delta Q_{\rm H} = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta A_{23}$ . По условию задачи  $T_1 = \beta\ V_0^2$ ,  $T_2 = \alpha\ V_0$  и  $T_3 = \alpha\ V_3 = \beta\ V_3^2$ , а т.к. газ является идеальным, то с учетом введенных обозначений должны выполняться соотношения:  $p_1\ V_0 = R\ T_1$ ,  $p_2\ V_0 = R\ T_2$  и  $p_2\ V_3 = R\ T_3$ , где  $p_1$  — давление газа в исходном

состоянии. С учетом этих соотношений переданное нагревателем газу за цикл количество теплоты должно быть равно:  $\Delta Q_{\rm H} = (\alpha - \beta \, V_0) \, (2.5 \, \alpha + 1.5 \, \beta \, V_0) \, R/\beta$ . Поскольку диаграмма цикла имеет вид прямоугольного треугольника с высотой  $p_2 - p_1$  и основанием  $V_3 - V_0$ , то совершенная газом за цикл работа должна быть равна  $\Delta A = 0.5 \, (p_2 - p_1) \, (V_3 - V_0) = 0.5 \, R \, (\alpha - \beta \, V_0)^2 / \beta$ , а потому искомая величина КПД заданного цикла  $\eta = \frac{\Delta A}{\Delta O_{\rm W}} = \frac{\alpha - \beta \, V_0}{5 \, \alpha + 3 \, \beta \, V_0}$ .

II.11. Поскольку на участке 1-2 газ расширяется изотермически, его температура остается неизменной, а совершаемая газом на этом участке работа  $\Delta A_{12}$  согласно первому закону термодинамики должна быть равна количеству теплоты  $\Delta Q_{12}$ , полученной при этом газом от нагревателя. На втором участке газ охлаждается, т.к. его давление изохорически уменьшается. При адиабатическом сжатии над газом совершают работу. При таком процессе газ не имеет теплового контакта с окружающими телами, а потому температура газа должна возрастать по мере увеличения степени его сжатия. Следовательно, максимальная температура ( $T_1$ ) газа в заданном цикле должна быть равна его температуре на участке 1-2, а минимальная ( $T_3$ ) — температуре газа в точке 3.

Согласно условию задачи температура нагревателя машины, работающей по циклу Карно, должна быть равна  $T_1$ , а температура холодильника этой машины  $T_3$ , причем эти температуры должны удовлетворять соотношению  $\eta_{\rm K}=1-T_3/T_1$ . Считая, что полезная работа первой машины за каждый цикл равна работе газа за тот же промежуток времени, на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что КПД этой машины равен отношению разности количеств теплоты, полученной газом от нагревателл  $\Delta Q_{\rm H}=\Delta Q_{12}$  и отданной холодильнику  $\Delta Q_{\rm X}$ , к количеству теплоты  $\Delta Q_{\rm H}$ , переданной газу нагревателем, т.е.  $\eta=(\Delta Q_{\rm H}-\Delta Q_{\rm X})/\Delta Q_{\rm H}$ . Если обозначить теплоемкость газа при изохорическом процессе  $C_{\rm V}$  и учесть, что газ отдает тепло только на участке 2-3, то отданное газом за цикл количе-

ство теплоты должно быть равно  $\Delta Q_{\rm x}=(T_1-T_3)\,C_{\rm v}=\eta_{\rm k}\,T_1\,C_{\rm v}$ . Вспоминая, что внутренняя энергия газа равна произведению его абсолютной температуры на теплоемкость при изохорическом нагревании, т.е.  $W_1=T_1\,C_{\rm v}$ , то  $\Delta Q_{\rm x}=\eta_{\rm k}\,W_1=(1-\eta)\,\Delta Q_{\rm H}$ . Отсюда следует, что искомая работа равна  $\Delta A_{12}=\Delta Q_{\rm H}=\frac{\eta_{\rm k}\,W_1}{1-\eta}$ 

II.12. Обозначим количество теплоты, которым обменивается газ с нагревателем или холодильником при переходе из точки і в точку ј, символом  $Q_{ij}$  и будем считать, что  $Q_{ij}>0$ , если газ получает тепло, и  $Q_{ij}<0$ , если он его отдает. На участках 2-3 и 4-1 цикла Карно изменение состояния газа происходит адиабатически, т.е. без теплообмена с окружающими телами. На участке 1-2 объем газа увеличивается изотермически. Следовательно, на этом участке газ должен получать тепло от нагревателя. На участке 3-4 над газом совершается работа без изменения его внутренней энергии. Следовательно, на этом участке газ должен отдавать тепло холодильнику. При изменении состояния в первом цикле при переходе газа из точки 2 в точку 4 он отдает тепло. Поэтому из первого закона термодинамики и определения КПД цикла следует, что  $\eta_{\rm K} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}}$ , а  $\eta_{\rm I} = \frac{Q_{12} + Q_{24}}{Q_{12}}$ . Замечая, что во втором цикле при переходе из точки 4 в точку 2 газ соверша-

ет работу и его внутренняя энергия увеличивается, можно утверждать, что КПД второго цикла должен быть равен  $\eta_2 = \frac{Q_{42} + Q_{34}}{Q_{42}}$ . Из первых двух со-

отношений следует, что  $\frac{Q_{34}}{Q_{24}} = \frac{\eta_{\kappa} - 1}{\eta_{1} - 1}$ . Поскольку  $Q_{24} = -Q_{42}$ , а из выражения для КПД второго цикла следует, что  $\frac{Q_{34}}{Q_{12}} = \eta_{2} - 1$ , то искомый КПД

должен быть равен  $\eta_2 = \frac{\eta_{\rm K} - \eta_1}{1 - \eta_1}$ .

## III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

III.1. По условию задачи размеры шарика малы по сравнению с расстоянием h от него до плоскости. Поэтому шарик можно считать точечным зарядом. Учитывая, что требуется найти амплитуду малых колебаний, а длина нити L сравнима с h, можно считать, что при таких колебаниях расстояние между шариком и плоскостью остается практически неизменным и равным h.

Как известно, если к проводнику, т.е. телу, в котором имеются свободные носители электрического заряда (носители, способные перемещаться в пределах всего проводника под действием сколь угодно малых сил), начать подносить заряженное тело, то в проводнике возникнет дв жение свободных зарядов. Оно будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы всех точек проводника не станут одинаковыми. Другими словами, в проводнике будет существовать электрический ток до тех пор, пока линии напряженности поля, порождаемого заряженным телом и зарядами проводника, вблизи его поверхности не станут перпендикулярными поверхности проводника. Время установления равновесного распределения свободных зарядов и потери энергии, обусловленные движением этих зарядов, должны быть тем меньше, чем меньше удельное сопротивление проводника. Поскольку плоскость является идеально проводящей, будем считать, что распределение свободных зарядов по плоскости в любой момент времени совпадает с тем, каким бы оно было, если бы шарик в данном положении находился бесконечно долго, и будем пренебрегать указанными выше потерями.

Известно, что разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на одинаковых расстояниях от двух разноименных точечных зарядов, равных по абсолютной величине, равна нулю. Поэтому силовые линии поля двух указанных точечных зарядов должны быть не только симметричны относительно плоскости, перпендикулярной прямой, соеди-

няющей эти заряды и проходящей через ее середину, но и в непосредственной близости от этой плоскости быть ей перпендикулярными. Следовательно, можно утверждать, что электрическое поле двух точечных зарядов +q и -q по одну сторону от плоскости симметрии должно быть таким же, как и поле над проводящей плоскостью со стороны шарика с зарядом q, если расстояние между зарядами равно 2 h. Учитывая все сказанное выше, на основании закона Кулона можно утверждать, что на шарик со стороны плоскости должна действовать направленная вертикально вниз сила  $F_2 = q^2 / [4 \pi \, \tilde{\epsilon}_0 \, (2 \, h)^2]$ , где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Поскольку силами трения и потерями энергии, связанными с перераспределением свободных зарядов по плоскости при движении шарика, можно пренебречь, проекция вектора ускорения шарика на направление касательной к его траектории будет зависеть только от силы F, и силы тяжести  $F_{\tau} = m \ g$  , где g - ускорение свободного падения. Поэтому согласно второму закону Ньютона в тот момент, когда шарик находится на расстоянии s от положения равновесия, т.е. нить отклонена от вертикали на угол  $\alpha = s/L$ , тангенциальная составляющая  $a_r$  ускорения шарика будет равна  $a_r = -[(F_3 +$  $+F_{\tau}$ )  $\sin \alpha$ ]/m. Учитывая, что при  $\alpha << 1$  и измерении величины угла в радианах  $\sin \alpha \approx \alpha$ , тангенциальная составляющая ускорения прямо пропорциональна смещению шарика от положения равновесия и направлена к нему, малые колебания шарика должны быть гармоническими. Поскольку при таких колебаниях  $a_{\tau} = -\omega^2 s$ , а угловая частота колебаний  $\omega$  и их период T связаны соотношением  $T=2\pi/\omega$ , искомый период должен быть

равен 
$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g + q^2/[16 \pi \varepsilon_0 m h^2]}}$$

III.2. В соответствии с условием при решении задачи будем пренебрегать не только силами магнитного взаимодействия между заряженными частицами, но и потерями энергии на излучение движущихся с ускорением частиц. Поскольку в условии специально не оговаривается, что части-

цы имеют очень большую массу, будем пренебрегать и силами их гравитационного взаимодействия. Таким образом, при решении задачи будем учитывать только силы кулоновского взаимодействия между частицами. Как и обычно, при решении подобных задач все частицы будем считать точечными. Поскольку о характере движения центрального положительного заряда в условии задачи специально ничего не говорится, будем считать его неподвижным относительно некоторой инерциальной системы отсчета. В этом случае положительный заряд должен находиться в одной плоскости с круговой орбитой отрицательно заряженных частиц. Учитывая, что движущиеся частицы одинаковые, и расстояния между любыми двумя соседними частицами равны, можно утверждать, что эти частицы находятся в вершинах квадрата со стороной  $a = \sqrt{2} R$ , центр которого совпадает с положительным зарядом. Поэтому равнодействующая сил, действующих на каждую из отрицательно заряженных частиц, направлена к положительному точечному заряду и равна

$$F = \frac{q^2}{4 \pi \varepsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{16 \pi \varepsilon_0 R^2} q^2,$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. Первый член в круглых скобках учитывает взаимодействие данной частицы с положительным зарядом, второй — взаимодействие с диаметрально противоположной отрицательной частицей, а последний — взаимодействие с ближайшими двумя отрицательными частицами.

Поскольку центростремительное ускорение согласно законам кинематики равно квадрату угловой скорости, умноженному на радиус орбиты, а по второму закону Ньютона оно равно отношению суммы проекций всех действующих на точку сил на направление к центру круговой траектории, к массе точку, то искомая угловая скорость должна быть равна

$$\omega = \frac{q}{4R} \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\pi \, \varepsilon_0 \, mR}} \, .$$

III.3. При изменении положения конденсатора под действием внешнего поля должно происходить перераспределение зарядов на каждой из его пластин. Упорядоченное движение свободных зарядов в пределах пластины будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы всех ее точек вновь не станут одинаковыми. Как известно, протекание тока по проводнику, находящемуся не в сверхпроводящем состоянии, сопровождается тем более интенсивным выделением тепла, чем больше сила тока. Если же сила тока изменяется со временем, то возникает еще и излучение. Отсюда ясно, что работа по повороту конденсатора будет минимальной, если этот поворот осуществлять бесконечно медленно.

По условию задачи конденсатор до внесения во внешнее поле имел заряд q, т.е. его пластинам были сообщены равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Поскольку конденсатор является плоским, можно считать, что эти заряды практически равномерно распределились на внутренних поверхностях пластин, создав между ними однородное поле с напряженностью  $E_q = q/\varepsilon S$ , где  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего пространство между пластинами, а S - площадь пластин. Вне конденсатора, за исключением областей вблизи краев его пластин, электрическое поле можно считать равным нулю. Следовательно, если вблизи области пространства, куда вносят конденсатор и где его затем поворачивают, нет протяженных тел, наличие зарядов на пластинах не может вызвать изменения внешнего поля. Вместе с тем, под действием внешнего поля в пределах каждой из пластин свободные заряды должны перераспределиться так, чтобы электрическое поле внутри пластины отсутствовало. Поскольку до и после поворота плоскости пластин по условию перпендикулярны вектору напряженности внешнего поля E, то вектор напряженности поля  $E_0$  должен быть и в начальном, и в конечном состояниях коллинеарен вектору E.

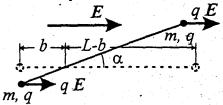
По условию задачи указанные вектора до поворота конденсатора были направлены противоположно. Поэтому на внешней поверхности по-

ложительно заряженной пластины под действием поля E должны появиться положительные заряды, а на ее внутренней поверхности - равные им по модулю отрицательные, т.к. полный заряд изолированной пластины согласно закону сохранения заряда должен оставаться неизменным. На внешней же поверхности отрицательно заряженной пластины появятся отрицательные, а на внутренней - положительные заряды. Поскольку поле индуцированных зарядов внутри пластины должно компенсировать внешнее поле, напряженность поля в конденсаторе будет равна  $E - E_a$ . Рассуждая аналогично, можно доказать, что напряженность поля в конденсаторе после его поворота должна стать равной  $E+E_{\rm q}$ . Вспоминая, что плотность энергии электрического поля равна половине произведения квадрата его напряженности на абсолютную диэлектрическую проницаемость вещества, в котором создано поле, и объем поля в плоском конденсаторе равен S b, найдем приращение энергии поля при повороте конденсатора:  $\Delta W = [(E + E_q)^2 - (E - E_q)^2] \varepsilon S b/2 = 2 q b E$ . Поскольку при медленном повороте заряженного конденсатора изменяется только энергия электрического поля в нем, то совершаемая при этом работа должна быть равна найденному приращению энергии этого поля.

К такому же результату можно придти и несколько иным путем. Поскольку поворот конденсатора, как было выяснено выше, следует осуществлять достаточно медленно, и разность потенциалов между точками внешнего поля E, в которых будут находиться пластины конденсатора после его внесения в поле и после поворота, по модулю равна  $\Delta \varphi = E b$ , то искомая работа должна быть равна  $\Delta A = 2 \ q \ b \ E$ .

III.4. Пусть для определенности заряд шариков положителен (q>0) и  $2\,b< L$ . Тогда в положении устойчивого равновесия стержень должен располагаться по отношению к силовым линиям электрического поля так, как показано на рисунке пунктирной линией, т.к. действие сил тяжести на шарики уравновешивается силами реакции стержня, а сам стержень закреп-

лен на вертикальной оси. Сплошной линией на этом рисунке показано положение стержня после его отклонения на угол  $\alpha$ . Поскольку в условии за-



дачи не оговорена необходимость учета действия сил трения, будем считать, что на стержень и шарики силы трения не действуют. Если, как это обычно и делается, не учитывать потерь энергии, обуслов-

ленных ускоренным движением электрических зарядов, то на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что кинетическая энергия системы при прохождении ею положения равновесия после отпускания без начального толчка должна быть равна работе электрических сил при перемещении заряженных шариков. Считая стержень твердым телом, поскольку иное не оговорено в условии задачи, следует полагать, что шарики должны иметь одинаковую угловую скорость. Учитывая, что стержень является невесомым, и пренебрегая размерами шариков по сравнению с их расстоянием до оси вращения, можно утверждать, что при угловой скорости  $\omega$  стержень с шариками должен обладать кинетической энергией

$$W_{\rm x} = m \,\omega^2 \,[b^2 + (L-b)^2]/2$$
.

Работу электрического поля можно вычислить, вспомнив определение разности потенциалов и связь этой величины с напряженностью однородного поля. Обратившись к рисунку, вычислим работу сил поля при перемещении стержня из отклоненного положения в положение равновесия

$$A = q E (L-2b) (1-\cos \alpha).$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что при любом знаке заряда шариков и произвольном соотношении между L и b работа сил поля может быть вычислена по формуле

$$A = |q| E |L - 2b| (1 - \cos \alpha).$$

Учитывая, наконец, что линейная скорость точки, движущейся по окружности радиуса b с угловой скоростью  $\omega$ , равна  $v = \omega b$ , найдем искомую скорость:

$$v = b \sqrt{\frac{2 |q| E |L - 2b| (1 - \cos \alpha)}{m [b^2 + (L - b)^2]}}.$$

III.5. После перевода ключа K из разомкнутого положения в положение "1" через резисторы должен начать протекать электрический ток, т.к. напряжения между обкладками конденсаторов различны. Поскольку в условии задачи специально не оговаривается время нахождения ключа K в положении "1", следует считать, что ток в цепи к моменту второго переключения полностью прекратится. При этом напряжения между обкладками конденсаторов станут равными. Равными будут и заряды обоих конденсаторов, т.к. по условию задачи их емкости равны. Однако полный заряд конденсаторов  $q = C_1 U_1 + C_2 U_2 = (U_1 + U_2) C$  согласно закону сохранения заряда должен остаться неизменным.

После перевода ключа K в положение "2" суммарный заряд соединенных между собой обкладок согласно сказанному выше должен стать равным нулю. Поэтому по прошествии достаточно большого промежутка времени оба конденсатора должны полностью разрядиться. Если, как это и деяается в подобных задачах, считать разряд конденсаторов столь медленным, что можно пренебречь излучением, то по закону сохранения энергии при разряде конденсаторов на резисторах должно было выделиться количество теплоты, равное  $\Delta Q = q^2/4C$ . Согласно закону Джоуля—Ленца тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе с сопротивлением R при протекании по нему тока I, равна  $N = I^2 R$ . Поскольку токи через резисторы  $R_1$  и  $R_2$  равны, то на резисторе  $R_1$  выделится количество теплоты

$$\Delta Q_1 = \frac{q^2 R_1}{4 (R_1 + R_2) C} = \frac{(U_1 + U_2)^2 n C}{4 (n+1)} = 0.12 \text{ Дж}.$$

III.6. После первого переключения ключа К в положение "2" происходит заряд конденсаторов. Поскольку емкости конденсаторов одинаковы, первоначально они были полностью разряжены и конденсаторы оказываются подключенными к источнику последовательно, установившееся напряжение на каждом из конденсаторов будет равно 6/2. При этом через источник пройдет заряд  $q_1 = \mathcal{E}C/2$ . Выделившееся на внутреннем сопротивлении источника количество теплоты можно вычислить на основании закона сохранения энергии, если, как то обычно и делается, пренебречь потерями, связанными с излучением электромагнитной энергии. Действительно, энергия электрического поля, возникшего в конденсаторах после их зарядки, равна  $W_3 = 2q_1^2/2 C$ . При этом сторонние силы согласно определению ЭДС совершат работу  $A_{cr} = \delta q_1$ . Часть этой работы была затрачена на создание электрического поля в конденсаторах, а другая при сделанном предположении должна быть равна количеству теплоты, выделившейся в источнике. Таким образом, после первого переключения ключа Kв положение "2" на внутреннем сопротивлении источника должно выделиться количество теплоты  $\Delta Q_1 = \delta q_1 - q_1^2/C$ . После переключения ключа К в положение "1" начинается разряд соединенного с ним конденсатора. По истечении достаточно большого промежутка времени этот конденсатор должен полностью разрядиться через сопротивление R, а заряд другого конденсатора, если, как обычно, пренебречь токами утечки, должен остаться неизменным и равным  $q_1$ . После повторного перевода ключа K в положение "2" конденсаторы вновь начнут заряжаться. Поскольку конденсаторы включены последовательно, то протекший через истонник и каждый из конденсаторов заряды должны быть равны. Если величину протекшего заряда обозначить  $q_1$ , то условие окончания заряда конденсаторов можно записать в виде:  $(q_1+q_2)/C+q_2/C=\delta$ , а количество теплоты  $\Delta Q_2$ , выделившейся на внутреннем сопротивлении источника, с учетом ранее сделанных предположений должно удовлетворять соотношению:

 $\mathcal{E} q_2 + q_1^2/2C = q_2^2/2C + \Delta Q_2 + (q_1 + q_2)^2/2C$ 

Из составленных уравнений после алгебраических преобразований получим, что искомое отношение количеств теплоты  $\Delta Q_1/\Delta Q_2 = 4$ .

III.7. Разные показания первого и третьего вольтметров (при условии, конечно, что вольтметры исправны) могут быть обусловлены только тем, что по резисторам R течет ток. Это, в свою очередь, может быть только в , том случае, если проводимость вольтметров отлична от нуля. Пусть внутреннее сопротивление каждого из вольтметров равно r, а через первый, второй и третий вольтметр текут токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , соответственно. Тогда на основании закона Ома для участка цепи постоянного тока можно утверждать, что  $V_2 = I_2 r$ ,  $V_3 = I_3 r$ ,  $V_2 = I_3 R + V_3$  и  $V_1 = (I_2 + I_3) R + V_2$ . При составлении последнего уравнения было учтено, что ток, текущий через резистор, включенный между первым и вторым вольтметрами, согласно закону сохранения заряда равен сумме токов, протекающих через второй и третий вольтметры. Если отношение сопротивления резистора к внутреннему сопротивлению вольтметра обозначить k, то, используя первые два уравнения, последние два можно записать в виде:  $V_2 = (1+k)V_3$  и  $V_1 = (1+k)V_2 + kV_3$ . Отсюда следует, что  $V_2^2 + V_2V_3 = (V_1 + V_3)V_3$ . Из двух возможных решений этого уравнения, очевидно, следует выбрать то, которое меньше показаний первого вольтметра, но превышает показания третьего. Поэтому искомое показание второго вольтметра должно быть равно

$$V_2 = \frac{\sqrt{5 + 4 V_1/V_3} - 1}{2} V_3 \approx 7,25 \,\mathrm{B}.$$

III.8. При решении задачи будем, поскольку другое не оговорено в условии, считать, что данная схема собрана столь давно, что оба конденсатора полностью зарядились и через них ток не течет. Тогда на основании закона Ома для полной цепи можно утверждать, что текущий через резистор и соединенные с ним последовательно источники ток равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} \,.$$

При составлении этого уравнения сила тока считалась положительной, если через первый источник ток течет от его отрицательного полюса к положительному. Было учтено и то, что сторонние силы в источниках в соответствии с обозначениями на схеме действуют в противоположных направлениях. Из сказанного и закона Ома для участка цепи, содержащего источник тока, следует, что модули разности потенциалов между пластинами первого и второго конденсаторов равны  $\Delta \varphi_1 = |\mathcal{E}_1 - I r_1|$  и  $\Delta \varphi_2 = |\mathcal{E}_2 + I r_2|$ . Поскольку заряд конденсатора равен произведению его емкости на модуль разности потенциалов между его обкладками, искомое отношение должно быть равно

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1 \, \Delta \varphi_1}{C_2 \, \Delta \varphi_2} = \frac{C_1}{C_2} \, \frac{\mathcal{E}_1 \, (R + r_2) + \mathcal{E}_2 \, r_1}{\mathcal{E}_2 \, (R + r_1) + \mathcal{E}_1 \, r_2}.$$

III.9. После того, как аккумулятор полностью зарядился, ни его ЭДС  $\mathcal{E}_a$ , ни его внутреннее сопротивление  $r_a$  не должны изменяться при дальнейшем пропускании зарядного тока. Поэтому можно считать, что эти характеристики аккумулятора не зависят от времени. Тогда в соответствии с законом Ома для полной цепи, пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, можно утверждать, что ток, текущий через аккумулятор, должен быть равен  $I = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_a)/(r + r_a)$ , где r – внутреннее сопротивление источника.

При соблюдении указанных выше условий энергия, отдаваемая источником, затрачивается только на совершение работы против сторонних сил в аккумуляторе и выделение тепла в нем. Следовательно, по закону Джоуля—Ленца и определению ЭДС отдаваемая источником мощность должна быть равна  $N(r_a) = I^2 r_a + I \mathcal{E}_a = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_a) (\mathcal{E} \, r_a + \mathcal{E}_a \, r)/(r + r_a)^2$ . Функция  $N(r_a)$  достигает своего максимума при таком значении аргумента  $r_a = r_{\rm am}$ , при котором производная этой функции по аргументу  $r_a$ 

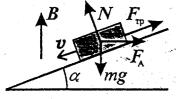
обращается в нуль. Поскольку  $r+r_{\rm a}\neq 0$  и  $\mathcal{E}\neq\mathcal{E}_{\rm a}$ , из сказанного следует, что  $\mathcal{E}(r+r_{\rm am})=2(\mathcal{E}r_{\rm am}+\mathcal{E}_{\rm a}r)$ , или  $r_{\rm am}=r\,(\mathcal{E}-2\mathcal{E}_{\rm a})/\mathcal{E}$ . Подставляя это значение внутреннего сопротивления аккумулятора в выражение для зарядного тока, получим  $I=\mathcal{E}/2r$ . С другой стороны, согласно закону Фаралея для электролиза сила тока через аккумулятор должна удовлетворять соотношению:  $I=mF_{\phi}\,z/\mu$ , где  $F_{\phi}\approx 96.5$  кКл/моль — число Фарадея, z=1 — валентность, а  $\mu=1$  г/моль — молярная масса атома водорода. Следовательно, искомое внутреннее сопротивление источника должно быть равно  $r=\mathcal{E}\,\mu/2mF_{\phi}\,z\approx 0.47$  Ом.

III.10. Действие силы Лоренца на свободные носители заряда в движущемся в магнитном поле бруске приводит к упорядоченному движению этих зарядов вдоль оси бруска и обуславливает появление силы Ампера, действующей на сам брусок. Хотя, исходя из этого утверждения, можно определить величину и направление силы Ампера, проще это можно сделать следующим образом. При движении бруска изменяется площадь проводящего контура, образуемого бруском, шинами и соединяющим их резистором. В результате изменения потока вектора индукции магнитного поля, сцепленного с указанным контуром, в нем должен согласно закону электромагнитной индукции и закону Ома течь ток, величина которого равна

$$I = \frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{BLv}{R} \cos \alpha,$$

где v — скорость движения бруска. При получении этого выражения было учтено, что скорость бруска направлена под углом  $\alpha$  к горизонту, и по условию задачи следует пренебречь сопротивлением шин, бруска, контактов между ними и индуктивностью контура, т.е. магнитным полем тока в нем. Учитывая, что брусок движется поступательно в однородном магнитном поле, и ток протекает по его участку длиной L, величина силы Ампера должна быть равна  $F_A = ILB$ , а т.к. вектор индукции магнитного поля на-

правлен вертикально и ось бруска горизонтальна, то сила Ампера должна лежать в горизонтальной плоскости и быть направлена перпендикулярно оси бруска. Согласно правилу Ленца из двух возможных направлений сле-



дует выбрать то, при котором сила Ампера будет тормозить движение бруска. На рисунке показаны силы, действующие на брусок: сила Ампера  $F_{\rm A}$ , нормальная составляющая N сил реакции шин, сила трения скольжения  $F_{\rm TP}$  и сила тяжести mg, где g —

ускорение свободного падения. Будем, как это обычно и делается в подобных задачах, пренебрегать действием сил со стороны воздуха на брусок и считать шины неподвижными относительно инерциальной системы отсчета. Тогда, поскольку по условию задачи брусок скользит по шинам равномерно, можно утверждать, что сумма всех сил, указанных на рисунке, должна быть равна нулю, т.е. должны выполняться соотношения:

$$N = m g \cos \alpha + F_A \sin \alpha$$
,  $m g \sin \alpha = F_{TP} + F_A \cos \alpha$ .

Поскольку  $F_{\rm rp} = \mu \, N$  и  $F_{\rm A} = L^2 \, B^2 \, v \cos \alpha / R$ , из предыдущих уравнений следует, что искомая скорость равномерного скольжения бруска при выполнении сделанных выше предположений должна быть равна

$$v = \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \mu) \, m \, g \, R}{(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) \, L^2 \, B^2 \cos \alpha}.$$

Отметим, что при нарушении условия задачи  $tg \alpha > \mu$ , даже если положенному на шины бруску была сообщена некоторая скорость, он не будет двигаться равномерно и через некоторое время остановится.

III.11. При повороте рамки указанным в задаче образом изменяется поток  $\Phi$  вектора индукции магнитного поля, сцепленный с ее витком. Согласно закону электромагнитной индукции при этом в витке рамки должны действовать сторонние электрические силы, энергетическая характеристика которых – ЭДС – равна  $\hat{e}(t) = \Delta \Phi/\Delta t$ , где  $\Delta \Phi/\Delta t$  – скорость

изменения сцепленного с витком потока. Пренебрегая в соответствии с условием изменением потока магнитного поля, создаваемого током в витке, можно утверждать, что в тот момент, когда скорость изменения потока внешнего магнитного поля равна  $\Delta \Phi/\Delta t$ , по витку должен течь ток  $I(t) = \mathcal{E}(t)/R$ , а за достаточно малый промежуток времени  $\Delta t$  через виток должен протечь заряд  $\Delta Q(t,t+\Delta t)=I(t)\Delta t$ . Суммируя заряды, протекцие через виток за время его поворота, получим  $Q = \sum \Delta \Phi / R$ . Если, как это обычно и делается в подобных задачах, пренебречь сечением проводника рамки по сравнению с ее площадью, то при заданном угле поворота рамки из начального положения суммарное изменение сцепленного с нею потока вектора индукции внешнего магнитного поля должно  $\sum \Delta \Phi = 2BS$ . Отсюда следует, сопротивление **OTP** R = 2BS/O.

При вращении рамки вокруг той же оси с угловой скоростью  $\omega$  мгновенная сила тока в витке при выполнении сделанных выше предположений и надлежащем выборе начала отсчета времени может быть представлена в виле:

$$I(t) = \frac{BS\omega}{R}\sin\omega t.$$

Учитывая, что согласно закону Джоуля—Ленца мгновенная мощность, выделяющаяся на проводнике с сопротивлением R при протекании по нему тока силой I, равна  $N(t) = I^2(t)R$ , а среднее значение квадрата гармонической функции за период равно 0,5, найдем искомую среднюю тепловую мощность:

$$\langle N \rangle = \langle I^2(t) R \rangle = B S Q \omega^2 / 4.$$

III.12. В соответствии с условием задачи магнитным потоком, пронизывающим материал проводников ротора можно пренебречь. Начало отсчета времени выберем так, чтобы модуль потока вектора индукции магнитного поля, создаваемого обмотками статора и сцепленного с обмоткой

ротора, был равен

$$|\Phi(t)| = |BSN\cos(\Omega - \omega)t|.$$

Будем, как это обычно и делается в подобных задачах, пренебрегать индуктивностью обмотки ротора, т.е. магнитным потоком через витки обмотки, создаваемым током в них. Тогда величина ЭДС, возникающей в обмотке, в соответствии с законом электромагнитной индукции (правилом потока Фарадея—Максвелла) должна быть равна скорости изменения сцепленного с этой обмоткой потока внешнего магнитного поля, т.е.

$$|\mathcal{E}(t)| = |d\Phi/dt| = |BSN(\Omega - \omega)\sin(\Omega - \omega)t|.$$

При сделанных предположениях сила тока в обмотке ротора по закону Ома равна  $|I(t)| = |\mathcal{E}(t)|/R$ . Поэтому действующий на ротор момент сил со стороны магнитного поля должен быть равен

$$|M(t)| = |I(t)BSN\sin(\Omega - \omega)t| = (\Omega - \omega)[BSN\sin(\Omega - \omega)t]^{2}/R.$$

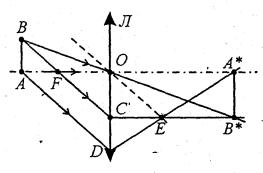
Поскольку скорость вращения ротора практически остается постоянной, можно утверждать, что величина искомого среднего тормозящего момента, действующего на ротор, равна

$$\left|M_{\text{rops}}\right| = \left|\left\langle M(t)\right\rangle\right| = \frac{B^2 S^2 N^2 (\Omega - \omega)}{R} \left|\left\langle \sin^2(\Omega - \omega)t\right\rangle\right| = \frac{B^2 S^2 N^2 (\Omega - \omega)}{2R}$$

В этом соотношении угловыми скобками обозначена операция усреднения за время  $\tau = 2 \, \pi/(\Omega - \omega)$  и учтено, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно 0,5.

## VI. ОПТИКА

VI.1. Поскольку в условии задачи специально не оговаривается, какова геометрия предмета и как он располагается относительно линзы, будем решать задачу в предположении, что предмет является плоским и располагается параллельно главной плоскости линзы, причем размеры предмета столь малы, что можно использовать параксиальное приближение. По-



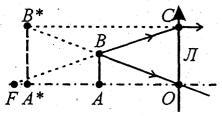
скольку из условия задачи не ясно, о действительном или мнимом изображении идет речь, собирающая или рассеивающая линза использовалась в опыте, при ответе на вопрос задачи следует проанализировать все возможные ситуации.

На рисунке показано

построение изображения в тонкой собирающей линзе точек A и B, находящихся на расстоянии a от ее главной плоскости, большем фокусного расстояния линзы F. При построении изображений  $A^*$  и  $B^*$  было учтено, что луч, идуший через оптический центр, не преломляется после прохождения линзы; луч, проходящий через главный фокус, выходит из линзы параллельно главной оптической оси, а параллельные лучи после предомления в линзе пересекаются в одной точке. Поскольку  $\angle AOB = \angle CB^*O$  (как углы, образуемые прямой с пересекаемыми ею параллельными прямыми), и  $\angle BAO = \angle OCB^* = \pi/2$  по построению, то  $\triangle AOB$  подобен  $\triangle CB^*O$ . Из подобия этих треугольников следует, что изображением отрезка, перпендикулярного главной оптической оси линзы, при выполнении сделанных выше предположений должен быть отрезок, перпендикулярный этой же оси. Поэтому  $OC = A^*B^*$ , а коэффициент увеличения  $k = A^*B^*/AB =$ 

= OC/AB. Учитывая, что прямоугольные треугольники ABF и FOC подобны, можно утверждать, что k = F/(a - F). При увеличении расстояния a на  $\Delta L$  по условию задачи увеличение предмета должно уменьшиться в n раз. Следовательно, должно выполняться соотношение:  $k/n = F/(a + \Delta L - F)$ . Исключая из этого соотношения неизвестное расстояние a, получим, что в рассматривавшемся случае должна была использоваться линза с фокусным расстоянием  $F = k \Delta L/(n-1) = 5$  см.

Увеличенное изображение можно получить, и располагая предмет на расстоянии a, меньшем фокусного расстояния F собирающей линзы. Это подтверждает рисунок, на котором сделано построение изображения для подобной ситуации. Из этого рисунка можно сделать вывод, что в этом случае k = F/(F-a), и при увеличении расстояния между линзой и предметом на величину  $\Delta L$ , если  $a + \Delta L < F$ , размер мнимого изображения будет увеличиваться, что противоречит условию задачи. Однако, если окажется, что  $a + \Delta L > F$ , то, требуя, чтобы в соответствии с условием задачи

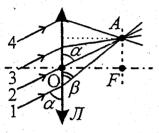


как и в предыдущем случае выполнялось соотношение  $k/n = F/(a + \Delta L - F)$ , получим, что при таком условии  $F = k \Delta L/(n+1) = 5/3$  см.

Можно убедиться, что, используя рассеивающую линзу, получить увеличенное изображение действи-

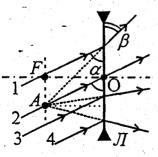
тельного предмета невозможно. Таким образом, условия задачи могут быть выполнены только при использовании собирающей линзы, причем, если до и после увеличения расстояния между линзой и предметом его изображение было действительным, то фокусное расстояние линзы должно быть равно  $F = k \Delta L/(n-1) = 5$  см. Если же при первоначальном расположении изображение предмета было мнимым, а после отодвигания предмета стало действительным, то искомое фокусное расстояние должно быть равно  $F = k \Delta L/(n+1) = 5/3$  см.

VI.2. Поскольку линза является тонкой, следует считать, что любой луч, проходящий через ее оптический центр (например, луч 2 на приводимых ниже рисунках), не изменяет в дальнейшем своего направления. Бу-



дем так же считать, что для всех лучей выполняется так называемое параксиальное приближение. Тогда можно утверждать, что все параллельные лучи после преломления в собирающей линзе должны проходить через одну точку A, лежащую в ее фокальной плоскости (побочный фокус), т.е. так, как показано на первом рисунке к решению этой задачи.

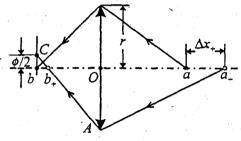
Вспоминая соотношение между длинами катетов в треугольнике и его углами, и то, что величина угла  $\alpha$  между плоскостью и прямой удовлетворяет соотношению  $0 \le \alpha \le \pi/2$ , обратившись к рисунку, найдем расстояние от точки падения луча на линзу до ее оптического центра. Для луча 1 это расстояние равно  $(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)F$ , луча 3  $-(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)F$ , а луча 4  $-(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)F$ .



С помощью второго рисунка, на котором показано построение хода лучей после преломления в тонкой рассеивающей линзе в параксиальном приближении, можно доказать, что интересующее нас расстояние вычисляется по одной из приведенных выше формул. Поэтому можно утверждать, что искомое расстояние для любой тонкой линзы в параксиальном приближении должно быть равно либо

 $|\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha| F$ , либо  $(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha) F$ .

VI.3. По условию задачи при определенном расстоянии между объективом фотоаппарата и предметом изображение последнего получается наиболее резким. Это означает, что все лучи, исходящие из какой-либо точки предмета, после преломления в объективе сходятся в одной точке, лежащей на поверхности фотопленки. Другими словами, при таком расположении предмета его изображение является стигматичным и, следовательно, можно говорить, что справедливы правила построения изображений в так называемом параксиальном приближении. Если, как обычно, считать объектив фотоаппарата тонкой линзой, то в указанном приближении расстояния от предмета до линзы a и от линзы до предмета b должны удовлетворять соотношению  $a^{-1} + b^{-1} = F^{-1}$ , называемому формулой тон-



кой линзы. На верхней половине рисунка показан ход луча, идущего под наибольшим углом к главной оптической оси объектива от точки предмета, совпадающей с этой осью. На нижней половине — ход другого крайнего луча от той же точки предмета,

но после его отодвигания на расстояние  $\Delta x_{+}$  вдоль главной оптической оси от первоначального положения. При этом положение точки  $b_{+}$ , в которой этот луч пересекает главную оптическую ось линзы, было найдено с помощью формулы тонкой линзы. Из рисунка ясно, что при новом положении предмета все другие лучи, выходящие из указанной точки предмета, могут падать на фотопленку только в пределах кружка диаметром  $\phi$ .

Из подобия прямоугольных треугольников  $OAb_+$  и  $bCb_+$  следует, что  $\phi/2r = (b-b_+)/b_+$ . Поскольку  $\Delta x_+ = a_+ - a$ , то, выразив расстояния b и  $b_+$  с помощью формулы тонкой линзы через заданное фокусное расстояние F, расстояние a и смещение  $\Delta x_+$ , из двух последних уравнений получим:

$$\Delta x_{+} = \frac{(a-F)a\phi}{(2r+\phi)F - a\phi} \approx 1,62 \text{ M}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно доказать, что диаметр изображения точки предмета не будет превыщать заданной величины  $\phi$ , если предмет приблизить к объективу на расстояние

$$\Delta x_{-} = \frac{(a-F)a\phi}{(2r-\phi)F + a\phi} \approx 0.98 \,\mathrm{M}.$$

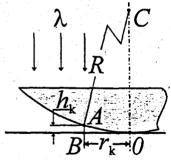
VI.4. Падающий нормально на зеркало сквозь слой эмульсии монохроматический свет отражается от поверхности зеркала. Поскольку на поверхности хорощо проводящего зеркала напряженность электрического поля световой волны должна быть минимальна, а магнитного поля максимальна, электрическая компонента световой волны должна при отражении от проводящего зеркала изменить свою фазу на противоположную. Фаза же магнитной компоненты световой волны при этом изменяться не будет. В случае же отражения от диэлектрического зеркала характер изменения фаз компонент световой волны должен быть противоположным. Поскольку падающая и отраженная волны когерентны, то при их наложении в толще эмульсии должна образоваться стоячая волна. В тех местах, где амплитуда вектора напряженности электрического поля волны максимальна, т.е. наблюдается пучность напряженности электрического поля, напряженность магнитного поля должна быть минимальна, т.е. в этих местах должны находиться узлы напряженности магнитного поля. В соответствии со слоистым распределением в эмульсии амплитуд электрического и магнитного полей световой волны разложение светочувствительного вещества эмульсии должно происходить слоями. Этим и объясняется возникновение чередующихся светлых и темных полос в эмульсии после ее проявления. Поскольку показатель преломления эмульсии по условию задачи близок к единице, то длину световой волны в эмульсии следует считать равной длине волны  $\lambda$  падающего на пластинку света. Как известно, расстояние

между соседними пучностями в стоячей волне равно половине длины падающей волны. Учитывая, что срез эмульсии сделан под углом  $\alpha$  к поверхности зеркала, можно утверждать, что расстояние между центрами соседних темных полос должно быть равно  $b = \lambda/(2\sin\alpha)$ . Поскольку по условию задачи  $\alpha = 10^{-3}$  рад <<1, искомая длина волны  $\lambda \approx 2 b \alpha = 0.6$  мкм. Отметим, что рассмотренный опыт был проведен в 1890 г. Винером, и на основании результатов этого опыта было показано, что фотографическое действие световой волны определяется ее электрическим полем.

VI.5. Согласно квантовой механике световой поток — совокупность частиц, называемых фотонами. Эти частицы движутся в любой среде со скоростью c света в вакууме. Импульс фотона равен  $p \neq \varepsilon/c$ , где  $\varepsilon$  — энергия фотона. Согласно гипотезе де Бройля любой материальный объект обладает волновыми свойствами, т.е. в ряде случаев его поведение может быть описано в рамках классических волновых представлений. При этом соответствующая объекту длина волны  $\lambda = h/p$ , где постоянную для всех объектов величину  $h \approx 6.63 \cdot 10^{-34}$  Дж с называют постоянной Планка. Поскольку скорость электронов v = 0.5 км/с  $< c \approx 3 \cdot 10^3$  км/с, то можно не учитывать релятивистского изменения массы и считать, что их импульс (а следовательно, и импульс падающих на линзу фотонов) равен p = m v, где  $m \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса покоя электрона. Таким образом, можно считать, что длина волны падающего на линзу света равна  $\lambda = h/mv$ .

При падении на линзу свет частично отражается от ее поверхностей и после частичного прохождения через нее, отразившись от стеклянной пластинки, вновь падает на линзу. Вспоминая, что излучаемый обычными тепловыми источниками свет с точки зрения классической электромагнитной теории можно рассматривать как совокупность отрезков синусоид, длительность каждого из которых не превышает  $\tau \sim 10^{-11} \, \mathrm{c}$ , можно утверждать, что контрастная статическая интерференционная картина (частным случаем которой и являются кольца Ньютона) может наблюдаться, если раз-

ность хода  $\delta$  налагающихся световых пучков, полученных делением исходного светового пучка, удовлетворяет условию  $\delta << \tau \, c \approx 3\, \text{мм}$ . Поскольку в задаче специально не оговорено, что источник света отличается от обычного, можно считать, что свет, отраженный от верхней плоской поверхности линзы, не интерферирует с другими отраженными пучками. Интерференция может наблюдаться лишь между световыми пучками, отраженными от нижней сферической поверхности линзы и верхней плоскости пластины, на которой лежит линза. Учитывая, что радиус сферической поверхности достаточно велик, а номер интересующего кольца мал, можно считать, что угол AC0, под которым видно это кольцо из центра кривизны линзы (см. рисунок), столь мал, что, во-первых, синус и тангенс этого угла равны самому углу, измеренному в радианах, а, во-вторых, можно пренебречь изменением направления распространения светового луча при прохождейии сферической поверхности линзы. Пусть  $\angle AC0 = 2\,\alpha$ , тогда



 $\angle A0B = \alpha$  и, вспоминая соотношения между углами и сторонами в треугольнике, можно утверждать, что  $A0 = 2 R \sin \alpha/2 = R \alpha$ ,  $h_k = A0 \sin \alpha = R \alpha^2$ ,  $r_k = h_k/\text{tg} \alpha = R \alpha$ . Учитывая, что при отражении от более плотной среды фаза отраженной волны изменяется на противоположную, или, другими словами, происходит "потеря" половины длины волны, условие образования k-го светлого

кольца имеет вид

$$\delta_k = 2 h_k + \lambda/2 = k \lambda.$$

С учетом ранее полученных соотношений из последнего уравнения следует, что искомый радиус k-го светлого кольца равен

$$r_{\rm k} = \sqrt{\frac{2\,k-1}{2}\,R\,\lambda} = \sqrt{\frac{2\,k-1}{2\,m\,\upsilon}\,R\,h} \approx 1{,}05$$
 MM.

## СОДЕРЖАНИЕ

Программа вступительного экзамена по физике.....

Основная литература	
Дополнительная литература	
Условия задач	•••••
I. Механика	
II. Молекулярная физика и термодинамика	
III. Электричество и магнетизм	
IV. Оптика	••••

22

22 42

53

67

Решения задач.....

І. Механика....

II. Молекулярная физика и термодинамика.....
III. Электричество и магнетизм.....

IV. Оптика.....