Г. Полиа, Г. Сеге

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА

I

Г. ПОЛИА, Г. СЕГЕ

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

РЯДЫ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Перевод с немецкого
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1978

517.2
П 50
УДК 517

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE AUS DER ANALYSIS

von

G. PÓLYA UND G. SZEGÖ

Professoren an der Stanford University
California, USA

ERSTER BAND
REIHEN. INTEGRALRECHNUNG.
FUNKTIONENTHEORIE

Dritte berichitigte Auflage

Springer — Verlag
Berlin · Göttingen · Heidelberg · New York
1964

$\text{П}\,\frac{20203\text{—}013}{053(02)\text{-}78}\,22\text{-}78$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Глава 1

Вычисления со степенными рядами

Глава 2

Преобразования рядов. Теорема Чезаро

Глава 3

Структура вещественных последовательностей и рядов

Глава 4

Смешанные задачи

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1

Интеграл как предел сумм площадей прямоугольников

Глава 2

Неравенства

Глава 3

Из теории функций действительного переменного

Глава 4

Различные типы равномерного распределения

Глава 5

Функции больших чисел

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Глава 1

Комплексные числа и последовательности

Глава 2

Отображения и векторные поля

Глава 3

Геометрическое поведение функции

Глава 4

Интеграл Коши. Принцип аргумента

Глава 5

Последовательности аналитических функций

Глава 6

Принцип максимума

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Книга Г. Полиа и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа», впервые вышедшая на немецком языке в 1925 г. и в русском переводе в 1937—1938 гг., давно уже стала настольной книгой математиков, работающих или только желающих овладеть навыками научной работы в области теории функций.

Книга неоднократно переиздавалась и была переведена также на английский язык. В 1956 г. вышло второе русское издание. Для настоящего третьего издания перевод заново отредактирован и сверен с третьим немецким изданием.

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Что значит преподавать? — Это значит систематически побуждать учащихся к собственным открытиям».

(Спенсер.)

В математической литературе (во французской еще больше, чем в немецкой) имеется много, частью прекрасных и богатых по материалу сборников задач, упражнений, повторительных курсов и т. п. Как нам кажется, настоящая книга от них всех отличается своей целью, материалом, его расположением, а также методом работы над ней, как мы его мыслим. Все эти моменты нуждаются поэтому в пояснении.

Главнейшей целью этой книги является приобщение лиц, достаточно продвинувшихся в изучении математики, к самостоятельному мышлению и исследованию в некоторых важных областях анализа путем решения систематически расположенных задач. Она должна служить для самодеятельного, активного изучения как в руках учащихся, так и преподавателей. Учащийся может пользоваться этой книгой либо для углубления материала, полученного при самостоятельном чтении или на лекциях, либо независимо от них, полностью прорабатывая отдельные ее части. Преподаватель может использовать ее для подготовки упражнений или семинарских занятий.

Настоящая книга отнюдь не представляет собой простого собрания задач. Главное заключается в *расположении* материала: оно должно побуждать читателя к самостоятельной работе и прививать ему целесообразные навыки математического мышления. Мы потратили на достижение возможно более эффективного расположения материала гораздо больше времени, старания и скрупулезной работы, чем это на первый взгляд могло бы показаться необходимым.

Сообщение ряда новых сведений интересовало нас само по себе лишь во вторую очередь. В первую очередь мы желали бы способствовать выработке у читателя правильных установок, известной дисциплины мышления, что при изучении математики необходимо еще в большей мере, чем при изучении других наук.

Нам не известны какие бы то ни было «regulae cogitandi» (правила мышления), которые точно предписывали бы мышлению наиболее целесообразные пути. Если бы подобные правила и были возможны, вряд ли они были бы очень полезны. Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, их нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и в кровь и действовали с силой инстинкта. Поэтому для развития мышления действительно полезным является только его упражнение. Самостоятельное решение трудных и интересных задач больше даст читателю, чем приводимые нами ниже афоризмы, однако для начала и они будут небесполезны.

Мы пытаемся все осмыслить: отдельные факты — сопоставлением с родственными фактами, новое — приведением в связь со старым, непривычное — по аналогии с обычным, частное — путем обобщения, общее — надлежащим специализированием, сложное — разложением на отдельные части, единичное — восхождением к общему.

Есть нечто общее в ориентировании в городе и в какой-нибудь научной области: нужно из каждого заданного пункта суметь достичь любого другого[1]). Еще лучше ориентируется тот, кто может сразу же выбрать наиболее удобный или быстрый путь. Тот же, кто очень хорошо ориентируется, сможет выполнять и более сложные и своеобразные задания, например предпринять путешествие, заранее исключив как запретные некоторые обычно используемые пути,— это имеет место, например, в некоторых аксиоматических исследованиях.

Есть нечто общее в построении полного и связного знания из разрозненных сведений и стены из необтесанных камней: каждое новое сведение, как и каждый новый камень, нужно рассмотреть со всех сторон, приложить к разным местам, прежде чем новое не найдет себе наиболее подходящего места в наличном, так чтобы соприкасающаяся поверхность была как можно большей, пробелы — как можно меньшими и целое было возведено прочно.

Прямая определяется двумя точками. Но и многие новые теоремы возникают путем некоторой прямолинейной «интерпо-

---

[1]) См., например, задачу **92** и соседние с ней в VI отд., далее задачу **64** в VIII отд.

ляции» из двух крайних частных случаев[1]). Прямая определяется также заданием точки и направления. Точно так же и новые теоремы часто возникают в результате счастливого стечения направления работы и отдельного впечатляющего частного случая. Проведение параллелей также является излюбленным методом создания новых теорем[2]).

Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием, примененная дважды, она становится методом.

При доказательствах, основанных на методе полной индукции, доказываемое и допущенное прямо пропорциональны: они относятся, как $n+1$ к n. Поэтому расширение доказываемого может быть выгодным: оно расширяет допущенное. Да и вообще иной раз бывает легче доказать общее утверждение, чем частное: именно в формулировании более общего положения кроется главный успех, выделение существенного, полное понимание существа дела[3]).

«Qui nimium probat, nihil probat» (кто слишком много доказывает — ничего не доказывает). Каждое доказательство нужно взять под подозрение: все ли предположения в нем действительно использованы? Нельзя ли получить тот же результат при меньшем числе предположений либо при тех же предположениях получить более сильный результат? Пусть лишь тогда наступит успокоение, когда контрпример покажет, что границы возможного достигнуты!

Однако не нужно забывать, что существуют обобщения двух родов: малоценные и полноценные. Первые — обобщения путем разрежения, другие — путем сгущения. Разредить — значит, наболтав воды, изготовить жиденькую похлебку, сгустить — значит составить полезный, питательный экстракт. Соединение понятий, мало связанных друг с другом для общего представления, в одно объемлющее есть сгущение; так сгущает, например, теория групп рассуждения, которые прежде, будучи рассеянными в алгебре, теории чисел, геометрии, анализе, выглядели совершенно различными. Привести примеры обобщения путем разрежения было бы еще легче, но мы не хотим наживать себе врагов.

Не всякий материал подходит для задач. Сборник, в котором были бы исчерпывающе представлены все важнейшие области анализа, был бы по необходимости чересчур большим и

[1]) См., например, задачу **139** в I отд.

[2]) См., например, IV отд., гл. 1, § 1, в частности задачи **13** и **14**.

[3]) В дальнейшем сопровождающее задачу указание или группировка прилегающих задач часто указывает на усиление или обобщение, которое могло бы облегчить решение задачи. Сравнить задачи **1** и **2**, **3** и **4**, **5** и **7**, **6** и **8** в I отд.

неудобоваримым. Конечно, выбор можно произвести различными способами. Мы отдали наибольшее предпочтение центральной области современного анализа — теории функций комплексного переменного. Тем самым мы оказались несколько в стороне от столбовой дороги, которой придерживаются обычные курсы лекций, учебники и сборники задач. Caeteris paribus (при прочих равных условиях) мы предпочли те области, которые ближе нашим персональным научным интересам. Мы включили задачи и из труднейших и притом находящихся в стадии быстрого развития областей, которые до сих пор совсем не были представлены в сборниках задач и почти совсем — в учебной литературе. Подробнее на это укажет оглавление. Отдельные главы могут представить интерес и для специалистов. Однако мы нигде не стремились достичь полноты монографии, поскольку выбор материала был подчинен нашей основой цели — *расположению, в наибольшей степени возбуждающему работу мысли.*

По происхождению материал очень разнообразен. Мы черпали его и из классического достояния математики и из мемуаров последних лет; кроме того, мы собрали задачи, частью уже опубликованные в различных журналах, частью устно сообщенные нам авторами.

Весь этот материал мы применительно к нашим целям расширили, переработали и значительно дополнили. Кроме того, в форме задач здесь впервые опубликовываются некоторые наши собственные результаты. Мы надеемся, что и знаток найдет кое-что новое.

Весь материал разделен на две части. Первая охватывает три отдела более общего, основного характера, вторая содержит шесть отделов, посвященных более специальным вопросам и применениям.

Каждая часть содержит в своей первой половине задачи, во второй — их решения. Среди задач, особенно в начале отдельных глав, вкраплены также некоторые пояснения, имеющие целью напомнить необходимые общие понятия и теоремы. Задачи часто снабжены указаниями. Решения изложены по возможности кратко, в конспективном стиле, тривиальные заключения опущены; однако при серьезном размышлении над задачей они должны быть вполне ясны. В исключительных случаях набрасываются лишь основные черты доказательства, и читатель отсылается к литературе. Иногда тут же при решении указываются возможные расширения, новые применения, а также не разрешенные еще вопросы.

Отделы распадаются на главы, последние в свою очередь — на параграфы. Перед пояснением или же новым циклом задач оставлены небольшие пробелы *).

Расположение задач внутри главы и параграфа является тем моментом, который отличает настоящую книгу от всех известных нам аналогичных работ еще больше, чем выбор материала.

Упражнения в узком смысле, предназначенные для пояснения новых теорем и понятий на подходяще подобранных примерах, занимают относительно небольшое место. Обособленные задачи редки.

Задачи объединены большей частью в длинные ряды, охватывающие, как правило, целый параграф; их органическое построение было предметом нашей наибольшей заботы.

Задачи можно группировать по различным признакам: по трудности, по применяемым стредствам, по методу, по результату. Ни одному из этих признаков мы не отдали особого предпочтения; в различных случаях мы придерживаемся различных принципов расположения материала, так чтобы оно отражало все перипетии самостоятельного исследования. Один параграф посвящен, например, некоторому методу; вначале этот метод вкратце поясняется, затем применяется к решению как можно более разнообразных задач и при этом сам все более уточняется и совершенствуется. В другом параграфе аналогично поступлено с какой-нибудь теоремой; вначале эта теорема формулируется (и доказывается, если это можно сделать быстро и легко), затем следуют самые разнообразные частные случаи и применения этой теоремы. Третьи параграфы построены в «восходящем» порядке: общая теорема появляется лишь после ряда предпосылаемых ей частных случаев и отдельных кратких замечаний, подводящих вплотную к ее формулировке или же подготовляющих ее доказательство. Местами сложные и трудные доказательства разложены в длинный ряд задач; каждая отдельная задача содержит какую-нибудь лемму либо самостоятельную часть доказательства, либо новое освещение предмета; в совокупности эти задачи составляют ряд переходных ступеней, по которым читатель поднимается, наконец, к доказательству требуемой теоремы.

В некоторых параграфах (содержащих «смешанные задачи») материал расположен без тесной взаимной связи; здесь приведены либо применения предшествующих теорем к более трудным случаям, либо отдельные задачи, представляющие самостоятельный интерес.

---

*) В настоящем издании в этих местах поставлены, кроме того, короткие черточки.

Кое-где четыре следующие одна за другой задачи образуют «пропорцию» в том смысле, что четвертая находится в таком же отношении к третьей, в каком вторая — к первой (обобщение, обращение, применение). Некоторые параграфы посвящены обстоятельному проведению и анализу аналогий[1]). Они содержат задачи из двух параллельных областей, расположенные парами, по одной задаче из каждой, и образующие, так сказать, «непрерывную пропорцию». Этот тип расположения, казалось нам, может натолкнуть читателя на наиболее плодотворные размышления.

К этой книге можно подходить с разными требованиями: искать в ней задачи для самостоятельного решения либо материал для упражнений студентов, либо материал для чтения. Во всех этих случаях ею можно пользоваться с довольно большой свободой.

Для понимания первой главы того или иного отдела требуется большей частью относительно небольшой запас предварительных сведений. Различные отделы, если и не вполне, то во всяком случае в значительной степени независимы друг от друга; точно так же и различные части одного и того же отдела часто очень слабо связаны между собой, так что при работе над ними вовсе не требуется точно придерживаться порядка их следования.

Читатель, желающий решать задачи, должен принимать во внимание не только *что* спрашивается, но *и как и где*. Многие задачи, которые, будучи предложены изолированно, были бы неприступны и для подготовленных математиков, здесь окружены задачами подготовительного и пояснительного характера и преподнесены в такой связи, что без особого труда могут быть осилены при некоторой настойчивости самостоятельно. Правда, встречаются довольно трудные задачи и без предварительной подготовки, по большей части в параграфах с более свободным построением (содержащих смешанные задачи), однако это — единичные случаи.

Указания, стоящие при задачах, конечно, отнюдь не должны стеснять свободы читателя в выборе пути решения соответствующей задачи.

Кому решение не дается сразу, пусть не огорчается; пусть он вспомнит, что «сократов метод обучения» вовсе не состоит в натаскивании на быстрые ответы. Если и повторные попытки остались тщетными, то читатель с тем бóльшим вниманием про-

[1]) См. II отд., гл. 2; IV отд., гл. 1, § 1; V отд., гл. 1, §1; VIII отд., гл. 1, § 4.

анализирует решение, приведенное во второй половине тома, извлечет подлинную суть дела, и эта суть уляжется в его памяти прочным приобретением.

Материал настоящей книги, находившейся еще в процессе возникновения, уже несколько раз использовался при подготовке упражнений для студентов средних и старших семестров. При этом более легкие задачи решались студентами тут же устно, более же трудные — в письменном виде по истечении некоторого срока; важнейшие, типические задачи решались самим преподавателем. В течение семестра, считая по два часа в неделю, оказалось возможным проштудировать примерно материал одной главы. Этим путем было проверено и на основе полученного опыта частично переработано несколько глав. Мы можем теперь со спокойной совестью рекомендовать руководителям семинарских занятий метод, состоящий в том, что студентам предлагается решать не отдельные разрозненные задачи, а глубоко продуманный связный ряд задач. Почти все главы этой книги могут быть использованы при ведении занятий этим методом. Само собой разумеется, что при этом требуется соблюдать известную осторожность, рекомендуется заменять некоторые задачи сходными с ними, но по тем или иным причинам более предпочтительными, и т. п.

Непрерывное чтение, когда вслед за задачей тут же просматривается ее решение, мы можем рекомендовать только искушенному читателю. В целом это не соответствует замыслу книги. Однако некоторые главы приспособлены для такого чтения и в сущности могут быть использованы в качестве руководства, только изложение покажется в этом случае, может быть, несколько сжатым и паузы между формулировками и доказательствами теорем — слишком резко акцентированными.

Если наше начинание не во всех отношениях удалось так, как мы этого желали, то к тому имеются два извиняющих обстоятельства: во-первых, мы не имели никаких образцов, по которым могли бы равняться; во-вторых, дальнейшее расширение отдельных глав потребовало бы столько места, а улучшение изложения в отдельных нюансах — столько времени, что было бы поставлено под угрозу выполнение всего плана. Мы были бы, в интересах дела, очень благодарны критически настроенному читателю, который обратил бы наше внимание на возможные недостатки и тем самым дал бы нам возможность выправить их при первой возможности.

Многие специалисты предоставили в наше распоряжение свои отдельные неопубликованные результаты, другие помогли нам различного рода советами при проверке рукописи и корректуры.

Мы с благодарностью упоминаем их имена: A. Aeppli, P. Bernays, A. Cohn, R. Courant, P. Csillag, L. Fejér, M. Fekete, A. Fleck, F. Gassmann, A. Haar, A. Hirsch, E. Jacobsthal, L. Kollros, J. Kürschák, E. Landau, E. Lasker, K. Löwner, A. Ostrowski, M. Plancherel, H. Prüfer, T. Radó, M. Riesz, A. Stoll, O. Toeplitz, A. Walther. Мы имели также возможность позаимствовать кое-что из наследия A. Hurwitz'a, а также у F. и Th. Lukács. Особенно же мы хотели бы выразить нашу сердечную благодарность T. Carleman'y и I. Schur'y за их ценные задачи и еще A. и R. Brauer'ам, H. Rademacher'y и H. Weyl'ю за их поистине самоотверженную помощь.

Цюрих и Берлин,
октябрь 1924 г.

G. Pólya, G. Szegö

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В обозначениях и сокращениях мы старались быть возможно более последовательными и по крайней мере в пределах одного параграфа однотипные величины обозначали одинаковыми буквами. Отдельные обозначения, сохраняемые на протяжении одного-двух параграфов, вводятся специальными пояснениями. Независимо от этого значение каждой буквы объясняется заново в каждой задаче, если только нет ссылки на предыдущую задачу. Если задача непосредственно примыкает к предшествующей, то она начинается пометкой «продолжение». Если она примыкает к одной из более ранних задач, то пометка сопровождается номером этой задачи, например «продолжение **286**». В этих двух случаях обозначения заново не разъясняются.

Отделы обозначаются римскими, главы (если это необходимо) — арабскими цифрами. Нумерация отдельных задач в каждом отделе новая. Номера задач печатаются жирно. При ссылке на задачу указывается только ее номер, если задача принадлежит тому же отделу; если же задача принадлежит другому отделу, то указывается также номер отдела. Например, мы пишем II **123**, если не находимся в отделе II (задач или решений); но пишем просто **123** на протяжении всего отдела II.

Замечания в квадратных скобках [ ] в задачах обозначают всегда указания, а в решениях — цитату (особенно в начале решения) или ссылку на другую задачу, из которой можно использовать для решения отдельные заключения. Замечания иного рода заключены в простые скобки. Цитируя номер задачи, мы имеем в виду как задачу, так и ее решение, обязательно отмечая иные случаи, например: [решение **38**].

Источники, из которых заимствована задача, почти всегда указаны в решении. Если задача ранее уже публиковалась, то это указывается в цитате. Если указывается только фамилия автора без указания литературного источника, то это значит, что задача была нам сообщена в качестве новой. Сокращения названий журналов приняты те же, что и в «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik». Наиболее частые сокращения приводим здесь:

Acta Math. — Acta Mathematica.

Arch. d. Math. u. Phys. — Archiv der Mathematik und Physik.

C. R. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris.

Deutsche Math.-Ver. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

G. Batt. — Giornale di matematiche di Battaglini.

Gött. Nachr. — Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

J. für Math. — Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Proc. Lond. M. S. — Proceedings of the London Mathematical Society.

Math. Ann. — Mathematische Annalen.

Math. Zeitschr. — Mathematische Zeitschrift.

Nouv. Ann. — Nouvelles Annales de mathématiques.

Rom. Acc. L. Rend. — Atti della Reale Accademia dei Lincei, Roma.

Следующие учебники цитируются наиболее часто, а потому только по фамилиям авторов (например. Cesàro, Hecke и т. д.):

E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1904 *).

E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, Akademische Verlagsbuchhandlung, 1923 **).

A. Hurwitz—R. Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Geometrische Funktionentheorie. Berlin, J. Springer, 1922 ***).

K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, изд. 2-е, Berlin, J. Springer, 1924.

G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, Veit & Co, 1909.

Далее особо упомянем следующие обозначения:

$a_n \to a$ означает: a_n стремится к a (при $n \to \infty$).

$a_n \sim b_n$ (читать: a_n асимптотически равно b_n) означает: $b_n \neq 0$ при достаточно большом n и $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ (при $n \to \infty$).

$O(a_n)$, соотв. $o(a_n)$, $a_n > 0$, означает величину, отношение которой к a_n остается ограниченным или соответственно стремится к нулю (при $n \to \infty$).

Аналогичные обозначения употребляются и в других предельных переходах, отличных от $n \to \infty$.

$x \to a+0$ соответственно $x \to a-0$ означает, что x стремится к a справа или соответственно слева.

$\exp x = e^x$, где e — основание натуральных логарифмов.

$\operatorname{Max}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ означает то (или те) из n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которого не превосходят все остальные. Подобное же значение имеет $\operatorname{Min}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Аналогичный смысл имеют $\operatorname{Max} f(x)$, $\operatorname{Min} f(x)$ для вещественной функции, определенной в интервале $[a, b]$, если она имеет в нем максимум или минимум. Если их нет, то эти же знаки целесообразно сохранить для обозначения верхней или нижней граней функции $f(x)$. Все это распространяется и на случай комплексного переменного x.

$\operatorname{sgn} x$ означает *символ Кронекера*:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$[x]$ означает наибольшее целое число, не превышающее числа x. Однако, если это не может вызвать ложного понимания, квадратные скобки без особых указаний употребляются также и в своем обычном смысле.

$\bar{z}$ означает комплексное число, сопряженное с числом z, если только идет речь о комплексных числах.

Определитель с общим элементом $a_{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$, сокращенно обозначается так:

$$|a_{\lambda\mu}|_1^n, \text{ или } |a_{\lambda\mu}|_{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n}, \text{ или } |a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots, a_{\lambda n}|_1^n.$$

---

*) Эрнесто Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. I — II, Одесса, 1913 («Матезис»); ч. I, 2-е изд., Л., 1936 (ОНТИ). В дальнейшем ссылки даются на издание 1913 г.

**) Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.

***) А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1936; Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГТТИ, 1934; А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.

Под *областью* мы понимаем связное множество, которое состоит из одних внутренних точек, под *замкнутой областью* — область, дополненную ее предельными точками.

Под *непрерывной кривой* мы понимаем однозначный и непрерывный образ интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. совокупность точек $z = x + iy$, таких, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Непрерывная кривая *замкнута*, если $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$. Кривая *не имеет двойных точек*, если из $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ $(t_1 < t_2)$ необходимо следует $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Кривую без двойных точек мы называем *простой*. Незамкнутую простую непрерывную кривую мы называем *простой дугой*.

Простая замкнутая непрерывная кривая (так называемая *кривая Жордана*) разбивает плоскость на две области, общей границей которых она является.

Контуры интегрирования в криволинейных и комплексных интегралах всегда предполагаются непрерывными и спрямляемыми.

ЗАДАЧИ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ГЛАВА I

ВЫЧИСЛЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

§ 1. Задачи из аддитивной теории чисел

1. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек?

2. Обозначим через A_n число решений диофантова уравнения

$$x+2y+5z+10u+20v+50w=n$$

в неотрицательных целых числах x, y, z, u, v, w. Сумма ряда

$$A_0+A_1\zeta+A_2\zeta^2+\ldots+A_n\zeta^n+\ldots$$

является дробной рациональной функцией переменного ζ. Какой именно?

3. Сколькими способами можно наклеить 40 копеек марками достоинством в 5, 10, 15 и 20 копеек, расположенными *в одну линию*, если рассматривать расположения, отличающиеся друг от друга порядком следования двух марок неодинакового достоинства, как различные?

4. Пусть B_n — число всех возможных представлений целого положительного числа n в виде суммы слагаемых, имеющих значения 1, 2, 3 и 4 (причем две суммы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются различными). Тогда ряд

$$1+B_1\zeta+B_2\zeta^2+\ldots+B_n\zeta^n+\ldots$$

представляет дробную рациональную функцию от ζ. Какую?

5. Некто обладает восемью разновесками весом соответственно в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 *г*. Сколькими способами он может составить из них 78 *г*, если считать отдельно применение двух разных разновесок, хотя бы и одного и того же веса?

6. Сколькими способами можно составить из разновесок предыдущей задачи вес в 78 *г*, если пользоваться обеими чашками весов?

7. Рассмотрим суммы вида

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3+5\varepsilon_4+10\varepsilon_5+10\varepsilon_6+20\varepsilon_7+50\varepsilon_8,$$

где каждая из величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$ может принимать лишь значение 0 или 1. Обозначим число подобных сумм, имеющих значение n, через C_n. Разложить на множители целую рациональную функцию

$$C_0+C_1\zeta+C_2\zeta^2+\ldots+C_{99}\zeta^{99}.$$

8. Пусть теперь величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$ предыдущей задачи могут принимать три значения: -1, 0, 1. Обозначим число сумм указанного в предыдущей задаче вида, имеющих значение n, через D_n. Разложить на множители выражение

$$\sum_{n=-99}^{99} D_n\zeta^n.$$

9. Обобщить предыдущие задачи, беря для меры достоинства монет, марок и разновесок не определенные числа, а вообще $a_1, a_2, \ldots, a_l$.

10. Сколькими способами можно выделить группу в n лиц из общего числа p лиц?

11. Сколькими способами можно распределить n монет между p лицами?

12. Сколькими способами можно распределить n монет между p лицами так, чтобы каждый получил не менее одной монеты?

13. Сколько членов содержится в общей целой рациональной и однородной функции n-й степени от p переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$?

14. Имея в распоряжении веса 1, 2, 4, 8, 16, ..., можно (пользуясь одной чашкой весов) составить любой целый положительный вес и притом только одним способом. Иными словами: каждое целое положительное число может быть записано по двоичной системе и притом только одним способом.

15. Имея в распоряжении веса 1, 3, 9, 27, 81, ..., можно составить любой целый положительный вес и притом лишь одним способом, пользуясь двумя чашками весов.

16. Определить коэффициент a_n в разложении

$$(1+q\zeta)(1+q\zeta^2)(1+q\zeta^4)(1+q\zeta^8)(1+q\zeta^{16})\ldots=$$
$$=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\ldots$$

17. Каков знак n-го члена в разложении произведения

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots=$$
$$=1-a-b+ab-c+ac+bc-abc-d+\ldots$$

$(n=0, 1, 2, \ldots)$?

18. Доказать тождество

$$(1+\zeta+\zeta^2+\ldots+\zeta^9)(1+\zeta^{10}+\zeta^{20}+\ldots+\zeta^{90})\times$$
$$\times(1+\zeta^{100}+\zeta^{200}+\ldots+\zeta^{900})\ldots=\frac{1}{1-\zeta},$$

равносильное утверждению, что всякое целое положительное число может быть записано по десятичной системе и притом только одним способом.

19.

$$(1+\zeta)(1+\zeta^2)(1+\zeta^3)(1+\zeta^4)\ldots=\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^3)(1-\zeta^5)(1-\zeta^7)\ldots}.$$

20. Каждое целое положительное число можно представить в виде суммы *различных* целых положительных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы *одинаковых или различных*, но *нечетных* положительных слагаемых. Например, все возможные представления числа 6 посредством различных слагаемых будут:

$$6,\quad 1+5,\quad 2+4,\quad 1+2+3,$$

посредством нечетных:

$$1+5,\quad 3+3,\quad 1+1+1+3,\quad 1+1+1+1+1+1.$$

21. Каждое целое положительное число n может быть $2^{n-1}-1$ различными способами представлено в виде суммы *меньших* целых положительных слагаемых, если два представления, отличающихся хотя бы порядком слагаемых, считать различными. Например, лишь $2^{4-1}-1=7$ следующих сумм имеют значение 4:

$$\begin{array}{llll} 1+1+1+1, & 1+1+2, & 2+2, & 1+3, \\ & 1+2+1, & & 3+1. \\ & 2+1+1, & & \end{array}$$

22. Совокупное число неотрицательных целочисленных решений диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} x+2y&=n,\\ 2x+3y&=n-1,\\ 3x+4y&=n-2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ nx+(n+1)y&=1,\\ (n+1)x+(n+2)y&=0 \end{aligned}$$

равно $n+1$.

23. Совокупное число неотрицательных целочисленных решений диофантовых уравнений

$$\begin{gathered} x+2y=n-1, \\ 2x+3y=n-3, \\ 3x+4y=n-5, \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

меньше чем $n+2$, причем разность равна числу делителей числа $n+2$ (см. VIII, гл. 1, § 5).

24. Показать, что совокупное число неотрицательных целочисленных решений диофантовых уравнений

$$\begin{gathered} x+\ 4y=3n-1, \\ 4x+\ 9y=5n-4, \\ 9x+16y=7n-9, \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

равно n.

25. Число неотрицательных целочисленных решений диофантова уравнения

$$x+2y+3z=n$$

есть ближайшее к $\frac{(n+3)^2}{12}$ целое число.

26. Число неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$ax+by=n,$$

где a, b, n — положительные целые числа и a, b — взаимно простые, равно $\left[\frac{n}{ab}\right]$ или $\left[\frac{n}{ab}\right]+1$.

27. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_l$ — целые положительные взаимно простые числа. Если A_n — число неотрицательных целых решений уравнения

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_lx_l=n,$$

то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^{l-1}}=\frac{1}{a_1a_2\dots a_l\,(l-1)!}.$$

28. Целыми точками в пространстве называются точки с целочисленными декартовыми координатами x, y, z. Сколько целых точек лежит на плоскости

$$x+y+z=n$$

в замкнутом положительном октанте $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$?

Сколько их там в открытом октанте $(x>0,\ y>0,\ z>0)$?

29. Сколько целых точек лежит в «октаэдре»

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_p|\leqslant n$$

p-мерного пространства (n — целое)?

30. Число целых точек в замкнутом кубе

$$-n\leqslant x,\ y,\ z\leqslant n,$$

удовлетворяющих условию

$$-s\leqslant x+y+z\leqslant s,$$

равно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^3\frac{\sin\frac{2s+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt;$$

n, s — целые числа.

31. Число положительных целочисленных решений уравнения

$$x+y+z=n$$

($n\geqslant 3$), удовлетворяющих условиям

$$x\leqslant y+z,\quad y\leqslant z+x,\quad z\leqslant x+y,$$

равно

$$\frac{(n+8)(n-2)}{8}$$

или

$$\frac{n^2-1}{8},$$

смотря по тому, будет ли n четно или нечетно.

§ 2. Биномиальные коэффициенты и прочее

Биномиальными коэффициентами $\binom{\mu}{r}$ называются коэффициенты разложения

$$(1+z)^\mu=\binom{\mu}{0}+\binom{\mu}{1}z+\binom{\mu}{2}z^2+\ldots+\binom{\mu}{r}z^r+\ldots,\quad \binom{\mu}{0}=1,$$

где μ — произвольное число *). Для целых положительных μ число $\binom{\mu}{r}$ имеет комбинаторный смысл (**10—13**). В нижеследующих задачах n — целое и неотрицательное.

*) В русской (и французской) литературе вместо $\binom{\mu}{r}$ употребительно — правда, только для целых неотрицательных значений μ — комбинаторное обозначение C_μ^r («число сочетаний из μ элементов по r»).

32. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

33. $\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\ldots-\binom{2n}{2n-1}^2+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$.

34. Из тождеств

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} z^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\beta_l}{l!} z^l=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} z^n$$

вытекает

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\ldots+a_nb_0,$$

$$\gamma_n=\alpha_0\beta_n+\binom{n}{1}\alpha_1\beta_{n-1}+\binom{n}{2}\alpha_2\beta_{n-2}+\ldots+\alpha_n\beta_0.$$

35. Положим

$$x^{n|h}=x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(n-1)h].$$

Тогда имеет место тождество

$$(x+y)^{n|h}=x^{n|h}+\binom{n}{1}x^{n-1|h}y^{1|h}+\binom{n}{2}x^{n-2|h}y^{2|h}+\ldots+y^{n|h}.$$

36. (Продолжение.) Доказать следующее обобщение полиномиальной теоремы *):

$$(x_1+x_2+\ldots+x_l)^{n|h}=\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l=n} \frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_l!} x_1^{\nu_1|h}x_2^{\nu_2|h}\ldots x_l^{\nu_l|h}.$$

37. $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq 1,\\ 1 & \text{при } n=1.\end{cases}$

38. $\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

39. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k+1}{2k+1}=n+1.$

40. $\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\nu}{n}-\alpha\right)^2\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=(x-\alpha)^2+\frac{x(1-x)}{n}.$

---

*) Под «полиномиальной теоремой» здесь подразумевается тождество, обобщающее формулу бинома:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_l)^n=\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l=n}\frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_l!}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\ldots x_l^{\nu_l}.$$

41. Положим

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2) + \ldots,$$

$$\psi(x) = a_0 + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{2^2} x(x-1) + \frac{a_3}{2^3} x(x-1)(x-2) + \ldots$$

Тогда

$$\binom{n}{0}\varphi(0) + \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) + \ldots + \binom{n}{n}\varphi(n) = 2^n \psi(n)$$

и

$$\binom{n}{0}\varphi(0) - \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\varphi(n) = (-1)^n a_n n!.$$

42. $\binom{n}{0}(0-n)^2 + \binom{n}{1}(2-n)^2 + \binom{n}{2}(4-n)^2 + \ldots$

$$\ldots + \binom{n}{\nu}(2\nu - n)^2 + \ldots = 2^n n.$$

43. $\binom{n}{0}(0-n)^2 - \binom{n}{1}(2-n)^2 + \binom{n}{2}(4-n)^2 - \ldots$

$$\ldots + (-1)^\nu \binom{n}{\nu}(2\nu - n)^2 + \ldots = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq 2, \\ 8 & \text{при} \quad n = 2. \end{cases}$$

§ 3. Дифференцирование степенных рядов

Пусть y — неограниченное число раз дифференцируемая функция от z. Операция $\left(z\frac{d}{dz}\right)^n y$ определяется следующей рекуррентной формулой:

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n y = z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-1} y, \quad z\frac{d}{dz} y = zy'.$$

Например,

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n z^k = k^n z^k.$$

Каждому полиному $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ мы будем ставить в соответствие операцию

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right) y = c_0 y + c_1 z\frac{d}{dz} y + c_2 \left(z\frac{d}{dz}\right)^2 y + \ldots + c_n \left(z\frac{d}{dz}\right)^n y.$$

44. Показать, что

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right) z^k = f(k)\, z^k.$$

45. Показать, что если $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами (см. VIII, гл. 2, § 1), то сумма ряда

$$f(0)+\frac{f(1)}{1!}+\frac{f(2)}{2!}+\ldots+\frac{f(k)}{k!}+\ldots$$

представляет собой целое кратное числа e — основания натуральных логарифмов.

46. Положим

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n\frac{1}{1-z}=1^nz+2^nz^2+3^nz^3+\ldots=\frac{f_n(z)}{(1-z)^{n+1}}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Показать, что $f_n(z)$ есть полином n-й степени с положительными коэффициентами (за исключением свободного члена $f_n(0)=0$); далее, что $f_n(1)=n!$.

47. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два произвольных полинома, причем, однако, $g(x)$ не имеет неотрицательных целых нулей. Показать, что ряд

$$y=\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(2)}{g(2)}z^2+\ldots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{1-z},$$

разрешимому посредством ряда последовательных квадратур.

48. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два взаимно простых полинома, причем $g(x)$ степени не ниже чем $f(x)$, далее $g(0)=0$, но $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, ... отличны от нуля. Показать, что ряд

$$y=1+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(1)f(2)}{g(1)g(2)}z^2+\frac{f(1)f(2)f(3)}{g(1)g(2)g(3)}z^3+\ldots$$

удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)zy.$$

49. Ряд

$$y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2z+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2z^2+\ldots+\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2z^n+\ldots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-2z)\frac{dy}{dz}-\frac{1}{4}y=0.$$

§ 4. Определение коэффициентов при помощи функциональных уравнений

50. Функция

$$F(z) = (1 - qz)(1 - q^2 z)(1 - q^3 z)\ldots \qquad (|q| < 1)$$

разлагается в степенной ряд

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

Определить коэффициенты A_n этого разложения из функционального уравнения

$$F(z) = (1 - qz) F(qz).$$

51. Определить коэффициенты в разложении

$$\frac{1}{F(z)} = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots,$$

где $F(z)$ — та же функция, что и в предыдущей задаче.

52. Определить коэффициенты C_0, C_1, C_2, ..., C_n в тождестве

$$\begin{aligned}(1 + qz)(1 + qz^{-1})(1 + q^3 z)(1 + q^3 z^{-1})\ldots \\ \ldots(1 + q^{2n-1} z)(1 + q^{2n-1} z^{-1}) = \\ = C_0 + C_1(z + z^{-1}) + C_2(z^2 + z^{-2}) + \ldots + C_n(z^n + z^{-n}).\end{aligned}$$

53. Из тождества задачи 52 предельным переходом вывести формулу

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{2n-1} z)(1 + q^{2n-1} z^{-1})(1 - q^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \qquad (|q| < 1).$$

54. $$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} \qquad (|q|) < 1.$$

55. $$\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^5}\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (|q| < 1).$$

56. $$\begin{aligned}\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdot\frac{1-q^4}{1+q^4}\ldots = \\ = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots \qquad (|q| < 1).\end{aligned}$$

57. Показать, что функция

$$\begin{aligned}G(z) = \frac{q}{1-q}(1 - z) + \frac{q^2}{1-q^2}(1 - z)(1 - qz) + \\ + \frac{q^3}{1-q^3}(1 - z)(1 - qz)(1 - q^2 z) + \ldots \qquad (|q| < 1)\end{aligned}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$1 + G(z) - G(qz) = (1 - qz)(1 - q^2 z)(1 - q^3 z)\ldots$$

58. Определить коэффициенты в разложении

$$G(z) = D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 z^3 + \ldots$$

функции $G(z)$ предыдущей задачи.

59. Доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-k+1})}{1-q^k} = n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и вывести из него степенной ряд для $-\ln(1-x)$.

[Имеем

$$G(q^{-n}) = -n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $G(z)$ — функция, определенная в задаче 57.]

60. Степенной ряд

$$f(z) = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \frac{z^6}{7} + \ldots$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = (1+z^2) f(z) \qquad \textbf{[39]}.$$

§ 5. Мажорантные ряды

Пусть

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

— произвольные комплексные числа и

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

— неотрицательные вещественные числа. Положим

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = A(z),$$
$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots = P(z).$$

Если имеют место одновременно неравенства

$$|a_0| \leqslant p_0, \ |a_1| \leqslant p_1, \ |a_2| \leqslant p_2, \ \ldots, \quad |a_n| \leqslant p_n, \ \ldots,$$

то мы будем говорить: «$P(z)$ есть мажоранта функции $A(z)$» или же: «$A(z)$ есть миноранта функции $P(z)$» и записывать символически:

$$A(z) \ll P(z).$$

61. Если $A(z) \ll P(z)$ и $A^*(z) \ll P^*(z)$, то также

$$A(z) + A^*(z) \ll P(z) + P^*(z),$$
$$A(z)\, A^*(z) \ll P(z)\, P^*(z).$$

62. Для всех положительных целых n

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \ll e^z.$$

63. Пусть

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

Из условия

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ll\frac{1+z}{1-z}$$

вывести неравенства

$$|a_n|\leqslant n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

64. Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l$ — целые положительные числа. Показать a) с помощью **9**, b) без помощи **9**, что

$$(1+z^{a_1})(1+z^{a_2})\cdots(1+z^{a_l})\ll$$
$$\ll\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\ldots(1-z^{a_l})}\ll\frac{1}{1-z^{a_1}-z^{a_2}-\ldots-z^{a_l}}.$$

ГЛАВА 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЯДОВ. ТЕОРЕМА ЧЕЗАРО

§ 1. Преобразование последовательностей в последовательности в случае, когда в каждой строке схемы имеется только конечное число элементов, отличных от нуля

65. Пусть в треугольной схеме

$$\begin{array}{l} p_{00}, \\ p_{10},\ p_{11}, \\ p_{20},\ p_{21},\ p_{22}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

все числа неотрицательны и сумма элементов любой строки равна единице ($p_{n\nu}\geqslant 0$, $p_{n0}+p_{n1}+\ldots+p_{nn}=1$; $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Образуем из заданной последовательности $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$ новую последовательность $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots$ по следующему правилу:

$$t_n=p_{n0}s_0+p_{n1}s_1+p_{n2}s_2+\ldots+p_{nn}s_n.$$

Тогда t_n будет заключено между наименьшим и наибольшим из чисел $s_0,\ s_1,\ s_2\ \ldots,\ s_n$.

66. (Продолжение.) Показать, что для того, чтобы из существования $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ вытекало

$$\lim_{n\to\infty}(p_{n0}s_0+p_{n1}s_1+\ldots+p_{nn}s_n)=s,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного ν было

$$\lim_{n\to\infty} p_{n\nu}=0.$$

(Приведенное условие может быть выражено следующим образом: числовая схема $p_{n\nu}$ *сохраняет сходимость*[1]). Частный случай одной важной теоремы О. Toeplitz'a, см. III, гл. 1, § 5.)

67. Из существования $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+s_2+\ldots+s_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty} s_n.$$

68. Если последовательность положительных чисел p_0, p_1, p_2, ..., p_n, ... стремится к положительному пределу p, то также

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{p_0p_1p_2\ldots p_n}=p.$$

69. Свести вычисление $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$ к вычислению $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

70. Пусть даны две бесконечные последовательности

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_0,\quad b_1,\quad b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

Показать, что из трех условий

$$b_n>0\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$b_0+b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\ \text{расходится},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s$$

вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_0+b_1+b_2+\ldots+b_n}=s.$$

71. Свести вычисление

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+3^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}\qquad(\alpha>0)$$

к вычислению

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^{\alpha-1}}.$$

(Этот последний предел известен хотя бы из дифференциального исчисления.)

---

[1]) В более общих рассмотрениях, где равенство обоих пределов заранее не обусловливается, оказывается удобнее называть такие схемы «*регулярно* сохраняющими сходимость».

72. Пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n} = 0.$$

Показать, что из существования $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+s_2p_{n-2}+\ldots+s_np_0}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n} = s.$$

73. Пусть две последовательности положительных чисел

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots; \qquad q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_0+q_1+q_2+\ldots+q_n} = 0.$$

Положим

$$r_n = p_0q_n + p_1q_{n-1} + p_2q_{n-2} + \ldots + p_nq_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда последовательность $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ тоже будет удовлетворять условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_0+r_1+r_2+\ldots+r_n} = 0.$$

74. Пусть

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots; \quad q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

— последовательности предыдущей задачи и

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

— произвольная последовательность. Показать, что если оба предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+s_2p_{n-2}+\ldots+s_np_0}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0q_n+s_1q_{n-1}+s_2q_{n-2}+\ldots+s_nq_0}{q_0+q_1+q_2+\ldots+q_n}$$

существуют, то они равны между собой. (Эта теорема представляет особенный интерес в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует. При существовании $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ вопрос разрешается в 72.)

75. Показать, что если ряд

$$a_1 1^{-\sigma} + a_2 2^{-\sigma} + a_3 3^{-\sigma} + \ldots + a_n n^{-\sigma} + \ldots \qquad (\sigma > 0)$$

сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, n^{-\sigma} = 0.$$

(Ряды указанного вида носят название *рядов Дирихле*. См. VIII, гл. 1, § 5.)

76. Пусть $p_1>0$, $p_2>0$, $p_3>0$, ..., ряд $p_1+p_2+\dots$ $\dots+p_n+\dots$ расходящийся, $p_1+p_2+\dots+p_n=P_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n P_n^{-1}=0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1P_1^{-1}+p_2P_2^{-1}+\dots+p_nP_n^{-1}}{\ln P_n}=1.$$

(Обобщение соотношения $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\sim\ln n$.)

77. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ и $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ — две последовательности положительных чисел и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{np_n}=\alpha, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{nq_n}=\beta, \quad \alpha+\beta>0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1q_1+2p_2q_2+3p_3q_3+\dots+np_nq_n}{n^2p_nq_n}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

78. Если выражение

$$(a_1-a_n)+(a_2-a_n)+\dots+(a_{n-1}-a_n)$$

остается ограниченным при $n\to\infty$, то ряд $a_1+a_2+a_3+\dots$ отнюдь не обязан еще сходиться. Но он будет сходиться, если добавить условия

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\dots, \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

§ 2. Преобразование последовательностей в последовательности (общий случай)

79. Пусть бесконечная двойная последовательность

$$\begin{matrix} p_{00}, & p_{01}, & p_{02}, & \dots \\ p_{10}, & p_{11}, & p_{12}, & \dots \\ p_{20}, & p_{21}, & p_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

состоящая из неотрицательных чисел, обладает тем свойством, что ряд, образованный каждой строкой, сходится и его сумма равна единице ($p_{n\nu}\geqslant 0$, $p_{n0}+p_{n1}+p_{n2}+\dots+p_{n\nu}+\dots=1$, $n, \nu = 0, 1, 2, \dots$). Образуем из ограниченной числовой последовательности $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ новую числовую последовательность $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ посредством равенств

$$t_n=p_{n0}s_0+p_{n1}s_1+p_{n2}s_2+\dots+p_{n\nu}s_\nu+\dots$$

Тогда t_n будет заключено между нижней и верхней гранями последовательности $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$

80. (Продолжение.) Для того чтобы из $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ вытекало

$$\lim_{n\to\infty} (p_{n0}s_0 + p_{n1}s_1 + p_{n2}s_2 + \ldots + p_{n\nu}s_\nu + \ldots) = s,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного ν имело место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} p_{n\nu} = 0.$$

(Двойные последовательности $p_{n\nu}$, удовлетворяющие этому условию, называются *сохраняющими сходимость*. См. III, гл. 1, § 5.)

81. Если ряд

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + \ldots + nc_n + \ldots$$

сходится, то сходится также ряд

$$c_n + 2c_{n+1} + 3c_{n+2} + 4c_{n+3} + \ldots = t_n,$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0.$$

82. Пусть степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится при $x = 1$. Показать, что степенной ряд

$$f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n + \ldots,$$

где $0 < \alpha < 1$, сходится при $h = 1 - \alpha$.

§ 3. Преобразования последовательностей в функции. Теорема Чезаро

83. Пусть функции

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ \ldots$$

неотрицательны в интервале $0 < t < 1$, причем выполняется тождество

$$\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \ldots + \varphi_n(t) + \ldots = 1.$$

Образуем с помощью ограниченной числовой последовательности $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ функцию

$$\Phi(t) = s_0\varphi_0(t) + s_1\varphi_1(t) + s_2\varphi_2(t) + \ldots + s_n\varphi_n(t) + \ldots$$

Тогда значения $\Phi(t)$ будут заключены между нижней и верхней гранями последовательности $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$

84. (Продолжение.) Пусть для каждой сходящейся числовой последовательности $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ имеем:

$$\lim_{t \to 1-0} \{s_0\varphi_0(t) + s_1\varphi_1(t) + s_2\varphi_2(t) + \ldots + s_n\varphi_n(t) + \ldots\} = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного ν

$$\lim_{t \to 1-0} \varphi_\nu(t) = 0.$$

85. Пусть даны две числовые последовательности:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; \quad b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Показать, что из трех условий

$$b_n > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots \begin{cases} \text{сходится при } |t| < 1, \\ \text{расходится при } t = 1, \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = s$$

вытекает, что ряд

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

также сходится при $|t| < 1$ и

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots} = s.$$

(Эта теорема принадлежит Чезаро; ниже она находит многочисленные применения.)

86. Если ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится и имеет сумму s, то

$$\lim_{t \to 1-0} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots) = s.$$

87. Положим

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1} = s,$$

то

$$\lim_{t \to 1-0} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots) = s.$$

(Эта теорема утверждает нечто новое по сравнению с 86 лишь в том случае, когда ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ расходится [67].)

88. Если выполняются условия

$$b_n > 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ расходится,}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = s,$$

то

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + \ldots + a_n t^n + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots} = s$$

в предположении, что ряд в знаменателе сходится при $|t| < 1$.

89. Если α положительно, то

$$\lim_{t \to 1-0} (1-t)^{\alpha} (1^{\alpha-1} t + 2^{\alpha-1} t^2 + 3^{\alpha-1} t^3 + \ldots + n^{\alpha-1} t^n + \ldots)$$

существует и отличен от нуля.

90. Если $0 < k < 1$ и k стремится к единице, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-k} \qquad \text{[II 202].}$$

91. Пусть A_n и B_n — соответственно числитель и знаменатель n-й подходящей дроби для бесконечной непрерывной дроби

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|3} + \frac{a|}{|5} + \ldots,$$

так что

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|3} + \frac{a|}{|5} + \ldots + \frac{a|}{|2n-3} \qquad (a > 0).$$

Вычислить значение этой непрерывной дроби (в предположении ее сходимости) с помощью рядов

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n, \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

основываясь на теореме 85.

[Вследствие рекуррентной формулы, связывающей A_n и B_n, функции $F(x)$ и $G(x)$ удовлетворяют некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка.]

92. Если ряд

$$a_1 1^{-\sigma} + a_2 2^{-\sigma} + a_3 3^{-\sigma} + \ldots + a_n n^{-\sigma} + \ldots,$$

где $\sigma > 0$, сходится, то

$$\lim_{t \to 1-0} (1-t)^{\sigma} (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n + \ldots) = 0 \qquad [75].$$

93. Показать, что

$$\lim_{t \to 1-0} \sqrt{1-t} \sum_{n=1}^{\infty} (t^{n^2} - 2t^{2n^2})$$

существует и отрицателен.

94. Пусть даны две числовые последовательности:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; \quad b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Показать, что если они удовлетворяют условиям

$$b_n > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \text{ сходится для всех значений } t,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = s,$$

то ряд

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

точно так же сходится для всех значений t, и

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots} = s. \qquad \text{(См. IV 72.)}$$

95. Показать, что если существует $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, то

$$\lim_{t \to +\infty} \left(s_0 + s_1 \frac{t}{1!} + s_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + s_n \frac{t^n}{n!} + \ldots \right) e^{-t} = s.$$

96. Пусть ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится и имеет сумму s. Положим

$$g(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-t} g(t)\, dt = s.$$

97. Сумму ряда

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{1!\,1!} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2!\,2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!\,m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m} + \ldots$$

называют *бесселевой функцией* нулевого порядка. Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-t} J_0(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ГЛАВА 3

СТРУКТУРА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

§ 1. Структура бесконечных последовательностей

98. Пусть числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условию

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n \qquad (m, \ n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots),$$

тогда последовательность

$$\frac{a_1}{1}, \ \frac{a_2}{2}, \ \frac{a_3}{3}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{n}, \ \ldots$$

должна либо сходиться, либо расходиться к $-\infty$, причем предел этой последовательности будет равен ее нижней грани.

99. Пусть числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условию

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

Тогда существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \omega,$$

причем

$$\omega n - 1 < a_n < \omega n + 1 \qquad (n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots).$$

100. Если общий член ряда, не являющегося ни сходящимся, ни расходящимся в собственном смысле, стремится к нулю, то частичные суммы этого ряда расположены всюду плотно между их нижним и верхним пределами $\lim\inf$ и $\lim\sup$.

101. Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ с положительными членами расходится, однако $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Положим $a_1 + a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n = s_n$ и обозначим через $[s_n]$ наибольшее целое число, не превосходящее s_n. Определить совокупность предельных точек последовательности

$$s_1 - [s_1], \ s_2 - [s_2], \ \ldots, \ s_n - [s_n], \ \ldots$$

102. Пусть для последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ существует такая последовательность стремящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, что для каждого n

$$t_{n+1} > t_n - \varepsilon_n.$$

Тогда числа $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ лежат всюду плотно между их нижним и верхним пределами.

103. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ — положительные целые числа, $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3 \leqslant \ldots$ Совокупность предельных точек последовательности

$$\frac{\nu_1}{1+\nu_1}, \frac{\nu_2}{2+\nu_2}, \ldots, \frac{\nu_n}{n+\nu_n}, \ldots$$

заполняет замкнутый интервал (длина которого равна нулю, если эта последовательность стремится к пределу).

104. Показать, что из любой сходящейся последовательности можно выделить подпоследовательность, члены которой образуют последовательные частичные суммы некоторого абсолютно сходящегося ряда.

105. Числовая последовательность, стремящаяся к $+\infty$, имеет наименьший член.

106. Сходящаяся последовательность имеет либо наибольший член, либо наименьший, либо и тот и другой.

Приводимые ниже теоремы показывают, что даже наиболее экстравагантные числовые последовательности ведут себя местами закономерно, т. е. как последовательности монотонные.

107. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots$ — последовательность положительных чисел и $\liminf\limits_{m\to\infty} l_m = 0$. Тогда существует бесконечное множество номеров n, для которых l_n меньше всех предшествующих ему членов последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$.

108. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots$ — последовательность положительных чисел и $\lim\limits_{m\to\infty} l_m = 0$. Тогда существует бесконечно много номеров n, для которых l_n превосходит все следующие за ним члены $l_{n+1}, l_{n+2}, l_{n+3}, \ldots$ (Не только утверждение, но и предположение отлично от соответствующих в теореме 107.)

109. Пусть числовые последовательности

$$l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots \quad (l_m > 0),$$
$$s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots \quad (s_1 > 0,\ s_{m+1} > s_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots)$$

обладают тем свойством, что

$$\lim_{m\to\infty} l_m = 0, \quad \limsup_{m\to\infty} l_m s_m = +\infty.$$

Тогда существует бесконечно много номеров n, для которых одновременно выполняются неравенства

$$l_n > l_{n+1}, \quad l_n > l_{n+2}, \quad l_n > l_{n+3}, \ldots,$$
$$l_n s_n > l_{n-1} s_{n-1}, \quad l_n s_n > l_{n-2} s_{n-2}, \ldots, l_n s_n > l_1 s_1 \quad [107, 108].$$

110. Если числовая последовательность $\frac{L_1}{1}, \frac{L_2}{2}, \ldots, \frac{L_m}{m}, \ldots$ стремится к $+\infty$ и A превышает ее наименьший член [105], то существует такой номер n (возможно, несколько таких), $n \geqslant 1$, что n отношений

$$\frac{L_n - L_{n-1}}{1}, \frac{L_n - L_{n-2}}{2}, \frac{L_n - L_{n-3}}{3}, \ldots, \frac{L_n}{n}$$

все не больше A, а бесконечное множество отношений

$$\frac{L_{n+1} - L_n}{1}, \frac{L_{n+2} - L_n}{2}, \frac{L_{n+3} - L_n}{3}, \ldots$$

все не меньше A.

[Если наметить в плоскости точки с координатами

$$(0, L_0), \quad (1, L_1), \quad (2, L_2), \ldots, (m, L_m), \ldots,$$

где $L_0 = 0$, то дело будет идти об угловых коэффициентах некоторых отрезков. Желательно также чисто аналитическое доказательство.]

111. Пусть относительно числовой последовательности $l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_m, \ldots$ предполагается лишь, что

$$\lim_{m \to \infty} l_m = +\infty.$$

Пусть, далее, $A > l_1$. Тогда существует такой номер n, $n \geqslant 1$, что одновременно выполняются все неравенства

$$\frac{l_{n-\mu+1} + \ldots + l_{n-1} + l_n}{\mu} \leqslant A \leqslant \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots + l_{n+\nu}}{\nu}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, n; \ \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $A \to \infty$, то также $n \to \infty$.

112. Пусть числовая последовательность $l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots$ удовлетворяет условиям

$$\limsup_{m \to \infty} (l_1 + l_2 + \ldots + l_m) = +\infty, \quad \lim_{m \to \infty} l_m = 0.$$

Пусть, далее, $l_1 > A > 0$. Тогда существует такой номер n, $n \geqslant 1$, что одновременно выполняются все неравенства

$$\frac{l_{n-\mu+1} + \ldots + l_{n-1} + l_n}{\mu} \geqslant A \geqslant \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots + l_{n+\nu}}{\nu}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $A \to 0$, то $n \to \infty$.

§ 2. Показатель сходимости

Под *показателем сходимости* последовательности $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_m, \ldots$ $(0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots, \lim\limits_{m\to\infty} r_m = \infty)$ понимают число λ, обладающее тем свойством, что ряд

$$r_1^{-\sigma} + r_2^{-\sigma} + \ldots + r_m^{-\sigma} + \ldots$$

при всех $\sigma > \lambda$ сходится, тогда как при $\sigma < \lambda$ он уже расходится. Для $\sigma = \lambda$ он может сходиться или расходиться. Если $\sigma = 0$, то ряд расходится; поэтому $\lambda \geqslant 0$. Если ряд расходится для всех σ, то полагают $\lambda = \infty$.

113. Показать, что

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\ln m}{\ln r_m} = \lambda.$$

114. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ — любые вещественные числа, не равные нулю. Если существует такое положительное расстояние δ, что $|x_l - x_k| \geqslant \delta$ при $l, k = 1, 2, 3, \ldots, l \neq k$, то показатель сходимости последовательности абсолютных величин $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_m|, \ldots$ не превосходит единицу.

115. Пусть β больше показателя сходимости последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ Тогда существует бесчисленное множество номеров n, для которых удовлетворяются $n-1$ неравенств

$$\frac{r_1}{r_n} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \frac{r_2}{r_n} < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \ldots, \quad \frac{r_{n-1}}{r_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad [107].$$

116. Пусть показатель сходимости λ последовательности r_1, $r_2, \ldots, r_m, \ldots$ положителен и $0 < \alpha < \lambda < \beta$. Тогда существует бесчисленное множество номеров n, для которых одновременно выполняются неравенства

$$\frac{r_\mu}{r_n} > \left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{при} \quad \mu = n-1, n-2, \ldots, 1,$$

$$\frac{r_\nu}{r_n} > \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{при} \quad \nu = n+1, n+2, n+3, \ldots \qquad [109].$$

§ 3. Максимальный член степенного ряда

117. Пусть $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ При каких значениях x $(x \geqslant 0)$ m-й член ряда

$$1 + \frac{x}{r_1} + \frac{x^2}{r_1 r_2} + \ldots + \frac{x^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} + \ldots$$

превосходит все остальные $(m = 0, 1, 2, \ldots)$?

118. Пусть

$$0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots,$$
$$0 < s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \ldots,$$
$$\lim_{m \to \infty} \frac{r_m}{s_m} = \infty.$$

Тогда можно найти сколь угодно большие значения n и r, для которых одновременно выполняются неравенства

$$\frac{r^k}{r_1 r_2 \ldots r_k} \cdot \frac{r_1 r_2 \ldots r_n}{r^n} \leqslant \frac{s_n^k}{s_1 s_2 \ldots s_k} \cdot \frac{s_1 s_2 \ldots s_n}{s_n^n} \leqslant 1$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad [111].$$

(По существу здесь, как и в **122**, дело сводится к сравнению двух степенных рядов:

$$1 + \frac{x}{r_1} + \frac{x^2}{r_1 r_2} + \ldots + \frac{x^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} + \ldots,$$
$$1 + \frac{y}{s_1} + \frac{y^2}{s_1 s_2} + \ldots + \frac{y^m}{s_1 s_2 \ldots s_m} + \ldots)$$

Пусть $p_0 \geqslant 0,\ p_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ p_m \geqslant 0,\ \ldots,$ причем $p_0, p_1, p_2, \ldots$ не все равны нулю. Пусть, далее, степенной ряд

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m + \ldots$$

имеет радиус сходимости $\rho > 0$, причем, возможно, $\rho = \infty$. При $0 < x < \rho$ последовательность

$$p_0,\quad p_1 x,\quad p_2 x^2,\ \ldots,\ p_m x^m,\ \ldots$$

стремится к нулю, следовательно, в ней содержится наибольший по величине член [105], так называемый *максимальный член*, значение которого мы будем обозначать через $\mu(x)$, так что

$$p_m x^m \leqslant \mu(x) \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Центральным индексом $\nu(x)$ мы будем называть номер максимального члена:

$$\mu(x) = p_{\nu(x)} x^{\nu(x)}.$$

Если среди чисел $p_m x^m$ несколько равны $\mu(x)$, то под $\nu(x)$ мы будем понимать наибольший из соответствующих индексов. Подробнее см. IV, гл. 1.

119. В необрывающемся всюду сходящемся степенном ряде ни один член не может оставаться максимальным для всех значений x.

120. При возрастании x номер максимального члена постоянно возрастает.

121. Пусть ряд

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m + \ldots$$

с положительными коэффициентами и конечным радиусом сходимости ρ ($p_m > 0$, $\rho > 0$) обладает тем свойством, что при возрастании x все его члены последовательно становятся максимальными. Тогда ряд

$$\frac{1}{p_0} + \frac{x}{p_1} + \frac{x^2}{p_2} + \ldots + \frac{x^m}{p_m} + \ldots$$

имеет радиус сходимости $\frac{1}{\rho}$.

122. Перевес максимального члена во всюду сходящемся степенном ряде больше, чем в не всюду сходящемся (наибольший он в полиноме). Точнее говоря: пусть радиус сходимости необрывающегося степенного ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

будет бесконечен, а степенного ряда

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_m y^m + \ldots$$

— конечен; пусть $a_m \geqslant 0$, $b_m > 0$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), причем коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ второго ряда таковы, что все члены $b_m y^m$ этого ряда последовательно становятся максимальными [120]. Тогда произвольно большим положительным значениям $\bar{x}$ можно поставить в соответствие такие положительные значения $\bar{y}$, чтобы сопряженным значениям $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответствовали одинаковые центральные индексы n и при этом одновременно для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялись неравенства

$$\frac{a_k \bar{x}^k}{a_n \bar{x}^n} \leqslant \frac{b_k \bar{y}^k}{b_n \bar{y}^n} \leqslant 1.$$

[Рассмотреть максимальный член ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{b_m} z^m$.]

123. Исключительные значения x^*, которым нельзя поставить в соответствие (в смысле задачи **122**) никакого $\bar{y}$, если и существуют, то во всех случаях «редки»; они образуют множество конечной логарифмической меры, т. е. множество точек $\ln x^*$, где x^* — указанные исключительные значения, может быть заключено в счетное множество интервалов с конечной общей длиной.

§ 4. Части рядов

Ряд $a_{t_1}+a_{t_2}+\ldots+a_{t_n}+\ldots$, где $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ — целые числа $(0<t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots)$, называется *частью* ряда $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

124. Если в гармоническом ряде

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

вычеркнуть все члены, знаменатели которых, записанные в десятичной системе, содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся [113].

125. Ряд, каждая часть которого сходится, должен сходиться абсолютно.

126. Обязательно ли абсолютно сходится сходящийся ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$, обладающий тем свойством, что любая его часть

$$a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+a_{k+3l}+\ldots,$$

в которой номера составляют арифметическую прогрессию, сходится?

127. Обязательно ли абсолютно сходится сходящийся ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$, обладающий тем свойством, что любая его часть

$$a_k+a_{kl}+a_{kl^2}+a_{kl^3}+\ldots,$$

в которой номера составляют геометрическую прогрессию, где $k\geqslant 1$, $l\geqslant 2$, сходится?

128. Пусть $\varphi(x)=cx^l+c_1x^{l-1}+\ldots$ — *целозначный* полином, т. е. полином, принимающий целые значения при целых x [VIII, гл. 2]; пусть, кроме того, степень его $l\geqslant 1$, а старший коэффициент $c>0$. Значения $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ... образуют обобщенную арифметическую прогрессию l-го порядка; вследствие положительности c лишь конечное число членов этой прогрессии может быть отрицательным.

Обязательно ли абсолютно сходится сходящийся ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$, обладающий тем свойством, что любая его часть

$$a_{\varphi(0)}+a_{\varphi(1)}+a_{\varphi(2)}+a_{\varphi(3)}+\ldots,$$

в которой индексы составляют обобщенную арифметическую прогрессию (члены с отрицательными индексами отбрасываются), сходится?

129. Если ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ абсолютно сходится и каждая его часть вида

$$a_l+a_{2l}+a_{3l}+\ldots \qquad (l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

имеет сумму 0, то тогда

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=0.$$

130. Множество точек, образуемое всевозможными частями ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{2}{3^n}+\ldots,$$

совершенно и нигде не плотно. (Речь идет о всех как конечных, так и бесконечных частях; сюда, в частности, причисляется и «пустая» часть, которой нужно приписать сумму 0.)

131. Пусть члены сходящегося ряда

$$p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=s$$

удовлетворяют неравенствам

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots, \quad 0<p_n \leqslant p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда каждое число σ из полузамкнутого интервала $0<\sigma \leqslant s$ может быть представлено в виде суммы некоторой бесконечной части:

$$p_{t_1}+p_{t_2}+\ldots+p_{t_n}+\ldots=\sigma.$$

132. Найти ряд $p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$, удовлетворяющий условиям

$$p_1=\frac{1}{2}, \quad p_n=p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

и убедиться, что в этом случае каждое число σ задачи **131** может быть лишь единственным образом представлено посредством бесконечной части ряда.

§ 5. Перестановки членов вещественного ряда

Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots$ — две монотонно возрастающие последовательности целых положительных чисел, не имеющие общих членов и в совокупности исчерпывающие весь натуральный ряд $1, 2, 3, \ldots$ ($r_m<r_{m+1}$, $s_n<s_{n+1}$, $r_m \neq s_n$ для любых значений m и n), так что всякое натуральное число входит в одну и только одну из этих последовательностей. Ряды

$$a_{r_1}+a_{r_2}+a_{r_3}+\ldots \text{ и } a_{s_1}+a_{s_2}+a_{s_3}+\ldots$$

называются тогда *дополнительными* частями ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots$

Пусть последовательность $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ целых положительных чисел обладает тем свойством, что каждое целое положительное число $1, 2, 3, \ldots$ входит в него один и только один раз (т. е. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ — некоторая перестановка натурального ряда). Говорят, что ряд

$$a_{\nu_1}+a_{\nu_2}+\ldots+a_{\nu_n}+\ldots$$

получается из ряда

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

путем перестановки членов. Особо отметим те перестановки, при которых a_{r_m} $(m=1, 2, 3, \ldots)$ остается и после перестановки r_m-м членом, т. е. перестановки, оставляющие часть $a_{r_1}+a_{r_2}+\ldots$ $\ldots+a_{r_n}+\ldots$ на своем месте. Говорят, что перестановка лишь смещает две дополнительные части одну относительно другой (и каждую переводит в самое себя), если как до, так и после перестановки a_{r_m} стоит перед a_{r_n} и a_{s_m} перед a_{s_n} для любых m, n, где $m<n$.

133. Если одна из дополнительных частей сходящегося ряда сходится, то сходится и другая, и перестановка, лишь смещающая обе части одну относительно другой, не изменяет суммы ряда.

134. Если одна из дополнительных частей условно сходящегося ряда расходится к $+\infty$, то другая расходится к $-\infty$. Притом, если все члены одной из этих частей имеют одинаковые знаки, то посредством перестановок, лишь смещающих обе части одну относительно другой, может быть получена для ряда любая сумма.

135. Если ряд с положительными монотонно убывающими членами расходится, то никакими перестановками расходимость его не может быть усилена.

136. У расходящегося ряда с положительными членами, стремящимися к нулю, можно сколь угодно ослабить расходимость посредством подходящей перестановки. Точнее говоря: пусть

$$p_n>0, \quad \lim_{n\to\infty} p_n=0, \quad \lim_{n\to\infty}(p_1+p_2+\ldots+p_n)=\infty,$$
$$0<Q_1<Q_2<\ldots<Q_n<\ldots, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n=\infty;$$

тогда всегда можно указать такой ряд $p_{\nu_1}+p_{\nu_2}+\ldots+p_{\nu_n}+\ldots$, полученный путем подходящей перестановки, что для всех значений $n=1, 2, 3, \ldots$

$$p_{\nu_1}+p_{\nu_2}+\ldots+p_{\nu_n}\leqslant Q_n.$$

137. Пусть

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=s \text{ сходится,}$$
$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \text{ расходится,}$$
$$s'<s<s''$$

(s' и s'' — любые числа, удовлетворяющие указанному неравенству). При помощи перестановки, оставляющей на месте все отрицательные члены, можно получить в качестве суммы ряда число s', а при помощи некоторой другой перестановки, оставляющей на месте все положительные члены, получить в качестве суммы число s'' [136].

§ 6. Распределение знаков членов ряда

138. Пусть $p_n > 0$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots$, ряд

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$$

расходится, а ряд

$$\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \ldots + \varepsilon_n p_n + \ldots,$$

где множители ε_n могут принимать лишь значения $+1$ или -1, сходится. Если при этих условиях положительные члены второго ряда составляют некоторый определенный процент, то этот последний равен 50. Точнее говоря:

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} \leqslant 0 \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}.$$

139. Пусть $p_n > 0$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots$ и ряд

$$\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \ldots + \varepsilon_n p_n + \ldots,$$

в котором множители $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ могут принимать лишь одно из двух значений -1 или $+1$, сходится. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) p_n = 0.$$

(Отметим два употребительных крайних случая: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots$ и $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = \ldots$)

ГЛАВА 4

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Обвертывающие ряды

Если ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ находится в таком отношении к числу A, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|A - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| < |a_{n+1}|,$$

то мы будем говорить, что этот ряд *обвертывает* число A. Обвертывающий ряд может сходиться или расходиться; если он сходится, то сумма его равна A.

Пусть числа $A, a_0, a_1, a_2, \ldots$ все вещественны. Если при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$A - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \theta_n a_{n+1},$$

где

$$0 < \theta_n < 1,$$

то число A обвертывается рядом $a_0+a_1+a_2+\dots$ и притом так, что оно всегда лежит между двумя последовательными частичными суммами. О таких рядах мы будем говорить, что они число A обвертывают в *узком смысле*. G. A. Scott и G. N. Watson употребляют для обозначения одного очень близкого понятия термин «arithmetically asymptotic» (Quart. J., т. 47, стр. 312, 1917). Ряд, обвертывающий в узком смысле некоторое число, необходимо является знакочередующимся.

140. Пусть $f(x)$ — вещественная функция вещественного переменного x. Если функции $|f'(x)|$, $|f''(x)|$, ... при возрастании x $(x>0)$ строго убывают, то $f(x)$ обвертывается своим рядом Маклорена, и притом в узком смысле.

141. Функции

$$e^{-x},\ \ln(1+x),\ (1+x)^{-p} \qquad (p>0)$$

вещественного переменного x при $x>0$ обвертываются в узком смысле своими степенными рядами.

142. (Продолжение.) Показать, что то же справедливо и для функций [1])

$$\cos x, \quad \sin x.$$

143. (Продолжение.) Показать то же для функций

$$\operatorname{arctg} x, \quad J_0(x)=1-\frac{1}{1!\,1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\dots \qquad [141,\ 142].$$

144. Пусть члены ряда $a_0+a_1+a_2+\dots$ попеременно положительны и отрицательны; далее, пусть существует такое число A, что разность

$$A-(a_0+a_1+a_2+\dots+a_n)$$

имеет всегда знак следующего члена a_{n+1}. Тогда A обвертывается рядом в узком смысле.

145. Если ряд $a_0+a_1+a_2+\dots$ с вещественными членами обвертывает вещественное число A и при этом $|a_1|>|a_2|>$ $>|a_3|>\dots$, то a_1, a_2, a_3, ... должны иметь чередующиеся знаки и A будет обвертываться в у з к о м с м ы с л е.

146. Если функция $f(x)$, принимающая для вещественных x $(x>R>0)$ вещественные значения, обвертывается вещественным рядом

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\dots$$

[1]) Конечно, во внимание принимаются лишь члены степенного ряда, отличные от нуля. Например, n-й частичной суммой степенного ряда для $\cos x$ считается

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

для $x > R$, то a_1, a_2, a_3, ... должны иметь чередующиеся знаки и ряд является обвертывающим в узком смысле.

147. Пусть функция $f(t)$ неограниченно дифференцируема при $t \geqslant 0$, причем все ее производные $f^{(n)}(t)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ при $t \to \infty$ убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю. Тогда интеграл $\int\limits_0^\infty f(t) \cos xt\, dt$ будет для вещественных x обвертываться в узком смысле рядом

$$-\frac{f'(0)}{x^2} + \frac{f'''(0)}{x^4} - \frac{f^{\mathrm{V}}(0)}{x^6} + \frac{f^{\mathrm{VII}}(0)}{x^8} - \ldots$$

(Пример: $f(t) = e^{-t}$.)

148. Число $\frac{2}{3}$ обвертывается рядом

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{32} - \frac{1}{32} + \ldots,$$

однако не в узком смысле.

---

149. [1]. Изобразить геометрически последовательное сложение первых семи членов ряда

$$e^i = 1 + \frac{i}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{i}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{i}{5!} - \frac{1}{6!} - \ldots$$

как комплексных чисел и вычислить этим путем значение e^i с точностью до третьего знака.

150. Пусть функция $f(z)$ обладает тем свойством, что максимумы модулей всех ее производных вдоль некоторого луча $\mathfrak{H}$, исходящего из точки $z=0$, достигаются в точке $z=0$ и только в ней. Иными словами, при всех значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|f^{(n)}(z)| < |f^{(n)}(0)|,$$

если z лежит на $\mathfrak{H}$ и $|z| > 0$. Тогда

a) $f(z)$ обвертывается вдоль луча $\mathfrak{H}$ степенным рядом

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \ldots \qquad \textbf{(140)};$$

b) функция $F(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} f\left(\frac{t}{z}\right) dt$ обвертывается вдоль луча $\overline{\mathfrak{H}}$, получающегося отражением $\mathfrak{H}$ от вещественной оси, рядом

$$f(0) + \frac{f'(0)}{z} + \frac{f''(0)}{z^2} + \frac{f'''(0)}{z^3} + \ldots \qquad \textbf{(147)}.$$

---

[1]) В задачах **149—155** членами ряда являются комплексные числа, причем употребляется их геометрическое изображение [III, **1** и сл.].

Интеграл, распространенный на положительные значения t, при указанных предположениях необходимо сходится.

151. Степенные ряды функций e^{-z}, $\ln(1+z)$ и $(1+z)^{-p}$ $(p>0)$ обвертывают эти функции при $\Re z \geqslant 0$, $z \neq 0$.

152. Пусть z лежит в одном из углов

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4} \quad (z \neq 0).$$

Тогда функция $e^{\frac{z^2}{2}} \int\limits_z^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ обвертывается рядом

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1 \cdot 3}{z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{z^7} + \ldots$$

(и притом в узком смысле при вещественных значениях z).

153. Пусть a_n и b_n — произвольные комплексные числа, отличные от нуля, причем оба имеют одинаковый аргумент $\left(\frac{a_n}{b_n}\right.$ вещественно и положительно$\Big)$. Если в некоторой точке $z \neq 0$ оба ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

обвертывают соответственно значения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, то в этой точке сумма

$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) z + (a_2 + b_2) z^2 + \ldots + (a_n + b_n) z^n + \ldots$$

будет обвертывать значение $\varphi(z) + \psi(z)$. (То же справедливо и при обвертывании в узком смысле, если все входящие величины вещественны.)

154. Для z, лежащих в областях, указанных в задаче **152**, функция $z \operatorname{cth} z$ обвертывается своим степенным рядом

$$z \operatorname{cth} z = z \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = 1 + B_1 \frac{(2z)^2}{2!} - B_2 \frac{(2z)^4}{4!} + B_3 \frac{(2z)^6}{6!} - \ldots$$

(и притом в узком смысле, если z вещественно). Коэффициенты B_1, B_2, B_3, ... называются *числами Бернулли*.

155. Функция

$$\omega(z) = \ln \Gamma(1+z) - \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z + z - \frac{1}{2} \ln (2\pi) \qquad [\text{II } 31]$$

при $\Re z > 0$ может быть представлена в интегральной форме

$$\omega(z) = 2 \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1}\,dt$$

[см. E. Lindelöf, Le calcul des résidus, стр. 88, Paris, Gauthier-Villars, 1905]. Показать, что получающийся отсюда (расходящийся) ряд Стирлинга

$$\frac{B_1}{1\cdot 2\cdot z}-\frac{B_2}{3\cdot 4\cdot z^3}+\frac{B_3}{5\cdot 6\cdot z^5}-\ldots$$

обвертывает функцию $\omega(z)$, если z, кроме условия $\Re z>0$, ограничено еще условием

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{4}.$$

§ 2. Прочие задачи, относящиеся к вещественным рядам

156. Пусть $\varphi(x)$ определена для положительных значений x, причем при достаточно больших x может быть представлена рядом

$$\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ вещественны. Бесконечный ряд

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)+\ldots$$

тогда и только тогда будет сходящимся, когда $a_0=0$, $a_1=0$.

157. (Продолжение.) Пусть $\varphi(n)\neq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Бесконечное произведение

$$\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)\ldots$$

тогда и только тогда будет сходящимся, когда

$$a_0=1,\quad a_1=0.$$

158. (Продолжение.) В каких случаях сходится бесконечный ряд

$$\varphi(1)+\varphi(1)\,\varphi(2)+\varphi(1)\,\varphi(2)\,\varphi(3)+\ldots+\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)+\ldots?$$

159. Для каких положительных значений α сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-e^{\alpha})\left(2-e^{\frac{\alpha}{2}}\right)\ldots\left(2-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)?$$

160. $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}.$

161. $\displaystyle\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}.$

162. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — положительные числа и

$$t_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}.$$

Сходимость последовательности

$$(t) \qquad t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$

определяется числом

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \ln a_n}{n} = \alpha$$

следующим образом:

если $\alpha < \ln 2$, то (t) сходится,
если $\alpha > \ln 2$, то (t) расходится.

163. (Продолжение.) Последовательность (t) во всяком случае сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

164. При $0 < q < 1$ имеет место равенство

$$\frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots = (1-q)^2.$$

165. Пусть бесконечный в обоих направлениях ряд

$$\ldots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(x)\,dx + \int_0^x dx \int_0^x f(x)\,dx + \ldots$$

равномерно сходится. Какую функцию он представляет?

166. Пусть $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ — полиномы n-й степени $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, определяемые формулами

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x), \qquad \varphi_n(0) = 0,$$
$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x+1) - \psi_n(x) = \psi_{n-1}(x), \quad \psi_n(0) = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Просуммировать ряды

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$
$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) + \ldots$$

167. Положим

$$x_n = y_n e^{-\frac{1}{12n}}, \quad y_n = n!\, n^{-n-\frac{1}{2}} e^n.$$

Показать, что интервалы $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ вложены один в другой, т. е. каждый из них содержит последующий как свою часть.

168. Последовательность

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

тогда и только тогда монотонно убывает, когда $p \geqslant \frac{1}{2}$.

169. Последовательность

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

тогда и только тогда монотонно убывает, когда $x \geqslant \frac{1}{2}$.

170. Показать, что при целом положительном n

$$\frac{e}{2n+2}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{e}{2n+1}.$$

171. Как известно, число $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ для любого значения $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ заключается в интервале

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad [168].$$

В какой четверти этого интервала?

172. Последовательность

$$a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

тогда и только тогда монотонно убывает, когда $0<x\leqslant 2$.

173. Показать, что n-я итерация синуса

$$\sin_n x=\sin(\sin_{n-1}x), \qquad \sin_1 x=\sin x$$

при возрастании n стремится к нулю, причем при $x>0$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x=1.$$

174. Пусть в интервале $0<x<x_0$ имеем $0<f(x)<x$,

$$f(x)=x-ax^k+bx^l+x^l\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0,$$

причем $1<k<l$, a, b положительны. Полагаем

$$\nu_0=x, \quad \nu_1=f(\nu_0), \quad \nu_2=f(\nu_1),\ \ldots,\ \nu_n=f(\nu_{n-1}),\ \ldots$$

Тогда при $n\to\infty$

$$n^{\frac{1}{k-1}}\nu_n \to [(k-1)\,a]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

175. Исследовать сходимость ряда

$$v_1^s + v_2^s + v_3^s + \ldots,$$

где

$$v_1 = \sin x, \quad v_2 = \sin\sin x, \ \ldots, \ v_n = \sin v_{n-1}, \ \ldots$$

Очевидно, можно предположить $v_1 > 0$.

176. Доказать формулу

$$e^x - 1 = u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots,$$

где

$$u_1 = x \neq 0, \quad u_{n+1} = \ln \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

177. Вычислить

$$s = \cos^3 \varphi - \frac{1}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3\varphi + \ldots$$

178. Пусть a_n, b_n $(b_n \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ — две последовательности, удовлетворяющие следующим условиям:

a) Степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ обладает радиусом сходимости r, отличным от нуля.

b) Существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = q,$$

причем $|q| < r$.

Положим теперь

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Показать, что при возрастании n отношение $\frac{c_n}{b_n}$ стремится к $f(q)$.

179. Пусть

$$f_n(x) = a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \ldots \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

— произвольные функции, для которых $|a_{nk}| < A$ при всех целых положительных значениях n, k и

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

при $0 < x < 1$. Тогда при произвольном фиксированном k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0.$$

180. Пусть ряды

$$a_{n0}+a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nk}+\ldots=s_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

обладают общей сходящейся мажорантой

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_k+\ldots=S,$$

т. е. для всех значений n и k выполняются неравенства $|a_{nk}|\leqslant A_k$. Пусть, далее, существует

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=a_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда ряд

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots=s$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s.$$

181. Обосновать предельные переходы в 53 и 59.

182. При фиксированном положительном α и n, стремящемся к $+\infty$ по целым значениям,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \nu^{\alpha-1}(n^\alpha-\nu^\alpha)^{-2}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{3}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2.$$

Штрих при знаке суммы означает, что член с $\nu=n$, как не имеющий смысла, отбрасывается. Отметить случай $\alpha=1$.

183. Пусть числа $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$ могут принимать лишь три значения: $-1,\ 0,\ +1$. Тогда

$$\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots}}}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{2^n}\right).$$

(Под выражением в левой части понимается предел выражения

$$\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}$$

при $n\to\infty$; это выражение имеет смысл при всех значениях n.)

184. Каждое число x из интервала $-2\leqslant x\leqslant 2$ может быть представлено в форме

$$x=\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots}}},$$

где числа $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots$ могут принимать лишь одно из двух значений -1 и $+1$. Указанное представление может быть осуществлено даже единственным образом, если x не имеет вида

$2\cos\frac{p}{2^q}\pi$, где p, q — целые, $0<p<2^q$. Последние числа являются единственными, могущими быть представленными в конечной форме

$$\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}.$$

Из этого конечного представления можно получить бесконечное двояким образом: полагая либо

$$\varepsilon_{n+1}=1,\qquad \varepsilon_{n+2}=-1,\qquad \varepsilon_{n+3}=\varepsilon_{n+4}=\ldots=1,$$

либо

$$\varepsilon_{n+1}=-1,\qquad \varepsilon_{n+2}=-1,\qquad \varepsilon_{n+3}=\varepsilon_{n+4}=\ldots=1.$$

185. (Продолжение.) Число x тогда и только тогда будет иметь вид $x=2\cos k\pi$, где k рационально, когда последовательность ε_0, ε_1, ε_2, ..., начиная с некоторого места, становится периодической.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ СУММ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Нижние и верхние суммы

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Разобьем этот интервал точками

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n,$$

где

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

на n подинтервалов; пусть m_ν и M_ν обозначают соответственно нижнюю и верхнюю грани $f(x)$ в ν-м интервале

$$x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$U = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})$$

и

$$O = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})$$

называются нижней и верхней суммами, соответствующими разбиению $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$. Каждая верхняя сумма превосходит (во всяком случае не меньше, чем) все нижние суммы. Если существует только одно число, не большее, чем любая верхняя, и не меньшее, чем любая нижняя сумма, то это число называют определенным интегралом функции $f(x)$ в интервале $[a,\ b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Функцию $f(x)$ называют тогда (собственно) *интегрируемой в смысле Римана* в интервале $[a, b]$.

Пример.

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \qquad (a>0).$$

Имеем

$$\frac{1}{x_\nu^2}<\frac{1}{x_{\nu-1}x_\nu}<\frac{1}{x_{\nu-1}^2},$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu-x_{\nu-1}}{x_\nu^2}<\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu-x_{\nu-1}}{x_{\nu-1}x_\nu}<\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu-x_{\nu-1}}{x_{\nu-1}^2}.$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu-x_{\nu-1}}{x_{\nu-1}x_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{\nu-1}}-\frac{1}{x_\nu}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Таким образом, число $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ больше всех нижних и меньше всех верхних сумм. Однако, для того чтобы отсюда можно было заключить, что

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\int_a^b\frac{dx}{x^2},$$

нужно еще показать, что только $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ обладает этим свойством. Вследствие монотонности функции $\frac{1}{x^2}$ доказать это не представляет труда [см., например, Cesàro, стр. 692 *)].

1. Пусть $a>0$, r — целое число, $r\geqslant 2$. Показать аналогичным способом, что

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{x_\nu^{r-1}x_{\nu-1}}+\frac{1}{x_\nu^{r-2}x_{\nu-1}^2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu x_{\nu-1}^{r-1}}\right)(x_\nu-x_{\nu-1})=$$

$$=\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{a^{r-1}}-\frac{1}{b^{r-1}}\right)=\int_a^b\frac{dx}{x^r}.$$

2. Пусть $a>0$ и r — положительное целое число. Показать, что $\int_a^b x^r\,dx=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$, т. е. что число $\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$ превосходит все нижние суммы и меньше всех верхних.

---

*) Чезаро, ч. 2, стр. 251.

Точки деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ образуют арифметическую прогрессию, если

$$x_{\nu+1} - x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$. Они образуют геометрическую прогрессию, если

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{x_\nu}{x_{\nu-1}}$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$; в последнем случае предполагается, что $a > 0$.

3. Составить нижние и верхние суммы для функции e^x в интервале $[a, b]$, располагая точки деления в арифметической прогрессии. К какому пределу стремятся эти суммы при $n \to \infty$?

4. Составить нижние и верхние суммы для функции $\frac{1}{x}$ в интервале $[a, b]$ $(a > 0)$, когда точки деления образуют геометрическую прогрессию. К какому пределу стремятся эти суммы при $n \to \infty$?

5. Доказать тождество

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Найти предел при $n \to \infty$. [Правую часть можно рассматривать как нижнюю сумму для некоторой функции в интервале [0, 1], разделенном на равные части.]

6. Бесконечная последовательность, n-й член которой равен n-й частичной сумме ряда

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots,$$

взятой для $x = \frac{\pi}{n+1}$, стремится к пределу, отличному от нуля. (Из этого следует, что указанный ряд в окрестности точки $x = 0$ сходится неравномерно.)

7. Пусть функция $f(x)$, о которой идет речь на стр. 56, является производной некоторой функции $F(x)$. Тогда для любых нижних и верхних сумм U и O выполняется неравенство

$$U \leqslant F(b) - F(a) \leqslant O.$$

(Этим, однако, еще не сказано, что $F(b) - F(a)$ есть *единственное* число, удовлетворяющее этому двойному неравенству для всех U и O.)

§ 2. Степень приближения

8. Пусть $0 < \xi < 1$, функция $f(x)$ в интервале $[0, \xi]$ монотонно возрастает, в интервале $[\xi, 1]$ монотонно убывает и максимум ее $f(\xi) = M$. Тогда разность

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю, как $\frac{1}{n}$. Именно

$$-\frac{M - f(0)}{n} \leqslant \Delta_n \leqslant \frac{M - f(1)}{n}.$$

9. Пусть $f(x)$ — функция с ограниченным изменением в интервале $[0, 1]$. Показать, что разность

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю, как $\frac{1}{n}$. Именно

$$|\Delta_n| \leqslant \frac{V}{n},$$

где V — полное изменение $f(x)$ на интервале $[0, 1]$.

10. Пусть $f(x)$ в интервале $[a, b]$ имеет ограниченную и интегрируемую производную. Положим

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(a + \nu \frac{b-a}{n}\right).$$

Определить $\lim\limits_{n \to \infty} n\Delta_n$.

11. Если $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x)$ собственно интегрируема в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то разность

$$\Delta'_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(a + (2\nu - 1)\frac{b-a}{2n}\right)$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю, как $\frac{1}{n^2}$. Более того, $\lim\limits_{n \to \infty} n^2\Delta'_n$ существует. Определить этот предел.

12. (Продолжение.) Разность

$$\Delta''_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2n+1}\left[f(a) + 2\sum_{\nu=1}^{n} f\left(a + 2\nu\frac{b-a}{2n+1}\right)\right]$$

стремится к нулю, как $\frac{1}{n^2}$. Более того, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n''$ существует. Определить его.

Кроме того, показать, что если $f'(a) \geqslant 0$ и $f''(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то $\Delta_n'' \geqslant 0$.

13. Пусть

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$
$$V_n = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{4n-1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \ln 2, \qquad \lim_{n\to\infty} V_n = \ln 2,$$
$$\lim_{n\to\infty} n(\ln 2 - U_n) = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - V_n) = \frac{1}{32}.$$

14. Выражение

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} - \frac{2n}{\pi}(\ln 2n + C - \ln \pi)$$

при возрастании n остается ограниченным; C — так называемая *эйлерова постоянная* [решение 18].

15. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n}{4}} n^{-\frac{n+1}{2}} (1^1 2^2 3^3 \ldots n^n)^{\frac{1}{n}} = 1.$

16. Обозначим через x_n (единственный) корень уравнения

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-n} = \alpha \qquad (\alpha > 0)$$

в интервале (n, ∞). Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{n+\frac{1}{2}}{1-e^{-\alpha}}\right) = 0 \qquad [12].$$

17. Пусть x_n' обозначает (единственный) корень уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1^2} + \frac{2x}{x^2-2^2} + \ldots + \frac{2x}{x^2-n^2} = \alpha \qquad (\alpha > 0)$$

в интервале (n, ∞). Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[x_n' - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right] = 0 \qquad [12].$$

18. Если $f(x)$ при $x \geqslant 1$ дифференцируема и $f'(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, то

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx\right) = s$$

существует; при этом, если $f'(x)$, скажем, возрастает, имеем:

$$\frac{1}{8} f'(n) < \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots$$

$$\ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx - s < 0.$$

Рассмотреть, в частности, случаи $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = -\ln x$.

19. Если $f(x)$ при $x \geqslant 1$ дифференцируема и $f'(x)$ монотонно и неограниченно возрастает при $x \to \infty$, то

$$\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) = \int_1^n f(x)\,dx + O[f'(n)].$$

Более точно:

$$0 < \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx <$$

$$< \frac{1}{8} f'(n) - \frac{1}{8} f'(1).$$

§ 3. Несобственные интегралы в конечных пределах

Пусть функция $f(x)$ определена в конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$ за исключением точки $x = c$ $(a \leqslant c \leqslant b)$, в окрестности которой она принимает сколь угодно большие значения. Пусть, кроме того, $f(x)$ собственно интегрируема в любом подинтервале интервала $[a, b]$, не содержащем c. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется как предел, к которому стремится сумма $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$, когда ε и ε' стремятся к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon,\, \varepsilon' \to +0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx\right).$$

(Если c равно a или b, то соответствующий интеграл в скобках отпадает.) Аналогично этому определяется интеграл и в случае наличия в интервале $[a, b]$ нескольких (конечного числа) таких точек.

Если $f(x)$ определена для $x \geqslant a$ и собственно интегрируема в любом конечном интервале $a \leqslant x \leqslant \omega$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ определяется как предел, к которому стремится $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ при $\omega \to \infty$:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f(x)\,dx.$$

Надлежаще выбранной подстановкой всегда можно несобственный интеграл одного из этих двух типов преобразовать в несобственный интеграл другого типа.

20. Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0 < x < 1$; пусть, далее, у одной из точек $x = 0$ и $x = 1$ или у обеих функция не ограничена, но так, что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ существует. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

21. (Продолжение.) Пусть $\varphi(x)$ собственно интегрируема в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{2}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int\limits_0^1 \varphi(x)\,f(x)\,dx.$$

22. Показать иным способом, чем в I 71, что при $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

23. Положим

$$\sum_{k=1}^\infty k^{\alpha-1}z^k \sum_{l=1}^\infty l^{\beta-1}z^l = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n \qquad (\alpha,\ \beta > 0).$$

Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha-\beta}a_n$$

существует и отличен от нуля. (Если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha+\beta \geqslant 1$, то при $z = -1$ ряд в правой части будет расходящимся, хотя оба ряда в левой части сходятся.)

24. Утверждение задачи **20**, вообще говоря, необратимо: существуют монотонные в интервале $0<x<1$ функции, для которых предел в левой части существует, и тем не менее несобственный интеграл в правой части не существует.

25. Если $f(x)$ в интервале $0<x<1$ монотонна, имеет конечный предел при $x \to 0$ или $x \to 1$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}$$

существует, то существует также $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

26. Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0<x<1$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\nu-1}{2n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx,$$

в предположении, что несобственный интеграл справа существует.

27. Для $\alpha>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}-2^{\alpha-1}+3^{\alpha-1}-4^{\alpha-1}+\ldots+(-1)^{n-1}n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}=0.$$

28. Если $f(x)$ в интервале $[0, 1]$ собственно интегрируема, то, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)-\ldots+(-1)^{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=0.$$

Показать, что это равенство остается в силе также тогда, когда $f(x)$ лишь несобственно интегрируема, но зато монотонна.

29. Если $f(x)$ монотонна при $x>0$, далее, $\varepsilon_n > \frac{c}{n}$, где $c>0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\varepsilon_n)+f\left(\varepsilon_n+\frac{1}{n}\right)+f\left(\varepsilon_n+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\varepsilon_n+\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int\limits_0^1 f(x)\,dx,$$

в предположении, что последний интеграл существует.

§ 4. Несобственные интегралы в бесконечных пределах

30. Пусть при $x \geqslant 0$ функция $f(x)$ монотонна и несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ существует. Тогда

$$\lim_{h\to+0} h\,[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots] = \lim_{h\to+0} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int\limits_0^\infty f(x)\,dx.$$

31. Гамма-функция Γ определяется для $\alpha>0$ (более обще для $\Re\alpha>0$) как интеграл

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

Показать, основываясь на I 89, что

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}\qquad(\alpha>0).$$

32. Как известно, эйлерову постоянную C можно представить в виде следующего интеграла:

$$C=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

[см. Cesàro, стр. 782 *)]. Показать, что

$$C=\lim_{t\to 1-0}\left[(1-t)\left(\frac{t}{1-t}+\frac{t^2}{1-t^2}+\frac{t^3}{1-t^3}+\dots+\frac{t^n}{1-t^n}+\dots\right)-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{1}{1-t}\right].$$

33. $$\lim_{t\to 1-0}(1-t)\left(\frac{t}{1+t}+\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{t^3}{1+t^3}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{t^n}{1+t^n}+\dots\right)=\ln 2.$$

34. $$\lim_{t\to 1-0}(1-t)^2\left(\frac{t}{1-t}+2\frac{t^2}{1-t^2}+\dots+n\frac{t^n}{1-t^n}+\dots\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

35. $$\lim_{t\to 1-0}\sqrt{1-t}\,(1+t+t^4+t^9+\dots+t^{n^2}+\dots)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вообще при $\alpha>0$

$$\lim_{t\to 1-0}\sqrt[\alpha]{1-t}\,(1+t^{1^\alpha}+t^{2^\alpha}+t^{3^\alpha}+\dots+t^{n^\alpha}+\dots)=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

36. Вычислить

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{2t}{t^2+1^2}+\frac{2t}{t^2+2^2}+\dots+\frac{2t}{t^2+n^2}+\dots\right).$$

37. Положим

$$g(t)=\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{t}{n^\alpha}\right)\qquad(\alpha>1).$$

*) В русском издании книги Чезаро эта формула опущена; ее можно найти, например, в книге Уиттекер и Ватсон, «Курс современного анализа», Физматгиз, 1963, ч. 2, стр. 30.

Показать, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln g(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

38. Исходя из формулы

$$\frac{\sin t}{t}=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),$$

справедливой для любого комплексного значения t, посредством предельного перехода вывести формулу

$$\int_0^{\infty}\ln(1-2x^{-2}\cos 2\varphi+x^{-4})\,dx=2\pi\sin\varphi \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

39. Вычислить интеграл $\int_0^a \ln x\,dx$, деля интервал $(0, a]$ на части при помощи бесконечной геометрической прогрессии a, aq, aq^2, ... $(0<q<1)$ и рассматривая получающиеся бесконечные суммы прямоугольников.

40. Показать, что при фиксированном положительном k и целочисленном $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}^k\sim\frac{2^{kn}}{\sqrt{k}}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \qquad [58].$$

Сравнить с известными результатами при $k=1$, $k=2$.

§ 5. Теоретико-числовые применения

41. Будем делить целое положительное число n на 1, 2, 3, ..., ν, ..., n. Остаток от деления n на ν обозначим через n_ν. Так, например, $17_3=2$, $10_{20}=10$. Очевидно, $n\equiv n_\nu \pmod{\nu}$, $0\leqslant\leqslant n_\nu<\nu$.

Какова вероятность*) того, что $n_\nu\geqslant\frac{\nu}{2}$?

Решение. Имеем:

$$n=\nu\left[\frac{n}{\nu}\right]+n_\nu,$$

отсюда

$$0\leqslant\frac{2n}{\nu}-2\left[\frac{n}{\nu}\right]=\frac{2n_\nu}{\nu}<2.$$

*) Взять в качестве делителя то или иное число ν $(1\leqslant\nu\leqslant n)$ считается равновозможным.

Следовательно, в благоприятствующем случае $\left(n_\nu \geq \frac{\nu}{2}\right)$ будет:

$$\left[\frac{2n}{\nu}\right] - 2\left[\frac{n}{\nu}\right] = 1,$$

а в неблагоприятствующем $\left(n_\nu < \frac{\nu}{2}\right)$ будет:

$$\left[\frac{2n}{\nu}\right] - 2\left[\frac{n}{\nu}\right] = 0 \qquad \text{[VIII 3].}$$

Таким образом, для искомой вероятности получаем выражение

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{\nu}\right] - 2\left[\frac{n}{\nu}\right]\right).$$

При $n \to \infty$ оно стремится к собственному интегралу

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right) dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right) dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\nu+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\nu+1}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = 2\ln 2 - 1 = 0{,}38629\ldots$$

42. (Продолжение.) Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{3} + \ldots + \frac{n_n}{n}\right).$$

43. (Продолжение.) Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_n}{n^2}.$$

44. (Продолжение.) Отношение числа тех дробей

$$\frac{n_1}{1}, \quad \frac{n_2}{2}, \quad \frac{n_3}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{n_n}{n},$$

которые меньше, чем некоторое фиксированное число α $(0 \leq \alpha \leq 1)$, к общему числу n всех выписанных дробей при $n \to \infty$ стремится к

$$\int_0^1 \frac{1 - x^\alpha}{1 - x}\, dx \qquad \text{[VIII 4].}$$

45. Пусть $\sigma_\alpha(n)$ — сумма α-х степеней всех делителей числа n (VIII, гл. 1, § 5) и

$$\Sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(1) + \sigma_\alpha(2) + \sigma_\alpha(3) + \ldots + \sigma_\alpha(n) = \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{n}{\nu}\right]\nu^\alpha \qquad \text{[VIII 81].}$$

Тогда для $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}} = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1},$$

где $\zeta(s)$ есть ζ-функция Римана $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (см. VIII, гл. 1, § 5). Для $\alpha > 1$, более того, имеет место неравенство

$$\left| \frac{\Sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}} - \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} \right| \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)-1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[$\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) x^\alpha$ собственно интегрируема в интервале (0, 1], если $\alpha > 0$ [107]; $\left[\frac{1}{x}\right] x^\alpha$ есть функция с ограниченным изменением при $\alpha > 1$.]

46. Обозначим через $\tau(n) = \sigma_0(n)$ число делителей числа n. Тогда

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \ldots + \tau(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{n}{\nu}\right] =$$

$$= n(\ln n + 2C - 1) + O(\sqrt{n}) \qquad [\text{VIII } 79],$$

где C — эйлерова постоянная. [Применить соображения задачи 9 к функции $\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ в интервале $\left(\frac{1}{m}, 1\right)$, где $m = [\sqrt{n}] + 1$; решение 18.]

47. Обозначим через U_n число нечетных, через G_n — число четных делителей числа n. Так, например, $U_{20} = 2$, $G_{20} = 4$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1 - G_1 + U_2 - G_2 + \ldots + U_n - G_n}{n} = \ln 2.$$

§ 6. Средние значения. Произведения

Под арифметическим, геометрическим и гармоническим средними n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ понимают соответственно выражения

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}, \quad \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

В двух последних случаях предполагается, что все числа положительны. (Более подробно о средних см. гл. 2.)

48. Пусть $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b]$. Введем обозначение

$$f_{\nu n} = f(a + \nu\delta_n) \quad \left(\delta_n = \frac{b-a}{n}\right).$$

Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{1n}+f_{2n}+f_{3n}+\ldots+f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}f_{3n}\ldots f_{nn}} = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{f_{1n}}+\frac{1}{f_{2n}}+\frac{1}{f_{3n}}+\ldots+\frac{1}{f_{nn}}} = \frac{b-a}{\int\limits_0^b \frac{dx}{f(x)}}.$$

Эти три предела называют соответственно арифметическим, геометрическим и гармоническим средними функции $f(x)$. В двух последних случаях предполагается, что нижняя грань функции $f(x)$ положительна.

49. Способом, иным, чем в I 69, показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

существует и равен геометрическому среднему от x в интервале $[0, 1]$, т. е. равен $\frac{1}{e}$.

50. Пусть a и d — положительные числа, а A_n и G_n — арифметическое и геометрическое средние чисел a, $a+d$, $a+2d$, … …, $a+(n-1)d$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}.$$

51. Обозначим через A_n и G_n арифметическое и геометрическое средние биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{\nu},\ \ldots,\ \binom{n}{n}.$$

Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}.$$

52. Показать, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx = \begin{cases} 2\ln r & \text{при } r \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

53. Пусть r положительно и меньше единицы, x пробегает интервал $[0, 2\pi]$ и ξ обозначает ближайшее к x число, для которого

$$\sin(x-\xi) = r\sin x;$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos\xi+r^2)\,dx=\ln(1-r^2).$$

[Рассмотреть e^{ix}, $e^{i\xi}$ и r в комплексной плоскости.]

54. Если функция $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b]$, то, в обозначениях задачи 48,

$$\lim_{n\to\infty}(1+f_{1n}\delta_n)(1+f_{2n}\delta_n)\dots(1+f_{nn}\delta_n)=e^{\int\limits_a^b f(x)\,dx}.$$

55. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+n)}{(n^2-1)(n^2-2)\dots(n^2-n)}.$$

56. Доказать тождество

$$\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2\alpha-1}\right)\left(1+\frac{1}{3\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{4\alpha-1}\right)\dots$$

$$\dots\left(1+\frac{1}{(2n-1)\alpha-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n\alpha-1}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha-1}\cdot\frac{(n+2)\alpha}{(n+2)\alpha-1}\dots\frac{(n+n)\alpha}{(n+n)\alpha-1}.$$

Отсюда вытекает, что если $\alpha\neq 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots,$ то стоящее в левой части произведение при $n\to\infty$ стремится к $2^{\frac{1}{\alpha}}$. $[(2n)!=2^n n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1).]$

57. Пусть

$$a=1+\frac{\alpha}{n},\quad b=1+\frac{\beta}{n},\quad d=\frac{\delta}{n},$$

где α, β, δ фиксированы и $\delta>0$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}\cdot\frac{a+d}{b+d}\cdot\frac{a+2d}{b+2d}\dots\frac{a+(n-1)d}{b+(n-1)d}=(1+\delta)^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}.$$

58. Пусть n и ν — целые числа, $0<\nu<n$. Если при $n\to\infty$ также $\nu\to\infty$ и притом так, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}=\lambda,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{\nu}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-2\lambda^2}.$$

59. Пусть $z = 2ne^{\frac{it}{\sqrt{n}}}$, где t — фиксированное вещественное число. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{z-1}\cdot\frac{2n-2}{z-2}\cdot\frac{2n-3}{z-3}\cdots\frac{2n-n}{z-n}\right| = \left(\frac{2}{e}\right)^{t^2}.$$

§ 7. Кратные интегралы

60. Пусть функция $f(x, y)$ представляет собой в прямоугольнике R

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

вторую «смешанную» производную некоторой функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = f(x, y).$$

Проведем через точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d$$

прямые, параллельные осям координат. Этими прямыми прямоугольник R разделится на прямоугольные части $R_{\mu\nu}$:

$$x_{\mu-1} \leqslant x \leqslant x_\mu, \quad y_{\nu-1} \leqslant y \leqslant y_\nu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим нижнюю и верхнюю грани $f(x, y)$ в $R_{\mu\nu}$ соответственно через $m_{\mu\nu}$, $M_{\mu\nu}$ и образуем верхнюю сумму

$$O = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} M_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1})$$

и нижнюю сумму

$$U = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu}(x_\mu - x_{\mu-1})(y_\nu - y_{\nu-1}).$$

Показать, что всегда

$$U \leqslant F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \leqslant O.$$

61.

$$\iint\limits_{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi} \ln|\sin(x-y)|\, dx\, dy = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

[Вычислить двумя способами квадрат модуля определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.]

62. Пусть $f(x, y)$ собственно интегрируема в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\nu}{n}\right)\right] = e^{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y)\, dx\, dy}.$$

63. В том же предположении относительно $f(x, y)$ вычислить

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{\nu=1}^{n} \left\{1 + \frac{1}{n^2}\left[f\left(\frac{1}{n}, \frac{\nu}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}, \frac{\nu}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}, \frac{\nu}{n}\right)\right]\right\}.$$

64. Показать, основываясь на I 30, что объем $\iiint\limits_{\mathfrak{B}} dx\, dy\, dz$ трехмерной области $\mathfrak{B}$, определенной неравенствами

$$-1 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant 1, \quad -\sigma \leqslant x + y + z \leqslant \sigma,$$

равен

$$\frac{2^3}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{\sin \sigma t}{t}\, dt.$$

65. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — произвольные положительные числа. Образуем функции

$$f_\nu(z) = 1^{\alpha_\nu - 1} z + 2^{\alpha_\nu - 1} z^2 + \ldots + n^{\alpha_\nu - 1} z^n + \ldots \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

и произведение их

$$f_1(z) f_2(z) \ldots f_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - 1}} =$$

$$= \int\int \ldots \int x_1^{\alpha_1 - 1} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1} - 1} (1 - x_1 - \ldots - x_{p-1})^{\alpha_p - 1}\, dx_1 \ldots dx_{p-1},$$

где интеграл распространен на $(p-1)$-мерный симплекс, определяемый p неравенствами

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_{p-1} \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} \leqslant 1.$$

66. (Продолжение.) Показать, что

$$\int\int \ldots \int x_1^{\alpha_1 - 1} \ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1} - 1} (1 - x_1 - \ldots - x_{p-1})^{\alpha_p - 1}\, dx_1 \ldots dx_{p-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\, \Gamma(\alpha_2) \ldots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)}.$$

67. Развернуть выражение, стоящее под знаком предела в 54 и представляющее собой полином n-й степени относительно δ_n, по степеням δ_n. Показать, что коэффициент при p-й степени δ_n

при p фиксированном и $n\to\infty$ стремится к пределу

$$\underset{a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_p\leqslant b}{\int\int\ldots\int} f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p=$$

$$=\frac{1}{p!}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^p.$$

68. Пусть $2m$ функций

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad\ldots,\quad f_m(x),$$
$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad\ldots,\quad \varphi_m(x)$$

собственно интегрируемы в интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Тогда

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)\varphi_1(x)\,dx & \int_a^b f_1(x)\varphi_2(x)\,dx\ldots & \int_a^b f_1(x)\varphi_m(x)\,dx \\ \int_a^b f_2(x)\varphi_1(x)\,dx & \int_a^b f_2(x)\varphi_2(x)\,dx\ldots & \int_a^b f_2(x)\varphi_m(x)\,dx \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \int_a^b f_m(x)\varphi_1(x)\,dx & \int_a^b f_m(x)\varphi_2(x)\,dx\ldots & \int_a^b f_m(x)\varphi_m(x)\,dx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{m!}\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{m}\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2)\ldots & f_1(x_m) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\ldots & f_2(x_m) \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ f_m(x_1) & f_m(x_2)\ldots & f_m(x_m)\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_m) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_2(x_m) \\ \dots\dots\dots & & & \dots\dots \\ \varphi_m(x_1) & \varphi_m(x_2) & \ldots & \varphi_m(x_m)\end{vmatrix}dx_1\,dx_2\ldots dx_m.$$

[Вычислить двумя способами «произведение» матриц

$$\left\|f_{\nu n}^{(\lambda)}\right\|_{\substack{\lambda=1,2,\ldots,m\\ \nu=1,2,\ldots,n}}\cdot\left\|\varphi_{\nu n}^{(\mu)}\right\|_{\substack{\mu=1,2,\ldots,m\\ \nu=1,2,\ldots,n}},$$

где

$$f_{\nu n}^{(\lambda)}=f_\lambda\left(a+\nu\frac{b-b}{n}\right),\quad \varphi_{\nu n}^{(\mu)}=\varphi_\mu\left(a+\nu\frac{b-a}{a}\right).]$$

ГЛАВА 2

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Неравенства

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые вещественные числа. Под их *арифметическим средним* $\mathfrak{A}(a)$ понимают выражение

$$\mathfrak{A}(a)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Если все $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то их *геометрическое* и *гармоническое* средние определяются соответственно формулами

$$\mathfrak{G}(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \qquad \mathfrak{H}(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Обозначим через m наименьшее, через M наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; тогда

$$m\leqslant\mathfrak{A}(a)\leqslant M, \quad m\leqslant\mathfrak{G}(a)\leqslant M, \quad m\leqslant\mathfrak{H}(a)\leqslant M.$$

Здесь для $\mathfrak{G}(a)$ и $\mathfrak{H}(a)$ предполагается $m>0$. Таким образом, три числа $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{G}(a)$ и $\mathfrak{H}(a)$ представляют собой средние значения чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Равенства достигаются только в том случае, когда все a_ν равны между собой.

Имеем:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}(a)}=\mathfrak{G}\left(\frac{1}{a}\right), \quad \frac{1}{\mathfrak{H}(a)}=\mathfrak{A}\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$\mathfrak{A}(a+b)=\mathfrak{A}(a)+\mathfrak{A}(b), \qquad \mathfrak{G}(ab)=\mathfrak{G}(a)\,\mathfrak{G}(b), \qquad \ln\mathfrak{G}(a)=\mathfrak{A}(\ln a).$$

Пусть $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. Под *арифметическим* средним $\mathfrak{A}(f)$ функции $f(x)$ понимают выражение

$$\mathfrak{A}(f)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Если, кроме того, $f(x)$ существенно положительна, т. е. для всех значений x превосходит некоторое положительное число, то ее *геометрическое* и *гармоническое* средние определяются соответственно формулами

$$\mathfrak{G}(f)=e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\ln f(x)\,dx}, \qquad \mathfrak{H}(f)=\frac{x_2-x_1}{\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{f(x)}} \qquad [48].$$

Обозначим через m нижнюю, через M верхнюю грани функции $f(x)$ в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, тогда

$$m\leqslant\mathfrak{A}(f)\leqslant M, \quad m\leqslant\mathfrak{G}(f)\leqslant M, \quad m\leqslant\mathfrak{H}(f)\leqslant M.$$

Здесь для $\mathfrak{G}(f)$ и $\mathfrak{H}(f)$ предполагается, что $m>0$. Таким образом, числа $\mathfrak{A}(f)$, $\mathfrak{G}(f)$ и $\mathfrak{H}(f)$ являются средними значениями функции $f(x)$. Имеем:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}(f)}=\mathfrak{G}\left(\frac{1}{f}\right), \quad \frac{1}{\mathfrak{H}(f)}=\mathfrak{A}\left(\frac{1}{f}\right),$$

$$\mathfrak{A}(f+g)=\mathfrak{A}(f)+\mathfrak{A}(g), \qquad \mathfrak{G}(fg)=\mathfrak{G}(f)\,\mathfrak{G}(g), \qquad \ln\mathfrak{G}(f)=\mathfrak{A}(\ln f).$$

Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, среди которых имеются по крайней мере два различных, выполняются неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}<\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

т. е.

$$\mathfrak{H}(a)<\mathfrak{G}(a)<\mathfrak{A}(a).$$

(Теорема об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних.) В своем «Analyse algébrique» (Note 2; Oeuvres complètes, серия 2, т. 3, стр. 375—377, Paris, Gauthier-Villars, 1897) Коши дал особенно простое и изящное доказательство этой теоремы[1]).

---

[1]) Очевидно, достаточно доказать, что $\mathfrak{A}(a)>\mathfrak{G}(a)$. Приводим полностью перевод соответствующего места у Коши:

Среднее геометрическое нескольких чисел $A, B, C, D, \ldots$ всегда меньше их среднего арифметического.

Доказательство. Пусть n будет количество чисел $A, B, C, D, \ldots$ Достаточно доказать, что вообще

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots}<\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}, \tag{1}$$

или, что то же,

$$ABCD\ldots<\left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Но прежде всего для $n=2$ мы, очевидно, имеем:

$$AB=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2-\left(\frac{A-B}{2}\right)^2<\left(\frac{A+B}{2}\right)^2.$$

Отсюда заключаем, полагая последовательно $n=4$, $n=8$, ..., наконец, $n=2^m$, что

$$ABCD<\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\left(\frac{C+D}{2}\right)^2<\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH<\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4\left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4<$$

$$<\left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

. . . .

$$ABCD\ldots<\left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}. \tag{3}$$

Пусть теперь n не принадлежит геометрической прогрессии 2, 4, 8, 16, ... Обозначим через 2^m первый член этой прогрессии, превосходящий n, и положим

$$K=\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}.$$

Полагая теперь в левой части формулы (3) 2^m-n последних множителей равными K, мы получим:

$$ABCD\ldots K^{2^m-n}<\left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

69. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[x_1, x_2]$ и имеет в нем положительную нижнюю грань. Тогда

$$\frac{x_2-x_1}{\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{f(x)}}\leqslant e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\ln f(x)\,dx}\leqslant\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx,$$

т. е. во введенных выше обозначениях

$$\mathfrak{H}(f)\leqslant\mathfrak{G}(f)\leqslant\mathfrak{A}(f).$$

70. Пусть $\varphi(t)$ есть (не обязательно дифференцируемая) функция, удовлетворяющая для любой пары значений t_1, t_2 ($t_1\neq\neq t_2$) неравенству

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}.$$

Тогда вообще

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_n)}{n},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые числа, не все равные между собой.

Функцию $\varphi(t)$ называют *выпуклой снизу* в интервале $m\leqslant t\leqslant\leqslant M$, если для любой пары значений t_1, t_2 ($t_1\neq t_2$) из этого интервала выполняется неравенство

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}.$$

Согласно 70 тогда вообще

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_n)}{n},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые числа из интервала $[m, M]$, не все равные между собой. Если вместо знака $<$ имеет место знак $\leqslant$, то $\varphi(t)$ называют *невогнутой снизу*. Если всюду вместо знака $<$ (соответственно $\leqslant$) имеет место знак $>$ (соответственно $\geqslant$), то $\varphi(t)$ называют *выпуклой сверху* (соответственно *невогнутой сверху*). В последующем мы будем рассматривать лишь ограниченные выпуклые функции; они непрерывны [см. **124**, часто может быть полезно также **110**].

или, другими словами, $ABCD\ldots K^{2^m-n}<K^{2^m}$. Следовательно,

$$ABCD\ldots<K^n=\left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n,$$

что и требовалось доказать.»

71. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, причем $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Пусть, далее, $\varphi(t)$ выпукла (невогнута) в интервале $m \leqslant t \leqslant M$. Тогда имеет место неравенство

$$\varphi\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right) \leqslant \text{или} \geqslant \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} \varphi[f(x)]\,dx$$

смотря по тому, будет ли $\varphi(t)$ выпукла снизу или сверху.

72. Пусть функция $\varphi(t)$ определена в интервале $[m, M]$; пусть, далее, в этом интервале $\varphi''(t)$ существует и всюду $\varphi''(t) > 0$. Тогда $\varphi(t)$ выпукла снизу. Если $\varphi''(t)$ лишь $\geqslant 0$, то $\varphi(t)$ невогнута снизу. (Функция может быть выпуклой или невогнутой и в том случае, когда $\varphi''(t)$ существует не всюду.)

73. Показать, что

$$t^k \ (0 < k < 1) \quad \text{или} \quad \ln t$$

в любом положительном интервале выпуклы сверху,

$$t^k \ (k < 0 \quad \text{или} \quad k > 1) \quad \text{и} \quad t \ln t$$

в любом положительном интервале выпуклы снизу,

$$\ln(1+e^t) \quad \text{и} \quad \sqrt{c^2+t^2} \qquad (c > 0)$$

всюду выпуклы снизу.

74. Пусть функция $\varphi(t)$ выпукла (невогнута) в интервале $[m, M]$, далее, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — любые положительные числа и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые точки интервала $[m, M]$. Тогда

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\ldots+p_nt_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right) \leqslant \text{ или } \geqslant \frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)+\ldots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

смотря по тому, будет ли $\varphi(t)$ выпуклой снизу или сверху.

75. Пусть $f(x)$ и $p(x)$ собственно интегрируемы в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, далее, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x) \geqslant 0$ и $\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx > 0$. Пусть, кроме того, $\varphi(t)$ выпукла (невогнута) в интервале $m \leqslant t \leqslant M$. Тогда

$$\varphi\left(\frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x)f(x)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx}\right) \leqslant \text{ или } \geqslant \frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\varphi[f(x)]\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx},$$

смотря по тому, будет ли $\varphi(t)$ выпукла снизу или сверху.

76. Если $\varphi(t)$ в интервале $[m, M]$ дважды дифференцируема и $\varphi''(t) > 0$, то для любых положительных $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\ldots+p_nt_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right) \leqslant \frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)+\ldots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $t_1 = t_2 = \ldots = t_n$.

77. Пусть $f(x)$ и $p(x)$ непрерывны в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, далее, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $p(x)$ существенно положительна. Пусть, кроме того, $\varphi(t)$ дважды дифференцируема в интервале $m \leqslant t \leqslant M$, причем в этом интервале $\varphi''(t) > 0$. Тогда

$$\varphi\left\{\frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}\right\} \leqslant \frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, \varphi[f(x)]\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \text{const}.$$

78. Доказать справедливость следующего обобщения теоремы об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних: если $p_1, p_2, \ldots, p_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые положительные числа и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все между собой равны, то имеют место неравенства

$$\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\ldots+\frac{p_n}{a_n}} < e^{\frac{p_1 \ln a_1 + p_2 \ln a_2 + \ldots + p_n \ln a_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}} < \frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Кроме того,

$$e^{\frac{\frac{p_1}{a_1}\ln a_1+\frac{p_2}{a_2}\ln a_2+\ldots+\frac{p_n}{a_n}\ln a_n}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\ldots+\frac{p_n}{a_n}}} < \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\ldots+\frac{p_n}{a_n}},$$

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} < e^{\frac{p_1a_1 \ln a_1 + p_2a_2 \ln a_2 + \ldots + p_na_n \ln a_n}{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}}.$$

79. Пусть $f(x)$ и $p(x)$ непрерывны и положительны в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, причем $f(x)$ не приводится к постоянной. Тогда

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{p(x)}{f(x)}\, dx} < e^{\frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x) \ln f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}} < \frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx};$$

далее,

$$e^{\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{p(x)}{f(x)}\ln f(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{p(x)}{f(x)}\,dx}}<\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{p(x)}{f(x)}\,dx},\qquad \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)f(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx}<e^{\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)f(x)\ln f(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)f(x)\,dx}}.$$

80. Для любых действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a_ν и b_ν пропорциональны, т. е. когда для всех $\nu=1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство

$$\lambda a_\nu+\mu b_\nu=0 \qquad (\lambda^2+\mu^2>0)$$

(*неравенство Коши*).

81. Если $f(x)$ и $g(x)$ собственно интегрируемы в интервале $[x_1, x_2]$, то имеет место неравенство

$$\left(\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int\limits_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx\int\limits_{x_1}^{x_2}[g(x)]^2\,dx$$

(*неравенство Шварца* *)).

82. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые положительные числа, не все равные между собой. Тогда функция

$$\psi(t)=\left(\frac{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

монотонно возрастает при любом значении t. Вычислить значения

$$\psi(-\infty),\quad \psi(-1),\quad \psi(0),\quad \psi(1),\quad \psi(+\infty).$$

(Для $t=0$ $\psi(t)$ определяется требованием непрерывности.)

83. Пусть $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и имеет в нем положительную нижнюю грань. Тогда функция

$$\Psi(t)=\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}[f(x)]^t\,dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

является неубывающей для всех значений t. Вычислить значения

$$\Psi(-\infty),\quad \Psi(-1),\quad \Psi(0),\quad \Psi(1),\quad \Psi(+\infty).$$

---

*) Значительно ранее Шварца его установил Буняковский.

При вычислении $\Psi(-\infty)$ и $\Psi(+\infty)$ функцию $f(x)$ предполагать непрерывной.

84. Для любых положительных чисел a_ν, b_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n},$$

т. е.

$$\mathfrak{G}(a+b) \geqslant \mathfrak{G}(a)+\mathfrak{G}(b).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$a_\nu = \lambda b_\nu \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

85. Если $f(x)$ и $g(x)$ собственно интегрируемы и существенно положительны в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то

$$e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} \ln[f(x)+g(x)]\,dx} \geqslant e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} \ln f(x)\,dx} + e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} \ln g(x)\,dx},$$

т. е.

$$\mathfrak{G}(f+g) \geqslant \mathfrak{G}(f)+\mathfrak{G}(g).$$

86. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$ собственно интегрируемы и существенно положительны в интервале $[x_1, x_2]$; пусть, далее, p_1, p_2, $\ldots$, p_m — любые положительные числа. Тогда

$$\mathfrak{G}(p_1f_1+p_2f_2+\ldots+p_mf_m) \geqslant p_1\mathfrak{G}(f_1)+p_2\mathfrak{G}(f_2)+\ldots+p_m\mathfrak{G}(f_m).$$

87. Пусть функции $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, имеют ограниченное изменение в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и p_1, p_2, $\ldots$, p_m — любые положительные числа. Положим

$$F(x) = \frac{p_1f_1(x)+p_2f_2(x)+\ldots+p_mf_m(x)}{p_1+p_2+\ldots+p_m}.$$

Доказать, что если l_1, l_2, $\ldots$, l_m, l — длины дуг графиков функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$, $F(x)$ (в точках разрыва величина скачка причисляется к длине дуги), то имеет место неравенство

$$L \leqslant \frac{p_1l_1+p_2l_2+\ldots+p_ml_m}{p_1+p_2+\ldots+p_m}.$$

88. Пусть $f(x)$ положительна, непрерывна и имеет период 2π. Пусть, далее, $p(x)$ неотрицательна и собственно интегрируема в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, причем имеет в нем положительный интеграл. Тогда функция

$$F(x) = \frac{\int\limits_0^{2\pi} p(\xi)f(\xi+x)\,d\xi}{\int\limits_0^{2\pi} p(\xi)\,d\xi}$$

положительна и непрерывна, причем

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln F(x)\,dx} \geqslant e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln f(x)\,dx},$$

т. е.

$$\mathfrak{G}(F) \geqslant \mathfrak{G}(f).$$

89. Пусть $p(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей задачи; если $f(x)$ имеет период 2π и обладает ограниченным изменением, то то же справедливо и для функции

$$F(x) = \frac{\int_0^{2\pi} p(\xi) f(\xi + x)\,d\xi}{\int_0^{2\pi} p(\xi)\,d\xi},$$

причем, обозначая через l, L длины дуг графиков функций $f(x)$ и $F(x)$ в интервале $[0, 2\pi]$, имеем неравенство

$$L \leqslant l.$$

90. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — любые положительные числа. Положим

$$\mathfrak{M}_\varkappa(a) = (a_1^\varkappa + a_2^\varkappa + \ldots + a_n^\varkappa)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Показать, что

$$\mathfrak{M}_\varkappa(a+b) \leqslant \text{ или } \geqslant \mathfrak{M}_\varkappa(a) + \mathfrak{M}_\varkappa(b),$$

смотря по тому, будет ли $\varkappa \geqslant 1$ или $\varkappa \leqslant 1$. Равенство достигается лишь в случаях $a_\nu = \lambda b_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) или $\varkappa = 1$. (Дать истолкование теоремы для случая $\varkappa = 2$.)

91. Пусть $f(x)$ собственно интегрируема и существенно положительна в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Положим

$$\mathfrak{M}_\varkappa(f) = \left(\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^\varkappa\,dx\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Показать, что если $g(x)$ подчиняется тем же условиям, что и $f(x)$, то

$$\mathfrak{M}_\varkappa(f+g) \leqslant \text{ или } \geqslant \mathfrak{M}_\varkappa(f) + \mathfrak{M}_\varkappa(g),$$

смотря по тому, будет ли $\varkappa \geqslant 1$ или $\varkappa \leqslant 1$.

92. Пусть a, A, b, B положительны, $a < A$, $b < B$. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат между a и A, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — между b и B, то выполняются неравенства

$$1 \leqslant \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2.$$

Первое неравенство тождественно с 80. Во втором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда числа

$$k=\frac{\frac{A}{a}}{\frac{A}{a}+\frac{B}{b}}n, \qquad l=\frac{\frac{B}{b}}{\frac{A}{a}+\frac{B}{b}}n$$

целые, причем k из чисел a_ν равны a, остальные l из чисел a_ν равны A, соответствующие же им числа b_ν равны соответственно B или b.

93. Пусть a, A, b, B положительны, $a<A$, $b<B$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ собственно интегрируемы в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, причем значения их заключены соответственно между a и A или b и B, то выполняются неравенства

$$1 \leqslant \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx\int\limits_{x_1}^{x_2}[g(x)]^2\,dx}{\left(\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\,g(x)\,dx\right)^2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2.$$

Первое из этих неравенств есть не что иное, как неравенство Шварца.

94. Пусть $f(x)$ в интервале $0<x<1$ — неубывающая, неотрицательная, не тождественно равная нулю функция. Пусть, далее, $0<a<b$. Показать, что

$$1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2 \leqslant \frac{\left(\int\limits_0^1 x^{a+b}f(x)\,dx\right)^2}{\int\limits_0^1 x^{2a}f(x)\,dx\int\limits_0^1 x^{2b}f(x)\,dx} < 1$$

при условии существования всех интегралов. Второе из этих неравенств хорошо известно. В первом равенство достигается тогда и только тогда, когда $f(x)$ постоянна.

95. Под «удельной емкостью» проводника понимают отношение его емкости к объему. Показать, что удельная емкость трехосного эллипсоида всегда заключена между арифметическим и гармоническим средними удельных емкостей трех шаров, радиусами которых служат соответственно три полуоси эллипсоида.

Аналитически это равносильно доказательству справедливости неравенств

$$\frac{3}{\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}} < \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} < \frac{\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}}{3}$$

для любых положительных a, b, c, исключая случай $a=b=c$.

96. Пусть

$$a_{\mu\nu} \geqslant 0, \quad \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} = 1, \quad x_\nu \geqslant 0$$

и

$$y_\mu = a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \ldots + a_{\mu n}x_n \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n.$$

97. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, M — их арифметическое, G — геометрическое средние и ε — положительная правильная дробь. Показать, что неравенство

$$\frac{M-G}{M} \leqslant \varepsilon$$

влечет неравенства

$$1+\rho < \frac{a_i}{M} < 1+\rho' \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где ρ и ρ' обозначают соответственно единственный отрицательный и единственный положительный корни трансцендентного уравнения

$$(1+x)\,e^{-x} = (1-\varepsilon)^n.$$

ГЛАВА 3

ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Интегрируемость в собственном смысле

98. Положим

$$g(x) = \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x \cos^4 \pi x + \ldots$$
$$\ldots + \sin^2 \pi x \cos^{2k} \pi x + \ldots$$

Интегрируема ли функция

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} g(n!x)?$$

99. Пусть функция $f(x)$ (см. также **169**, VIII **240**) определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для иррациональных } x, \\ \dfrac{1}{q} & \text{для рациональных } x = \dfrac{p}{q},\ (p,\ q) = 1,\ q \geqslant 1. \end{cases}$$

Показать, что она непрерывна в каждой иррациональной точке, разрывна в каждой рациональной и в каждом интервале собственно интегрируема.

100. Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ собственно интегрируемы в интервале $a \leqslant x \leqslant b$; далее,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$x_{\nu-1} < y_\nu < x_\nu, \quad x_{\nu-1} < \eta_\nu < x_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Показать, что при стремлении максимальной длины интервала разбиения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ к нулю

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} f(y_\nu)\,\varphi(\eta_\nu)\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

101. Пусть $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b+d]$ и пусть $d > 0$. Тогда

$$\lim_{\delta \to +0} \int_a^b f(x)\,\varphi(x+\delta)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

102. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать две такие *кусочно-постоянные* *) функции $\psi(x)$, $\Psi(x)$, что

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x)$$

во всем интервале $[a, b]$ и

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx < \varepsilon.$$

В частности, можно добиться того, чтобы точки разрыва функций $\psi(x)$ и $\Psi(x)$ были равноотстоящими.

103. (Продолжение.) Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то можно $\psi(x)$ и $\Psi(x)$ определить так, чтобы их полные изменения не превосходили полного изменения функции $f(x)$.

104. Положим

$$4[x] - 2[2x] + 1 = s(x).$$

Тогда для любой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x)\,s(nx)\,dx = 0$$

(n — целое). [Начертить график функции $s(nx)$, VIII 3.]

105. Если $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b]$, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin nx\,dx = 0.$$

---

*) То есть в каждом конечном интервале имеющие не более чем конечное число точек разрыва, а в промежутках между последними — постоянные.

106. (Продолжение.)

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ ограничена в интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Разделим этот интервал точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Обозначим через m_ν нижнюю, через M_ν верхнюю грани функции $f(x)$ в ν-м подинтервале $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Тогда разность $M_\nu-m_\nu$ даст *колебание* $f(x)$ в этом интервале. Функция $f(x)$ собственно интегрируема тогда и только тогда, когда для каждой пары положительных чисел ε и η можно выбрать такое разбиение, чтобы общая длина тех подинтервалов, в которых колебание больше ε, была меньше η (*критерий Римана*; см. 1. с. решение **105**, стр. 226, или, например, Cesàro, стр. 695 *)).

107. Функция $\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)x^\alpha$, где $\alpha\geqslant 0$, собственно интегрируема в интервале $(0, 1]$.

108. Если $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b]$, то точки непрерывности функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$ образуют всюду плотное множество.

109. Если $f(x)$ собственно интегрируема в интервале $[a, b]$, то равенство

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx=0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(\xi)=0$ во всех точках ξ непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри данного интервала.

110. Пусть функция $y=f(x)$ собственно интегрируема в интервале $a\leqslant x\leqslant b$, причем там $m\leqslant f(x)\leqslant M$; пусть, далее, $\varphi(y)$ непрерывна для $m\leqslant y\leqslant M$. Тогда $\varphi[f(x)]$ также собственно интегрируема в интервале $a\leqslant x\leqslant b$.

111. Если $f(x)$ и $\varphi(y)$ собственно интегрируемы, то $\varphi[f(x)]$, вообще говоря, уже не является собственно интегрируемой [98, 99].

§ 2. Несобственные интегралы

112. Если $f(x)$ монотонна в интервале $0<x\leqslant 1$ и $\int_0^1 x^a f(x)\,dx$ существует, то

$$\lim_{x\to 0} x^{a+1}f(x)=0.$$

---

*) Б. Риман, Сочинения, стр. 237; Чезаро, ч. 2, стр. 256.

113. Если $f(x)$ монотонна в интервале $1 \leqslant x < \infty$ и $\int\limits_1^\infty x^a f(x)\,dx$ существует, то

$$\lim_{x\to\infty} x^{a+1} f(x) = 0.$$

114. Для каких действительных α, β интеграл

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha |\cos x|^{x^\beta}\,dx$$

сходится и для каких расходится?

115. Пусть

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

— функции, собственно интегрируемые в любом конечном интервале и удовлетворяющие следующим условиям:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно в каждом конечном интервале,

$|f_n(x)| \leqslant F(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$ существует.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

[Аналог теоремы I 180.]

116. Доказать 58 с помощью VI 31.

117. Если *ряд Дирихле* [VIII, гл. 1, § 5]

$$a_1 1^{-s} + a_2 2^{-s} + a_3 3^{-s} + \ldots + a_n n^{-s} + \ldots = D(s)$$

сходится для $s = \sigma$, $\sigma > 0$, то, полагая

$$a_1 e^{-y} + a_2 e^{-2y} + a_3 e^{-3y} + \ldots + a_n e^{-ny} + \ldots = P(y),$$

будем иметь при $s > \sigma$:

$$D(s)\,\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty P(y)\, y^{s-1}\,dy.$$

118. Если $f(x)$ собственно интегрируема в любом конечном интервале и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

§ 3. Непрерывные, дифференцируемые, выпуклые функции

119. Существуют ли вообще функции от трех переменных? Точнее говоря: можно ли или нельзя всякую действительную функцию $f(x, y, z)$ трех переменных выразить через две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(u, z)$ двух переменных следующим образом:

$$f(x, y, z) = \psi(\varphi(x, y), z)?$$

Ответить на этот вопрос в предположениях:

1) что функции $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(u, z)$ определены для всех действительных значений аргументов и

2) что эти функции для всех действительных значений аргументов непрерывны.

119a. Положим

$$x + y = S(x, y), \quad xy = P(x, y);$$

тогда

$$yz + zx + xy = S\{P(x, y), P[S(x, y), z]\}.$$

В этой формуле $yz + zx + xy$ выражено через четыре «вложенные» друг в друга в качестве аргументов функции двух переменных. Показать, что аналогичное представление через три функции двух переменных невозможно, если принять, что входящие в него функции должны быть неограниченное число раз дифференцируемы для всех действительных значений аргументов. [Показать невозможность представления $yz + zx + xy$ в формах

$$\varphi\{\psi[\chi(x, y), z], z\}, \quad \varphi[\psi(x, z), \chi(y, z)], \quad \varphi\{\psi[\chi(x, y), z], x\}.]$$

120. Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную в интервале $a < x < b$. Можно ли для каждой лежащей в этом интервале точки ξ указать две другие точки x_1, x_2 из этого интервала, такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \qquad (x_1 < x_2)?$$

121. Пусть $f(x)$ дифференцируема в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, причем $f(a) = f(b) = 0$. Тогда в $[a, b]$ существует по крайней мере одна точка ξ, в которой выполняется неравенство

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\,dx.$$

122. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то существует точка ξ, $x_0 - r < \xi < x_0 + r$, в которой имеет место равенство

$$f''(\xi) = \frac{3}{r^3} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)]\,dx.$$

123. Если $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — неотрицательные числа, из которых по меньшей мере два положительны, то логарифм ряда

$$p_0 + p_1 e^x + p_2 e^{2x} + \ldots + p_n e^{nx} + \ldots$$

будет выпуклой снизу функцией от x в любом интервале сходимости ряда.

124. Ограниченная выпуклая функция (стр. 75) всюду непрерывна и имеет производные слева и справа.

125. Пусть действительная функция $f(x)$ имеет в некотором конечном или бесконечном интервале непрерывную производную $f'(x)$. Рассмотрим точки пересечения всех горизонтальных касательных кривой $y = f(x)$ с осью ординат, т. е. множество M всех тех значений $y = f(x)$, для которых $f'(x) = 0$. Доказать, что точки множества M не могут заполнять никакого интервала. (Эта теорема допускает значительное усиление.)

126. Если монотонная последовательность непрерывных функций сходится в некотором замкнутом интервале к непрерывной же функции, то сходимость будет равномерной.

127. Доказать следующую теорему, напоминающую 126. Если последовательность монотонных (непрерывных или разрывных) функций сходится в замкнутом интервале к некоторой непрерывной функции, то сходимость будет равномерной.

§ 4. Особые интегралы, теорема Вейерштрасса

128. Пусть непрерывные в интервале $[a, b]$ функции

$$p_1(t), \quad p_2(t), \quad \ldots, \quad p_n(t), \quad \ldots$$

удовлетворяют условиям

$$p_n(t) \geqslant 0, \quad \int_a^b p_n(t)\, dt = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда все члены последовательности

$$\int_a^b p_1(t) f(t)\, dt, \quad \int_a^b p_2(t) f(t)\, dt, \quad \ldots, \quad \int_a^b p_n(t) f(t)\, dt, \ \ldots$$

содержатся между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной функции $f(t)$. (См. I 65, I 79, I 83.)

129. Пусть x — некоторая фиксированная точка интервала $[a, b]$ предыдущей задачи. Для того чтобы для каждой непрерывной в $[a, b]$ функции $f(t)$ выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b p_n(t) f(t)\, dt = f(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^{x-\varepsilon} p_n(t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{a} p_n(t)\,dt\right)=0$$

для всех положительных ε, удовлетворяющих условию $a<x-\varepsilon<$ $<x+\varepsilon<b$; в случае $x=a$ или $x=b$ первый или соответственно второй интеграл под знаком $\lim$ отпадает. (См. I 66, I 80, I 84.)

130. Показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t}f(t)\,dt=\lim_{t\to\infty}f(t),$$

в предположении, что интеграл в левой части и предел в правой существуют.

131. Если интеграл

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda}f(t)\,dt$$

сходится при $\lambda=\alpha$ и $\lambda=\beta$, $\alpha<\beta$, то он сходится во всем интервале $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$ и представляет в этом интервале непрерывную функцию от λ.

132. Пусть функции

$$p_1(x,\ t),\ p_2(x,\ t),\ \ldots,\ p_n(x,\ t),\ \ldots$$

двух переменных x и t непрерывны при $a\leqslant {x \atop t}\leqslant b$ причем для каждого n

$$p_n(x,\ t)\geqslant 0,\qquad \int_a^b p_n(x,\ t)\,dt=1.$$

Показать, что функции

$$f_n(x)=\int_a^b p_n(x,\ t)\,f(t)\,dt\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $f(t)$ — некоторая непрерывная функция, заключены между наименьшим и наибольшим значениями $f(t)$ для всех x.

Далее, показать, что

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

при $a<x<b$, если для каждого фиксированного положительного ε выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^{x-\varepsilon} p_n(x,\ t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{b} p_n(x,\ t)\,dt\right)=0$$

равномерно для $a+\varepsilon \leqslant x \leqslant b-\varepsilon$. Сходимость равномерна в любом замкнутом интервале, содержащемся в $a<x<b$.

133. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале $[0, 1]$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n}\int\limits_0^1 f(t)\left[1-(x-t)^2\right]^n dt = f(x)$$

и притом равномерно в любом фиксированном интервале $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

134. Если $f(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt = f(x)$$

и притом равномерно для всех x.

135. Каждая функция, непрерывная в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, может быть равномерно приближена в этом интервале полиномами с любой степенью точности (*теорема Вейерштрасса*).

136. Каждая непрерывная периодическая функция с периодом 2π может быть равномерно приближена тригонометрическими полиномами [VI, § 2] с любой степенью точности (*теорема Вейерштрасса*).

137. Пусть $f(x)$ — любая функция, собственно интегрируемая в $[a, b]$ (соответственно в $[0, 2\pi]$). Каково бы ни было число ε, можно указать два полинома (тригонометрических полинома) $p(x)$ и $P(x)$, удовлетворяющих одновременно неравенствам

$$p(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x)$$

во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$ $(0 \leqslant x < 2\pi)$, а также неравенству

$$\int\limits_a^b P(x)\,dx - \int\limits_a^b p(x)\,dx < \varepsilon \qquad \left(\int\limits_0^{2\pi} P(x)\,dx - \int\limits_0^{2\pi} p(x)\,dx < \varepsilon\right).$$

138. Если у функции $f(x)$, непрерывной в конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, все «моменты» равны нулю:

$$\int\limits_a^b f(x)\,x^n\,dx = 0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то $f(x) \equiv 0$.

139. Если у функции $f(x)$, собственно интегрируемой в конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, все «моменты» равны нулю:

$$\int\limits_a^b f(x)\,x^n\,dx = 0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то $f(\xi)=0$ во всех точках непрерывности ξ.

140. Если n первых «моментов» функции $f(x)$, непрерывной в некотором конечном или бесконечном интервале $a<x<b$, равны нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,x\,dx=\int_a^b f(x)\,x^2\,dx=\ldots=\int_a^b f(x)\,x^{n-1}\,dx=0,$$

то эта функция меняет знак в интервале $a<x<b$ по меньшей мере n раз (V, гл. 1, § 2), если только она не равна тождественно нулю.

141. Если равны нулю $2n+1$ первых «тригонометрических моментов» (коэффициентов Фурье, см. VI, § 4) непрерывной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx=\ldots$$

$$\ldots=\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=0,$$

то $f(x)$ в любом интервале длины, превосходящей 2π, меняет знак по меньшей мере $2n+2$ раза (V, гл. 1, § 2), если только она не равна тождественно нулю.

142. Пусть $\varphi(x)$ непрерывна для всех $x\geqslant 0$. Если интеграл

$$J(k)=\int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx$$

сходится для $k=k_0$ и обращается в нуль для значений k, образующих возрастающую арифметическую прогрессию:

$$J(k_0)=J(k_0+\alpha)=J(k_0+2\alpha)=\ldots=J(k_0+n\alpha)=\ldots=0\quad(\alpha>0),$$

то $\varphi(x)\equiv 0$.

143. Доказать, исходя из интегрального представления гамма-функции

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\ldots(s+n)},$$

что она не имеет нулей. [$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, **142.**]

Образуем для каждой функции $f(x)$, заданной в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$, *полиномы С. Н. Бернштейна*

$$K_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эти полиномы заключены во всем интервале [0, 1] между нижней и верхней гранями функции $f(x)$, причем на концах совпадают с этой функцией.

144. Вычислить полиномы $K_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, для

$$f(x)=1, \quad f(x)=x, \quad f(x)=x^2, \quad f(x)=e^x.$$

145. Пусть x — произвольная точка интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ и

$$1=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=\sum{}^{\mathrm{I}}+\sum{}^{\mathrm{II}},$$

где $\sum^{\mathrm{I}}$ распространяется на индексы, удовлетворяющие неравенству $|\nu-nx| \leqslant n^{\frac{3}{4}}$, а $\sum^{\mathrm{II}}$ — на индексы, удовлетворяющие неравенству $|\nu-nx|>n^{\frac{3}{4}}$ $(n \geqslant 1)$. Тогда

$$\sum{}^{\mathrm{II}}<\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}.$$

146. Полиномы $K_n(x)$, образованные для непрерывной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ функции $f(x)$, равномерно сходятся к ней в этом интервале. (Новое доказательство теоремы Вейерштрасса, **135**.)

ГЛАВА 4

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Числовая функция. Регулярные последовательности

В нижеследующем (**147—161**) мы рассматриваем монотонные последовательности положительных чисел. Под *числовой функцией* $N(r)$ такой последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, $0<r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots$, будем понимать число членов этой последовательности, не превосходящих r $(r \geqslant 0)$:

$$N(r)=\sum_{r_n \leqslant r} 1.$$

[Вообще под $\sum\limits_{r_n \leqslant r} f(r_n)$, где $f(t)$ — какая-либо функция, заданная для $t>0$, мы будем понимать сумму $f(r_1)+f(r_2)+\ldots+f(r_m)$, где номер m определяется неравенствами $r_m \leqslant r<r_{m+1}$].

Например, для $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=3$, ... имеем $N(r)=[r]$.

$N(r)$ представляет собой кусочно-постоянную неубывающую функцию с целочисленными скачками, непрерывную справа в точках разрыва.

147. Пусть $f(t)$ дифференцируема и $f'(t)$ собственно интегрируема на каждом конечном интервале значений $t>0$. Тогда имеет место формула

$$\sum_{r_n\leqslant r}{}' f(r_n)=N(r)f(r)-\int_0^r N(t)f'(t)\,dt.$$

148. Если $N(r)$ есть числовая функция монотонно стремящейся к бесконечности последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, то

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{r}=\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{r_n},\qquad \liminf_{r\to\infty}\frac{N(r)}{r}=\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{r_n},$$
$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln N(r)}{\ln r}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln r_n},\quad \liminf_{r\to\infty}\frac{\ln N(r)}{\ln r}=\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln r_n}.$$

149. Пусть $N(r)$ — числовая функция и λ — показатель сходимости [I, гл. 3, § 2] последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Тогда

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln N(r)}{\ln r}=\lambda.$$

150. Положительную функцию $L(r)$, определенную для $r\geqslant 0$, будем называть *медленно возрастающей*, если она монотонно возрастает и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(2r)}{L(r)}=1.$$

Показать, что для такой функции вообще

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(cr)}{L(r)}=1\quad (c>0).$$

151. Пусть функция $L(r)$ задана для $r\geqslant 0$, монотонно возрастает и для достаточно больших значений r определяется формулой

$$L(r)=(\ln r)^{\alpha_1}(\ln_2 r)^{\alpha_2}\ldots(\ln_k r)^{\alpha_k}\quad (\alpha_1>0),$$

где $\ln_k x=\ln_{k-1}(\ln x)$. Тогда $L(r)$ является медленно возрастающей функцией.

152. Если $L(r)$ есть медленно возрастающая функция, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln L(r)}{\ln r}=0.$$

153. Пусть для числовой функции $N(r)$ последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ выполняется соотношение

$$N(r)\sim r^\lambda L(r),$$

где $L(r)$ — медленно возрастающая функция и $0<\lambda<\infty$. Тогда λ есть показатель сходимости последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$

Последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, обладающие указанным в предыдущей задаче свойством, мы будем называть в дальнейшем (154—159) *регулярными*. Позже (например, в IV 59—65) это наименование будет распространено также на те последовательности, для которых $N(r) \sim \frac{r^\lambda}{L(r)}$. При этом расширении понятия регулярной последовательности теоремы 153—159 сохраняют силу. Под расширенное понятие регулярной последовательности подходит, например, последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, ...

154. Числовая функция $N(r)$ регулярной последовательности с показателем сходимости λ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(cr)}{N(r)} = c^\lambda \quad (c > 0).$$

155. Пусть $N(r)$ — числовая функция регулярной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ с показателем сходимости λ и $f(x)$ — кусочно-постоянная функция, заданная в интервале $0 < x \leqslant c$ $(c > 0)$. Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int_0^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx.$$

156. Предельное соотношение задачи 155 сохраняет силу также в том случае, когда $f(x)$ есть функция, собственно интегрируемая в интервале $0 \leqslant x \leqslant c$.

157. Пусть $N(r)$ — числовая функция регулярной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ с показателем сходимости λ, и α — любое положительное число. Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{\alpha-\lambda} = \int_0^1 x^{\frac{\alpha-\lambda}{\lambda}} dx = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

158. (Продолжение.)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n > r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{-\alpha-\lambda} = \int_1^\infty x^{\frac{-\alpha-\lambda}{\lambda}} dx = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

159. Пусть $N(r)$ — числовая функция регулярной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ с показателем сходимости λ; функция $f(x)$ определена для $x > 0$ и собственно интегрируема в каждом конечном интервале $0 < a \leqslant x \leqslant b$. Пусть, далее, в окрестности точки $x = 0$

$$|f(x)| < x^{\alpha-\lambda},$$

а в окрестности бесконечно удаленной точки $x = +\infty$

$$|f(x)| < x^{-\alpha-\lambda} \quad (\alpha > 0).$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) = \int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx.$$

160. Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0 < x \leqslant 1$ и в некоторой окрестности точки $x=0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| < x^{\alpha-\lambda} \quad (\alpha > 0).$$

Если $N(r)$ есть числовая функция и λ — показатель сходимости монотонной положительной последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ $(0 < \lambda < \infty)$, то

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant r} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx \leqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant r} f\left(\frac{r_n}{r}\right)$$

[I 115]. Последовательность r_n не должна быть обязательно регулярной.

161. Пусть $f(x)$ $(x > 0)$ — положительная убывающая функция, в окрестности точки $x=0$ удовлетворяющая неравенству

$$f(x) < x^{\alpha-\lambda},$$

а в окрестности бесконечно удаленной точки $x = +\infty$ — неравенству

$$f(x) < x^{-\alpha-\lambda} \quad (\alpha > 0).$$

Тогда

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx,$$

где $N(r)$ — числовая функция последовательности $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_n, \ldots$ предыдущей задачи [I 116].

§ 2. Критерии равномерного распределения

Последовательность чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

называют *равномерно распределенной* в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, если все числа этой последовательности лежат в замкнутом интервале $[0, 1]$, причем для каждой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\, dx. \qquad (*)$$

Наименование «равномерно распределенная» оправдывается следующим критерием.

162. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, тогда и только тогда является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, когда «вероятность» попадания некоторого наудачу выхваченного числа последовательности в фиксированный подинтервал интервала $[0, 1]$ равна длине этого подинтервала. Точнее говоря, пусть $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ — подинтервал интервала $[0, 1]$; обозначим через $\nu_n(\alpha, \beta)$ количество тех точек x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, которые лежат в этом подинтервале. Тогда должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha,$$

каков бы ни был подинтервал $[\alpha, \beta]$ [102].

163. Пусть $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Обозначим через $s_n(\alpha, \beta)$ сумму тех из первых n членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, которые лежат в интервале $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Показать, что для того, чтобы последовательность была равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, необходимо и достаточно выполнение предельного соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n(\alpha, \beta)}{n} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2},$$

каков бы ни был подинтервал $[\alpha, \beta]$ интервала $[0, 1]$.

164. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, тогда и только тогда является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, когда для каждого положительного целого k

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n} = \frac{1}{k+1} \qquad [137].$$

165. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, тогда и только тогда является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, когда для каждого положительного целого k одновременно

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos 2\pi k x_1 + \cos 2\pi k x_2 + \ldots + \cos 2\pi k x_n}{n} = 0$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin 2\pi k x_1 + \sin 2\pi k x_2 + \ldots + \sin 2\pi k x_n}{n} = 0 \qquad [137].$$

§ 3. Распределение кратных иррационального числа

166. Если θ — иррациональное число, то последовательность

$$x_n = n\theta - [n\theta] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

167. Пусть θ — иррациональное число. Положим $\varepsilon_n = 1$ или 0, смотря по тому, будет ли ближайшее к $n\theta$ целое число лежать справа от него или слева. Показать, что для целых чисел a, d $(a \geqslant 0,\ d > 0)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_{a+d} + \varepsilon_{a+2d} + \ldots + \varepsilon_{a+(n-1)d}}{n} = \frac{1}{2}.$$

168. Пусть θ — иррациональное число и α — иррациональное число вида $\alpha = q\theta$, где q — целое и отличное от нуля. Показать, что асимптотическое поведение функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\theta - [n\theta])\, z^n \quad (|z| < 1)$$

при радиальном приближении к точке $e^{2\pi i \alpha}$ круга сходимости характеризуется формулой

$$\lim_{r \to 1-0} (1-r) f(re^{2\pi i \alpha}) = \frac{1}{2\pi i q} \qquad [\text{I } 88].$$

169. Вычислить предел

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos^2 \pi x + \cos^4 2\pi x + \cos^6 3\pi x + \ldots + \cos^{2n} n\pi x}{n}$$

(x вещественное).

170. Показать, что десятичная дробь

$$\theta = 0{,}12345678910111213\ldots$$

(все натуральные числа выписаны одно за другим) представляет иррациональное число. Согласно 166 числа

$$n\theta - [n\theta] \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

расположены тогда всюду плотно в интервале $[0, 1]$. Показать, что этим свойством обладает уже подмножество

$$10^n\theta - [10^n\theta] \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

171. Число e иррационально [VIII 258]. Показать, что последовательность

$$n!e - [n!e] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

имеет единственную предельную точку 0.

172. Если полином $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_rx^r$ имеет по крайней мере один иррациональный коэффициент, то последовательность

$$P(n) - [P(n)] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

обладает бесчисленным множеством предельных точек.

173. Пусть θ — иррациональное число, $x_n = n\theta - [n\theta]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел с расходящейся суммой. Показать, что для каждой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

§ 4. Распределение цифр в таблице логарифмов и аналогичные задачи

174. Пусть функция $g(t)$ $(t \geqslant 1)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(t)$ имеет непрерывную производную;
2) $g(t)$ монотонно возрастает до бесконечности вместе с t;
3) $g'(t)$ при $t\to\infty$ монотонно стремится к нулю;
4) $tg'(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Тогда последовательность

$$x_n = g(n) - [g(n)] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

175. Последовательность

$$x_n = an^\sigma - [an^\sigma] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $a > 0$, $0 < \sigma < 1$, является равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

176. Последовательность

$$x_n = a(\ln n)^\sigma - [a(\ln n)^\sigma] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $a > 0$, $\sigma > 1$, равномерно распределена в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

177. Ряд

$$\frac{\sin 1^\sigma\xi}{1^\rho} + \frac{\sin 2^\sigma\xi}{2^\rho} + \frac{\sin 3^\sigma\xi}{3^\rho} + \ldots + \frac{\sin n^\sigma\xi}{n^\rho} + \ldots,$$

где $0 < \sigma < 1$, $\xi \neq 0$, абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $\rho > 1$.

178. Запишем бесконечные десятичные дроби, представляющие квадратные корни из чисел натурального ряда $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, друг под другом в виде бесконечной таблицы. Показать, что среди цифр, стоящих на j-м месте справа от запятой $(j \geqslant 1)$, все цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$ встречаются в среднем одинаково часто. Точнее говоря: обозначим через $\nu_g(n)$ число тех из n первых целых чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, в десятичном разложении квадратных корней из которых на j-м месте справа от запятой стоит цифра g. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_g(n)}{n} = \frac{1}{10} \qquad (g = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9).$$

179. Пусть $x_n = a \ln n - [a \ln n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots, a > 0$. Если $n \to \infty$ так, что при этом $x_n \to \xi$ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$, то для любой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеет место предельное соотношение

$$\lim \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x) K(x, \xi)\, dx,$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\ln q}{q-1} q^{x-\xi+1} & \text{при } 0 \leqslant x < \xi, \\ \dfrac{\ln q}{q-1} q^{x-\xi} & \text{при } \xi < x \leqslant 1, \quad q = e^{\frac{1}{a}}, \quad 0 < \xi < 1; \end{cases}$$

$$K(x, 0) = K(x, 1) = \frac{\ln q}{q-1} q^x.$$

180. (Продолжение.) Предельные точки последовательности

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

заполняют целый интервал $J = J(a; f)$, зависящий только от a и $f(x)$. Этот интервал приводится к одной точке тогда и только тогда, когда в каждой своей точке непрерывности $f(x) = c$, где c — постоянная. Каков будет интервал $J(a; f)$, если a — очень большое или очень малое число?

181. Представим себе бесконечную таблицу из выписанных друг под другом десятичных логарифмов чисел натурального ряда 1, 2, 3, ... и рассмотрим столбец цифр, находящихся на j-м месте справа от запятой $(j \geqslant 1)$. Показать, что не существует никакой определенной вероятности появления среди этих цифр одной какой-нибудь определенной цифры 0, 1, 2, ..., 9. Точнее говоря: обозначим через $\nu_g(n)$ количество тех из первых n целых чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, в десятичном разложении логарифмов которых на j-м месте справа от запятой стоит цифра g. Тогда отношение $\frac{\nu_g(n)}{n}$ при $n \to \infty$ не имеет никакого определенного предела. Более того, предельные точки последовательности этих отношений будут заполнять целый интервал положительной длины.

182. Пусть функция $g(t)$ $(t \geqslant 1)$ удовлетворяет условиям:

1) $g(t)$ имеет непрерывную производную;
2) $g(t)$ монотонно возрастает до бесконечности вместе с t;
3) $g'(t)$ при $t \to \infty$ монотонно стремится к нулю;
4) $tg'(t) \to 0$ при $t \to \infty$

(ср. 174). Тогда числа

$$x_n = g(n) - [g(n)] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

хотя и лежат в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ всюду плотно, однако не являются равномерно распределенными в этом интервале. Распределение их, напротив, характеризуется следующим асимптотическим законом: если n безгранично возрастает так, что при этом $x_n \to \xi$, $0 < \xi < 1$, то для любой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\lim \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = f(\xi)$$

в предположении, что $f(x)$ в точке ξ непрерывна. Если же $f(x)$ в точке ξ имеет разрыв первого рода, то множество предельных точек отношения

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

при указанном характере возрастания n заполняет целиком интервал от $f(\xi-0)$ до $f(\xi+0)$. Утверждение будет справедливо также для $\xi=0$ и $\xi=1$, если принять дополнительно, что $f(0) = f(1)$, и распространить $f(x)$ за пределы интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$, сделав ее периодической с периодом 1. [Тогда $f(1+0)=f(+0)$, $f(1-0)=f(-0)$.]

183. Последовательность

$$x_n = a(\ln n)^\sigma - [a(\ln n)^\sigma] \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$(0<\sigma<1)$ является всюду плотной, однако не равномерно распределенной в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$. (**176**, **179**.)

184. Представим себе бесконечную таблицу из квадратных корней десятичных логарифмов чисел натурального ряда $1, 2, 3, \ldots$, т. е. из $\sqrt{\lg n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, и рассмотрим столбец из цифр, стоящих на j-м месте справа от запятой ($j \geqslant 1$). Показать, что не существует никакой определенной вероятности появления среди этих цифр одной какой-нибудь определенной цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$. Точнее говоря: обозначим через $\nu_g(n)$ количество тех чисел k из n первых натуральных чисел, для которых в десятичном разложении $\sqrt{\lg k}$ на j-м месте справа от запятой стоит цифра g. Тогда значения отношения $\frac{\nu_g(n)}{n}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) лежат всюду плотно в интервале между 0 и 1.

§ 5. Другие типы равномерного распределения

185. Представим себе в p-мерном пространстве прямолинейное равномерное движение, определенное уравнениями

$$x_\nu(t) = a_\nu + \theta_\nu t,$$

где a_ν, θ_ν — постоянные, $\nu = 1, 2, \ldots, p$ и t — время. Показать, что если числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ рационально независимы (т. е. из соотношения $n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + \ldots + n_p\theta_p = 0$ с рациональными коэффициентами $n_1, n_2, \ldots, n_p$ вытекает, что $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = 0$), то для каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, периодической относительно $x_1, x_2, \ldots, x_p$ с периодом 1 и собственно интегрируемой в единичном кубе $0 \leqslant x_\nu \leqslant 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))\, dt = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

186. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — произвольные числа,

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < 1.$$

Неравенствами

$$\alpha_1 \leqslant x - [x] \leqslant \alpha_2, \quad \beta_1 \leqslant y - [y] \leqslant \beta_2$$

выделяется бесчисленное множество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, конгруэнтных по модулю 1, т. е. могущих быть полученными друг из друга смещениями на целые числа параллельно осям координат. Зададим уравнениями $x = a + \theta_1 t$, $y = b + \theta_2 t$, где t — время, некоторое равномерное прямолинейное движение и обозначим через $T(t)$ сумму всех тех промежутков времени от начала движения ($t = 0$) до момента t, в течение которых движущаяся точка находилась в каком-либо из указанных прямоугольников. Показать, что если отношение $\theta_1 : \theta_2$ иррационально, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1).$$

187. Биллиардный шар движется на идеально гладком квадратном столе площади $\mathfrak{F}$ прямолинейно и с постоянной скоростью, причем отскакивает от стенок по закону отражения (угол падения равен углу отражения). Обозначим через $T(t)$ общую сумму всех тех промежутков времени от начала движения ($t = 0$) до момента t, в течение которых центр шара находился в некоторой определенной области с площадью $\mathfrak{f}$. Показать, что если тангенс угла между направлением движения и одной из сторон биллиардного стола иррационален, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}}.$$

Числа

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

получающиеся при образовании сумм площадей прямоугольников (именно при делении отрезка $[0, 1]$ в арифметической прогрессии), представляются в некотором определенном смысле равномерно распределенными. Аналогичный тип равномерного распределения показывают две нижеследующие задачи.

188. Обозначим через $r_{1n}, r_{2n}, \ldots, r_{\varphi n}$ целые положительные числа, меньшие, чем n, и взаимно простые с ним; пусть $\varphi = \varphi(n)$ будет их количество [VIII 25]. Показать, что для всякой собственно интегрируемой функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{r_{1n}}{n}\right) + f\left(\frac{r_{2n}}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{r_{\varphi n}}{n}\right)}{\varphi(n)} = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{[VIII 35]}.$$

189. Напишем все несократимые дроби, не превосходящие единицы, числители и знаменатели которых не превосходят n, в порядке возрастающей величины:

$$w_1, w_2, \ldots, w_N$$

(*дроби Фарея*:

$$w_1 = \frac{1}{n}, \ldots, w_N = \frac{1}{1}, \quad N = N(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)).$$

Показать, что для всякой собственно интегрируемой функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(w_1) + f(w_2) + \ldots + f(w_N)}{N} = \int_0^1 f(x)\,dx. \qquad \text{[I 70]}.$$

Встречавшиеся в некоторых из предыдущих задач числовые последовательности являлись равномерно распределенными, поскольку вероятности попадания чисел этих последовательностей в заданный интервал были пропорциональны длине этого интервала [например, 166, 175, 188]. В нижеследующих задачах этого уже не будет. Но зато для каждой из встречающихся в них числовых последовательностей будет существовать определенная «плотность распределения вероятности», которой будет характеризоваться различная частота попадания в различные места основного интервала. Впрочем, с аналогичным положением мы уже встретились в задаче 159.

190. Положим

$$\frac{\sqrt{n}\binom{n}{\nu}}{2^n} = s_{\nu n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если функция $f(x)$, собственно интегрируемая в интервале

$\left[0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$, такова, что для некоторого положительного p произведение $x^{-p} f(x)$ ограничено в указанном интервале, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(s_{0n})+f(s_{1n})+f(s_{2n})+\ldots+f(s_{nn})}{\sqrt{n}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}\right) dx.$$

191. Обозначим через

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn} \qquad (-1 < x_{\nu n} < 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

нули полиномов Лежандра $P_n(x)$ [VI 97]. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x_{1n}}{\lambda}\right)+\ln\left(1+\frac{x_{2n}}{\lambda}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{x_{nn}}{\lambda}\right)}{n} = \ln\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda},$$

где λ вещественно и больше единицы. [Применить 203.]

192. (Продолжение.) Показать, что для любого целого положительного k справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{1n}^k+x_{2n}^k+\ldots+x_{nn}^k}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^k \vartheta\, d\vartheta. \qquad [\text{I } 179.]$$

193. (Продолжение.) Для любой функции $f(x)$, собственно интегрируемой в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$, справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{1n})+f(x_{2n})+\ldots+f(x_{nn})}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\vartheta)\, d\vartheta.$$

194. Пусть $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ — любой подинтервал основного интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $\nu_n(\alpha, \beta)$ — число нулей n-го полинома Лежандра, лежащих в $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\alpha, \beta)}{n} = \frac{\arccos\alpha - \arccos\beta}{\pi}.$$

Числа $x_{\nu n}$ распределены в интервале $[-1, +1]$ неравномерно, но зато равномерно распределяются в интервале $[0, \pi]$ числа $\arccos x_{\nu n}$. Если мы вообразим себе интервал $[-1, +1]$ в виде горизонтального диаметра круга, а каждую точку $x_{\nu n}$ — как горизонтальную проекцию пары точек окружности этого круга, то точки на окружности будут распределены равномерно, в то время как (и именно поэтому) точки на диаметре будут распределены уже неравномерно.

ГЛАВА 5

ФУНКЦИИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Метод Лапласа

195. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_l, a_1, a_2, \ldots, a_l$ — произвольные положительные числа. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \ldots + p_la_l^n}$$

существует и равен наибольшему из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_l$.

196. При тех же предположениях имеем также:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1a_1^{n+1} + p_2a_2^{n+1} + \ldots + p_la_l^{n+1}}{p_1a_1^n + p_2a_2^n + \ldots + p_la_l^n} = \operatorname{Max}(a_1, a_2, \ldots, a_l).$$

197. Пусть $f(x)$ — произвольная целая рациональная функция, имеющая лишь действительные положительные корни, и

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n-1}}{c_n}$$

существует и равен наименьшему корню функции $f(x)$.

198. Пусть $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны и положительны в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx}$$

существует и равен максимуму $f(x)$ в интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

199. При тех же предположениях имеем также:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x)\,[f(x)]^{n+1}\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx} = \operatorname{Max} f(x).$$

200. Пусть $a < \xi < b$ и k — постоянное положительное число. Показать, что при постоянных a, b, ξ и $n \to +\infty$

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2}\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{kn}}.$$

201. Пусть функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x) = e^{h(x)}$ определены в конечном или бесконечном интервале с концами a, b и удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $\varphi(x)[f(x)]^n = \varphi(x)e^{nh(x)}$ абсолютно интегрируема в $[a, b]$ при всех целых $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Функция $h(x)$ достигает в некоторой точке ξ внутри интервала $[a, b]$ максимума, причем верхняя грань $h(x)$ в каждом замкнутом интервале, не содержащем ξ, меньше чем $h(\xi)$. Далее, $h''(x)$ в некоторой окрестности точки ξ существует и непрерывна и, наконец, $h''(\xi) < 0$.

3. $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = \xi$, причем $\varphi(\xi) \neq 0$.

Показать, что при $n \to +\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула[1]):

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \sim \varphi(\xi)[f(\xi)]^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{-\frac{2\pi}{nf''(\xi)}} =$$
$$= \varphi(\xi)e^{nh(\xi)}\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}.$$

[Ограничиваемся указанной окрестностью точки ξ и развертываем в ней $h(x)$ по степеням $x - \xi$ до члена второй степени включительно.]

202. Доказать, основываясь на формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(n — целое), что при $n \to +\infty$

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

---

[1]) Лаплас следующим образом высказывается об употреблении подобных интегралов:

«Мы часто приходим к выражениям, содержащим такое количество членов и множителей, что числовые подстановки становятся невыполнимыми. Это имеет место в вопросах о вероятностях, когда рассматривается большое число событий. Однако тогда бывает важно получить числовое значение формул, чтобы узнать, какова вероятность результатов, которые события раскрывают по мере увеличения их числа. Особенно же важно получить закон, по которому эта вероятность непрерывно приближается к достоверности, которой она и достигла бы наконец, если бы число событий стало бесконечным. С этой целью я обратил внимание на то, что определенные интегралы дифференциалов, умноженных на множители, возведенные в высокие степени, дают по интегрировании формулы, состоящие из большого числа членов и множителей...»

Употребленный им прием, первый шаг которого приведен в задаче **201**, он характеризует далее следующим образом:

«...прием, который делает ряд тем быстрее сходящимся, чем сложнее формула, которая его выражает, так что этот прием тем более точен, чем более он необходим...» (L a p l a c e, Essai philosophique sur les probabilités, Oeuvres, т. 7, стр. XXXVIII, Paris, Gauthier-Villars, 1886. [Л а п л а с, Опыт философии теории вероятностей, стр. 52, 53, М., 1908.])

203. Показать, что для полинома Лежандра $P_n(\lambda)$ n-го порядка при $n \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$P_n(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \frac{\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{\lambda^2-1}},$$

где λ — вещественное число > 1 и корни берутся положительные. [VI 86.]

204. Вывести из разложения Ганзена

$$e^{it\cos x} = J_0(t) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu J_\nu(t)\cos \nu x,$$

могущего служить для определения функций Бесселя $J_\nu(t)$, следующую формулу: при $t \to +\infty$

$$J_\nu(it) \sim i^\nu \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

205. Показать, что при $n \to \infty$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

более того,

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad [18, I 167.]$$

206. При $n \to +\infty$

$$\binom{nk+l}{n} \sim \frac{(k-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{nk+l+\frac{1}{2}}$$

(k и l вещественны, $k > 1$).

207. При вещественном α и $t \to +\infty$

$$\int_1^\infty x^\alpha \left(\frac{te}{x}\right)^x \frac{dx}{x} \sim \sqrt{2\pi}\, t^{\alpha-\frac{1}{2}} e^t.$$

208. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда при $\tau \to +0$

$$\int_0^\infty e^{\alpha^{-1}x^\alpha - \tau x}\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}}\, \tau^{-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}-1} \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right).$$

209. При $\alpha > 0$ и $t \to +\infty$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha x} t^x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{\frac{1}{2\alpha}} \exp\left(e^{-1}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

§ 2. Модификации метода Лапласа

210. При $n \to +\infty$

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} e^{-x}x^n\,dx = A + \frac{B}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\beta - \frac{\alpha^2+2}{3}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}},$$

а α и β — постоянные вещественные числа.

211. Пусть λ — положительная правильная дробь и x_n — единственный положительный корень трансцендентного уравнения

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \lambda e^x \qquad [\text{V } 42].$$

Показать, что при $n \to \infty$

$$x_n = n + \alpha\sqrt{n} + \beta + o(1),$$

где α и β определяются из следующих уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \lambda, \qquad \beta = \frac{\alpha^2+2}{3}.$$

212. (Продолжение задачи 201.) При $n \to +\infty$

$$\int\limits_a^{\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \sim \varphi(\xi)[f(\xi)]^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{-nf''(\xi)}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha c} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \varphi(\xi)\,e^{nh(\xi)}\frac{1}{\sqrt{-nh''(\xi)}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha c} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Здесь α — постоянное вещественное число и

$$c = \sqrt{-\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}} = \sqrt{-h''(\xi)}.$$

213. Пусть функции $\varphi(x)$, $h(x)$ и $f(x) = e^{h(x)}$ определены в конечном или бесконечном интервале a, b и подчинены следующим условиям:

1. Функция $\varphi(x)[f(x)]^n = \varphi(x)\,e^{nh(x)}$ абсолютно интегрируема в a, b; $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Значение функции $h(x)$ в некоторой точке ξ внутри a, b превышает ее верхнюю грань в любом замкнутом интервале, лежащем с л е в а от ξ и не содержащем ξ. Кроме того, в некоторой

окрестности точки ξ $h''(x)$ существует и ограничена. Наконец, $h'(\xi)>0$.

3. $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=\xi$, причем $\varphi(\xi)\neq 0$.

Показать, что при $n\to+\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\int_a^{\xi+\frac{\alpha\ln n}{n}+\frac{\beta}{n}} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \sim \frac{\varphi(\xi)}{h'(\xi)}\,e^{\beta h'(\xi)}\cdot n^{\alpha h'(\xi)-1}\cdot e^{nh(\xi)}.$$

Здесь α и β — постоянные вещественные числа.

214. Пусть ξ — единственный вещественный корень трансцендентного уравнения $e^{1+\xi}\xi=1$. Тогда при $n\to+\infty$

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\xi n+\alpha\ln n+\beta} e^x x^n\,dx \sim n^A B,$$

где

$$A=\alpha\frac{1+\xi}{\xi}-\frac{1}{2},\qquad B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\xi}{1+\xi}e^{\beta\frac{1+\xi}{\xi}},$$

α и β — постоянные вещественные числа.

215. Пусть n нечетно и $-x_n$ обозначает единственный вещественный корень уравнения

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0 \qquad \text{[V 74]}.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$x_n=\xi n+\alpha\ln n+\beta+o(1),$$

где ξ имеет значение, определенное в предыдущей задаче, а постоянные α и β определяются формулами

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\xi}{1+\xi},\qquad \beta=\frac{\xi}{1+\xi}\ln\left(\sqrt{2\pi}\,\frac{1+\xi}{\xi}\right).$$

216. Пусть $g(x)$ — монотонно возрастающая функция, определенная для положительных x, причем

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0.$$

Положим

$$a_n=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-x+g(x)}x^n\,dx.$$

Показать, что если существует такое положительное γ, что в интервале $1-\gamma\leqslant\alpha\leqslant 1+\gamma$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(\alpha x)}{g(x)}$$

существует и представляет собой непрерывную функцию от α, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{g(n)}=1.$$

Содержащийся в **201** метод вычисления «функций больших чисел» можно обобщить следующим образом: пусть нужно вычислить интеграл вида

$$\int_a^b \varphi(x) f_1(x) f_2(x)\dots f_n(x)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,e^{h_1(x)+h_2(x)+\dots+h_n(x)}\,dx,$$

где функции $h_1(x),\ h_2(x),\dots,\ h_n(x)$ положительны в интервале $a<x<b$ и достигают максимума в одной и той же точке ξ этого интервала, причем $\varphi(\xi)\neq 0$. Заменяем приближенно

$$h_\nu(x)=h_\nu(\xi)+\frac{1}{2}h_\nu''(\xi)(x-\xi)^2+\dots$$

на

$$h_\nu(\xi)+\frac{1}{2}h_\nu''(\xi)(x-\xi)^2\qquad(\nu=1,\ 2,\dots,\ n).$$

Тогда указанный интеграл можно заменить на

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{h_1(\xi)+h_2(\xi)+\dots+h_n(\xi)-\frac{s}{2}t^2}\,dt,$$

где $s=-h_1''(\xi)-h_2''(\xi)-\dots-h_n''(\xi)$. В качестве условий максимума в точке ξ имеем $h_\nu'(\xi)=0,\ h_\nu''(\xi)<0$, так что $s>0$. Законность этого метода может быть доказана во многих случаях, сам метод может быть еще уточнен и обобщен в различных направлениях.

217. $$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{n!\,2^{2n}\cos\vartheta}{|(2ne^{i\vartheta}-1)(2ne^{i\vartheta}-2)(2ne^{i\vartheta}-3)\dots(2ne^{i\vartheta}-n)|}\,d\vartheta=2\pi.$$

[Полагаем $\vartheta=\frac{x}{\sqrt{n}}$ и принимаем во внимание **59**, **115**.]

§ 3. Асимптотическое вычисление некоторых максимумов

218. Функция

$$\sqrt{x}\,(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,a^{-x}\qquad(a>1)$$

в интервале $(n,\ +\infty)$ имеет наибольшее значение M_n. Показать, что

$$\frac{M_n}{n!}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(a-1)^{n+\frac{1}{2}}}\qquad[16].$$

219. Функция

$$x(x^2-1^2)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)a^{-x},$$

где $a>1$, в интервале $(n, +\infty)$ имеет наибольшее значение M_n. Показать, что

$$\frac{M_n}{(n!)^2}\sim\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sqrt{a}}{a-1}\right)^{2n+1}. \qquad [17.]$$

220. Положим

$$\sqrt{x}=Q_0(x),$$

$$\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{n}\right)=Q_n(x) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Показать, что последовательность

$$Q_1(x)a^{-x},\quad Q_2(x)a^{-x},\ \dots,\ Q_n(x)a^{-x},\dots$$

для положительных x равномерно ограничена при $a\geqslant 2$ и не остается уже равномерно ограниченной, если $0<a<2$.

221. Положим

$$x=P_0(x),$$

$$x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=P_n(x) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\dots).$$

Показать, что последовательность

$$P_1(x)a^{-x},\quad P_2(x)a^{-x},\dots,\ P_n(x)a^{-x},\dots$$

для положительных x равномерно ограничена при $a\geqslant 3+\sqrt{8}$ и не остается уже равномерно ограниченной, если $0<a<3+\sqrt{8}$.

222. Пусть $a>0$, $0<\mu<1$ и M_n — максимум функции $e^{-(x+\alpha x^{\mu})}x^n$ в интервале $(0, +\infty)$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{n^{-\mu}}=e^{-a}.$$

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Области и кривые. Вычисления с комплексными числами

Пусть комплексное переменное z записано в форме

$$z = x + iy = re^{i\vartheta},$$

где x, y, r, ϑ вещественны, причем $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$. Тогда $x = \Re z$ называется вещественной частью z, $y = \Im z$ — мнимой частью, $r = |z|$ — модулем и $\vartheta = \arg z$ — аргументом. Число $\bar{z} = x - iy = re^{-i\vartheta}$ называется сопряженным к z.

1. $z + \bar{z}$ — вещественное, $z - \bar{z}$ — чисто мнимое, $z\bar{z}$ — вещественное и неотрицательное.

2. Какие части плоскости z выделяются условиями

$$\Re z > 0; \quad \Re z \geqslant 0; \quad a < \Im z < b; \quad \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta; \quad \Re z = 0;$$

$$|z - z_0| = R; \; |z - z_0| < R; \; |z - z_0| \leqslant R; \; R \leqslant |z| \leqslant R'; \; \Re \frac{1}{z} = \frac{1}{R}$$

(a, b, α, β, R, R' — вещественные, z_0 — комплексное, $a < b$, $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, $0 < R < R'$)?

3. Какие части плоскости z выделяются условиями

$$|z - a| + |z - b| = k, \quad |z - a| + |z - b| \leqslant k \quad (k > 0)?$$

4. Какая часть плоскости z выделяется условием

$$|z^2 + az + b| < R^2?$$

Для каких значений R она связная, для каких — нет?

5. Пусть $|a| < 1$. Точки плоскости z разбиваются на три категории сообразно тому, будет ли модуль выражения

$$\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

меньше, равен или больше единицы. Где расположены точки каждой категории?

6. Пусть $\Re a > 0$. Точки плоскости z разбиваются на три категории сообразно тому, будет ли модуль выражения

$$\frac{a-z}{\bar{a}+z}$$

меньше, равен или больше единицы. Где расположены точки каждой категории?

7. Пусть комплексные переменные z_1 и z_2 связаны соотношением

$$\alpha z_1\bar{z}_1+\bar{a}z_1\bar{z}_2+a\bar{z}_1z_2+\beta z_2\bar{z}_2=0,$$

где α, β — вещественные, a — комплексное, все три постоянные. Показать, что при $\alpha\beta-a\bar{a}<0$ значения $\frac{z_1}{z_2}$ лежат на некоторой окружности или прямой. (Левая сторона уравнения называется *эрмитовой формой* от переменных z_1 и z_2.)

---

8. Какие кривые описываются точками $z_1=ia+at$, $z_2=-ibe^{-it}$, $z=ia+at-ibe^{-it}$, где a, b — положительные постоянные, а вещественная переменная t обозначает время?

9. По какой кривой перемещается точка

$$z=(a+b)e^{it}-be^{i\frac{a+b}{b}t}$$

(a, b — положительные постоянные, t — время)?

10. Пусть радиус-вектор r и аргумент ϑ — функции от времени t. Тогда комплексная функция $z=re^{i\vartheta}$ вещественного переменного t представляет движение точки z в плоскости. Вычислить компоненты скорости и ускорения по направлениям, параллельному и перпендикулярному к радиусу-вектору. [Дважды продифференцировать z по t.]

---

11. Для каких значений z n-й член $\frac{z^n}{n!}$ ряда

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

(показательного ряда, распространенного на комплексную плоскость) превосходит по модулю каждый другой член этого ряда ($n=0, 1, 2, \ldots$)?

12. Для каких значений z n-й член ряда

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}+\frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{z}{n}$$

(биномиальный ряд для $(1+t)^z$ при $t=1$ и z комплексном) превосходит по модулю каждый другой член этого ряда ($n=0$, 1, 2, ...)?

13. Положим

$$P_0(z)=z, \quad P_n(z)=z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

($n=1$, 2, 3, ...). Для каких значений z число $|P_n(z)|$ превосходит $|P_0(z)|$, $|P_1(z)|$, ..., $|P_{n-1}(z)|$, $|P_{n+1}(z)|$, ...? ($P_n(z)$ есть n-е частичное произведение в разложении

$$\frac{\sin \pi z}{\pi}=z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\cdots)$$

---

14. Если в интервале $a \leqslant t \leqslant b$ вещественная функция $f(t)$ положительна и непрерывна, а вещественная функция $\varphi(t)$ собственно интегрируема, то

$$\left|\int_a^b f(t)\, e^{i\varphi(t)}\, dt\right| \leqslant \int_a^b f(t)\, dt.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t)$ во всех своих точках непрерывности имеет одно и то же значение $\operatorname{mod} 2\pi$.

15. Пусть вещественная функция $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, собственно интегрируема во всяком конечном интервале. Показать, что тогда интегралы

$$\int_0^\infty e^{-(t+i\varphi(t))}\, dt=P, \qquad \int_0^\infty e^{-2(t+i\varphi(t))}\, dt=Q$$

удовлетворяют неравенству

$$|4P^2-2Q| \leqslant 3,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t)$ во всех своих точках непрерывности имеет одно и то же значение $\operatorname{mod} 2\pi$.

§ 2. Расположение корней алгебраических уравнений

В нижеследующих задачах мы рассматриваем полиномы n-й степени

$$P(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_{n-1} z+a_n$$

с произвольными комплексными коэффициентами; в большинстве случаев предполагается, что $a_0 \neq 0$.

Комплексное число z_0 называется нулем этого полинома, если

$$a_0 z_0^n+a_1 z_0^{n-1}+a_2 z_0^{n-2}+\ldots+a_{n-1} z_0+a_n=0$$

(z_0 есть корень алгебраического уравнения $P(z)=0$).

Если z_1, $z_2, \ldots, z_n$ n нулей полинома $P(z)$, то, как доказывается в алгебре,

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

16. Полином вида

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \ldots - p_{n-1} z - p_n,$$

где

$$p_1 \geqslant 0, \quad p_2 \geqslant 0, \ldots, \; p_n \geqslant 0, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 0,$$

имеет единственный положительный нуль.

17. Если z_0 — любой нуль полинома

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n,$$

то $|z_0|$ не может превосходить единственного положительного нуля ζ полинома

$$z^n - |a_1| z^{n-1} - |a_2| z^{n-2} - \ldots - |a_n|.$$

18. Нули полинома

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n,$$

где $a_n \neq 0$, по модулю не меньше единственного положительного нуля полинома

$$z^n + |a_1| z^{n-1} + |a_2| z^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}| z - |a_n|.$$

19. Все нули полинома $z^n + c$ лежат на окружности с центром $z = 0$ и радиусом $|c|^{\frac{1}{n}}$.

20. Пусть d_0, $d_1, \ldots, d_{n-1}$, d_n — положительные числа и

$$d_n \geqslant |a_1| d_{n-1} + |a_2| d_{n-2} + \ldots + |a_n| d_0.$$

Нули полинома

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n$$

не превосходят по модулю наибольшего из чисел

$$\frac{d_n}{d_{n-1}}, \quad \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-2}}}, \quad \sqrt[3]{\frac{d_n}{d_{n-3}}}, \; \ldots, \quad \sqrt[n]{\frac{d_n}{d_0}}.$$

21. Корни уравнения

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

не превосходят по модулю наибольшего из чисел

$$n|a_1|, \quad \sqrt{n|a_2|}, \quad \sqrt[3]{n|a_3|}, \; \ldots, \quad \sqrt[n]{n|a_n|},$$

а также наибольшего из чисел

$$\sqrt[k]{\frac{2^n - 1}{\binom{n}{k}} |a_k|} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

22. Пусть
$$p_0 > p_1 > p_2 > \ldots > p_n > 0.$$
Показать, что в единичном круге $|z| \leqslant 1$ не содержится ни одного нуля полинома
$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n.$$

23. Если все коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ полинома
$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n$$
положительны, то нули его лежат в круговом кольце $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$, где α — наименьшее, а β — наибольшее из чисел
$$\frac{p_1}{p_0}, \; \frac{p_2}{p_1}, \; \frac{p_3}{p_2}, \; \ldots, \; \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

24. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqslant 1$, — цифры некоторого $(n+1)$-значного числа
$$a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_n 10^n.$$
Тогда нули полинома
$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$
лежат либо внутри левой плоскости, либо в круге
$$|z| < \frac{1+\sqrt{37}}{2}.$$
В последнем случае точная верхняя граница для $|z|$ заключается между 3 и 4.

25. Пусть все нули полинома
$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$
лежат в верхней полуплоскости $\mathfrak{J} z > 0$. Пусть, далее, $a_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$, α_ν, β_ν вещественны ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$). Тогда
$$U(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$
и
$$V(z) = \beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} z + \beta_n$$
имеют лишь вещественные нули.

26. Пусть $P(z) = 0$ — алгебраическое уравнение n-й степени, все корни которого лежат внутри единичного круга $|z| < 1$. Обозначим через $\bar{P}(z)$ полином, полученный из $P(z)$ заменой всех коэффициентов сопряженными числами, и положим $P^*(z) = z^n \bar{P}(z^{-1})$. Все корни уравнения $P(z) + P^*(z) = 0$ будут лежать на окружности единичного круга $|z| = 1$.

27. Если полином n-й степени, $n \geqslant 2$, принимает при $z = a$ и $z = b$ соответственно значения α и β, где $a \neq b$, $\alpha \neq \beta$, то он принимает каждое значение γ, лежащее на отрезке, соединяющем α и β, по крайней мере один раз внутри или на границе фигуры, образованной двумя круговыми дугами, из которых отрезок ab виден под углом $\frac{\pi}{n}$.

§ 3. Продолжение: теорема Гаусса

28. Если комплексные числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (т. е. представляющие их точки) лежат все по одну и ту же сторону от некоторой прямой, проходящей через точку 0, то

$$z_1+z_2+\ldots+z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n} \neq 0.$$

29. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любые комплексные числа с суммой 0. Тогда каждая прямая g, проходящая через точку 0, *разделяет* числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, т. е. эти числа расположены частью по одну, частью по другую сторону от прямой g, если только они не все лежат на g.

30. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любые точки в комплексной плоскости, $m_1>0$, $m_2>0, \ldots, m_n>0$, $m_1+m_2+\ldots+m_n=1$. Тогда каждая прямая, проходящая через точку

$$z=m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n,$$

разделяет точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, если только они не все расположены на этой прямой.

Если рассматривать числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ задачи 30 как массы, сосредоточенные в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то определенная там точка z будет представлять центр тяжести этого распределения масс. Зафиксируем точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и рассмотрим *всевозможные* подобные распределения масс; тогда соответствующие им центры тяжести расположатся внутри некоторого (наименьшего) выпуклого полигона, содержащего точки $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$. Единственное исключение представляет случай, когда точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ все лежат на одной прямой. В этом случае центры тяжести будут заполнять наименьший отрезок, содержащий все рассматриваемые точки.

31. Производная $P'(z)$ полинома $P(z)$ не может иметь нулей вне наименьшего выпуклого полигона (соответственно наименьшего отрезка), содержащего все нули $P(z)$, причем те нули $P'(z)$, которые отличны от нулей $P(z)$, лежат внутри этого полигона (отрезка).

32. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любые отличные друг от друга комплексные числа. Рассмотрим совокупность всех полиномов $P(z)$, имеющих нулями (любой кратности) лишь эти точки $z_1, z_2, \ldots$

$\ldots, z_n$. Показать, что множество нулей всех $P'(z)$ всюду плотно в наименьшем выпуклом полигоне, содержащем $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

33. Нули разности $cP'(z) - P(z)$ [$P(z)$ — полином, $c \neq 0$] расположены в наименьшем выпуклом полигоне, содержащем лучи, проведенные из нулей $P(z)$ параллельно вектору c. При этом нуль рассматриваемой разности $cP'(z) - P(z)$ может лежать на границе указанной области лишь в двух следующих случаях: а) если он одновременно является нулем также полинома $P(z)$; б) если эта область приводится к лучу.

34. Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ — положительные, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — любые комплексные числа и полиномы $A(z)$ и $B(z)$ соответственно p-й и $(p-1)$-й степени определяются тождеством

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\rho_1}{z-a_1} + \frac{\rho_2}{z-a_2} + \ldots + \frac{\rho_p}{z-a_p}.$$

Показать, что нули каждого полинома $P(z)$, являющегося делителем полинома $A(z)P''(z) + 2B(z)P'(z)$, т. е. для которого выполняется тождество

$$A(z)P''(z) + 2B(z)P'(z) = C(z)P(z),$$

где $C(z)$ — полином, расположены в наименьшем выпуклом полигоне, содержащем числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

35. Если полином $f(z)$ с вещественными коэффициентами имеет лишь вещественные нули, то то же справедливо и для его производной $f'(z)$. Если $f(z)$ имеет комплексные нули, то эти последние попарно сопряжены, т. е. попарно симметричны относительно вещественной оси. Построим на каждом отрезке, соединяющем пару сопряженных корней, как на диаметре, круг. Тогда комплексные корни $f'(z)$, в случае если они имеются, будут лежать внутри построенных кругов. [Рассмотреть мнимую часть отношения $\frac{f'(z)}{f(z)}$.]

§ 4. Комплексные числовые последовательности

36. Если числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ лежат все в угле $-\alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то ряды $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ и $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

37. Пусть числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ лежат все в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$. Если сходятся оба ряда

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \quad z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 + \ldots,$$

то сходится также ряд

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 + \ldots$$

38. Существуют такие комплексные последовательности z_1, z_2, ..., z_n, ..., что все ряды

$$z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

сходятся, тогда как все соответствующие им ряды абсолютных значений

$$|z_1|^k + |z_2|^k + \ldots + |z_n|^k + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

расходятся.

39. Пусть z_1, z_2, ..., z_n, ... — любые комплексные числа. Если существует такое положительное расстояние δ, что $|z_l - z_k| \geqslant \delta$ для $l \neq k$ (l, $k = 1, 2, 3, \ldots$), то показатель сходимости последовательности модулей $|z_1|$, $|z_2|$, ..., $|z_n|$, ... не превосходит 2. [I 114.]

40. Предельные точки последовательности комплексных чисел

$$\frac{1^{i\alpha} + 2^{i\alpha} + 3^{i\alpha} + \ldots + n^{i\alpha}}{n}$$

($\alpha \neq 0$ и вещественно, $n = 1, 2, 3, \ldots$) заполняют окружность с центром в точке 0 и с радиусом $(1 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. [Привести интересующее нас выражение в связь с некоторой интегральной суммой.]

41. Где расположены предельные точки последовательности z_1, z_2, ..., z_n, ... с общим членом

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{1}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{i}{n}\right)?$$

42. Положим

$$\left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \ldots \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) = z_n$$

и соединим точки z_{n-1} и z_n ($n = 2, 3, 4, \ldots$) прямолинейными отрезками. Эти отрезки имеют все одинаковую длину 1, и образованная ими ломаная при увеличении n все более приближается по форме к спирали Архимеда; т. е., полагая $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $r_n > 0$, $0 < \varphi_n - \varphi_{n-1} < \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{\varphi_n - \varphi_{n-1}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{\varphi_n} = \frac{1}{2}.$$

43. Пусть $z = 2ne^{\frac{it}{\sqrt{n}}}$, где t — вещественное число. Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{2^z n!}{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)} = e^{-t^2}.$$

[II 59; II 10, в слегка измененном виде.]

§ 5. Продолжение: преобразования рядов

Из произвольной бесконечной последовательности $z_0, z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n, \ldots$ строится при помощи треугольной числовой схемы

$$\begin{array}{l} a_{00}, \\ a_{10},\ a_{11}, \\ a_{20},\ a_{21},\ a_{22}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

новая последовательность $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ по формуле

$$w_n = a_{n0}z_0 + a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{nn}z_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Говорят, что эта числовая схема *сохраняет сходимость*, если с ее помощью *каждая* сходящаяся последовательность $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ преобразуется в сходящуюся же последовательность $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ (см. I, гл. 2). Для того чтобы схема сохраняла сходимость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Для каждого фиксированного ν существует

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = a_\nu.$$

2. Положим

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = \sigma_n, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = \zeta_n,$$

тогда последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ сходится, а последовательность $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ ограничена. [O. Toeplitz, Prace mat.-fiz., т. 22, стр. 113—119, 1911; H. Steinhaus, там же, стр. 121—134; T. Kojima, Tôhoku Math. J., т. 12, стр. 291—326, 1917; I. Schur, J. für Math., т. 151, стр. 79—111, 1921.]

44. Доказать более легкую часть указанной теоремы: достаточность условий 1, 2. [I 66, I 80.]

45. Каким свойством должен обладать ряд $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ $\ldots + u_n + \ldots$, чтобы при умножении его на любой сходящийся ряд $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ по правилу Коши [I 34, II 23, VIII, гл. 1, § 5] получающийся ряд

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots$$
$$\ldots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0) + \ldots$$

был сходящимся?

46. Каким свойством должен обладать ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ $\ldots + u_n + \ldots$, чтобы при умножении его на любой сходящийся ряд $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ по правилу Дирихле (VIII, гл. 1, § 5) получающийся ряд

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_3v_1)+\ldots+\sum_{t\mid n}u_tv_{\frac{n}{t}}+\ldots$$

был сходящимся?

47. Для того чтобы с помощью последовательности множителей

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n,\ \ldots$$

каждый сходящийся ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ преобразовывался в сходящийся же ряд

$$\gamma_0a_0+\gamma_1a_1+\gamma_2a_2+\ldots+\gamma_na_n+\ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$|\gamma_0-\gamma_1|+|\gamma_1-\gamma_2|+\ldots+|\gamma_n-\gamma_{n+1}|+\ldots$$

был сходящимся.

48. Показать, что теорема: «из существования предела

$$\lim_{n\to\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+cu_n)=\alpha$$

вытекает существование предела

$$\lim_{n\to\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n)=\alpha»$$

верна при $c=0$ и при $\Re c>\frac{1}{2}$ и неверна при $\Re c\leqslant\frac{1}{2}$, $c\neq 0$.

49. Пусть $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ — произвольные комплексные числа. Для каких значений c из существования предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_n+c\,\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1}\right)$$

вытекает существование предела

$$\lim_{n\to\infty}u_n?$$

50. Если ряд Дирихле

$$a_11^{-s}+a_22^{-s}+a_33^{-s}+\ldots+a_nn^{-s}+\ldots$$

сходится при $s=\sigma+i\tau$ (σ, τ вещественны), где $\sigma>0$, то

$$\lim_{t\to 1-0}(1-t)^{\sigma}(a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\ldots+a_nt^n+\ldots)=0. \qquad [I\ 92.]$$

§ 6. Изменение порядка членов в комплексных рядах

51. Ряд из комплексных членов, каждая часть которого сходится, должен сходиться абсолютно. [I 125.]

52. Если ряд $|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots$ расходится, то существует по крайней мере одно направление сгущения α, обладающее тем свойством, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, ряд абсолютных величин тех членов ряда $z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots$, которые расположены в угле $\alpha-\varepsilon<\arg z<\alpha+\varepsilon$, является расходящимся.

53. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ и направление положительной вещественной полуоси является направлением сгущения для не абсолютно сходящегося ряда $z_1+z_2+z_3+\ldots$, то из этого последнего можно выбрать ряд $z_{r_1}+z_{r_2}+z_{r_3}+\ldots$, вещественная часть которого расходится к $+\infty$, тогда как мнимая часть сходится.

54. Если ряд $z_1+z_2+z_3+\ldots$ сходится не абсолютно, то надлежащей перестановкой членов этого ряда можно получить в качестве его суммы любую точку некоторой прямой в комплексной плоскости. [Смещения двух дополнительных частей ряда друг относительно друга; 52, 53, I 133, I 134.]

ГЛАВА 2

ОТОБРАЖЕНИЯ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения Коши-Римана

Если каждому значению z, лежащему внутри некоторой области $\mathfrak{B}$ комплексной плоскости z, поставлено в соответствие по некоторому определенному закону комплексное значение w, то w называют функцией от z. Особенно важны два геометрических представления функциональной зависимости; в одном используется одна плоскость, в другом — две. Мы можем представить себе значение w (или, если это целесообразнее, $\overline{w}$), отнесенное точке z, в виде вектора, приложенного к этой точке. Этим в области $\mathfrak{B}$ определяется векторное поле. В другом представлении значение w, отнесенное точке z плоскости z, рассматривается как точка некоторой другой комплексной плоскости (плоскости w). Этим определяется отображение области $\mathfrak{B}$ на некоторую часть плоскости w.

Пусть $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ — две вещественные функции вещественных переменных x и y. Тогда $w=u+iv$ будет функцией комплексного переменного $z=x+iy$. Эту функцию называют *аналитической* в некоторой области, если u и v непрерывны вместе со своими первыми частными производными и удовлетворяют *дифференциальным уравнениям Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти два уравнения объединяются в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(u+iv)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)=\frac{dw}{dz}.$$

55. Являются ли аналитическими функциями

$$z,\ z^2,\ |z|,\ \bar{z}?$$

56. Найти аналитическую функцию от $z=x+iy$, обращающуюся в нуль при $z=0$ и имеющую вещественной частью

$$\frac{x(1+x^2+y^2)}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2}.$$

57. Пусть a и b — фиксированные числа, $a<b$, z — точка, изменяющаяся в полуплоскости $\Im z>0$, и ω — переменный угол, под которым виден из точки z отрезок $[a, b]$ вещественной оси. Найти, если это возможно, аналитическую функцию $f(z)$, имеющую своей вещественной частью ω.

58. Показать, что для каждой аналитической функции $f(z) = f(x+iy)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2=4\,|f'(x+iy)|^2.$$

59. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z=x+iy$. Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln(1+|f(x+iy)|^2)=\frac{4\,|f'(x+iy)|^2}{(1+|f(x+iy)|^2)^2}.$$

§ 2. Специальные элементарные отображения

Как известно, из дифференциальных уравнений Коши-Римана вытекает, что аналитическая функция осуществляет конформное отображение плоскости z на плоскость w (т. е. отображение, сохраняющее углы и направление вращения).

О геометрическом смысле дифференциальных уравнений Коши-Римана для векторного поля мы будем говорить впоследствии (см. § 3).

60. Введем в пространстве прямоугольную систему координат ξ, η, ζ. Будем проектировать все точки (ξ, η, ζ) шаровой поверхности $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ (единичной сферы) из точки (0, 0, 1) (северного полюса шара) на плоскость $\zeta=0$ (экваториальную плоскость). Пусть проекции точек имеют координаты (x, y, 0). Выразить $x+iy$ через ξ, η, ζ и обратно ξ, η, ζ через x и y (стереографическая проекция).

61. (Продолжение.) Пусть точке P плоскости $\zeta=0$ посредством стереографической проекции относится точка P' единичной шаровой поверхности. При повороте шара на угол π около оси ξ точка P' займет новое положение P'', которому по стереографической проекции будет соответствовать некоторая точка P''' плоскости ξ, η. Пусть координатами P будут x, y, 0, координатами P''' будут u, v, 0. Выразить $u+iv$ через $x+iy$.

Введем на поверхности единичного шара географические координаты φ и θ (широту и долготу), причем

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad -\pi<\theta\leqslant\pi.$$

Как известно,

$$\xi=\cos\varphi\cos\theta,\ \eta=\cos\varphi\sin\theta,\ \zeta=\sin\varphi.$$

Рассмотрим круговой цилиндр, касающийся единичной сферы $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ вдоль экватора (большого круга в плоскости $\zeta=0$). Введем на нем координатную систему (u, v), переходящую при разворачивании цилиндра в прямоугольную декартову, причем за начало $(u=0,\ v=0)$ выберем точку $(1, 0, 0)$. За ось u возьмем вертикальную образующую, выбрав в качестве положительного направления направление вверх; осью v будет служить тогда линия, совпадающая до разворачивания цилиндра с экватором, и значения v будут изменяться по экватору в том же направлении, что и значения θ, от $-\pi$ до π. Получающиеся таким образом точки плоскости u, v будут заполнять тогда вертикальную полосу ширины 2π, симметричную относительно оси u.

С помощью проекции Меркатора поверхность единичного шара взаимно однозначно и конформно отобразится на цилиндр u, v. При этом точке шаровой поверхности с географическими координатами φ, θ будет соответствовать на цилиндре точка

$$u=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\quad v=\theta.$$

62. На какие линии цилиндра отображаются при проекции Меркатора меридианы и параллели единичной сферы? На какие линии плоскости отображаются они при стереографической проекции?

63. (Продолжение.) Пусть точка единичной сферы отображается с помощью стереографической проекции на точку $(x, y, 0)$ плоскости и, с другой стороны, с помощью проекции Меркатора — на точку (u, v) цилиндра. Выразить $x+iy$ через $u+iv$.

64. Пусть $z=e^w$. Каким кривым плоскости z соответствуют взаимно перпендикулярные прямые $\Re w=\text{const.}$, $\Im w=\text{const.}$ плоскости w?

65. На каких кривых плоскости z вещественная часть функции z^2 постоянна? На каких постоянна мнимая часть? Оба семейства кривых образуют ортогональную систему; почему?

66. Каким кривым плоскости z соответствуют при отображении $w=\sqrt{z}$ прямые $\Re w=\text{const.}$ плоскости w? Каким — прямые $\Im w=\text{const.}$? [$z=w^2$.]

67. Отображение $w=\cos z$ преобразует прямые $\Re z=\text{const.}$ плоскости z в гиперболы на плоскости w, прямые $\Im z=\text{const.}$ плоскости z — в эллипсы.

68. Написать уравнения кривых плоскости x, y, соответствующих при отображении

$$z = w + e^{w} \qquad (z = x + iy;\ w = u + iv)$$

линиям $u = \text{const.}$, соответственно $v = \text{const.}$ Что соответствует прямым $v = 0$, $v = \pi$?

69. Вычислить площадь области, в которую преобразуется при отображении $w = e^{z}$ квадрат

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon, \quad -\varepsilon \leqslant y \leqslant \varepsilon$$

(a вещественно, ε положительно и $< \pi$, $z = x + iy$). Вычислить предел отношения площадей двух областей, когда ε стремится к нулю.

Под *линейным искажением* отображения $w = f(z)$ в точке z, где $f(z)$ регулярна, понимают отношение линейного элемента в точке $w = f(z)$ плоскости w к линейному элементу в точке z плоскости z. Это растяжение равно $|f'(z)|$. Под *поверхностным искажением* понимают аналогичное отношение элементов поверхности. Оно равно $|f'(z)|^2$. Таким образом, дуга L кривой в плоскости z отображается на некоторую дугу в плоскости w, длина которой равна

$$\int_{L} |f'(z)|\,|dz|;$$

области F плоскости $z = x + iy$ соответствует некоторая область в плоскости w, площадь которой равна

$$\iint_{F} |f'(z)|^2\,dx\,dy.$$

Изменение направления линейного элемента при отображении $w = f(z)$ равно $\arg f'(z)$. Оно называется *углом поворота* в точке z и определено в каждой точке, где $f'(z) \neq 0$, с точностью до числа, кратного 2π. Обычно принимают, что $-\pi < \arg f'(z) \leqslant \pi$.

70. При отображении $w = \cos z$, $z = x + iy$ прямоугольник

$$0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y_1 \leqslant y \leqslant y_2$$

преобразуется взаимно однозначно и конформно в некоторую область, ограниченную дугами софокусных гипербол и эллипсов [67]. Вычислить площадь этой области.

71. По каким линиям располагаются точки равного линейного искажения при отображении $w = z^2$? По каким — точки с одинаковым углом поворота?

72. В какую область преобразуется квадрат

$$-a < x < a, \quad -a < y < a$$

при отображении $w=e^z$, $z=x+iy$? До каких значений положительного возрастающего параметра a соответствие будет взаимно однозначным? Для какого значения a область будет покрыта ровно n раз?

73. Рассмотрим область, в которую переходит круг $|z| \leqslant r$ при отображении $w=e^z$. Пусть r непрерывно возрастает. Тогда на каждом луче $\arg w=\alpha$ найдется точка, которая при любой величине расширяющегося круга будет покрываться его образом не меньшее число раз, чем любая другая точка этого луча. Где находится эта точка?

Регулярную функцию $w=f(z)$ называют *однолистной* в некоторой области $\mathfrak{G}$, если каждое значение, принимаемое ею в этой области, она принимает в этой области лишь один раз. Например, функция z^2 однолистна в верхней полуплоскости $\Im z>0$, функция $\sqrt{z}$ однолистна в плоскости z с разрезом вдоль положительной вещественной оси, функция e^z однолистна в горизонтальной полосе $-\pi<\Im z\leqslant\pi$, но уже неоднолистна в любой более широкой полосе [72], и т. д.

Однолистная функция $w=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное (однолистное) конформное отображение области $\mathfrak{G}$ на некоторую область $\mathfrak{H}$ плоскости w. При этом часто бывает целесообразно бесконечно удаленную точку, которая при стереографической проекции на шаровую поверхность становится ничем геометрически не отличимой от других точек, рассматривать как обыкновенную точку. Если функция $f(z)$ однолистна в области $\mathfrak{G}$, то производная ее $f'(z)$ во всей этой области отлична от нуля. Обратное неверно [72].

74. Функция $w=z^2+2z+3$ однолистна в открытом круге $|z|<1$.

75. Функция $w=z^2$ однолистна в верхней полуплоскости $\Im z>0$ и отображает эту последнюю на плоскость w с разрезом вдоль неотрицательной вещественной оси.

76. Показать, что функция

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(a вещественно, $|a|<1$) взаимно однозначно отображает единичный круг $|z|\leqslant 1$ на самого себя. [5.] По каким линиям располагаются точки постоянного линейного искажения?

77. Если K — произвольная окружность, расположенная внутри единичного круга, то всегда существует отображение этого последнего на самого себя вида

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(α вещественно, $|a|<1$), переводящее K в окружность, концентрическую с единичной.

78. Отобразить верхнюю полуплоскость $\Im z>0$ на круг $|w|<1$ так, чтобы $z=i$ перешло в $w=0$.

79. Функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ является однолистной в незамкнутом круге $|z|<1$ и отображает последний на плоскость w с разрезом вдоль отрезка $-1\leqslant w\leqslant 1$ вещественной оси. Какие кривые при этом соответствуют концентрическим окружностям $|z|=r$, $r<1$, какие — лучам, выходящим из начала? Как ведет себя отображение на границе $|z|=1$ круга?

80. Найти функцию, осуществляющую отображение кругового кольца $0<r_1<|z|<r_2$ на кольцеобразную область, заключающуюся между софокусными эллипсами

$$|w-2|+|w+2|=4a_1,\quad |w-2|+|w+2|=4a_2\quad (1<a_2<a_1)$$

плоскости w. [Искомая функция определяется на основании задачи 79 в том случае, когда заданные числа r_1, r_2, a_1, a_2 связаны соотношением

$$\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}{r_1}=\frac{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}{r_2},$$

где корни положительны.]

81. Отобразить верхнюю половину единичного круга $|z|<1$, $\Im z>0$ на верхнюю полуплоскость [79]. В каких точках плоскости z линейное искажение будет равно $\frac{1}{2}$? В каких угол поворота будет равен $\pm\frac{\pi}{2}$?

82. Отобразить верхнюю половину единичного круга $|z|<1$, $\Im z>0$ на плоскость w, разрезанную вдоль неотрицательной вещественной оси, так, чтобы при этом отображении $z=0$ перешло в $w=0$, $z=1$ — в $w=1$ и $z=i$ — в $w=\infty$. В какую точку перейдет $z=-1$?

83. Посредством функции

$$w=(e^{-i\alpha}z)^{\frac{2\pi}{\beta-\alpha}},$$

где $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$, угол $\alpha<\arg z<\beta$ отображается на плоскость w, разрезанную вдоль неотрицательной вещественной оси.

84. Пусть $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$. Отобразить круговой сектор

$$\alpha<\arg z<\beta,\qquad |z|<1$$

на единичный круг $|w|<1$.

§ 3. Векторные поля

При изучении векторных полей, определяемых аналитическими функциями комплексного переменного, мы воспользуемся специальными обозначениями, несколько отличающимися от принятых в остальных частях этой главы. Пусть

$$z = x + iy = re^{i\vartheta}$$

(x, y, r, ϑ вещественны, $r \geqslant 0$) обозначает независимое переменное и пусть

$$f = f(z) = \varphi + i\psi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

— аналитическая функция от z (φ, ψ вещественны). Положим

$$\frac{df}{dz} = w = u - iv$$

(u, v вещественны); $w = u - iv$ тоже будет аналитической функцией; отделяя в соотношении

$$\frac{\partial}{\partial x}(u - iv) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u - iv)$$

вещественную и мнимую части, мы получим для этой функции дифференциальные уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пусть к каждой точке $z = x + iy$ приложен вектор $\overline{w} = u + iv$ (не w!). Все эти векторы образуют *плоское* векторное поле. Это поле можно представлять себе как часть *пространственного* векторного поля, получающегося, если к каждой точке пространства, ортогональной проекцией которой на плоскость z является точка $x + iy$, приложить (параллельный плоскости z) вектор $\overline{w}$.

Полученное векторное поле является *безвихревым*; первое дифференциальное уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

показывает, что вихрь его всюду равен нулю. (Две остальные компоненты вихря здесь, очевидно, равны нулю.) Это векторное поле, кроме того, как показывает второе дифференциальное уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

имеет дивергенцию, тождественно равную нулю. (Третье слагаемое, входящее в общее выражение для дивергенции, здесь, очевидно, равно нулю.) В терминах гидродинамики можно сказать, что рассматриваемое поле соответствует течению несжимаемой жидкости, причем нет ни источников, ни стоков.

85. Доказать, что имеют место равенства

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

($\varphi(x, y)$ называют *потенциалом* векторного поля, линии $\varphi(x, y) = \text{const.}$ — *эквипотенциальными линиями*.)

Далее, выполняются равенства

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

($\psi(x, y)$ называют *функцией тока*, линии $\psi(x, y)=\text{const.}$ — *линиями тока* или же *силовыми линиями* в зависимости от физической интерпретации вектора $\overline{w}$.)

86. Линии $\varphi(x, y)=\text{const.}$ и $\psi(x, y)=\text{const.}$ взаимно ортогональны.

87. Показать, что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

(*уравнение Лапласа*).

88. Соединим точки $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ кривою L, проходящей в векторном поле; пусть линейный элемент ds этой кривой составляет с положительным направлением оси x угол τ. Доказать, что

$$\int\limits_L (u\cos\tau+v\sin\tau)\,ds=\varphi(x_2, y_2)-\varphi(x_1, y_1),$$

т. е. криволинейный интеграл тангенциальной компоненты вектора $\overline{w}$ равен разности потенциалов (работе).

89. Показать, что в обозначениях задачи 88

$$\int\limits_L (u\sin\tau-v\cos\tau)\,ds=\psi(x_2, y_2)-\psi(x_1, y_1),$$

т. е. криволинейный интеграл нормальной компоненты вектора $\overline{w}$ равен изменению функции тока (силовой поток). (При продвижении вдоль кривой L нормаль считаем направленной вправо:

$$-i(\cos\tau+i\sin\tau)=\sin\tau-i\cos\tau.)$$

Векторное поле, порождаемое некоторой аналитической функцией, может быть истолковано как электростатическое поле, магнитное поле или поле тяготения; $\overline{w}$ означает тогда силу поля. Его можно представлять себе также как поле стационарного электрического тока или теплового потока; при этом последнем истолковании вектор $\overline{w}$ означает падение потенциала и пропорционален плотности тока. Наконец, векторное поле можно интерпретировать как безвихревое стационарное поле потока несжимаемой жидкости.

90. Для свободного стационарного потока несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ и переменным давлением p, идущего параллельно плоскости $x+iy$, как известно[1]), имеют место уравнения

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Показать, что если $w=u-iv$ есть аналитическая функция, то компоненты u, v вектора $\overline{w}$ и

$$p=p_0-\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)$$

(*формула Бернулли*) (p_0 постоянно) удовлетворяют этим уравнениям.

91. Для векторного поля, порождаемого функцией

$$w=\frac{1}{z},$$

найти направление и модуль вектора $\overline{w}$ в точке $z=re^{i\vartheta}$, а также потенциал, функцию тока, эквипотенциальные линии и линии тока. (Часть интересующего нас векторного поля, заключающуюся в круговом кольце $0<r_1<|z|<r_2$, можно истолковать как электростатическое поле между двумя обкладками лейденской банки или же как поле теплового потока в стенке фабричной трубы.)

92. Обозначим через φ потенциал и через ψ функцию тока векторного поля задачи **91**. Пусть z_1 и z_2 — произвольные точки соответственно окружностей $|z|=r_1$ и $|z|=r_2$, φ_1 и φ_2 — значения потенциала в этих точках. Вычислить

$$\varphi_2-\varphi_1$$

(разность потенциалов между двумя обкладками лейденской банки).

Функция тока ψ задачи **91** оказывается бесконечно многозначной. Проследить изменение ее значений при обходе произвольной простой замкнутой кривой L, содержащейся между окружностями $|z|=r_1$ и $|z|=r_2$. Пусть z — некоторая точка кривой L, ψ — значение функции тока в z до обхода, ψ' — значение в z после одного обхода кривой L. Вычислить

$$\psi'-\psi$$

[1]) См., например, Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 6-е изд., т. 2, § 164, стр. 416. Braunschweig, Fr. Vieweg, 1919.

(силовой поток, переходящий с одной обкладки лейденской банки на другую). Вычислить, кроме того,

$$\frac{\frac{1}{4\pi}(\psi'-\psi)}{\varphi_2-\varphi_1}$$

(емкость цилиндрических обкладок на единицу длины образующей).

93. Ответить на те же вопросы, что и в задаче **91**, для векторного поля, определяемого функцией

$$w=-\frac{i}{z}$$

(стационарное магнитное силовое поле, порожденное бесконечно протяженным прямолинейным проводником электрического тока, перпендикулярным к плоскости z). Будут ли в этом поле потенциал φ и функция тока ψ однозначными функциями?

94. Два бесконечно протяженных прямолинейных проводника электрического тока расположены перпендикулярно к плоскости z и пересекают ее соответственно в точках $z=-1$ и $z=1$. Через них проходит ток одинаковой силы, но в противоположных направлениях. Определить эквипотенциальные линии и линии тока в порождаемом этими проводниками магнитном поле.

95. Через n прямолинейных проводников, перпендикулярных к плоскости z и пересекающих ее в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, проходит в *одном и том же* направлении ток. Показать, что в плоскости z существует самое большее $n-1$ точек, в которых магнитная сила равна нулю (точки равновесия); они содержатся в наименьшем выпуклом полигоне, охватывающем точки $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$. [Последнее утверждение станет очевидным с точки зрения механики, если повернуть все векторы поля на 90°. Ср. соотношение между задачами **91** и **93**.]

96. Пусть даны два софокусных эллипса с фокусами в точках $z=-2$ и $z=2$ и полуосями соответственно $2a_1$, $2b_1$ и $2a_2$, $2b_2$,

$$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2=1.$$

Построить в заключающейся между этими эллипсами области такое безвихревое векторное поле с нулевой дивергенцией, чтобы указанные эллипсы служили для него эквипотенциальными линиями. (Электростатическое поле в конденсаторе, имеющем в качестве обкладок конфокальные эллиптические цилиндры.) Какую форму будут иметь эквипотенциальные линии и линии тока? Определить емкость [92]. [Отобразить интересующую нас кольцеобразную область на круговое кольцо между двумя концентрическими окружностями. См. **80** и **91**.]

97. Пусть $0<a<b$, $\alpha<\beta<\alpha+2\pi$. Указать в области, определяемой неравенствами

$$a\leqslant|z|\leqslant b,\quad \alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,$$

такое безвихревое векторное поле, не имеющее источников и стоков, для которого граничные круговые дуги служили бы линиями тока, а прямолинейные отрезки — эквипотенциальными линиями. (Электрический ток в пластинке постоянной толщины.)

Пусть ψ_1 и ψ_2 будут значения функции тока на окружностях $|z|=a$ и $|z|=b$, а φ_1 и φ_2 — значения потенциала на лучах $\arg z=\alpha$ и $\arg z=\beta$. Вычислить

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\psi_2-\psi_1}$$

(сопротивление, с точностью до множителя, зависящего от толщины и удельного сопротивления пластинки).

В более трудных задачах рекомендуется рассматривать три (возможно даже четыре) плоскости: плоскость z (плоскость потока), плоскость $\overline{w}$ (плоскость скоростей) и плоскость f (плоскость потенциала) (возможно, еще плоскость w). Наименования в скобках связаны с гидродинамическими представлениями. Так как $f=\varphi+i\psi$ и $w=u-iv=\frac{df}{dz}$ являются аналитическими функциями комплексного переменного $z=x+iy$, то плоскости z, w и f отображаются одна на другую конформно; что касается плоскости $\overline{w}$, то на нее эти плоскости отображаются с сохранением углов, однако с изменением направления вращения. В частности, плоскость $\overline{w}$ получается из плоскости w посредством зеркального отражения относительно вещественной оси. Эквипотенциальным линиям и линиям тока в плоскости потока (плоскости z) соответствуют на плоскости потенциала (плоскости f) прямые, параллельные осям. Двум произвольным вещественным постоянным, содержащимся в φ и ψ, соответствует параллельное смещение плоскости f.

98. Указать безвихревое поле с нулевой дивергенцией, заполняющее все пространство вне единичного круга ($|z|\geqslant 1$) и такое, что $\overline{w}$ для $z=\infty$ равно единице, а на единичной окружности направлено по касательной к ней. (Обтекание жидкостью кругового цилиндра; на достаточном расстоянии от цилиндра поток равномерен.) [Из соображений симметрии обе части вещественной оси, содержащиеся в векторном поле, должны быть линиями тока. Горизонтальная компонента вектора $\overline{w}$ направлена всюду слева направо. Найти отображение поля потока на поле потенциала!]

99. В каких точках векторного поля задачи 98 вектор скорости $\overline{w}$ обращается в нуль? (Критические точки.) В скольких различных точках поля вектор $\overline{w}$ принимает равные значения? Где давление p минимально и где максимально? [90.] Какова результирующая всех давлений, оказываемых на цилиндр? Какой физический смысл имеет векторное поле, полученное поворотом всех векторов нашего поля на 90°?

100. На рис. 1 изображены контуры векторного поля, определенного следующими условиями: безвихревое поле с нулевой дивергенцией распространяется на всю верхнюю полуплоскость и часть нижней симметрично относительно мнимой оси. Для $z=\infty$ $\overline{w}=-i$, для $z=0$ $\overline{w}=0$. Известны следующие линии тока: положительная мнимая ось и отрезки вещественной оси от $z=0$ до $z=l$ и от $z=0$ до $z=-l$ (на рисунке CA, AB и AD); соответствующие направления вектора $\overline{w}$ указаны стрелками. Пусть, кроме того, две остающиеся еще части контура — кривые, ниспадающие от $z=l$ и от $z=-l$ (на рисунке от B и от D) несколько в сторону и круто вниз до бесконечности, — являются одновременно линиями тока и линиями постоянства скоростей (т. е. вдоль них векторы $\overline{w}$ направлены по касательным и $|\overline{w}|$ постоянно). Начертить схему отображения этого поля на плоскостях $\overline{w}$ и f. (Образование неподвижной воды позади щитообразного препятствия, поставленного перпендикулярно к направлению потока. Отрезок от $z=-l$ до $z=+l$ представляет щит; в центре его находится критическая точка $z=0$. В незагороженной части поле мыслится равномерным с постоянным вектором потока $-i$. В неподвижной воде давление постоянно; вследствие формулы Бернулли [90] отсюда следует, что на линиях тока, отделяющих неподвижную воду от движущейся, $|\overline{w}|=\text{const}$.)

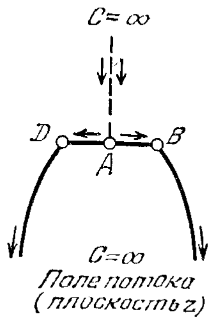

Рис. 1.

101. (Продолжение.) Выразить w как функцию от f и определить отсюда z как функцию от f [82]. Определить ширину неподвижной воды на достаточном удалении.

102. (Продолжение.) Вычислить общее давление на щит, предполагая, что плотность $\rho=1$. [90.]

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Отображение окружности. Кривизна и опорные функции

103. Пусть точка z движется с постоянной угловой скоростью 1 по окружности $|z|=r$. Вычислить величину и направление вектора скорости движущегося вместе с z ее образа $w=f(z)$ в плоскости w.

104. Рассмотрим отображение окружности $|z|=r$ на плоскость w, осуществляемое функцией $w=f(z)$. Как велико расстояние касательной в точке w, соответствующей точке z, от точки $w=0$?

105. Точка z движется с постоянной угловой скоростью 1 по окружности $|z|=r$. Какова угловая скорость вектора, соединяющего точку $w=0$ плоскости w с движущейся вместе с z точкой $w=f(z)$?

106. Отображение окружности $|z|=r$ на плоскость w, осуществляемое функцией $w=f(z)$, имеет в точке $w=f(z)$ кривизну

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1+\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}.$$

[Сводится к определению угловой скорости вращения касательной.]

107. (Продолжение.) Знак кривизны зависит от того, будет ли некоторая фиксированная, не лежащая на кривой точка (скажем, $w=0$) оставаться справа или слева, с выпуклой или с вогнутой стороны траектории точки $w=f(z)$ [103]. Какова именно эта зависимость? [Рассмотреть пример $w=z^n+a$, где n вещественное, a комплексное.]

108. Точка $w=f(z)$ задачи **103** описывает простую замкнутую кривую в положительном направлении. Эта кривая будет тогда и только тогда всюду выпуклой, когда для $|z|=r$

$$\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>-1.$$

109. Простая замкнутая кривая называется *звездообразной* относительно некоторой точки, лежащей в ограничиваемой ею области, если каждым лучом, выходящим из этой точки, кривая пересекается только один раз (иными словами, если все точки кривой «видны» из указанной точки).

Пусть окружность $|z|=r$ отображается с помощью функции $w=f(z)$ на некоторую простую замкнутую кривую, обходимую в положительном направлении [103]. Показать, что эта кривая будет тогда и только тогда звездообразной относительно точки $w=0$, если при $|z|=r$

$$\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0.$$

110. Образ окружности $|z|=r$ при отображении $w=f(z)$ тогда и только тогда выпуклый, когда ее образ при отображении $w=zf'(z)$ звездообразен относительно точки $w=0$.

111. Точки, относительно которых некоторая замкнутая кривая звездообразна, образуют выпуклое множество. Эта чисто геометрическая теорема может быть доказана для аналитических кривых на основании теоремы **109**.

Пусть в плоскости $w=u+iv$ дана ограниченная выпуклая область $\mathfrak{K}$. Тогда выражение

$$u\cos\varphi+v\sin\varphi=\Re(\overline{w}e^{i\varphi})$$

для каждого фиксированного φ имеет в области $\mathfrak{K}$ некоторый определенный максимум, $h(\varphi)$. Функция $h(\varphi)$ — периодическая, с периодом 2π; ее называют *опорной функцией* области $\mathfrak{K}$. Прямую

$$u\cos\varphi+v\sin\varphi-h(\varphi)=0$$

называют *опорной прямой* области $\mathfrak{K}$; направление ее нормали в сторону от $\mathfrak{K}$ составляет с положительным направлением оси u как раз угол φ. Если $\mathfrak{K}$ — бесконечно протяженная область, то наше определение сохраняется с той поправкой, что конечный максимум $h(\varphi)$ существует лишь в некотором угле с раствором $\leqslant\pi$. Случаи полуплоскости и полосы, ограниченной параллельными прямыми, составляют исключение. Тогда существует только одна, соответственно две опорные прямые.

112. Определить опорную функцию выпуклой области, состоящей из единственной точки $a=|a|e^{i\alpha}$.

113. Пусть функция $w=f(z)$ взаимно однозначно отображает круг $|z|\leqslant r$ на выпуклую область $\mathfrak{K}$. Пусть, кроме того, в граничной точке z, $|z|=r$, функция $f(z)$ регулярна и $f'(z)\neq 0$. Тогда через граничную точку $w=f(z)$ области $\mathfrak{K}$ проходит одна вполне определенная опорная прямая (касательная). Выразить соответствующие значения φ и $h(\varphi)$ через $f(z)$.

114. Круг $|z|\leqslant 1$ отображается с помощью функции $w=\ln(1+z)$ на некоторую неограниченную выпуклую область, содержащуюся в полосе $-\frac{1}{2}\pi<\Im w<\frac{1}{2}\pi$ плоскости w. Ее опорной функцией $\left(\text{определенной лишь для } -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ будет

$$h(\varphi)=\cos\varphi\cdot\ln(2\cos\varphi)+\varphi\sin\varphi.$$

115. Круг $|z|\leqslant 1$ отображается с помощью функции $w=\frac{2}{i}\arcsin iz$ на некоторую ограниченную двуугольную выпуклую область, содержащуюся в полосе $-\pi\leqslant\Im w\leqslant\pi$ плоскости w. Ее опорной функцией является

$$h(\varphi)=\begin{cases}\cos\varphi\ln\left(\sqrt{\cos 2\varphi}+\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2+2\sin\varphi\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \text{при } 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4};\\ \pi\sin\varphi & \text{при } \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$h(\varphi+\pi)=h(-\varphi)=h(\varphi).$$

116. Если $we^{-w+1}=z$, то круг $|z|\leqslant 1$ отображается на некоторую ограниченную выпуклую область с одной вершиной, содержащуюся в полуплоскости $\Re w\leqslant 1$. Ее опорной функцией при $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$ служит $h(\varphi)=\cos\varphi$; при $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ опорная функция может быть задана в параметрическом виде

$$h(\varphi)e^{i\varphi}=\frac{w}{1-w}\Re(1-w),$$

где w пробегает граничные точки, т. е. $|we^{-w+1}|=1$.

§ 2. Средние значения вдоль окружности

117. Пусть $z=e^{i\vartheta}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^k\bar{z}^l\,d\vartheta=\begin{cases}0, & \text{если } k\neq l,\\ 1, & \text{если } k=l\end{cases}\qquad (k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Функции $1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ \ldots$ образуют, как говорят, ортогональную систему на единичной окружности.

118. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$. Под арифметическим средним [II 48] функции $f(z)$ на окружности $|z|=r$ понимают

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\,d\vartheta=\lim_{n\to\infty}\frac{f(r)+f(r\omega_n)+f(r\omega_n^2)+\ldots+f(r\omega_n^{n-1})}{n},$$

где $\omega_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\,d\vartheta=f(0).$$

Иначе говоря, доказать, что если аналитическая функция регулярна в каждой точке некоторого круга (включая и его границу), то значение ее в центре круга равно арифметическому среднему ее значений на границе.

119. Пусть $f(z)$ регулярна и отлична от нуля в круге $|z|\leqslant\leqslant r$. Показать, что геометрическое среднее модуля $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$ есть

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f(r)f(r\omega_n)f(r\omega_n^2)\ldots f(r\omega_n^{n-1})|}=|f(0)|.$$

[Функция $\ln f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$.]

120. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant r$ и отлична от нуля в точке $z=0$. Пусть, далее, нули $f(z)$, лежащие в круге $|z| \leqslant r$, будут $z_1, z_2, \ldots, z_n$, причем кратные нули считаются соответственно их кратности. Показать, что геометрическое среднее модуля $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$ дается формулой

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta} = |f(0)|\frac{r^n}{|z_1 z_2 \ldots z_n|}.$$

[$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)f^*(z)$, причем $f^*(z)$ в круге $|z| \leqslant r$ регулярна и отлична от нуля.]

121. В предположениях задачи **120** геометрическое среднее модуля $|f(z)|$ в круге $|z| \leqslant r$

$$\mathfrak{g}(r) = e^{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\vartheta})|\,\rho\,d\rho\,d\vartheta}$$

всегда меньше, чем геометрическое среднее

$$\mathfrak{G}(r) = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta}$$

модуля $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$. Именно

$$\frac{\mathfrak{g}(r)}{\mathfrak{G}(r)} = e^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{|z_1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2}{nr^2}\right)}.$$

122. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z| \leqslant r$. Показать, что арифметическое среднее квадрата модуля $|f(z)|^2$ на окружности $|z|=r$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta = |a_0|^2+|a_1|^2 r^2+|a_2|^2 r^4+\ldots+|a_n|^2 r^{2n}+\ldots$$

123. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z| \leqslant 1$. Показать, что частичные суммы

$$s_n(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

степенного ряда функции $f(z)$ обладают следующим свойством минимальности: интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})-P(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta,$$

где $P(z)$ может быть любым полиномом n-й степени, тогда и только тогда принимает минимальное значение, когда $P(z) = s_n(z)$. Это минимальное значение равно

$$|a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + |a_{n+3}|^2 + \ldots$$

§ 3. Отображение круга. Площадь области, получаемой при отображении

124. Пусть функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна в круге $|z| \leqslant r$. Тогда отображение $w = f(z)$ преобразует круг $|z| \leqslant r$ в некоторую область плоскости w, причем отдельные части этой области считаются столько раз, сколько раз принимаются в круге $|z| \leqslant r$ соответствующие значения w. Показать, что площадь указанной области равна

$$\pi(|a_1|^2 r^2 + 2|a_2|^2 r^4 + 3|a_3|^2 r^6 + \ldots + n|a_n|^2 r^{2n} + \ldots).$$

(Эта площадь аддитивно составлена из площадей областей, на которые отображается круг $|z| \leqslant r$ с помощью отдельных слагаемых $w = a_n z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$)

125. Пусть функция

$$w = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \ldots + a_{-n} z^{-n} + a_{-n+1} z^{-n+1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна в круговом кольце $r \leqslant |z| \leqslant R$. Тогда площадь области, на которую отображается это кольцо, равна

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

(Многократно покрытые части считаются соответствующее число раз.)

126. Пусть функция

$$\varphi(z) = cz + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots \qquad (c \neq 0)$$

регулярна и однолистна во внешней круговой области $|z| \geqslant r$. При отображении $w = \varphi(z)$ некоторая вполне определенная область плоскости w остается непокрытой. Показать, что ее площадь равна

$$\pi\left(|c|^2 r^2 - \frac{|c_1|^2}{r^2} - \frac{2|c_2|^2}{r^4} - \frac{3|c_3|^2}{r^6} - \ldots\right).$$

127. Пусть функция

$$w=f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \ldots + a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна на окружности $|z|=r$ и в различных ее точках не принимает одинаковых значений. Показать, что площадь области, ограничиваемой кривой L, на которую отображается эта окружность, равна

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n}.$$

При этом площадь считается положительной или отрицательной, смотря по тому, будет ли точка $w=f(z)$ при положительном обходе окружности $|z|=r$ обходить внутреннюю область кривой L в положительном или же отрицательном направлении.

128. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$ и $J(\rho)$ обозначает площадь области, в которую переходит круг $|z|\leqslant\rho$ при отображении $w=f(z)$ $(0\leqslant\rho\leqslant r)$. Тогда

$$4\int_0^r \frac{J(\rho)}{\rho}\,d\rho = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta - 2\pi\,|f(0)|^2.$$

129. Пусть функция

$$w=\varphi(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots$$

регулярна во внешней круговой области $|z|\geqslant r$ и отображает ее взаимно однозначно на замкнутую внешнюю область некоторой кривой L плоскости w. Представим себе, что на окружности $|z|=r$ дано равномерное распределение массы, а на кривой L плоскости w масса распределена так, что дугам окружности $|z|=r$ и кривой L, связанным отображением $w=\varphi(z)$, соответствуют одинаковые массы. Определенное таким образом на кривой L распределение масс имеет некоторый определенный центр тяжести ξ (конформный центр тяжести кривой L). Показать, что

$$\xi=c_0.$$

§ 4. Поверхность модуля. Принцип максимума

Пусть функция $f(z)=u+iv$ регулярна в некоторой области $\mathfrak{B}$ плоскости $z=x+iy$. Отложим от каждой точки z области $\mathfrak{B}$ по направлению вверх, перпендикулярно к плоскости z, отрезок длиной

$$\zeta=|f(z)|^2=u^2+v^2.$$

Получающаяся таким образом поверхность представляет квадрат модуля функции $f(z)$. Мы будем называть ее *поверхностью модуля*; Иенсен называет эту поверхность «аналитическим ландшафтом» [Jensen, Acta Math., т. 36, стр. 195, 1912].

130. Объем тела, ограниченного снизу кругом $|z| \leqslant r$, сбоку — восставленным на периферии этого круга прямым круговым цилиндром и сверху — поверхностью модуля функции

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

равен

$$\pi r^2 \left(\frac{|a_0|^2}{1} + \frac{|a_1|^2 r^2}{2} + \frac{|a_2|^2 r^4}{3} + \ldots + \frac{|a_n|^2 r^{2n}}{n+1} + \ldots \right).$$

131. Пусть γ — угол между касательной плоскостью к поверхности модуля и плоскостью x, y. Тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = 2 |f(z)| |f'(z)|.$$

132. Точки поверхности модуля, в которых касательная плоскость горизонтальна, распадаются на два различных вида («ямы» и «седловины»). Если касательной плоскостью служит плоскость x, y, то на ней лежат лишь изолированные точки поверхности. Если же касательная плоскость отлична от плоскости x, y, то она пересекает поверхность вдоль некоторой кривой (линии уровня), состоящей из $2n$ ветвей, $n \geqslant 2$, выходящих из рассматриваемой точки и образующих между собой равные углы. Этими $2n$ ветвями отделяются $2n$ углообразных областей на поверхности модуля, которые лежат попеременно выше и ниже касательной плоскости. (Все «ямы» лежат на плоскости x, y, все «седловины» — выше, на различных уровнях.)

133. Линия пересечения поверхности модуля полинома, имеющего лишь вещественные нули, с плоскостью, перпендикулярной к оси x, выпукла снизу, причем наинизшая ее точка лежит в плоскости x, ζ.

134. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z - z_0| \leqslant r$ и M обозначает максимум модуля $|f(z)|$ на окружности $|z - z_0| = r$. Тогда

$$|f(z_0)| \leqslant M.$$

При этом равенство достигается лишь в том случае, когда $f(z)$ постоянна.

135. Пусть $f(z)$ регулярна и однозначна в некоторой замкнутой области $\mathfrak{B}$ и M означает максимум модуля $f(z)$ на границе $\mathfrak{B}$. Тогда внутри $\mathfrak{B}$

$$|f(z)| < M,$$

если только $f(z)$ не есть постоянная. (*Принцип максимума*, см. гл. 6.)

136. С каким свойством поверхности модуля связан принцип максимума?

137. Пусть в плоскости задано n фиксированных точек P_1, $P_2, \ldots, P_n$ и P — переменная точка этой плоскости. Показать, что функция точки P

$$\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \ldots \overline{PP_n},$$

где $\overline{PP_\nu}$ — расстояние между точками P и P_ν, в каждой замкнутой области плоскости принимает свое максимальное значение на границе области.

138. Пусть $f(z)$ регулярна и однозначна в некоторой замкнутой области $\mathfrak{B}$ и отлична в ней от нуля. Если $f(z)$ не есть постоянная, то $|f(z)|$ может принимать минимальное значение только на границе области $\mathfrak{B}$.

139. Пусть фиксированные точки P_1, P_2, $\ldots$, P_n лежат внутри круга радиуса R и переменная точка P пробегает периферию этого круга. Тогда

$$\sqrt[n]{\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \ldots \overline{PP_n}}$$

(геометрическое среднее n расстояний $\overline{PP_\nu}$) имеет максимум, больший R, и минимум, меньший R. Единственное исключение представляет случай, когда все точки P_1, P_2, $\ldots$, P_n совпадают с центром круга.

140. (Продолжение.) Для максимума арифметического среднего

$$\frac{\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \ldots + \overline{PP_n}}{n}$$

n расстояний $\overline{PP_\nu}$ утверждение задачи 139 справедливо, однако для минимума оно несправедливо.

141. (Продолжение.) Для минимума гармонического среднего

$$\frac{n}{\dfrac{1}{\overline{PP_1}} + \dfrac{1}{\overline{PP_2}} + \ldots + \dfrac{1}{\overline{PP_n}}}$$

n расстояний $\overline{PP_\nu}$ утверждение задачи 139 справедливо, однако для максимума оно несправедливо.

142. Внутри области, ограниченной простой замкнутой линией уровня (т. е. линией, на всем протяжении которой $|f(z)| = \text{const.}$) и содержащейся вместе с границей в области регулярности функции $f(z)$, лежит по крайней мере один нуль этой функции, если только $f(z)$ не есть постоянная.

143. Пусть в плоскости задано n фиксированных точек P_1, $P_2, \ldots, P_n$ и P — переменная точка этой плоскости. Геометрическое место тех точек, для которых произведение расстояний

$$\overline{PP_1}\cdot\overline{PP_2}\ldots\overline{PP_n}=\text{const.},$$

называют «лемнискатой с n фокусами». (Обыкновенная лемниската соответствует случаю $n=2$, см. 4.) Показать, что лемниската с n фокусами не может состоять больше чем из n отдельных замкнутых кривых.

144. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$. Обозначим через z_0 ту точку окружности этого круга, в которой модуль функции $f(z)$ достигает своего максимума. Тогда $z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ вещественно и положительно. **[103, 132.]**

ГЛАВА 4

ИНТЕГРАЛ КОШИ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

§ 1. Интеграл Коши

145. Пусть

$$\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}},\quad z_\nu=a\omega^\nu,\quad \zeta_\nu=\frac{z_{\nu-1}+z_\nu}{2},$$

$$\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ z_0=z_n,\ a \text{ фиксировано},\ a\neq 0.$$

Вычислить сумму

$$\frac{z_1-z_0}{\zeta_1}+\frac{z_2-z_1}{\zeta_2}+\frac{z_3-z_2}{\zeta_3}+\ldots+\frac{z_n-z_{n-1}}{\zeta_n},$$

которая при $n\to\infty$ стремится к интегралу $\oint\frac{dz}{z}$, взятому вдоль окружности $|z|=|a|$.

146. Пусть k — целое число, отличное от -1, и L — простая замкнутая непрерывная кривая конечной длины, не проходящая через точку $z=0$ при $k\leqslant -2$; пусть, кроме того, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, z_n — последовательно расположенные точки кривой L. Рассматривая интеграл $\oint\limits_L z^k\,dz$ как предел сумм вида

$$z_1^k(z_1-z_0)+z_2^k(z_2-z_1)+\ldots+z_n^k(z_n-z_{n-1})\qquad (z_0=z_n)$$

[II **1**, II **2**], показать, что он равен нулю.

147. Вычислить интеграл

$$\oint\frac{dz}{1+z^4},$$

взятый по эллипсу

$$z=x+iy,\quad x^2-xy+y^2+x+y=0.$$

148. При $x>0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,d\vartheta}{x^2+\sin^2\vartheta}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

149. Доказать формулу

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos\vartheta)^n\cos n\vartheta}{1-r-2r\cos\vartheta}\,d\vartheta=\frac{2\pi}{\sqrt{1-2r-3r^2}}\left(\frac{1-r-\sqrt{1-2r-3r^2}}{2r^2}\right)^n,$$

$$-1<r<\frac{1}{3}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

150. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint \frac{(1-x^2-y^2)\,y\,dx+(1+x^2+y^2)\,x\,dy}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2},$$

взятый по эллипсу с фокусами $(0,\ -1)$ и $(0,\ +1)$.

151. При $0<\Re s<1$

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-ix}\,dx=\Gamma(s)\,e^{-\frac{i\pi s}{2}}.$$

152. При $n>1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx=\frac{1}{n-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

153. При $\mu>0$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\mu}\cos\alpha}\sin(x^{\mu}\sin\alpha)\,x^n\,dx=\frac{1}{\mu}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right)\sin\frac{(n+1)\,\alpha}{\mu}.$$

Рассмотреть, в частности, случай $\alpha=\mu\pi$.

154. Показать, что при $\mu>0$, $x>0$ (μ постоянно, x переменно)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\mu+1}\int_0^{+\infty} e^{-t^{\mu}}\cos xt\,dt=\Gamma(\mu+1)\sin\frac{\mu\pi}{2}.$$

155. Пусть $a>0$. Интеграл

$$J(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\alpha s}}{s^2}\,ds,$$

распространенный по параллельной мнимой оси прямой $s=a+it$, $-\infty<t<+\infty$, абсолютно сходится для всех вещественных значений α. Показать, что

$$J(\alpha)=\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \leqslant 0,\\ \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0.\end{cases}$$

156. Обозначим через $\mu(t)$ максимальный член ряда

$$1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots \qquad [11]$$

Пусть z — единственный положительный корень уравнения

$$\lambda-z-e^{-z}=0,$$

где $\lambda>1$. Тогда

$$\int_0^\infty \mu(t)\,e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{z}.$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{t\left(n+\frac{1}{2}-t\right)u}\sin\frac{u}{2}}{u}\,du=\begin{cases}1, & \text{если } n<t<n+1,\\ 0, & \text{если } t<n \text{ или } t>n+1.\end{cases}\right]$$

157. *Полиномы Лежандра* $P_n(x)$ могут быть определены как коэффициенты разложения

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=\frac{P_0(x)}{z}+\frac{P_1(x)}{z^2}+\frac{P_2(x)}{z^3}+\ldots+\frac{P_n(x)}{z^{n+1}}+\ldots \qquad [\text{VI } 91].$$

Вывести отсюда *формулу Лапласа* (VI 86)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(x+\alpha\sqrt{x^2-1}\right)^n\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

и *формулу Дирихле-Мелера*

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2(\cos t-\cos\vartheta)}}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos t)}}\,dt$$

$$(0<\vartheta<\pi)$$

(квадратные корни положительны).

158. Пусть $\mathfrak{S}$ — полуполоса, выделенная неравенствами

$$\Re z>0, \quad -\pi<\Im z<\pi,$$

и L — ее граница, состоящая из трех прямолинейных частей. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{e^\zeta}}{\zeta-z}\,d\zeta=E(z)$$

(где направление пути интегрирования таково, что $\mathfrak{S}$ остается справа) определяет некоторую функцию $E(z)$ и притом лишь в точках, лежащих влево от L. Показать, что $E(z)$ — целая функция, принимающая для вещественных z вещественные значения.

159. (Продолжение.) Показать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{e^{\zeta}}\,d\zeta = 1.$$

160. (Продолжение.) Доказать ограниченность функции

$$z^2\left(E(z)+\frac{1}{z}\right)$$

вне $\mathfrak{G}$ и функции

$$z^2\left(E(z)-e^{e^z}+\frac{1}{z}\right)$$

внутри $\mathfrak{G}$.

161. Положим

$$\frac{2^z}{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)} = f_n(z).$$

Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\oint\limits_{|z|=2n} f_n(z)\,dz}{\oint\limits_{|z|=2n} |f_n(z)|\,|dz|} = i,$$

где контуры обходятся в положительном направлении. [II 217.]

162. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$ и отлична от нуля на его границе $|z|=r$. Тогда максимальное значение, принимаемое выражением $\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$ на окружности $|z|=r$, будет не меньше числа нулей функции $f(z)$ внутри круга $|z|<r$.

163. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольные не равные друг другу комплексные числа и L — простая замкнутая непрерывная кривая, причем точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ содержатся внутри области, ограниченной этой кривой. Пусть, кроме того, функция $f(z)$ регулярна внутри указанной области и на L. Положив $\omega(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$, показать, что интеграл

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\,\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

представляет тот однозначно определенный полином $(n-1)$-й степени, который в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ совпадает с $f(z)$.

164. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая на отрезке $a\leqslant z\leqslant b$ вещественной оси и принимает на нем вещественные значения. Пусть, далее, L — некоторая простая замкнутая непрерывная кривая, содержащая внутри области, ограничиваемой ею, отрезок $a\leqslant z\leqslant b$, причем в этой области $f(z)$ регулярна. Показать, что, каковы бы ни были точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ отрезка $a\leqslant$

$\leqslant z \leqslant b$, всегда найдется такая точка z_0, $a \leqslant z_0 \leqslant b$, что

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}\,dz = \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz.$$

165. Пусть целая функция $F(z)$ удовлетворяет во всей плоскости $z=x+iy$ неравенству

$$|F(x+iy)| < Ce^{\rho|y|},$$

где C и ρ — положительные постоянные. Тогда

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{F(z)}{\sin\rho z}\right) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(-1)^n F\left(\frac{n\pi}{\rho}\right)}{(\rho z - n\pi)^2}.$$

Пример. $F(z) = \cos\rho z$.

166. Пусть нечетная целая функция $G(z)$ удовлетворяет во всей плоскости $z=x+iy$ неравенству

$$|G(x+iy)| < Ce^{\rho|y|},$$

где C и ρ — положительные постоянные. Тогда

$$\frac{G(z)}{2\rho z\cos\rho z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n G\left(\frac{(n+{}^1/_2)\pi}{\rho}\right)}{[(n+{}^1/_2)\pi]^2 - \rho^2 z^2}.$$

Пример. $G(z) = \sin\rho z$.

167. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant 1$. Показать, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} f(z)\ln z\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} f(z)(\ln z - i\pi)\,dz,$$

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = \frac{1}{e^{2\pi i k}-1}\oint_{|z|=1} z^k f(z)\,dz \qquad (k > -1,\ k \neq 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Здесь интегрирование по x производится по прямолинейному отрезку, соединяющему 0 и 1, а интегрирование по z — в положительном направлении вдоль единичной окружности, начинаясь в точке $z=1$ с той ветви $\ln z$, соответственно z^k, на которой положительным z соответствуют вещественные, соответственно положительные, значения этих функций.

168. Пусть функция $f(z)$, регулярная в единичном круге $|z| \leqslant 1$, подчинена условию

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta = 1.$$

Пусть, кроме того, $k>-1$. Тогда

$$\left|\int_0^1 x^k f(x)\,dx\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } k \text{ целое},\\[2mm] \dfrac{1}{2\,|\sin k\pi|}, & \text{если } k \text{ нецелое}. \end{cases}$$

169. Пусть $\alpha>-2$. Квадратичная форма бесконечного числа вещественных переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda+\mu+\alpha}$$

ограничена, т. е. существует такая постоянная M, не зависящая от n, что

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda+\mu+\alpha}\right|<M,$$

если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подчинены условию $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$; $n=1, 2, 3, \ldots$ При этом для целых α можно взять $M=\pi$, а для нецелых α можно взять $M=\dfrac{\pi}{|\sin\alpha\pi|}$.

170. Пусть функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ регулярны в области $\mathfrak{G}$ и в каждой содержащейся в ней ограниченной замкнутой области равномерно сходятся к функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ регулярна во всей области $\mathfrak{G}$.

171. Пусть в некоторой области $\mathfrak{G}$ плоскости $z=x+iy$ задана непрерывная комплексная функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ вещественных переменных x и y. Пусть, кроме того, известно, что интеграл

$$\oint f(z)\,dz,$$

взятый по любой окружности, содержащейся в $\mathfrak{G}$, равен нулю. Тогда $f(z)$ представляет собой аналитическую функцию от комплексного переменного z, регулярную во всей области $\mathfrak{G}$. [Вычислить изменение двойного интеграла

$$F_r(z)=\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant r^2} f(z+\xi+i\eta)\,d\xi\,d\eta$$

при варьировании вещественной, соответственно мнимой, части z.]

§ 2. Формулы Пуассона и Иенсена

172. Пусть функция $f(z)$ регулярна в открытом круге $|z|<1$, ограничена в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и, за исключением, быть может, конечного числа точек, непрерывна. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\,d\vartheta=f(0).$$

(Обобщение теоремы 118.)

173. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$. Тогда имеет место *формула Пуассона*

$$f(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\Theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\Theta - \vartheta) + r^2} \, d\Theta \qquad (0 < r < R).$$

174. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$. Тогда при $x > 0$

$$f(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\eta) \, d \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{x}.$$

175. Пусть функция $f(z)$, мероморфная в круге $|z| \leqslant 1$, регулярна и отлична от нуля в центре и на окружности этого круга. Пусть, далее, она имеет в этом круге нули $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (где нуль или полюс r-й кратности выписан r раз). Тогда имеет место *формула Иенсена*

$$\ln |f(0)| + \ln \frac{1}{|a_1|} + \ln \frac{1}{|a_2|} + \ldots + \ln \frac{1}{|a_m|} - \\ - \ln \frac{1}{|b_1|} - \ln \frac{1}{|b_2|} - \ldots - \ln \frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\vartheta})| \, d\vartheta.$$

[Около всех нулей и полюсов функции $f(z)$, находящихся в круге $|z| < 1$, как около центров, описываются окружности радиуса ε столь малого, чтобы эти окружности не пересекались ни между собой, ни с окружностью $|z| = 1$. Эти окружности соединяются с окружностью $|z| = 1$ не пересекающимися между собой путями (например, радиусами единичного круга, если аргументы всех нулей и полюсов различны; рис. 2). После удаления из круга $|z| < 1$ всех ε-кружков и соединительных путей остается односвязная область $\mathfrak{G}_\varepsilon$. Нужно взять тогда интеграл $\int \frac{\ln f(z)}{z} dz$ вдоль границы этой области в положительном направлении.]

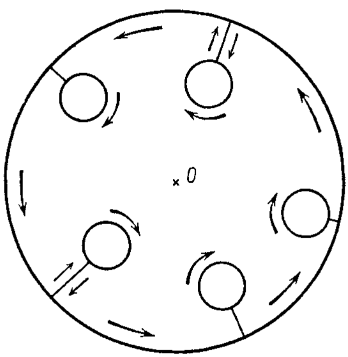

Рис. 2.

176. Пусть функция $f(z)$, мероморфная в круге $|z| \leqslant R$, регулярна и отлична от нуля на его границе, а внутри него имеет нули $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (где нуль или полюс r-й кратности выписан r раз). Показать, что если точка $z = re^{i\vartheta}$,

$r<R$, не является ни нулем, ни полюсом функции $f(z)$, то

$$\ln|f(z)|+\sum_{\mu=1}^{m}\ln\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{(a_\mu-z)R}\right|-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{(b_\nu-z)R}\right|=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\Theta})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\Theta-\vartheta)+r^2}\,d\Theta.$$

177. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в полуплоскости $\Re z\geqslant 0$, на границе ее регулярна и отлична от нуля, а внутри имеет нули $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (где нуль или полюс r-й кратности выписан r раз). Показать, что если $f(z)$ регулярна в бесконечности и, кроме того, регулярна и отлична от нуля в точке $z=x+iy$, $x>0$, то тогда

$$\ln|f(z)|+\sum_{\mu=1}^{m}\ln\left|\frac{z+\bar{a}_\mu}{z-a_\mu}\right|-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left|\frac{z+\bar{b}_\nu}{z-b_\nu}\right|=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|f(i\eta)|\,d\operatorname{arctg}\frac{\eta-y}{x}.$$

Указанная формула справедлива и при менее сильных предположениях о поведении $f(z)$ в бесконечности.

178. Пусть функция $f(z)$ в области

$$\mathfrak{B}:\qquad r\leqslant|z|\leqslant R,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant+\frac{\pi}{2}$$

регулярна, на границе отлична от нуля, а внутри области имеет нули

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\quad a_\mu=r_\mu e^{i\vartheta_\mu},\qquad \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Положим $\ln|f(\rho e^{i\vartheta})|=U(\rho,\ \vartheta)$. Показать, что

$$\sum_{r<r_\mu<R}\left(\frac{1}{r_\mu}-\frac{r_\mu}{R^2}\right)\cos\vartheta_\mu=\frac{1}{\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}U(R,\ \vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_r^R\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left[U\left(\rho,\ \frac{\pi}{2}\right)+U\left(\rho,\ -\frac{\pi}{2}\right)\right]d\rho+\chi(R);$$

здесь функция $\chi(R)$ при $R\to\infty$ остается ограниченной, r и $f(z)$ мыслятся постоянными. [Взять интеграл $\oint\ln f(z)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{R^2}\right)\frac{dz}{i}$ вдоль контура, аналогичного указанному в задаче **175**.]

§ 3. Принцип аргумента

179. Доказать теорему 25, исследуя изменение, претерпеваемое $\operatorname{arctg}\frac{V(x)}{U(x)}$, когда x пробегает вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть на плоскости z задана замкнутая ориентированная непрерывная кривая, не проходящая через точку $z=0$. Когда z, начиная с какой-либо произвольной точки кривой, обходит всю кривую в заданном направлении и возвращается к исходному пункту, то при этом аргумент точки z, непрерывно изменяясь, претерпевает в результате изменение на число, кратное 2π, т. е. на число $2n\pi$. Целое число n называют *числом обходов* кривой.

180. Каждый луч, исходящий из точки $z=0$, при обходе точкой z указанной кривой пересекается по меньшей мере $|n|$ раз.

В нижеследующих задачах (181—194) под L понимается простая замкнутая непрерывная кривая, под $\mathfrak{B}$ — ограниченная этой кривой замкнутая область.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в $\mathfrak{B}$, за исключением, быть может, конечного числа полюсов, а на L конечна и отлична от нуля. Когда z обходит кривую L в положительном направлении, то точка $w=f(z)$ описывает некоторую замкнутую непрерывную кривую. Ее число обходов равно числу нулей функции $f(z)$ в области $\mathfrak{B}$, уменьшенному на число полюсов. [*Принцип аргумента*, см. Hurwitz—Courant, стр. 84, 102 *).]

Теорема остается справедливой и в том случае, когда функция $f(z)$ на граничной кривой L только непрерывна и отлична от нуля.

181. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в области $\mathfrak{B}$, за исключением, быть может, конечного числа полюсов, а на граничной кривой L этой области конечны и отличны от нуля. Показать, что число обходов кривой, в которую переходит L при отображении $w=f(z)=\varphi(z)\psi(z)$, равно сумме чисел обходов кривых, получаемых при отображениях $w=\varphi(z)$ и $w=\psi(z)$ в отдельности.

182. Доказать принцип аргумента для полинома.

183. Из принципа аргумента вытекает: если $\varphi(z)$ в области $\mathfrak{B}$ регулярна и отлична от нуля, то число обходов кривой, описываемой точкой $\varphi(z)$, когда z пробегает кривую L, ограничиваю-

*) Гурвиц, стр. 117 и 144. Гурвиц—Курант, стр. 92 и 110.

щую эту область, равно нулю, т. е., иными словами, аргумент функции $\varphi(z)$ является однозначной функцией на кривой L. Вывести, обратно, общую формулировку принципа аргумента из этого частного случая.

184. Вещественный тригонометрический полином $a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta + a_{m+1}\cos(m+1)\vartheta + b_{m+1}\sin(m+1)\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$ обладает минимум $2m$ и максимум $2n$ нулями в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$. [Рассмотреть

$$P(z) = (a_m - ib_m) z^m + (a_{m+1} - ib_{m+1}) z^{m+1} + \ldots + (a_n - ib_n) z^n.]$$

185. Тригонометрический полином

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta,$$

где $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, имеет в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ $2n$ вещественных отличных друг от друга нулей. [22.] (Следовательно, имеет только вещественные нули: VI 14.)

186. Пусть функция $f(z)$ мероморфна внутри области $\mathfrak{B}$ и регулярна на ее граничной кривой L. Если $|a|$ превосходит максимум модуля $|f(z)|$ на кривой L, то внутри области, ограничиваемой L, $f(z)$ имеет ровно столько же a-точек (т. е. точек, в которых $f(z) = a$), сколько полюсов.

187. Функция

$$w = e^{\pi z} - e^{-\pi z}$$

в полуполосе

$$\Re r > 0, \quad -\frac{1}{2} < \Im z < \frac{1}{2}$$

принимает каждое значение w с положительной вещественной частью один и только один раз.

188. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant r$ и в различных точках контура $|z| = r$ принимает различные значения. Тогда кривая, в которую переходит окружность $|z| = r$ при отображении $w = f(z)$, обходится в том же направлении, что и эта окружность, и функция $f(z)$ однолистна во всем круге $|z| < r$.

189. Все нули целой функции $\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, за исключением точки $z = 0$, содержатся в области $\Re(z^2) < 0$. [*Спираль Корню.* См., например, P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2-е изд., стр. 180, Лейпциг, S. Hirzel, 1906.]

190. Пусть функция $f(z)$ в круговом кольце $r < |z| < R$ однозначна, регулярна и «выпускает» некоторое определенное значение a [т. е. не принимает этого значения]. Тогда все простые замкнутые непрерывные кривые плоскости z, целиком содержащиеся в указанном круговом кольце и охватывающие окружность $|z| = r$, переходят при отображении $w = f(z) - a$ в кривые плоскости w с одним и тем же числом обходов.

191. Пусть $f(z)$ регулярна в области $\mathfrak{B}$ и постоянна по модулю на граничной кривой L. Показать, что при обходе точкой z кривой L аргумент $f(z)$ изменяется монотонно. (Отсюда вытекает новое доказательство теоремы **142**.)

192. В предположениях задачи **191** функция $f(z)$ имеет в области, ограниченной кривой L, одним нулем больше, чем $f'(z)$. (Уточнение теоремы **142**.) Этому факту можно дать следующую геометрическую интерпретацию: число «ям», заключенных внутри простой замкнутой линии уровня поверхности модуля, на единицу превышает число «седловин».

193. Если функция $f(z)$ регулярна в области $\mathfrak{B}$, а $f'(z)$ в этой области не обращается в нуль, то $w=f(z)$ отнюдь не обязательно порождает однолистное отображение области $\mathfrak{B}$ [72]. Однако если $|f(z)|$ на границе области $\mathfrak{B}$ постоянно, то в этой области функция $f(z)$ однолистна.

§ 4. Теорема Рушэ

194. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ регулярны внутри области $\mathfrak{B}$ и непрерывны на граничной кривой L. Пусть, кроме того, на кривой L выполнено неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$. Тогда функция $f(z)+\varphi(z)$ имеет внутри области $\mathfrak{B}$ столько же нулей, сколько и $f(z)$.

195. Показать, что уравнение

$$ze^{\lambda-z}=1,$$

где λ вещественно и больше единицы, имеет в единичном круге $|z|\leqslant 1$ один единственный корень. Этот корень является вещественным и положительным.

196. Уравнение

$$\lambda-z-e^{-z}=0,$$

где λ вещественно и больше единицы, имеет в полуплоскости $\Re z\geqslant 0$ один единственный корень, являющийся, следовательно, вещественным.

197. Каждое отображение, преобразующее замкнутый единичный круг в область, целиком содержащуюся внутри единичного круга (и не обязательно однократно покрытую), имеет в точности одну неподвижную точку. Иными словами: если $f(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$ регулярна и по модулю меньше единицы, то уравнение $f(z)-z=0$ имеет в этом круге в точности один корень.

198. Функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ принимает в полуполосе

$$-d<\Im z<d, \quad \Re z<0$$

каждое значение бесконечное множество раз (d произвольно).

199. Пусть $f(t)$ — заданная в интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ вещественная функция, имеющая непрерывные первую и вторую производные. Если $|f(1)|>|f(0)|$, то целая функция

$$F(z)=\int_0^1 f(t)\sin zt\,dt$$

имеет бесконечное множество вещественных и лишь конечное число комплексных нулей; если же $0<|f(1)|<|f(0)|$, то она имеет лишь конечное число вещественных нулей, но зато уже бесконечное множество комплексных. [Нули $F(z)$ в отношении их вещественности или комплексности ведут себя совершенно так же, как и нули функции $f(0)-f(1)\cos z$.]

200. Пусть a — постоянная и $|a|>2{,}5$. Показать, что целая функция, определенная степенным рядом

$$1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^4}+\frac{z^3}{a^9}+\ldots+\frac{z^n}{a^{n^2}}+\ldots=F(z),$$

на границе каждого кругового кольца

$$|a|^{2n-2}<|z|<|a|^{2n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

отлична от нуля, а внутри него имеет в точности один нуль. [Исследовать максимальный член на окружности $|z|=|a|^{2n}$, I **117**.]

---

201. (Продолжение задачи **170**.) Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество содержащихся в $\mathfrak{G}$ нулей функций $f_n(z)$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Если предельная функция не равна тождественно нулю, то ее нули, лежащие внутри $\mathfrak{G}$, совпадают с предельными точками множества $\mathfrak{M}$, лежащими внутри $\mathfrak{G}$.

202. Пусть функции

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots$$

однолистны в единичном круге $|z|<1$ и в каждом внутреннем круге $|z|\leqslant r<1$ равномерно сходятся к некоторой предельной функции $f(z)$, не равной тождественно нулю. Тогда и функция $f(z)$ будет однолистной в круге $|z|<1$.

203. Пусть $g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_n(z),\ \ldots$ — целые функции, имеющие лишь вещественные нули. Если существует

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z)=g(z),$$

причем сходимость равномерна в каждой конечной области, то целая функция $g(z)$ также имеет лишь вещественные нули.

204. Целая функция

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\cos(a+\nu d)\,z,$$

где
$$0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n; \quad a \geqslant 0, \ d > 0,$$
имеет лишь вещественные нули.

205. Пусть $f(t)$ — положительная неубывающая функция, заданная в интервале $0 \leqslant t < 1$, причем интеграл $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ конечен. Показать, что целая функция
$$\int\limits_0^1 f(t) \cos zt \, dt$$
имеет лишь вещественные нули. [185.]

206. Пусть область $\mathfrak{B}$ содержит внутри отрезок $a \leqslant z \leqslant b$ вещественной оси. Пусть, далее, функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ регулярны в $\mathfrak{B}$, в вещественных точках z принимают вещественные значения и на отрезке $a \leqslant z \leqslant b$ все отличны от нуля. Если функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ равномерно сходятся в области $\mathfrak{B}$ к некоторой предельной функции $f(z)$, не равной тождественно нулю, то эта предельная функция $f(z)$ точно так же отлична от нуля на отрезке $a \leqslant z \leqslant b$. — Это утверждение не верно.

ГЛАВА 5

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Ряд Лагранжа и его применения

Степенной ряд
$$a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = w \quad (a_1 \neq 0),$$
круг сходимости которого не сводится к точке $z = 0$, взаимно однозначно и конформно отображает некоторую окрестность точки $z = 0$ на плоскость w. Поэтому зависимость между z и w может быть представлена в некоторой окрестности точки $w = 0$ также разложением
$$b_1 w + b_2 w^2 + \ldots + b_n w^n + \ldots = z,$$
где $a_1 b_1 = 1$. Для эффективного вычисления второго ряда посредством первого полагаем
$$\frac{1}{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1} + \ldots} = \varphi(z).$$
Так как $\varphi(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и $\varphi(0) \neq 0$, то из равенства
$$w = \frac{z}{\varphi(z)}$$

вытекает, что

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1} [\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}} \right]_{x=0}.$$

Вообще, если $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $z=0$, то имеем:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1} f'(x) [\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}} \right]_{x=0}. \qquad \text{(L)}$$

[*Ряд Бюрмана-Лагранжа, см.* Hurwitz-Courant, стр. 128 *).]

207. В предположениях и обозначениях предыдущей задачи имеем:

$$\frac{f(z)}{1 - w\varphi'(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left[\frac{d^n f(x) [\varphi(x)]^n}{dx^n} \right]_{x=0}.$$

Вывести эту формулу из формулы Лагранжа или, обратно, формулу Лагранжа из этой, правильно используя условия, при которых каждая из этих формул имеет место. [Из справедливости одной из этих формул для некоторой функции $f(z)$ непосредственно вытекает вторая формула для некоторой другой функции $f(z)$.]

208. Доказать формулу задачи **207** непосредственно, выражая коэффициенты при w^n с помощью интеграла Коши.

209. Разложить корень трансцендентного уравнения

$$ze^{-z} = w,$$

обращающийся при $w = 0$ в нуль, по возрастающим степеням w.

210. (Продолжение.) Разложить $e^{\alpha z}$, где α — произвольная постоянная, по степеням w.

211. Разложить по возрастающим степеням w тот корень x трехчленного уравнения

$$1 - x + wx^\beta = 0,$$

который при $w = 0$ обращается в единицу.

212. (Продолжение.) Разложить x^α, где α — произвольная постоянная, по степеням w. ($x^\alpha = y$ является решением трехчленного уравнения

$$1 - y^{\frac{1}{\alpha}} + wy^{\frac{\beta}{\alpha}} = 0.)$$

213. (Продолжение.) Рассмотреть частные случаи $\beta = 0, 1, 2, -1, \frac{1}{2}$ и вывести разложения **209, 210** путем предельного перехода из **211, 212**.

---

*) Гурвиц, стр. 184. Гурвиц-Курант, 141.

214. Найти сумму степенного ряда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\alpha)^n w^n}{n!}.$$

Каков радиус сходимости этого ряда?

215. Доказать теорему 156, опираясь на результаты задачи **214**.

216. Ряд

$$1+\binom{\alpha+\beta}{1}w+\binom{\alpha+2\beta}{2}w^2+\ldots+\binom{\alpha+n\beta}{n}w^n+\ldots$$

в случае, если α и β — рациональные числа, представляет алгебраическую функцию от w.

217. Выпишем последовательные степени трехчлена $1+w+w^2$ в треугольную таблицу

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ 1+\boldsymbol{w}+w^2 \\ 1+2w+\boldsymbol{3w^2}+2w^3+w^4 \\ 1+3w+6w^2+\boldsymbol{7w^3}+6w^4+3w^5+w^6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Тогда сумма средних членов (набранных в таблице жирным шрифтом) равна

$$1+w+3w^2+7w^3+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2w-3w^2}}.$$

218. Выпишем последовательные степени бинома $1+w$ в треугольную таблицу

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ 1+w \\ 1+\boldsymbol{2w}+w^2 \\ 1+3w+3w^2+w^3 \\ 1+4w+\boldsymbol{6w^2}+4w^3+w^4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(*треугольник Паскаля*). Определить сумму средних членов (набранных в таблице жирным шрифтом) и вообще сумму членов любого вертикального ряда.

219. Чему равны производящие функции полиномов $P_n(x)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, определенных следующими формулами:

1. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

(*полиномы Лежандра*);

2. $(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$

$$(\alpha>-1,\ \beta>-1)$$

(*полиномы Якоби*);

3. $e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$ $\qquad (\alpha>-1)$

(*обобщенные полиномы Лагерра*).

(См. VI 84, VI 98, VI 99. Под *производящей функцией* полиномов Лежандра понимают ряд

$$P_0(x)+P_1(x)w+P_2(x)w^2+\ldots+P_n(x)w^n+\ldots=$$
$$=1+xw+\frac{3x^2-1}{2}w^2+\ldots,$$

сумму которого как функцию от x и w нужно определить. Аналогично для остальных случаев.)

В следующих задачах будем пользоваться обычными обозначениями:

$$\Delta F(z)=F(z+1)-F(z),$$
$$\Delta^2F(z)=\Delta[\Delta F(z)]=F(z+2)-2F(z+1)+F(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^nF(z)=F(z+n)-\binom{n}{1}F(z+n-1)+$$
$$+\binom{n}{2}F(z+n-2)-\ldots+(-1)^nF(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

220. Для $F(z)=e^{sz}$, где s — достаточно малое по модулю постоянное число, имеют место следующие формулы:

1. $$F(z)=F(0)+\frac{z}{1!}\Delta F(0)+\frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2F(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\Delta^nF(0)+\ldots$$

2. $$F'(z)=$$
$$=\Delta F(z)-\frac{1}{2}\Delta^2F(z)+\frac{1}{3}\Delta^3F(z)-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^nF(z)+\ldots$$

3. $$F(z)=F(0)+\frac{z}{1!}F'(1)+\frac{z(z-2)}{2!}F''(2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z(z-n)^{n-1}}{n!}F^{(n)}(n)+\ldots \quad [210].$$

4. $$F(z)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots[z^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}F(-n)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\ldots[z^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\,\frac{\Delta^{2n-2}[F(-n+2)-F(-n)]}{2}$$

[212, 216].

221. Формулы 1, 2, 3 и 4 задачи **220** справедливы для любой целой рациональной функции $F(z)$ (в этом случае, конечно, ряды обрываются).

222. Формулы 1, 2 задачи **220** справедливы также для любой дробной рациональной функции $F(z)$, если только вещественная часть z превосходит вещественные части всех полюсов $F(z)$, расположенных на конечном расстоянии. При этом для справедливости формулы 1 необходимо наложить еще то ограничение, что $F(z)$ регулярна в точках $z=0, 1, 2, 3, \ldots$

Справедливы ли и формулы 3, 4 для дробных рациональных функций?

В задачах **223—226** положено

$$\Delta^n a_k = a_{k+n} - \binom{n}{1} a_{k+n-1} + \binom{n}{2} a_{k+n-2} - \ldots + (-1)^n a_k.$$

223. При произвольных коэффициентах a_k, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$(1-z)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta^n a_k z^{n+k}.$$

224. Пусть

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Показать, что

$$\frac{1}{1+t} F\left(\frac{t}{1+t}\right) = a_0 + \Delta a_0 t + \Delta^2 a_0 t^2 + \ldots + \Delta^n a_0 t^n + \ldots$$

225. Пусть

$$F(z) = a_0 + 2a_1 z + 2a_2 z^2 + \ldots + 2a_n z^n + \ldots$$

Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}} F\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right) =$$
$$= a_0 + \Delta^2 a_{-1} t + \Delta^4 a_{-2} t^2 + \ldots + \Delta^{2n} a_{-n} t^n + \ldots,$$

где положено $a_{-n} = a_n$.

226. Для

$$F(z) = 2a_1 z + 2a_2 z^2 + 2a_3 z^3 + \ldots + 2a_n z^n + \ldots$$

имеет место формула

$$\frac{1}{t} F\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right) = a_1 - a_{-1} + (\Delta^2 a_0 - \Delta^2 a_{-2})\, t +$$
$$+ (\Delta^4 a_{-1} - \Delta^4 a_{-3})\, t^2 + \ldots + (\Delta^{2n} a_{-n+1} - \Delta^{2n} a_{-n-1})\, t^n + \ldots,$$

где положено $a_{-n} = -a_n$.

227. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right)=\frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)}.$

228. $\sin \pi z$ является однозначной функцией от $w=z(1-z)$. Показать, что все коэффициенты разложения $\sin \pi z$ по степеням w (за исключением свободного члена) положительны [227].

229. Показать, что

$$\left[\frac{d^n(\pi-x)^{-n-1}\cos x}{dx^n}\right]_{x=0}>0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

§ 2. Вещественная часть степенного ряда

230. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<R$. Выразить коэффициенты $a_1,\ a_2,\ \ldots$ $\ldots,\ a_n,\ \ldots$ через вещественную, соответственно мнимую, часть $f(z)$ на окружности $|z|=r$, $0<r<R$.

231. (Продолжение.) Положим $\Re f(re^{i\vartheta})=U(r,\ \vartheta)$. Если $f(0)$ вещественно, то в круге $|z|<r$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(r,\ \vartheta)\frac{r+ze^{-i\vartheta}}{r-ze^{-i\vartheta}}\,d\vartheta.$$

232. (Продолжение.) Если $f(z)$ на окружности $|z|=r$ не обращается в нуль, а в круге $|z|<r$ имеет нули $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m$, то в этом круге

$$\ln f(z)=i\gamma+\sum_{\mu=1}^{m}\ln\frac{(z-c_\mu)\,r}{r^2-\bar{c}_\mu z}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\vartheta})|\frac{r+ze^{-i\vartheta}}{r-ze^{-i\vartheta}}\,d\vartheta,$$

где γ — некоторое вещественное постоянное число. [Получается из 231 так же, как 120 из 119.]

233. Пусть функция $f(z)$ регулярна и имеет положительную вещественную часть в открытом круге $|z|<R$ и, кроме того, непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant R$. Если вещественная часть функции $f(z)$ тождественно равна нулю на некоторой дуге граничной окружности, то мнимая часть $f(z)$ на этой дуге монотонно изменяется, а именно убывает при возрастании аргумента z.

234. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<R$. Положим $f(re^{i\vartheta})=U(r,\ \vartheta)+iV(r,\ \vartheta)$, где $U(r,\ \vartheta)$ и $V(r,\ \vartheta)$ вещественны. Тогда соотношение

$$\int_0^{2\pi}[U(r,\ \vartheta)]^2\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}[V(r,\ \vartheta)]^2\,d\vartheta$$

будет иметь место для всех r в интервале $0<r<R$, если оно удовлетворяется для $r=0$.

235. Пусть функция

$$f(z)=\frac{1}{2}+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<1$ и имеет в нем положительную вещественную часть. Тогда

$$|a_n|\leqslant 1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ни в одном из этих неравенств нельзя заменить единицу меньшим числом.

236. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<R$, причем в этом круге $\Re f(z)<A$. Тогда для всех r в интервале $0<r<R$ имеет место неравенство

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots\leqslant|a_0|+\frac{2r}{R-r}(A-\Re a_0).$$

Пример.

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1},\quad R=1,\quad A=0.$$

237. Пусть ряд Лорана

$$\psi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

сходится в кольцеобразной области $0<|z|<\infty$ (шаровая поверхность с изъятыми полюсами) и в точках $z=0$ и $z=\infty$ имеет существенные особенности. Обозначим максимум вещественной части функции $\psi(z)$ на окружности $|z|=r$ через $A(r)$. Тогда $A(r)$ при $r\to\infty$ возрастает быстрее любой сколь угодно большой степени r, а при $r\to 0$ — быстрее любой сколь угодно большой степени $\frac{1}{r}$. Более точно

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln A(r)}{\ln r}=+\infty,\qquad \lim_{r\to 0}\frac{\ln A(r)}{\ln\frac{1}{r}}=+\infty.$$

238. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<R$. Обозначим через $\Delta(f)$ наибольшее колебание вещественной части $f(z)$ в круге $|z|<R$, т. е. верхнюю грань для $|\Re f(z_1)-\Re f(z_2)|$ при $|z_1|<R$, $|z_2|<R$. Тогда

$$|a_1|R\leqslant\frac{2}{\pi}\Delta(f).$$

При этом постоянная $\frac{2}{\pi}$ здесь не может быть заменена меньшей. Какую геометрическую интерпретацию можно дать этой теореме?

239. Пусть функция

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<R$. Обозначим через $D(f)$ наибольшее колебание $f(z)$ в круге $|z|<R$, т. е. верхнюю грань для $|f(z_1)-f(z_2)|$ при $|z_1|<R$, $|z_2|<R$. Тогда

$$|a_1|R\leqslant\frac{1}{2}D(f).$$

При этом $\frac{1}{2}$ не может быть заменена здесь меньшей постоянной. Каков геометрический смысл этой теоремы?

240. Пусть функция $f(z)$ подчинена следующим условиям:

1. $f(z)$ регулярна и $|f(z)|\leqslant M$ в круге $|z-s|\leqslant r$.

2. $f(z)$ не обращается в нуль в замкнутом полукруге $|z-s|\leqslant r$, $\Re(z-s)\geqslant 0$.

3. $f(z)$ в круге $|z-s|\leqslant\frac{2}{3}r$ имеет нули $c_1, c_2, \ldots, c_l$.

Тогда

$$-\Re\frac{f'(s)}{f(s)}\leqslant\frac{2}{r}\ln\frac{M}{|f(s)|}-\sum_{\lambda=1}^{l}\Re\frac{1}{s-c_\lambda}.$$

[Можно принять, что $s=0$; **232, 120.**]

§ 3. Полюсы на границе круга сходимости

241. Если степенной ряд имеет своим кругом сходимости единичный круг, причем на границе этого круга лежат лишь полюсы первого порядка (и нет никаких других особенностей), то тогда последовательность коэффициента ограничена.

242. Если на границе круга сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ лежит лишь одна особая точка z_0, а именно полюс, то тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0.$$

243. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — степенное разложение рациональной функции, знаменатель которой (предположенный взаимно простым с числителем) имеет степень q. Пусть ρ будет радиус сходимости и A_n — наибольшее из q чисел $|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_{n-q+1}|$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=\frac{1}{\rho}$$

($\lim$, а не $\limsup$!).

244. Пусть ν_n — число не равных нулю из n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Если на границе круга сходимости степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ имеет лишь полюсы (и никаких других особенностей), то число этих полюсов $\geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n}$.

Пример.

$$1+z^k+z^{2k}+z^{3k}+\ldots=\frac{1}{1-z^k}.$$

245. Пусть коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ степенного ряда $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$ вещественны и на границе его круга сходимости имеются лишь два полюса $\rho e^{i\alpha}$ и $\rho e^{-i\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$ и никаких других особенностей. Обозначим число перемен знаков в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ через V_n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{n}=\frac{\alpha}{\pi}. \qquad \text{[VIII 14.]}$$

246. Если среди особых точек на границе круга сходимости имеется хотя бы один полюс, то степенной ряд не может сходиться ни в одной граничной точке.

247. Если степенной ряд

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

сходящийся в единичном круге, представляет функцию, регулярную в точке $z=1$, то ряд Дирихле

$$D(s)=a_1 1^{-s}+a_2 2^{-s}+\ldots+a_n n^{-s}+\ldots$$

(предполагаемый сходящимся для некоторых значений s) представляет целую функцию. Если $f(z)$ имеет в точке $z=1$ полюс h-го порядка, то $D(s)$ представляет мероморфную функцию, полюсами которой могут служить лишь точки $s=1, 2, 3, \ldots, h$ (лишь последняя необходимо будет полюсом), причем все полюсы — первого порядка. [Имеем $D(s)\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}f(e^{-x})\,dx$, см. II **117**; интеграл $\int\limits_0^\infty x^{s-1}f(e^{-x})\,dx$ при $\rho>0$ представляет собой целую функцию от s.]

§ 4. Тождественное обращение в нуль степенных рядов

248. Пусть числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ подчинена условию

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\sqrt{n}}=-h \qquad (h>0).$$

Тогда ряд

$$\Phi(s) = 2a_0 + a_1(e^s + e^{-s}) + a_2\left(e^{\sqrt{2}s} + e^{-\sqrt{2}s}\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_n\left(e^{\sqrt{n}s} + e^{-\sqrt{n}s}\right) + \ldots$$

сходится в бесконечной полосе

$$-h < \Re s < h$$

плоскости s и притом абсолютно и равномерно в каждой внутренней полосе $-h+\varepsilon \leqslant \Re s \leqslant h-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и представляет в этой бесконечной полосе аналитическую функцию $\Phi(s)$. Эта функция может быть тождественно равна нулю лишь в том случае, если все коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... равны нулю. [Вычислить

$$F(u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(s)\frac{e^{-us}}{s^2}\,ds \qquad (0 < a < h,\ u > 0); \qquad 155.]$$

249. Пусть степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

сходится внутри единичного круга, причем его значение вместе со значениями всех его производных стремится к нулю, когда z приближается по вещественной оси к точке $z=1$, т. е. $\lim\limits_{z\to 1} f^{(n)}(z) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда либо

1) $f(z)$ тождественно равна нулю, т. е. $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, либо

2) $z = 1$ есть особая точка функции $f(z)$.

Если указанный степенной ряд сходится в некотором круге, *большем*, чем единичный, т. е. если

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{n} < 0,$$

то необходимо имеет место случай 1). Вывести то же заключение из *более слабого* предположения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\sqrt{n}} < 0.$$

[Составить функцию $\Phi(s)$ задачи 248.]

250. Последнее утверждение задачи 249 уже несправедливо, если на коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... ряда $f(z)$ вместо условия $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\sqrt{n}} < 0$ наложено более слабое условие

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{n^\mu} < 0, \quad \text{где } 0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

[Положить

$$f(z) = \int\limits_0^\infty e^{-x^\mu \cos\mu\pi} \sin(x^\mu \sin\mu\pi)\, e^{-x(1-z)}\,dx; \qquad 153,\ \text{II } 222.]$$

§ 5. Распространение сходимости

Нижеследующие примеры показывают, что у последовательностей аналитических функций сходимость зачастую обладает свойством своеобразной «заразительности».

251. Если ряд

$$g(z)+g'(z)+g''(z)+\ldots+g^{(n)}(z)+\ldots$$

сходится хотя бы в одной точке регулярности функции $g(z)$, то эта функция является целой и ряд сходится в каждой точке, притом равномерно во всякой ограниченной области плоскости z.

252. Если последовательность

$$|g'(z)|,\quad \sqrt{|g''(z)|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|g^{(n)}(z)|},\ \ldots$$

ограничена хотя бы в одной точке, то $g(z)$ является целой функцией и последовательность остается ограниченной во всех точках плоскости z, причем всюду имеет один и тот же верхний предел.

253. Пусть

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$c_0,\quad c_1,\quad c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

— две бесконечные числовые последовательности, из которых вторая последовательность произвольна, а в первой $a_n \neq 0$, $a_m \neq a_n$ для $m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m\neq n$, и ряд

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$$

абсолютно сходится. Уравнениями

$$Q_n(a_0)=c_0,\quad Q_n(a_1)=c_1,\ \ldots,\ Q_n(a_n)=c_n$$

однозначно определяется полином $Q_n(z)$ степени $\leqslant n$. Если последовательность

$$Q_0(z),\quad Q_1(z),\quad Q_2(z),\ \ldots,\ Q_n(z),\ \ldots$$

сходится хотя бы в одной точке, отличной от $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$, то она сходится во всех точках z и притом равномерно во всякой ограниченной области плоскости z.

254. Пусть

$$\ldots,\ c_{-n},\ c_{-n+1},\ \ldots,\ c_0,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n,\ \ldots$$

— произвольная бесконечная в обе стороны числовая последовательность и $Q_{2n}(z)$ — полином степени $2n$, удовлетворяющий условиям

$$Q_{2n}(-n)=c_{-n},\ Q_{2n}(-n+1)=c_{-n+1},\ \ldots,\ Q_{2n}(0)=c_0,\ \ldots$$
$$\ldots,\ Q_{2n}(n-1)=c_{n-1},\ Q_{2n}(n)=c_n.$$

Если последовательность полиномов

$$Q_0(z),\ Q_2(z),\ Q_4(z),\ \ldots,\ Q_{2n}(z),\ \ldots$$

сходится хотя бы в двух различных нецелочисленных точках, то она сходится в каждой точке z и притом равномерно во всякой ограниченной области плоскости z.

255. Пусть даны произвольная числовая последовательность $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ и полином $Q_n(z)$ степени $\leqslant n$, однозначно определенный $n+1$ условиями

$$Q_n(0)=c_0,\ Q'_n(1)=c_1,\ Q''_n(2)=c_2,\ \ldots,\ Q_n^{(n)}(n)=c_n \quad \text{[VI 76, VI 75]}.$$

Если последовательность

$$Q_0(z),\ Q_1(z),\ Q_2(z),\ \ldots,\ Q_n(z),\ \ldots$$

сходится хотя бы в одной точке, отличной от $z=0$, то она сходится во всех точках z и притом равномерно во всякой ограниченной области плоскости z.

---

256. Пусть функции $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ в круге $|z|<1$ регулярны, отличны от нуля и все по модулю меньше единицы. Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=0$ во всем круге $|z|<1$ и притом равномерно во всяком внутреннем круге.

257. Пусть гармонические функции

$$u_0(x, y),\ u_1(x, y),\ u_2(x, y),\ \ldots,\ u_n(x, y),\ \ldots$$

регулярны и всюду положительны в некоторой области $\mathfrak{G}$ плоскости x, y. Если ряд

$$u_0(x, y)+u_1(x, y)+u_2(x, y)+\ldots+u_n(x, y)+\ldots$$

сходится хотя бы в одной точке области $\mathfrak{G}$, то он сходится во всей этой области и притом равномерно в каждой ее ограниченной замкнутой подобласти.

258. Пусть функции $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ регулярны в области $\mathfrak{G}$, причем вещественные части их в каждой ограниченной замкнутой подобласти равномерно сходятся. Тогда последовательность мнимых частей либо не сходится ни в одной точке, либо равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой подобласти.

§ 6. Сходимость в разделенных областях

259. Ряд

$$\frac{z}{1+z}+\frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)}+\frac{z^4}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}+$$
$$+\frac{z^8}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)}+\ldots$$

равномерно сходится в каждой замкнутой области, лежащей целиком внутри или целиком вне единичного круга, и имеет суммой z или 1, смотря по тому, будет ли $|z|<1$ или $|z|>1$. [I 14.]

260. Ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}x^n e^{-nx}}{n!},$$

где α — произвольное постоянное число $\neq 0$, равномерно сходится для всех положительных значений x. В интервале $0\leqslant x\leqslant 1$ он представляет функцию $e^{\alpha x}$, а в интервале $1<x<\infty$ — отличную от нее аналитическую функцию.

261. Последовательность функций с общим членом

$$f_n(z)=\frac{\left[\frac{n}{1}\right]1^z+\left[\frac{n}{2}\right]2^z+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]n^z}{n\,(1^{z-1}+2^{z-1}+\ldots+n^{z-1})}$$

равномерно сходится в каждой ограниченной замкнутой области, не содержащей точек мнимой оси.

262. Пусть

$$\varphi(z)=\alpha z+\beta\,\frac{1}{z},$$

где

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1.$$

Последовательность «итерированных функций»

$$\varphi(z),\ \varphi[\varphi(z)],\ \varphi\{\varphi[\varphi(z)]\},\ \ldots$$

сходится к $+1$ для $\Re z>0$, сходится к -1 для $\Re z<0$, наконец, расходится для $\Re z=0$.

§ 7. Порядок возрастания последовательностей полиномов

263. Пусть $z=re^{i\varphi}$ и $h(\varphi)$ — опорная функция неограниченной выпуклой области, рассмотренной в задаче **114**. Показать, что последовательность

$$\frac{\sqrt{z}\,(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)(z-n)}{n!}e^{-rh(\varphi)}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ограничена во всей полуплоскости $\Re z\geqslant 0$ [**12**, II **220**]; $h(\varphi)$ является наименьшей функцией угла φ, обладающей этим свойством.

264. Пусть $h(\varphi)$ — опорная функция выпуклой области задачи **115**; показать, что последовательность

$$z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)e^{-rh(\varphi)}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ z=re^{i\varphi})$$

ограничена во всей плоскости [**13**, II **221**]; $h(\varphi)$ является наименьшей функцией угла φ, обладающей этим свойством.

265. Пусть $h(\varphi)$ — опорная функция выпуклой области задачи 116. Показать, что во всей плоскости z выполняется неравенство

$$\left|1+\frac{z}{n}\right|^n e^{-rh(\varphi)} \leqslant 1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ z=re^{i\varphi}).$$

ГЛАВА 6

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Различные формулировки принципа максимума

На основе принципа аналитического продолжения значения, принимаемые аналитической функцией в различных частях ее области существования, связаны между собой теснейшим образом. Нельзя изменить течение функции в одной, сколь угодно малой части, чтобы вместе с этим не изменилось ее течение всюду. Мы можем, таким образом, сравнить аналитическую функцию с организмом, отличительной особенностью которого является как раз то, что воздействие на любую его часть вызывает солидарную реакцию всего целого. Мы могли, например, сравнить продолжение области сходимости [251—258] с распространением инфекции и т. д. Французский математик Борель сделал подобные сравнения предметом специальных остроумных рассмотрений[1]). Мы сейчас ознакомимся с тем, каким образом связаны между собой модули значений, принимаемых функцией в различных областях.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$. Через $M(r)$ обозначают максимум ее модуля на окружности $|z|=r$, $r<R$.

266. Максимум модуля $f(z)$ во всем круге $|z|\leqslant r$ равен $M(r)$.

267. $M(r)$ монотонно возрастает вместе с r, если только $f(z)$ не есть постоянная.

268. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной *) внешней круговой области $|z|>R$. Обозначим через $M(r)$ максимум модуля $f(z)$ на окружности $|z|=r$, $r>R$. Тогда $M(r)$ служит также максимумом модуля $f(z)$ для всей внешней круговой области $z\geqslant r$, причем $M(r)$ монотонно убывает вместе с r, если только $f(z)$ не есть постоянная.

269. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени. Тогда

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geqslant \frac{M(r_2)}{r_2^n} \quad (0<r_1<r_2).$$

Равенство имеет место только для полиномов вида cz^n.

---

[1]) É. Borel Méthodes et problèmes de théorie des fonctions, Paris, Gauthier-Villars, 1922. Introduction.

*) То-есть $f(z)$ регулярна также в точке $z=\infty$.

270. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени, причем в вещественном интервале $-1 \leqslant z \leqslant 1$

$$|f(z)| \leqslant M.$$

Тогда при всяком z за пределами этого интервала

$$|f(z)| \leqslant M(a+b)^n,$$

где a и b — полуоси эллипса с фокусами -1 и $+1$, проходящего через точку z.

Что дает эта теорема при $z \to \infty$?

271. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени, E_1 и E_2 — два софокусных эллипса с полуосями a_1, b_1 и a_2, b_2 ($a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$). Тогда, обозначая максимумы $|f(z)|$ на E_1 и E_2 соотвественно через M_1 и M_2, имеем:

$$\frac{M_1}{(a_1+b_1)^n} \geqslant \frac{M_2}{(a_2+b_2)^n}.$$

Вывести отсюда теоремы 269, 270.

272. Если аналитическая функция регулярна в замкнутом круге и не приводится к постоянной, то ее модуль в центре круга меньше арифметического среднего ее модулей на контуре.

273. Если модуль аналитической функции сохраняет постоянное значение на целой области (например, на круге), то сама функция является постоянной.

274. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и не обращаются в нуль в открытом круге $|z| < 1$. Пусть, кроме того, $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ вещественны и положительны. Если модули $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на окружности $|z| = 1$ совпадают, то тождественно $\varphi(z) = \psi z)$.

275. Пусть функция $f(z)$ регулярна и однозначна внутри некоторой замкнутой области $\mathfrak{B}$ и непрерывна во всех точках ее границы. Пусть M есть максимум модуля $f(z)$ на границе $\mathfrak{B}$. Тогда внутри области $\mathfrak{B}$

$$|f(z)| < M,$$

если только $f(z)$ не есть постоянная. [Сильнее, чем 135.]

276. Пусть ζ — внутренняя точка замкнутой области $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{R}$ — совокупность тех граничных точек, расстояние которых от ζ не превышает ρ. Пусть, далее, на окружности радиуса ρ с центром в точке ζ имеется дуга, не принадлежащая к $\mathfrak{B}$, длина которой $\geqslant \frac{2\pi\rho}{n}$, где n — целое число. Показать, что если функция $f(z)$ регулярна и однозначна внутри и непрерывна во всех точках границы области $\mathfrak{B}$ и притом в точках $\mathfrak{R}$ $|f(z)| \leqslant a$, а в остальных граничных точках $|f(z)| \leqslant A$, $a < A$, то имеет место неравенство

$$|f(\zeta)| \leqslant a^{\frac{1}{n}} A^{1-\frac{1}{n}}.$$

[Рассмотреть произведение $\prod_{\nu=0}^{n-1} f[\zeta+(z-\zeta)\omega^{-\nu}]$, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, в надлежаще выбранной области.]

277. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в угле $0<\arg z<\alpha$ и непрерывна в точках вещественной оси, причем при неограниченном возрастании x по положительным значениям $\lim f(x)=0$. Тогда

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0$$

равномерно в каждом угле $0\leqslant\arg z\leqslant\alpha-\varepsilon<\alpha$.

278. Пусть аналитическая функция $f(z)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(z)$ регулярна во всех точках некоторой области $\mathfrak{G}$;

2) $f(z)$ однозначна в $\mathfrak{G}$;

3) существует такое постоянное положительное число M, что, какова бы ни была точка на границе $\mathfrak{G}$ и сколь бы мало ни было положительное ε, всегда найдется такая окрестность рассматриваемой граничной точки, что для всех z, принадлежащих $\mathfrak{G}$ и попадающих в указанную окрестность, выполняется неравенство

$$|f(z)|<M+\varepsilon.$$

Тогда во всей области $\mathfrak{G}$

$$|f(z)|\leqslant M$$

и даже $|f(z)|<M$, если только $f(z)$ не есть постоянная. [Точнее, чем 275.]

279. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в круге $|z|<1$, причем в некотором секторе $\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\beta$, $\alpha<\beta$ равномерно

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta})=0.$$

Тогда $f(z)\equiv 0$.

§ 2. Лемма Шварца

280. Пусть в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна и $|f(z)|<1$. Если $f(0)=0$, то либо имеет место более сильное неравенство $|f(z)|<|z|$, либо $f(z)=e^{i\alpha}z$, где α вещественно.

281. Пусть $z=\varphi(\zeta)$, $w=\psi(\zeta)$ — два однолистных отображения единичного круга $|\zeta|<1$ на области $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ плоскостей z и w, причем центру круга $\zeta=0$ соответствуют точки $z=z_0$ и $w=w_0$. Пусть, далее, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — замкнутые области, в которые переходит при указанных отображениях круг $|\zeta|\leqslant\rho$, $0<\rho<1$. Если $w=f(z)$ есть регулярная в $\mathfrak{G}$ аналитическая функция, значения которой лежат в области $\mathfrak{H}$, причем $f(z_0)=w_0$, то эта функция $f(z)$ принимает в части $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$ значения, лежащие в части $\mathfrak{h}$

области $\mathfrak{H}$. Более того, эти значения лежат строго внутри $\mathfrak{h}$, если только $f(z)$ не совпадает с функцией, однолистно отображающей $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{H}$.

282. Пусть в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна и $|f(z)|< <1$. Тогда

$$|f(z)-f(0)| \leqslant |z| \frac{1-|f(0)|^2}{1-|f(0)|\,|z|} \quad (0<|z|<1).$$

Равенство может иметь место только для линейной функции вида

$$f(z)=\frac{e^{i\alpha}z+w_0}{1+\bar{w}_0 e^{i\alpha}z}$$

(α вещественно).

283. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$. Обозначим через $A(r)$ максимум вещественной части $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$, $0\leqslant r<R$. Тогда имеет место неравенство

$$A(r)\leqslant \frac{R-r}{R+r}A(0)+\frac{2r}{R+r}A(R) \quad (0<r<R),$$

где положено $\lim\limits_{r\to R-0} A(r)=A(R)$. [$A(r)$ монотонно возрастает вместе с r, 313.] Равенство имеет место только для линейной функции вида

$$f(z)=\frac{Rw_0+[\bar{w}_0-2A(R)]\,e^{i\alpha}z}{R-e^{i\alpha}z}$$

(α вещественно).

284. (Продолжение.) Для максимума модуля $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ имеет место неравенство

$$M(r)\leqslant M(0)+\frac{2r}{R-r}[A(R)-A(0)]\leqslant \frac{R+r}{R-r}M(0)+\frac{2r}{R-r}A(R).$$

285. Пусть в круге $|z|<R$ функция $f(z)$ регулярна, отлична от нуля и ограничена. Тогда

$$M(r)\leqslant M(0)^{\frac{R-r}{R+r}}M(R)^{\frac{2r}{R+r}} \quad (0<r<R),$$

где положено $\lim\limits_{r\to R-0} M(r)=M(R)$.

286. Пусть функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ регулярны, отличны от нуля и по модулю меньше единицы в круге $|z|<1$. Если ряд

$$f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)+\ldots$$

абсолютно сходится, то сходится также ряд

$$[f_1(z)]^2+[f_2(z)]^2+\ldots+[f_n(z)]^2+\ldots$$

и притом абсолютно при $|z|\leqslant\frac{1}{3}$.

287. Пусть в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна и ее вещественная часть положительна. Пусть, кроме того, $f(0)$ вещественно. Тогда

$$f(0)\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant \Re f(z)\leqslant f(0)\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

$$|\Im f(z)|\leqslant f(0)\frac{2|z|}{1-|z|^2},$$

$$f(0)\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant |f(z)|\leqslant f(0)\frac{1+|z|}{1-|z|}\quad (0<|z|<1).$$

Равенство может иметь место только для функции вида

$$f(z)=w_0\frac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z},$$

где w_0 и α вещественны и $w_0>0$.

288. Пусть в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна и $|\Re f(z)|<1$. Если $f(0)=0$, то выполняется более сильное неравенство

$$|\Re f(z)|\leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|\quad (0<|z|<1).$$

Кроме того,

$$|\Im f(z)|\leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}\quad (0<|z|<1).$$

Равенство может иметь место только для функции

$$f(z)=\frac{2}{i\pi}\ln\frac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z}$$

(α вещественно).

289. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и Δ — колебание ее вещественной части в этом круге, следовательно, для $|z_1|<R$, $|z_2|<R$

$$|\Re f(z_1)-\Re f(z_2)|<\Delta.$$

Тогда наибольшее колебание ее вещественной части во внутреннем круге $|z|\leqslant r$, $r<R$, подчинено неравенству

$$|\Re f(z_1)-\Re f(z_2)|\leqslant \frac{4\Delta}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r}{R}\quad (|z_1|\leqslant r,\ |z_2|\leqslant r).$$

Для наибольшего колебания мнимой части в том же круге имеем оценку

$$|\Im f(z_1)-\Im f(z_2)|\leqslant \frac{2\Delta}{\pi}\ln\frac{R+r}{R-r}\quad (|z_1|\leqslant r,\ |z_2|\leqslant r).$$

---

290. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ неограниченную область плоскости $z=x+iy$, симметричную относительно вещественной оси, выделяемую неравенствами

$$x>0,\qquad -k(x)<y<k(x),$$

где $k(x)$ — положительная непрерывная функция, определенная для $x\geqslant 0$. Тогда существует положительная непрерывная функция $h(x)$, зависящая только от $\mathfrak{Z}$, обладающая следующим свойством: для всякой функции $F(z)$, регулярной и ограниченной снизу в области $\mathfrak{Z}$, $|F(z)|>c$, $c>0$, отношение

$$\frac{\ln|F(x)|}{h(x)}$$

остается ограниченным сверху при возрастании x по положительным значениям до бесконечности. (Эта теорема особенно интересна в том случае, когда $k(x)$, монотонно убывая, стремится к нулю, так что область $\mathfrak{Z}$ принимает «языкообразную» форму; в самом деле, в то время как вдоль изолированно взятого луча аналитическая функция может возрастать сколь угодно сильно (IV 180), быстроте ее возрастания кладется определенный предел, поскольку оно происходит на пространстве целой «языкообразной» области. Этот результат можно несколько грубо выразить так: если ни одна из точек поверхности модуля в области $\mathfrak{Z}$ не должна опускаться ниже определенного уровня, то ни одна не сможет и слишком высоко подняться.)

291. Пусть функция $f(z)$ в единичном круге $|z|<1$ регулярна и по модулю меньше единицы, пусть, далее, она регулярна в точке $z=1$, наконец, пусть $f(0)=0$, $f(1)=1$. Тогда $f'(1)$ вещественно и $\geqslant 1$.

292. Пусть функция $f(z)$ в единичном круге $|z|<1$ регулярна и по модулю меньше единицы. Пусть, кроме того, $f(z)$ регулярна для $z=1$ и $f(1)=1$. Тогда $f'(1)$ вещественно и

$$f'(1)\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2}\geqslant\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\quad(|z|<1).$$

293. Пусть в верхней полуплоскости $\mathfrak{J}z>0$ функция $f(z)$ регулярна и имеет положительную мнимую часть, $\mathfrak{J}f(z)>0$. Пусть, кроме того, $f(z)$ регулярна в некоторой точке $z=a$ вещественной оси, причем $f(a)=b$, где b вещественно. Тогда $f'(a)$ вещественно и положительно, и в верхней полуплоскости $\mathfrak{J}z>0$ выполняется неравенство

$$\mathfrak{J}\frac{1}{b-f(z)}\geqslant\mathfrak{J}\frac{1}{(a-z)f'(a)}.$$

294. Пусть в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ регулярна, имеет нули $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и по модулю не превосходит M. Тогда в этом круге выполняется более сильное неравенство

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}\cdot\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2z}\cdots\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_nz}\right|M,$$

причем равенство может выполняться либо для всех точек круга $|z|<1$, либо ни для одной. (Теорема 280 получается отсюда как частный случай при $n=1$, $z_1=0$.)

295. Пусть в полуплоскости $\Re z>0$ функция $f(z)$ регулярна. имеет нули $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и удовлетворяет неравенству $|f(z)|\leqslant M$, Тогда в этой полуплоскости имеет место более сильное неравенство

$$|f(z)| \leqslant \left| \frac{z_1 - z}{\bar{z}_1 + z} \cdot \frac{z_2 - z}{\bar{z}_2 + z} \cdots \frac{z_n - z}{\bar{z}_n + z} \right| M,$$

причем равенство может либо выполняться для всех точек указанной полуплоскости, либо не выполняться ни для одной.

296. Функция, мероморфная в замкнутом круге и постоянная по модулю на его границе, является рациональной, а именно с точностью до постоянного множителя совпадает с произведением дробно-линейных функций, отображающих рассматриваемый круг на внутреннюю или внешнюю области единичной окружности.

297. Если в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и ограничена и обращается в нуль в точках $z_1, z_2, z_3, \ldots$, то тогда либо ряд

$$(1 - |z_1|) + (1 - |z_2|) + (1 - |z_3|) + \ldots$$

(сумма расстояний нулей до окружности единичного круга) — сходящийся, либо $f(z) \equiv 0$.

298. Если в полуплоскости $\Re z > 0$ функция $f(z)$ регулярна и ограничена и обращается в нуль в точках $z_1, z_2, z_3, \ldots$, лежащих внутри этой полуплоскости, но вне единичного круга: $\Re z_n > 0$, $|z_n| > 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то тогда либо ряд

$$\Re \frac{1}{z_1} + \Re \frac{1}{z_2} + \Re \frac{1}{z_3} + \ldots$$

— сходящийся, либо $f(z) \equiv 0$.

§ 3. Теорема Адамара о трех кругах

299. Сумма модулей нескольких аналитических функций достигает своего максимума на границе. Более подробно: пусть функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ регулярны и однозначны в ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$. Тогда функция

$$\varphi(z) = |f_1(z)| + |f_2(z)| + \ldots + |f_n(z)|,$$

непрерывная в этой области, на ее границе достигает максимума.

300. (Продолжение.) Если функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ не все постоянны, то $\varphi(z)$ достигает максимума строго на границе области $\mathfrak{B}$, т. е. значения ее внутри этой области будут по модулю меньше указанного максимума.

301. Пусть в пространстве заданы n фиксированных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и переменная точка P. Показать, что функция точки P

$$\varphi(P) = \overline{PP}_1 \cdot \overline{PP}_2 \ldots \overline{PP}_n$$

($\overline{PP}_\nu$ есть расстояние между P и P_ν) в каждой ограниченной замкнутой области достигает максимума на границе. (Обобщение теоремы 137.)

302. Пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\ldots$, $f_n(z)$ регулярны и однозначны в ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$. Показать, что функция

$$\varphi(z)=|f_1(z)|^{p_1}+|f_2(z)|^{p_2}+\ldots+|f_n(z)|^{p_n},$$

где p_1, p_2, $\ldots$, p_n — положительные числа, непрерывная в области $\mathfrak{B}$, достигает максимума на границе этой области и притом только на границе, если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\ldots$, $f_n(z)$ не все постоянные.

303. Пусть функция $f(z)$ регулярна в многосвязной ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$ и, кроме того, $|f(z)|$ [но не обязательно $f(z)$!] является в $\mathfrak{B}$ однозначной функцией. Тогда максимум модуля $f(z)$ достигается в одной из граничных точек области $\mathfrak{B}$. При этом, если $f(z)$ не постоянная, максимум не может достигаться ни в какой внутренней точке.

304. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$. Показать, что при $0<r_1<r_2<r_3<R$ выполняется неравенство

$$\ln M(r_2)\leqslant\frac{\ln r_2-\ln r_1}{\ln r_3-\ln r_1}\ln M(r_3)+\frac{\ln r_3-\ln r_2}{\ln r_3-\ln r_1}\ln M(r_1).$$

Иными словами, изображая $\ln M(r)$ как функцию от $\ln r$ в прямоугольной системе координат, мы получаем кривую, невогнутую снизу (*теорема Адамара о трех кругах*). [Исследовать $z^\alpha f(z)$, подобрав надлежащим образом α.]

305. (Продолжение.) $\ln M(r)$ является строго выпуклой функцией от $\ln r$, если только $f(z)$ не имеет вида az^α, где a и α — постоянные и α вещественно. Иными словами, лишь для этого исключительного случая в неравенстве задачи 304 может достигаться равенство.

306. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и не имеет вида cz^n, где c — постоянная. Показать, что функция

$$I_2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2\,d\vartheta$$

(арифметическое среднее квадрата модуля $|f(z)|^2$ на окружности $|z|=r$, $r<R$) монотонно возрастает вместе с r, причем $\ln I_2(r)$ является выпуклой функцией от $\ln r$.

307. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$. Показать, что функция

$$\mathfrak{G}(r)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta}$$

(геометрическое среднее модуля $f(z)$ на окружности $|z|=r$, $r<R$) не убывает при возрастании r, причем $\ln\mathfrak{G}(r)$ есть невогнутая снизу функция от $\ln r$.

308. Пусть $f(z)$ не тождественно постоянна и регулярна в круге $|z|<R$. Показать, что функция

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta \qquad (r<R)$$

монотонно возрастает при возрастании r, причем $\ln I(r)$ есть невогнутая снизу функция от $\ln r$. [299, 304.]

309. Отображение $w=f(z)$, где $f(z)$ не есть постоянная и регулярна в круге $|z|<R$, преобразует окружность $|z|=r$ $(r<R)$ плоскости z в некоторую кривую плоскости w с длиной $l(r)$. Показать, что отношение $\frac{l(r)}{2\pi r}$ монотонно возрастает вместе с r.

310. Пусть $f(z)$ не есть постоянная и регулярна в круге $|z|<R$. Показать, что функция

$$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta \qquad (r<R),$$

где p — положительное число, монотонно возрастает вместе с r, причем $\ln I_p(r)$ есть невогнутая снизу функция от $\ln r$. (Ср. частные случаи $p=2$ и $p=1$ и предельные случаи $p=0$ и $p=\infty$ в задачах **306**, **308**, **307**, **267** и **304**; аналогичный случай см. в **IV 19**.)

§ 4. Гармонические функции

311. Значения аналитической функции, регулярной в замкнутом круге $\mathfrak{K}$, не могут быть вещественны во всех точках на границе этого круга, если только функция не приводится к постоянной.

312. Если гармоническая функция регулярна в замкнутом круге, то ее абсолютное значение в центре круга не превосходит среднего арифметического ее абсолютных значений на границе. Когда имеет место равенство?

313. Пусть гармоническая функция регулярна и однозначна в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$. Показать, что она принимает как максимальное, так и минимальное значения на границе $\mathfrak{B}$ и притом только на границе, если не является тождественно постоянной.

314. Если гармоническая функция, регулярная и однозначная в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$, равна нулю во всех граничных точках этой области, то она тождественно равна нулю.

315. Описанное в решении **31** положение равновесия неустойчиво.

316. Пусть гармоническая функция, не приводящаяся к постоянной, однозначна в ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$.

Пусть, кроме того, она регулярна в этой области, за исключением конечного числа точек, в которых обращается в $-\infty$ (т. е. при приближении к этим точкам стремится к $-\infty$). В таком случае эта функция достигает максимума на границе.

317. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$ и отображает его на некоторую область плоскости w, граница которой звездообразна относительно точки $w=0$. Пусть, кроме того, $f(0)=0$. Тогда и образы концентрических окружностей $|z|=r$, $r<R$ будут звездообразны относительно $w=0$.

318. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$ и отображает его на некоторую выпуклую область плоскости w. Тогда каждая окружность, лежащая внутри круга $|z|<R$, отображается в выпуклую кривую.

319. Пусть

$$u_1(x, y), \quad u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y) \qquad (z=x+iy)$$

— произвольные гармонические функции, регулярные и однозначные в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$. Показать, что функция

$$|u_1(x, y)|+|u_2(x, y)|+\ldots+|u_n(x, y)|,$$

непрерывная в $\mathfrak{B}$, достигает максимума на границе этой области.

320. Пусть $A(r)$ — максимум, принимаемый на окружности $|z|=r$ гармонической функцией, регулярной в круге $|z|<R$ $(r<R)$. Показать, что при $0<r_1<r_2<r_3<R$ выполняется неравенство

$$A(r_2) \leqslant \frac{\ln r_2-\ln r_1}{\ln r_3-\ln r_1} A(r_3)+\frac{\ln r_3-\ln r_2}{\ln r_3-\ln r_1} A(r_1),$$

иными словами, что $A(r)$ есть невогнутая снизу функция от $\ln r$.

321. Вывести теорему Адамара о трех кругах (304) из теоремы 320 и обратно 320 из теоремы Адамара о трех кругах.

§ 5. Метод Фрагмена и Линделёфа

322. Пусть функция $f(z)$ регулярна в угловой области $-\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$ $(z=re^{i\vartheta})$ с заданным α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Пусть, кроме того:

1) существуют такие две положительные постоянные A и B, что в указанном угле $-\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$ выполняется неравенство

$$|f(z)|<Ae^{B|z|};$$

2) на границе угла (т. е. вдоль лучей $\vartheta=-\alpha$ и $\vartheta=\alpha$) выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

Тогда $|f(z)| \leqslant 1$ *во всем угле.*

Доказательство. Пусть λ — фиксированное число, удовлетворяющее неравенствам $1<\lambda<\frac{\pi}{2\alpha}$. Рассмотрим функцию сравнения e^{z^λ}, где имеется в виду та ветвь z^λ, для которой положительным z соответствуют положительные значения z^λ. Эта функция регулярна во всем замкнутом угле, за исключением точки $z=0$, где, однако, она непрерывна. На обоих крайних лучах, т. е. для $\vartheta=-\alpha$ и $\vartheta=\alpha$, имеем:

$$\left|e^{z^\lambda}\right|=e^{r^\lambda \cos\lambda\alpha}\geqslant 1,$$

так как $0<\lambda\alpha<\frac{\pi}{2}$. На дуге окружности $|z|=r$, $-\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\alpha$, имеем:

$$\left|e^{z^\lambda}\right|=e^{r^\lambda \cos\lambda\vartheta}\geqslant e^{r^\lambda \cos\lambda\alpha}.$$

(Функция сравнения e^{z^λ} *почти* удовлетворяет предположениям теоремы, не подходя, однако, под ее утверждение. Предположим, — что запрещено, — что $\lambda=1$ или $\lambda=\frac{\pi}{2\alpha}$; в первом из этих недозволенных предельных случаев выполнялось бы предположение 1), во втором — предположение 2), однако ни в одном случае оба предположения не выполняются одновременно и ни в одном случае функция e^{z^λ} не будет ограничена в рассматриваемом угле.)

Рассмотрим теперь функцию $f(z)\,e^{-\varepsilon z^\lambda}$, где ε — положительное число, в некоторой фиксированной точке z_0, лежащей внутри угла. Заключим эту точку в круговой сектор, ограниченный лучами $\vartheta=-\alpha$, $\vartheta=\alpha$ и отсекаемой ими дугой окружности $|z|=r$, где

$$r>|z_0|,\quad r>\left(\frac{2B}{\varepsilon\cos\lambda\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}},\quad r>\frac{\ln A}{B}.$$

На прямолинейной части границы сектора имеем согласно предположению 2)

$$\left|f(z)\,e^{-\varepsilon z^\lambda}\right|\leqslant 1\cdot e^{-\varepsilon r^\lambda \cos\lambda\alpha}\leqslant 1.$$

На дуге $|z|=r$ сектора вследствие предположения 1) и неравенств $\varepsilon r^\lambda\cos\lambda\alpha>2Br$, $e^{Br}>A$ имеем:

$$\left|f(z)\,e^{-\varepsilon z^\lambda}\right|<Ae^{Br}e^{-\varepsilon r^\lambda\cos\lambda\alpha}<Ae^{-Br}<1.$$

Следовательно, по принципу максимума также во внутренней точке z_0 сектора

$$\left|f(z_0)\,e^{-\varepsilon z_0^\lambda}\right|\leqslant 1.$$

Так как это неравенство справедливо для любого сколь угодно малого положительного ε, то теорема 322 доказана.

323. Утверждение предыдущей теоремы, а именно, что $|f(z)|\leqslant 1$ во всем угле, сохраняет силу, если предположение 1) заменить следующим, более слабым: требуется, чтобы неравенство

$$|f(z)| < Ae^{B|z|}$$

выполнялось не во всем угле, а лишь на заключенных в этом угле дугах окружностей $|z| = r_1$, $|z| = r_2$, ..., $|z| = r_n$, ..., где $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$. Какими более общими кривыми можно заменить эти круговые дуги?

324. Пусть предположение 2) задачи 322 изменено следующим образом: требуется, чтобы внутри угла $-\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$ существовали две выходящие из начала и в дальнейшем не пересекающиеся кривые Γ_1 и Γ_2, простирающиеся в бесконечность, вдоль которых $|f(z)| \leqslant 1$. Тогда при сохранении предположения 1) неравенство $|f(z)| \leqslant 1$ выполняется также во всей области, заключенной между Γ_1 и Γ_2.

325. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) существуют две такие положительные постоянные A, B, что во всей полуплоскости

$$|f(z)| \leqslant Ae^{B|z|};$$

2) для $r \geqslant 0$

$$|f(ir)| \leqslant 1, \quad |f(-ir)| \leqslant 1;$$

3)

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(r)|}{r} \leqslant 0.$$

Тогда во всей полуплоскости $\Re z \geqslant 0$

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 322 мы применили принцип максимума, введя один переменный параметр (число ε); теперь введем два параметра. Функция $|f(r)|e^{-\eta r}$ $(\eta > 0)$ переменного r при $r \to \infty$ стремится согласно условию 3) к нулю. Следовательно, она достигает своего максимума — обозначим его через F_η — в некоторой точке r_0 $(r_0 \geqslant 0)$. Если $r_0 = 0$, то согласно условию 2) $F_\eta \leqslant 1$. Выберем некоторое фиксированное число λ, $1 < \lambda < 2$ $\left(\text{например, } \lambda = \frac{3}{2}\right)$, и рассмотрим аналитическую функцию

$$f(z)\, e^{-\eta z} e^{-\varepsilon e^{-\frac{i\lambda\pi}{4}} z^\lambda}$$

$(\varepsilon > 0)$ в квадранте $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$. (Ветвь z^λ определяется, как в **322**.) Тогда в указанном квадранте

$$\left| f(z)\, e^{-\eta z} e^{-\varepsilon e^{-\frac{i\lambda\pi}{4}} z^\lambda} \right| = |f(z)\, e^{-\eta z}|\, e^{-\varepsilon r^\lambda \cos\left(\lambda\vartheta - \frac{\lambda\pi}{4}\right)},$$

$$\cos\left(\lambda\vartheta - \frac{\lambda\pi}{4}\right) \geqslant \cos\left(\pm\frac{\lambda\pi}{4}\right) > 0.$$

Отсюда на основании условий 1), 2), 3) тем же способом, как и при доказательстве теоремы **322** ($\varepsilon \to 0$), заключаем, что в квадранте $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ модуль $f(z) e^{-\eta z}$ не превосходит большего из чисел 1 и F_η. Но то же можно доказать и для квадранта $-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Мы утверждаем теперь, что $F_\eta \leqslant 1$. Действительно, если бы было $F_\eta > 1$, то во всей полуплоскости мы имели бы $|f(z) e^{-\eta z}| \leqslant F_\eta$, а в некоторой точке $z = r_0 > 0$ вещественной оси было бы $|f(r_0) e^{-\eta r_0}| = F_\eta$ (см. выше). Но этого не может быть, так как максимум не может достигаться во внутренней точке $z = r_0$. Таким образом, остается лишь одна возможность $F_\eta \leqslant 1$. В соединении с предыдущим это дает, что во всей полуплоскости $\Re z \geqslant 0$

$$|f(z) e^{-\eta z}| \leqslant 1.$$

Так как это неравенство выполняется для всех $\eta > 0$, то тем самым теорема доказана.

Заметим еще, что в условии 3) положительную вещественную ось можно было бы заменить любым лучом, выходящим из $z = 0$ и лежащим в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$. Каждый такой луч делит полуплоскость на два угла, оба с раствором меньше π, а только это и существенно [322, также 330].

326. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют две такие положительные постоянные A и B, что во всей полуплоскости

$$|f(z)| < A e^{B|z|};$$

2) при $r \geqslant 0$

$$|f(ir)| \leqslant 1, \quad |f(-ir)| \leqslant 1;$$

3) существует такой угол α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, что

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\alpha})|}{r} = -\infty.$$

Показать, что такая функция должна быть тождественно равна нулю. [Рассмотреть $e^{\omega z} f(z)$, $\omega > 0$.]

327. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют две такие положительные постоянные A и B, что во всей полуплоскости

$$|f(z)| < A e^{B|z|};$$

2) существуют две такие положительные постоянные C и γ, что для $r \geqslant 0$

$$|f(\pm ir)| \leqslant C e^{-\gamma r}.$$

Показать, что такая функция должна быть тождественно равна нулю. [Рассмотреть $f(z)\,e^{-\beta z \ln (z+1)}$.]

328. Функция $\sin \pi z$ является наименьшей из класса аналитических в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и обращающихся в нуль в точках $z=0, 1, 2, 3, \ldots$ Точнее говоря, имеет место следующая теорема:

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют две такие положительные постоянные A и B, что для $\Re z \geqslant 0$

$$|f(z)| < A e^{B|z|};$$

2) существуют две такие положительные постоянные C и γ, что для $r \geqslant 0$

$$|f(\pm ir)| \leqslant C e^{(\pi-\gamma) r};$$

3) $$f(0)=f(1)=f(2)=\ldots=f(n)=\ldots=0.$$

Тогда $f(z) \equiv 0$.

329. Пусть $\omega(x)$ — положительная функция положительной переменной x, возрастающая с возрастанием x и вместе с x стремящаяся к бесконечности. Показать, что не существует функции $f(z)$, регулярной в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$ и удовлетворяющей во всех точках этой полуплоскости неравенству

$$|f(z)| \geqslant e^{\omega(|z|)|z|}.$$

330. Пусть функция $f(z)$ регулярна во всех конечных точках угла $\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta$ и $|f(z)| \leqslant 1$ на лучах $\vartheta=\alpha$ и $\vartheta=\beta$. Пусть, кроме того, существует такая положительная постоянная δ, что выражение

$$|f(z)|\, \exp\left(-|z|^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}-\delta}\right)$$

ограничено в угле $\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta$.

Тогда во всякой внутренней точке этого угла

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

[Взять в качестве функции сравнения $\exp\left(z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}-\sigma}\right)$.]

331. Пусть $f(z)$ регулярна в угле $\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta$. Пусть, кроме того, $|f(z)| \leqslant 1$ на крайних лучах $\vartheta=\alpha$ и $\vartheta=\beta$, и для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое r_0, что для всех $r > r_0$ в нашем угле выполняется неравенство

$$|f(re^{i\vartheta})| < e^{\varepsilon r^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}.$$

Тогда, сверх того, во всем угле

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

[Применить метод доказательства теоремы 325.]

332. Пусть $g(z)$ — целая функция и $M(r)$ — максимум модуля $g(z)$ на окружности $|z|=r$. Если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\sqrt{r}} = 0,$$

то $g(z)$ не ограничена ни на каком луче. [В частности, также на отрицательной вещественной оси.]

333. Пусть функция $f(z)$ не есть постоянная и регулярна в полуполосе $\mathfrak{G}$, определяемой неравенствами

$$x \geqslant 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$(z=x+iy)$. Если существуют две такие постоянные A и a $(A>0$, $0<a<1)$, что в полуполосе $\mathfrak{G}$ выполняется неравенство

$$|f(x+iy)| < e^{Ae^{ax}},$$

и если, кроме того, на границе $\mathfrak{G}$ $\left(\text{т. е. для } x=0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right.$ и для $\left. x \geqslant 0,\ y = \pm\frac{\pi}{2}\right)$

$$|f(z)| \leqslant 1,$$

то внутри полосы $\mathfrak{G}$

$$|f(z)| < 1.$$

[Функция сравнения вида $e^{e^{bz}}$.]

334. Пусть $\omega(x)$ обладает теми же свойствами, что и в задаче 329. Показать, что каждая функция $f(z)$, регулярная в полуполосе

$$x \geqslant 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$(z=x+iy)$, должна по крайней мере в одной точке $z=x+iy$ этой полуполосы удовлетворять неравенству

$$|f(x+iy)| < e^{\omega(x)\, e^{x}}.$$

335. Пусть в задаче 278 условия, с одной стороны, ослаблены требованием, чтобы предположение 3) выполнялось не во всех без исключения граничных точках области $\mathfrak{G}$, а с возможным исключением конечного числа их $z_1, z_2, \ldots, z_n$, но, с другой стороны, усилены требованием существования такого положительного числа M', чтобы во всех внутренних точках области $\mathfrak{G}$ выполнялось неравенство

$$|f(z)| < M'.$$

(Интерес представляет лишь случай $M' > M$.) Показать, что при этих измененных условиях утверждение теоремы 278 $|f(z)| \leqslant M$, соответственно $|f(z)| < M$, остается в силе. [В случае, когда $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку, а все граничные точки области $\mathfrak{G}$ лежат в круге $|z|<r$, рассмотреть в качестве функции сравнения $(2r)^n \prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)^{-1}$.]

336. Пусть замкнутая область $\mathfrak{B}$ расположена в полуплоскости $\Im z \geqslant 0$, причем та часть ее границы, которая лежит на вещественной оси, состоит из конечного числа отрезков. Обозначим через Ω сумму углов, под которыми видны эти отрезки из внутренней точки ζ. Если $f(z)$ регулярна и однозначна внутри области $\mathfrak{B}$ и непрерывна на ее границе и если в вещественных граничных точках $|f(z)| \leqslant A$, а в остальных граничных точках $|f(z)| \leqslant a$, $0<a<A$, то тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant A^{\frac{\Omega}{\pi}} a^{1-\frac{\Omega}{\pi}}. \qquad [57.]$$

337. Пусть функция $f(z)$ регулярна в той части римановой поверхности функции $\ln z$, которая лежит над круговым кольцом $0<|z|\leqslant 1$. Если $f(z)$ ограничена в этом кольце и, в частности, $|f(z)|\leqslant 1$ на окружности $|z|=1$, то и во всем кольце $|f(z)|\leqslant 1$.

338. Пусть $g(z)$ — целая функция, не равная тождественно постоянной, и $\mathfrak{G}$ — область, на границе которой (точнее: в граничных точках, отличных от $z=\infty$) $|g(z)|=k$, а во внутренних точках $|g(z)|>k$, $k>0$. Тогда $\mathfrak{G}$ необходимо содержит в качестве граничной точки $z=\infty$ и $g(z)$ не ограничена в $\mathfrak{G}$.

339. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две непрерывные кривые, исходящие из некоторой общей начальной точки и простирающиеся в бесконечность, ограничивая вместе с точкой $z=\infty$ некоторую область (например, два луча, ограничивающие угол), причем эта область не имеет общих точек с отрицательной вещественной осью.

Пусть функция $f(z)$ регулярна на Γ_1, Γ_2 и в заключенной между ними области. Пусть, кроме того, $\lim f(z)=0$, когда $z\to\infty$ вдоль Γ_1 или Γ_2. Если $f(z)$ ограничена в области между Γ_1 и Γ_2, то тогда $\lim f(z)=0$, когда $z\to\infty$ по этой области.

[Рассмотреть $\frac{\ln z}{A+\varepsilon \ln z} f(z)$.]

340. Пусть Γ_1 и Γ_2 — кривые задачи 339. Если $f(z)$ регулярна и ограничена в области между Γ_1 и Γ_2 и если, кроме того, $\lim f(z)=a$, когда $z\to\infty$ вдоль Γ_1, и $\lim f(z)=b$, когда $z\to\infty$ вдоль Γ_2, то тогда $a=b$.

[Рассмотреть $\left(f(z)-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.]

РЕШЕНИЯ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. [См., например, W. Ahrens, Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik, стр. 34—40, Berlin, Julius Springer, 1918.] $4562 = A_{100}$ [2].

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\zeta^n = (1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\ldots+\zeta^x+\ldots)\times$$
$$\times(1+\zeta^2+\zeta^4+\zeta^6+\ldots+\zeta^{2y}+\ldots)\times$$
$$\times(1+\zeta^5+\zeta^{10}+\zeta^{15}+\ldots+\zeta^{5z}+\ldots)\times$$
$$\times(1+\zeta^{10}+\zeta^{20}+\zeta^{30}+\ldots+\zeta^{10u}+\ldots)\times$$
$$\times(1+\zeta^{20}+\zeta^{40}+\zeta^{60}+\ldots+\zeta^{20v}+\ldots)\times$$
$$\times(1+\zeta^{50}+\zeta^{100}+\zeta^{150}+\ldots+\zeta^{50w}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^5)(1-\zeta^{10})(1-\zeta^{20})(1-\zeta^{50})}.$$

Чтобы получить числовой результат, располагаем нужные члены разложений

$$(1-\zeta^{50})^{-1},\quad (1-\zeta^{50})^{-1}(1-\zeta^{20})^{-1},\quad (1-\zeta^{50})^{-1}(1-\zeta^{20})^{-1}(1-\zeta^{10})^{-1},\ \ldots$$

в виде таблицы.

3. $108 = B_8$ [4].

4. Число представлений числа n в виде суммы s слагаемых (с учетом их порядка), из которых каждое может принимать одно из четырех значений 1, 2, 3, 4, равно коэффициенту при ζ^n в разложении выражения

$$(\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4)^s.$$

Поэтому имеем:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\zeta^n = 1+(\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4)+(\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4)^2+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1-\zeta-\zeta^2-\zeta^3-\zeta^4}.$$

Для вычисления B_n пользуемся рекуррентной формулой

$$B_n = B_{n-1}+B_{n-2}+B_{n-3}+B_{n-4},$$

вытекающей как из последнего результата, так и из самого смысла величин B_n.

5. $4 = C_{78}$ [7].

6. $20 = D_{78}$ [8].

7. $\sum_{n=0}^{99} C_n\zeta^n = (1+\zeta)^2(1+\zeta^2)(1+\zeta^5)(1+\zeta^{10})^2(1+\zeta^{20})(1+\zeta^{50}).$

8. $$\sum_{n=-99}^{99} D_n\zeta^n = (\zeta^{-1}+1+\zeta)^2(\zeta^{-2}+1+\zeta^2)(\zeta^{-5}+1+\zeta^5)\times$$
$$\times(\zeta^{-10}+1+\zeta^{10})^2(\zeta^{-20}+1+\zeta^{20})(\zeta^{-50}+1+\zeta^{50}).$$

9. [См. Euler, Introductio in Analysin infinitorum*), гл. 16, De partitione numerorum; Opera Omnia, Серия 1, т. 8, стр. 313—338, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1922; далее, например, W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2-е издание, т. 1, стр. 88—98, т. 2, стр. 329, Leipzig, B. G. Teubner, 1910, 1918.] «Задача на размен денег»:

$$\frac{1}{(1-\zeta^{a_1})(1-\zeta^{a_2})\ldots(1-\zeta^{a_l})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\zeta^n.$$

Здесь A_n дает число решений диофантова уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_lx_l = n$$

в неотрицательных целых числах.

«Задача на почтовые марки»:

$$\frac{1}{1-\zeta^{a_1}-\zeta^{a_2}-\ldots-\zeta^{a_l}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\zeta^n.$$

Первая «задача на взвешивание» (все разновески на одной чашке весов):

$$(1+\zeta^{a_1})(1+\zeta^{a_2})\ldots(1+\zeta^{a_l}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\zeta^n.$$

Вторая «задача на взвешивание» (можно пользоваться обеими чашками весов):

$$(\zeta^{-a_1}+1+\zeta^{a_1})(\zeta^{-a_2}+1+\zeta^{a_2})\ldots(\zeta^{-a_l}+1+\zeta^{a_l}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\zeta^n.$$

10. Задача равносильна следующей: из p гирь весом в единицу каждая (однако отличающихся одна от другой, скажем, формой) составить различными способами вес в n единиц, пользуясь при этом одной чашкой весов. Согласно 9 искомое число C_n равно

*) Имеется русский перевод: Леонард Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, ОНТИ, 1936.

коэффициенту при ζ^n в биномиальном разложении

$$(1+\zeta)^p = 1 + \binom{p}{1}\zeta + \ldots + \binom{p}{n}\zeta^n + \ldots + \zeta^p,$$

т. е. равно

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!\,(p-n)!}.$$

11. Задача равносильна следующей: некто имеет монеты p различных лет чеканки; сколькими способами он может отсчитать n монет? Согласно 9 искомое число равно A_n, коэффициенту при ζ^n в разложении

$$\frac{1}{(1-\zeta)^p} = 1 + \binom{-p}{1}(-\zeta) + \ldots + \binom{-p}{n}(-\zeta)^n + \ldots,$$

т. е. равно

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1\cdot 2\ldots n} = \binom{p+n-1}{p-1}.$$

12. Согласно 11 искомое число равно

$$\binom{p+(n-p)-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}.$$

Можно было бы также непосредственно рассмотреть $(\zeta+\zeta^2+\ldots)^p$.

13. Тождественно с 11. Можно было бы также рассмотреть p-кратный ряд

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p = 0, 1, 2, 3, \ldots} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_p^{\nu_p} = (1-x_1)^{-1}(1-x_2)^{-1}\ldots(1-x_p)^{-1},$$

в котором затем положить все $x_1, x_2, \ldots, x_p$ равными ζ.

14. Согласно первой «задаче на взвешивание» [задача 9, распространенная на бесконечное множество гирь] речь идет о

$$(1+\zeta)(1+\zeta^2)(1+\zeta^4)(1+\zeta^8)\ldots =$$
$$= \frac{1-\zeta^2}{1-\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^4}{1-\zeta^2}\cdot\frac{1-\zeta^8}{1-\zeta^4}\cdot\frac{1-\zeta^{16}}{1-\zeta^8}\ldots = \frac{1}{1-\zeta} = 1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\ldots$$

См. также 16, 17.

15. $(\zeta^{-1}+1+\zeta)(\zeta^{-3}+1+\zeta^3)\ldots(\zeta^{-3^n}+1+\zeta^{3^n}) =$

$$= \zeta^{-1}\frac{\zeta^3-1}{\zeta-1}\zeta^{-3}\frac{\zeta^9-1}{\zeta^3-1}\ldots\zeta^{-3^n}\frac{\zeta^{3^{n+1}}-1}{\zeta^{3^n}-1} = \zeta^{-N}\frac{\zeta^{3^{n+1}}-1}{\zeta-1} =$$
$$= \zeta^{-N}+\zeta^{-N+1}+\ldots+\zeta^{N-1}+\zeta^N,$$

где $N = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

16. $a_n = q^{E_n}$, где E_n обозначает число единиц в представлении числа n по двоичной системе.

17. [E. Catalan, задача; Nouv. Corresp. Math., т. 6, стр. 143, 1880. Решение — E. Cesàro, там же, стр. 276.] Интересующий нас ряд может быть получен из

$$(1-a\zeta)(1-b\zeta^2)(1-c\zeta^4)(1-d\zeta^8)\ldots,$$

если положить $\zeta=1$. При определении знака можно положить $a=b=c=d=\ldots=1$. Тогда искомый знак будет согласно **16** равен $(-1)^{E_n}$, где через E_n обозначено число единиц в представлении числа n по двоичной системе.

18. $\dfrac{1-\zeta^{10}}{1-\zeta}\cdot\dfrac{1-\zeta^{100}}{1-\zeta^{10}}\cdot\dfrac{1-\zeta^{1000}}{1-\zeta^{100}}\ldots=\dfrac{1}{1-\zeta}.$

Эта задача не заключается в **9**. Она может быть перефразирована следующим образом: имеем в первой коробке гири в 1, 2, 3, ..., 9 единиц веса, во второй — в 10, 20, 30, ..., 90 и т. д. Сколькими способами можно составить из этих гирь, пользуясь одной лишь чашкой весов, заданный вес, беря из каждой коробки не более чем по одной гире?

19. [Euler, 1. c. 9.]

Первое решение. Согласно решению **14**

$$(1+\zeta)(1+\zeta^2)(+\zeta^4)(1+\zeta^8)\ldots=\frac{1}{1-\zeta},$$

$$(1+\zeta^3)(1+\zeta^6)(1+\zeta^{12})(1+\zeta^{24})\ldots=\frac{1}{1-\zeta^3}.$$

$$(1+\zeta^5)(1+\zeta^{10})(1+\zeta^{20})(1+\zeta^{40})\ldots=\frac{1}{1-\zeta^5}$$

и т. д.

Второе решение. Произведение

$$K(\zeta)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\zeta^n)(1-\zeta^{2n-1})$$

не меняется при замене ζ на ζ^2, ибо

$$1-\zeta^{4n-2}=(1+\zeta^{2n-1})(1-\zeta^{2n-1}).$$

Следовательно $[|\zeta|<1]$,

$$K(\zeta)=K(\zeta^2)=K(\zeta^4)=K(\zeta^8)=\ldots=K(0)=1.$$

20. [Euler, 1. c. 9.] Опираемся на смысл коэффициентов функций в **19**. Результат означает, что первая задача на взвешивание со всеми целыми положительными числами в качестве весов гирь допускает ровно столько решений, сколько задача на размен денег, где в качестве нарицательных стоимостей монет служат все нечетные числа.

21. Если мы отбросим ограничение «меньших», т. е. допустим еще представление $n=n$, то будем иметь перед собой «задачу на почтовые марки» [**9**]. Искомое число равно коэффициенту при ζ^n в разложении

$$\frac{1}{1-\zeta-\zeta^2-\ldots-\zeta^n},$$

или

$$\frac{1}{1-\zeta-\zeta^2-\zeta^3-\ldots}=\frac{1}{1-\frac{\zeta}{1-\zeta}}=$$
$$=\frac{1-\zeta}{1-2\zeta}=(1-\zeta)(1+2\zeta+4\zeta^2+\ldots)=$$
$$=1+\zeta+2\zeta^2+4\zeta^3+\ldots+2^{n-1}\zeta^n+\ldots$$

22. [E. Catalan, задача; Mathesis, т. 2, стр. 158, 1882. Решение — E. Cesàro, там же, т. 3, стр. 87, 1883.] Искомое число равно коэффициенту при ζ^n в разложении

$$\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)}+\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^3)}+\frac{\zeta^2}{(1-\zeta^3)(1-\zeta^4)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\zeta^\nu}{(1-\zeta^{\nu+1})(1-\zeta^{\nu+2})}+\ldots=\frac{1}{\zeta(1-\zeta)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\zeta^{\nu+1}}-\frac{1}{1-\zeta^{\nu+2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\zeta(1-\zeta)}\left(\frac{1}{1-\zeta}-1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\zeta^n.$$

23. [E. Catalan, Nouv. Ann., серия 3, т. 1, стр. 528, 1882. Решение — E. Cesàro, там же, серия 3, т. 2, стр. 380, 1883.] Искомое число равно коэффициенту при ζ^{n-1} в разложении

$$\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)}+\frac{\zeta^2}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^3)}+$$
$$+\frac{\zeta^4}{(1-\zeta^3)(1-\zeta^4)}+\ldots+\frac{\zeta^{2\nu}}{(1-\zeta^{\nu+1})(1-\zeta^{\nu+2})}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1-\zeta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\zeta^{\nu-1}\left(\frac{1}{1-\zeta^{\nu+1}}-\frac{1}{1-\zeta^{\nu+2}}\right)=\frac{1}{\zeta^2(1-\zeta)^2}-\frac{1}{\zeta^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^\nu}{1-\zeta^\nu}.$$

Имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^\nu}{1-\zeta^\nu}=\tau(1)\zeta+\tau(2)\zeta^2+\ldots+\tau(\nu)\zeta^\nu+\ldots,$$

где $\tau(\nu)$ обозначает количество делителей числа ν [VIII 74].

24. [E. Cesàro, задача; Mathesis, т. 2, стр. 208, 1882.] Речь идет о свободном (т. е. не зависящем от ζ) члене выражения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^{\nu^2-(2\nu+1)n}}{(1-\zeta^{\nu^2})(1-\zeta^{(\nu+1)^2})}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\zeta^{-(2\nu+1)n}+\zeta^{-(2\nu+1)(n-1)}+\zeta^{-(2\nu+1)(n-2)}+\ldots$$
$$\ldots+1+\zeta^{2\nu+1}+\zeta^{2(2\nu+1)}+\ldots)\left(\frac{1}{1-\zeta^{\nu^2}}-\frac{1}{1-\zeta^{(\nu+1)^2}}\right).$$

Следовательно, достаточно показать, что при $k \geqslant 1$ свободный член в сумме

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta^{-(2\nu+1)k}\left(\frac{1}{1-\zeta^{\nu^2}} - \frac{1}{1-\zeta^{(\nu+1)^2}}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\zeta^{-(2\nu+1)k} - \zeta^{-(2\nu-1)k}}{1-\zeta^{\nu^2}} + \frac{\zeta^{-k}}{1-\zeta}$$

равен единице. Но $(2\nu+1)k$, соответственно $(2\nu-1)k$, будет тогда и только тогда кратным ν^2, когда k делится на ν^2. Поэтому свободный член в сумме, стоящей в правой части, равен нулю, чем и доказана справедливость утверждения задачи.

25. [См. G. H. H a r d y, Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring's problem, стр. 9, 10, Oxford, 1920.] «Задача на размен денег» [9]. Полагаем $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; тогда

$$\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^3)} =$$

$$= \frac{1}{6(1-\zeta)^3} + \frac{1}{4(1-\zeta)^2} + \frac{17}{72(1-\zeta)} + \frac{1}{8(1+\zeta)} + \frac{1}{9(1-\omega\zeta)} + \frac{1}{9(1-\omega^2\zeta)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12} - \frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\zeta^n.$$

Имеем:

$$\left|-\frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right| \leqslant \frac{32}{72} < \frac{1}{2}.$$

26. [Теорема P. Paoli; см. Intermréd. des math., т. 1, стр. 247—248; Ch. H e r m i t e, задача; Nouv. Ann., серия 1, т. 17, стр. 32, 1858. Решение — L. R a s s i c o d, там же, серия 1, т. 17, стр. 126—130. 1858.] Доказывается труднее рассмотрениями типа **25** или **27** и легче на основании теоретико-числовых соображений. [Полезно также использовать VIII **7**.]

27. [См. L a g u e r r e, Oeuvres, т. 1, стр. 218—220, Paris, Gauthier-Villars, 1898.] Разложением на простейшие дроби, подобным проведенному в **25**, получаем для

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\zeta^n = (1-\zeta^{a_1})^{-1}(1-\zeta^{a_2})^{-1}\ldots(1-\zeta^{a_l})^{-1}$$

«главный член»

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_l}\,\frac{1}{(1-\zeta)^l}.$$

Так как $a_1, a_2, \ldots, a_l$ не имеют общего делителя, то знаменатели остальных членов будут самое большее степени $l-1$. Отсюда [решение III **242**] и вытекает утверждение. См. **28**. Следует заметить также, что l-мерная область, выделенная неравенствами

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_l \geqslant 0,$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_lx_l \leqslant n,$$

имеет l-мерный объем

$$\frac{1}{l!}\cdot\frac{n}{a_1}\cdot\frac{n}{a_2}\cdots\frac{n}{a_l}$$

и

$$A_n\sim\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{l!}\cdot\frac{n}{a_1}\cdot\frac{n}{a_2}\cdots\frac{n}{a_l}\right).$$

28. Полагаем в **11**, соответственно **12**, $p=3$.

29. Пусть k — целое неотрицательное. Число решений уравнения

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_p|=k$$

равно коэффициенту a_k при ζ^k в разложении

$$(1+2\zeta+2\zeta^2+2\zeta^3+\ldots)^p=\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^p=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k.$$

Следовательно, искомое число будет равно коэффициенту

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$$

при ζ^n в разложении

$$\frac{(1+\zeta)^p}{(1-\zeta)^{p+1}}=\frac{(2\zeta+1-\zeta)^p}{(1-\zeta)^{p+1}}=(2\zeta)^p(1-\zeta)^{-p-1}+$$
$$+\binom{p}{1}(2\zeta)^{p-1}(1-\zeta)^{-p}+\binom{p}{2}(2\zeta)^{p-2}(1-\zeta)^{-p+1}+\ldots,$$

т. е. равно

$$2^p\binom{n}{p}+2^{p-1}\binom{p}{1}\binom{n}{p-1}+2^{p-2}\binom{p}{2}\binom{n}{p-2}+\ldots+1.$$

30. G. Pólya, Math. Ann., т. 74, стр. 204, 1913]. Искомое число равно сумме коэффициентов при ζ^{-s}, ζ^{-s+1}, ..., 1, ..., ζ^{s-1}, ζ^s в разложении

$$(\zeta^{-n}+\zeta^{-n+1}+\ldots+\zeta^{-1}+1+\zeta+\ldots+\zeta^{n-1}+\zeta^n)^3.$$

Имеем вообще

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=-k}^{k}a_\nu\zeta^\nu\right)\zeta^{-r}\,dt=a_r\quad(\zeta=e^{it},\ -k\leqslant r\leqslant k)$$

и

$$\sum_{\nu=-m}^{m}\zeta^\nu=\frac{\zeta^{-\frac{2m+1}{2}}-\zeta^{\frac{2m+1}{2}}}{\zeta^{-\frac{1}{2}}-\zeta^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\qquad(\zeta=e^{it}).$$

31. [См. Ch. Hermite, задача; Nouv. Ann., серия 2, т. 7, стр 335, 1868. Решение — V. Schlegel, там же, серия 2, т. 8, стр. 91, 1869.] Так как $z=n-x-y$, то

$$x+y<n,\ x>0,\ y>0;$$

далее,

$$x \leqslant n-x, \quad y-x \leqslant n-x-y \leqslant x+y.$$

Отсюда следует, что искомое число равно числу решений неравенств

$$1 \leqslant x \leqslant \frac{n}{2}, \ \frac{n}{2}-x \leqslant y \leqslant \frac{n}{2}, \quad y>0, \ x+y<n.$$

32. Сравнением средних коэффициентов в тождестве

$$(1+z)^n (1+z)^n = (1+z)^{2n}.$$

33. Сравнением средних коэффициентов в тождестве

$$(1+z)^{2n}(1-z)^{2n} = (1-z^2)^{2n}.$$

34. Ясно.

35. Так как $x^{n|h} = h^n n! \begin{pmatrix} x \\ h \\ n \end{pmatrix}$, то $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n|h}}{n!} z^n = (1+hz)^{\frac{x}{h}}$.

Применяем 34.

36. См. 35.

37. Дифференцируем тождество

$$1-(1-x)^n = \binom{n}{1}x - \binom{n}{2}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}x^n$$

и полагаем $x=1$.

38. [Задача из Ed. Times, см. Mathesis, серия 2, т. 1, стр. 104, 1891. Решение — Greenstreet и др., там же, стр. 236.] Рассматриваемое выражение равно

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int_0^1 (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})\,dx =$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

39. Общий член суммы, стоящей в левой части равенства, служит коэффициентом при x^{2n+1} в $\frac{1}{2}(1+2x)^{n+k+1}(-x^2)^{n-k}$. Следовательно, дело сводится к вычислению коэффициента при x^{2n+1} в сумме

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(1+2x)^{n+k+1}(-x^2)^{n-k} = \frac{1}{2}(1+2x)^{n+1}\,\frac{(1+2x)^{n+1}-(-x^2)^{n+1}}{(1+x)^2},$$

или, иначе, в степенном ряде для выражения

$$\frac{1}{2}(1+2x)^{2n+2}(1+x)^{-2}.$$

Производя деление, получаем в качестве частного полином $2n$-й степени и в качестве остатка $\frac{1}{2}[1-(2n+2)(2x+2)]$. Коэффициент при x^{2n+1} в $\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2n+2}{1+x}$ равен $-\frac{1}{2}(2n+2)+2n+2=n+1$.

40. Разбиваем предложенную сумму на три части сообразно формуле

$$(\nu-n\alpha)^2=n^2\alpha^2-(2n\alpha-1)\nu+\nu(\nu-1).$$

Из формулы

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu q^{n-\nu}=(p+q)^n$$

и двух других, получающихся из нее последовательным дифференцированием по p, получаем, полагая $p=x$, $q=1-x$, значения указанных трех частей. См. II 144.

41. Достаточно взять, в частности,

$$\varphi(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-p+1)}{p!}=\binom{x}{p},\qquad \psi(x)=\frac{1}{2^p}\binom{x}{p}$$

и $n\geqslant p$. Тогда

$$\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n-p}{\nu-p}=\binom{n}{p}2^{n-p}=2^n\psi(n),$$

$$\sum_{\nu=p}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\sum_{\nu=p}^{n}(-1)^\nu\binom{n-p}{\nu-p}=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } n>p,\\ (-1)^n, & \text{если } n=p.\end{cases}$$

42. Частный случай задачи 40 при $x=\alpha=\frac{1}{2}$; также частный случай задачи 41 при

$$\varphi(x)=(2x-n)^2=n^2-4xn+4x^2=n^2-4(n-1)x+4x(x-1),$$
$$\psi(x)=n^2-2(n-1)x+x(x-1).$$

Имеем $\psi(n)=n$.

43. Частный случай задачи 41 при $\varphi(x)=(2x-n)^2$ [42]. Имеем $a_n=0$ при $n\neq 2$ и $a_n=4$ при $n=2$.

44. Пусть

$$f(x)=c_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Имеем:

$$\left(z\frac{d}{dz}-x_\nu\right)z^k=(k-x_\nu)z^k\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

45. [G. Darboux, задача; Nouv. Ann., серия 2, т. 7, стр. 138, 1868.] Имеем [44]: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{k!}z^k=f\left(z\frac{d}{dz}\right)e^z=e^zg(z)$, где $g(z)$ — целочисленный полином.

46. [Gesàro, стр. 872 *)]. Из рекуррентной формулы

$$f_{n+1}(z) = z\,[f_n'(z)(1-z) + (n+1) f_n(z)]$$

получаем для коэффициентов полинома $f_n(z) = a_1^{(n)}z + a_2^{(n)}z^2 + \ldots$ $\ldots + a_n^{(n)}z^n$ соотношение

$$a_\nu^{(n+1)} = \nu a_\nu^{(n)} + (n-\nu+2)\,a_{\nu-1}^{(n)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1),$$

$$a_0^{(n)} = a_{n+1}^{(n)} = 0.$$

Отсюда следует утверждение задачи, если принять во внимание, что $f_1(z) = z$. Значение для $f_n(1)$ получается из соотношения

$$f_{n+1}(1) = (n+1) f_n(1).$$

47. [См. N. H. Abel, Oeuvres, т. 2, Nouvelle édition, стр. 14, Christiania, Grøndahl & Son, 1881.] Если $g(x) = \text{const.}$, то утверждение задачи вытекает из 44. Если оно справедливо для полиномов низшей степени, чем $g(x)$, то полагаем:

$$g(x) = (x - x_1)\, g_1(x).$$

Имеем:

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right) y = g_1\left(z\frac{d}{dz}\right)\left[\left(z\frac{d}{dz} - x_1\right) y\right] =$$

$$= g_1\left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{f(0)}{g_1(0)} + \frac{f(1)}{g_1(1)}z + \frac{f(2)}{g_1(2)}z^2 + \ldots\right) = f\left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{1-z}.$$

Указанное дифференциальное уравнение разрешимо в квадратурах, ибо разрешимо в квадратурах уравнение

$$\left(z\frac{d}{dz} - x_0\right) y = zy' - x_0 y = \varphi(z).$$

48. Согласно 44 обе части равны

$$f(1)\,z + \frac{f(1)f(2)}{g(1)}z^2 + \frac{f(1)f(2)f(3)}{g(1)g(2)}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f(1)f(2)\ldots f(n-1)f(n)}{g(1)g(2)\ldots g(n-1)}z^n + \ldots$$

49. Положить в 48

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad g(x) = x^2.$$

50. Из функционального уравнения сравнением коэффициентов при z^n в обеих частях получаем:

$$A_n(q^n - 1) = A_{n-1}q^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ A_0 = 1),$$

откуда

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^n-1)} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

*) Чезаро, ч. 2, стр. 467.

51. Из функционального уравнения задачи 50 получаем:

$$B_n(1-q^n)=B_{n-1}q \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ B_0=1),$$

откуда

$$B_n=\frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

52. [Ch. Biehler; см. P. Appell et E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, стр. 398, Paris, Gauthier-Villars, 1897.] Обозначим рассматриваемое выражение через $\varphi_n(z)$. Имеем:

$$\varphi_n(q^2z)=\varphi_n(z)\frac{1+q^{2n+1}z}{qz+q^{2n}}.$$

Отсюда

$$C_\nu q^{2\nu+1}(1-q^{2n-2\nu})=C_{\nu+1}(1-q^{2n+2\nu+2}) \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$C_n=q^{n^2},$$

следовательно,

$$C_\nu=\frac{(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\ldots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n-2\nu})}q^{\nu^2} \qquad (\nu=0,\ 1,\ldots,\ n-1).$$

53. [Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, § 64, Werke, т. 1, стр. 234, Berlin, G. Reimer, 1881.] Предельным переходом при $n\to\infty$ из **52**. [181.]

54. [Euler, Commentationes arithmeticae, т. 1; Opera Omnia, серия 1, т. 2, стр. 249—250, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1915.] Частный случай задачи 53 при $z=-q^{\frac{1}{2}}$ и с заменой q на $q^{\frac{3}{2}}$.

55. [Gauss, Summatio quarumdam serierum singularium, Werke, т. 2, стр. 9—45, Göttingen, Ges. d. Wiss., 1863]. Частный случай задачи 53 при $z=q^{\frac{1}{2}}$ и с заменой q на $q^{\frac{1}{2}}$; применяем **19**.

56. [Jacobi, l. c. 53, § 66; Werke, т. 1, стр. 237.] Полагаем в 53 $z=-1$ и принимаем во внимание **19**.

57. Положим $a_n=-q^nz$. Тогда

$$\begin{aligned}
&1+G(z)-G(qz)=\\
&\quad=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^nz}{1-q^n}(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^{n-1}z)(q^n-1)=\\
&\quad=1+a_1+a_2(1+a_1)+a_3(1+a_1)(1+a_2)+\\
&\qquad+a_4(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)+\ldots=(1+a_1)(1+a_2)+\\
&\qquad+a_3(1+a_1)(1+a_2)+a_4(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)+\ldots=\\
&\quad=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)+a_4(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)+\ldots
\end{aligned}$$

и т. д.

58. Имеем:

$$D_0 = G(0) = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \ldots + \frac{q^n}{1-q^n} + \ldots$$

Принимая во внимание 50 и 57, получаем:

$$G(z) - G(qz) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n,$$

$$G(qz) - G(q^2 z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n q^n z^n,$$

$$G(q^2 z) - G(q^3 z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n q^{2n} z^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

откуда, складывая m первых уравнений и затем безгранично увеличивая m, находим:

$$G(z) - G(0) = \sum_{n=1}^{n} \frac{A_n}{1-q^n} z^n.$$

59. Имеем $G(1) = 0$. Из функционального уравнения 57 посредством полной индукции получаем:

$$G(q^{-n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)\left(1 - \frac{q}{q^n}\right) \ldots \left(1 - \frac{q^{k-1}}{q^n}\right) = -n, \quad q^{-1} = a.$$

Положим $(1-q)\,n = y$, $1 - \frac{y}{n} = q$; из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{-n}\right]\left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{-n+1}\right] \ldots$$

$$\ldots\left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{-n+k-1}\right] = -(1-q)\,n,$$

фиксируя y, получаем при $n \to \infty$, т. е. при $q \to 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1 - e^y)^k = -y. \qquad [181.]$$

60. Для справедливости формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2z)^{2n}}{(1+z^2)^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1}$$

необходимо (сравнение коэффициентов при z^{2n}), чтобы

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{2^{2k}}{2k+1} \binom{n+k}{n-k} = \frac{1}{2n+1}.$$

Имеем:

$$\frac{2n+1}{2k+1}\binom{n+k}{n-k}=\binom{n+k+1}{2k+1}+\binom{n+k}{2k+1}.$$

Применяем 39. И без употребления степенных рядов очевидно из формулы

$$f(z)=\frac{1}{2z}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

61. Из определения; для произведения принять во внимание 34.

62. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то

$$1+a_\nu z \ll e^{a_\nu z} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

На основании теоремы 61

$$(1+a_1z)(1+a_2z)\ldots(1+a_nz)\ll e^{(a_1+a_2+\ldots+a_n)z}.$$

Полагаем теперь $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n}$.

63. Из $A(z)\ll P(z)$ вытекает

$$\int_0^z A(z)\,dz \ll \int_0^z P(z)\,dz \quad \text{и} \quad e^{A(z)}\ll e^{P(e)}.$$

Основываясь на этом, из

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{2}\ll\frac{2}{1-z}$$

выводим:

$$\ln\frac{f(z)}{z}\ll\ln\frac{1}{(1-z)^2},\quad \frac{f(z)}{z}\ll\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

64. а) Из комбинаторного смысла определенных в 9 величин вытекает, что

$$0\leqslant C_n\leqslant A_n\leqslant B_n.$$

б) Первую половину утверждения выводим, перемножая соотношения

$$1+z^a\ll\frac{1}{1-z^a}=1+z^a+z^{2a}+\ldots$$

для $a=a_1, a_2, \ldots, a_l$ [61].

Вторая половина получается посредством перемножения соотношений

$$\frac{\left(1-z^{a_1}-z^{a_2}-\ldots-z^{a_{m-1}}\right)\left(1-z^{a_m}\right)}{1-z^{a_1}-z^{a_2}-\ldots-z^{a_{m-1}}-z^{a_m}}=$$

$$=1+\frac{\left(z^{a_1}+z^{a_2}+\ldots+z^{a_{m-1}}\right)z^{a_m}}{1-z^{a_1}-z^{a_2}-\ldots-z^{a_{m-1}}-z^{a_m}}\gg 1$$

при $m=2, 3, \ldots, l$, что дает:

$$\frac{\left(1-z^{a_1}\right)\left(1-z^{a_2}\right)\ldots\left(1-z^{a_l}\right)}{1-z^{a_1}-z^{a_2}-\ldots-z^{a_l}} \geqslant 1.$$

Умножаем дальше обе части получившегося соотношения на

$$\frac{1}{\left(1-z^{a_1}\right)\left(1-z^{a_2}\right)\ldots\left(1-z^{a_l}\right)}.$$

65. Ясно.

66. Пусть $s_n=0$ для $n\neq\nu$ и $s_\nu=1$; тогда $t_n=p_{n\nu}$ для $n\geqslant\nu$. Если и для этой специальной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n\nu}=0$; условие, таким образом, необходимо. Пусть, с другой стороны, это условие выполнено. Выберем такое N, чтобы для всех $n>N$ выполнялось неравенство $|s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — некоторое произвольное положительное число; возьмем, кроме того, n столь большим, чтобы все числа $p_{n0}, p_{n1}, \ldots, p_{nN}$ были меньше $\frac{\varepsilon}{4(N+1)M}$, где M — максимум абсолютной величины $|s_\nu|$. Тогда из

$$t_n-s=p_{n0}(s_0-s)+p_{n1}(s_1-s)+\ldots+p_{nn}(s_n-s)$$

мы получим:

$$|t_n-s|<(N+1)\,2M\frac{\varepsilon}{4(N+1)M}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}(p_{n,N+1}+p_{n,N+2}+\ldots+p_{nn})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

67. Частный случай теоремы 66 для $p_{n\nu}=\frac{1}{n+1}$.

68. Равносильно теореме 67: $\ln p_n=s_n$. Часто употребляется в следующей формулировке: если $a_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$, то также $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{a_n}=a$.

69. Частный случай теоремы 68. Положим:

$$p_0=1,\quad p_1=\left(\frac{2}{1}\right)^1,\quad p_2=\left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \ldots,\ p_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;$$

тогда

$$p_0p_1p_2\ldots p_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

70. Частный случай теоремы 66. Полагая

$$s_n=\frac{a_n}{b_n},\quad p_{n\nu}=\frac{b_\nu}{b_0+b_1+\ldots+b_n},\quad t_n=\frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{b_0+b_1+\ldots+b_n},$$

получаем:

$$\lim_{n\to\infty} p_{n\nu}=0.$$

71. Частный случай теоремы 70 при

$$a_n=(n+1)^{\alpha-1},\quad b_n=(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1^{\alpha}}{\frac{1}{n}}=\left(\frac{dx^{\alpha}}{dx}\right)_{x=1}=\alpha,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}.$$

72. [По поводу задач **72—74** см. N. E. Nörlund, Lunds Universitets Årsskrift, N. F., Avd. 2, т. 16, № 3, 1919.] Частный случай теоремы **66** для

$$p_{n\nu}=\frac{p_{n-\nu}}{p_0+p_1+\ldots+p_n}\leqslant\frac{p_{n-\nu}}{p_0+p_1+\ldots+p_{n-\nu}}.$$

73. Частный случай теоремы 66. Полагаем:

$$p_0+p_1+\ldots+p_n=P_n,\quad q_0+q_1+\ldots+q_n=Q_n,$$
$$r_0+r_1+\ldots+r_n=R_n.$$

Тогда [см. 74]

$$\frac{r_n}{R_n}=\frac{p_0q_n+p_1q_{n-1}+\ldots+p_nq_0}{p_0Q_n+p_1Q_{n-1}+\ldots+p_nQ_0}=p_{n0}\frac{q_0}{Q_0}+p_{n1}\frac{q_1}{Q_1}+\ldots+p_{nn}\frac{q_n}{Q_n},$$

где

$$p_{n\nu}=\frac{p_{n-\nu}Q_{\nu}}{p_0Q_n+p_1Q_{n-1}+\ldots+p_nQ_0}\leqslant\frac{p_{n-\nu}}{p_0+p_1+\ldots+p_{n-\nu}}.$$

74. Полагая

$$\mathfrak{p}_n=\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\ldots+s_np_0}{p_0+p_1+\ldots+p_n},\quad \mathfrak{q}_n=\frac{s_0q_n+s_1q_{n-1}+\ldots+s_nq_0}{q_0+q_1+\ldots+q_n},$$
$$\mathfrak{r}_n=\frac{s_0r_n+s_1r_{n-1}+\ldots+s_nr_0}{r_0+r_1+\ldots+r_n}$$

(r_n имеет то же значение, что и в 73), имеем:

$$\mathfrak{r}_n=\frac{p_nQ_0\mathfrak{q}_0+p_{n-1}Q_1\mathfrak{q}_1+\ldots+p_0Q_n\mathfrak{q}_n}{p_nQ_0+p_{n-1}Q_1+\ldots+p_0Q_n}=\frac{q_nP_0\mathfrak{p}_0+q_{n-1}P_1\mathfrak{p}_1+\ldots+q_0P_n\mathfrak{p}_n}{q_nP_0+q_{n-1}P_1+\ldots+q_0P_n},$$

и, следовательно [66, 73], $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{p}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{q}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{r}_n$.

Для вывода вышестоящих тождеств пользуемся степенными рядами, коэффициентами которых служат интересующие нас последовательности [34]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{l=0}^{\infty} p_l z^l = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{l=0}^{\infty} q_l z^l = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{l=0}^{\infty} r_l z^l = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} q_l z^l = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} Q_l z^l,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \mathfrak{p}_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} s_l z^l, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \mathfrak{q}_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} s_l z^l,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n \mathfrak{r}_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} q_l z^l \sum_{m=0}^{\infty} s_m z^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \mathfrak{q}_l z^l = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} P_l \mathfrak{p}_l z^l.$$

75. Положим:

$$t_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, n^{-\sigma}, \qquad s_n = a_1 1^{-\sigma} + a_2 2^{-\sigma} + \ldots + a_n n^{-\sigma}.$$

Тогда, обозначая сумму ряда через s, будем иметь:

$$t_n - n^{-\sigma}(n+1)^{\sigma}(s_n - s) = n^{-\sigma} \sum_{\nu=1}^{n} (s_\nu - s)\,[\nu^{\sigma} - (\nu+1)^{\sigma}] + n^{-\sigma} s;$$

это выражение стремится к нулю [66].

76. [E. Cesàro, Nouv. Ann., серия 3, т. 9, стр. 353—367, 1890.] Согласно **70** искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n P_n^{-1}}{\ln P_n - \ln P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n P_n^{-1}}{-\ln(1 - p_n P_n^{-1})}.$$

77. [I. Schur.] Положим:

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = P_n, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = Q_n,$$

и пусть $\beta > 0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} n q_n = \infty;$$

действительно, в противном случае мы имели бы:

$$q_n \sim \frac{q}{n}, \quad q > 0,$$

т. е. [76] $Q_n \sim q \ln n \to \infty$, в противоречие с предположением.

Также и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} n p_n = \infty$. (Для $\alpha > 0$ доказываем это как выше; для $\alpha = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} n p_n P_n^{-1} = \infty$, следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\infty$, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится.) Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} np_nq_n$ расходится. В случае $\alpha=0$, вследствие $nq_n<KQ_n$, где K не зависит от n, получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu p_\nu q_\nu < K\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu Q_\nu \leqslant KQ_n\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = KP_nQ_n,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu q_\nu}{n^2p_nq_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{np_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{nq_n}=0.$$

В случае $\alpha>0$ заменяем утверждение следующим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_nQ_n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu p_\nu q_\nu}=\alpha+\beta.$$

Применяем 70 к

$$a_n=P_nQ_n-P_{n-1}Q_{n-1},\quad b_n=np_nq_n,$$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{P_n}{np_n}+\frac{Q_n}{nq_n}-\frac{1}{n}\to\alpha+\beta=s.$$

78. Пример:

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=1.$$

Примем теперь, что $a_n\geqslant a_{n+1}$, $a_n\to 0$ и

$$a_1+a_2+\ldots+a_n-na_n\leqslant K$$

для всех $n=1, 2, 3, \ldots$ Пусть задано m; определим n так, чтобы выполнялось неравенство $a_n\leqslant\frac{1}{2}a_m$. Из

$$K\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_m-ma_n+(a_{m+1}+\ldots+a_n)-(n-m)a_n\geqslant$$
$$\geqslant m(a_m-a_n)\geqslant\frac{1}{2}ma_m$$

вытекает, что

$$a_1+a_2+\ldots+a_m\leqslant K+ma_m\leqslant 3K\quad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Мы имеем перед собой случай преобразования ряда при специальных условиях, к которым теорема 66 неприменима.

79. Содержит 65 как частный случай; доказательство аналогично. Если $p_{kl}=0$ при $l>k$, то преобразование последовательности s_n в последовательность t_n называется *конечным по строкам* (см. 65, 66); если $p_{kl}=0$ при $l<k$, то — *конечным по столбцам*.

80. Содержит 66 как частный случай; доказательство аналогично.

81. Положим $s_n = nc_n + (n+1)c_{n+1} + \ldots$ Тогда

$$t_n = \frac{1}{n}s_n + \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right)s_{n+1} + \left(\frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right)s_{n+2} + \ldots$$

Принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, получаем отсюда, что и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ [80].

82. [G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Palermo Rend., т. 41, стр. 50—51, 1916; см. также T. Carleman, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 15, № 11, 1920.] Пусть

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n, \quad \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = b_n,$$
$$b_0 + b_1(1-\alpha) + \ldots + b_n(1-\alpha)^n = t_n.$$

В теории функций доказывается [Hurwitz-Courant, стр. 32—33*)], что при $|y| < 1-\alpha$ имеем тождественно:

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1(\alpha+y) + a_2(\alpha+y)^2 + \ldots + a_n(\alpha+y)^n + \ldots$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^{n-k}y^k \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^l = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{1-(\alpha+y)}\sum_{l=0}^{\infty} a_l(\alpha+y)^l =$$
$$= (1-\alpha)^{n+1}\sum_{l=0}^{\infty} s_l(\alpha+y)^l.$$

Коэффициент при y^n в левой части есть t_n и в правой части есть

$$(1-\alpha)^{n+1}\left[s_n + \binom{n+1}{1}\alpha s_{n+1} + \binom{n+2}{2}\alpha^2 s_{n+2} + \right.$$
$$\left. + \binom{n+3}{3}\alpha^3 s_{n+3} + \ldots\right] = t_n.$$

Сумма в строке равна единице (биномиальная формула); преобразование конечно по столбцам (см. 79, решение).

83. См. аналогичные теоремы 65 и 79.

84. См. аналогичные теоремы 66 и 80.

85. Полагаем в 84

$$s_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \varphi_n(t) = \frac{b_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots}.$$

Пусть заданы ν и ε, $\varepsilon > 0$; выберем n столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n > \frac{b_\nu}{\varepsilon}.$$

---

*) Гурвиц, стр. 48—50. Гурвиц—Курант, стр. 39—41.

Тогда

$$\varphi_\nu(t) < \frac{b_\nu t^\nu}{b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n}.$$

Предел последнего выражения при $t \to 1$ будет меньше ε. Теорема сохраняет силу при любом радиусе сходимости $\rho > 0$.

86. [N. H. Abel, l. c. **47**, т. 1, стр. 223.] На основании 85 имеем:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} t^n} \to$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{1} = s.$$

87. [G. Frobenius, J. für Math., т. 89, стр. 262—264, 1880.] Из предположения вытекает, что $n^{-1}a_n$ ограничено. Поэтому при $|t| < 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится. На основании 85 получаем:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} t^n} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_0 + s_1 + \ldots + s_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = s.$$

88. Умножая числитель и знаменатель на $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots$ получаем:

$$\frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (b_0 + b_1 + \ldots + b_n) t^n} \to$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} = s.$$

89. Применение теоремы 156 к $\varphi(z) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{z}\right) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ показывает, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right]$$

сходится; это означает, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$$

существует и положителен. Полагаем в 85

$$a_n=n^{\alpha-1},\quad b_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}.$$

90. Рассматриваемый интеграл раскладывается по степеням k в следующий степенной ряд:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\right)^2k^{2n}.$$

Частный случай теоремы 85 для $a_n=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\right)^2$, $b_n=\frac{1}{n}$, $s=\frac{1}{2}$, $k^2=t$.

91. [См. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, стр. 353, формула (24), Leipzig, B. C. Teubner, 1913.] Из рекуррентных формул

$$A_{n+2}=(2n+1)A_{n+1}+aA_n,\quad B_{n+2}=(2n+1)B_{n+1}+aB_n,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\quad A_0=B_1=1,\quad A_1=B_0=0$$

получаем для функций $F(x)$, $G(x)$ дифференциальное уравнение

$$y''=2xy''+y'+ay.$$

Подстановкой $a(1-2x)=v^2$ приводим его к $\frac{d^2y}{dv^2}-y=0$; следовательно, $y=c_1e^v+c_2e^{-v}$, c_1, c_2 — постоянные. Отсюда

$$F(x)=\frac{e^{v-\sqrt{a}}+e^{-v+\sqrt{a}}}{2},\quad G(x)=\frac{-e^{v-\sqrt{a}}+e^{-v+\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}}.$$

Полагаем $2x=t$. Тогда теорема 85 применяется следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\frac{A_n}{n!}\frac{1}{2^{n-1}}}{n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{2^{n-1}}}=\lim_{t\to1-0}\frac{F'\left(\frac{t}{2}\right)}{G'\left(\frac{t}{2}\right)}=\sqrt{a}\,\frac{e^{\sqrt{a}}-e^{-\sqrt{a}}}{e^{\sqrt{a}}+e^{-\sqrt{a}}}.$$

Степенной ряд функции $G'\left(\frac{t}{2}\right)$ расходится при $t=1$, так как все его коэффициенты неотрицательны и $\lim\limits_{t\to1-0}G'\left(\frac{t}{2}\right)=\infty$.

92. Частный случай теоремы 88. Имеем:

$$(1-t)^{-\sigma}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\sigma+n-1}{n}t^n.$$

Так как

$$(1-t)^{-\sigma-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(b_0+b_1+\ldots+b_n)\,t^n,$$

то

$$b_0+b_1+\ldots+b_n=\binom{\sigma+n}{n}=\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+n)}{n!}\sim bn^{\sigma}\quad(b>0)$$

[решение 89]. Тем самым согласно 75

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_0+b_1+b_2+\ldots+b_n}=0.$$

93. Согласно решению 89

$$\lim_{t\to 1-0}(1-t)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left([\sqrt{n}]-2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right)t^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n}]-2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}}<0.$$

Этот предел равен $-\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{\pi}}{2}$, ибо

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}\sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.\qquad\text{[II 202.]}$$

94. Утверждение теоремы 85 сохраняет силу и в том случае, когда t стремится не к 1, а к $+\infty$. См. 84. Сумма ряда

$$b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots+b_nt^n+\ldots$$

при $t\to+\infty$ неограниченно возрастает, ибо все b_n положительны.

95. Применение теоремы 94 при $a_n=\frac{s_n}{n!}$, $b_n=\frac{1}{n!}$. [*Борелевское суммирование*; Кнорр, стр. 471*).]

96. Положим $s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$, $s_{-1}=0$. Тогда

$$\int_0^t e^{-x}g(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s_\nu-s_{\nu-1}}{\nu!}\int_0^t e^{-x}x^\nu\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu\int_0^t\left(\frac{x^\nu}{\nu!}-\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right)e^{-x}\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu\frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{-t}$$

(проинтегрировать вычитаемое по частям) [95].

97. Полагаем в 96

$$a_n=0,$$

*) См. по этому поводу также Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон Курс современного анализа, ч. I, стр. 196—198, Физматгиз, 1963.

если n нечетно, и
$$a_n = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m},$$
если $n = 2m$. Имеем:
$$s = \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)_{z=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Аналогично для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ получаем:
$$\int_0^\infty e^{-t} J_0(xt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

98. [Частный случай теоремы у M. Fekete, Math. Zeitschr., т. 17, стр. 233, 1923.] Достаточно рассмотреть случай, когда нижняя грань α конечна. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\frac{a_m}{m} < \alpha + \varepsilon$. Всякое целое число n может быть представлено в форме $n = qm + r$, где $r = 0$, или 1, или 2, ..., или $m-1$. Полагая для единообразия $a_0 = 0$, имеем:
$$a_n = a_{qm+r} \leqslant a_m + a_m + \ldots + a_m + a_r = qa_m + a_r,$$
$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leqslant \frac{qa_m + a_r}{qm+r} = \frac{a_m}{m} \frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n},$$
$$\alpha \leqslant \frac{a_n}{n} < (\alpha + \varepsilon) \frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n}.$$

99. Из неравенств $2a_m - 1 < a_{2m} < 2a_m + 1$ получаем:
$$\left| \frac{a_{2m}}{2m} - \frac{a_m}{m} \right| < \frac{1}{2m}. \qquad (*)$$
Ряд
$$\frac{a_1}{1} + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1}\right) + \left(\frac{a_4}{4} - \frac{a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_8}{8} - \frac{a_4}{4}\right) + \ldots = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{2^n}}{2^n} = \omega$$
сходится, ибо в силу неравенства (*) он мажорируется сходящимся рядом
$$|a_1| + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots$$
Запишем целое число n по двоичной системе:
$$n = 2^m + \varepsilon_1 2^{m-1} + \varepsilon_2 2^{m-2} + \ldots + \varepsilon_m \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m = 0 \text{ или } 1).$$
Согласно предположению
$$a_{2^m} + \varepsilon_1 a_{2^{m-1}} + \ldots + \varepsilon_m a_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m) \leqslant$$
$$\leqslant a_n \leqslant a_{2^m} + \varepsilon_1 a_{2^{m-1}} + \ldots + \varepsilon_m a_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m),$$
$$\left| \frac{a_n}{n} - \frac{2^m}{n} \frac{a_{2^m}}{2^m} - \frac{\varepsilon_1 2^{m-1}}{n} \frac{a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} - \ldots - \frac{\varepsilon_m}{n} \frac{a_1}{1} \right| \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n \ln 2}.$$

Применяя теорему 66 для данных

$$s_0=0,\ s_1=\frac{a_1}{1},\ \ldots,\ s_{m-1}=\frac{a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}},\ s_m=\frac{a_{2^m}}{2^m},\ \ldots,$$

$$p_{n0}=0,\ p_{n1}=\frac{\varepsilon_m}{n},\ \ldots,\ p_{n,m-1}=\frac{\varepsilon_1 2^{m-1}}{n},\ p_{nm}=\frac{2^m}{n},\ p_{n,m+1}=0,\ \ldots,$$

мы заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}a_n=\omega$. Наконец, в силу (*) имеем:

$$\left|\omega-\frac{a_m}{m}\right|\leqslant\left|\frac{a_{2m}}{2m}-\frac{a_m}{m}\right|+\left|\frac{a_{4m}}{4m}-\frac{a_{2m}}{2m}\right|+\ldots<\frac{1}{2m}+\frac{1}{4m}+\ldots=\frac{1}{m}.$$

100. [L. Fejér, C. R., т. 142, стр. 501—503, 1906.] Как будет видно из доказательства, достаточно рассмотреть случай, когда частичные суммы $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ ограничены. Пусть $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n=m$, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n=M$, l — целое положительное число, $l>2$ и $\delta=\frac{M-m}{l}$. Разобьем числовую прямую на l интервалов точками

$$-\infty,\ m+\delta,\ m+2\delta,\ \ldots,\ M-2\delta,\ M-\delta,\ +\infty.$$

Выберем столь большое N, чтобы для $n>N$ выполнялось неравенство $|s_n-s_{n+1}|<\delta$. Пусть, далее, s_{n_1} $(n_1>N)$ лежит в первом (бесконечном) интервале и s_{n_2} $(n_2>n_1)$ — в последнем (тоже бесконечном). Тогда числа конечной последовательности $s_{n_1}, s_{n_1+1}, \ldots, s_{n_2-1}, s_{n_2}$ не смогут «перепрыгнуть» ни один из $l-2$ промежуточных интервалов длиной δ. Аналогично рассуждаем и в том случае, когда последовательность будет не «медленно восходящей», а «медленно нисходящей».

101. [См. G. Szegö, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 23, стр. 361, 1914. Решение — P. Veress там же, серия 3, т. 25, стр. 88, 1917.] Интервал [0, 1]. См. **102.**

102. [G. Pólya, Palermo Rend., т. 34, стр. 108—109, 1912.] Существуют в сколь угодно большом удалении конечные последовательности $t_{n_1}, t_{n_1+1}, \ldots, t_{n_2}$, произвольно медленно нисходящие от верхнего предела последовательности к ее нижнему пределу. Подробнее — как в решении **100.**

103. $$\frac{\nu_n}{n+\nu_n}-\frac{\nu_{n+1}}{n+1+\nu_{n+1}}=$$
$$=\frac{n(\nu_n-\nu_{n+1})+\nu_n}{(n+\nu_n)(n+1+\nu_{n+1})}\leqslant\frac{\nu_n}{(n+\nu_n)(n+1+\nu_{n+1})}<\frac{1}{n}.\quad [102.]$$

104. Пусть рассматриваемая последовательность будет:

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots\ (\lim_{n\to\infty} s_n=s).$$

Выберем s_{ν_1} произвольно в интервале $\left[s-\frac{1}{2},\ s+\frac{1}{2}\right]$, вообще s_{ν_n} — произвольно в интервале $\left[s-\frac{1}{2^n},\ s+\frac{1}{2^n}\right]$; $\nu_1<\nu_2<\nu_3<\ldots$

Члены ряда

$$s_{\nu_1}+(s_{\nu_2}-s_{\nu_1})+(s_{\nu_3}-s_{\nu_2})+\ldots$$

не будут превышать соответственно членов сходящегося ряда

$$|s_{\nu_1}|+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

105. Какое бы число мы ни задали, слева от него будет находиться лишь конечное число членов последовательности, а среди конечного множества чисел существует одно или несколько наименьших.

106. При совпадении верхней и нижней граней рассматриваемой последовательности теорема тривиальна. Пусть поэтому они различны. Тогда по крайней мере одна из них отличается от предела последовательности. Она и будет равна наибольшему, соответственно наименьшему, члену последовательности.

107. Пусть задано целое положительное число m и η — наименьшее из чисел $l_1, l_2, \ldots, l_m$; $\eta>0$. Согласно предположению в рассматриваемой последовательности существуют члены, меньшие, чем η. Пусть n — наименьший номер, для которого $l_n<\eta$. Тогда

$$n>m;\ l_n<l_1,\ l_n<l_2,\ \ldots,\ l_n<l_{n-1}.$$

108. Применяем 105 к последовательности $l_k^{-1}, l_{k+1}^{-1}, l_{k+2}^{-1}, \ldots$

109. [G. Pólya, Math Ann., т. 88, стр. 170—171, 1923.] Мы будем называть l_m «выступающим» членом последовательности, если l_m больше всех последующих членов. Согласно предположению и 108 в первой последовательности содержится бесконечно много выступающих членов; пусть это будут:

$$l_{n_1},\ l_{n_2},\ l_{n_3},\ \ldots\ (l_{n_1}>l_{n_2}>l_{n_3}>\ldots).$$

Каждый невыступающий член l_ν заключается (для $\nu>n_1$) между двумя последовательными выступающими членами, скажем $n_{r-1}<\nu<n_r$. Имеем последовательно:

$$l_{n_r-1}\leqslant l_{n_r},\ l_{n_r-2}\leqslant l_{n_r},\ \ldots,\ l_\nu\leqslant l_{n_r},$$

значит,

$$l_\nu s_\nu<l_{n_r}s_{n_r}. \tag{*}$$

Отсюда заключаем, что

$$\limsup_{r\to\infty} l_{n_r}s_{n_r}=+\infty.$$

Действительно, в противном случае $l_{n_r}s_{n_r}$, значит, в силу (*) и вся последовательность $l_1s_1,\ l_2s_2,\ l_3s_3, \ldots$ были бы ограничены, что противоречит предположению. Применяем 107 к последовательности

$$l_{n_1}^{-1}s_{n_1}^{-1},\ l_{n_2}^{-1}s_{n_2}^{-1},\ \ldots,\ l_{n_r}^{-1}s_{n_r}^{-1},\ \ldots$$

и принимаем во внимание (*).

110. [По поводу задач **110—112** см. A. Wiman, Acta Math., т. 37, стр. 305—326, 1914; G. Pólya, там же, т. 40, стр. 311—319, 1916; G. Valiron, Ann. de l'Ec. Norm. Sup., серия 3, т. 37, стр. 221—225, 1920; W. Saxer, Math. Zeitschr., т. 17, стр. 206—227, 1923.]

Аналитически: имеем $\lim\limits_{m\to\infty}(L_m - mA) = +\infty$. Пусть минимум последовательности

$$L_0 - 0,\ L_1 - A,\ L_2 - 2A,\ L_3 - 3A,\ \ldots$$

будет $L_n - nA$ [105]; тогда

$$L_{n-\mu} - (n-\mu)A \geqslant L_n - nA, \quad L_{n+\nu} - (n+\nu)A \geqslant L_n - nA,$$

$\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 0$ исключено в силу предположений относительно A.

Геометрически: проведем из заданных точек лучи, направленные вертикально вверх, образуем наименьшую выпуклую область (бесконечный полигон), охватывающую их, и проведем к ней опорную прямую с угловым коэффициентом A [1]).

Пусть вершины (или одна из вершин), через которые проходят эти опорные прямые, будут (n, L_n). Прямые, соединяющие точки (n, L_n) с точками выпуклой области, лежащими слева, будут иметь меньший наклон, а соединяющие с точками, лежащими справа, — больший наклон, чем опорная прямая.

111. [См. G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 282, 1916.] Пусть

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_m = L_m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \quad L_0 = 0 \qquad [110].$$

Так как $L_1 - A < 0$, то $L_0 - 0$ не является минимумом в решении 110. $l_{n+1} \geqslant A$; поэтому l_{n+1}, а следовательно, и n должны стремиться к бесконечности одновременно с A.

112. Положим $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = L_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots, L_0 = 0$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{L_m - mA}{m} = -A$ [67]. Последовательность

$$L_0 - 0,\ L_1 - A,\ L_2 - 2A,\ \ldots,\ L_m - mA,\ \ldots$$

стремится к $-\infty$. Пусть ее наибольший член будет $L_n - nA$. Тогда интересующие нас неравенства будут выполняться для этого

---

[1]) Под *опорной прямой* замкнутого множества $\mathfrak{M}$ понимают прямую, имеющую все множество $\mathfrak{M}$ с какой-нибудь одной своей стороны и вместе с тем обладающую по крайней мере одной общей точкой с $\mathfrak{M}$. Таким образом, каждая опорная прямая определяет некоторую замкнутую полуплоскость, содержащую $\mathfrak{M}$. Общая часть (пересечение) всех этих полуплоскостей представляет собой выпуклую область $\mathfrak{K}$, — наименьшую, охватывающую $\mathfrak{M}$. Каждая опорная прямая множества $\mathfrak{M}$ будет опорной прямой области $\mathfrak{K}$ и обратно. Аналогично обстоит дело и тогда, когда множество $\mathfrak{M}$, как в данном случае, содержит бесконечно удаленную точку. См. III, гл, 3, § 1.

номера n. В последовательности $L_0, L_1, \ldots, L_m, \ldots$ содержится бесконечно много членов, превышающих все предыдущие [107]; пусть L_s будет один из них. Тогда числа

$$\frac{l_s}{1}, \quad \frac{l_{s-1}+l_s}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{l_1+l_2+\ldots+l_s}{s}$$

все положительны: коль скоро A меньше наименьшего из них, соответствующий A номер n больше или равен s. Точки (n, L_n) должны быть обтянуты теперь бесконечным выпуклым сверху полигоном.

113. Пусть S — интересующий нас верхний предел. Тогда а) $S \geqslant \lambda$. Для $S=\infty$ это ясно. Пусть S конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших m имеем $\ln m < (S+\varepsilon)\ln r_m$, следовательно,

$$r_m^{-S-\varepsilon} < m^{-1}, \quad r_m^{-S-2\varepsilon} < m^{-\frac{S+2\varepsilon}{S+\varepsilon}}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{-S-2\varepsilon} \text{ сходится},$$

т. е. $S+2\varepsilon \geqslant \lambda$, $S \geqslant \lambda$. С другой стороны, б) $S \leqslant \lambda$. Для $\lambda=\infty$ это ясно. Пусть λ конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} r_m^{-\lambda-\varepsilon}$ сходится, следовательно [139, $\varepsilon_n=1$], $mr_m^{-\lambda-\varepsilon} \to 0$, т. е. для достаточно больших m

$$\frac{\ln m}{\ln r_m} < \lambda+\varepsilon, \quad S \leqslant \lambda+\varepsilon, \quad S \leqslant \lambda.$$

114. Пусть $|x_m| = r_m$, $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$ Заключим каждое из чисел x_ν $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ в интервал длины δ с центром в x_ν. Эти интервалы не имеют общих внутренних точек и содержатся все целиком в $\left[-r_m-\frac{\delta}{2}, \; r_m+\frac{\delta}{2}\right]$. Поэтому

$$m\delta \leqslant 2r_m+\delta, \quad \text{т. е.} \quad \limsup_{m\to\infty} \frac{\ln m}{\ln r_m} \leqslant 1.$$

115. Согласно 113 $\lim\limits_{m\to\infty} mr_m^{-\beta}=0$. Полагаем в 107 $l_m=mr_m^{-\beta}$.

116. Имеем $\limsup\limits_{m\to\infty} mr_m^{-\alpha}=+\infty$. В противном случае существовало бы такое постоянное число K, что при всех m

$$mr_m^{-\alpha} < K$$

и, значит, для $\alpha < \alpha(1+\varepsilon) < \lambda$

$$\frac{1}{r_m^{\alpha(1+\varepsilon)}} < \frac{K^{1+\varepsilon}}{m^{1+\varepsilon}},$$

в противоречие с определением λ как показателя сходимости последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ Имеем, далее, $mr_m^{-\beta} \to 0$.

Полагаем теперь в **109**

$$l_m = \frac{m^{\frac{1}{\beta}}}{r_m}, \quad s_m = m^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}, \quad l_m s_m = \frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{r_m}.$$

117. Для $0 \leqslant x < r_1$, если $m=0$, и для $r_m < x < r_{m+1}$, если $m=1, 2, 3, \ldots$ Члены ряда, начиная с первого члена 1, последовательно возрастают до m-го (максимального) члена, а затем все время убывают.

118. Полагаем в **111** $l_m = \ln r_m - \ln s_m$, $k = n - \mu$, соответственно $n+\nu$, задаем A и определяем затем сначала n по **111** и потом r так, чтобы $A = \ln r - \ln s_n$. Что для $y = s_n$ n-й член является по абсолютной величине наибольшим во втором ряде, — ясно [117].

119. Пусть $p_n x^n$ — произвольный член ряда. Выбираем m так, чтобы $m > n$ и $p_m > 0$. Для $x > \sqrt[m-n]{\frac{p_n}{p_m}}$ будем иметь $p_m x^m > p_n x^n$.

120. Если при некотором значении x член $p_n x^n$ превосходит все предыдущие, т. е. выполняются одновременно неравенства

$$x^\nu (p_n x^{n-\nu} - p_\nu) \geqslant 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

то то же будет иметь место и при всех бо́льших значениях x.

121. Пусть m произвольно, x выбрано так, что $p_m x^m$ является максимальным членом. Тогда

$$p_m \rho^m \geqslant p_m x^m \geqslant p_0, \quad \frac{1}{p_m} \leqslant \frac{\rho^m}{p_0}.$$

С другой стороны, $p_m (\theta\rho)^m$, где $0 < \theta < 1$, ограничено при $m \to \infty$. Из этих двух замечаний заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{p_m} = \frac{1}{\rho}.$$

122. [L. c. 110.] Пусть n будет центральной индекс ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{b_m} z^m$ для некоторого определенного положительного $\bar{z}$ [121] и $\bar{y} > 0$ — значение, для которого n является также центральным индексом ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m y^m$. При $\bar{x} = \bar{z}\bar{y}$ будем иметь:

$$\frac{a_k}{b_k} \frac{\bar{x}^k}{\bar{y}^k} \leqslant \frac{a_n}{b_n} \frac{\bar{x}^n}{\bar{y}^n}, \quad b_k \bar{y}^k \leqslant b_n \bar{y}^n \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

123. [L. c. 110.] Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ — последовательные значения, принимаемые центральным индексом ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{b_m} z^m$. Пусть, далее, члены с указанными номерами являются максимальными соответственно в интервалах $(0, \zeta_1)$, (ζ_1, ζ_2), (ζ_2, ζ_3), ..., (ζ_{k-1}, ζ_k), ..., и $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, \ldots$ — значения, для которых максимальными являются члены с теми же номерами в ряде $\sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m$. Способом, примененным в решении **122**, этим значениям y_k относятся значения x, лежащие соответственно в интервалах

$$(0, y_1\zeta_1), \ (y_2\zeta_1, y_2\zeta_2), \ (y_3\zeta_2, y_3\zeta_3), \ \ldots, \ (y_k\zeta_{k-1}, y_k\zeta_k), \ \ldots$$

Тогда исключительные значения x^*, которые не могут быть отнесены ни одному y, будут заключены во всяком случае в интервалах

$$(y_1\zeta_1, y_2\zeta_1), \ (y_2\zeta_2, y_3\zeta_2), \ \ldots, \ (y_{k-1}\zeta_{k-1}, y_k\zeta_{k-1}), \ \ldots$$

и, следовательно, значения $\ln x^*$ — в интервалах, общая длина которых равна

$$\ln\frac{y_2}{y_1}+\ln\frac{y_3}{y_2}+\ldots+\ln\frac{y_k}{y_{k-1}}+\ldots=\lim_{k\to\infty}\ln\frac{y_k}{y_1}=\ln\frac{\rho}{y_1},$$

где ρ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$.

124. [A. J. Kempner, Amer. Math. Monthly, т. 21, февраль 1914.] Для определения тех неотрицательных целых чисел, расположенных между $0=00\ldots000$ и $10^m-1=99\ldots999$, которые записываются лишь при помощи цифр 0, 1, 2, ..., 8, распределяем эти 9 цифр между m местами всеми возможными способами. Этим путем получается в совокупности 9^m чисел. Пусть теперь r_n есть n-е неотрицательное число, записываемое без цифры 9. Если $10^{m-1}-1<r_n<10^m-1$, то $n\leqslant 9^m$, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln r_n}\leqslant\frac{\ln 9}{\ln 10}<1. \qquad [113.]$$

Или проще: число чисел, записываемых без цифры 9 и заключенных между $10^{m-1}-1$ и 10^m-1, равно 9^m-9^{m-1}. Следовательно, сумма интересующей нас части гармонического ряда меньше чем

$$\frac{9-1}{1}+\frac{9^2-9}{10}+\frac{9^3-9^2}{100}+\ldots=8\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\ldots\right)=80.$$

125. Разбиваем ряд на две части, образованные соответственно всеми положительными и всеми отрицательными членами.

126. [K. Knopp, J. für Math., т. 142, стр. 292—293, 1913.] Нет. Пример: пусть $b_1+b_2+b_3+\ldots$ сходится, между тем как $|b_1|+|b_2|+|b_3|+\ldots$ расходится. Полагаем

$$a_1=b_1, \ a_2=a_3=\frac{b_2}{2!}, \ a_4=a_5=\ldots=a_9=\frac{b_3}{3!}, \ a_{10}=\ldots=a_{33}=\frac{b_4}{4!}, \ \ldots$$

Так как $n!$ при $n \geqslant l$ делится на l, то часть $a_k + a_{k+l} + a_{k+2l} + \ldots$ после приведения членов, соответствующих одному и тому же b_m, будет, за исключением конечного числа членов, совпадать с $\frac{1}{l} b_1 + \frac{1}{l} b_2 + \frac{1}{l} b_3 + \ldots$

127. Нет [128].

128. Нет. Пусть $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ — положительные, постоянно возрастающие *целозначные* функции, т. е. $0 < \varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \ldots$, $0 < \Phi(1) < \Phi(2) < \Phi(3) < \ldots$, причем $\varphi(n)$, $\Phi(n)$ — целые числа. Образуем из ряда $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ решения 126 ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, где $a_\nu = \frac{b_m}{\Phi(m) - \Phi(m-1)}$ при $\Phi(m-1) < \nu \leqslant \Phi(m)$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{\Phi(1)} = \frac{b_1}{\Phi(1)}$. Неравенством $\varphi(t_m) \leqslant \Phi(m) < \varphi(t_m + 1)$ целое число t_m определяется однозначно. После приведения членов, соответствующих одному и тому же b_m, ряд $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + \ldots$ перейдет в $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{t_m - t_{m-1}}{\Phi(m) - \Phi(m-1)} b_m$.

Полагая $\Phi(x) = 2^{x^2}$, мы получим ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, служащий контрпримером одновременно для **126** и **128**.

Действительно, если $\varphi(x)$ — полином степени $\geqslant 2$ или $\varphi(x) = kl^x$, то числа $\frac{t_m - t_{m-1}}{\Phi(m) - \Phi(m-1)}$ будут, начиная с некоторого, монотонно убывать [Кнорр, стр. 316]. Если $\varphi(x) = k + lx$, то составленный ряд преобразуется после прибавления к нему некоторого абсолютного сходящегося ряда в $l^{-1}(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$ [126].

129. [A. Haar.] Так как ряд $s_l = a_l + a_{2l} + a_{3l} + \ldots$ — того же типа, что и s_1, то достаточно показать, что $a_1 = 0$. Пусть p_1, p_2, ..., p_m суть m первых простых чисел. Тогда ряд

$$s_1 - (s_{p_1} + s_{p_2} + \ldots + s_{p_m}) + (s_{p_1 p_2} + s_{p_1 p_3} + \ldots) - \ldots + (-1)^m s_{p_1 p_2 \ldots p_m}$$

содержит лишь a_1 и те члены a_n, номер которых n не делится ни на одно из простых чисел p_1, p_2, ..., p_m, притом каждое такое a_n лишь один раз [VIII 26]. Следовательно,

$$|a_1| \leqslant \sum_{n=p_m+1}^{\infty} |a_n|, \quad a_1 = 0.$$

В том, что предположение абсолютной сходимости существенно, можно убедиться на примере $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ [VIII, гл. 1, § 5].

130. [G. Cantor; см. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funkionen, стр. 286—287, Leipzip und Berlin, B. G. Teubner, 1918 *).] Интересующее нас множество точек получается, если из замкнутого интервала $[0, 1]$ удаляется открытая средняя третья часть, затем та же операция проделывается бесконечно с остающимися замкнутыми интервалами.

131. [См. S. Kakeya, Journ. Tôkyo math. Soc. (2), т. 7, стр. 250, 1914; Tôhoku Sc. Rep., т. 3, стр. 159, 1915.] Полагаем:

$$p_n+p_{n+1}+\ldots+p_{n+\nu}=P_{n,\nu}, \quad \lim_{\nu\to\infty} P_{n,\nu}=P_n$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть p_{n_1} — первый член, меньший σ; тогда либо существует такое ν_1, что $P_{n_1,\nu_1}<\sigma$, $P_{n_1,\nu_1+1}\geqslant\sigma$, $\nu_1\geqslant 0$, либо $P_{n_1}\leqslant\sigma$. Во втором случае, принимая во внимание, что $P_{n_1}\geqslant p_{n_1-1}\geqslant\sigma$ (для $n_1=1$ эти неравенства следует читать: $P_1=s\geqslant\sigma$), имеем $P_{n_1}=\sigma$, т. е. σ можно представить некоторой бесконечной частью рассматриваемого ряда. В первом случае определяем дальше первый член p_{n_2}, для которого $n_2>n_1+\nu_1$, $P_{n_1,\nu_1}+p_{n_2}<\sigma$; тогда либо существует такое ν_2, что $P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2,\nu_2}<\sigma$, $P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2,\nu_2+1}\geqslant\sigma$, $\nu_2\geqslant 0$, либо $P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2}\leqslant\sigma$. Во втором случае, принимая во внимание, что

$$P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2}\geqslant P_{n_1,\nu_1}+p_{n_2-1}\geqslant\sigma$$

($n_2>n_1+\nu_1+1$, ибо $P_{n_1,\nu_1}+p_{n_1+\nu_1+1}=P_{n_1,\nu_1+1}\geqslant\sigma$), будем иметь:

$$P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2}=\sigma,$$

т. е. σ снова можно представить требуемым образом. Если этот процесс нигде не обрывается (т. е. если все время имеет место первый случай), то

$$\sigma=P_{n_1,\nu_1}+P_{n_2,\nu_2}+P_{n_3,\nu_3}+\ldots$$

132. Из

$$p_n=p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}+\ldots,$$
$$p_{n+1}=p_{n+2}+p_{n+3}+p_{n+4}+\ldots$$

получаем $p_n=2p_{n+1}$, следовательно, $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{4}$, $\ldots$, $p_n=\frac{1}{2^n}$, $\ldots$ Представление посредством необрывающейся двоичной дроби однозначно.

133. Посредством включения членов, равных нулю, приводим теорему к почленному сложению двух сходящихся рядов.

134. Пусть все члены расходящегося ряда $a_{r_1}+a_{r_2}+a_{r_3}+\ldots$ неотрицательны. Тогда дополнительный ряд $a_{s_1}+a_{s_2}+a_{s_3}+\ldots$

*) См. также П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948, стр. 140—141.

обладает тем свойством, что всякому ε ($\varepsilon > 0$) можно сопоставить такое N, что при $n > m > N$ будем иметь:

$$a_{s_m} + a_{s_m+1} + \ldots + a_{s_n} < \varepsilon.$$

Дальнейшие рассуждения в существенной части совпадают с обычным доказательством теоремы Римана об изменении суммы условно сходящегося ряда *) (Кнопп, стр. 319 **)).

135. Из $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots$, $0 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ вытекает:

$$m_1 \geqslant 1,\ m_2 \geqslant 2,\ \ldots,\ m_n \geqslant n,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geqslant p_{m_1} + p_{m_2} + \ldots + p_{m_n}.$$

136. Выделим часть $p_{r_1} + p_{r_2} + p_{r_3} + \ldots$ так, чтобы

$$p_{r_n} < \operatorname{Min}(2^{-n},\ Q_n - Q_{n-1}) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q_0 = 0).$$

Имеем $p_{r_1} + p_{r_2} + \ldots + p_{r_n} \leqslant Q_n$, вся выделенная часть ряда сходится, следовательно, разность $Q_n - (p_{r_1} + p_{r_2} + \ldots + p_{r_n})$ неограниченно возрастает. В той мере, в какой возрастающая величина этой разности будет позволять, мы будем подбавлять члены из оставшейся части первоначального ряда. Указанное построение лишь смещает обе дополнительные части друг относительно друга.

137. [W. Sierpiński, Ann. Soc. Polon. Math., 1911, стр. 149.] Для достижения s' замедляем расходимость положительной части ряда по примеру 136.

138. [E. Cesàro, Rom. Acc. L. Rend. (4), т. 4, 2-й сем., стр. 133, 1888; J. Bagnera, Bull. des Sciences Math. (2), т. 12, стр. 227, 1888. См. также G. H. Hardy, Messenger of Math. (2), т. 41, стр. 17, 1911; H. Rademacher, Math. Zeitschr., т. 11, стр. 276—288, 1921.] Положим $E_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, $E_0 = 0$. Тогда

$$\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \ldots + \varepsilon_n p_n = \sum_{\nu=1}^{n} (E_\nu - E_{\nu-1}) p_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu (p_\nu - p_{\nu+1}) + E_n p_n.$$

Если бы при $n > N$ было $E_n > \alpha n$ ($\alpha > 0$), то мы имели бы

$$\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \ldots + \varepsilon_n p_n >$$

$$> \sum_{\nu=1}^{N} E_\nu (p_\nu - p_{\nu+1}) + \alpha \sum_{\nu=N+1}^{n-1} \nu (p_\nu - p_{\nu+1}) + \alpha n p_n = K + \alpha \sum_{\nu=N+1}^{n} p_\nu,$$

*) Эта теорема на самом деле принадлежит Дирихле.

**) См. также А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, Гостехиздат, 1953, стр. 308—309.

где K не зависит от n, и, следовательно, правая часть стремится к $+\infty$.

139. [E. Lasker.] Пусть $E_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$, как в **138.** Последовательность

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots \qquad (E)$$

обладает тем свойством, что между двумя членами с противоположными знаками содержится по крайней мере один, равный нулю. Мы будем различать два случая: 1) в последовательности (E) бесконечно много членов, равных нулю; 2) все члены последовательности (E), за исключением конечного числа, имеют общий знак, пусть, скажем, положительный. В первом случае выберем такой номер M, чтобы $E_M=0$ и при $M\leqslant m<n$

$$\left|\sum_{\nu=m+1}^{n}\varepsilon_\nu p_\nu\right|=\left|\sum_{\nu=m+1}^{n}[(E_\nu-E_m)-(E_{\nu-1}-E_m)]\,p_\nu\right|=$$

$$=\left|\sum_{\nu=m+1}^{n-1}(E_\nu-E_m)(p_\nu-p_{\nu+1})+(E_n-E_m)\,p_n\right|<\varepsilon. \quad (*)$$

Пусть E_m — ближайший слева к E_n член последовательности, равный нулю, так что $E_{m+1},\ E_{m+2},\ \ldots,\ E_n$ имеют все одинаковый знак. Тогда из неравенства (*) получаем:

$$|(E_n-E_m)\,p_n|=|E_np_n|<\varepsilon.$$

Во втором случае выбираем M так, чтобы неравенство (*) имело место для $M\leqslant m<n$ и все числа $E_M,\ E_{M+1},\ E_{M+2},\ \ldots$ были положительны. Пусть E_m будет их минимум. Так как в этом случае $E_\nu-E_m\geqslant 0$ при $\nu>m$, то из неравенства (*) получаем $(E_n-E_m)\,p_n<\varepsilon$, следовательно,

$$E_np_n<\varepsilon+E_mp_m.$$

Так как m фиксировано и p_n стремится к нулю, то при достаточно больших n также $E_np_n<\varepsilon$.

140. Вытекает из известной формулы остаточного члена

$$f(x)-\left(f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1),$$

так как $f^{(n+1)}(\theta x)=\theta_nf^{(n+1)}(0)$, где $0<\theta_n<1$.

141. Из 140.

142. Из неравенства $\cos x\leqslant 1$ (где равенство достигается лишь в точках $x=0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi,\ \ldots$) посредством интегрирования получаем, что при положительных x

$$\sin x < x;\quad 1-\cos x < \frac{x^2}{2!},\ \text{т. е.}\ \cos x > 1-\frac{x^2}{2!},$$
$$x-\sin x < \frac{x^3}{3!},\ \text{т. е.}\ \sin x > x-\frac{x^3}{3!},$$
$$\frac{x^2}{2!}+\cos x-1 < \frac{x^4}{4!},\ \text{т. е.}\ \cos x < 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

и т. д.

143.

$$\operatorname{arctg} x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=\int_0^x\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx,$$

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

144. Пусть, скажем, $a_0>0$, стало быть, $a_1<0$, $a_2>0$, $a_3<<0$, ... Тогда $A-a_0<0$, $A-a_0-a_1>0$, $A-a_0-a_1-a_2<0$, ..., т. е.

$$a_1 < A-a_0 < 0,$$
$$0 < A-a_0-a_1 < a_2,$$
$$a_3 < A-a_0-a_1-a_2 < 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда и вытекает утверждение. Аналогично рассуждаем и в случае $a_0<0$.

145. Пусть, например, $a_0 \leqslant A$; тогда a_1 не может быть отрицательным, ибо в этом случае мы имели бы

$$A-(a_0+a_1)=|A-(a_0+a_1)|\geqslant|a_1|>|a_2|,$$

что противоречит предположению. Стало быть, $a_1>0$. Так как $0\leqslant A-a_0<|a_1|$, имеем, далее, $A-(a_0+a_1)=A-a_0-a_1<0$. Аналогично заключаем, что $a_2<0$ и $a_0+a_1+a_2<A$, далее, $a_3>0$ и $a_0+a_1+a_2+a_3>A$ и т. д. Вообще говоря, обертывающий ряд не обязательно является знакочередующимся [148], однако обертывающий в узком смысле — уже безусловно знакочередующийся.

146. Если в 145 предположено лишь, что $|a_1|>|a_2|>\ldots>|a_n|$, то аналогичным путем заключаем, что $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ имеют чередующиеся знаки и постольку частичные суммы до $(n-1)$-й включительно обертывают в узком смысле, $n=2, 3, 4, \ldots$

Но, каково бы ни было фиксированное n, всегда для достаточно больших значений x будут выполняться неравенства $\left|\frac{a_1}{x}\right|>\left|\frac{a_2}{x^2}\right|>\ldots>\left|\frac{a_n}{x^n}\right|$, откуда вытекает утверждение до номера $n-1$ включительно. Тем самым оно имеет место вообще.

147. Из предположения вытекает, что производные $f^{(n)}(t)$ попеременно положительны и монотонно убывают, соответственно отрицательны и монотонно возрастают. Пусть, скажем, $f(t)$, $f''(t)$, $f^{\mathrm{IV}}(t)$, ... положительны и монотонно убывают, $f'(t)$, $f'''(t)$, $f^{\mathrm{V}}(t)$, ... отрицательны и монотонно возрастают. Из

$$R_n=\int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt-\left(-\frac{f'(0)}{x^2}+\frac{f'''(0)}{x^4}-\ldots+(-1)^n\frac{f^{(2n-1)}(0)}{x^{2n}}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+1}}\int_0^\infty f^{(2n+1)}(t)\sin xt\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{x}}\left[f^{(2n+1)}(t)-f^{(2n+1)}\left(t+\frac{\pi}{x}\right)+\right.$$

$$\left.+f^{(2n+1)}\left(t+\frac{2\pi}{x}\right)-\ldots\right]\sin xt\,dt$$

вытекает, что R_n и $(-1)^{n+1}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{x^{2n+2}}$ имеют общие знаки. Применяем **144**.

148. Сумма $2n-2$ первых членов равна

$$\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-2}},\quad \frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}<\frac{3}{2^{n+1}};$$

сумма $2n-1$ первых членов равна

$$\frac{2}{3}+\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}},\quad \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ряд — не знакочередующийся.

149. Чертеж дает спиралевидную ломаную линию, стягивающуюся к некоторой точке; он некоторым образом обосновывает наименование ряда «обвертывающим». Имеем:

$$e^i=\frac{389}{720}+\frac{101}{120}i+\delta,\quad\text{где } |\delta|<\frac{1}{7!}<2\cdot 10^{-4}$$

[чертеж или **151**]. Отсюда получаем для первых трех десятичных знаков точно (не округленно):

$$e^i=0{,}540\ldots+0{,}841\ldots i.$$

150. [H. Weyl.] a) Пусть z лежит на $\mathfrak{H}$, $|z|>0$. Остаточный член

$$f(z)-\left(f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\right)=$$

$$=\int_0^z\frac{(z-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

по модулю меньше, чем

$$|f^{(n+1)}(0)|\int_0^{|z|}\frac{r^n}{n!}\,dr=\left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}z^{n+1}\right|.$$

б) Пусть вообще предположено, что $f(z)$ вдоль $\mathfrak{H}$ обвертывается рядом $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ Пусть, далее, z лежит на $\overline{\mathfrak{H}}$, $|z|>0$ и t — положительное вещественное число. Тогда tz^{-1} расположено на $\mathfrak{H}$, следовательно,

$$\left|f\left(\frac{t}{z}\right)-a_0\right|<\left|\frac{a_1t}{z}\right|,$$

откуда вытекает, что интеграл, представляющий $F(z)$, сходится. Далее,

$$\left|F(z)-a_0-\frac{1!a_1}{z}-\frac{2!a_2}{z^2}-\ldots-\frac{n!a_n}{z^n}\right|=$$
$$=\left|\int_0^\infty e^{-t}\left[f\left(\frac{t}{z}\right)-a_0-\frac{a_1t}{z}-\frac{a_2t^2}{z^2}-\ldots-\frac{a_nt^n}{z^n}\right]dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty e^{-t}\left|\frac{a_{n+1}t^{n+1}}{z^{n+1}}\right|dt=\left|\frac{(n+1)!a_{n+1}}{z^{n+1}}\right|.$$

151. [По поводу e^{-z} см. E. Landau, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 104, 1915.] См. **150**.

(При $\Re z=0$, $z\neq 0$ модули производных от e^{-z} постоянны, однако сама e^{-z} непостоянна, так что остается в силе сказанное в **150**.) (**141**.)

152.

$$e^{\frac{z^2}{2}}\int_z^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2z^2}}e^{-t}\,dt.$$

Так как $\Re\frac{1}{z^2}\geqslant 0$, то применимо **151** (соответственно **141**).

153. $|a_n+b_n|=|a_n|+|b_n|$. См. определение.

154. [Cauchy, C. R., т. 17, стр. 370—376, 1843; см. также G. N. Watson, Quart. J., т. 47, стр. 302—310, 1917.]

$$z\,\mathrm{cth}\,z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+n^2\pi^2}\qquad [\mathbf{151},\ \mathbf{153}].$$

155. [Ср. Cauchy, l. c. **154**.] При $\Re z^2\geqslant 0$, $z\neq 0$ $\operatorname{arctg} z$ обвертывается своим степенным рядом. Дл вещественных z это уже доказано в **143**; для интересующих нас комплексных z заключаем на основании той же формулы так же, как в **143**.

156. Достаточно рассмотреть $\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}$. Имеем:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=a_0n+a_1\ln n+O(1).$$

157. Для сходимости необходимо, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=a_0=1$. Применяем 156 к

$$\ln\varphi(x)=\ln\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2-\frac{1}{2}a_1^2}{x^2}+\ldots$$

158. Рассматриваемый ряд во всяком случае сходится, если $\varphi(n)=0$ для некоторого целого положительного n. Примем поэтому, что $\varphi(n)\neq 0$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Имеем [68]:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)|}=|a_0|.$$

Получаем, таким образом, для $|a_0|<1$ сходимость, для $|a_0|>1$ — расходимость. Пусть теперь $a_0=1$, далее (ради простоты) $\varphi(n)>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Тогда [157]

$$\ln[\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)]=a_1\ln n+b+\varepsilon_n,$$

т. е.

$$\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)=e^{b+\varepsilon_n}n^{a_1},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, b не зависит от n. Следовательно, при $a_1<-1$ имеет место сходимость, при $a_1\geqslant -1$ — расходимость. Для $a_0=-1$ полагаем:

$$\varphi(n)=-\psi(n),\quad \varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n)=(-1)^n\psi(1)\,\psi(2)\ldots\psi(n).$$

Остаточный член ряда $\sum n^{-2}$ будет $O(n^{-1})$, откуда (см. также решение II 18)

$$\psi(1)\,\psi(2)\ldots\psi(n)=e^cn^{-a_1}+O(n^{-a_1-1}),$$

где c не зависит от n. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится одновременно с $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-a_1}$, т. е. когда $a_1>0$ и только тогда. В итоге получаем, что для сходимости заданного ряда необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих четырех условий: а) $\varphi(n)=0$ для некоторого целого положительного n; б) $|a_0|<1$; в) $a_0=1$, $a_1<-1$; г) $a_0=-1$, $a_1>0$.

159. Частный случай задачи 158 для

$$\varphi(x)=2-e^{\frac{\alpha}{x}}=1-\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha^2}{2!}\frac{1}{x^2}+\ldots$$

Сходимость имеет место при $\alpha>1$ и $\alpha=\ln 2$; $\ln 4$, $\ln 8$, ... все >1.

160.

$$\int_0^1 e^{x\ln\frac{1}{x}}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx.$$

Замена переменной $x^{n+1}=e^{-y}$.

161. Полагаем $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}=t_n$, тогда $t_n^2=1+t_{n-1}$, $t_1=1$, $t_{n-1}<t_n$, $n=2, 3, 4, \ldots$ Для положительных x неравенство $x^2<1+x$ выполняется тогда и только тогда, когда $x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, т. е. меньше положительного корня квадратного уравнения $x^2-x-1=0$. Отсюда вытекает, так как $t_n^2=1+t_{n-1}<1+t_n$, что $t_{n-1}<t_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $n=2, 3, 4, \ldots$, откуда заключаем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t$ и $0<t\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; далее, $t^2=1+t$, т. е. $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Аналогично определяется значение непрерывной дроби, где рекуррентной формулой будет:

$$u_n=1+u_{n-1}^{-1},\quad u_1=1\qquad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

162. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 84, 1916. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 25, стр. 88—89, 1917.] Если (ради простоты для $\nu\geqslant 1$) $\ln\ln a_\nu<\nu\ln 2$, $a_\nu<e^{2^\nu}$, то $t_n<\sqrt{e^2+\sqrt{e^4+\ldots+\sqrt{e^{2^n}}}}<e\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [161]. Если, напротив, $a_n>e^{\beta^n}$, где $\beta>2$, то $t_n>e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n}$. Для $a_n\leqslant 1$ под $\frac{\ln\ln a_n}{n}$ естественно понимается $-\infty$.

163. Для доказательства неравенства

$$t_{n+1}-t_n<\frac{a_{n+1}}{2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}}$$

предполагаем, что соответствующее соотношение для n величин $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ уже доказано, т. е. что

$$\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\ldots+\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n+1}}}}}<t+s,$$

где

$$t=\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\ldots+\sqrt{a_n}}},\quad s=\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}\sqrt{a_2a_3\ldots a_{n+1}}}.$$

Отсюда

$$t_{n+1}^2<a_1+t+s<\left(\sqrt{a_1+t}+\frac{s}{2\sqrt{a_1+t}}\right)^2<\left(t_n+\frac{s}{2\sqrt{a_1}}\right)^2.$$

164. [Jacobi, 1. c. 53, § 52; Corollarium; Werke, т. 1, стр. 200—201.] Полагаем $1-q=a_0$, $1+q^m=a_m$ $(m=1, 2, 4, 8,$

16, ...); тогда $(n+1)$-е частичное произведение принимает вид

$$\frac{a_0}{a_1}\left(\frac{a_0a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a_0a_1a_2}{a_4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a_0a_1a_2a_4}{a_8}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots\left(\frac{a_0a_1a_2\ldots a_{2^{n-1}}}{a_{2^n}}\right)^{\frac{1}{2^n}}=\frac{a_0^{2-2^{-n}}}{(a_1a_2a_4a_8\ldots a_{2^n})^{2^{-n}}}$$

и произведение $a_1a_2a_4a_8\ldots$ сходится. См. также VIII 78.

165. Обозначим сумму ряда через $F(x)$. Тогда

$$F'(x)=F(x),\quad F(x)=\mathrm{const}.\,e^x.$$

166.

$$\varphi'(x)=\varphi(x),\quad \varphi(0)=1,$$

$$\varphi(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$\Delta\psi(x)=\psi(x),\quad \psi(0)=1,$$

$$\psi(x)=2^x=1+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\ldots+\binom{x}{n}+\ldots$$

для $x>-1$. Имеем:

$$\varphi_n(x)=\frac{x^n}{n!},$$

$$\psi_n(x)=\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

167.

$$\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}=\ln\frac{y_n}{y_{n+1}}-\frac{1}{12n(n+1)},$$

$$\ln\frac{y_n}{y_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1;$$

разложение

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

дает при $x=\frac{1}{2n+1}$:

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots<$$

$$<1+\frac{1}{3[(2n+1)^2-1]}=1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

следовательно, $x_n<x_{n+1}$, $y_n>y_{n+1}$. Часть задачи **155**, соответственно II **205**. Из **167** в совокупности с II **202** вытекает II **205** для целочисленных n.

168. [I. Schur.] Что a_n убывает при $p\geqslant\frac{1}{2}$, вытекает из разложения

$$\ln a_n=\frac{2(n+p)}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots\right)$$

[решение 167]. Отсюда, далее, заключаем, что

$$\ln a_n = 1 - \frac{\frac{1}{2} - p}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

значит,

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \frac{\frac{1}{2} - p}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

так что при $p < \frac{1}{2}$, начиная с некоторого n, a_n будет возрастать. При $p \leqslant 0$ это будет иметь место уже начиная с $n = 1$, как показывает разложение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ по биномиальной формуле.

169.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{x}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Первый множитель убывает [168], квадрат второго есть

$$1 + \frac{2x - 1}{n + 1} + \frac{x^2}{n(n+1)}.$$

Поэтому условие $x \geqslant \frac{1}{2}$ достаточно для убывания a_n. Из разложения

$$\ln a_n = 2n\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right) +$$
$$+ 2\left[\frac{x}{2n+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5 + \ldots\right] =$$
$$= \frac{2n}{2n+1} + \frac{2x}{2n+x} + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

получаем в силу

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = \frac{4x - 2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

что это условие также необходимо.

170. [См. задачу № 1098 в Nouv. Ann., серия 2, т. 11, стр. 480, 1872. Решение — C. Moreau, там же, серия 2, т. 13, стр. 61, 1874.] Первое неравенство, утверждающее, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

вытекает из неравенства

$$f(x) = x + x\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - (1 + x)\ln(1 + x) > 0 \qquad \left(0 < x \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

[Имеем:

$$f'(x)=\frac{x}{x+2}-\ln\frac{1+x}{1+\frac{x}{2}}>\frac{x}{x+2}-\frac{1+x}{1+\frac{x}{2}}+1=0,\quad f(0)=0.]$$

Второе неравенство равносильно неравенству

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\qquad [169].$$

171. [I. Schur.] Во второй четверти, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{4n}\right)<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Первое неравенство вытекает из **170**, ибо

$$1+\frac{1}{4n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1},$$

второе содержится в **169**.

172. [I. Schur.] Из разложения

$$\ln a_n=(n+1)\ln\frac{1+\frac{x}{2n+x}}{1-\frac{x}{2n+x}}=(2n+2)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu-1}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^{2\nu-1}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}\,\frac{1}{(2n+x)^{2\nu-2}}+(2-x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}\,\frac{1}{(2n+x)^{2\nu-1}}$$

при $0<x\leqslant 2$ заключаем, что a_n убывает. Далее,

$$\ln a_n=x+\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{(2n+x)^2}+\frac{x(2-x)}{2n+x}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\frac{2x(2-x)}{(2n+x)(2n+x+2)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

т. е. меньше нуля при достаточно больших n, если $x<0$ или $x>2$. При $x=0$ $a_n=1$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

173. [Доказательство сообщил E. Jacobsthal.] По поводу предела выражения $\sin_n x$ см. **174**. Имеем

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\qquad (x>0)\quad [142];$$

далее, при фиксированном c и достаточно больших n, $n>N(c)$ (биномиальный ряд!), имеем:

$$\frac{c}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6}\left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^3>\frac{c}{\sqrt{n+1}},$$

соответственно

$$\frac{c}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6}\left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^3+\frac{1}{120}\left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^5<\frac{c}{\sqrt{n+1}},$$

смотря по тому, будет ли $c<\sqrt{3}$ или $c>\sqrt{3}$. Пусть $c<\sqrt{3}$ и $\alpha>0$ фиксировано и столь велико, что $\sin_N x>\frac{c}{\sqrt{N+\alpha}}$. Тогда

$$\sin_{N+1} x>\sin\frac{c}{\sqrt{N+\alpha}}>\frac{c}{\sqrt{N+\alpha}}-\frac{1}{6}\left(\frac{c}{\sqrt{N+\alpha}}\right)^3>\frac{c}{\sqrt{N+\alpha+1}},$$

значит, $\sin_n x>\frac{c}{\sqrt{n+\alpha}}$, $n\geqslant N$. Отсюда $\liminf\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin_n x\geqslant c$, т. е. $\geqslant\sqrt{3}$. В случае $c>\sqrt{3}$ выбираем m столь большим, чтобы $\sin_m x<\frac{c}{\sqrt{N+1}}$. Тогда аналогично предыдущему заключаем, что $\sin_{m+1} x<\frac{c}{\sqrt{N+2}}$, $\sin_{m+2} x<\frac{c}{\sqrt{N+3}}$ и т. д.

174. Последовательность v_n убывает, $v_n>0$, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=v$; из $v=f(v)$ заключаем, что $v=0$. Таким образом, достаточно доказать утверждение для произвольно малого x. Пусть b' фиксировано, $b'>b$. При достаточно малом x имеем:

$$x-ax^k<f(x)<x-ax^k+b'x^l,$$

а при достаточно большом n, $n>N(c)$,

$$cn^{-\frac{1}{k-1}}-a\left(cn^{-\frac{1}{k-1}}\right)^k>c(n+1)^{-\frac{1}{k-1}},$$

соответственно

$$cn^{-\frac{1}{k-1}}-a\left(cn^{-\frac{1}{k-1}}\right)^k+b'\left(cn^{-\frac{1}{k-1}}\right)^l<c(n+1)^{-\frac{1}{k-1}},$$

смотря по тому, будет ли $c<[(k-1)a]^{-\frac{1}{k-1}}$ или $c>[(k-1)a]^{-\frac{1}{k-1}}$. См. 173. Предположение относительно знака b несущественно.

175. [J. Ouspensky, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 20, стр. 83, 1913.] Сходимость при $s>2$, расходимость при $s\leqslant 2$ [173].

176. [См. E. Cesàro, задача; Nouv. Ann., серия 3, т. 7, стр. 400, 1888. Решение — Audibert, там же, серия 3, т. 11, стр. 35*, 1892.] Из неравенств

$$x>\ln\frac{e^x-1}{x}>0 \text{ при } x>0; \quad x<\ln\frac{e^x-1}{x}<0 \text{ при } x<0$$

заключаем, что последовательность u_n в первом случае монотонно убывает и $u_n>0$, во втором — возрастает и $u_n<0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=u=0,$$

ибо $u\neq\ln\frac{e^u-1}{u}$ при $u\neq 0$.

Рекуррентная формула

$$e^{u_n}-1=u_ne^{u_{n+1}}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

дает:

$$e^{u_1}=1+u_1+u_1u_2+\ldots+u_1u_2\ldots u_{n-1}+u_1u_2\ldots u_ne^{u_{n+1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_1u_2\ldots u_ne^{u_{n+1}}=0.$$

177. [C. A. Laisant, задача; Nouv. Ann., серия 2, т. 9, стр. 144, 1870. Решение — H. Rumpen, там же, серия 2, т. 11, стр. 232, 1872.] $s=\frac{3}{4}\cos\varphi$. Принимаем во внимание тождество

$$4\cos^3\varphi=3\cos\varphi+\cos 3\varphi.$$

178. [I. Schur, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 162, 1918. См. O. Szász, Sitzungsber. Berl. Math. Ges., т. 21, стр. 25—29, 1922.] Если $\varepsilon>0$ так мало́, что $|q|+\varepsilon<r$, то существует такое постоянное число A, не зависящее от n и ν, что

$$\left|\frac{b_{n-\nu}}{b_n}\right|<A(|q|+\varepsilon)^{\nu}\quad (\nu=0,1,\ldots,n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

При $n>m$ имеем:

$$\frac{c_n}{b_n}-f(q)=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu\left(\frac{b_{n-\nu}}{b_n}-q^\nu\right)+\sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu\frac{b_{n-\nu}}{b_n}-\sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu q^\nu;$$

обе последние суммы по абсолютной величине меньше чем

$$A\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|a_\nu|(|q|+\varepsilon)^\nu+\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|a_\nu||q|^\nu,$$

т. е. произвольно малы вместе с m^{-1}. Выбираем m столь большим, чтобы это выражение было меньше ε, затем при постоянном m выбираем n столь большим, чтобы первая сумма была по абсолютной величине меньше ε.

179. [Частный случай одной важной теоремы из теории функций, принадлежащей Витали. См. E. Lindelöf, Bull. S. M. F., т. 41, стр. 171, 1913.] Мы покажем лишь, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n1}=0$. (Затем образовываем $x^{-1}f_n(x)-a_{n1}$ и т. д.) Пусть x столь мало́, что выполняется неравенство $0<A\frac{x}{1-x}<\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Тогда

$$|a_{n1}|<x^{-1}|f_n(x)|+A\frac{x}{1-x}<x^{-1}|f_n(x)|+\varepsilon.$$

Выбираем теперь, при фиксированном x, столь большое n, чтобы $|f_n(x)|<\varepsilon x$.

180. Так как $|a_k| \leqslant A_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, то $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Имеем:

$$|s_n - s| \leqslant |a_{n0} - a_0| + |a_{n1} - a_1| + \ldots + |a_{nm} - a_m| + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем m столь большим, чтобы последняя сумма была меньше ε. Затем зафиксируем m и возьмем столь большое n, чтобы $|a_{nk} - a_k| < \frac{\varepsilon}{m+1}$ $(k=0, 1, \ldots, m)$. Тогда получим:

$$|s_n - s| < 3\varepsilon.$$

181. а) Так как бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})$ сходится при $|q|<1$, то все его частичные произведения заключены между двумя положительными числами a и b, $a<b$. Поэтому для вычисляемых в **52** величин C_ν имеет место оценка

$$|C_\nu| < \left(\frac{b}{a}\right)^2 q^{\nu^2}.$$

Применяем **180**.

б) Пусть в **59** $y<0$, стало быть, $q>1$. Тогда

$$\frac{q^k}{1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}} < q;$$

далее,

$$\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n+\nu} > e^y \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому

$$\left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n}\right]\left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n+1}\right]\ldots\left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n+k-1}\right] < (1-e^y)^k.$$

Применяем **180**.

182. Речь идет о пределе суммы ряда

$$\sum_{k=1-n}^{\infty}{}' n^{\alpha-1}(n+k)^{\alpha-1}[(n+k)^\alpha - n^\alpha]^{-2} = \sum_{k=1-n}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

при $n\to\infty$; член с номером $k=0$ опущен; положено

$$\varphi(x) = (1+x)^{\alpha-1}\left(\frac{x}{(1+x)^\alpha - 1}\right)^2 \qquad (-1<x<\infty,\ x\neq 0).$$

Полагая еще $\varphi(0)=\alpha^{-2}$, получаем, что $\varphi(x)$ непрерывна в интервале $-1<x<\infty$. При $\alpha=1$ имеем $\varphi(x)\equiv 1$, при остальных значениях α

$$\varphi(x) \sim x^{1-\alpha} \text{ при } x\to\infty, \quad \varphi(x) \sim (1+x)^{\alpha-1} \text{ при } x\to -1.$$

Для случая $\alpha=1$ предел получается уже из тождества

$$1+2^{-2}+3^{-2}+4^{-2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Если $\alpha\neq 1$, то при $n\to\infty$ и k фиксированном общий член стремится к $k^{-2}\varphi(0)$.

В случае $\alpha>1$ $\varphi(x)$ ограничена в интервале $-1<x<\infty$. Обозначим максимум $\varphi(x)$ в этом интервале через M. Тогда рассматриваемый ряд для $n=1, 2, 3, \ldots$ будет мажорироваться рядом $\sum' Mk^{-2}$. [180.]

В случае $0<\alpha<1$ существует такое положительное число M, что

$$\begin{array}{lll} \varphi(x)<M & \text{при} & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2, \\ \varphi(x)\leqslant M(1+x)^{\alpha-1} & \text{при} & -1<x\leqslant -\frac{1}{2}, \\ \varphi(x)\leqslant Mx^{1-\alpha} & \text{при} & x\geqslant 2. \end{array}$$

Отсюда вытекает:

$$\sum_{k=1-n}^{-\frac{1}{2}n}\frac{1}{k^2}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1-n}^{-\frac{1}{2}n}\frac{M}{k^2}\left(\frac{n}{n+k}\right)^{1-\alpha}\leqslant Mn^{1-\alpha}\sum_{k=\frac{1}{2}n}^{n-1}k^{-2}\to 0,$$

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant Mk^{1-\alpha}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ k=2n,\ 2n+1,\ \ldots).$$

Тем самым остающаяся часть ряда $\left(\text{от } -\frac{1}{2}n \text{ до } \infty\right)$ будет мажорироваться рядом $\sum' M|k|^{-1-\alpha}$. [180.]

183. Имеем:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2,$$

так что выражение

$$a_n=\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}$$

всегда имеет смысл. Для доказательства равенства

$$a_n=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu}{2^\nu}\right)$$

применяем метод полной индукции. Имеем:

$$\operatorname{sgn} a_n=\operatorname{sgn} 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu}{2^\nu}\right)=\varepsilon_0;$$

далее, для $\varepsilon_0 \neq 0$

$$a_n^2 - 2 = \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n \sqrt{2}}}$$

и

$$4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu}{2^\nu}\right) - 2 = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu}{2^\nu}\right) =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu}{2^\nu}\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu}{2^{\nu-1}}\right).$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$.

184. [См. S. Pincherle, Atti Torino, т. 53, стр. 745—763, 1917—1918; Rom. Acc. L. Rend. (5), т. 27, 2-й сем., стр. 177—183, 1918.] Положим $x = 2\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тогда двоичное разложение

$$\frac{2\varphi}{\pi} = g_0 + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2^2} + \ldots + \frac{g_n}{2^n} + \ldots \qquad (g_n = 0 \text{ или } 1)$$

будет однозначно определено, за исключением случая, когда

$$\varphi = \frac{p}{2^q}\pi,$$

где p и q — целые, $0 < p < 2^q$; в этом случае существуют два разложения. Равенство

$$2\cos\varphi = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots}}}$$

равносильно [183] равенству

$$2 \sin\frac{\pi}{4}\left(2 - \frac{4\varphi}{\pi}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{2^n}\right),$$

или, так как обе дуги заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, — равенству

$$2 - \frac{4\varphi}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{2^n}, \quad \frac{2\varphi}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1 - \varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{2}}{2^n}.$$

Итак, оставляя предварительно в стороне упомянутый исключительный случай, имеем:

$$g_n = \frac{1 - \varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Этими уравнениями вполне однозначно определяются ε_n (как и обратно g_n через ε_n).

В исключительном случае, когда $\varphi = \frac{p}{2^q}\pi$, где p и q — целые, $0 < p < 2^q$, имеем два разложения для $\frac{2\varphi}{\pi}$:

$$\frac{2\varphi}{\pi} = g_0 + \frac{g_1}{2} + \ldots + \frac{g_{q-2}}{2^{q-2}} + \frac{1}{2^{q-1}} + \frac{0}{2^q} + \frac{0}{2^{q+1}} + \ldots =$$
$$= g_0 + \frac{g_1}{2} + \ldots + \frac{g_{q-2}}{2^{q-2}} + \frac{0}{2^{q-1}} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^{q+1}} + \ldots$$

($q \geq 2$). В этом случае ε_0, ε_1 ..., ε_{q-2}, как и прежде, определены однозначно, $\varepsilon_q = -1$, $\varepsilon_{q+1} = \varepsilon_{q+2} = \ldots = 1$, а ε_{q-1} можно по произволу выбрать равным как -1, так и $+1$. Имеем, следовательно,

$$x = 2\cos\varphi = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{q-2}\sqrt{2}}}}.$$

Из **183**, обратно, вытекает, что каждое число последнего вида равно $2\cos\frac{p}{2^q}\pi$, где p и q — целые и $0 < p < 2^q$.

При $q = 1$ сказанное выше нуждается в небольшой модификации: цифры $g_0, \ldots, g_{q-2}$, $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{q-2}$ отсутствуют, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

185. Последовательность g_n будет тогда и только тогда периодической, начиная с некоторого n, когда этим свойством обладает последовательность ε_n.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. $\frac{r-1}{x_\nu^r} < \frac{1}{x_\nu^{r-1}x_{\nu-1}} + \frac{1}{x_\nu^{r-2}x_{\nu-1}^2} + \ldots + \frac{1}{x_\nu x_{\nu-1}^{r-1}} < \frac{r-1}{x_{\nu-1}^r}$.

2. $(r+1)\,x_{\nu-1}^r < \frac{x_\nu^{r+1} - x_{\nu-1}^{r+1}}{x_\nu - x_{\nu-1}} < (r+1)\,x_\nu^r$.

3. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} he^{a+(\nu-1)h}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} he^{a+\nu h}$, где положено $h = x_\nu - x_{\nu-1} = \frac{b-a}{n}$. Пределом выражения

$$he^a \frac{1-e^{nh}}{1-e^h} = h\frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

является $e^b - e^a$, так как

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \left(\frac{de^x}{dx}\right)_{x=0} = 1.$$

4.
$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{aq^{\nu-1}(q-1)}{aq^\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{aq^{\nu-1}(q-1)}{aq^{\nu-1}},$$

где положено $q = \frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Имеем [3]:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln b - \ln a}{n}} - 1}{\frac{\ln b - \ln a}{n}} (\ln b - \ln a) = \ln b - \ln a.$$

5. Положим $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Тогда

$$H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2}H_n\right) = H_{2n} - H_n.$$

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{\nu}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}+\frac{\sin 2\frac{\pi}{n+1}}{2\frac{\pi}{n+1}}+\ldots+\frac{\sin n\frac{\pi}{n+1}}{n\frac{\pi}{n+1}}\right)=\int\limits_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx>0.$$

(VI 25.)

7. По дифференциальной теореме о среднем значении

$$F(b)-F(a)=\sum_{\nu=1}^{n}[F(x_\nu)-F(x_{\nu-1})]=\sum_{\nu=1}^{n}f(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})$$

$$(x_{\nu-1}<\xi_\nu<x_\nu).$$

Однако при приписываемом здесь знаку интеграла смысле вовсе не обязательно должно выполняться равенство

$$F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

[См. V. Volterra, Giorn. di Math., т. 19, стр. 335, 1881.]

8. Пусть $\frac{k-1}{n}\leqslant\xi<\frac{k}{n}$. Тогда

$$\Delta_n\leqslant\sum_{\nu=k}^{n}\int\limits_{\frac{\nu-1}{n}}^{\frac{\nu}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right]dx\leqslant\frac{M-f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}+\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{f\left(\frac{\nu-1}{n}\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{n}$$

и

$$-\Delta_n\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}\int\limits_{\frac{\nu-1}{n}}^{\frac{\nu}{n}}\left[f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right]dx\leqslant\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-\mathrm{Min}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right),\,f\left(\frac{k}{n}\right)\right]}{n}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f\left(\frac{\nu-1}{n}\right)}{n}=\frac{\mathrm{Max}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right),\,f\left(\frac{k}{n}\right)\right]-f(0)}{n}.$$

9. [См. G. Pólya, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 26, стр. 198, 1917.] Под полным изменением функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$ понимают верхнюю грань выражения

$$|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\ldots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|,$$

составленного для всех возможных разбиений интервала $[a, b]$ (обозначения те же, что и в начале настоящей главы). Функции, имеющие конечное полное изменение, называют *функциями с ограниченным изменением*.

$$|\Delta_n| \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \left| f\left(x+\frac{\nu-1}{n}\right) - f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|\right] dx \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}} V\, dx.$$

10. $$-\Delta_n = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{a+(\nu-1)\frac{b-a}{n}}^{a+\nu\frac{b-a}{n}} \left(a+\nu\frac{b-a}{n} - x\right) f'(\xi_\nu)\, dx,$$

где $a+(\nu-1)\frac{b-a}{n} < \xi_\nu < a+\nu\frac{b-a}{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \leqslant -\Delta_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu,$$

где M_ν и m_ν обозначают соответственно верхнюю и нижнюю грани производной $f'(x)$ в ν-м подинтервале. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{b-a}{2}[f(a) - f(b)].$$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n' = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b) - f'(a)]$, ибо

$$f(x) - f\left(a+(2\nu-1)\frac{b-a}{2n}\right) =$$
$$= \left(x-a-(2\nu-1)\frac{b-a}{2n}\right) f'\left(a+(2\nu-1)\frac{b-a}{2n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x-a-(2\nu-1)\frac{b-a}{2n}\right)^2 f''(\xi_\nu).$$

Член, линейно зависящий от x, уничтожается при интегрировании по интервалу $\left[a+(\nu-1)\frac{b-a}{n},\ a+\nu\frac{b-a}{n}\right]$. См. **10.**

12. Имеем [**11**]:

$$\Delta_n'' = \int\limits_a^{a+\frac{b-a}{2n+1}} [f(x) - f(a)]\, dx +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{a+(2\nu-1)\frac{b-a}{2n+1}}^{a+(2\nu+1)\frac{b-a}{2n+1}} \left[f(x) - f\left(a+2\nu\frac{b-a}{2n+1}\right)\right] dx =$$
$$= \int\limits_a^{a+\frac{b-a}{2n+1}} (x-a) f'(\xi_0)\, dx + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} \int\limits_{a+(2\nu-1)\frac{b-a}{2n+1}}^{a+(2\nu+1)\frac{b-a}{2n+1}} \left(x-a-2\nu\frac{b-a}{2n+1}\right)^2 f''(\xi_\nu)\, dx.$$

Искомым пределом служит

$$\frac{(b-a)^2}{24}\,[f'(b)+2f'(a)].$$

В случае, когда $f'(a)=0$, этот результат вытекает из **11**, если рассматриваемую там функцию $f(x)$ зеркально продолжить влево от a и заменить n на $2n+1$.

13. В **10** и **11** подставить $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $a=0$, $b=1$. См. также **5**.

14. [Подробнее см. в статье G. N. Watson, Phil. Mag. (3), т. 31, стр. 111—118, 1916.]

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{n}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\ldots+\frac{n}{n-1}\right)+n\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{n}}-\frac{1}{\frac{\nu\pi}{n}}-\frac{1}{\frac{(n-\nu)\pi}{n}}\right)\frac{1}{n},$$

а это выражение, принимая во внимание **9**, равно

$$\frac{2n}{\pi}\left[\ln n+C+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+n\left[\int_0^1\left(\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{2n}{\pi}(\ln n+C)-\frac{2n}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}+O(1).$$

15. [E. Cesàro, задача; Nouv. Ann., серия 3, т. 17, стр. 112, 1888. Решение — G. Pólya, там же, серия 4, т. 11, стр. 377—381, 1911.] Подставить в **10** $f(x)=x\ln x$, $a=0$, $b=1$. Хотя предположения задачи **10** и не вполне удовлетворены, тем не менее утверждение сохраняет силу.

16. Полагаем $P(x)=\frac{1}{2x}+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-\nu}$, $\beta=(1-e^{-\alpha})^{-1}$. Тогда $P(x)=\alpha$ есть уравнение $(n+1)$-й степени. Оно имеет в каждом из интервалов $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$, (n, ∞) по одному корню. Пусть последний будет x_n. Полагая в **12** $f(x)=\frac{1}{\beta-x}$, $a=0$, $b=1$, получим:

$$\int_0^1\frac{dx}{\beta-x}=\alpha=P(x_n)=P\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right]+\Delta_n'',\qquad \Delta_n''>0.$$

Так как $P(x)$ убывает при $x>n$, имеем $x_n<\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta$. По теореме о среднем значении заключаем, далее, что

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta-x_n=-\frac{\Delta_n''}{P'(\xi)}<-\frac{\Delta_n''}{P'\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right]},$$

$$x_n<\xi<\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta.$$

Последняя дробь стремится к нулю [12], ибо

$$nP'\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right]\to-\int_0^1\frac{dx}{(\beta-x)^2}.$$

17. Из $\alpha=\int_0^1\frac{2\beta}{\beta^2-x^2}dx$ получаем $\beta=\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$ и дальше, как в **16**.

18. [J. Franel, см. Cesàro, стр. 273 *); ср. с эйлеровой формулой суммирования.] Полагаем $F(x)=\int_1^x f(x)\,dx$. Из равенств

$$F\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-F(\nu)=\frac{1}{2}f(\nu)+\frac{1}{8}f'(\xi_\nu),$$

$$-F\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+F(\nu+1)=\frac{1}{2}f(\nu+1)-\frac{1}{8}f'(\eta_\nu),$$

где

$$\nu<\xi_\nu<\nu+\frac{1}{2}<\eta_\nu<\nu+1\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

посредством сложения получаем:

$$\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-F(n)=$$

$$=\frac{1}{8}\left[f'(\eta_1)-f'(\xi_1)+f'(\eta_2)-f'(\xi_2)+\ldots+f'(\eta_{n-1})-f'(\xi_{n-1})\right].$$

Ряд

$$-f'(\xi_1)+f'(\eta_1)-f'(\xi_2)+f'(\eta_2)-f'(\xi_3)+f'(\eta_3)-\ldots=8s$$

сходится, как знакочередующийся ряд с монотонно убывающими по абсолютной величине членами, стремящимися к нулю. При $f'(x)<0$ имеем:

$$\frac{1}{8}f'(n)<\frac{1}{8}f'(\xi_n)<-\frac{1}{8}\left[f'(\eta_n)-f'(\xi_n)+f'(\eta_{n+1})-f'(\xi_{n+1})+\ldots\right]<0.$$

Отсюда при $f(x)=\frac{1}{x}$ вытекает существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$$

*) Чезаро, ч. I, стр. 336.

(эйлерова постоянная), а также неравенство

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-C<\frac{1}{2n}.$$

При $f(x)=-\ln x$ получаем:

$$\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1-s+\varepsilon_n,$$

где s — постоянная и $0<\varepsilon_n<\frac{1}{8n}$. Формула Стирлинга [205] утверждает, что $1-s=\ln\sqrt{2\pi}$.

19. См. решение 18. Рассмотренная там сумма

$$\frac{1}{8}[f'(\eta_1)-f'(\xi_1)+f'(\eta_2)-f'(\xi_2)+\ldots+f'(\eta_{n-1})-f'(\xi_{n-1})]$$

в данном случае положительна. Далее,

$$f'(\eta_1)-f'(\xi_2)<0,\ f'(\eta_2)-f'(\xi_3)<0,\ldots,\ f'(\eta_{n-2})-f'(\xi_{n-1})<0,$$
$$f'(\xi_1)>f'(1),\ f'(\eta_{n-1})<f'(n).$$

20. [См., например, I. с. 9.] Пусть $f(x)$, скажем, монотонно возрастает (в противном случае достаточно было бы рассмотреть $-f(x)$); тогда

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx\leqslant\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}\leqslant\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx.$$

Предположение монотонности существенно лишь для точек, в окрестности которых функция $f(x)$ не ограничена.

21. Мы можем принять, что $f(x)$ возрастает [20] и $f(x)\geqslant 0$ (в противном случае достаточно было бы разложить $f(x)$ на сумму $\frac{f(x)+|f(x)|}{2}+\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$ и рассмотреть в отдельности оба слагаемых). Выберем $\varepsilon>0$ и η $(0<\eta<1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $\int\limits_{1-\eta}^{1} f(x)\,dx<\varepsilon$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{[(1-\eta)n]}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)f\left(\frac{\nu}{n}\right)=\int\limits_0^{1-\eta}\varphi(x)f(x)\,dx.$$

С другой стороны, обозначая через M верхнюю грань $|\varphi(x)|$, имеем:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=[(1-\eta)n]+1}^{n-1}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{n}\sum_{\nu=[(1-\eta)n]+1}^{n-1}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\leqslant M\int\limits_{1-\eta}^{1} f(x)\,dx\leqslant M\varepsilon.$$

22. Положить в 20 $f(x)=x^{\alpha-1}$.

23. $$a_n = 1^{\alpha-1}(n-1)^{\beta-1} + 2^{\alpha-1}(n-2)^{\beta-1} + \ldots + (n-1)^{\alpha-1}1^{\beta-1} =$$
$$= n^{\alpha+\beta-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{\beta-1} \sim n^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

См. 20.

24. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$.

25. Пусть $f(x)$ имеет конечный предел, скажем, при $x\to 1$ и монотонно убывает. Из неравенства [20]

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}$$

вытекает, что левая часть ограничена, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$$

конечен.

26. Пусть, например, $f(x)$ убывает. Тогда

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\nu-1}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{2n}\right)+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} f(x)\,dx,$$

следовательно, тем более

$$2\int_{\frac{2n-1}{2n}}^{1} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\nu-1}{2n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} f(x)\,dx.$$

Впрочем, имеем также:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f\left(\frac{2\nu-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

27. См. 28 для $f(x)=x^{\alpha-1}$.

28. $$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu-1}f\left(\frac{\nu}{n}\right)=\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}f\left(\frac{2\nu-1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}f\left(\frac{\nu}{n}\right).$$

[20 и решение 26.]

29. См. 26.

30. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, то $f(x)$ должна сохранять постоянно один и тот же знак. Предполагая $f(x)$ положительной и убывающей, получаем:

$$\int_h^{(m+1)h} f(x)\,dx \leqslant h\,[f(h)+f(2h)+\ldots+f(mh)] \leqslant \int_0^{mh} f(x)\,dx,$$

откуда, переходя к пределу при $m\to\infty$,

$$\int_h^{\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Предположение монотонности существенно лишь для больших x.

31. Полагая в 30 $f(x)=e^{-x}x^{\alpha-1}$, $e^{-h}=t$, получаем:

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{t\to 1-0}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha}(1^{\alpha-1}t+2^{\alpha-1}t^2+3^{\alpha-1}t^3+\ldots)=$$
$$=\lim_{t\to 1-0}(1-t)^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}t^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}\quad [\text{I } 89].$$

32. Из 30 при $f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$, $e^{-h}=t$, принимая во внимание, что

$$h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nh}}{nh}=\ln\frac{1}{1-e^{-h}}.$$

33. Из 30 при $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, $e^{-h}=t$, принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1\frac{dy}{1+y}=\ln 2,$$

или из 32 на основании тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1-t^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{1-t^{2n}}.$$

34. На основании равенства

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \int_0^\infty x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\right)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Можно было бы вести доказательство также следующим образом: имеем [VIII 49, VIII 65]

$$\sum_{n=1}^\infty n^\alpha \frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^\infty \sigma_\alpha(n)\,t^n,$$

$$\frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^\infty \sigma_\alpha(n)\,t^n = \sum_{n=1}^\infty [\sigma_\alpha(1)+\sigma_\alpha(2)+\ldots+\sigma_\alpha(n)]\,t^n.$$

Применяя 45 и I 88, получаем требуемый результат.

35. Из 30 при $f(x)=e^{-x^2}$, e^{-x^α}; подстановка $e^{-h^2}=t$, соответственно $e^{-h^\alpha}=t$.

36. Предел равен π. Из 30 при $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$, $h^{-1}=t$. Ср. формулу

$$\frac{1}{t}+\frac{2t}{t^2+1^2}+\frac{2t}{t^2+2^2}+\ldots+\frac{2t}{t^2+n^2}+\ldots=\pi\,\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}$$

[Hurwitz-Courant, стр. 120 *)].

37. Из 30 при $f(x)=\ln(1+x^{-\alpha})$, $h=t^{-\frac{1}{\alpha}}$. Производя замену переменных и интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^\infty \ln(1+x^{-\alpha})\,dx = \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{\alpha}}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

38. Применяем 30 при $f(x)=\ln(1-2x^{-2}\cos 2\varphi+x^{-4})$. Полагая $t=\frac{\pi}{h}e^{i\varphi}$ в формуле для $\frac{\sin t}{t}$ и беря в обеих частях квадрат абсолютной величины, получаем:

$$\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{n^2h^2}+\frac{1}{n^4h^4}\right)=\frac{h^2}{4\pi^2}\left[e^{\frac{2\pi}{h}\sin\varphi}+e^{-\frac{2\pi}{h}\sin\varphi}-2\cos\left(\frac{2\pi}{h}\cos\varphi\right)\right].$$

39. Имеем:

$$\sum_{n=0}^\infty (aq^n-aq^{n+1})\,q^{n+1}\ln a < \int_0^a \ln x\,dx < \sum_{n=0}^\infty (aq^n-aq^{n+1})\,q^n\ln a =$$
$$= a\ln a + \frac{aq\ln q}{1-q} \to a\ln a - a$$

---

*) Гурвиц, стр. 164. Гурвиц—Курант, стр. 124.

при $q \to 1$. Можно извлечь отсюда результат общего характера, аналогичный теореме 30.

40. Принимая во внимание 58, получаем:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^k \sim 2^{kn} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{k}{2}} n^{-\frac{k-1}{2}} \sum_{\nu=0}^{n} e^{-2k\left(\frac{\nu-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sim$$

$$\sim 2^{kn} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{k}{2}} n^{-\frac{k-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2kx^2}\, dx = 2^{kn} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{k}{2}} n^{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

По поводу деталей предельных переходов см., например, C. Jordan, Cours d'analyse, т. 2, 3-е изд., стр. 218—221, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

41. [По поводу задач 41—47 см. G. Pólya, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 26, стр. 196—201, 1917.]

42.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{n}{\nu} - \left[\frac{n}{\nu}\right]\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 1 - C,$$

где C — эйлерова постоянная. Полагая

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{1-x}\, dx = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + C,$$

замечаем, что также

$$\int_0^1 \alpha\, d\Phi(\alpha) = \Phi(1) - \int_0^1 \Phi(\alpha)\, d\alpha = 1 - C.$$

Иными словами [44], операции образования среднего значения и предельного перехода оказываются перестановочными.

43. [См. Cesàro, задача; Nouv. Ann., серия 3, т. 2, стр. 239, 1883.]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \left[\frac{n}{\nu}\right]\frac{\nu}{n}\right) = 1 - \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right] x\, dx =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

44. [G. L. Dirichlet, Werke, т. 2, стр. 97—104, Berlin, G. Reimer, 1897; см. G. Pólya, l. c. 41, стр. 197 и Gött. Nachr., 1917, стр. 149—159.] Задача приводится [VIII 4] к вычислению предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{\nu}\right]-\left[\frac{n}{\nu}-\alpha\right]\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\left[\frac{1}{x}-\alpha\right]\right)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\left[\frac{1}{x}-\alpha\right]\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+\alpha}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\alpha}+\ldots=\int_0^1\frac{1-x^\alpha}{1-x}\,dx.$$

При $\alpha=\frac{1}{2}$ согласуется с 41.

45. [L. c. 41, стр. 199—200.] Пусть сначала $\alpha>1$; тогда

$$(\alpha+1)\int_0^1\left[\frac{1}{x}\right]x^\alpha\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}(\alpha+1)\,x^\alpha\,dx=$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\ldots=\zeta(\alpha+1).$$

Полное изменение функции $\left[\frac{1}{x}\right]x^\alpha=f(x)$ [см. решение 9] есть

$$\left\{f(1)-f\left(\frac{1}{2}+0\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{1}{2}-0\right)-f\left(\frac{1}{2}+0\right)\right\}+$$

$$+\left\{f\left(\frac{1}{2}-0\right)-f\left(\frac{1}{3}+0\right)\right\}+\ldots=$$

$$=1\,(1^{-\alpha}-2^{-\alpha})+2^{-\alpha}+2\,(2^{-\alpha}-3^{-\alpha})+3^{-\alpha}+\ldots=2\zeta(\alpha)-1.$$

Отсюда вытекают оба утверждения задачи [9]. Первое из них справедливо также для $\alpha=1$. При $0<\alpha<1$ рассматриваем $\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)x^\alpha$ и принимаем во внимание 22.

46. [L. c. 41, стр. 200—201.] Полагая $\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=f(x)$, имеем [42]:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1-C;$$

кроме того, полное изменение $f(x)$ в интервале $\left(\frac{1}{m},\ 1\right)$ равно

$2(m-1)$. Имеем:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{n}{\nu}\right]-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}+1-C\right|=\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{\frac{m}{n}}^{1} f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|+\sum_{\nu=1}^{m}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f\left(\frac{\nu-1}{n}+x\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|dx.$$

Так как $\frac{m}{n}>\frac{1}{m}$, то первый член не превосходит $\frac{2(m-1)}{n}$ [9], второй меньше $\frac{m}{n}$.

47. $$\sum_{\nu=1}^{n}(U_\nu-G_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\left[\frac{n}{\nu}\right]=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\left(\left[\frac{n}{\alpha}\right]-\frac{n}{\nu}\right)+n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}.$$

Отношение первой суммы к n стремится к нулю [28].

48. Вытекает из определения определенного интеграла.

49. Вытекает из 20 при $f(x)=\ln x$. Относительно интеграла $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$ см. 39.

50. Полагая $c=\frac{a}{d}$, имеем:

$$\frac{G_n}{A_n}=\frac{\sqrt[n]{\frac{c}{n}\,\frac{c+1}{n}\,\frac{c+2}{n}\cdots\frac{c+n-1}{n}}}{\frac{c}{n}+\frac{n-1}{2n}}. \qquad [29].$$

51. $A_n=\frac{2^n}{n+1}$. Далее,

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}=\frac{(n!)^{n+1}}{(1!\,2!\,3!\ldots n!)^2}=\prod_{\nu=1}^{n}(n+1-\nu)^{n+1-2\nu}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{n+1-\nu}{n+1}\right)^{n+1-2\nu},$$

ибо $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(n+1-2\nu)=0$. Применяя 20, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln G_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{2\nu}{n+1}\right)\ln\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)=$$

$$=\int_0^1(1-2x)\ln(1-x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

52. В 48 полагаем $f(x)=1-2r\cos x+r^2=|r-e^{ix}|^2$, $a=0$, $b=2\pi$. Из тождества

$$r^n-1=\prod_{\nu=1}^{n}\left(r-e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}\right)$$

заключаем:

$$f_{1n}f_{2n}\ldots f_{nn}=(r^n-1)^2.$$

При $r=1$ отбрасываем обращающийся в нуль множитель f_{nn} и основываемся на **20**.

53. [G. Szegö, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 196, 1917. Решение—J. Mahrenholz, там же, серия 3, т. 28, стр. 79—80, 1920.] Предположение задачи означает, что $e^{-ix}(e^{i\xi}-r)$ вещественно, т. е. что аргументы у e^{ix} и $e^{i\xi}-r$ либо совпадают, либо дополняют друг друга до 2π. Так как ξ есть ближайшее к x число, обладающее этим свойством, то должен иметь место первый случай, откуда $e^{i\xi}$ есть точка пересечения луча, выходящего из r параллельно вектору e^{ix}, с окружностью единичного круга. Если поэтому $0\leqslant x<\pi$ и ξ' соответствует $x+\pi$, то $e^{i\xi}$, r и $e^{i\xi'}$ лежат на одной прямой. Так как произведение отрезков на хорде, проходящей через фиксированную точку, не изменяется при вращении хорды, то имеем:

$$|e^{i\xi'}-r|^2\,|e^{i\xi}-r|^2=(1-2r\cos\xi'+r^2)(1-2r\cos\xi+r^2)=(1-r^2)^2$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\ln(1-2r\cos\xi+r^2)+\ln(1-2r\cos\xi'+r^2)]\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-r^2)^2\,dx=\ln(1-r^2).$$

54. Из степенного ряда для $\ln(1+x)$ получаем, что при $|x|\leqslant\frac{1}{2}$

$$|\ln(1+x)-x|\leqslant x^2.$$

Пусть $|f(x)|<M$. Тогда при $\delta_nM\leqslant\frac{1}{2}$ будем иметь:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+f_{\nu n}\delta_n)-\sum_{\nu=1}^{n}f_{\nu n}\delta_n\right|\leqslant\delta_n\sum_{\nu=1}^{n}f_{\nu n}^2\delta_n.$$

Стоящая справа сумма при $n \to \infty$ стремится к некоторому интегралу. См. также 67. Вместо разбиения интервала $[a, b]$ на равные части можно рассматривать и другие разбиения, беря при этом ординаты вообще в любых точках получающихся подинтервалов, — совершенно так же, как при определении интеграла. Рассматриваемые образования стоят в таком же отношении к интегралам, в каком бесконечные произведения находятся к бесконечным рядам.

55. Согласно 54

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1+\frac{\nu}{n}\frac{1}{n}}{1-\frac{\nu}{n}\frac{1}{n}} = \frac{e^{\int_0^1 x\,dx}}{e^{-\int_0^1 x\,dx}} = e.$$

56. Рассматриваемое произведение равно

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)\,\alpha^n \cdot 2^n}{[(n+1)\,\alpha-1]\,[(n+2)\,\alpha-1]\ldots(2n\alpha-1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\,\alpha}{(n+1)\,\alpha-1}\cdot\frac{(n+2)\,\alpha}{(n+2)\,\alpha-1}\cdots\frac{(n+n)\,\alpha}{(n+n)\,\alpha-1} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)\alpha}\right)} \to \frac{1}{e^{-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{1+x}}} \qquad [54].$$

Частный случай, когда $\alpha=2$, т. е. тождество

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

получается также из разложения $\cos x$ в произведение при $x=\frac{\pi}{4}$. [Euler, Opera Omnia, серия 1, т. 17, стр. 419, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1915.]

57. $\dfrac{a+\nu d}{b+\nu d}=1+\dfrac{\alpha-\beta}{\delta}\,\dfrac{1}{1+\dfrac{\beta+\nu\delta}{n}}\,\dfrac{\delta}{n}.$

Замечание к решению 54 применяем к функции $f(x)=\frac{\alpha-\beta}{\delta}\frac{1}{1+x}$ в интервале $[0, \delta]$.

58. Пусть n четно, $n=2m$, $\frac{\nu-m}{\sqrt{m}}\to\lambda\sqrt{2}$; далее, $\lambda\geqslant 0$, $\nu>m$. Тогда

$$\frac{\binom{2m}{\nu}}{\binom{2m}{m}}=\frac{m}{m+1}\,\frac{m-1}{m+2}\cdots\frac{m-(\nu-m-1)}{m+(\nu-m)}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}}\;\frac{1-\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}}{1+\frac{2}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}}\cdots\frac{1-\frac{\nu-m-1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}}{1+\frac{\nu-m}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}}\to\frac{e^{-\int\limits_0^{\lambda\sqrt{2}}x\,dx}}{e^{\int\limits_0^{\lambda\sqrt{2}}x\,dx}}=e^{-2\lambda^2}$$

[54].

Дальше замечаем, что $\binom{2m}{m}\sim\frac{2^{2m}}{\sqrt{m\pi}}$ [202] и что в случае n нечетного, $n=2m+1$,

$$\frac{\binom{2m+1}{\nu}}{\binom{2m+1}{m+1}}=\frac{m+1}{\nu}\,\frac{\binom{2m}{\nu-1}}{\binom{2m}{m}}.$$

59. $$\prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{2n-\nu}{z-\nu}\right|^2=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{(2n-\nu)^2}{4n^2-4n\nu\cos\frac{t}{\sqrt{n}}+\nu^2}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{8n\nu}{(2n-\nu)^2}\sin^2\frac{t}{2\sqrt{n}}}\sim\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{8n\nu}{(2n-\nu)^2}\frac{t^2}{4n}}\sim e^{-\int\limits_0^1\frac{2xt^2}{(2-x)^2}dx}.$$

Правомерность замены $\sin\frac{t}{2\sqrt{n}}$ на $\frac{t}{2\sqrt{n}}$ обосновывается путем разложения в ряд по $\frac{t}{\sqrt{n}}$ и логарифмирования произведения, как в 54.

60. Введем для интересующей нас второй разности обозначение

$$F(b,\ d)-F(b,\ c)-F(a,\ d)+F(a,\ c)=\underset{R}{\Delta^2}F(x,\ y).$$

Тогда

$$\underset{R}{\Delta^2}F(x,\ y)=\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\underset{R_{\mu\nu}}{\Delta^2}F(x,\ y).$$

Применяя дифференциальную теорему о среднем значении к функции

$$G_\nu(x)=F(x,\ y_\nu)-F(x,\ y_{\nu-1}),$$

получаем:

$$\underset{R_{\mu\nu}}{\Delta^2 F(x,\ y)}=G_\nu(x_\mu)-G_\nu(x_{\mu-1})=$$

$$=(x_\mu-x_{\mu-1})\left[F'_x(\xi_\mu,\ y_\nu)-F'_x(\xi_\mu,\ y_{\nu-1})\right]=$$

$$=(x_\mu-x_{\mu-1})(y_\nu-y_{\nu-1})f(\xi_\mu,\ \eta_\nu)$$

$$(x_{\mu-1}<\xi_\mu<x_\mu,\quad y_{\nu-1}<\eta_\nu<y_\nu).$$

См. 7.

61. Умножая по строкам указанный определитель на определитель, получающийся из него заменой ε на $\bar{\varepsilon}$, находим:

$$\left|1+\varepsilon^{\lambda-\mu}+\varepsilon^{2(\lambda-\mu)}+\ldots+\varepsilon^{(n-1)(\lambda-\mu)}\right|_{\lambda,\ \mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1}=n^n.$$

С другой стороны,

$$\prod_{j<k}^{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1}|\varepsilon^j-\varepsilon^k|^2=\prod_{j<k}^{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1}\left(2\sin\frac{j-k}{n}\pi\right)^2.$$

Сравнивая эти два выражения, получаем:

$$\sum_{j<k}^{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1}\frac{\pi^2}{n^2}\ln\left|\sin\left(\frac{j\pi}{n}-\frac{k\pi}{n}\right)\right|=\frac{\pi^2}{2n}\ln n-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

Принять во внимание 20!

62. См. 54.

63. Обозначим интересующее нас выражение через Π_n. Примененное в решении 54 неравенство дает:

$$\left|\ln\Pi_n-\frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}f\left(\frac{\mu}{n},\ \frac{\nu}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n^4}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\sum_{\mu=1}^{n}f\left(\frac{\mu}{n},\ \frac{\nu}{n}\right)\right]^2$$

(n достаточно велико). Неравенство Коши [80] дает для правой части верхнюю границу

$$n^{-4}\sum_{\nu=1}^{n}n\sum_{\mu=1}^{n}\left[f\left(\frac{\mu}{n},\ \frac{\nu}{n}\right)\right]^2,$$

при возрастающем n стремящуюся к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_n=e^{\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\,dx\,dy}.$$

64. [См. G. Pólya, Math. Ann., т. 74, стр. 204—208, 1913.] Разобьем пространство тремя рядами плоскостей

$$x,\ y,\ z=\ldots,\ -\frac{5}{2n},\ -\frac{3}{2n},\ -\frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n},\ \frac{3}{2n},\ \frac{5}{2n},\ \ldots$$

на кубы объемом n^{-3} каждый. Интеграл задачи I 30 при $s=[n\sigma]$ представляет количество кубов, центры которых лежат в области $\mathfrak{B}$. Умноженный на n^{-3}, он стремится к указанному простому интегралу, как к пределу.

65. Имеем:

$$a_n=\sum\sum\ldots\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p=n}\nu_1^{\alpha_1-1}\nu_2^{\alpha_2-1}\ldots\nu_p^{\alpha_p-1}=$$

$$=\sum\sum\ldots\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{p-1}\leqslant n}\nu_1^{\alpha_1-1}\nu_2^{\alpha_2-1}\ldots\nu_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1}\times$$

$$\times(n-\nu_1-\nu_2-\ldots-\nu_{p-1})^{\alpha_p-1},$$

откуда

$$\frac{a_n}{n^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p-1}}=$$

$$=\frac{1}{n^{p-1}}\sum\sum\ldots\sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{p-1}\leqslant n}\left(\frac{\nu_1}{n}\right)^{\alpha_1-1}\left(\frac{\nu_2}{n}\right)^{\alpha_2-1}\ldots\left(\frac{\nu_{p-1}}{n}\right)^{\alpha_{p-1}-1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\nu_1}{n}-\frac{\nu_2}{n}-\ldots-\frac{\nu_{p-1}}{n}\right)^{\alpha_p-1}.\quad \text{Ср. 23.}$$

66. В обозначениях предыдущей задачи, имеем согласно решению 31

$$f_k(t)\sim\Gamma(\alpha_k)(1-t)^{-\alpha_k}\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

при $t\to1-0$. Далее, полагая

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p-1}z^n,$$

имеем:

$$F(t)\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p)(1-t)^{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p)},$$

т. е.

$$\lim_{t\to1-0}\frac{f_1(t)f_2(t)\ldots f_p(t)}{F(t)}=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p)}.$$

С другой стороны, согласно I 85 и II 65 этот предел равен указанному интегралу. Отсюда можно вывести без труда и p-кратный интеграл Дирихле-Жордана (см. C. Jordan, Cours d'analyse, т. 2, 3-е изд., стр. 223, Paris, Gauthier-Villars, 1913).

67. Интересующий нас член

$$\delta_n^p\sum\sum\ldots\sum_{1\leqslant\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_p\leqslant n}f_{\nu_1 n}f_{\nu_2 n}\ldots f_{\nu_p n}\to$$

$$\to\int\int\ldots\int_{a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_p\leqslant b}f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p=$$

$$=\frac{1}{p!}\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p.$$

Между прочим [I 62], мы имеем:

$$\prod_{\nu=1}^{n}(1+zf_{\nu n}\delta_n) \leqslant (1+zM\delta_n)^n \leqslant e^{zM\delta_n n} = e^{zM(b-a)}.$$

В соединении с полученным результатом это дает [I 180]:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}(1+zf_{\nu n}\delta_n) = 1+\frac{z}{1!}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{z^2}{2!}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z^p}{p!}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^p+\ldots = e^{z\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Метод, лежащий в основе этого нового решения задачи **54**, может быть также применен для обоснования предельного перехода, встречающегося при решении интегрального уравнения типа Фредгольма. Можно, обратно, вывести **67** из **54**, основываясь на I **179**.

68. Построчное перемножение дает определитель m-го порядка P с общим членом

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu n}^{(\lambda)}\varphi_{\nu n}^{(\mu)} \sim \frac{n}{b-a}\int_a^b f_\lambda(x)\varphi_\mu(x)\,dx \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

С другой стороны $(n \geqslant m)$.

$$P = \sum_{1\leqslant\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_m\leqslant n}\begin{vmatrix} f_{\nu_1 n}^{(1)} & f_{\nu_2 n}^{(1)} & \ldots & f_{\nu_m n}^{(1)} \\ f_{\nu_1 n}^{(2)} & f_{\nu_2 n}^{(2)} & \ldots & f_{\nu_m n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\nu_1 n}^{(m)} & f_{\nu_2 n}^{(m)} & \ldots & f_{\nu_m n}^{(m)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{\nu_1 n}^{(1)} & \varphi_{\nu_2 n}^{(1)} & \ldots & \varphi_{\nu_m n}^{(1)} \\ \varphi_{\nu_1 n}^{(2)} & \varphi_{\nu_2 n}^{(2)} & \ldots & \varphi_{\nu_m n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\nu_1 n}^{(m)} & \varphi_{\nu_2 n}^{(m)} & \ldots & \varphi_{\nu_m n}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Придавая здесь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ независимо друг от друга все значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим слева $m!P$. Сумма в правой части будет асимптотически равна указанному в задаче m-кратному интегралу, умноженному на $\left(\frac{n}{b-a}\right)^m$.

69. Вытекает из теоремы об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних путем предельного перехода [48].

70. [J. L. W. V. Jensen, Acta Math., т. 30, стр. 175, 1906.] Поступаем аналогично приведенному в примечании на стр. 74—75 доказательству Коши теоремы об арифметическом геометрическом и гармоническом средних (соответствующей случаю $\varphi(t)=\ln t$): доказываем утверждение сначала для случая $n=2^m$, затем вообще.

71. [J. L. W. V. Jensen, 1. c. 70.] В обозначениях задачи 48 имеем для каждого n:

$$\varphi\left(\frac{f_{1n}+f_{2n}+\ldots+f_{nn}}{n}\right)\leqslant \text{ или } \geqslant \frac{\varphi(f_{1n})+\varphi(f_{2n})+\ldots+\varphi(f_{nn})}{n}.$$

Безгранично увеличиваем n и принимаем во внимание **124**, **110**.

72. Если t_1 и t_2 — произвольные две точки интервала $[m, M]$, причем $t_1 \neq t_2$, то

$$\varphi(t_1)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{t_1-t_2}{2}\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{(t_1-t_2)^2}{8}\varphi''(\tau_1),$$

$$\varphi(t_2)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{t_2-t_1}{2}\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{(t_1-t_2)^2}{8}\varphi''(\tau_2),$$

где τ_1 и τ_2 — две надлежащим образом выбранные точки соответственно между t_1 и $\frac{t_1+t_2}{2}$ и между t_2 и $\frac{t_1+t_2}{2}$. Если всюду $\varphi''(t)>0$, то отсюда получаем:

$$\varphi(t_1)+\varphi(t_2)-2\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)>0.$$

73. [72.]

74. [J. L. W. V. Jensen, 1. c. 70.] Для целочисленных p_ν утверждение вытекает из **70**, в применении к $p_1+p_2+\ldots+p_n$ точкам, из которых p_1 совпадают с t_1, p_2 — с t_2, ..., p_n — с t_n. Это доказывает теорему также для рациональных p_ν; отсюда без труда получается теорема для произвольных p_ν, если принять во внимание непрерывность $\varphi(t)$ [**124**].

75. [J. L. W. V. Jensen, 1. c. 70.] Вводим обозначения

$$f_{\nu n}=f\left(x_1+\nu\frac{x_2-x_1}{n}\right),\quad p_{\nu n}=p\left(x_1+\nu\frac{x_2-x_1}{n}\right)\qquad (\nu=1, 2, \ldots, n),$$

тогда по **73**

$$\varphi\left(\frac{p_{1n}f_{1n}+p_{2n}f_{2n}+\ldots+p_{nn}f_{nn}}{p_{1n}+p_{2n}+\ldots+p_{nn}}\right)\leqslant$$

или

$$\geqslant\frac{p_{1n}\varphi(f_{1n})+p_{2n}\varphi(f_{2n})+\ldots+p_{nn}\varphi(f_{nn})}{p_{1n}+p_{2n}+\ldots+p_{nn}}.$$

Теперь безгранично увеличиваем n.

76. [O. Hölder, Gött. Nachr. 1889, стр. 38.] Положим

$$\frac{p_1t_1+p_2t_2+\ldots+p_nt_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=M;$$

тогда

$$\varphi(t_\nu)=\varphi(M)+(t_\nu-M)\varphi'(M)+\frac{(t_\nu-M)^2}{2}\varphi''(\tau_\nu)$$

и, значит,

$$\frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)+\ldots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=$$

$$=\varphi(M)+\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{(t_\nu-M)^2}{2}\varphi''(\tau_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}>\varphi(M),$$

если по крайней мере одно из чисел $t_\nu - M$ отлично от нуля.

77. [См. G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 21, стр. 370—371, 1913.] Аналогично 76.

78. Полагаем в 76 $\varphi(t)=-\ln t$, соответственно $t\ln t$, $M>m>0$, и заменяем a_ν на $\frac{1}{a_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

79. Полагаем в 77 $\varphi(t)=-\ln t$, соответственно $t\ln t$, $M>m>0$, и заменяем $f(x)$ на $\frac{1}{f(x)}$.

80. Первое доказательство.

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2-\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2=\sum_{i<k}^{1, 2, \ldots, n}(a_i b_k-a_k b_i)^2\geqslant 0.$$

Второе доказательство. Форма

$$(\lambda a_1+\mu b_1)^2+(\lambda a_2+\mu b_2)^2+\ldots+(\lambda a_n+\mu b_n)^2=A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2,$$

квадратичная относительно переменных λ и μ, будет для всех λ и μ, $\lambda^2+\mu^2>0$, положительна (соответственно неотрицательна, если можно подобрать такую пару значений λ, μ, чтобы удовлетворялись уравнения $\lambda a_\nu+\mu b_\nu=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$). Отсюда вытекает, что дискриминант $AC-B^2$ должен быть положителен (неотрицателен).

81. Получается предельным переходом из 80. Полагая

$$f_{\nu n}=f\left(x_1+\nu\frac{x_2-x_1}{n}\right),\quad g_{\nu n}=g\left(x_1+\nu\frac{x_2-x_1}{n}\right),$$

получаем [80]:

$$\left(\frac{f_{1n}g_{1n}+f_{2n}g_{2n}+\ldots+f_{nn}g_{nn}}{n}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{f_{1n}^2+f_{2n}^2+\ldots+f_{nn}^2}{n}\cdot\frac{g_{1n}^2+g_{2n}^2+\ldots+g_{nn}^2}{n}.$$

Теперь безгранично увеличиваем n. Можно, впрочем, непосредственно перенести методы доказательства теоремы 80; по поводу первого см. 68.

82. Пусть $t\neq 0$. Положим $a_\nu^t=A_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Применяя 78, получаем:

$$t^2\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=\frac{A_1\ln A_1+A_2\ln A_2+\ldots+A_n\ln A_n}{A_1+A_2+\ldots+A_n}-\ln\frac{A_1+A_2+\ldots+A_n}{n}>0.$$

Имеем:

$$\psi(-\infty)=\mathrm{Min}\,(a),\quad \psi(-1)=\mathfrak{H}\,(a),\quad \psi(0)=\mathfrak{G}\,(a),\quad \psi(1)=\mathfrak{A}\,(a),$$
$$\psi(+\infty)=\mathrm{Max}\,(a).$$

Тем самым мы получили новое доказательство теоремы об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних.

83. Полагаем $[f(x)]^t=F(x)$ $(t\neq 0)$. Применяя 79, получаем:

$$t^2\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)}=\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x)\ln F(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x)\,dx}-\ln\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x)\,dx\right)\geqslant 0.$$

(То же можно получить и посредством предельного перехода из 82.) Имеем:

$$\Psi(-1)=\mathfrak{H}\,(f),\quad \Psi(0)=\mathfrak{G}\,(f),\quad \Psi(1)=\mathfrak{A}\,(f).$$

Желая вычислить $\Psi(+\infty)$, обозначим через M наибольшее значение функции $f(x)$ в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и через δ — длину подинтервала, в котором $f(x)>M-\varepsilon$. Тогда при $t>0$

$$(M-\varepsilon)\left(\frac{\delta}{x_2-x_1}\right)^{\frac{1}{t}}\leqslant\Psi(t)\leqslant M,$$

откуда $\Psi(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}\Psi(t)=M$. Аналогично вычисляется и $\Psi(-\infty)$. Мы получили, между прочим, новое доказательство теоремы 69.

84. [См. H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, стр. 117, сноска, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.]

Первое доказательство. Пусть $0\leqslant t\leqslant 1$. Положим

$$\varphi(t)=\prod_{\nu=1}^{n}[ta_\nu+(1-t)\,b_\nu]^{\frac{1}{n}};$$

тогда [80]

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu-b_\nu}{ta_\nu+(1-t)\,b_\nu}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{ta_\nu+(1-t)\,b_\nu}\right)^2<0,$$

если только a_ν не пропорциональны b_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$. Частный случай теоремы 90.

Второе доказательство. Положим $\ln b_\nu-\ln a_\nu=t_\nu$. Тогда интересующее нас неравенство перепишется так:

$$\frac{\ln\left(1+e^{t_1}\right)+\ln\left(1+e^{t_2}\right)+\ldots+\ln\left(1+e^{t_n}\right)}{n}\geqslant\ln\left(1+e^{\frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n}}\right).$$

Справедливость его следует теперь из того, что $\ln(1+e^t)$ представляет собой функцию, выпуклую снизу [73].

85. [См. W. Blaschke, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 281, 1916.] Полагаем

$$\varphi(t) = e^{\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} \ln[tf(x)+(1-t)g(x)]\,dx} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

тогда согласно 81 имеем:

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \left(\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)-g(x)}{tf(x)+(1-t)g(x)}\,dx\right)^2 - \\ - \frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)}{tf(x)+(1-t)g(x)}\right)^2 dx \leqslant 0.$$

(Можно получить также с помощью предельного перехода из 84.) Частный случай теоремы 91.

86. Последовательно применяем 85 к функциям

$$p_1f_1(x),\ p_2f_2(x),\ \ldots,\ p_mf_m(x).$$

87. Имеем:

$$l_k = \sup \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{(x^{(\nu)}-x^{(\nu-1)})^2+[f_k(x^{(\nu)})-f_k(x^{(\nu-1)})]^2}$$

для всех возможных разбиений интервала $[x_1, x_2]$ точками $x_1 = x^{(0)} < x^{(1)} < \ldots < x^{(n-1)} < x^{(n)} = x_2$. Следовательно, для любого разбиения будем иметь:

$$\frac{p_1l_1+p_2l_2+\ldots+p_ml_m}{p_1+p_2+\ldots+p_m} \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k\sqrt{(x^{(\nu)}-x^{(\nu-1)})^2+[f_k(x^{(\nu)})-f_k(x^{(\nu-1)})]^2}}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k}.$$

Так как функция $\sqrt{c^2+t^2}$ в любом интервале выпукла снизу [73], то правая часть

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{(x^{(\nu)}-x^{(\nu-1)})^2+[F(x^{(\nu)})-F(x^{(\nu-1)})]^2},$$

откуда вытекает утверждение.

88. Полагаем

$$p_\nu^{(n)}=\int\limits_{(\nu-1)\frac{2\pi}{n}}^{\nu\frac{2\pi}{n}} p(\xi)\,d\xi \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$F_n(x)=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu^{(n)} f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+x\right)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu^{(n)}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

равномерно относительно x. Действительно, обозначая через ω_n максимум колебания $f(x)$ в интервале длины $\frac{2\pi}{n}$ (стр. 84), будем иметь:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{(\nu-1)\frac{2\pi}{n}}^{\nu\frac{2\pi}{n}} p(\xi)\left[f(\xi+x)-f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+x\right)\right]d\xi\right|<\omega_n\int\limits_0^{2\pi} p(\xi)\,d\xi.$$

Тем самым $\mathfrak{G}(F)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{G}(F_n)$; согласно 86 $\mathfrak{G}(F_n)\geqslant\mathfrak{G}(f)$.

89. Прежде всего в обозначениях решения 88 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ и притом равномерно относительно x в интервале $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. А именно

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{(\nu-1)\frac{2\pi}{n}}^{\nu\frac{2\pi}{n}} p(\xi)\left[f(\xi+x)-f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+x\right)\right]d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{Max}(p)\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\left|f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+\xi+x\right)-f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+x\right)\right|\right]d\xi,$$

откуда

$$|F_n(x)-F(x)|\leqslant\frac{2\pi}{n}\,\frac{\operatorname{Max}(p)}{\int\limits_0^{2\pi} p(\xi)\,d\xi}\,V,$$

где V обозначает полное изменение $f(x)$ в интервале $[0,\ 2\pi]$.

Так как длина дуги кривой $y=f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n}+x\right)$ для всех ν равна l, то [87] для длины L_n кривой $y=F_n(x)$ имеет место оценка $L_n \leqslant l$. Кроме того, при любом разбиении $0 = x^{(0)} < x^{(1)} < \ldots < x^{(s-1)} < x^{(s)} = 2\pi$ интервала $[0,\ 2\pi]$ имеем:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \sqrt{(x^{(\alpha)} - x^{(\alpha-1)})^2 + [F(x^{(\alpha)}) - F(x^{(\alpha-1)})]^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha=1}^{s} \sqrt{(x^{(\alpha)} - x^{(\alpha-1)})^2 + [F_n(x^{(\alpha)}) - F_n(x^{(\alpha-1)})]^2} \leqslant l.$$

F. Lukács рассмотрел следующий интересный случай этой теоремы: длины дуг кривых, соответствующих средним (в смысле Фейера) ряда Фурье функции $f(x)$ [134], не могут превосходить длины самой кривой $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. (В точках разрыва функции $f(x)$ скачок причисляется к длине дуги; равным образом и $|f(+0) - f(2\pi - 0)|$.)

90. Пусть $\varkappa \neq 0$ [84]. Полагаем $A_\nu = ta_\nu + (1-t)\,b_\nu$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и $\varphi(t) = \mathfrak{M}_\varkappa(A)$. Тогда

$$\varphi''(t) = (\varkappa - 1)\left(A_1^\varkappa + A_2^\varkappa + \ldots + A_n^\varkappa\right)^{\frac{1}{\varkappa} - 2} \Big\{\left(A_1^\varkappa + A_2^\varkappa + \ldots + A_n^\varkappa\right) \times$$
$$\times \left[(a_1 - b_1)^2 A_1^{\varkappa-2} + (a_2 - b_2)^2 A_2^{\varkappa-2} + \ldots + (a_n - b_n)^2 A_n^{\varkappa-2}\right] -$$
$$- \left[(a_1 - b_1) A_1^{\varkappa-1} + (a_2 - b_2) A_2^{\varkappa-1} + \ldots + (a_n - b_n) A_n^{\varkappa-1}\right]^2\Big\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, всегда положительно, если только a_ν не пропорциональны b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ [80]. Поэтому $\operatorname{sgn} \varphi''(t) = \operatorname{sgn}(\varkappa - 1)$ и, значит,

$$2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \text{ или } \geqslant \varphi(0) + \varphi(1),$$

смотря по тому, будет ли $\varkappa \geqslant 1$ или $\leqslant 1$. При $\varkappa = 2$ $\mathfrak{M}_\varkappa(a)$ представляет расстояние точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-мерного пространства от начала. В этом случае теорема утверждает, что длина одной из сторон треугольника не превышает суммы длин двух других.

91. Полагаем в 90 $a_\nu = f\left(x_1 + \nu\,\frac{x_2 - x_1}{n}\right)$, $b_\nu = g\left(x_1 + \nu\,\frac{x_2 - x_1}{n}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и безгранично увеличиваем n.

92. [По поводу частного случая, когда $a_\nu b_\nu = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, см. P. Schweitzer, Math. és phys. lapok, т. 23, стр. 257—261, 1914.] Перенумеруем числа a_ν в порядке возрастания: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Тогда при разыскании максимума мы можем ограничиться системами значений $b_1, b_2, \ldots, b_n$, расположенных в убывающем порядке: $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. В самом деле, если $b_\nu < b_\mu$, а $\nu < \mu$, то $b_\nu^2 + b_\mu^2 = b_\mu^2 + b_\nu^2$, $a_\nu b_\nu + a_\mu b_\mu \geqslant a_\nu b_\mu + a_\mu b_\nu$ и можно поменять местами b_ν и b_μ. Далее, мы можем предположить, что не все a_ν, как и не все b_ν, совпадают, т. е. что

$$a_n b_1 - a_1 b_n = (a_n - a_1)\,b_1 + a_1(b_1 - b_n) > 0.$$

Считая, что $n>2$, определяем числа $u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, v_2, v_3, \ldots$ $\ldots, v_{n-1}$ уравнениями

$$a_\nu^2 = u_\nu a_1^2 + v_\nu a_n^2, \quad b_\nu^2 = u_\nu b_1^2 + v_\nu b_n^2 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Имеем $u_\nu \geqslant 0$, $v_\nu \geqslant 0$; далее, $a_\nu b_\nu \geqslant u_\nu a_1 b_1 + v_\nu a_n b_n$ [80]. Равенство $u_\nu = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $v_\nu = 1$, $a_\nu = a_{\nu+1} = \ldots = a_n$, $b_\nu = b_{\nu+1} = \ldots = b_n$. Таким же точно образом из $v_\nu = 0$ вытекает, что $u_\nu = 1$, и т. д. Если $u_\nu > 0$, $v_\nu > 0$, то $a_\nu b_\nu > u_\nu a_1 b_1 + v_\nu a_n b_n$.

Полагая $1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} = p$, $v_2 + v_3 + \ldots + v_{n-1} + 1 = q$, получаем, что интересующее нас выражение не превосходит

$$\frac{(pa_1^2 + qa_n^2)(pb_1^2 + qb_n^2)}{(pa_1 b_1 + qa_n b_n)^2}.$$

Совпадение может быть тогда и только тогда, когда u_ν, v_ν будут частью нули, частью единицы, p и q — целые и $a_1 = a_2 = \ldots$ $\ldots = a_p$, $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_n$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_p$, $b_{p+1} = b_{p+2} = \ldots$ $\ldots = b_n$. Но последнее выражение равно

$$1 + pq\left(\frac{a_n b_1 - a_1 b_n}{pa_1 b_1 + qa_n b_n}\right)^2 \leqslant 1 + pq\left(\frac{a_n b_1 - a_1 b_n}{2\sqrt{pa_1 b_1 qa_n b_n}}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{\frac{a_n b_1}{a_1 b_n}} + \sqrt{\frac{a_1 b_n}{a_n b_1}}}{2}\right)^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $pa_1 b_1 = qa_n b_n$. Заменяя под знаками корней a_1, a_n, b_1, b_n соответственно на a, A, B, b, отчего величина корней может только увеличиться, мы и получаем искомый результат.

93. [По поводу частного случая $a = b$, $A = B$ см. J. Kürschák, Math. és phys. lapok, т. 23, стр. 378, 1914.] Полагаем в **92**

$$a_\nu = f\left(x_1 + \nu\frac{x_2 - x_1}{n}\right), \quad b_\nu = g\left(x_1 + \nu\frac{x_2 - x_1}{n}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и безгранично увеличиваем n.

94. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 28, стр. 174, 1920.] Пусть функция $f(x)$ не равна постоянной. Покажем, что квадратичная форма

$$Q(x, y) = \int_0^1 f(t)\,[(2a+1)\,t^{2a}x^2 + 2\,(a+b+1)\,t^{a+b}xy +$$
$$+ (2b+1)\,t^{2b}y^2]\,dt = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

является неопределенной, т. е. что $AC - B^2 < 0$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^1 t^k f(t)\,dt = \left(\frac{t^{k+1}}{k+1} f(t)\right)_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1}\,df(t) =$$
$$= \frac{f(1)}{k+1} - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1}\,df(t) \qquad (k>0),$$

в предположении, что $f(1) = \lim_{t\to 1-0} f(t)$ конечно; это даст:

$$Q(x,\ y) = f(1)(x+y)^2 - \int_0^1 (t^a x + t^b y)^2\, t\, df(t),$$

откуда $Q(1,\ 1) > 0$, $Q(1,\ -1) < 0$. В случае $f(1) = \infty$ мы также получаем с соблюдением некоторых предосторожностей [112], что $Q(1,\ -1) < 0$.

95. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 26, стр. 65, 1917. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 28, стр. 81—82, 1920.]

96. [См. I. Schur, Sitzungsber. Berl. Math. Ges., т. 22, стр. 16—17, 1923.] Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны. Так как $\ln x$ есть функция, выпуклая сверху в любом положительном интервале, имеем:

$$\ln y_\mu \geqslant a_{\mu 1} \ln x_1 + a_{\mu 2} \ln x_2 + \ldots + a_{\mu n} \ln x_n \qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Складывая эти неравенства, получаем требуемый результат.

97. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 20, стр. 272, 1913. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 22, стр. 361—362, 1914.]

98. [См. E. Steinitz, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 19, стр. 361, 1912. Решение — G. Pólya, там же, серия 3, т. 21, стр. 290, 1913.] Имеем $g(x) = 0$ при целом x и $g(x) = 1$ при нецелом x. Отсюда $G(x) = 0$ для x рационального и $G(x) = 1$ для x иррационального. Все нижние суммы равны нулю, все верхние в любом интервале $a \leqslant x \leqslant b$ равны $b-a$. Таким образом, $G(x)$ не интегрируема ни в каком интервале.

99. Пусть x иррационально, $f(x) = 0$; тогда $x+h$ либо иррационально, т. е. $f(x+h) = 0$, либо, если $x+h$ рационально, $x+h = \frac{p}{q}$, имеем $f(x+h) = \frac{1}{q}$, что стремится к нулю вместе с h. Если x рационально, $x = \frac{p}{q}$, то $f(x) = q^{-1}$, и при $x+h$ иррациональном, $f(x+h) = 0$, имеем $f(x+h) - f(x) = -q^{-1}$. Все нижние суммы равны нулю. Разобьем теперь интервал $0 \leqslant x \leqslant 1$ на k^3 равных частей. Так как имеется самое большее $1+2+\ldots$

$\ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ положительных правильных дробей со знаменателями $\leqslant k$, то верхняя сумма $< \frac{k(k-1)}{2}\frac{1}{k^3} + \frac{2}{k^3} + \frac{1}{k}\cdot 1$.

100. Обозначим колебание $f(x)$ в интервале $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ через Ω_ν. Пусть, кроме того, $|\varphi(x)| < M$. Тогда

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(y_\nu)\varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - \sum_{\nu=1}^{n} f(\eta_\nu)\varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})\right| <$$

$$< M\sum_{\nu=1}^{n}\Omega_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Выражение в правой части стремится к нулю.

101. Обозначим через Ω_ν колебание $\varphi(x)$ в интервале

$$a + (\nu-1)\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a + \nu\frac{b-a}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть, кроме того, $|\varphi(x)| < M$. Беря $\delta < \frac{b-a}{n}$, будем иметь:

$$\int_a^b |\varphi(x+\delta) - \varphi(x)|\,dx < \frac{b-a}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\Omega_\nu + \Omega_{\nu+1}) + 2M\frac{b-a}{n}.$$

102. Образуем, как на стр. 56, верхнюю и нижнюю суммы

$$O = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}), \quad U = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

выбирая разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ так, чтобы выполнялось неравенство $O - U < \varepsilon$. Функцию $\Psi(x)$ определим следующим образом: $\Psi(x) = M_\nu$ в полуоткрытых подинтервалах $x_{\nu-1} \leqslant x < x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $\Psi(x) = M_n$ в замкнутом n-м интервале $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$. Аналогично определим $\psi(x)$ через m_ν. Очевидно, будем иметь:

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx = O, \quad \int_a^b \psi(x)\,dx = U.$$

Выбор точек разбиения подчинен лишь тому единственному ограничению, что максимальная длина подинтервалов $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ с возрастанием n должна стремиться к нулю. Таким образом, эти точки можно взять, в частности, на равных расстояниях друг от друга. Определенные только что функции $\psi(x)$, $\Psi(x)$ непрерывны справа, но можно было бы сделать их непрерывными слева.

103. Определим $\Psi(x)$ и $\psi(x)$, как в решении **102**. Полное изменение функции $\Psi(x)$ равно

$$|M_2 - M_1| + |M_3 - M_2| + \ldots + |M_n - M_{n-1}|,$$

а полное изменение $\psi(x)$ равно

$$|m_2 - m_1| + |m_3 - m_2| + \ldots + |m_n - m_{n-1}|.$$

Оба они не превышают полного изменения функции $f(x)$, так как в каждом частичном интервале $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$ функция $f(x)$ принимает значения, сколь угодно близкие как к M_ν, так и к m_ν.

104. Разобьем интервал $[0, 1]$ на n равных частей и рассмотрим какой-либо из подинтервалов $\left[\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n}\right]$. В левой его половине $s(nx) = +1$, в правой $s(nx) = -1$. Поэтому

$$\int_0^1 f(x)\, s(nx)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{\nu-1}{n} + y\right) - f\left(\frac{\nu-1}{n} + y + \frac{1}{2n}\right) \right\} dy.$$

Выражение в скобках по абсолютной величине не превышает колебания $f(x)$ в интервале $\frac{\nu-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\nu}{n}$.

105. [Riemann, Werke, стр. 240, Leipzig, B. G. Teubner, 1876 *).] Мы можем положить $a = 0$, $b = 2\pi$. Имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin ny \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n} + y\right) - f\left((\nu-1)\frac{2\pi}{n} + y + \frac{\pi}{n}\right) \right\} dy.$$

Выражение в скобках по абсолютной величине не превышает колебания $f(x)$ в интервале $(\nu-1)\frac{2\pi}{n} \leqslant x \leqslant \nu\frac{2\pi}{n}$.

106. [L. Fejér, J. für Math., т. 138, стр. 27, 1910.] Можно положить $a = 0$, $b = 2\pi$. Имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, |\sin nx|\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{(\nu-1)\frac{2\pi}{n}}^{\nu\frac{2\pi}{n}} f(x)\, |\sin nx|\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu n} \int_{(\nu-1)\frac{2\pi}{n}}^{\nu\frac{2\pi}{n}} |\sin nx|\, dx,$$

где $f_{\nu n}$ — некоторое значение, заключающееся между верхней и нижней гранями $f(x)$ в интервале $(\nu-1)\frac{2\pi}{n} \leqslant x \leqslant \nu\frac{2\pi}{n}$.

---

*) Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948, стр. 250—251.

107. Если множество точек разрыва ограниченной функции $f(x)$, заданной в интервале a, b, имеет лишь конечное число предельных точек, то все точки разрыва можно заключить в конечное число интервалов, сумма длин которых как угодно мала, так, чтобы вне этих интервалов $f(x)$ была непрерывна. Но тогда, очевидно, $f(x)$ будет собственно интегрируема. Интересующая нас функция имеет точками разрыва $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, к которым при $\alpha = 0$ прибавляется еще точка 0.

108. Согласно критерию Римана в каждом подинтервале $[a_0, b_0]$ интервала $[a, b]$ можно указать такой еще меньший подинтервал $[a_1, b_1]$, $b_1 - a_1 < \frac{b_0 - a_0}{2}$, чтобы колебание в нем было меньше половины колебания в $[a_0, b_0]$. Таким образом, мы получаем последовательность вложенных друг в друга интервалов $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, таких, что $b_n - a_n < \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, причем колебание $f(x)$ в $[a_n, b_n]$ меньше $\frac{1}{2^n}$ колебания в $[a_0, b_0]$. Точка $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ лежит в $[a_0, b_0]$, причем в этой точке $f(x)$ непрерывна.

109. Пусть $f(\xi) = 0$ в каждой точке непрерывности ξ функции $f(x)$, $a < \xi < b$. Имеем:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \lim \sum_{\nu=1}^{n} [f(\xi_\nu)]^2 (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

где ξ_ν — произвольная точка интервала $x_{\nu-1} < \xi < x_\nu$, а максимальная длина этих интервалов с возрастанием n стремится к нулю. Согласно 108 можно ξ_ν выбрать так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = \xi_\nu$ и, значит, $f(\xi_\nu) = 0$.

Пусть, с другой стороны, $f(\xi) \neq 0$ в некоторой точке непрерывности ξ функции $f(x)$, $a < \xi < b$. Тогда можно будет указать такое достаточно малое δ, $\delta > 0$, чтобы при $|x - \xi| < \delta$ выполнялось неравенство $[f(x)]^2 > \frac{[f(\xi)]^2}{2}$. Отсюда будем иметь:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \geqslant \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} [f(x)]^2\,dx \geqslant \delta [f(\xi)]^2 > 0.$$

110. Зададим произвольно малые ε и η $(\varepsilon, \eta > 0)$. Выберем прежде всего такое δ, чтобы при $|y_1 - y_2| < \delta$ выполнялось неравенство $|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon$. Далее, так как $f(x)$ интегрируема, то можно указать такое подразбиение интервала $a \leqslant x \leqslant b$, чтобы общая длина тех подинтервалов, в которых колебание больше или равно δ, была меньше η. Тогда в других интервалах колебание функции $\varphi[f(x)]$ не будет превышать ε.

111. [См. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, стр. 379—380, Leipzig und Berlin, A. G. Teubner, 1918.] Пусть $f(x)$ определена, как в **99**, $G(x)$ — как в **98**, и

$$\varphi(y)=\begin{cases}1 \text{ для } y=0,\\ 0 \text{ для } y\neq 0.\end{cases}$$

Тогда $\varphi[f(x)]=G(x)$.

112. Пусть $f(x)$, скажем, не возрастает. При $0<x<\frac{1}{2}$ имеем:

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} x^a f(x)\,dx \geqslant f(x)\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} x^a\,dx = x^{a+1}f(x)\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1}}{a+1},$$

$$\int\limits_{x}^{2x} x^a f(x)\,dx \leqslant f(x)\int\limits_{x}^{2x} x^a\,dx = x^{a+1}f(x)\,\frac{2^{a+1}-1}{a+1}.$$

При $a=-1$ заменяем оба последних множителя (являющихся, между прочим, положительными) на $\ln 2$.

113. Заменой x на $\frac{1}{x}$ в **112** или непосредственно как в **112**.

114. Интеграл между 0 и ε $(\varepsilon>0)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $x^\alpha\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{x^\beta}$ или также от $x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x^{\beta+2}}$, т. е. для $\beta<-2$ при любых α, а для $\beta\geqslant-2$ тогда и только тогда, когда $\alpha>-1$. Интеграл между ω и ∞ $(\omega>0)$ для $\beta\leqslant 0$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha<-1$. Пусть теперь $\beta>0$ и n — целое. Тогда при $n\to\infty$ будем иметь:

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^\alpha\,|\cos x|^{x^\beta}\,dx \sim (n\pi)^\alpha \int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|^{(x+n\pi)^\beta}\,dx.$$

Последний интеграл заключен между интегралами

$$\int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|^{(n\pi)^\beta}\,dx \quad\text{и}\quad \int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|^{[(n+1)\pi]^\beta}\,dx,$$

которые оба возрастают, как $n^{-\frac{\beta}{2}}$ [**202**]. Таким образом, для сходимости необходимо, чтобы было $\alpha-\frac{\beta}{2}<-1$. В итоге получаем, что интересующий нас интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha<-1$, $\beta<-2$ или же когда $-1<\alpha<\frac{\beta}{2}-1$.

115. Предельная функция $f(x)$ собственно интегрируема в каждом конечном интервале $-\omega\leqslant x\leqslant\omega$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f_n(x)\,dx = \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\,dx.$$

Так как $|f(x)| \leqslant F(x)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ также существует. Имеем:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{-\infty}^{-\omega} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\omega}^{\infty} f(x)\,dx\right| +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{-\omega} F(x)\,dx + \int\limits_{\omega}^{\infty} F(x)\,dx + \left|\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\,dx - \int\limits_{-\omega}^{\omega} f_n(x)\,dx\right|.$$

Первые четыре члена в правой части можно сделать сколь угодно малыми, выбирая достаточно большое ω. Фиксируя затем ω, мы можем взять столь большое n, чтобы и последний член сделался сколь угодно малым.

116. Из VI 31, полагая $\nu = \frac{n}{2} + \lambda_n \sqrt{n}$, $\lambda_n \to \lambda$, получаем:

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{\nu} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \left(\cos\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^n \cos\lambda_n x\,dx.$$

Полагаем в **115**

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^n \cos\lambda_n x$$

при $|x| \leqslant \pi\sqrt{n}$ и $f_n(x) = 0$ при $|x| > \pi\sqrt{n}$. Тогда $f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{8}}\cos\lambda x$. Мажорантную функцию $F(x)$ получаем следующим образом: так как $\frac{\ln\cos x}{x^2}$ во всем открытом интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ представляет собой непрерывную отрицательную функцию, при $x \to +0$ стремящуюся к $-\frac{1}{2}$, а при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ стремящуюся к $-\infty$, то можно указать такую постоянную $K > 0$, что

$$\frac{\ln\cos x}{x^2} < -K, \quad \cos x \leqslant e^{-Kx^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В качестве $F(x)$ можно взять $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{K}{4}x^2}$.

117. Полагая

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\nu y} = P_n(y),$$

имеем:

$$\int\limits_0^{\infty} P_n(y)\,y^{s-1}\,dy = (a_1 1^{-s} + a_2 2^{-s} + \ldots + a_n n^{-s})\,\Gamma(s) = D_n(s)\,\Gamma(s).$$

Согласно **115** достаточно показать, что $|P_n(y)\,y^{s-1}| < F(y)$, причем интеграл $\int\limits_0^\infty F(y)\,dy$ должен существовать. Суммируя по частям, получаем:

$$P_n(y) = \sum_{\nu=1}^{n-1} D_\nu(\sigma)\left(\nu^\sigma e^{-\nu y} - (\nu+1)^\sigma e^{-(\nu+1)y}\right) + n^\sigma D_n(\sigma)\,e^{-ny}.$$

Так как функция $x^\sigma e^{-xy}$ возрастает в интервале $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sigma}{y}$ и убывает в интервале $\frac{\sigma}{y} \leqslant x < \infty$, то максимум ее равен $(\sigma e^{-1})^\sigma y^{-\sigma}$. Отсюда следует:

$$|P_n(y)| < Ay^{-\sigma}, \quad |P_n(y)\,y^{s-1}| < Ay^{s-\sigma-1},$$

где A не зависит от n и y. Полагаем $F(y) = Ay^{s-\sigma-1}$ в интервале $0 < y < 1$ и $F(y) = Be^{-y}$ при $y \geqslant 1$, где $B > 0$ не зависит от y.

118. Пусть $\omega > 0$. Имеем:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{-\omega} |f(x)|\,dx + \int\limits_{\omega}^{\infty} |f(x)|\,dx + \left|\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin nx\,dx\right|.$$

Оба первых интеграла в правой части стремятся к нулю при $\omega \to \infty$. Если ω фиксировано, то при $n \to \infty$ третий интеграл стремится к нулю [105]. Аналогично рассуждаем при доказательстве второго утверждения задачи:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,|\sin nx|\,dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \left(1+\frac{2}{\pi}\right)\int\limits_{-\infty}^{-\omega} |f(x)|\,dx +$$
$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\int\limits_{\omega}^{\infty} |f(x)|\,dx + \left|\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\,|\sin nx|\,dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x)\,dx\right| \quad [106].$$

119. 1. Указанное представление возможно. Пусть $\varphi(x, y)$ для различных пар x, y принимает различные же значения $u = \varphi(x, y)$ (например, осуществляет взаимно однозначное отображение плоскости x, y на прямую u). Для заданной функции $f(x, y, z)$ определяем $\psi(u, z)$ следующим образом:

Если u^* не принадлежит к значениям, принимаемым функцией $\varphi(x, y)$, то $\psi(u^*, z)$ придаем произвольное значение, пусть, скажем, в этом случае всегда $\psi(u^*, z) = 1$.

Если же u^* принадлежит к значениям функции $\varphi(x, y)$, то, по определению этой функции, числом u^* вполне однозначно определяется пара значений x^*, y^*, для которой выполняется равенство $u^* = \varphi(x^*, y^*)$; в этом случае полагаем $\psi(u^*, z) = f(x^*, y^*, z)$.

Тогда для всех x, y, z имеем:

$$\psi(\varphi(x, y), z) = f(x, y, z).$$

2. Требуемое представление невозможно. Например, для функции $f(x, y, z) = yz + zx + xy$.

Если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция, то существует сколько угодно различных пар $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n$, для которых $\varphi(x, y)$ принимает одинаковые значения:

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2) = \ldots = \varphi(x_n, y_n)$$

(«точки равного уровня»). Если $\varphi(x, y) = \text{const.}$, то утверждение очевидно. Если $\varphi(x, y) \not\equiv \text{const.}$ и, например, $\varphi(x', y') = 1$, $\varphi(x''', y''') = 3$, то на каждой из бесчисленного множества окружностей, соединяющих точки x', y' и x''', y''', существует промежуточная точка x'', y'', в которой $\varphi(x'', y'') = 2$.

Если функция $f(x, y, z)$ представлена требуемым образом, т. е. $f(x, y, z) = \psi(\varphi(x, y), z)$, причем $\varphi(x, y)$ непрерывна, то существует сколько угодно пар $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n$, для которых тождественно относительно z выполняются равенства

$$f(x_1, y_1, z) = f(x_2, y_2, z) = \ldots = f(x_n, y_n, z).$$

Пусть, в частности, тождественно относительно z

$$(x_1 + y_1) z + x_1 y_1 = (x_2 + y_2) z + x_2 y_2;$$

тогда

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2, \quad x_1 y_1 = x_2 y_2$$

и, по исключении y_1,

$$x_1^2 - (x_2 + y_2) x_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Для того чтобы пара x_2, y_2 вообще отличалась от пары x_1, y_1, необходимо должно быть $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$. Но тогда при $n = 3$ условия, необходимые для требуемого представления, уже не будут выполнены. Так как $yz + zx + xy$ — симметрическая функция, то одновременно доказана и невозможность представлении в формах $\psi(\varphi(y, z), x)$ и $\psi(\varphi(z, x), y)$.

Таким же образом можно доказать, что непрерывная функция $xy + yz + z$ не может быть представлена через две непрерывные функции двух переменных, из которых одна служит другой аргументом. Однако через три такие функции она уже может быть представлена, именно:

$$xy + yz + z = (x + z) y + z = S\{P[S(x + z), y], z\}$$

(обозначения задачи **119a**).

Для более узких классов функций аналогичные вопросы разрешаются легче [**119a**]. Аналитическая функция трех переменных, не удовлетворяющая никакому алгебраическому уравнению в частных производных, не может быть представлена через конечное число «вложенных друг в друга» аналитических функций двух переменных. См. 13-ю из «математических проблем» Гильберта. (D. Hilbert, Gött. Nachr. 1900, стр. 280.)

119а. Положим $yz+zx+xy=f(x, y, z)$; частные производные будем обозначать соответствующими индексами.

1. Из представления $f(x, y, z)=\varphi\{\psi[\chi(x, y), z], z\}$ получаем, что для всех значений x, y, z с $f_y=z+x\neq 0$ будет:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_x}{f_y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi_\psi\psi_\chi\chi_x}{\varphi_\psi\psi_\chi\chi_y}\right)=0,$$

следовательно, $f_{xz}f_y-f_xf_{yz}=0$. Но $yz+zx+xy$ не удовлетворяет этому уравнению.

2. Первое доказательство. Из представления $f(x, y, z)=$ $=\varphi[\psi(x, z), \chi(y, z)]$, дифференцируя по x, y, z и исключая φ_ψ и φ_χ, получаем:

$$\begin{vmatrix} f_x & \psi_x & 0 \\ f_y & 0 & \chi_y \\ f_z & \psi_z & \chi_z \end{vmatrix}=0.$$

Мы можем предположить, что ψ_x и χ_y не равны тождественно нулю. При $\psi_x\neq 0$, $\chi_y\neq 0$ полагаем

$$\frac{\psi_z}{\psi_x}=-v, \quad \frac{\chi_z}{\chi_y}=-u;$$

тогда $v=v(x, z)$, $u=u(y, z)$, следовательно, $v_y=u_x=0$. Далее,

$$f_yu+f_xv+f_z=0.$$

Но это находится в противоречии с тем, что $F=f_yu+f_xv+f_z$ при $f=yz+zx+xy$ удовлетворяет уравнению

$$F-\frac{\partial F}{\partial x}f_y-\frac{\partial F}{\partial y}f_x+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}f_xf_y=-2z.$$

Второе доказательство. Дифференцируем снова по x, y, z и полагаем в получающихся трех уравнениях $z=-y$. Тогда первое уравнение дает $0=\varphi_\psi\psi_x$. Мы можем предположить, что $\psi_x\not\equiv 0$, так что для указанных значений аргументов, если еще $\psi_x\neq 0$, будем иметь $\varphi_\psi=0$, или

$$f_y=x-y=\varphi_\chi\chi_y, \quad f_2=x+y=\varphi_\chi\chi_z.$$

Если $x\neq y$, то $\varphi_\chi\neq 0$, $\chi_y\neq 0$ и

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\chi_z}{\chi_y}.$$

Но это равенство противоречиво, ибо правая часть его зависит только от y и z, следовательно, так как $z=-y$, — только от y.

3. Из представления $f(x, y, z) = \varphi\{\psi[\chi(x, y), z], x\}$ после дифференцирования получаем:

$$\begin{aligned}
f_x &= \varphi_\psi \psi_\chi \chi_x + \varphi_x,\\
f_y &= \varphi_\psi \psi_\chi \chi_y,\\
f_z &= \varphi_\psi \psi_z,\\
f_{xy} &= \ldots + \varphi_\psi \chi_x \chi_y \psi_{\chi\chi},\\
f_{yy} &= \ldots + \varphi_\psi \chi_y^2 \psi_{\chi\chi}.
\end{aligned}$$

В двух последних равенствах не выписаны члены, содержащие ψ_χ.

Полагая $z = -x$, будем иметь $\varphi_\psi \psi_\chi \chi_y = 0$. Так как мы можем принять, что $\chi_y \not\equiv 0$, то, принимая во внимание третье равенство, получаем, что при $x + y \neq 0$, $\chi_y \neq 0$ будет $\psi_\chi = 0$. Поэтому для указанных значений будем иметь:

$$1 = \varphi_\psi \chi_x \chi_y \psi_{\chi\chi}, \quad 0 = \varphi_\psi \chi_y^2 \psi_{\chi\chi}.$$

Но эти равенства противоречивы, так как вследствие второго по крайней мере одна из трех функций φ_ψ, χ_y, $\psi_{\chi\chi}$ должна быть равна нулю.

120. Нет. Пример: $f(x) = x^3$; $\xi = 0$ — точка перегиба.

121. [См. G. Pólya, Tôhoku Math. J., т. 19, стр. 3, 1921.] Пусть M будет верхняя грань $|f'(x)|$. Имеем:

$$f(x) = f'(\xi)(x-a) \leqslant M(x-a) \text{ при } a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2} \qquad (a < \xi < x),$$

$$f(x) = f'(\eta)(x-b) \leqslant M(b-x) \text{ при } \frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b \qquad (x < \eta < b).$$

В обеих формулах не может тождественно стоять знак равенства, ибо определяемая этим условием функция уже не являлась бы дифференцируемой в точке $x = \frac{a+b}{2}$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx < M \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,dx + M \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,dx = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

122. [W. Blaschke, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 273, 1917.] По формуле Тейлора имеем при $x \neq x_0$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 f''(\bar{x})}{2} \qquad (x_0 - r < \bar{x} < x_0 + r).$$

Интегрируя почленно и применяя первую интегральную теорему о среднем значении, получаем:

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} [f(x) - f(x_0)]\,dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\bar{x})\,dx = f''(\xi) \int_{x_0-r}^{x_0+r} \frac{(x-x_0)^2}{2}\,dx,$$

так как функция $f''(x)$, будучи производной, принимает все значения между своими нижней и верхней гранями.

123. Первое доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{nx} = f(x)$ сходится в интервале $a < x < b$; тогда он неограниченно дифференцируем в этом интервале, и

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n e^{nx}, \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n e^{nx},$$

$$f(x) f''(x) - [f'(x)]^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (m-n)^2 p_m p_n e^{(m+n)x} > 0 \quad [72].$$

Второе доказательство. Полагая в 80 $a_\nu = \sqrt{p_\nu} e^{\frac{\nu x_1}{2}}$, $b_\nu = \sqrt{p_\nu} e^{\frac{\nu x_2}{2}}$ $(x_1 < x_2)$, получаем:

$$\left[f\left(\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)\right]^2 < f(x_1) f(x_2).$$

124. [См. J. L. W. V. Jensen, l. c. 70, стр. 187—190.] Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла снизу в интервале $[a, b]$, причем в этом интервале $\varphi(x) < G$. Полагая в неравенстве

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}$$

$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x + n\delta$, $x_{m+1} = \ldots = x_n = x$, где x — любая внутренняя точка интервала $[a, b]$, $|\delta|$ достаточно мало и $m < n$, получаем:

$$\frac{\varphi(x+n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqslant \frac{\varphi(x+m\delta) - \varphi(x)}{m}.$$

Заменим здесь δ на $-\delta$, тогда, принимая во внимание неравенство $\varphi(x+m\delta) - \varphi(x) \geqslant \varphi(x) - \varphi(x-m\delta)$, будем иметь:

$$\frac{\varphi(x+n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqslant \frac{\varphi(x+m\delta) - \varphi(x)}{m} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(x-m\delta)}{m} \geqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(x-n\delta)}{n}. \quad (*)$$

Беря здесь, в частности, $m = 1$, получим:

$$\frac{G - \varphi(x)}{n} \geqslant \varphi(x+\delta) - \varphi(x) \geqslant \varphi(x) - \varphi(x-\delta) \geqslant \frac{\varphi(x) - G}{n}.$$

Приближая δ к нулю и безгранично увеличивая n с тем, однако, чтобы $x \pm n\delta$ не выходило за пределы интервала $[a, b]$, мы и получаем, что $\varphi(x)$ непрерывна.

Пусть теперь $\delta > 0$. Заменим в (*) δ на $\frac{\delta}{n}$:

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqslant \frac{\varphi\left(x+\frac{m}{n}\delta\right)-\varphi(x)}{\frac{m}{n}\delta} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{m}{n}\delta\right)}{\frac{m}{n}\delta} \geqslant \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}.$$

Отсюда вследствие непрерывности $\varphi(x)$ имеем вообще:

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqslant \frac{\varphi(x+\delta')-\varphi(x)}{\delta'} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'} \geqslant \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}, \qquad (0<\delta'<\delta).$$

При $\delta \to 0$ как первое, так и последнее выражения имеют предел.

125. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Plys., серия 3, т. 24, стр. 283, 1916.] Значения, принимаемые функцией $f(x)$ в некотором интервале длины l, заполняют замкнутый интервал, длина которого

$$L = \operatorname{Max} |f(x_1) - f(x_2)| = \operatorname{Max} \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx \right| \leqslant l \operatorname{Max} |f'(x)|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Покроем каждую точку x, в которой $f'(x) = 0$, наибольшим интервалом, внутри которого $|f'(x)| \leqslant \varepsilon$. Обозначим длину такого интервала через l_x. Значения, принимаемые $f(x)$ в этом интервале, заполняют интервал самое большее длины $l_x\varepsilon$. Таким образом, точки y, принадлежащие множеству M, могут быть заключены в счетное множество интервалов, сумма длин которых $\leqslant \varepsilon(b-a)$. Тем самым приведенное доказательство показывает даже, что множество M имеет меру нуль.

126. [U. Dini; ср. C. Carathéodory, 1. c. **111**, стр. 176—177 *).] Достаточно рассмотреть случай, когда $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots \geqslant f_n(x) \geqslant \ldots$, $f_n(x)$ непрерывны, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если бы сходимость была неравномерной, то можно было бы указать бесконечную последовательность точек x_n, в которых $f_n(x_n) > a > 0$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, причем a от n не зависит. Пусть ξ будет одной из предельных точек последовательности x_n. Выберем такое m, что $f_m(\xi) < a$, и выделим затем окрестность точки ξ, в которой всюду $f_m(x) < a$, значит, $f_n(x) < a$ для всех $n \geqslant m$. Но в этой окрестности должно лежать бесчисленное множество точек x_n, а для них $f_n(x_n) > a$. Мы получили противоречие.

*) См. также Г. М. Фихтенгольц, Курс диффереициального и интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1970, стр. 431—432.

127. [См. G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 28, стр. 174, 1920.] Предельная функция также монотонна, например монотонно возрастающая. Разобьем интервал сходимости последовательности $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ на столь мелкие части $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ $(\nu=1, 2, \ldots, N)$, что $f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})<\varepsilon$. Затем выберем n столь большим, чтобы для каждого ν мы имели $|f_n(x_\nu)-f(x_\nu)|<\varepsilon$. Тогда для x, лежащего между $x_{\nu-1}$ и x_ν, будем иметь:

$$f(x_{\nu-1})-\varepsilon<f_n(x_{\nu-1})\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(x_\nu)<f(x_\nu)+\varepsilon,$$

следовательно,

$$|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

Мы предполагали здесь, что и $f_n(x)$ есть возрастающая функция.

128. Ясно.

129. Пусть $a<x<b$. (Из приводимого доказательства явствует, какие изменения нужно внести, если $x=a$ или $x=b$.) Имеем:

$$\int_a^b p_n(t)f(t)\,dt-f(x)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_n(t)[f(t)-f(x)]\,dt+\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{b}.$$

Предполагая, что $|f(t)-f(x)|<\delta$ при $x-\varepsilon\leqslant t\leqslant x+\varepsilon$, заключаем, что первый интеграл в правой части по абсолютной величине $<\delta\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_n(t)\,dt\leqslant\delta$. Так как оба последних члена по абсолютной величине меньше, чем

$$2\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\left(\int_a^{x-\varepsilon} p_n(t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{b} p_n(t)\,dt\right),$$

то условие достаточно. Положим теперь (предполагая, что $0<\eta<\varepsilon$)

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } x-\varepsilon+\eta\leqslant t\leqslant x+\varepsilon-\eta,\\ 1 & \text{при } a\leqslant t\leqslant x-\varepsilon \text{ и } x+\varepsilon\leqslant t\leqslant b,\\ \text{линейно} & \text{при } x-\varepsilon\leqslant t\leqslant x-\varepsilon+\eta \text{ и } x+\varepsilon-\eta\leqslant t\leqslant x+\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда $f(t)$ непрерывна, и необходимость условия вытекает из того, что

$$\int_a^b p_n(t)f(t)\,dt-f(x)=\int_{x-\varepsilon}^{x-\varepsilon+\eta} p_n(t)f(t)\,dt+\int_{x+\varepsilon-\eta}^{x+\varepsilon} p_n(t)f(t)\,dt+$$
$$+\int_a^{x-\varepsilon} p_n(t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{b} p_n(t)\,dt\to 0,$$

поскольку здесь все члены неотрицательны.

130. Утверждение задачи **129** может быть распространено и на случай $b=\infty$, $x=\infty$. Положим в **129** $n=\frac{1}{\varepsilon}$, $p_n(t)=\varepsilon e^{-\varepsilon t}$. Тогда при любом фиксированном положительном ω

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{\omega} e^{-\varepsilon t}\,dt=0,\quad \varepsilon\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t}\,dt=1.$$

131. При замене t на e^t интервал интегрирования преобразуется в $(-\infty, \infty)$. Разбиваем новый интеграл на две части, от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞, и исследуем оба интеграла в отдельности. Если интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda t} f(e^t)\,e^t\,dt=\int_0^{\infty} e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt$$

сходится при $\lambda=\beta$, то он сходится и при любом меньшем λ, $\lambda=\beta-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Действительно, полагая $e^{\beta t}\varphi(t)=\psi(t)$, имеем:

$$\int_0^{\omega} e^{-\varepsilon t}\psi(t)\,dt=e^{-\varepsilon\omega}\int_0^{\omega}\psi(t)\,dt+\varepsilon\int_0^{\omega} e^{-\varepsilon t}\left(\int_0^{t}\psi(\tau)\,d\tau\right)dt,$$

откуда, переходя к пределу при $\omega\to\infty$, получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t}\psi(t)\,dt=\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t}\left(\int_0^{t}\psi(\tau)\,d\tau\right)dt.$$

Этот интеграл, рассматриваемый как функция от ε, в точке $\varepsilon=0$ непрерывен справа [**130**].

132. См. **128** и первую часть доказательства **129**. Определенное там число δ может быть сделано вместе с ε сколь угодно малым, независимо от x (равномерная непрерывность!).

133. [E. Landau, Rend. Palermo, т. 25, стр. 337—345, 1908.] Применяем **132**, полагая $a=0$, $b=1$,

$$p_n(x, t)=\frac{[1-(x-t)^2]^n}{\int_0^1 [1-(x-t)^2]^n\,dt}.$$

Имеем $(0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon)$

$$\int_0^{x-\varepsilon} p_n(x, t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{1} p_n(x, t)\,dt<\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[1-(x-t)^2]^n\,dt}=\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-t^2)^n\,dt}.$$

Согласно **201**, **202** это выражение при $n\to\infty$ стремится к нулю, ибо

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-t^2)^n\,dt\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}}\sim\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

134. [L. Fejér, Math. Ann., т. 58, стр. 51—69, 1904.] Применяем 132 при $a=0$, $b=2\pi$,

$$p_n(x, t)=\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2.$$

Согласно VI 18 имеем:

$$\int_0^{2\pi} p_n(x, t)\,dt=1,$$

далее $(0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon)$

$$\int_0^{x-\varepsilon} p_n(x, t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{2\pi} p_n(x, t)\,dt<\frac{1}{n\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Вследствие периодичности подинтегрального выражения каждый интервал длины $<2\pi$ можно рассматривать как целиком лежащий внутри интервала $(0, 2\pi)$.

135. См. 133.

136. См. 134.

137. Мы можем принять, что наша функция неотрицательная и, кроме того [102], кусочно-постоянная. Каждую такую функцию можно посредством сложения и умножения на положительные постоянные коэффициенты выразить через функции следующего специального типа:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ в некотором подинтервале } [\alpha, \beta] \ (a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b), \\ 0 \text{ вне } [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Пусть для простоты $a<\alpha$, $\beta<b$. Определим при достаточно малом η $(\eta>0)$ функцию $f_\eta(x)$ следующим образом:

$$f_\eta(x)=\begin{cases} 1+\eta & \text{при } \alpha\leqslant x\leqslant\beta, \\ \eta & \text{при } a\leqslant x\leqslant\alpha-\eta \text{ и } \beta+\eta\leqslant x\leqslant b, \\ \text{линейна} & \text{при } \alpha-\eta\leqslant x\leqslant\alpha \text{ и } \beta\leqslant x\leqslant\beta+\eta. \end{cases}$$

Тогда $f_\eta(x)-f(x)\geqslant\eta$, далее,

$$0<\int_a^b f_\eta(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=$$
$$=\eta(\alpha-\eta-a)+\eta(b-\beta-\eta)+\eta(1+2\eta)+\eta(\beta-\alpha),$$

что бесконечно мало вместе с η. Функция $f_\eta(x)$ всюду непрерывна. Выберем теперь полином $P(x)$, удовлетворяющий условию $|f_\eta(x)-P(x)|<\eta$. Тогда $f(x)\leqslant f_\eta(x)-\eta<P(x)$, и мы будем иметь:

$$\int_a^b P(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx<\eta(b-a)+\int_a^b f_\eta(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx.$$

В случае $\alpha = a$ или $\beta = b$ необходимо произвести лишь незначительные изменения. Аналогичная теорема имеет место и для тригонометрических полиномов при $a = 0$, $b = 2\pi$.

138. [M. Lerch, Acta Math., т. 27, стр. 345—347, 1903; E. Phragmén, там же, т. 28, стр. 360—364, 1904.] Для произвольного полинома $P(x)$

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \int_a^b f(x)[f(x) - P(x)]\,dx + \int_a^b f(x)P(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x)[f(x) - P(x)]\,dx$$

и, значит,

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad [135,\ 109.]$$

Аналогичная теорема имеет место и для «тригонометрических моментов» (коэффициентов Фурье)

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,{\cos \atop \sin}\,nx\,dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

139. Определяем $p(x)$, как в **137**. Пусть $|f(x)| \leqslant M$. Тогда [см. решение 138]

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \leqslant M \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx < M\varepsilon.$$

140. Пусть $f(x)$ не равна тождественно нулю и имеет менее n изменений знака. По первому из условий, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, существуют такие числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, что $f(x)$ 1) не обращается в нуль тождественно ни в одном из интервалов $(a,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$, $\ldots$, $(x_{k-1},\ x_k)$, $(x_k,\ b)$ и 2) в каждом из этих интервалов имеет постоянный знак (V, гл. 1, § 2) и притом попеременно положительный или отрицательный. Отсюда вытекает, что $f(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$ будет во всем интервале $a < x < b$ иметь постоянный знак, не приводясь тождественно к нулю. Однако, так как мы предположили, что $k \leqslant n - 1$, должно выполняться равенство

$$\int_a^b f(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\,dx = 0,$$

т. е. [109]

$$f(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k) \equiv 0 \quad \text{или} \quad f(x) \equiv 0.$$

Мы пришли, таким образом, к противоречию.

141. [См. A. Hurwitz, Math. Ann., т. 57, стр. 425—446, 1903.] Пусть $f(0)>0$ и $f(x)$ имеет в интервале $0<x<2\pi$ менее чем $2n+2$ изменений знака. Число последних, являющееся четным, положим равным $2k$. Пусть $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_k, x_k'$ $(0<x_1<<x_1'<x_2<x_2'<\ldots<x_k<x_k'<2\pi)$, как в решении **140**, суть точки изменения знака. Образуем аналогично предыдущей задаче выражение

$$f(x)\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_1'}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\sin\frac{x-x_2'}{2}\ldots\sin\frac{x-x_k}{2}\sin\frac{x-x_k'}{2}$$

и замечаем, что функция

$$\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{x-\beta}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

(α, β — постоянные, $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$) меняет знак в интервале $0<x<2\pi$ лишь в точках α и β. Применяем далее VI **10**. Если $f(0)=0$, то рассматриваем $f(x+a)$, где $f(a)\neq 0$.

142. [L. c. 138.] Полагая $\int\limits_0^x e^{-k_0t}\varphi(t)\,dt=\Phi(x)$, имеем для $k>k_0$

$$J(k)=[\Phi(x)e^{-(k-k_0)x}]_0^\infty+(k-k_0)\int\limits_0^\infty\Phi(x)e^{-(k-k_0)x}\,dx.$$

Положим, далее,

$$e^{-\alpha x}=y,\quad \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{y}\right)=\psi(y),\quad \psi(0)=J(k_0)=0.$$

Тогда $\psi(y)$ непрерывна в интервале $0\leqslant y\leqslant 1$ и

$$\int\limits_0^1\psi(y)y^{n-1}\,dy=0\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно [138], $\psi(y)\equiv 0$, откуда $\Phi(x)\equiv 0$, $\varphi(x)\equiv 0$.

143. [M. Lerch, по сообщению M. Plancherel'я.] Если гамма-функция имеет нуль s_0, то нулями ее будут также s_0+1, $s_0+2, \ldots, s_0+m, \ldots$ [функциональное уравнение]. Возьмем m столь большим, чтобы s_0+m имело положительную вещественную часть, и положим $s=s_0+m+1=\sigma+it$, $\sigma>1$. Из соотношений

$$\int\limits_0^\infty e^{-nx}x^{\sigma-1}\cos(t\ln x)\,dx=\Re\int\limits_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx=$$
$$=\Re\frac{\Gamma(s)}{n^s}=0\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

мы получим тогда [142] $x^{\sigma-1}\cos(t\ln x)\equiv 0$, что представляет собой противоречие.

144. По поводу $f(x)=1,\ x,\ x^2$ см. I 40. Для $f(x)=e^x$ имеем:

$$K_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} e^{\frac{\nu}{n}}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\left(e^{\frac{1}{n}}x+1-x\right)^n=\left[1+\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)x\right]^n.$$

145. Имеем [I 40]:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=nx(1-x),$$

следовательно,

$$n^{\frac{3}{2}}\sum\nolimits^{\mathrm{II}}\leqslant nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}.$$

146. [См. С. Н. Бернштейн, Сообщения Харьк. матем. о-ва, серия 2, т. 13, стр. 1—2, 1912 *).] Пусть $\varepsilon_n(x)$ — максимум $\left|f(x)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right|$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<$ $<n^{-\frac{1}{4}}$. Тогда равномерно для всех x имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(x)=0$, т. е. $\varepsilon_n(x)<\varepsilon_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Далее,

$$f(x)-K_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right]\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}.$$

Согласно 145 при $|f(x)|<M$ будем иметь:

$$|f(x)-K_n(x)|<\varepsilon_n\sum\nolimits^{\mathrm{I}}+2M\sum\nolimits^{\mathrm{II}}<\varepsilon_n+\frac{M}{2}n^{-\frac{1}{2}}.$$

147. [См. J. Franel, Math. Ann., т. 52, стр. 529—531, 1899.] Для $0\leqslant r\leqslant r_1$ ясно. Пусть $r_m\leqslant r<r_{m+1}$. Тогда правая часть равна

$$mf(r)-1\,[f(r_2)-f(r_1)]-2\,[f(r_3)-f(r_2)]-\ldots$$
$$\ldots-(m-1)\,[f(r_m)-f(r_{m-1})]-m\,[f(r)-f(r_m)],$$

что совпадает с левой частью. Доказанная формула представляет собой не что иное, как формулу интегрирования по частям (для интеграла Стилтьеса):

$$\int_0^r f(t)\,dN(t)=N(r)f(r)-\int_0^r N(t)f'(t)\,dt.$$

148. Если

$$r_{n-k-1}<r_{n-k}=\ldots=r_n=r_{n+1}=\ldots=r_{n+l}<r_{n+l+1}$$

*) С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений т. 1, Изд. АН СССР, 1952, стр. 105—106.

(где, возможно, $k=0$ или $l=0$; $r_0=0$), то

$$\frac{N(r_n-0)+1}{r_n}=\frac{n-k}{r_n}\leqslant\frac{n}{r_n}\leqslant\frac{n+l}{r_n}=\frac{N(r_n)}{r_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}=0.$$

Если $r_m\leqslant r<r_{m+1}$, то $N(r)=m$ и

$$\frac{m+1}{r_{m+1}}-\frac{1}{r_{m+1}}=\frac{m}{r_{m+1}}<\frac{N(r)}{r}\leqslant\frac{m}{r_m}.$$

Во втором случае поступаем аналогично.

149. См. 148 и I 113.

150. [E. Landau, Bull. Acad. Belgique, 1911, стр. 443—472. См. G. Pólya, Gött. Nachr., 1917, стр. 149—159.] Пусть $c>1$. Выберем целое положительное m, удовлетворяющее условию $1<c<2^m$. Тогда

$$1<\frac{L(cr)}{L(r)}<\frac{L(2^m r)}{L(r)}=\frac{L(2r)}{L(r)}\frac{L(2^2r)}{L(2r)}\cdots\frac{L(2^m r)}{L(2^{m-1}r)}\to 1.$$

Утверждение для $c<1$ получится, если перевернуть отношение $\frac{L(cr)}{L(r)}$, заменить cr на r и заметить, что $L(cr)$ также является медленно возрастающей функцией.

151. Применение полной индукции показывает, что для целого положительного k

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln_k 2r}{\ln_k r}=1.$$

Именно, для $k=1$ это ясно; для $k>1$ при достаточно большом r имеем:

$$1<\frac{\ln_k(2r)}{\ln_k r}<\frac{\ln_k r^2}{\ln_k r}=\frac{\ln_{k-1}(2\ln r)}{\ln_{k-1}(\ln r)}.$$

152. Достаточно доказать, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\ln L(2^m)}{m}=0.$$

Это вытекает из неравенства $\frac{L(2^m)}{L(2^{m-1})}<1+\delta$, выполняющегося при заданном $\delta>0$ для всех достаточно больших m.

153. [149, 152.]

154. Имеем:

$$\frac{N(cr)}{N(r)}\sim c^{\lambda}\frac{L(cr)}{L(r)}.$$

155. Каждую кусочно-постоянную непрерывную слева функцию можно выразить (посредством умножения на постоянные коэффициенты и сложения) через функции следующего типа:

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x\leqslant\gamma\ (\gamma>0),\\ 0 \text{ при других значениях } x.\end{cases}$$

Но для последних утверждение теоремы гласит:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(\gamma r)}{N(r)} = \gamma^{\lambda} \qquad [154].$$

Относительно других функций см. 156.

156. Заключим $f(x)$ между двумя кусочно-постоянными непрерывными слева функциями:

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x)$$

так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{c^\lambda} \Psi\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx - \int_0^{c^\lambda} \psi\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число [102]. Тогда

$$\frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant cr} \psi\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant cr} f\left(\frac{r_n}{r}\right) \leqslant \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant cr} \Psi\left(\frac{r_n}{r}\right).$$

Таким образом, верхний и нижний пределы среднего выражения заключены между границами $\int_0^{c^\lambda} \psi\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx$ и $\int_0^{c^\lambda} \Psi\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx$, которые от интеграла $\int_0^{c^\lambda} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx$ отличаются меньше, чем на ε.

157. Согласно 147 имеем:

$$\frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{\alpha-\lambda} = \frac{r^{\lambda-\alpha}}{N(r)} \left(\frac{N(r)}{r^{\lambda-\alpha}} + (\lambda-\alpha) \int_0^r N(t)\, t^{-\lambda+\alpha-1}\, dt\right) \sim$$

$$\sim 1 + \frac{(\lambda-\alpha)\, r^{-\alpha}}{L(r)} \int_0^r L(t)\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

Таким образом, при $0 < c < 1$

$$\frac{r^{-\alpha} L(cr)}{L(r)} \int_{cr}^{r} t^{\alpha-1}\, dt < \frac{r^{-\alpha}}{L(r)} \int_0^r L(t)\, t^{\alpha-1}\, dt < r^{-\alpha} \int_0^r t^{\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\alpha},$$

откуда верхний и нижний пределы среднего выражения заключены между $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1-c^\alpha}{\alpha}$. Но c произвольно мало.

158. На основании 147

$$\sum_{r < r_n \leqslant R} r_n^{-\alpha-\lambda} = N(R)\, R^{-\alpha-\lambda} - N(r)\, r^{-\alpha-\lambda} + (\alpha+\lambda) \int_r^R N(t)\, t^{-\alpha-\lambda-1}\, dt.$$

Следовательно [152, 153],

$$\frac{1}{N(r)} \sum_{r_n > r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{-\alpha-\lambda} = -1 + \frac{(\alpha+\lambda) r^{\alpha+\lambda}}{N(r)} \int_r^\infty N(t) t^{-\alpha-\lambda-1} dt \sim$$

$$\sim -1 + \frac{(\alpha+\lambda) r^{\alpha}}{L(r)} \int_r^\infty L(t) t^{-\alpha-1} dt.$$

Пусть теперь $0 < \varepsilon < 2^{\alpha} - 1$; для достаточно больших r будем иметь $L(2r) < L(r)(1+\varepsilon)$ и, значит, $L(2^{\nu}r) < L(r)(1+\varepsilon)^{\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Отсюда

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{r^{\alpha}}{L(r)} \int_r^\infty L(t) t^{-\alpha-1} dt < \frac{r^{\alpha}}{L(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} L(2^{\nu}r) \int_{2^{\nu-1}r}^{2^{\nu}r} t^{-\alpha-1} dt <$$

$$< \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+\varepsilon)^{\nu} (2^{-\alpha(\nu-1)} - 2^{-\alpha\nu}) = \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-1-\varepsilon}.$$

159. [Относительно задач **159—161** см. G. Pólya, Math. Ann., т. 88, стр. 173—177, 1923.] Обобщение теорем **155—158**. Как и в **156**, заключаем $f(x)$ между двумя функциями $\psi(x)$ и $\Psi(x)$, заданными следующим образом: между 0 и δ они равны $-x^{\alpha-\lambda}$, соответственно $x^{\alpha-\lambda}$, между δ и ω совпадают с $f(x)$ и от ω до $+\infty$ равны $-x^{-\alpha-\lambda}$, соответственно $x^{-\alpha-\lambda}$. Имеем [157]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n \leqslant \delta r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{\alpha-\lambda} = \lim_{r\to\infty} \frac{\delta^{\alpha-\lambda} N(\delta r)}{N(r)} \frac{1}{N(\delta r)} \sum_{r_n \leqslant \delta r} \left(\frac{r_n}{\delta r}\right)^{\alpha-\lambda} = \delta^{\alpha} \frac{\lambda}{\alpha}$$

и [158]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{N(r)} \sum_{r_n > \omega r} \left(\frac{r_n}{r}\right)^{-\alpha-\lambda} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\omega^{-\alpha-\lambda} N(\omega r)}{N(r)} \frac{1}{N(\omega r)} \sum_{r_n > \omega r} \left(\frac{r_n}{\omega r}\right)^{-\alpha-\lambda} = \omega^{-\alpha} \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Таким образом, верхний и нижний пределы выражения

$$\frac{1}{N(r)} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{r_n}{r}\right)$$

заключены между

$$-\delta^{\alpha} \frac{\lambda}{\alpha} + \int_{\delta^{\lambda}}^{\omega^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right) dx - \omega^{-\alpha} \frac{\lambda}{\alpha}$$

и

$$\delta^{\alpha}\frac{\lambda}{\alpha}+\int_{\delta^{\lambda}}^{\omega^{\lambda}} f\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)dx+\omega^{-\alpha}\frac{\lambda}{\alpha}.$$

Устремляем δ к нулю и безгранично увеличиваем ω.

160. Пусть $f(x)$ — убывающая функция, $\beta>\lambda$. Существует бесчисленное множество значений n, для которых

$$\frac{r_\mu}{r_n}<\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \qquad [\text{I } 115].$$

Выберем число r ($r_{n-1}<r<r_n$) так, чтобы выполнялись еще неравенства

$$\frac{r_\mu}{r}<\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ n-1),$$

откуда вследствие убывания $f(x)$ вытекает, что

$$f\left(\frac{r_\mu}{r}\right)\geqslant f\left[\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \quad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ n-1).$$

Так как $N(r)=n-1$, то

$$\frac{1}{N(r)}f\left(\frac{r_\mu}{r}\right)\geqslant\frac{1}{n-1}f\left[\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]\geqslant\frac{n}{n-1}\int_{\frac{\mu}{n}}^{\frac{\mu+1}{n}} f\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)dx,$$

$$\frac{1}{N(r)}\sum_{\mu=1}^{n-1} f\left(\frac{r_\mu}{r}\right)=\frac{1}{N(r)}\sum_{r_\mu\leqslant r} f\left(\frac{r_\mu}{r}\right)\geqslant\frac{n}{n-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)dx.$$

Интеграл $\int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)dx$ представляет собой непрерывную функцию от β [131]. Если $f(x)$ — возрастающая функция, то заменяем ее на $-f(x)$.

161. Пусть $0<\alpha<\lambda<\beta$. Применяя I 116, получаем совершенно аналогично 160, что существуют сколь угодно большие n, для которых

$$\frac{1}{N(r_n)}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{r_k}{r_n}\right)\leqslant\int_0^1 f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)dx+\int_1^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)dx.$$

Берем затем α и β достаточно близкими к λ [131].

162. [Относительно задач 162—166 см. H. Weyl, Gött. Nachr., 1914, стр. 235—236; Math Ann., т. 77, стр. 313—315, 1916.] Указанное условие утверждает, что равенство (*) на стр. 94

удовлетворяется для функции $f(x)$, которая в подинтервале $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ равна единице, а вне его — нулю; таким образом, это условие необходимо. С другой стороны, предположим, что оно выполнено. Заметим сначала, что безразлично, будет ли интервал α, β замкнутым, полуоткрытым или открытым. Так как из справедливости равенства (*) для нескольких функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_l(x)$ вытекает справедливость его для любой линейной комбинации этих функций $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_l f_l(x)$ ($c_1, c_2, \ldots, c_l$ — постоянные), то мы получаем, что равенство (*) имеет место также для всех кусочно-постоянных функций.

Пусть теперь $f(x)$ собственно интегрируема. Применяя **102** (полагая $a=0$, $b=1$), получаем:

$$\frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)+\ldots+\psi(x_n)}{n} \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant \\ \leqslant \frac{\Psi(x_1)+\Psi(x_2)+\ldots+\Psi(x_n)}{n}.$$

Первое и третье выражения стремятся соответственно к $\int\limits_0^1 \psi(x)\,dx$ и $\int\limits_0^1 \Psi(x)\,dx$, отличающимся сколь угодно мало от $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

И менее сильное условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(0, \beta)}{n} = \beta \qquad (0<\beta<1)$$

или также

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\beta, 1)}{n} = 1-\beta \qquad (0<\beta<1)$$

является достаточным. Можно даже предположить, что одно из этих условий выполняется для всюду плотного в [0, 1] множества значений β.

163. Условие, очевидно, необходимо. Чтобы доказать его достаточность, заметим сначала, что и здесь, как в решении **162**, замкнутость интервала α, β роли не играет. Но теперь в **102** при $a>0$ можно заменить кусочно-постоянные функции $\psi(x)$ и $\Psi(x)$ некоторыми *кусочно-линейными функциями*, графики которых составляются из отрезков прямых, проходящих через начало координат ($y=kx$). Отсюда заключаем, как и в решении **162**, что равенство (*) выполняется для всех функций $f(x)$, собственно интегрируемых в интервале [0, 1] и обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки $x=0$. Так, например,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\beta, 1)}{n} = 1-\beta \qquad (0<\beta<1)$$

[решение **162**].

164. См. **162**. Вместо **102** применяем **137**.

165. См. **162**. Вместо **102** применяем **137**.

166. Условие задачи **165** выполнено, ибо

$$e^{2\pi ikx_1}+e^{2\pi ikx_2}+\ldots+e^{2\pi ikx_n}=\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi ik\nu\theta}=e^{2\pi ik\theta}\frac{e^{2\pi ikn\theta}-1}{e^{2\pi ik\theta}-1}.$$

167. Речь идет, в обозначениях задачи 166, о

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},\qquad f(x)=\varphi(a\theta-\theta d+xd),$$

где $\varphi(y)=1$ или 0, смотря по тому, будет ли ближайшее к y целое число лежать справа или слева от y. $\left(\text{Для } y=n,\ n+\frac{1}{2},\right.$ где n — целое, можно положить, например, $\left.\varphi(y)=\frac{1}{2}.\right)$ Из **166** вытекает, что этот предел равен

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \varphi(y)\,dy=\frac{1}{2}.$$

То же справедливо и для арифметических прогрессий высших порядков [I **128**], как можно доказать применением более тонких средств [H. Weyl, l. c. **162**, стр. 326]. Этот результат можно рассматривать как выражение своего рода «отсутствия закономерности» в последовательности $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$ (см. R. v. Mises, Math. Zeitschr., т. 5, стр. 57, 1919).

168. [E. Hecke, Abhdl. Math. Sem. Hamburg, т. 1, стр. 57—58, 1922.] Согласно I **88**

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

в предположении, что предел в правой части существует. Но при $a_n=(n\theta-[n\theta])e^{2\pi in\alpha}$ согласно **166** этот предел существует и равен

$$\int_0^1 xe^{2\pi iqx}\,dx=\frac{1}{2\pi iq}.$$

169. [E. Steinitz, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 19, стр. 361, 1912. Решение — G. Pólya, там же, серия 3, т. 21, стр. 290, 1913.] Пределом служит функция $f(x)$, определенная в **99**. Для иррациональных x см. **166**, для рациональных x проще.

170. $10^n\theta-[10^n\theta]$ получается при перенесении запятой в десятичном разложении θ на n мест вправо и зачеркивании всех цифр, очутившихся слева от запятой. Пусть $\alpha=0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ — конечная десятичная дробь. Выберем n так, чтобы $10^n\theta-[10^n\theta]$ начиналось цифрами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$, за которыми следовало бы r

нулей; тогда

$$|10^n\theta - [10^n\theta] - \alpha| < \frac{1}{10^{k+r}}.$$

171. По формуле Тейлора

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} \qquad (0 < \theta_n < 1),$$

откуда

$$n!e = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + 1 + \frac{e^{\theta_n}}{n+1}.$$

Для $n \geqslant 2$ имеем $\frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{e}{n+1} < 1$, следовательно,

$$n!e - [n!e] = \frac{e^{\theta_n}}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

172. [По сообщению H. Prüfer'a; H. Weyl (1. c. 162) доказал, что рассматриваемое множество всюду плотно и даже является равномерно распределенным в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.] При $r = 1$ утверждение вытекает из 166. Пусть $r > 1$. Мы можем принять, что a_r иррационально [в противном случае высшие рациональные члены полинома $P(x)$, являющиеся периодическими по модулю 1, можно было бы просто откинуть]. Если бы рассматриваемые числа имели лишь конечное количество предельных точек, то то же самое можно было бы утверждать и относительно «вычетов» чисел

$$P(n+r-1) - \binom{r-1}{1} P(n+r-2) + \\ + \binom{r-1}{2} P(n+r-3) - \ldots + (-1)^{r-1} P(n) = \\ = a_r r! \left(n + \frac{r-1}{2}\right) + a_{r-1}(r-1)!$$

по модулю 1, что однако, противоречит 166.

173. Пусть k — целое положительное число. Тогда

$$e^{2\pi i k x_1} + e^{2\pi i k x_2} + \ldots + e^{2\pi i k x_n}$$

ограничено [166]; суммируя по частям, получаем, что и

$$\alpha_1 e^{2\pi i k x_1} + \alpha_2 e^{2\pi i k x_2} + \ldots + \alpha_n e^{2\pi i k x_n}$$

ограничено [165].

174. [L. Fejér.] Пусть $N(x)$ — числовая функция последовательности $g(1)$, $g(2), \ldots, g(n), \ldots$ Обозначая через $t = \gamma(x)$ функцию, обратную к $x = g(t)$, будем иметь $N(x) = [\gamma(x)]$. Соответственно условиям 1—4 функция $\gamma(x)$ при $x \geqslant g(1)$ обладает следующими свойствами: $\gamma(x)$ имеет непрерывную производную и вместе с x монотонно стремится к бесконечности, $\gamma'(x)$ также монотонно стремится к бесконечности вместе с x, $\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \to 0$. Отсюда заключаем, так как

$$\frac{x}{\gamma(x)} < 2\frac{x-\frac{x}{2}}{\gamma(x)-\gamma\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{\gamma'(x_1)} \qquad \left(\frac{x}{2} < x_1 < x\right),$$

что $\frac{x}{\gamma(x)} \to 0$; далее, $\frac{\gamma(x+\varepsilon)}{\gamma(x)} \to 1$, если ε фиксировано или по крайней мере ограничено при возрастании x.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Достаточно доказать [162], что

$$\frac{\sum_{k=1}^{m-1}(N(k+\alpha)-N(k))+N(m+\lambda_n)-N(m)}{N(m+x_n)},$$

где $m=[g(n)]$, $\lambda_n = \operatorname{Min}(x_n, \alpha)$, стремится к α при $n \to \infty$. Заменяя $N(x)$ через $\gamma(x)$ и принимая во внимание сказанное относительно $\gamma(x)$, получаем, что требуемое соотношение равносильно следующему:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\gamma(m)}\sum_{k=1}^{m}(\gamma(k+\alpha)-\gamma(k)) = \alpha.$$

На основании 19 это отношение равно

$$\frac{\gamma(m+\alpha)-\gamma(m)}{2\gamma(m)} + \frac{1}{\gamma(m)}\int_{x_0}^{m}(\gamma(x+\alpha)-\gamma(x))\,dx + O\left(\frac{\gamma'(m)}{\gamma(m)}\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{\gamma(m)}\int_{x_0}^{m}\gamma'(\xi)\,dx + o(1),$$

где $g(1)=x_0$, $x<\xi=\xi(x)<x+\alpha$. Так как $\gamma'(x)$ монотонна, то

$$\gamma(m)-\gamma(x_0) = \int_{x_0}^{m}\gamma'(x)\,dx < \int_{x_0}^{m}\gamma'(\xi)\,dx < \int_{x_0}^{m}\gamma'(x+\alpha)\,dx =$$
$$= \gamma(m+\alpha)-\gamma(x_0+\alpha).$$

175. Частный случай задачи 174 для $g(t)=at^\sigma$.

176. Частный случай задачи 174 для $g(t)=a(\ln t)^\sigma$.

177. Пусть $0<\rho\leqslant 1$. Положим

$$s_n = |\sin 1^\sigma\xi| + |\sin 2^\sigma\xi| + \ldots + |\sin n^\sigma\xi|.$$

Тогда из 174 для

$$g(t)=\frac{\xi}{2\pi}t^\sigma, \qquad f(x)=|\sin 2\pi x|$$

вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\int_0^1|\sin 2\pi x|\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

Таким образом ($s_0=0$),

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{s_\nu-s_{\nu-1}}{\nu^\rho}=\sum_{\nu=1}^{n-1}s_\nu\left(\frac{1}{\nu^\rho}-\frac{1}{(\nu+1)^\rho}\right)+\frac{s_n}{n^\rho}\to+\infty.$$

178. [J. Franel, Zürich. Naturf. Ges., т. 62, стр. 295, 1917. Пусть по десятичной системе

$$\sqrt{n}=c^{(n)},c_1^{(n)}c_2^{(n)}c_3^{(n)}\ldots$$

(случай, когда все $c_j^{(n)}$, начиная с некоторого j, равны 9, исключен). Положим в **175** $\sigma=\frac{1}{2}$, $a=10^{j-1}$; тогда

$$x_n=10^{j-1}\sqrt{n}-[10^{j-1}\sqrt{n}]=0,c_j^{(n)}c_{j+1}^{(n)}c_{j+2}^{(n)}\ldots,$$

т. е. $c_j^{(n)}=[10x_n]$. Следовательно, $c_j^{(n)}$ будет равно g тогда и только тогда, когда $\frac{g}{10}\leqslant x_n<\frac{g+1}{10}$, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_g(n)}{n}=\int_{\frac{g}{10}}^{\frac{g+1}{10}}dx=\frac{1}{10}.$$

179. В обозначениях решения **174**, нужно доказать, что при $n\to\infty$, $m\to\infty$, $x_n\to\xi$

$$\lim\frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1}(N(k+\alpha)-N(k))+N(m+\lambda_n)-N(m)}{N(m+x_n)}=\int_0^\alpha K(x,\ \xi)\,dx,$$

где $N(x)=[q^x]$. Заменяя в написанном выражении $N(x)$ через q^x, что правомерно, так как $mq^{-m}\to 0$, получаем:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1}q^k(q^\alpha-1)+q^m(q^{\lambda_n}-1)}{q^{m+x_n}}\to\frac{q^\alpha-1}{q-1}q^{-\xi}+(q^\lambda-1)\,q^{-\xi}\quad(\lambda=\mathrm{Min}\,(\xi,\ \alpha)).$$

Последнее выражение равно $\int_0^\alpha K(x,\ \xi)\,dx$, в чем убеждаемся, интегрируя или, лучше, дифференцируя по α.

180. Функция

$$\varphi(\xi)=\int_0^1 f(x)\,K(x,\ \xi)\,dx=$$
$$=\frac{\ln q}{q-1}q^{-\xi}\left(\int_0^1 f(x)\,q^x\,dx+(q-1)\int_0^{\xi} f(x)\,q^x\,dx\right)$$

непрерывна в интервале $0\leqslant\xi\leqslant 1$, далее, $\varphi(0)=\varphi(1)$. Эта функция постоянна тогда и только тогда, когда $f(x)$ во всех точках непрерывности принимает одно и то же значение (продифференцировать!). При $a\to\infty$ имеем $q\to 1$, при $a\to 0$ будем иметь $q\to\to\infty$. Соответственно этому

$$\lim_{q\to 1}\int_0^1 f(x)\,K(x,\ \xi)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Таким образом, при неограниченном возрастании a интервал $J(a;\ f)$ будет стягиваться к единственной точке $\int_0^1 f(x)\,dx$; следовательно, при больших a распределение будет почти равномерно [176]. Далее, если $0<\xi<1$ и ξ — точка непрерывности функции $f(x)$, то

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^1 f(x)\,K(x,\ \xi)\,dx=f(\xi) \qquad [132].$$

Для точки ξ, в которой $f(x)$ имеет разрыв первого рода, этот предел равен $f(\xi-0)$. Наконец, для $\xi=0$ или 1 этот предел равен $f(1-0)$. Таким образом, если, например, функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то при $a\to 0$ $J(a;\ f)$ будет стремиться ко всей области изменения $f(x)$ в открытом интервале $0<x<1$ (включая также отрезки между пределами справа и слева в точках разрыва первого рода). При малых a распределение будет близко к распределению в **182**.

181. [J. Franel, 1. c. **178**, стр. 285—295.] Пусть

$$\lg n=\frac{\ln n}{\ln 10}=c^{(n)},\ c_1^{(n)}c_2^{(n)}c_3^{(n)}\ldots$$

— разложение десятичного логарифма числа n в десятичную дробь. Положим в **179**, **180** $a=\frac{10^{j-1}}{\ln 10}$. Тогда

$$x_n=10^{j-1}\lg n-[10^{j-1}\lg n]=0,c_j^{(n)}c_{j+1}^{(n)}c_{j+2}^{(n)}\ldots,$$

т. е. $c_j^{(n)}=[10x_n]$. Таким образом, речь идет о совокупности значений непрерывной функции

$$\varphi(\xi)=\int_{\frac{g}{10}}^{\frac{g+1}{10}} K(x,\ \xi)\,dx$$

в интервале $0\leqslant\xi\leqslant 1$, причем $K(x,\ \xi)$ определяется, как в **179**, а $q=e^{\frac{\ln 10}{10^{j-1}}}=10^{10^{1-j}}$.

182. Пусть [решение **174**]

$$m=[g(n)],\quad x=g(t),\quad t=\gamma(x),\quad N(x)=[\gamma(x)].$$

В силу условий 1—4 функция $\gamma(x)$ при $x\geqslant g(1)$ имеет непрерывную производную и монотонно возрастает до бесконечности вместе с x; далее, $\gamma'(x)\to+\infty$, $\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)}\to+\infty$. Отсюда заключаем, что при $x\to\infty$ и ε, остающемся больше некоторого фиксированного положительного числа, будем иметь $\frac{\gamma(x-\varepsilon)}{\gamma(x)}\to 0$ и также $\frac{N(x-\varepsilon)}{N(x)}\to 0$. Пусть $0<\xi<1$, $f(x)$ непрерывна в ξ, $\varepsilon>0$ произвольно и $\delta>0$ таково, что при $|x-\xi|<\delta$ имеет место неравенство $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$. Тогда, выбирая n так, чтобы $|x_n-\xi|<\frac{\delta}{2}$ [I 101], и предполагая $|f(x)|<M$, будем иметь:

$$\left|\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}-f(\xi)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|f(x_1)-f(\xi)|+|f(x_2)-f(\xi)|+\ldots+|f(x_n)-f(\xi)|}{n}<2M\frac{N(m+\xi-\delta)}{n}+\varepsilon.$$

Но согласно предположению

$$\frac{N(m+\xi-\delta)}{n}<\frac{N(m+\xi-\delta)}{N\left(m+\xi-\frac{\delta}{2}\right)}\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Пусть теперь $f(x)$ в точке ξ имеет разрыв первого рода и пусть снова $|x_n-\xi|<\frac{\delta}{2}$. Обозначая через $\mu(\delta)$ и $M(\delta)$ нижнюю и верхнюю грани $f(x)$ в интервале $|x-\xi|<\delta$, будем иметь:

$$-2M\frac{N(m+\xi-\delta)}{n}+\mu(\delta)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}<$$
$$<2M\frac{N(m+\xi-\delta)}{n}+M(\delta).$$

Из этих неравенств вытекает, что интересующие нас предельные точки лежат во всяком случае между $f(\xi-0)$ и $f(\xi+0)$. Что этими предельными точками заполнен действительно весь отрезок между $f(\xi-0)$ и $f(\xi+0)$, убеждаемся следующим образом. Так как $f(x)$ собственно интегрируема, то в любой близости от ξ существуют точки непрерывности функции $f(x)$ [108]; пусть ξ' и ξ'' будут две такие точки, $0<\xi'<\xi<\xi''<1$. Пусть, далее, индексы n', n'' пробегают каждый последовательности целых значений, для которых $x_{n'}\to\xi'$, $x_{n''}\to\xi''$, $[g(n')]=[g(n'')]$. Положим $f(x_1)+$ $+f(x_2)+\ldots+f(x_n)=nF_n$. Тогда $F_{n'}\to f(\xi')$, $F_{n''}\to f(\xi'')$. Но для каждого n

$$|F_n-F_{n+1}|=\left|\frac{F_n}{n+1}-\frac{f(x_{n+1})}{n+1}\right|<\frac{2M}{n+1}.$$

Последовательность $F_{n'}$, $F_{n'+1}$, $F_{n'+2}$, $\ldots$, $F_{n''}$ будет «медленно восходящей или нисходящей» в смысле решения I **100**.

Для $\xi=0$ и $\xi=1$ доказательство требует лишь небольших изменений.

183. Частный случай **182** при $g(t)=a(\ln t)^\sigma$.

184. Вытекает из **182**, **183**, если положить

$$g(t)=10^{j-1}\sqrt{\lg t}=\frac{10^{j-1}}{\sqrt{\ln 10}}\sqrt{\ln t},$$

$f(x)=1$ при $[10x]=g$, $f(x)=0$ при $[10x]\neq g$. См. **178**, **181**.

185. [H. Weyl, l. c. **162**, стр. 319—320.] Достаточно доказать теорему для $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)=e^{2\pi i(k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_px_p)}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — целые числа, не все равные нулю [165]. Положим:

$$k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_pa_p=a,\quad k_1\theta_1+k_2\theta_2+\ldots+k_p\theta_p=\theta.$$

Тогда

$$\frac{1}{t}\int_0^t e^{2\pi i(a+\theta t)}\,dt=e^{2\pi i a}\frac{e^{2\pi i\theta t}-1}{2\pi i\theta t}\to 0.$$

186. Частный случай задачи **185** для $p=2$, причем $f(x_1, x_2)=$ $=1$, если $\alpha_1\leqslant x_1\leqslant\alpha_2$, $\beta_1\leqslant x_2\leqslant\beta_2$, и $f(x_1, x_2)=0$ во всех остальных точках единичного квадрата.

187. [См. D. König и A. Szücs, Rend. Palermo, т. 36, стр. 79—83, 1913.] Мы можем принять, что рассматриваемое движение происходит в квадрате $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. Зеркальным отражением от прямых $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2}$ получаем, кроме $\mathfrak{f}$, еще три области, составляющие вместе с $\mathfrak{f}$ некоторую часть $\mathfrak{f}^*$ единичного квадрата $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Смещая $\mathfrak{f}^*$ параллельно осям координат на целые числа, получаем, как в **186**, бесчисленное множество областей. Зигзагообразное движение в первоначальном квадрате $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$ может быть теперь заменено прямолинейным. Частный случай задачи **185** при $p=2$,

$f(x_1, x_2)=1$ для точек x_1, x_2, лежащих в $\mathfrak{f}^*$, и $f(x_1, x_2)=0$ в остальных точках единичного квадрата.

188. [G. Pólya, Gött. Nachr., 1918, стр. 28—29]. Полагаем в VIII 35 $\psi(y)=e^{2\pi iky}$, k — целое положительное число. Тогда, в обозначениях VIII 35, имеем $g(n)=0$ для всех $n>k$, откуда

$$\left|\sum_{(r,n)=1}\psi\left(\frac{r}{n}\right)\right|=\left|\sum_{t\mid n;\, t\leqslant k}\mu\left(\frac{n}{t}\right)g(t)\right|\leqslant|g(1)|+|g(2)|+\ldots+|g(k)|$$

для всех целых n [165]. Относительно $\varphi(n)\to\infty$ см. VIII 264.

189. Полагаем в I 70, в обозначениях 188,

$$a_n=f\left(\frac{r_{1n}}{n}\right)+f\left(\frac{r_{2n}}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{r_{\varphi n}}{n}\right),$$
$$b_n=\varphi(n)\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

190. Применяем 137 к $x^{-p}f(x)$. По поводу частного случая $f(x)=a_0x^p+a_1x^{p+1}+\ldots+a_lx^{p+l}$ ($a_0, a_1, \ldots, a_l$ — постоянные коэффициенты) см. 40. Результат этой задачи представляет собой обобщение известной теоремы теории вероятностей [см., например, A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, стр. 33—34, Leipzig, B. G. Teubner, 1912 *)].

191. Пусть k_n — старший коэффициент полинома $P_n(x)$; $k_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ [решение VI 84]. Имеем:

$$\left(1+\frac{x_{1n}}{\lambda}\right)\left(1+\frac{x_{2n}}{\lambda}\right)\ldots\left(1+\frac{x_{nn}}{\lambda}\right)=k_n^{-1}(-\lambda)^{-n}P_n(-\lambda)=k_n^{-1}\lambda^{-n}P_n(\lambda)$$

[49, 203].

192. Имеем [52]

$$\ln\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\left(1+\frac{\cos\vartheta}{\lambda}\right)d\vartheta.$$

Полагаем в I 179

$$x=\frac{1}{\lambda},\quad a_{nk}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x_{1n}^k+x_{2n}^k+\ldots+x_{nn}^k}{n}-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos^k\vartheta\,d\vartheta\right),\quad A=2.$$

193. [См. G. Szegö, Math. és term. tud. ért., т. 36, стр. 531, 1918.] Получается из 192 аналогично 164.

194. Частный случай задачи 193 для функции $f(x)$, равной единице в интервале $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и нулю в остальной части интервала $-1\leqslant x\leqslant 1$.

---

*) А. А. Марков, Исчисление вероятностей, изд. 4-е, стр. 53, ГИЗ, 1924. См. также С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, стр. 241 и сл. Гостехиздат, 1946.

195. Мы можем принять, что $a_1 > a_2 > \ldots > a_l$. Тогда

$$p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_l a_l^n = p_1 a_1^n \left[1 + \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \ldots + \frac{p_l}{p_1}\left(\frac{a_l}{a_1}\right)^n\right].$$

Выражение в скобках стремится к единице. Другое доказательство получим из 196 и I 68. См. 82.

196. [Решение 195.]

197. Пусть $f(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)$, $c \neq 0$. Из

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_l}$$

имеем:

$$c_n = a_1^{-n-1} + a_2^{-n-1} + \ldots + a_l^{-n-1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Применяем затем 195, 196. (III 242.)

198. Пусть $f(x)$ достигает в точке $x = \xi$ максимума, $a \leqslant \xi \leqslant b$, $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ взято настолько малым, чтобы при $|x-\xi| < \delta$, $a \leqslant x \leqslant b$ выполнялось неравенство

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) \leqslant f(\xi).$$

Тогда

$$[f(\xi) - \varepsilon]^n \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \leqslant [f(\xi)]^n \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

(если $\xi - \delta < a$, то нижний предел интегрирования $\xi - \delta$ заменяем на a; аналогично, если $\xi + \delta > b$, то верхний предел интегрирования $\xi + \delta$ заменяем на b). Извлекаем корень n-й степени, переходим к пределу при $n \to \infty$ и затем устремляем ε к нулю. См. 83.

199. Первое доказательство [P. Csillag]. Пусть $0 < \varepsilon < M = \operatorname{Max} f(x)$. Тогда

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n+1}\,dx \geqslant \int_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^{n+1}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant (M-\varepsilon) \int_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx,$$

$$\int_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \geqslant \int_{f(x) \geqslant M-\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx \geqslant C\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n,$$

где C — положительное постоянное число, не зависящее от n. Отсюда

$$M \geqslant \frac{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n+1}\,dx}{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n\,dx} \geqslant$$

$$\geqslant (M-\varepsilon)\frac{\int_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx}{\int_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx + \int_{f(x) < M-\varepsilon} \varphi(x)[f(x)]^n\,dx}.$$

Последнее отношение при $n \to \infty$ стремится к единице, ибо

$$\frac{\int\limits_{f(x) < M-\varepsilon} \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx}{\int\limits_{f(x) \geqslant M-\varepsilon} \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx} \leqslant \frac{(M-\varepsilon)^n \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}{C\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}.$$

Доказательство это существенно опирается на понятие интеграла Лебега.

Второе доказательство. Положим

$$I_n = \int\limits_a^b \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi(x)}\,[f(x)]^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\varphi(x)}\,[f(x)]^{\frac{n+1}{2}}\,dx.$$

Тогда [81]

$$I_n^2 \leqslant I_{n-1} I_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом, последовательность $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ монотонно возрастает; предел ее получается из 198 и I 68.

200. После введения новой переменной $\sqrt{kn}\,(x-\xi) = t$ наш интеграл преобразуется в

$$\frac{1}{\sqrt{kn}} \int\limits_{-\sqrt{kn}\,(\xi-a)}^{\sqrt{kn}\,(b-\xi)} e^{-t^2}\,dt.$$

При $n \to \infty$ этот интеграл стремится к $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

201. [Laplace, Théorie analytique des probabilités, т. 1, ч. 2, гл. 1; Oeuvres, т. 7, стр. 89, Paris, Gauthier-Villars, 1886; G. Darboux, Journ. de Math., серия 3, т. 4, стр. 5—56, 377—416, 1878; T. J. Stieltjes, Ch. Hermite, Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, т. 2, стр. 185, 315—317, 333, Paris, Gauthier-Villars, 1905; H. Lebesgue, Ann. de Toulouse, серия 3, т. 1, стр. 119—128, 1909; H. Burkhardt, Münch. Ber., 1914, стр. 1—11; O. Perron, Münch. Ber., 1917, стр. 191—219.] Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем положительное δ столь малым, чтобы $a < \xi - \delta < \xi + \delta < b$ и при $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ выполнялись неравенства

$$\varphi(\xi) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(\xi) + \varepsilon,$$
$$h''(\xi) - \varepsilon < h''(x) < h''(\xi) + \varepsilon < 0;$$

тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,e^{n[h(x)-h(\xi)]}\,dx = \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi(x)\,e^{n[h(x)-h(\xi)]}\,dx + O(\alpha^n) =$$
$$= \varphi(\xi') \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{n}{2}(x-\xi)^2 h''(\xi'')}\,dx + O(\alpha^n),$$

где α $(0<\alpha<1)$ зависит только от ε, но не от n, и $\xi-\delta<\xi'<$ $<\xi+\delta$, $\xi-\delta<\xi''<\xi+\delta$. Первый член в правой части заключен между границами

$$(\varphi(\xi)-\varepsilon)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{n}{2}(x-\xi)^2[h''(\xi)-\varepsilon]}\,dx \text{ и } (\varphi(\xi)+\varepsilon)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{n}{2}(x-\xi)^2[h''(\xi)+\varepsilon]}\,dx,$$

которые согласно **200** асимптотически равны соответственно

$$(\varphi(\xi)-\varepsilon)\sqrt{-\frac{2\pi}{(h''(\xi)-\varepsilon)\,n}},\quad (\varphi(\xi)+\varepsilon)\sqrt{-\frac{2\pi}{(h''(\xi)+\varepsilon)\,n}}.$$

Теорема сохраняет силу и при непрерывном возрастании n до бесконечности.

202. [*Формула Валлиса.*] Имеем:

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,dx.$$

Частный случай задачи **201** при $a=0$, $b=\pi$, $\varphi(x)=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=$ $=\sin^2 x$, $\xi=\frac{\pi}{2}$. (Вытекает также из **205**.)

203. Имеем:

$$P_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\cos x)^n\,dx.$$

Частный случай задачи **201** при $a=-\pi$, $b=\pi$, $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}$, $f(x)=\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\cos x$, $\xi=0$.

204. Имеем:

$$i^{-\nu}J_\nu(it)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-t\cos x}\cos\nu x\,dx.$$

Частный случай задачи **201** при $a=0$, $b=2\pi$, $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\cos\nu x$, $f(x)=e^{-\cos x}$, $\xi=\pi$, $n=t$.

205. [*Формула Стирлинга.*] Имеем:

$$\Gamma(n+1)=n^{n+1}\int_0^{\infty}(e^{-x}x)^n\,dx.$$

Частный случай задачи **201** при $a=0$, $b=\infty$, $\varphi(x)=1$, $f(x)=$ $=e^{-x}x$, $\xi=1$.

Более точная формула вытекает из решения **18** или **I 167**.

206. Согласно **205** имеем:

$$\binom{nk+l}{n}=\frac{\Gamma(nk+l+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(nk-n+l+1)}\sim\left(\frac{nk}{nk-n}\right)^l\frac{\Gamma(nk+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(nk-n+1)}\sim$$

$$\sim\left(\frac{k}{k-1}\right)^l\left(\frac{nk}{e}\right)^{nk}\left(\frac{e}{n}\right)^n\left(\frac{e}{nk-n}\right)^{nk-n}\sqrt{\frac{2\pi nk}{2\pi n\cdot 2\pi(nk-n)}}.$$

207. Заменим x на tx. Тогда рассматриваемый интеграл преобразуется в

$$t^{\alpha}\int_{t^{-1}}^{\infty} x^{\alpha-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx} dx.$$

Пусть $t^{-1}<\frac{1}{2}$. Тогда интеграл

$$t^{\alpha}\int_{t^{-1}}^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx} dx$$

можно опустить, ибо функция $f(x)=\left(\frac{e}{x}\right)^{x}$ в интервале $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ возрастает, следовательно, в этом интервале $f(x)\leqslant\sqrt{2e}<e$. К остающемуся интегралу

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} x^{\alpha-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx} dx$$

применяем **201**, полагая там

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\infty,\quad \varphi(x)=x^{\alpha-1},\quad f(x)=\left(\frac{e}{x}\right)^{x},\ \xi=1,\ n=t.$$

208. Заменяя x на $\tau^{-\frac{1}{1-\alpha}}(1+x)$, получаем:

$$\tau^{-\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)\int_{-1}^{\infty}\exp\left(\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{\alpha}\right)dx.$$

Частный случай задачи **201** при

$$a=-1,\quad b=\infty,\quad \varphi(x)=1,\quad h(x)=\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{\alpha},$$

$$\xi=0,\quad n=\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

209. Заменяя x на $e^{-1}t^{\frac{1}{\alpha}}(1+x)$, получаем:

$$e^{-1}t^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left(e^{-1}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}\right)\int_{-1}^{\infty}\exp\left\{e^{-1}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]\right\}dx.$$

Частный случай задачи **201** при

$$a=-1,\quad b=\infty,\ \varphi(x)=1,\quad h(x)=x-(1+x)\ln(1+x),$$

$$\xi=0,\quad n=e^{-1}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

210. Рассматриваемое выражение равно [205]

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int\limits_{-1}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}}[e^{-x}(1+x)]^n\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int\limits_{-\eta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}}[e^{-x}(1+x)]^n\,dx+O\left(\sqrt{n}\,e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}\right),$$

где $\eta=n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{6}$. Действительно, при отрицательных значениях x функция $e^{-x}(1+x)$ является возрастающей, так что в опускаемой части подинтегральное выражение меньше чем $[e^{\eta}(1-\eta)]^n$.

Разложим $e^{-x}(1+x)$ в оставшемся интервале интегрирования:

$$e^{-x}(1+x)=e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}(1+\theta x)^{-4}}\qquad(0<\theta=\theta(x)<1).$$

Но $e^{-n\frac{x^4}{4}(1+\theta x)^{-4}}=1+O(n^{-1+4\varepsilon})$. Мы получаем таким образом:

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+O(n^{-1+4\varepsilon})]\int\limits_{-\eta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}}e^{-n\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)}dx+O\left(\sqrt{n}\,e^{-\frac{1}{2}n^{2\varepsilon}}\right).$$

Далее, $e^{n\frac{x^3}{3}}=1+n\frac{x^3}{3}+O(n^{-1+6\varepsilon})$. Так как $\int\limits_{-\eta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}}e^{-n\frac{x^2}{2}}dx$ есть величина порядка $n^{-\frac{1}{2}}$, то мы получаем дальше:

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,[1+O(n^{-1+4\varepsilon})]\int\limits_{-\eta}^{\alpha n^{-\frac{1}{2}}+\beta n^{-1}} e^{-n\frac{x^2}{2}}\left(1+n\frac{x^3}{3}\right)dx+O(n^{-1+6\varepsilon})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-n^{\varepsilon}}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right)dx+O(n^{-1+6\varepsilon})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right)dx+O(n^{-1+6\varepsilon})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha+\beta n^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{x^3}{3}\,dx+O(n^{-1+6\varepsilon}).$$

211. [См. A. de Moivre, The doctrine of chances, 2-е изд., стр. 41—42, London, 1738.] Имеем:

$$K_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x e^{-x}x^n\,dx=1-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right),$$

так что x_n есть единственный положительный корень трансцендентного уравнения $K_n(x)=1-\lambda$. Согласно **210**

$$K_n(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)=A+\frac{B}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где A и B имеют указанное в **210** значение. Определим α и β так, чтобы $A=1-\lambda$, $B=0$. Тогда $x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)$ будет стремиться к нулю. Действительно, если бы для бесчисленного множества значений n выполнялось, скажем, неравенство

$$x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)>c>0,$$

то отсюда следовало бы, что

$$1-\lambda=K_n(x_n)>K_n(n+\alpha\sqrt{n}+\beta+c)=A+\frac{B'}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где B' составлено из α и $\beta+c$ так же, как B из α и β. Именно

$$B'=B+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}>0,$$

и последнее неравенство противоречит предположению $A=1-\lambda$. Аналогично убеждаемся, что и неравенство

$$x_n-(n+\alpha\sqrt{n}+\beta)<-c<0$$

не может выполняться для бесчисленного множества значений n.

212. Доказывается аналогично **201**; вместо **200** опираемся на формулу

$$\int\limits_a^{\xi+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} e^{-kn(x-\xi)^2}\,dx\sim\frac{1}{\sqrt{2kn}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha\sqrt{2k}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

где a вещественно, $k>0$ и оба постоянны.

Отсюда **210** вытекает не полностью.

213. Посредством вычисления, аналогичного проведенному в **201**, получаем:

$$\int\limits_a^{\xi+\frac{\alpha\ln n}{n}+\frac{\beta}{n}} \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx\sim\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\varepsilon_n}\varphi(x)\,e^{nh(x)}\,dx=$$

$$=\varphi(\xi')\,e^{nh(\xi)}\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\varepsilon_n} e^{n[h(x)-h(\xi)]}\,dx,$$

где $\varepsilon_n=\alpha n^{-1}\ln n+\beta n^{-1}$, δ — положительное постоянное число, причем δ выбрано столь малым и n столь большим, что в интервале интегрирования $\varphi(x)$ непрерывна, $h(x)$ имеет непрерывную вторую производную $h''(x)$ и $h'(x)>0$. Далее, $\xi-\delta<\xi'<\xi+\varepsilon_n$.

Положим $\eta_n=n^{-\frac{3}{4}}$ и возьмем n столь большим, чтобы выполнялись также неравенства $\varepsilon_n<\eta_n<\delta$. Тогда подинтегральное выражение в интервале $[\xi-\delta,\ \xi-\eta_n]$ будет порядка $e^{-n\eta_n h'}=e^{-n^{\frac{1}{4}}h'}$, где h' — положительная нижняя граница функции $h'(x)$. В оставшейся части интервала разлагаем $h(x)$ по степеням $x-\xi$ до второй включительно; получаем:

$$\int\limits_{\xi-\eta_n}^{\xi+\varepsilon_n} e^{nh'(\xi)(x-\xi)+\frac{n}{2}(x-\xi)^2h''(\xi'')}\,dx\qquad(\xi-\eta_n<\xi''<\xi+\varepsilon_n).$$

Здесь $h''(\xi'')$ ограничено и $n(x-\xi)^2\leqslant n\eta_n^2=n^{-\frac{1}{2}}$. Наконец,

$$\int\limits_{\xi-\eta_n}^{\xi+\varepsilon_n} e^{nh'(\xi)(x-\xi)}\,dx=\frac{e^{n\varepsilon_n h'(\xi)}-e^{-n\eta_n h'(\xi)}}{nh'(\xi)}\sim\frac{e^{(\alpha\ln n+\beta)h'(\xi)}}{nh'(\xi)}.$$

214. Замена переменной дает:

$$\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int\limits_0^{\xi+\frac{\alpha\ln n}{n}+\frac{\beta}{n}}(e^{1+x}x)^n\,dx \qquad [205,\ 213].$$

215. Согласно решению 211

$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^{-x_n} e^{-x}x^n\,dx=\frac{1}{n!}\int\limits_0^{x_n} e^{x}x^n\,dx=1.$$

Определим в **214** постоянные α и β так, чтобы $A=0$, $B=1$. Тогда $x_n-(\xi n+\alpha\ln n+\beta)$ должно будет стремиться к нулю [решение **211**].

216. Пусть при $x>1$ имеем $\frac{g(x)}{x}<G=\mathrm{const}$. Разобьем интеграл

$$a_n=\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{1-x+x\frac{g(nx)}{nx}}x\right)^n dx$$

на четыре части: от 0 до ε, от ε до $1-\varepsilon$, от $1-\varepsilon$ до $1+\varepsilon$ и от $1+\varepsilon$ до $+\infty$. При этом мы будем предполагать, что ε не зависит от n, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $\varepsilon<\gamma$ и столь мало, что в первом интервале $xe^{1-x+G\varepsilon}<1$. Во втором и четвертом интервалах будем иметь $xe^{1-x}<1$; выберем столь малое $\delta=\delta(\varepsilon)$, чтобы, более того, там выполнялось неравенство $xe^{1-x+\delta x}<1$, и далее, возьмем n столь большим, $n>N=N(\varepsilon)$, чтобы в этих двух интервалах выполнялось также неравенство $\frac{g(nx)}{nx}<\delta$ и, кроме того, было $n\varepsilon>1$. Тогда подинтегральное выражение, за исключением третьего интервала, будет $O(\theta^n)$, где θ не зависит от x и n, $0<\theta<1$, $\theta=\theta(\varepsilon)$. Из интегральной теоремы о среднем значении получаем [принимая во внимание еще **205**]:

$$a_n=e^{g(n\xi)}\frac{e^{-n}n^{n+1}}{n!}\int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}(e^{1-x}x)^n\,dx+O(\sqrt{n}\,\theta^n)\qquad(1-\varepsilon<\xi<1+\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\frac{\ln a_n}{g(n)}=\frac{g(n\xi)}{g(n)}+o(1).$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(\alpha n)}{g(n)}$ существует, притом равномерно для $1-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant1+\varepsilon$, и значение его для достаточно малых ε сколь угодно мало отличается от единицы.

217. Рассматриваемый интеграл можно записать следующим образом:

$$\frac{n!2^{2n}}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots n}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} 2^{2n\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\right)}\prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{2n-\nu}{2ne^{\frac{ix}{\sqrt{n}}}-\nu}\right|dx.$$

Применяем **115**. Пределом подинтегрального выражения служит e^{-x^2} [59] и притом равномерно в каждом конечном интервале, что можно показать, развивая доказательство теоремы **59**. [По поводу определения мажоранты $F(x)$ в смысле **115** см. G. Pólya, Gött. Nachr., 1920, стр. 6—7. Относительно обобщенной формулы Лапласа см. также R. v. Mises, Math. Zeitschr., т. 4, стр. 9, 1919.]

218. [См. G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 282, 1916.] Пусть x_n, $x_n>n$, будет точка, в которой достигается максимум M_n. Имеем:

$$\frac{M_n}{n!}=\frac{\sqrt{x_n}(x_n-1)(x_n-2)\ldots(x_n-n)}{n!}a^{-x_n}=\frac{x_n-n}{\sqrt{x_n}}\binom{x_n}{n}a^{-x_n},$$

$$\frac{1}{2x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-2}+\ldots+\frac{1}{x_n-n}=\ln a.$$

Отсюда на основании **16** заключаем, что $x_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)b+\varepsilon_n$, где $b=(1-a^{-1})^{-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Очевидно, $b>1$. Таким образом, каково бы ни было положительное ε, при достаточно больших n будем иметь:

$$\binom{\left(n+\frac{1}{2}\right)b-\varepsilon}{n}<\binom{x_n}{n}<\binom{\left(n+\frac{1}{2}\right)b+\varepsilon}{n}.$$

Обе эти границы согласно **206** асимптотически равны соответственно

$$\frac{(b-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{b}{b-1}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)b+\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

и

$$\frac{(b-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{b}{b-1}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)b+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

219. Доказывается аналогично предыдущей задаче с применением **17**.

220. Положим $f(n, x)=|Q_n(x)|a^{-x}$. Тогда при $m-1\leqslant x<m$, где m — целое положительное число, имеем:

$$f(m-1, x)\geqslant f(m, x)\geqslant f(m+1, x)\geqslant\ldots \qquad \text{[III 12]},$$

так что верхняя грань функции $f(n, x)$ для фиксированного $x > 0$ и изменяющегося n достигается при $n < x$. См. 218.

221. [219, 220.]

222. Точка x_n, в которой достигается максимум M_n, определяется из уравнения $n = x_n + a\mu x_n^\mu$. Имеем:

$$n > x_n, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n - x_n}{n^\mu} = a\mu.$$

Отсюда

$$x_n = n - a\mu n^\mu + o(n^\mu),$$
$$\ln x_n = \ln n - a\mu n^{\mu-1} + o(n^{\mu-1}),$$

следовательно,

$$\ln \frac{M_n}{n!} = n \ln x_n - x_n - a x_n^\mu - n \ln \frac{n}{e} + o(n^\mu) = -a n^\mu + o(n^\mu).$$

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. $z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2iy$, $z\bar{z}=r^2$.

2. Открытая правая полуплоскость; замкнутая правая полуплоскость; открытая полоса, ограниченная параллельными прямыми, отстоящими от вещественной оси на расстояниях a и b; замкнутый угол между лучами, составляющими с положительной вещественной осью соответственно углы α, β; мнимая ось; окружность радиуса R с центром в z_0; внутренняя часть, соответственно внутренняя часть вместе с контуром — того же круга; замкнутое круговое кольцо между концентрическими окружностями радиусов R и R' с центром в точке $z=0$; окружность радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в $\frac{R}{2}$.

3. Если $|a-b|\leqslant k$ — эллипс с фокусами a и b и большой осью k, соответственно ограничиваемая им область. (При $|a-b|=k$ эллипс вырождается в отрезок между фокусами.) Если $k<|a-b|$, то условию задачи не удовлетворяет ни одна точка z.

4. Открытая область, ограниченная кривой $|z-z_1|\,|z-z_2|=R^2$ с «фокусами» z_1 и z_2, где z_1 и z_2 — корни уравнения $z^2+az+b=0$. Эта кривая представляет собой геометрическое место точек, произведение расстояний которых от z_1 и z_2 постоянно и равно R^2. Она состоит из двух отдельных кусков, если $R\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{2}$, и из одного куска, если $R>\frac{|z_1-z_2|}{2}$. При $R=\frac{|z_1-z_2|}{2}$ имеем обыкновенную лемнискату.

5. Условие задачи равносильно условию

$$|z-a|^2 \lesseqgtr |1-\bar{a}z|^2$$

или

$$(1-|a|^2)(|z|^2-1)\lesseqgtr 0.$$

Точки первой категории лежат внутри единичного круга $|z|<1$, второй категории — на единичной окружности $|z|=1$, третьей категории — вне единичного круга. (При $z=\infty$ рассматриваемое выражение равно $-\frac{1}{\bar{a}}$; $z=\infty$ принадлежит к точкам третьей категории.)

6. Условие задачи равносильно условию

$$|a-z|^2 \lesseqgtr |\bar{a}+z|^2 \quad \text{или} \quad -\Re\,[(a+\bar{a})\,z] \lesseqgtr 0.$$

Так как $a+\bar{a}$ вещественно и положительно, то условие приводится к $\Re z \gtreqless 0$. Точки первой категории лежат справа, третьей — слева от мнимой оси. (При $z=\infty$ рассматриваемое выражение равно -1; $z=\infty$ принадлежит к точкам второй категории.)

7. Положим $a=\gamma+i\delta$, $\frac{z_1}{z_2}=x+iy$, тогда уравнение принимает вид

$$\alpha\,(x^2+y^2)+2\,(\gamma x+\delta y)+\beta=0.$$

8. Пусть колесо радиуса a катится по вещественной оси и с этим колесом неподвижно связана некоторая точка P, находящаяся на расстоянии b от центра. Тогда точка z_1 описывает прямую — траекторию центра колеса; точка z_2 — окружность, описываемую точкой P, когда колесо вращается вокруг неподвижного центра; точка $z=z_1+z_2$ — удлиненную, обыкновенную или укороченную циклоиду, смотря по тому, будет ли $a \lesseqgtr b$.

9. По эпициклоиде.

10. $\frac{dz}{dt}=\frac{dr}{dt}e^{i\vartheta}+ire^{i\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}e^{i\vartheta}+2i\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}e^{i\vartheta}-re^{i\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+ire^{i\vartheta}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=$$
$$=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]e^{i\vartheta}+\frac{ie^{i\vartheta}}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Коэффициент при $e^{i\vartheta}$ представляет радиальную, коэффициент при $ie^{i\vartheta}$ — перпендикулярную к ней компоненту.

11. В круговом кольце

$$\mathfrak{G}_n: \qquad n<|z|<n+1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

имеем:

$$1<\left|\frac{z}{1!}\right|<\left|\frac{z^2}{2!}\right|<\ldots<\left|\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\right|<\left|\frac{z^n}{n!}\right|>\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|>\ldots,$$

т. е. в $\mathfrak{G}_n$ наибольшим по модулю является n-й член. На границе между $\mathfrak{G}_n$ и $\mathfrak{G}_{n+1}$ n-й и $(n+1)$-й члены по модулю совпадают и превосходят все остальные.

Если вообще

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \qquad (a_0\neq 0)$$

есть всюду сходящийся не обрывающийся степенной ряд, то мы можем разбить всю плоскость z концентрическими окружностями с центром в $z=0$ на круговые кольца так, чтобы в каждом отдельном кольце наибольшим по модулю был один определенный член ряда (максимальный член). При переходе от одного кольца к следующему, охватывающему его, номера максимальных членов возрастают. **[I 119, I 120.]**

12. Периферии кругов

$$\mathfrak{K}_n: \qquad |z-n|<n+1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

взаимно соприкасаются в точке $z=-1$, пересекают в ней вещественную ось под прямым углом и вторично пересекаются с вещественной осью соответственно в точках $2n+1$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. $\mathfrak{K}_{n+1}$ содержит $\mathfrak{K}_n$. В серповидной области $\mathfrak{G}_n$, заключающейся между окружностями кругов $\mathfrak{K}_n$ и $\mathfrak{K}_{n-1}$, имеем:

$$\left|\frac{z}{1}\right|>1,\quad \left|\frac{z-1}{2}\right|>1,\ \ldots,\ \left|\frac{z-n+1}{n}\right|>1,$$
$$\left|\frac{z-n}{n+1}\right|<1,\quad \left|\frac{z-n-1}{n+2}\right|<1,\ \ldots$$

Поэтому там

$$1<\left|\binom{z}{1}\right|<\left|\binom{z}{2}\right|<\ldots<\left|\binom{z}{n-1}\right|<\left|\binom{z}{n}\right|>\left|\binom{z}{n+1}\right|>\ldots,$$

т. е. в $\mathfrak{G}_n$ наибольшим по модулю является n-й член ряда. На границе между $\mathfrak{G}_n$ и $\mathfrak{G}_{n+1}$ n-й и $(n+1)$-й члены по модулю совпадают и превосходят все остальные. (В точке $z=-1$ все члены ряда по модулю равны единице.)

Области $\mathfrak{G}_n$ и их граничные линии исчерпывают всю полуплоскость $\Re z>-1$ вместе с точкой $z=-1$. В полуплоскости $\Re z\leqslant -1$, $z\neq -1$ модули членов ряда монотонно возрастают, так что нет максимального члена.

13. Периферии лемнискат

$$\mathfrak{L}_n: \qquad |z^2-n^2|<n^2 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

соприкасаются между собой и с прямыми $\Re z=\pm\Im z$ в точке $z=0$ и пересекают вещественную ось в точках $\pm n\sqrt{2}$. $\mathfrak{L}_{n+1}$ содержит $\mathfrak{L}_n$. В серповидной области $\mathfrak{G}_n$, заключенной между перифериями лемнискат $\mathfrak{L}_{n+1}$ и $\mathfrak{L}_n$ $(\mathfrak{G}_0=\mathfrak{L}_1)$, имеем:

$$\left|1-\frac{z^2}{1^2}\right|>1,\quad \left|1-\frac{z^2}{2^2}\right|>1,\ \ldots,\ \left|1-\frac{z^2}{n^2}\right|>1,$$
$$\left|1-\frac{z^2}{(n+1)^2}\right|<1,\quad \left|1-\frac{z^2}{(n+2)^2}\right|<1,\ \ldots$$

Поэтому там

$$|P_0(z)|<|P_1(z)|<|P_2(z)|<\ldots$$
$$\ldots<|P_{n-1}(z)|<|P_n(z)|>|P_{n+1}(z)|>\ldots,$$

т. е. в $\mathfrak{G}_n$ наибольшим по модулю среди всех частичных произведений является $P_n(z)$. На границе между $\mathfrak{G}_n$ и $\mathfrak{G}_{n+1}$ n-е и $(n+1)$-е частичные произведения по модулю совпадают и превосходят все остальные. (В точке $z=0$ все частичные произведения равны нулю.)

Области $\mathfrak{G}_n$ и их граничные линии исчерпывают углы

$$-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}$$

вместе с точкой $z=0$. Для других z модули монотонно возрастают и, значит, максимального не существует.

14. Пусть $\vartheta=\arg\int_a^b f(t)\,e^{i\varphi(t)}\,dt$. Тогда

$$\left|\int_a^b f(t)\,e^{i\varphi(t)}\,dt\right|=e^{-i\vartheta}\int_a^b f(t)\,e^{i\varphi(t)}\,dt=$$
$$=\int_a^b f(t)\cos[\varphi(t)-\vartheta]\,dt<\int_a^b f(t)\,dt,$$

за исключением того случая, когда $\varphi(t)\equiv\vartheta\pmod{2\pi}$ во всех точках непрерывности функции $\varphi(t)$.

15. [K. Löwner. Math. Ann., т. 89, стр. 120, 1923.] Достаточно доказать, что $\Re(4P^2-2Q)\leqslant 3$. [Заменяем $\varphi(t)$ на $\varphi(t)+\frac{\vartheta}{2}$, где $\vartheta=\arg(4P^2-2Q)$; см. решение **14.**] Но теперь [II **81**]

$$\Re(4P^2-2Q)=4\left(\int_0^\infty e^{-t}\cos\varphi(t)\,dt\right)^2-$$
$$-4\left(\int_0^\infty e^{-t}\sin\varphi(t)\,dt\right)^2-2\int_0^\infty e^{-2t}\cos 2\varphi(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 4\left(\int_0^\infty e^{-t}|\cos\varphi(t)|\,dt\right)^2-2\int_0^\infty e^{-2t}\cos 2\varphi(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 4\int_0^\infty e^{-t}\cos^2\varphi(t)\,dt-2\int_0^\infty e^{-2t}\cos 2\varphi(t)\,dt=$$
$$=4\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-2t})\cos^2\varphi(t)\,dt+1\leqslant 4\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-2t})\,dt+1=3.$$

Если $\Re(4P^2-2Q)=3$, то $\cos^2\varphi(t)=1$ и $\cos\varphi(t)$ должен сохранять постоянный знак во всех точках непрерывности функции $\varphi(t)$, т. е. $\varphi(t)\equiv 0$ или $\varphi(t)\equiv\pi\pmod{2\pi}$.

16. Функция $p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+\ldots+p_nz^{-n}$ монотонно убывает от ∞ до 0, когда z монотонно возрастает вдоль положительной оси, следовательно, она принимает значение 1 в одной и только одной точке ζ. Имеем:

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \ldots - p_n > 0 \quad \text{или} \quad \leqslant 0,$$

смотря по тому, будет ли $z > \zeta$ или $z \leqslant \zeta$.

17. Имеем:

$$|z_0|^n = |a_1 z_0^{n-1} + a_2 z_0^{n-2} + \ldots + a_n| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| |z_0|^{n-1} + |a_2| |z_0|^{n-2} + \ldots + |a_n|,$$

следовательно, согласно 16 $|z_0| \leqslant \zeta$.

18. Применить 17 к $a_n^{-1} z^n P(z^{-1})$.

19. Вспомогательные полиномы, рассматриваемые в задачах 17 и 18, в данном случае тождественно совпадают и равны $z^n - |c|$.

20. Пусть $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| > 0$ (в противном случае утверждение тривиально). Согласно 17 достаточно доказать, что положительное число ζ, для которого

$$\zeta^n = |a_1|^{n-1} + |a_2| \zeta^{n-2} + \ldots + |a_n|,$$

удовлетворяет неравенству

$$\zeta \leqslant \operatorname{Max}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}, \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-2}}}, \ldots, \sqrt[n]{\frac{d_n}{d_0}}\right).$$

Из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \zeta^{-k} = 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{d_{n-k}}{d_n}$$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \left(\zeta^{-k} - \frac{d_{n-k}}{d_n}\right) \geqslant 0.$$

Следовательно, среди чисел $\zeta^{-k} - \frac{d_{n-k}}{d_n}$ имеется по крайней мере одно неотрицательное.

21. а) Полагаем в 20 $d_n = n$, далее, $d_{n-k} = |a_k|^{-1}$ для $a_k \neq 0$ и $d_{n-k} = \varepsilon^{-1}$ для $a_k = 0$ $(\varepsilon > 0)$. Имеем:

$$\sqrt[k]{\frac{d_n}{d_{n-k}}} = \begin{cases} \sqrt[k]{n|a_k|} & \text{для} \quad a_k \neq 0, \\ \sqrt[k]{n\varepsilon} & \text{для} \quad a_k = 0. \end{cases}$$

Беря теперь $\varepsilon \to 0$, получаем наше утверждение.

б) Полагаем в 20

$$d_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1,$$

далее, $d_{n-k}=\binom{n}{k}|a_k|^{-1}$ для $a_k \neq 0$ и $d_{n-k}=\varepsilon^{-1}$ для $a_k=0$ $(\varepsilon>0)$. Дальше рассуждаем, как в а).

22. [G. Eneström, Öfv. af vet.-akad. förh. 1893, стр. 405—415; Tôhoku Math. J., т. 18, стр. 34—36, 1920; S. Kakeya, Tôhoku Math. J., т. 2, стр. 140—142, 1912; A. Hurwitz, там же, т. 4, стр. 89, 1913.] При $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
&|(1-z)(p_0+p_1 z+p_2 z^2+\ldots+p_n z^n)| = \\
&\quad = |p_0-(p_0-p_1)z-(p_1-p_2)z^2-\ldots-(p_{n-1}-p_n)z^n-p_n z^{n+1}| \geqslant \\
&\quad \geqslant p_0-|(p_0-p_1)z+(p_1-p_2)z^2+\ldots+p_n z^{n+1}| > \\
&\quad > p_0-(p_0-p_1+p_1-p_2+\ldots+p_n)=0,
\end{aligned}$$

так как $(p_0-p_1)z$, $(p_1-p_2)z^2$, $\ldots$, $p_n z^{n+1}$ не могут все иметь одинаковый аргумент (за исключением случая $z \geqslant 0$, когда утверждение и без того очевидно). Более слабый результат ($<$ вместо $\leqslant$) прямо вытекает из 17.

23. Заменяем z на $\frac{z}{\rho}$, соответственно на $\frac{\rho}{z}$ (ρ положительно), и к полученному таким образом уравнению, подобрав соответственным образом ρ, применяем **22** (во втором случае предварительно умножив обе части уравнения на z^n).

24. Обозначим рассматриваемый полином через $f(z)$. Для $\Re z \geqslant 0$, $|z|>1$ имеем $\Re \frac{1}{z} \geqslant 0$, следовательно,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| &\geqslant \left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right|-\frac{a_{n-2}}{|z|^2}-\frac{a_{n-3}}{|z|^3}-\ldots-\frac{a_0}{|z|^n} > \\
&> \Re\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right)-\frac{9}{|z|^2}-\frac{9}{|z|^3}-\ldots \geqslant 1-\frac{9}{|z|^2-|z|}.
\end{aligned}$$

Это последнее число неотрицательно, когда $|z| \geqslant r$, где r — положительный корень уравнения $r^2-r=9$, $r=\frac{1+\sqrt{37}}{2}$, $3<r<4$. Полином, соответствующий числу 109, обращается в нуль в точках $\pm 3i$.

25. [Ch. Hermite и Ch. Biehler; см. Laguerre, Oeuvres, т. 1, стр. 109, Paris, Gauthier-Villars, 1898.] Пусть

$$P(z)=U(z)+iV(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \quad (a_0 \neq 0)$$

и x — корень уравнения $U(x)=0$ или $V(x)=0$. Тогда имеем:

$$U(x)+iV(x)=U(x)-iV(x) \text{ или } U(x)+iV(x)=-[U(x)-iV(x)],$$

смотря по тому, имеет ли место второй или первый случай. Следовательно,

$$a_0(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)=\pm\bar{a}_0(x-\bar{z}_1)(x-\bar{z}_2)\ldots(x-\bar{z}_n).$$

Но равенство такого вида возможно лишь тогда, когда x вещественно. В самом деле, если бы x лежало, скажем, в верхней полуплоскости, то мы имели бы $|x-z_\nu|<|x-\bar{z}_\nu|$ для всех ν и, значит, $\left|a_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-z_\nu)\right|<\left|\bar{a}_0\prod_{\nu=1}^{n}(x-\bar{z}_\nu)\right|$. Аналогично убеждаемся в том, что x не может лежать и в нижней полуплоскости.

26. [См. I. Schur, J. für Math., т. 147, стр. 230, 1917.] Пусть

$$P(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)\qquad(a_0\neq 0)$$

и x — корень уравнения $P(x)+P^*(x)=0$. Тогда $|P(x)|=|P^*(x)|$, и, значит, так как $P^*(z)=\bar{a}_0(1-\bar{z}_1z)(1-\bar{z}_2z)\ldots(1-\bar{z}_nz)$,

$$\prod_{\nu=1}^{n}|x-z_\nu|=\prod_{\nu=1}^{n}|1-\bar{z}_\nu x|.$$

Но уравнение такого вида возможно лишь когда $|x|=1$. В самом деле, если бы, скажем, было $|x|<1$, то тогда для каждого ν мы имели бы $|x-z_\nu|<|1-\bar{z}_\nu x|$ [5], и первое произведение было бы меньше второго. Совершенно так же убеждаемся в том, что не может быть и $|x|>1$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для уравнения

$$P(z)+\gamma P^*(z)=0\qquad(|\gamma|=1).$$

27. [M. Fekete *).] Пусть $\gamma=\lambda P(a)+\mu P(b)$, $0<\lambda<1$, $\lambda+\mu=1$. Если бы все нули полинома $P(z)-\gamma=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ лежали вне указанной фигуры, то мы имели бы:

$$-\frac{\pi}{n}<\arg\frac{a-z_\nu}{b-z_\nu}<\frac{\pi}{n}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, следовательно,

$$-\pi<\arg\frac{P(a)-\gamma}{P(b)-\gamma}<\pi,$$

что противоречит тождеству

$$\frac{P(a)-\gamma}{P(b)-\gamma}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

28. Мы можем принять, что прямой, рассматриваемой в задаче, служит мнимая ось, и $\Re z_\nu>0$ при всех значениях ν (этого всегда можно добиться путем умножения на множитель вида $e^{i\alpha}$). Тогда также $\Re\frac{1}{z_\nu}>0$ и

$$\Re(z_1+z_2+\ldots+z_n)>0,\quad z_1+z_2+\ldots+z_n\neq 0,$$
$$\Re\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\right)>0,\quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

Утверждение сохраняет силу и тогда, когда все точки расположены в *замкнутой* полуплоскости, определяемой заданной прямой, если только не все они лежат на этой прямой.

*) См. Acta Litter. ac Scient. (Szeged), т. 1, стр. 98—100, 1923.

29. См. 28.

30. Применяем 29 к $m_1(z_1-z)$, $m_2(z_2-z)$, $\ldots$, $m_n(z_n-z)$. Какова бы ни была прямая g', проходящая через $z=0$, точка z_ν всегда лежит по ту же сторону прямой g, проходящей через z параллельно g', по какую $m_\nu(z_\nu-z)$ лежит относительно прямой g'.

31. [G a u s s, Opera omnia, т. 3, стр. 112, Göttingen, Ges. d. Wiss., 1886; т. 8, стр. 32, 1900; Ch. F. L u c a s, C. R., т. 67, стр. 163—164, 1868; т. 106, стр. 121—122, 1888. См. также L. F e j é r, C. R., т. 145, стр. 460, 1907 и Math. Ann., т. 65, стр. 417, 1907.]

Первое решение. Вектор, определяемый комплексным числом $\frac{1}{\overline{z-a}}$, представляет силу, приложенную к a в направлении z, обратно пропорциональную расстоянию между этими двумя точками. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули $P(z)$ и z — отличный от них нуль $P'(z)$. Тогда

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{z-z_\nu}=0,$$

т. е.

$$\frac{1}{\overline{z-z_1}}+\frac{1}{\overline{z-z_2}}+\ldots+\frac{1}{\overline{z-z_n}}=0,$$

и, значит, z представляет положение равновесия материальной точки, притягиваемой неподвижными точками $z_1, z_2, \ldots, z_n$ с силами, обратно пропорциональными расстоянию. Если бы теперь z лежала вне наименьшего выпуклого полигона, содержащего все z_ν, то силы, с которыми действуют на z отдельные точки, давали бы результирующую, отличную от нуля, что невозможно. (315.)

Второе решение. В тех же обозначениях, что и выше, имеем:

$$\frac{z-z_1}{|z-z_1|^2}+\frac{z-z_2}{|z-z_2|^2}+\ldots+\frac{z-z_n}{|z-z_n|^2}=0,$$

откуда

$$z=m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n \qquad (m_1+m_2+\ldots+m_n=1),$$

где ν-я «масса» m_ν пропорциональна $\frac{1}{|z-z_\nu|^2}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

32. [L. Fejér, O. Toeplitz.] Пусть ζ — произвольная внутренняя точка указанного выпуклого полигона. Имеем:

$$\zeta=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\ldots+\lambda_nz_n,$$
$$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \ldots,\ \lambda_n>0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$$

и, стало быть, для $\zeta\neq z_\nu$

$$\frac{m_1}{\zeta-z_1}+\frac{m_2}{\zeta-z_2}+\ldots+\frac{m_n}{\zeta-z_n}=0$$

при

$$m_\nu=\frac{\lambda_\nu\,|\zeta-z_\nu|^2}{\lambda_1\,|\zeta-z_1|^2+\lambda_2\,|\zeta-z_2|^2+\ldots+\lambda_n\,|\zeta-z_n|^2}\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Будем аппроксимировать m_ν рациональными числами

$$\frac{p_\nu}{P}\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ p_1+p_2+\ldots+p_n=P)$$

и примем во внимание, что корни алгебраических уравнений непрерывно изменяются при непрерывном изменении коэффициентов. Тогда производная полинома $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)^{p_\nu}$ будет иметь нуль, сколь угодно близкий к ζ.

Так как ζ лежит внутри или на границе по крайней мере одного из треугольников, образуемых тройками чисел z_ν, то для наших целей достаточно опираться на непрерывную зависимость нулей от коэффициентов для полиномов второй степени, а это свойство тривиально. [Последнее замечание принадлежит A. и R. Brauer'ам.]

33. [M. Fujiwara, Tòhoku Math. J., т. 9, стр. 102—108, 1916; T. Takagi, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan (3), т. 3, стр. 175—179, 1921.] Пусть $P(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ и z — точка, для которой

$$P(z)-cP'(z)=0,\qquad P(z)\neq 0.$$

Тогда имеем:

$$\frac{P'(z)}{P(z)}-\frac{1}{c}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_n}-\frac{1}{c}=0,\tag{1}$$

что с помощью величин

$$m_1=\frac{1}{|z-z_1|^2},\quad m_2=\frac{1}{|z-z_2|^2},\ \ldots,\ m_n=\frac{1}{|z-z_n|^2},$$

$$M=\frac{1}{|c|^2(m_1+m_2+\ldots+m_n)}$$

можно записать в виде

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}+Mc.\tag{2}$$

В правой части формулы (2) стоят два члена: первый представляет собой центр тяжести некоторого распределения масс в точках $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, т. е. наверняка лежит в наименьшем выпуклом полигоне, охватывающем эти точки; второй член представляет вектор, параллельный вектору c. Отсюда и вытекает наше утверждение. См. V **114**.

34. [T. J. Stieltjes, Acta Math., т. 6, стр. 321—326, 1885; G. Pólya, C. R., т. 155, стр. 767, 1912.] Пусть z_ν $(\nu=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n)$ — какой-либо нуль $P(z)$ и $A(z_\nu)\neq 0$. Тогда также и $P'(z_\nu)\neq 0$. Действительно, в противном случае из дифференциального уравнения для $P(z)$ вытекало бы, что и $P''(z_\nu)=0$, откуда в результате дальнейшего дифференцирования следовало бы, что $P(z)$ вообще тождественно равно нулю. Уравнение

$$\frac{P''(z_\nu)}{2P'(z_\nu)}+\frac{B(z_\nu)}{A(z_\nu)}=0,$$

$$\frac{1}{z_\nu-z_1}+\ldots+\frac{1}{z_\nu-z_{\nu-1}}+\frac{1}{z_\nu-z_{\nu+1}}+\ldots+\frac{1}{z_\nu-z_n}+$$
$$+\frac{\rho_1}{z_\nu-a_1}+\frac{\rho_2}{z_\nu-a_2}+\ldots+\frac{\rho_p}{z_\nu-a_p}=0$$

показывает [31], что z_ν лежит внутри наименьшего выпуклого полигона (соответственно отрезка), содержащего числа $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \ldots, z_n, a_1, a_2, \ldots, a_p$. Рассмотрим теперь наименьший выпуклый полигон, содержащий числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_p$. Из предыдущего следует, что на его границе могут лежать только a_ν и лишь те нули $P(z)$, которые одновременно служили бы нулями $A(z)$; но таких среди z_ν нет.

35. [J. L. W. V. Jensen, Acta Math., т. 36, стр. 190, 1913; J. v. Sz. Nagy, Deutsche Math.-Ver., т. 31, стр. 239—240, 1922.] Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули $f(z)$ и

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_n}=0,\quad z\neq\bar z,\quad z\neq z_\nu\qquad(\nu=1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда вследствие симметричного расположения нулей имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Im\left(\frac{1}{z-z_\nu}+\frac{1}{z-\bar z_\nu}\right)=0,$$

что, как показывает формула

$$\Im\left(\frac{1}{z-z_0}+\frac{1}{z-\bar z_0}\right)=2y\,\frac{y_0^2-(x-x_0)^2-y^2}{|(z-z_0)(z-\bar z_0)|^2}$$
$$(z=x+iy,\quad z_0=x_0+iy_0),$$

невозможно, если z лежит вне всех указанных кругов.

36. Полагая $z_n=x_n+iy_n$, имеем $|z_n|\leqslant\frac{x_n}{\cos\alpha}$. Тем самым из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ вытекает и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$. Обратное очевидно.

37. Положим $z_n=x_n+iy_n$. Из предположения задачи вытекает последовательно сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Re z_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2-y_n^2),$$
$$2\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2-\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2-y_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2.$$

38. Пример: $z_n = e^{2\pi i n\theta}(\ln(n+1))^{-1}$, θ иррационально. Сумма $\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i\nu k\theta}$ при $n\to\infty$ остается ограниченной [решение II **166**, Кнорр, стр. 316].

39. Пусть все числа z_n отличны от нуля и расположены в порядке возрастания модулей:

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant|z_3|\leqslant\ldots$$

Заключим каждое из z_ν $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ в круг диаметра δ с центром в z_ν. Эти круги не имеют общих внутренних точек и целиком содержатся в круге $|z|\leqslant|z_m|+\frac{\delta}{2}$. Поэтому

$$m\pi\frac{\delta^2}{4}<\pi\left(|z_m|+\frac{\delta}{2}\right)^2$$

и, следовательно,

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{\ln m}{\ln|z_m|}\leqslant 2 \qquad [\text{I } \mathbf{113}].$$

40. Рассматриваемое выражение равно

$$n^{i\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{i\alpha}\cdot\frac{1}{n}.$$

Множитель $n^{i\alpha}$ всюду плотно заполняет единичную окружность [I **101**]; остаточный множитель сходится к интегралу

$$\int_0^1 x^{i\alpha}\,dx=\frac{1}{1+i\alpha}.$$

41. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|^2=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ldots=$$
$$=\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)_{x=i}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Положим $i+n=\sqrt{1+n^2}\,e^{2\pi i\vartheta_n}$, $0<\vartheta_n<\frac{1}{4}$, тогда $\operatorname{tg}2\pi\vartheta_n=\frac{1}{n}$, следовательно, ряд $\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n+\ldots$ расходится, причем $\lim_{n\to\infty}\vartheta_n=0$. Имеем:

$$\arg z_n=2\pi(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n-[\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n]).$$

В силу I **101** предельные точки последовательности z_n заполняют окружность

$$|z|=\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

42. Имеем:

$$r_n^2 = |z_n|^2 = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1,$$

$$|z_{n+1}-z_n| = \left|\frac{iz_n}{\sqrt{n+1}}\right| = 1,$$

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{\varphi_n - \varphi_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \ldots$$

Отсюда $r_n \sim \frac{1}{2}\varphi_n$ [I 70].

43. В силу II 59 и II 202 модуль интересующего нас выражения сходится к e^{-t^2}. Поэтому достаточно доказать, что

$$2n\sin\frac{t}{\sqrt{n}}\ln 2 - \sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{2n\sin\frac{t}{\sqrt{n}}}{2n\cos\frac{t}{\sqrt{n}}-\nu} = o(1),$$

где $\operatorname{arctg} x$ в точке $x=0$ равен нулю. Пусть $n > t^2$. Тогда [I 142]

$$\left|\frac{2n\sin\frac{t}{\sqrt{n}}}{2n\cos\frac{t}{\sqrt{n}}-\nu}\right| \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,|t|}{2n\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)-\nu} \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,|t|}{n-t^2} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Поэтому $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots$ можно заменить на x. Требуемое утверждение полностью вытекает тогда из соотношения

$$\ln 2 - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2-\left[\frac{\nu}{n}+2\left(1-\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]} = O(n^{-1}).$$

Это последнее получается с помощью небольшого расширения теоремы II 10 при замене в рассматриваемой там сумме Δ_n члена $f\left(a+\nu\frac{b-a}{n}\right)$ на $f\left(a+\nu\frac{b-a}{n}+\varepsilon_n\right)$; результат $\Delta_n = O(n^{-1})$ остается в силе, если $\varepsilon_n = O(n^{-1})$. (При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена и ограничена еще несколько влево от a и вправо от b.)

44. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$, $\zeta_n < K$, далее, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $|z_n| < M$, $|z| \leqslant M$, K и M не зависят от n. Ряды

$$\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

и

$$\beta = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n + \ldots$$

абсолютно сходятся. Пусть ε — произвольное положительное число и $N=N(\varepsilon)$ столь велико, что $|z_n-z|<\varepsilon$ для всех $n>N$. Из равенства

$$w_n=\left(\sigma_n-\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\right)z+\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z_\nu+\sum_{\nu=0}^{n}(a_{n\nu}-a_\nu)(z_\nu-z),$$

полагая $w=(\sigma-\alpha)z+\beta$, получаем:

$$|w-w_n|<M|\sigma-\sigma_n|+M\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\right|+\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu z_\nu\right|+$$
$$+2M\sum_{\nu=0}^{N}|a_{n\nu}-a_\nu|+2K\varepsilon.$$

45. [См. I. Schur, J. für Math., т. 151, стр. 100—101, 1921; F. Mertens, J. für Math., т. 79, стр. 182—184, 1875.] Пусть V_n и W_n — частичные суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}v_n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0).$$

Тогда

$$W_n=u_nV_0+u_{n-1}V_1+\ldots+u_0V_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Для того чтобы сходящаяся последовательность V_n преобразовывалась в сходящуюся же последовательность W_n, во всяком случае необходимо, чтобы суммы $|u_n|+|u_{n-1}|+\ldots+|u_0|$ были ограничены, т. е. ряд $u_0+u_1+u_2+\ldots$ абсолютно сходился. Но тогда остальные условия 1, 2 (см. стр. 118) выполняются автоматически. Тем самым искомым необходимым и достаточным условием является абсолютная сходимость ряда

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

46. [См. I. Schur, l. c. 45, стр. 103—104; T. J. Stieltjes, Nouv. Ann., серия 3, т. 6, стр. 210—213, 1887.] Обозначим частичные суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t|n}u_tv_{\frac{n}{t}}\right)$$

через V_n и W_n. Тогда [VIII 81]

$$W_n=u_1V_n+u_2V_{\left[\frac{n}{2}\right]}+u_3V_{\left[\frac{n}{3}\right]}+\ldots+u_nV_{\left[\frac{n}{n}\right]}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Коэффициент при V_k равен сумме тех u_l, для которых $\left[\frac{n}{l}\right]=k$. В частности, коэффициенты при V_n, $V_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, $V_{\left[\frac{n}{3}\right]}$, $\ldots$, $V_{\left[\frac{n}{\nu}\right]}$, где $\nu=[\sqrt{n}]$, равны соответственно $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, ибо для $2\leqslant l\leqslant\nu$ имеем:

$$\frac{n}{l-1}-\frac{n}{l}=\frac{n}{l(l-1)}>\frac{n}{l^2}\geqslant 1.$$

Если сумма модулей коэффициентов в n-й строке ограничена, это подавно имеет место для $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_\nu|$, т. е. ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ абсолютно сходится. Искомым необходимым и достаточным условием служит поэтому абсолютная сходимость ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$

47. [R. Dedekind, см. P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4-е изд., стр. 376, Braunschweig, Fr. Vieweg, 1894*); J. Hadamard, Acta Math., т. 27, стр. 177—183, 1903. Ср. I. Schur, l. c. 45, стр. 104—105.] Положим:

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$B_n = \gamma_0 a_0 + \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_n a_n.$$

Тогда

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}) A_\nu + \gamma_n A_n.$$

48. [См. G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 282, 1916. Решение — S. Sidon, там же, серия 3, т. 26, стр. 68, 1917.] Полагаем:

$$cu_0 = z_0,\quad u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + cu_n = z_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = w_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \zeta^n = U(\zeta),\qquad \sum_{n=0}^{\infty} z_n \zeta^n = Z(\zeta),\qquad \sum_{n=0}^{\infty} w_n \zeta^n = W(\zeta).$$

Сравнение коэффициентов дает:

$$W(\zeta) = \frac{U(\zeta)}{1-\zeta},\quad Z(\zeta) = \frac{U(\zeta)}{1-\zeta} + (c-1)\,U(\zeta),$$

и, следовательно,

$$W(\zeta) = \frac{Z(\zeta)}{c + (1-c)\,\zeta}.$$

Пусть $c \neq 0$. Из последнего уравнения сравнением коэффициентов получаем:

$$w_n = \frac{(c-1)^n}{c^{n+1}} z_0 + \frac{(c-1)^{n-1}}{c^n} z_1 + \ldots + \frac{c-1}{c^2} z_{n-1} + \frac{1}{c} z_n$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Применяя критерий, указанный на стр. 118, видим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-1)^n}{c^{n+1}}$ должен абсолютно сходиться. Но это возможно в том и только том случае, когда $\left|\frac{c-1}{c}\right| < 1$, т. е. $\Re c > \frac{1}{2}$.

49. [I. Schur, Math. Ann., т. 74, стр. 453—456, 1913.] Случай, когда $c = -k$ есть целое отрицательное число, можно

*) П. Г. Лежен Дирихле, Лекции по теории чисел, ОНТИ, 1936, стр. 323.

заранее исключить; пример:

$$u_n = \binom{n}{k-1}, \quad u_n + c\,\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1} = 0$$

для $k \geqslant 2$,

$$u_n = \ln(n+1)$$

для $k=1$ [I 69]. Случай $c=0$ не представляет затруднений.

Положим:

$$u_n + c\,\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1} = z_n, \quad u_n = w_n,$$

и пусть, как на стр. 118,

$$w_n = a_{n0}z_0 + a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n.$$

Из соотношений

$$(n+1)\,z_n - nz_{n-1} = (n+1)\,w_n - nw_{n-1} + cw_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

с помощью умножения на $\frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(n+1)}$ и сложения n первых равенств вытекает:

$$\frac{\Gamma(n+c+2)}{\Gamma(n+1)}\,w_n - \Gamma(c+2)\,w_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+c+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left[(\nu+1)\,z_\nu - \nu z_{\nu-1}\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(n+1)}\,(n+1)\,z_n - c\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+c+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,z_\nu - \Gamma(c+2)\,z_0,$$

т. е.

$$w_n = \frac{n+1}{n+c+1}\,z_n - c\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+c+2)}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+c+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,z_\nu.$$

При фиксированном ν

$$a_{n\nu} \sim -c\,\frac{\Gamma(\nu+c+1)}{\Gamma(c+1)}\,n^{-c-1} \qquad \text{[I 155]},$$

так что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu}$ существует тогда и только тогда, когда $\Re c > -1$. Пусть, следовательно, $\Re c > -1$. Положим:

$$u_0 = u_1 = u_2 = \ldots = \frac{1}{1+c}.$$

Тогда

$$z_n = 1, \quad w_n = \frac{1}{1+c}$$

и, следовательно,

$$a_{n0} + a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = \frac{1}{1+c}.$$

Пусть, далее,

$$\left|\frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(n+1)}\right| < An^{\gamma}, \quad \left|\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+c+2)}\right| < Bn^{-\gamma-1},$$

где $\Re c = \gamma$, а A и B — некоторые постоянные, не зависящие от n. Эти неравенства дают

$$|a_{n0}| + |a_{n1}| + \ldots + |a_{n,\,n-1}| < |c|\,ABn^{-\gamma-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^{\gamma} \to$$

$$\to |c|\,AB \int_0^1 x^{\gamma}\,dx = \frac{|c|\,AB}{1+\gamma} \quad [\text{II } 22].$$

Таким образом, искомым необходимым и достаточным условием является $\Re c > -1$.

50. Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n, β_n — вещественные. Замечая, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\nu^s - (\nu+1)^s| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\sigma} \left|1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^s\right| = O(n^{\sigma})$$

(биномиальный ряд!), путем обобщения доказательства теоремы I 75 получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,n^{-\sigma} = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\,n^{-\sigma} = \lim_{n\to\infty} (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)\,n^{-\sigma} = 0.$$

Но теперь к каждому из степенных рядов

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots,$$
$$\beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_n t^n + \ldots$$

в отдельности мы можем применить I 92. Это дает:

$$\lim_{t\to 1-0} (1-t)^{\sigma} (\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots) =$$
$$= \lim_{t\to 1-0} (1-t)^{\sigma} (\beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_n t^n + \ldots) = 0.$$

51. Если четыре части ряда, состоящие каждая из членов, содержащихся в одном и том же замкнутом квадранте ($\Re z \geqslant 0$, $\Im z \geqslant 0$ и т. д.), сходятся, то ряд сходится абсолютно.

52. Устанавливается последовательным разбиением угла пополам: если члены $z_{r_1}, z_{r_2}, \ldots$ лежат все в одном угле $\vartheta_1 \leqslant \arg z \leqslant \vartheta_2$ и ряд $|z_{r_1}| + |z_{r_2}| + \ldots$ расходится, то выделяем из них в один ряд члены, лежащие в уле $\vartheta_1 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$, в другой — члены, лежащие в угле $\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \leqslant \arg z \leqslant \vartheta_2$; один из этих двух рядов должен быть расходящимся.

53. Для каждого из вложенных друг в друга углов

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \ldots, \quad \left(-\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^n}\right), \quad \ldots$$

выбираем из ряда конечное число членов

$$z_{r_h}, \; z_{r_{h+1}}, \; \ldots, \; z_{r_{h+k}}, \; z_m = x_m + iy_m,$$

содержащихся в этом угле (для различных углов различные члены), так, чтобы их вещественные части удовлетворяли неравенству

$$1 < x_{r_h} + x_{r_{h+1}} + \ldots + x_{r_{h+k}} < 2.$$

54. [Дальнейшие результаты у P. Lévy, Nouv. Ann., серия 4, т. 5, стр. 506—511, 1905; E. Steinitz, J. für Math., т. 143, стр. 128—175, 1913.] Пусть положительное направление вещественной оси является направлением сгущения; этого всегда можно достичь умножением на множитель вида $e^{i\alpha}$. Пусть, далее, $z_{r_1} + z_{r_2} + \ldots$ — часть этого ряда, выбранная, как в 53. Тогда к вещественной ее части применяем I 134, к мнимой — I 133.

55. Функции $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ — аналитические, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\bar{z} = x - iy$ — неаналитические.

56. 1. Пусть $f(x+iy) = u + iv$. Здесь u известно и функция

$$f(x+iy) = u(x, y) + i\left(\int_0^x v'_x(x, 0)\,dx + \int_0^y v'_y(x, y)\,dy\right) =$$
$$= u(x, y) + i\left(-\int_0^x u'_y(x, 0)\,dx + \int_0^y u'_x(x, y)\,dy\right)$$

тем самым однозначно определяется.

2. Станем теперь искать функцию $f(z)$ среди тех, которые при сопряженных комплексных значениях аргумента принимают сопряженные значения. Имеем:

$$f(z) + f(\bar{z}) = 2u(x, y) = \frac{(z+\bar{z})(1+z\bar{z})}{1+z^2+\bar{z}^2+z^2\bar{z}^2} = \frac{z}{1+z^2} + \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$$

Но согласно 1 функция $f(z)$ однозначно определена своей вещественной частью; с другой стороны, рациональные функции от r — аналитические [Hurwitz-Courant, стр. 46*)]. Поэтому

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}.$$

57. Первое решение. Выражаем ω через x и y, убеждаемся в том, что уравнение $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = 0$ удовлетворяется, а затем определяем $\mathfrak{I} f(z)$ с помощью интегрирования [56].

Второе решение. Часть вещественной оси между a и $+\infty$ видна из z под углом

$$\pi - \mathfrak{I}\ln(z-a) = \pi + \mathfrak{R}[i\ln(z-a)].$$

Поэтому

$$f(z) = \pi + i\ln(z-a) - [\pi + i\ln(z-b)] + ic = ic + i\ln\frac{z-a}{z-b},$$

где c — вещественная постоянная.

---

*) Гурвиц, стр. 69; Гурвиц-Курант, стр. 56.

58. Пусть $f(x+iy)=u(x, \ y)+iv(x, \ y)$. Дифференцируя и обозначая частные производные от u и v через u_x, u_y, u_{xx}, ..., получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)=2(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)=2(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}).$$

Теперь складываем и принимаем во внимание соотношения

$$u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2=|f'(x+iy)|^2, \quad u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0,$$

вытекающие из дифференциальных уравнений Коши-Римана.

59. См. решение 58. Кроме того, принимаем во внимание, что

$$(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2=(u^2+v^2)(u_x^2+v_x^2)=$$
$$=|f(x+iy)|^2|f'(x+iy)|^2.$$

60. Из подобия треугольников вытекает:

$$x:\xi=y:\eta=1:1-\zeta,$$

откуда

$$x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}, \quad x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{2}{1-\zeta}-1,$$

$$\xi=\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta=\frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

61. Имеем [60]:

$$P\colon\ x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}, \quad P'\colon\ \xi,\ \eta,\ \zeta, \quad P''\colon\ \xi,\ -\eta,\ -\zeta,$$

следовательно,

$$u+iv=\frac{\xi-i\eta}{1+\zeta}=\frac{(x-iy)(1-\zeta)}{1+\zeta}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x+iy}.$$

62. При проекции Меркатора: на прямые, параллельные осям, в плоскости, на которую разворачивается цилиндр, или на образующие прямые и направляющие круги самого цилиндра. Этим свойством и требованием конформности проекция Меркатора определяется однозначно [см., например, É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, т. 2, 3-е изд., стр. 58, Paris, Gauthier-Villars, 1918 *)]. При стереографической проекции: на лучи, исходящие из начала, и на ортогонально пересекающие их концентрические окружности.

63. $$x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}=\frac{e^{i\theta}\cos\varphi}{1-\sin\varphi}=\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\theta},$$

следовательно,

$$x+iy=e^{u+iv}.$$

---

*) Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 2, стр. 227.

64. Полагая $w=u+iv$, имеем:

$$|z|=e^u, \qquad \arg z = v.$$

Таким образом, искомыми кривыми служат концентрические окружности с центром в начале координат и ортогонально пересекающие их прямолинейные лучи. [62, 63.]

65. Из равенства $w=u+iv=z^2=(x+iy)^2$, отделяя вещественную и мнимую части, получаем:

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

Искомыми кривыми служат поэтому два семейства гипербол. Они взаимно ортогональны как конформные образы двух взаимно ортогональных семейств прямых $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ плоскости w.

66. Пусть $z=x+iy$, $w=u+iv$; тогда $x=u^2-v^2$, $y=2uv$. Исключением v, соответственно u, получаем, что прямым $u=\text{const.}$ соответствуют параболы $y^2=4u^2(u^2-x)$, прямым $v=\text{const.}$ — параболы $y^2=4v^2(v^2+x)$. Все эти параболы имеют общие ось $y=0$ и фокус $x=y=0$. Через каждую точку плоскости z, за исключением $z=0$, проходят две параболы, пересекая друг друга под прямым углом.

67. Пусть $z=x+iy$, $w=u+iv$, тогда

$$u+iv=\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2},$$

откуда

$$u=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x, \qquad v=\frac{e^{-y}-e^y}{2}\sin x.$$

Прямым $x=\text{const.}$ соответствуют гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 x}-\frac{v^2}{\sin^2 x}=1$, прямым $y=\text{const.}$ — эллипсы $\frac{u^2}{\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{e^{-y}-e^y}{2}\right)^2}=1$. Все эти кривые имеют общие фокусы $w=-1$, $w=1$. Эти семейства взаимно ортогональны (софокусные конические сечения).

68. Из $x=u+e^u\cos v$, $y=v+e^u\sin v$ исключением v, соответственно u, получаем:

$$x-u=e^u\cos\left(y-\sqrt{e^{2u}-(x-u)^2}\right),$$
$$y-v=e^{x-(y-v)\operatorname{ctg} v}\sin v.$$

Прямая $v=0$ переходит в $y=0$, прямая $v=\pi$ дважды покрывает бесконечный отрезок $y=\pi$, $-\infty<x\leqslant-1$.

69. При отображении получается область, ограниченная лучами $\arg w=\varepsilon$, $\arg w=-\varepsilon$ и окружностями $|w|=e^{\alpha+\varepsilon}$, $|w|=e^{\alpha-\varepsilon}$. Отсюда площадь ее равна $\varepsilon(e^{2\alpha+2\varepsilon}-e^{2\alpha-2\varepsilon})$. Искомым пределом будет

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{e^{2\alpha+2\varepsilon}-e^{2\alpha-2\varepsilon}}{4\varepsilon}=e^{2\alpha}.$$

70. Имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} |\sin(x+iy)|^2\, dx\, dy.$$

Пользуясь соотношением

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin(x+iy)\sin(x-iy) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(e^{2y}+e^{-2y}),$$

получаем для площади величину

$$\frac{x_2-x_1}{8}(e^{2y_2}-e^{2y_1}-e^{-2y_2}+e^{-2y_1}) - \frac{y_2-y_1}{4}(\sin 2x_2 - \sin 2x_1).$$

Для $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $y_1=0$, $y_2=y$ получаем уменьшенную в четыре раза площадь эллипса с полуосями

$$a=\frac{e^y+e^{-y}}{2}, \quad b=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

71. $f'(z)=2z$. На окружностях с центром в начале, где $|z|=\text{const.}$, соответственно на лучах, выходящих из начала, вдоль которых $\arg z=\text{const.}$

72. Для $0<a\leqslant\pi$ отображение взаимно однозначно; образом служит область, ограниченная окружностями радиусов e^a и e^{-a} и лучами, составляющими с положительной вещественной осью углы a и $-a$. Для $a>\pi$ эта область покрыта несколько раз, частично или полностью. Для $a=n\pi$ она покрыта ровно n раз, за исключением некоторых точек вещественной оси, покрытых лишь $n-1$ раз.

73. Точка пересечения луча с окружностью $|w|=1$. Действительно, тот из вертикальных отрезков, содержащихся в круге $|z|\leqslant r$, который пересекает максимально возможное число параллелей $\Im z=\alpha$, $\alpha+2\pi$, $\alpha-2\pi$, $\alpha+4\pi$, $\alpha-4\pi$, ..., лежит на прямой $\Re z=0$, которой соответствует окружность $|w|=1$. (VIII **16**; $N(r, a, \alpha)$ при фиксированных r и α принимает наибольшее значение, когда $\ln a=0$.)

74. При $z_1\neq z_2$, $|z_1|<1$, $|z_2|<1$ имеем:

$$z_2^2+2z_2+3-(z_1^2+2z_1+3)-(z_2-z_1)(z_2+z_1+2)\neq 0.$$

75. Пусть $z=re^{i\vartheta}$, $r>0$, $0<\vartheta<\pi$; тогда $w=Re^{i\Theta}=r^2e^{2i\vartheta}$, значит, $R=r^2$, $\Theta=2\vartheta$, т. е. $R>0$, $0<\Theta<2\pi$. Если, обратно, заданы R, Θ, то r и ϑ определяются однозначно.

76. Рассматриваемая функция однолистна в единичном круге $|z|\leqslant 1$, кроме того, в нем $|w|\leqslant 1$ [5]. То, что каждое из значений w, $|w|\leqslant 1$ принимается, вытекает из того, что обратная функция

$$z=\frac{a+e^{-i\alpha}w}{1+\bar{a}e^{-i\alpha}w}$$

является относительно $e^{-i\alpha}w$ функцией того же вида, что и заданная. Точки постоянного линейного искажения расположены на кривой

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}=\text{const}.$$

Если $a\neq 0$, то они лежат на некоторой дуге окружности с центром в точке $\frac{1}{\bar{a}}$ (сопряженной с a относительно единичной окружности).

77. [См. A. Winternitz, Monatshefte d. Math., т. 30, стр. 123, 1920.] Когда z пробегает окружность K, то согласно предположению $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=\text{const.}$, т. е. точки a и $\frac{1}{\bar{a}}$ (если $a=0$, то 0 и ∞) гармонически сопряжены как относительно K, так и относительно единичной окружности. Пусть теперь z_0 — центр и r — радиус окружности K, $z_0\neq 0$, $r<1-|z_0|$. Тогда a, $|a|<1$, определяется из квадратного уравнения

$$(a-z_0)\left(\frac{1}{a}-\bar{z}_0\right)=r^2$$

или

$$(|a|-|z_0|)\left(\frac{1}{|a|}-|z_0|\right)=r^2, \qquad \arg a=\arg z_0;$$

α произвольно.

78.

$$w=\text{const.}\frac{z-i}{z+i}.$$

79. Пусть $z=re^{i\vartheta}$. Имеем:

$$w=\frac{\frac{1}{r}+r}{2}\cos\vartheta-i\frac{\frac{1}{r}-r}{2}\sin\vartheta.$$

Окружностям $|z|=r$, $0<r<1$, соответствуют софокусные эллипсы с полуосями $\frac{\frac{1}{r}+r}{2}$ и $\frac{\frac{1}{r}-r}{2}$ и общими фокусами $w=+1$, $w=-1$. Лучам $\vartheta=\text{const.}$ соответствуют софокусные гиперболы с теми же фокусами $+1$, -1, ортогональные к определенным выше эллипсам. Для $|z|=1$, $z=e^{i\vartheta}$ имеем $w=\cos\vartheta$. Таким образом, когда z пробегает единичную окружность $|z|=1$, то w дважды описывает вещественный отрезок $-1\leqslant w\leqslant 1$.

80. Функция

$$w=kz+\frac{1}{kz},$$

где

$$0<kr_1<kr_2<1,\ k=\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}{r_1}=\frac{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}{r_2},$$

отображает рассматриваемое круговое кольцо на кольцеобразную область между эллипсами с фокусами -2 и 2 с большими полуосями $kr_1+\frac{1}{kr_1}$ и $kr_2+\frac{1}{kr_2}$.

81. Положим $w=-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $z=re^{i\vartheta}$, тогда [79]

$$w=-\frac{\frac{1}{r}+r}{2}\cos\vartheta+i\frac{\frac{1}{r}-r}{2}\sin\vartheta;$$
$$\mathfrak{J}w>0 \text{ для } 0<\vartheta<\pi.$$

Линейное искажение равно

$$\left|\frac{\frac{1}{z^2}-1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

в тех точках $z=x+iy$, для которых

$$|x^2-y^2-1+2ixy|^2=|x^2-y^2+2ixy|^2,$$

т. е. $x^2-y^2=\frac{1}{2}$. Эти точки заполняют равностороннюю гиперболу, пересекающую вещественную ось в точках $z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Для точек с углом поворота

$$\arg\frac{\frac{1}{z^2}-1}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$$

имеем $\mathfrak{R}\frac{1}{z^2}=1$, т. е. $r^2=\cos 2\vartheta$; эти точки лежат на лемнискате

$$\left|z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\left|z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}.$$

82. Посредством вспомогательного отображения $\zeta=-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ рассматриваемая область плоскости z преобразуется в верхнюю полуплоскость $\mathfrak{J}\zeta>0$ плоскости ζ [81]; при этом $z=0$ переходит в $\zeta=\infty$, $z=i$ — в $\zeta=0$ и $z=\pm1$ — в $\zeta=\mp1$. Если мы теперь произведем отображение $w=\frac{1}{\zeta^2}$, то верхняя полуплоскость $\mathfrak{J}\zeta>0$ преобразуется на основании 75 в плоскость w с разрезом вдоль неотрицательной вещественной оси, причем $\zeta=\infty$ перейдет в $w=0$, $\zeta=0$ — в $w=\infty$ и $\zeta=\pm1$ — в $w=1$. Таким образом, искомым отображением является:

$$w=\left(\frac{2}{z+\frac{1}{z}}\right)^2=\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}.$$

Точки $z=\pm 1$ обе отображаются в точку $w=1$, но на различных «краях» разреза.

83.

$$\arg w = \frac{2\pi}{\beta-\alpha}(\arg z - \alpha),$$

т. е.

$$0 < \arg w < 2\pi.$$

84. Посредством первого вспомогательного отображения $\zeta = (e^{-i\alpha}z)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}$ круговой сектор преобразуется в верхнюю половину круга $|\zeta|<1$, последняя же посредством второго вспомогательного отображения $s = -\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}$ [81] — в верхнюю полуплоскость $\Im s > 0$. Применяем теперь 78.

85. Следует из равенства

$$u - iv = \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x, y) + i\psi(x, y)] = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]$$

отделением вещественной и мнимой частей.

86. В эти линии преобразовываются взаимно ортогональные прямые $\Re f = \text{const.}$, $\Im f = \text{const.}$ при конформном отображении $f = f(z)$.

87. Из 85 с помощью дифференциального уравнения Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Функция ψ также удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа.

88. $u\cos\tau + v\sin\tau = \Re[(u-iv)e^{i\tau}]$, так что рассматриваемый интеграл равен

$$\Re\int\limits_L \frac{df}{dz}e^{i\tau}ds = \Re\int\limits_L \frac{df}{dz}dz = \Re[f(z_2) - f(z_1)].$$

Здесь dz обозначает «ориентированный» линейный элемент с модулем ds и аргументом τ.

89. $u\sin\tau - v\cos\tau = \Im[(u-iv)^{i\tau}]$; см. 88.

90. Третье уравнение совпадает со вторым дифференциальным уравнением Коши-Римана. Оба первых получаются непосредственным дифференцированием с привлечением первого дифференциального уравнения Коши-Римана:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -u\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial y} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

91. Вектор $\overline{w}=\frac{1}{r}e^{i\vartheta}$ составляет с положительной вещественной осью угол ϑ и имеет длину $\frac{1}{r}$. Имеем, с точностью до аддитивной постоянной,

$$f(z)=\ln z,\quad \varphi(x,\ y)=\ln r=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad \psi(x,\ y)=\vartheta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Эквипотенциальными линиями служат концентрические окружности с центром в точке $z=0$, линиями тока — ортогональные к ним лучи.

92. $\varphi_2-\varphi_1=\ln r_2-\ln r_1=\ln\frac{r_2}{r_1},\quad \psi'-\psi=2\pi,$

$$\frac{\frac{1}{4\pi}(\psi'-\psi)}{\varphi_2-\varphi_1}=\frac{1}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

93. Аргумент вектора $\overline{w}$ равен $\vartheta+\frac{\pi}{2}$, длина равна $\frac{1}{r}$. Далее, с точностью до аддитивной постоянной, имеем:

$$f(z)=-i\ln z,\quad \varphi(x,\ y)=\vartheta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$\psi(x,\ y)=-\ln r=-\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Эквипотенциальными линиями служат лучи, выходящие из начала, линиями тока — ортогональные к ним концентрические окружности (обратно тому, как в 91). Потенциал φ бесконечнозначен.

94. Согласно 93 имеем, с точностью до вещественного постоянного множителя, $w=\frac{2i}{z^2-1}$, следовательно,

$$f(z)=i\ln\frac{z-1}{z+1},\quad \psi=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|,\quad -\varphi=\arg\frac{z-1}{z+1}.$$

Эквипотенциальными линиями уровня служат окружности, проходящие через точки $z=-1$, $z=1$. Линиями тока также являются окружности — те, относительно которых точки $z=-1$ и $z=1$ гармонически сопряжены (*окружности Аполлония*).

95. Речь идет о тех точках z, для которых [93]

$$-\frac{i\lambda_1}{z-z_1}-\frac{i\lambda_2}{z-z_2}-\ldots-\frac{i\lambda_n}{z-z_n}=0,$$

т. е.

$$\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\lambda_2}{z-z_2}+\ldots+\frac{\lambda_n}{z-z_n}=0,$$

где положительные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ пропорциональны силам тока. См. 31, особенно первое из приведенных там решений.

96. Нужно так определить $w=f'(z)$, чтобы на заданных эллипсах было $\Re f=\text{const}$. С помощью отображения

$$z=kZ+\frac{1}{kZ}, \quad 2kZ=z-\sqrt{z^2-4} \qquad [80]$$

указанная кольцеобразная область преобразуется в круговое кольцо $r_1<|Z|<r_2$. Здесь

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}, \quad k=\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}{r_1}=\frac{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}{r_2} \qquad (a_1>a_2).$$

Тем самым вопрос приводится к 91: с помощью формулы $w=\frac{1}{Z}$ на плоскости Z определяется векторное поле, имеющее своими эквипотенциальными линиями концентрические окружности с центром в $Z=0$; вдоль этих линий $\Re\int\frac{dZ}{Z}=\text{const}$. Отсюда получаем аналогичные результаты для

$$\int\frac{dZ}{dz}\frac{1}{Z}\,dz=-\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-4}}$$

на заданных эллипсах плоскости z, т. е.

$$w=-\frac{1}{\sqrt{z^2-4}}, \quad f(z)=\ln\left(z-\sqrt{z^2-4}\right).$$

Линиями тока служат софокусные гиперболы, эквипотенциальными линиями — софокусные эллипсы с фокусами -2, 2. Имеем:

$$\psi'-\psi=2\pi, \quad \varphi_2-\varphi_1=\ln\frac{r_2}{r_1}=\ln\frac{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}.$$

Емкость равна

$$\frac{1}{2\ln\dfrac{a_2-\sqrt{a_2^2-1}}{a_1-\sqrt{a_1^2-1}}}.$$

97. Полагаем [93]:

$$w=-\frac{i}{z}, \quad \psi_1=-\ln a, \quad \psi_2=-\ln b, \quad \varphi_1=\alpha, \quad \varphi_2=\beta.$$

Сопротивление (знак здесь несуществен!) равно

$$-\frac{\beta-\alpha}{\ln b-\ln a}.$$

98. Согласно 85 единичная окружность $|z|=1$ является линией тока. Если принять, что вдоль единичной окружности и на части вещественной оси, лежащей в векторном поле, функция тока принимает постоянное значение, равное нулю, то с помощью отображения $f=f(z)$ окружность $|z|=1$ преобразуется в вещественный отрезок. Согласно 79 полагаем:

$$f(z) = k\left(z + \frac{1}{z}\right) + k_0 \qquad (k,\ k_0 \text{ вещественны}),$$

причем вследствие того, что $\overline{w} = 1$ при $z = \infty$, постоянная $k = 1$, т. е.

$$w = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

99. Критические точки $z = \pm 1$; $\overline{w}$ принимает в точках, симметрично расположенных относительно $z = 0$, равные значения; поэтому результирующая всех давлений, оказываемых на цилиндр, будет равна нулю [см. 90]. Давление достигает минимума, соответственно максимума, когда $\left|1 - \frac{1}{z^2}\right|$ достигает максимума, соответственно минимума, т. е. в точках $z = \pm i$, соответственно $z = \pm 1$. Силовое поле, получаемое после поворота всех векторов на 90°, можно интерпретировать как поле, полученное посредством возмущения однородного электростатического поля перпендикулярным к его направлению круглым цилиндрическим изолированным незаряженным проводником (простейший пример электростатической индукции).

100. [G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4-е изд., стр. 303—307, 1897.] Вводим дополнительное условие непрерывности: граница неподвижной воды простирается до бесконечности,

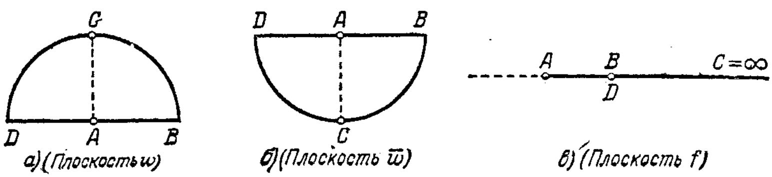

Рис. 3.

где $|w| = 1$, поэтому вдоль всей границы неподвижной воды интересующее нас постоянное значение $|w| = 1$. На отрезках AB, AD границы (рис. 3, *а*; щит) известно направление, на линиях BC, DC (граница неподвижной воды) — модуль вектора $\overline{w}$; в точках A, B, C, D вектор $\overline{w}$ полностью известен. Принимая во внимание постоянство направления, соответственно модуля, на указанных частях границы поля потока, видим, что образом этой границы служит в плоскости $\overline{w}$ граница полукруга (рис. 3, *б*). Если мы выберем аддитивную постоянную, входящую в f [стр. 131], так, чтобы критической точке $z = 0$ соответствовало значение $f=0$, то линиям тока ABC и ADC будут в плоскости f соответствовать противоположные края положительной вещественной оси. Всему полю потока будет соответствовать плоскость f, разрезанная вдоль вещественной положительной оси, и притом вся плоскость целиком, ибо при $z \to \infty$ должно быть $w = \frac{df}{dz} \sim i$ и, следовательно, $f \sim iz$. Точкам B, D поля потока соответствует вследствие симметрии одна и та же точка плоскости f, причисленная к верхнему, соответственно нижнему, краю разреза (рис. 3, *в*). Замечаем, что при фиксированном $\overline{w}$ растяжение плоскости f вызывает такое же растяжение плоскости z, так как $df = w \cdot dz$. Растягиваем теперь плоскость f так, чтобы точка $f=1$ соответствовала точкам $z=\pm l$; тем самым определяется числовое значение l. Если взаимно однозначное соответствие соответственных частей плоскостей z, $\overline{w}$ и f возможно, то мы можем определить [см. 188], будет ли при прохождении контура в направлении $ABCDA$ ограничиваемая им область оставаться слева или справа (последняя строка таблицы). На рис. 3 и в приводимой ниже таблице соответствующие точкам A, B, C, D плоскости z точки других плоскостей обозначены теми же буквами:

	z	$\overline{w}$	w	f
A	0	0	0	0
B	l	1	1	1
C	∞	$-i$	i	∞
D	$-l$	-1	-1	1
Область остается:	слева	справа	слева	слева.

101. Согласно 82

$$f = \frac{4w^2}{(1+w^2)^2},$$

т. е.

$$\frac{1}{w} = \frac{1+\sqrt{1-f}}{\sqrt{f}};$$

здесь берется та ветвь функции $\sqrt{1-f}$, где эта функция при $f=0$ принимает значение 1; исследуем значение w на обоих краях разреза в плоскости f! Мы получаем:

$$z = \int_0^f \frac{df}{w} = 2\sqrt{f} + \sqrt{f}\sqrt{1-f} + \arcsin\sqrt{f},$$

$$z = x + iy = 2\sqrt{f} + \frac{\pi}{2} - i\left[f\sqrt{1-\frac{1}{f}} - \ln\left(\sqrt{f}+\sqrt{f-1}\right)\right].$$

Первая из этих формул пригодна для $0<f<1$, вторая — для $f>1$ (корень положителен!) и дает форму границы неподвижной воды: $z = l = 2 + \frac{\pi}{2}$ при $f = 1$, $x \sim 2\sqrt{f}$, $y \sim -f$. Это показывает, что на достаточно большом расстоянии от щита ширина неподвижной воды $2x \sim 4\sqrt{|y|}$.

102. Если в произвольной точке z давление $p = c - \frac{1}{2}|w|^2$ [90], то, в частности, на границе, а следовательно, и на всем протяжении неподвижной воды оно равно $p_1 = c - \frac{1}{2}$. Искомое общее давление равно

$$\int_{-l}^{+l} (p - p_1)\, dz = \int_{-l}^{+l} \frac{1}{2}(1 - |w|^2)\, dz = \int_{0}^{l} (1 - w^2)\, dz =$$
$$= \int_{0}^{1} (1 - w^2)\frac{df}{w} = \int_{0}^{1} 4\sqrt{1-f}\, d\sqrt{f} = \pi.$$

103. Положим $z = re^{i\vartheta}$. Так как угловая скорость положительна, то ϑ возрастает, т. е. z описывает окружность в положительном направлении. Имеем $\frac{dz}{d\vartheta} = iz$, и искомый вектор скорости есть

$$\frac{df(z)}{d\vartheta} = \frac{df(z)}{dz}\frac{dz}{d\vartheta} = izf'(z).$$

104. Обозначим через ω угол, на который нужно повернуть в положительном направлении вектор w (радиус-вектор), чтобы он совпал по направлению с вектором $izf'(z)$ [касательным вектором; **103**]. Искомое расстояние будет равно

$$|f(z)|\sin\omega = |f(z)|\frac{\Im\frac{izf'(z)}{f(z)}}{\left|\frac{izf'(z)}{f(z)}\right|} = \frac{\Re\,[zf'(z)\overline{f(z)}]}{|zf'(z)|}.$$

105. Аргумент интересующего нас вектора равен $\Im \ln f(z)$. Следовательно, искомая угловая скорость равна $(z = re^{i\vartheta})$

$$\frac{d}{d\vartheta}\Im\ln f(z) = \Im\left(\frac{d\ln f(z)}{dz}\frac{dz}{d\vartheta}\right) = \Im\left(\frac{f'(z)}{f(z)}iz\right) = \Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

106. Кривизна $\frac{1}{\rho} = \frac{d\Theta}{dS}$, где $d\Theta$ обозначает изменение направления скорости $f(z)$, следовательно, согласно **103**, — изменение выражения $\Im\ln[izf'(z)]$, а dS — линейный элемент кривой, описываемой точкой $f(z)$. Согласно **103**

$$\frac{dS}{d\vartheta} = |izf'(z)|;$$

следовательно ($z = re^{i\vartheta}$),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\Theta}{d\vartheta}}{\frac{dS}{d\vartheta}} = \frac{\frac{d}{d\vartheta}\Im \ln [izf'(z)]}{|izf'(z)|} = \frac{\Im\left(\frac{d \ln [zf'(z)]}{dz}\frac{dz}{d\vartheta}\right)}{|zf'(z)|}.$$

Кривизна по определению положительна или отрицательна, смотря по тому, положительно или отрицательно направление вращения вектора скорости $izf'(z)$.

107.

	Вогнутость	Выпуклость
Слева	$+$	$-$
Справа	$-$	$+$

Для $w = z^n + a$, $n \neq 0$ имеем $\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sgn} n}{r^n}$. Перечисленные четыре возможности представляются уже при $r = 1$, $|a| > 1$, $n = 1$ или -1, если рассматриваемой фиксированной точкой служит $w = 0$.

108. [106, 107.]

109. Угловая скорость вектора $w = f(z)$ всюду положительна. [105.]

110. Получается из **108** и **109** или же прямо на основании того соображения, что при отображении $w = f(z)$ угол между dw и положительной вещественной осью равен аргументу функции $izf'(z)$ [103]. Выпуклость означает, что этот аргумент изменяется все время в одном и том же направлении, но это и дает звездообразность при отображении $w = zf'(z)$.

111. [Thekla Lukács.] Пусть a и b — две точки указанного рода на плоскости w. Тогда при $|z| = r$

$$\Re\left[z\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right] > 0, \quad \Re\left[z\frac{f'(z)}{f(z)-b}\right] > 0,$$

т. е.

$$\Re\{zf'(z)\overline{f(z)-a}\} > 0; \quad \Re\{zf'(z)\overline{f(z)-b}\} > 0.$$

Отсюда вытекает при $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, что

$$\Re\{zf'(z)\overline{f(z)-(\lambda a+\mu b)}\} > 0,$$

следовательно,

$$\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-(\lambda a+\mu b)}\right) > 0.$$

Рассматриваемую теорему нетрудно доказать и средствами элементарной геометрии.

112. $h(\varphi) = \Re(\bar{a}e^{i\varphi}) = |a|\cos(\varphi - \alpha)$.

113. 1. Вычисленный в 103 вектор скорости $izf'(z)$ составляет с положительной вещественной осью угол $\varphi+\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi=\arg[zf'(z)]=\Im\ln[zf'(z)].$$

2. Имеем:

$$h(\varphi)=\frac{\Re\,[zf'(z)\overline{f(z)}]}{|zf'(z)|} \qquad [104]$$

с учетом знака.

114. $\varphi=\Im\ln\frac{z}{1+z}=\Im\ln\frac{e^{\frac{i\vartheta}{2}}}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}=\frac{\vartheta}{2},\quad z=e^{i\vartheta}$ [113].

115. Для $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$ опорная функция тождественно совпадает со значением опорной функции для πi [112]. Для значений φ, не удовлетворяющих этому неравенству, на основании 113 имеем:

$$\varphi=\Im\ln\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}=\Im\ln\frac{2e^{\frac{i\vartheta}{2}}}{\sqrt{2\cos\vartheta}}=\frac{\vartheta}{2}.$$

116. Если опорная прямая является касательной к граничной кривой, то

$$\varphi=\arg[zf'(z)]=\arg\frac{w}{1-w},\quad h(\varphi)=\left|\frac{w}{1-w}\right|\Re(1-w).$$

Если опорная прямая проходит через вершину $w=1$, то $h(\varphi)=$ $=\cos\varphi$.

117.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)\vartheta}\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\vartheta}\,d\vartheta=0 \text{ или } 1,$$

смотря по тому, будет ли целое число $n=k-l$ отлично от нуля или нет.

118. Получаем требуемый результат из разложения

$$f(re^{i\vartheta})=a_0+a_1re^{i\vartheta}+a_2r^2e^{2i\vartheta}+\ldots+a_nr^ne^{in\vartheta}+\ldots,$$

интегрируя и принимая во внимание 117.

119. Применяем 118 к $\ln f(z)$ и отделяем вещественную часть.

120. [Формула Иенсена, см. 175.] Геометрические средние множителей $|z-z_\nu|$ вычисляем по II 52, геометрическое среднее выражения $|f^*(z)|$ — по 119.

121. Если $f(z)\neq 0$ в круге $|z|\leqslant r$, то $g(r)=\mathfrak{G}(r)=|f(0)|$ [119]. Если $f(z)$ представляет собой произведение двух регулярных в круге $|z|\leqslant r$ функций, $f(z)=f_1(z)f_2(z)$, то средние значения $\mathfrak{g}(r)$, $\mathfrak{G}(r)$ равны произведениям соответствующих средних значений множителей $f_1(z)$, $f_2(z)$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $f(z) = z - z_0$, $|z_0| \leqslant r$. Имеем [II 52]:

$$\mathfrak{G}(r) = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|re^{i\vartheta} - z_0|\,d\vartheta} = \operatorname{Max}(r, |z_0|) = r,$$

$$\mathfrak{g}(r) = e^{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} \ln|\rho e^{i\vartheta} - z_0|\,\rho\,d\rho\,d\vartheta} = e^{\frac{2}{r^2}\int\limits_0^r \operatorname{Max}(\ln\rho,\, \ln|z_0|)\,\rho\,d\rho} = e^{\ln r - \frac{1}{2} + \frac{|z_0|^2}{2r^2}}.$$

122. [См. M. A. Parsèval, Mém. par divers savans, т. 1, стр. 639—648, 1805; A. Gutzmer, Math. Ann., т. 32, стр. 596—600, 1888.] Имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\,\overline{f(re^{i\vartheta})}\,d\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} r^{k+l}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)\vartheta}\,d\vartheta \cdot a_k\bar{a}_l \quad [117].$$

123. Пусть $P(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_n z^n$, где коэффициенты $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные комплексные числа. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta}) - P(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta = |a_0 - x_0|^2 + |a_1 - x_1|^2 + \ldots$$
$$\ldots + |a_n - x_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \ldots$$

Это выражение тогда и только тогда достигает минимума, когда первые $n+1$ членов обращаются в нуль.

124. [По поводу **124—127** см. L. Bieberbach, Rend. Palermo, т. 38, стр. 98—112, 1914; Berl. Ber., 1916, стр. 940—955, и T. Carleman, Math. Zeitschr., т. 1, стр. 208—212, 1918.] Частный случай теоремы **125**; заменяем там r, R на 0, r.

125. Положим $w = f(x+iy) = u + iv$. Тогда интересующая нас площадь

$$F = \iint\limits_{r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2} du\,dv = \iint\limits_{r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2} \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| dx\,dy =$$
$$= \int\limits_r^R \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| \rho\,d\rho\,d\vartheta.$$

Имеем (см. стр. 123):

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\right|^2 = |f'(z)|^2,$$

откуда

$$F=\int_r^R\int_0^{2\pi}|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\,d\rho\,d\vartheta=2\pi\int_r^R\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2|a_n|^2\rho^{2n-1}\right)d\rho=$$
$$=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n}).$$

126. Частный случай теоремы **127**. По поводу направления обхода см. **188** или **190**.

Что означает найденное выражение при $c=0$? [**124**.]

127. Представляем площадь в виде суммы (взятых со знаками) площадей элементарных треугольников, ограниченных линейными элементами кривой L и радиусами-векторами, выходящими из начала. При этом знак берется положительный или отрицательный, смотря по тому, слева или справа от ориентированного линейного элемента расположена точка $w=0$. Он совпадает со знаком $\sin\omega$ в обозначениях решения **104**. Таким образом, искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|izf'(z)||f(z)|\sin\omega\,d\vartheta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Re\left[zf'(z)\overline{f(z)}\right]d\vartheta=$$
$$=\frac{1}{2}\Re\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}ka_kr^ke^{ik\vartheta}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\bar{a}_lr^le^{-il\vartheta}\,d\vartheta\quad(z=re^{i\vartheta}).$$

128. Согласно **124**

$$4\int_0^r\frac{J(\rho)}{\rho}d\rho=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\qquad[122].$$

129. [См. K. Löwner und Ph. Frank, Math. Zeitschr., т. 3, стр. 84, 1919.] „Функция распределения плотности" в интересующем нас распределении масс пропорциональна $|\varphi'(z)|^{-1}$, ибо интеграл $\int|\varphi'(z)|^{-1}|dw|$, взятый вдоль произвольной дуги кривой L, дает длину соответствующей дуги окружности $|z|=r$. Таким образом,

$$\xi\int_L|\varphi'(z)|^{-1}|dw|=\int_L\varphi(z)|\varphi'(z)|^{-1}|dw|,$$

т. е.

$$\xi\int_0^{2\pi}r\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}\varphi(re^{i\vartheta})\,r\,d\vartheta.$$

130. Положим $z=\rho e^{i\vartheta}$. Тогда интересующий нас объем будет равен

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\,d\rho\,d\vartheta=2\pi\int_0^r\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}\right)d\rho.$$

131. [J. L. W. V. Jensen, Acta Math., т. 36, стр. 195, 1912.]

$$\cos\gamma=\left[1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2.$$

Из $\zeta=u^2+v^2$ получаем с помощью дифференциальных уравнений Коши-Римана

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\gamma=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right].$$

132. Пусть z_0 — точка с горизонтальной касательной плоскостью. Тогда согласно 131 либо $f(z_0)=0$, либо $f(z_0)\neq 0$, $f'(z_0)=0$. В первом случае замечаем, что аналитическая функция имеет только изолированные нули *).

Пусть во втором случае

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(l-1)}(z_0)=0,\quad f^{(l)}(z_0)\neq 0$$

[$l\geqslant 2$, седловина $(l-1)$-го порядка], стало быть,

$$f(z_0+h)=f(z_0)+\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}h^l+\ldots,$$

$$\zeta=|f(z_0+h)|^2=|f(z_0)|^2+f(z_0)\overline{\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}}\,\overline{h}^l+\overline{f(z_0)}\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}h^l+\ldots=$$
$$=|f(z_0)|^2+A\,|h|^l\cos(l\varphi-\alpha)+\ldots,$$

где $h=|h|e^{i\varphi}$, A, α $(A\neq 0)$ — вещественные постоянные, зависящие от $f(z_0)$ и $f^{(l)}(z_0)$. $2l$ значений аргумента φ, соответствующие направлениям $2l$ ветвей, суть

$$\varphi=\frac{\alpha}{l}+\frac{2k-1}{2l}\pi\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2l).$$

Выражение $A\cos(l\varphi-\alpha)$ при переходе через эти направления меняет знак.

133. Пусть $a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$ — рассматриваемый полином (α_1, α_2, …, α_n вещественны). Тогда

$$\zeta=|a_0|^2\prod_{\nu=1}^{n}[(x-\alpha_\nu)^2+y^2]\geqslant|a_0|^2\prod_{\nu=1}^{n}(x-\alpha_\nu)^2,\qquad \frac{d^2\zeta}{dy^2}>0.$$

*) Следует заметить, что в случае $f(z_0)=0$ касательная плоскость, строго говоря, существует только при $f'(z_0)=0$. Если же $f(z_0)=0$, $f'(z_0)\neq 0$, то соответствующая точка поверхности модуля будет конической.

134. Из 122 вытекает:

$$|f(z_0)|^2+\left|\frac{f'(z_0)}{1!}\right|^2 r^2+\left|\frac{f''(z_0)}{2!}\right|^2 r^4+\ldots+\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta\leqslant M^2,$$

т. е. $|f(z_0)|\leqslant M$. Если имеет место равенство, то

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(n)}(z_0)=\ldots=0,$$

т. е. $f(z)\equiv f(z_0)$ — постоянная.

135. Непрерывная функция $|f(z)|$ в замкнутой ограниченной области достигает своего максимума. Согласно 134 $|f(z)|$ не может принять максимальное значение во внутренней точке z_0 области $\mathfrak{B}$.

136. В куске, вырезаемом из поверхности модуля произвольным цилиндром, перпендикулярным к плоскости x, y, наивысшая точка лежит на границе, если только поверхность уровня не представляет собой плоскости, параллельной плоскости x, y. «Аналитический ландшафт» не содержит ни одной «вершины».

137. Геометрическая формулировка теоремы о том, что модуль полинома $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ принимает максимальное значение на границе [135].

138. $\frac{1}{f(z)}$ регулярна в $\mathfrak{B}$ [135].

139. Пусть $|z_\nu|<R$ ($\nu=1, 2, \ldots, n$). Функция

$$f(z)=\frac{1}{R}\sqrt[n]{(R^2-\bar{z}_1 z)(R^2-\bar{z}_2 z)\ldots(R^2-\bar{z}_n z)}$$

имеет ветвь, регулярную в круге $|z|\leqslant R$; кроме того, $f(z)$ отлична от нуля в этом круге. Значит, согласно 135 и 138 $|f(0)|=R$ заключается между минимумом и максимумом модуля $f(z)$ на окружности $|z|=R$. На этой окружности

$$|f(z)|=\sqrt[n]{|z-z_1||z-z_2|\ldots|z-z_n|} \qquad [5].$$

Единственное исключение представляет случай, когда $f(z)\equiv\text{const.}$, т. е. $z_1=z_2=\ldots=z_n=0$.

140. Для $|z|=R$ имеем:

$$R\leqslant\text{Max}\left|\frac{1}{R}\,\frac{(R^2-\bar{z}_1 z)+(R^2-\bar{z}_2 z)+\ldots+(R^2-\bar{z}_n z)}{n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\text{Max}\left(\frac{1}{R}\,\frac{|R^2-\bar{z}_1 z|+|R^2-\bar{z}_2 z|+\ldots+|R^2-\bar{z}_n z|}{n}\right)=$$

$$=\text{Max}\,\frac{|z-z_1|+|z-z_2|+\ldots+|z-z_n|}{n} \qquad [5].$$

Равенство может иметь место только тогда, когда, с одной стороны, $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$, а с другой, — все z_ν имеют одинаковые аргументы, иными словами, когда $z_\nu=0$ ($\nu=1, 2, \ldots, n$). Отметим случай $n=4$, $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-1$, $z_4=-i$, $R>1$. Арифметическое среднее проекций рассматриваемых расстояний на диаметр, проходящий через точку P, уже равно R.

141. Функция

$$\frac{1}{R^2-\bar{z}_1 z}+\frac{1}{R^2-\bar{z}_2 z}+\ldots+\frac{1}{R^2-\bar{z}_n z}$$

регулярна в круге $|z|\leqslant R$. Следовательно [135], для $|z|=R$

$$\operatorname{Min}\frac{n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|z-z_\nu|}}=\operatorname{Min}\frac{n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{R}{|R^2-\bar{z}_\nu z|}}\leqslant\frac{n}{\operatorname{Max}\left|\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{R}{R^2-\bar{z}_\nu z}\right|}\leqslant R.$$

В случае

$$n=3,\ z_1=e^{i\vartheta_1}=1,\ z_2=e^{i\vartheta_2}=e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_3=e^{i\vartheta_3}=e^{i\frac{4\pi}{3}},\quad R\geqslant 5$$

для

$$z=Re^{i\vartheta},\qquad \nu=1,\ 2,\ 3$$

получаем:

$$\frac{1}{|z-z_\nu|}=\frac{1}{\sqrt{R^2+1-2R\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k[\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]}{R^{k+1}},$$

где $P_k(x)$ обозначает k-й полином Лежандра [VI, § 11]. Имеем:

$$P_0(\cos\vartheta)=1,$$
$$P_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta,$$
$$P_2(\cos\vartheta)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2\vartheta.$$

Отсюда вытекает [VI 91]

$$\frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{|z-z_\nu|}=$$
$$=\frac{1}{R}+\frac{1}{4R^3}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{P_k[\cos(\vartheta-\vartheta_1)]+P_k[\cos(\vartheta-\vartheta_2)]+P_k[\cos(\vartheta-\vartheta_3)]}{3R^{k+1}}>$$
$$>\frac{1}{R}+\frac{1}{4R^3}-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{R^{k+1}}=\frac{1}{R}+\frac{R-5}{4R^3(R-1)}\geqslant\frac{1}{R}.$$

142. Если внутри области, ограничиваемой рассматриваемой кривой, всюду $f(z)\neq 0$, то по 135 и 138 $|f(z)|$ достигает как своего максимального, так и минимального значения на этой кривой; отсюда следует, что $|f(z)|$ должно быть всюду внутри области постоянно, так что $f(z) \equiv \text{const}$. Геометрически: так как внутри области, ограничиваемой на поверхности модуля замкнутой линией уровня, не может содержаться ни одной «вершины», то там должна лежать по крайней мере одна «яма», если только поверхность модуля не представляет собой горизонтальной плоскости.

143. Внутри каждой замкнутой линии, вдоль которой модуль полинома $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ сохраняет постоянное значение, должен лежать по крайней мере один нуль этого полинома [142]. Но имеется лишь n нулей.

144. Теорема не верна, если $f(z) = \text{const}$. Пусть, следовательно, $f(z) \neq \text{const}$. Тогда $f(z_0) \neq 0$. Если бы на окружности $|z| = r$ лежала «седловина», то проекция по крайней мере одной углообразной области, точки которой лежат выше седловины [132], вдавалась бы внутрь круга $|z| \leqslant r$. Поэтому z_0 не может быть седловиной, т. е. $f'(z_0) \neq 0$.

Положим $f(z) = w$ и рассмотрим образ окружности $|z| = r$ на плоскости w. Наиболее удаленной от $w = 0$ точкой этой кривой будет $w_0 = f(z_0)$; так как $f'(z_0) \neq 0$, то в точке w_0 существует определенная касательная; эта касательная, т. е. вектор $iz_0 f'(z_0)$ [103], перпендикулярна к вектору $w_0 = f(z_0)$ (геометрически очевидно). Поэтому отношение $\frac{iz_0 f'(z_0)}{f(z_0)}$ — чисто мнимое. Согласно предположению обращенной к $z = 0$ стороне окружности соответствует в окрестности точки w_0 обращенная к $w = 0$ сторона той кривой, в которую отображается окружность. Поэтому отношение $\frac{iz_0 f'(z_0)}{f(z_0)}$ — положительное мнимое.

145. [См. A. Pringsheim, Münch. Ber., 1920, стр. 145; 1921, стр. 255.]

$$2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a(\omega^{\nu}-\omega^{\nu-1})}{a(\omega^{\nu}+\omega^{\nu-1})} = 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}}+\omega^{-\frac{1}{2}}} = 2ni\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \to 2\pi i.$$

146. [A. Pringsheim, l. c. 145.] Положим

$$\zeta_{\nu}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}\left(z_{\nu-1}^{k} + z_{\nu-1}^{k-1}z_{\nu} + \ldots + z_{\nu}^{k}\right) & \text{при } k = 0, 1, 2, \ldots, \\ -\frac{1}{k+1}\left(z_{\nu-1}^{k+1}z_{\nu}^{-1} + z_{\nu-1}^{k+2}z_{\nu}^{-2} + \ldots + z_{\nu-1}^{-1}z_{\nu}^{k+1}\right) & \\ & \text{при } k = -2, -3, \ldots \end{cases}$$

Тогда

$$\zeta_1^{(k)}(z_1-z_0) + \zeta_2^{(k)}(z_2-z_1) + \ldots + \zeta_n^{(k)}(z_n-z_{n-1}) = \frac{z_n^{k+1}-z_0^{k+1}}{k+1} = 0.$$

Пусть l — длина кривой L, R — наибольшее, r — наименьшее расстояние ее точек от точки $z=0$. Сумма

$$|z_1-z_0|+|z_2-z_1|+|z_3-z_2|+\ldots+|z_n-z_{n-1}|$$

представляет собой длину вписанного полигона; следовательно, она не превосходит l. Каково бы ни было $\delta>0$, всегда для достаточно большого n возможно выбрать такие $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, чтобы $|z_\nu-z_{\nu-1}|\leqslant\delta$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Тогда при $k\geqslant 0$ получим:

$$\left|\left(\zeta_\nu^{(k)}-z_\nu^k\right)(z_\nu-z_{\nu-1})\right|=$$
$$=\frac{1}{k+1}\left|\left(z_{\nu-1}^k-z_\nu^k\right)+z_\nu\left(z_{\nu-1}^{k-1}-z_\nu^{k-1}\right)+\ldots\right||z_\nu-z_{\nu-1}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{k+1}[k+(k-1)+\ldots+1+0]R^{k-1}|z_\nu-z_{\nu-1}|^2,$$

следовательно,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^k(z_\nu-z_{\nu-1})\right|\leqslant\frac{k}{2}R^{k-1}\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu-z_{\nu-1}|^2\leqslant\frac{k}{2}R^{k-1}l\delta.$$

Если $k\leqslant-2$, то для оценки используем r.

147. [См. G. N. Watson, Complex Integration and Cauchy's Theorem. Cambr. Math. Tracts, № 15, стр. 66, 1914.] Область, заключенная внутри рассматриваемого эллипса, определяется неравенством

$$x^2-xy+y^2+x+y<0.$$

Из четырех полюсов $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ подинтегрального выражения только $z_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$ лежит в указанной области. Таким образом,

$$\oint\frac{dz}{1+z^4}=\frac{2\pi i}{4z_0^3}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i).$$

148. Имеем:

$$4i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,d\vartheta}{x^2+\sin^2\vartheta}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ix\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta+x^2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta-ix}=\oint\frac{2dz}{z^2+2zx-1},$$

где $z=e^{i\vartheta}$. Интегрирование производится вдоль окружности $|z|=1$, внутри которой содержится лишь полюс $z_0=-x+\sqrt{x^2+1}$. Таким образом, мы получаем:

$$\frac{4\pi i}{z_0+z_0^{-1}}=\frac{2\pi i}{\sqrt{1+x^2}}.$$

149. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 84, 1916. Решение J. Mahrenholz'a, там же, серия 3, т. 26, стр. 66, 1917.]

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos\vartheta)^n e^{in\vartheta}}{1-r-2r\cos\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{i} \oint \frac{(1+z+z^2)^n}{(1-r)z - r(1+z^2)}\, dz,$$

где интегрирование производится вдоль окружности $|z|=1$. При $r \neq 0$, $-1<r<\frac{1}{3}$ имеем $\left|\frac{1}{r}-1\right|>2$, так что один из корней квадратного уравнения $(1-r)z-r(1+z^2)=0$ лежит внутри, другой — вне единичной окружности. Пусть ρ будет корень, лежащий во внутренней области, т. е.

$$|\rho|<1, \quad (1-r)z-r(1+z^2) = -r(z-\rho)\left(z-\frac{1}{\rho}\right).$$

Имеем:

$$2\pi\left[\frac{(1+z+z^2)^n}{-r\left(z-\frac{1}{\rho}\right)}\right]_{z=\rho} = \frac{2\pi}{r\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n;$$

ρ вещественно и равно

$$\frac{1-r-\sqrt{1-2r-3r^2}}{2r},$$

150. Положим $z=x+iy$, тогда интересующий нас интеграл может быть записан следующим образом:

$$\frac{1}{2i}\oint \frac{z\,dz-\bar z\,d\bar z+z\bar z(\bar z\,dz-z\,d\bar z)}{1+z^2+\bar z^2+z^2\bar z^2} = \frac{1}{2i}\oint \frac{(1+\bar z^2)z\,dz-(1+z^2)\bar z\,d\bar z}{(1+z^2)(1+\bar z^2)} =$$
$$= \Im \oint \frac{z\,dz}{1+z^2} = \Im\, 2\pi i = 2\pi.$$

Фокусы эллипса служат полюсами подинтегрального выражения.

151. Имеем $(\omega>0)$:

$$\int_0^{\omega} x^{s-1}e^{-x}\,dx + \omega^s i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{is\vartheta-\omega e^{i\vartheta}}\,d\vartheta - e^{\frac{i\pi s}{2}}\int_0^{\omega} x^{s-1}e^{-ix}\,dx = 0.$$

Когда $\omega\to+\infty$, то первый интеграл сходится к $\Gamma(s)$, а третий — к интересующему нас интегралу. Второй же интеграл по модулю меньше чем

$$A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega\cos\vartheta}\,d\vartheta = A\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} e^{-\omega\cos\vartheta}\,d\vartheta + A\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega\cos\vartheta}\,d\vartheta <$$
$$< \frac{A\pi}{2}e^{-\omega\sin\varepsilon} + A\varepsilon,$$

где $A=e^{\frac{\pi}{2}|\Im s|}$, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Полагая $\varepsilon=\frac{1}{\omega^k}$, $\Re s<k<1$, видим, что второй интеграл стремится к нулю.

152. Рассматриваемый интеграл равен

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty x^{\frac{1}{n}-2}\sin x\,dx.$$

Из **151** вытекает, что при вещественных значениях s, $0<s<1$,

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx=\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}.$$

Интеграл в левой части сходится для $-1<\Re s<1$, а правая часть в этой полосе регулярна. Поэтому выписанная формула справедлива и для $-1<\Re s<1$.

153. [См. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, т. 2, стр. 337, Paris, Gauthier-Villars, 1905; см. G. H. Hardy, Messenger, т. 46, стр. 175—182, 1917.]

$$\int_0^\infty e^{-x^\mu}e^{i\alpha}x^n\,dx=\frac{1}{\mu}e^{-i\frac{(n+1)\alpha}{\mu}}\int e^{-z}z^{\frac{n+1}{\mu}-1}\,dz;$$

последний интеграл взят вдоль луча $\arg z=\alpha$ и равен

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{n+1}{\mu}-1}\,dx=\Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right),$$

ибо подинтегральное выражение после подстановки $z=re^{i\vartheta}$, $0\leqslant\vartheta\leqslant\alpha$, стремится к нулю вместе с $\frac{1}{r}$ и притом равномерно относительно ϑ.

При $\alpha=\mu\pi$, $0<\mu<\frac{1}{2}$, получаем функцию

$$e^{-x^\mu\cos\mu\pi}\sin(x^\mu\sin\mu\pi),$$

все «моменты Стилтьеса» которой равны нулю, тогда как сама она не равна тождественно нулю (это не противоречит II **138**, II **139**).

Борель показал [Leçons sur les séries divergentes, стр. 73—75, Paris, Gauthier-Villars, 1901; см. также G. Pólya, Astr. Nachr., т. 208, стр. 185, 1919], что подобного явления не может наблюдаться для функции $f(x)$ с $|f(x)|<e^{-k\sqrt{x}}$, где k — постоянное положительное число. Наша формула показывает, что в этой теореме Бореля $\sqrt{x}$ нельзя заменить более низкой степенью x^μ, $\mu<\frac{1}{2}$. H. Hamburger показал даже [Math. Zeitschr., т. 4, стр. 209—211, 1919], что $\sqrt{x}$ нельзя заменить и на $\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2}$, ибо, как им доказано,

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{x}-\ln x}{(\ln x)^2+\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x}\ln x+\pi}{(\ln x)^2+\pi^2}\right)x^n\,dx=0$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

154. Имеем:

$$x^{\mu+1}\int_0^{+\infty} e^{-t^\mu}\cos xt\,dt = x^\mu\int_0^{+\infty}\sin xt\cdot\mu t^{\mu-1}e^{-t^\mu}\,dt=\Im\int_0^{+\infty}e^{iz^\nu-\delta z}\,dz,$$

где в качестве переменной интегрирования взято $z=x^\mu t^\mu$ и для сокращения положено $\mu^{-1}=\nu$, $x^{-\mu}=\delta$. Поворачиваем прямую, по которой производится интегрирование, на небольшой положительный угол, полагаем $\delta=0$, затем поворачиваем прямую интегрирования дальше в положительном направлении до $\arg z=\frac{\mu\pi}{2}$.

155. Заменяем в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{e^{\alpha s}}{s^2}\,ds \qquad (T>a)$$

прямолинейный путь интегрирования правой, соответственно левой, половиной окружности, построенной на отрезке $a-iT$, $a+iT$, как на диаметре, смотря по тому, будет ли $\alpha\leqslant 0$ или $\alpha>0$. В первом случае интеграл не изменится и по модулю будет меньше $\frac{1}{2\pi}\frac{e^{\alpha a}}{T^2}\pi T=\frac{e^{\alpha a}}{2T}$; во втором случае он уменьшится на α (вычет, соответствующий полюсу $s=0$), и новый интеграл по модулю будет меньше $\frac{1}{2\pi}\frac{e^{\alpha a}}{(T-a)^2}\pi T$. Теперь увеличиваем T до $+\infty$.

156. [Случай $\lambda=1+e^{-1}$ рассмотрен Г. Вейлем.] Имеем:

$$\mu(t)=\frac{t^n}{n!}\quad \text{для}\quad n\leqslant t\leqslant n+1,$$

следовательно (справедливость конечного результата перемены порядка интегрирования может быть обоснована различными способами),

$$\int_0^{+\infty}\mu(t)\,e^{-\lambda t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{t^n}{n!}e^{-\lambda t}\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{u}{2}\,e^{i\left(n+\frac{1}{2}-t\right)u}\,du}{u}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin\frac{u}{2}\,e^{\frac{iu}{2}}}{u}e^{-\lambda t}e^{-itu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n e^{inu}}{n!}\,dt\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}-1}{u}\,e^{t\left(-\lambda-iu+e^{iu}\right)}\,dt\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iu}-1}{u\left(\lambda+iu-e^{iu}\right)}\,du.$$

Этот интеграл равен сумме вычетов в верхней полуплоскости, ибо интеграл от $\frac{e^{iu}-1}{u(\lambda+iu-e^{iu})}$, взятый вдоль полуокружности $u=re^{i\vartheta}$, $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, с возрастанием r стремится к нулю. Но единственным полюсом в верхней полуплоскости является $u=iz$ [196] с вычетом $\frac{1}{z}$. (См. **215**, IV 55.)

157. [Dirichlet, J. für Math., т. 17, стр. 35, 1837; Mehler, Math. Ann., т. 5, стр. 141, 1872.] Пусть $-1<x<1$, $x=$ $=\cos\vartheta$, $0<\vartheta<\pi$. Имеем:

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z^n}{\sqrt{1-2z\cos\vartheta+z^2}}\,dz,$$

где интегрирование распространено по произвольному контуру, обходящему в положительном направлении обе особые точки $e^{i\vartheta}$ и $e^{-i\vartheta}$. Но этот контур можно стянуть либо к прямолинейному отрезку, соединяющему точки $e^{i\vartheta}$ и $e^{-i\vartheta}$ (формула Лапласа), либо к дуге $-\vartheta\leqslant\arg z\leqslant\vartheta$ единичной окружности (формула Дирихле-Мелера). (В том и другом случаях с некоторыми предосторожностями, так как подинтегральное выражение на концах обращается в бесконечность, хотя и обладая при этом порядком $\frac{1}{2}$). После обхода особых точек подинтегральное выражение меняет только знак, поэтому

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{2}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(\cos\vartheta+i\alpha\sin\vartheta)^n\,i\sin\vartheta\,d\alpha}{\sqrt{1-2(\cos\vartheta+i\alpha\sin\vartheta)\cos\vartheta+(\cos\vartheta+i\alpha\sin\vartheta)^2}}=$$

$$=\frac{2}{2\pi i}\int_{-\vartheta}^{\vartheta}\frac{e^{int}\cdot ie^{it}\,dt}{\sqrt{1-2e^{it}\cos\vartheta+e^{2it}}}.$$

Третья формула получается либо путем стягивания контура интегрирования к дуге $\vartheta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \vartheta$ единичной окружности, либо из второй путем замены переменных и одновременной замены ϑ на $\pi - \vartheta$. $[P_n(-\cos\vartheta) = (-1)^n P_n(\cos\vartheta).]$

158. Если z вещественно и отрицательно, то любая пара элементов кривой L, симметричных относительно вещественной оси, дает сопряженную пару элементов интеграла. Обозначим через L_α границу полуполосы $\Re z > \alpha$, $-\pi < \Im z < \pi$ (в частности, $L_0 = L$). Если z лежит вне $\mathfrak{G}$ и $\alpha > 0$, то интегралы вдоль любой кривой L_α имеют одинаковые значения. С увеличением α до $+\infty$ $E(z)$ может быть последовательно продолжена на всю плоскость.

159. Интеграл, взятый вдоль $L = L_0$, имеет то же значение, что и взятый вдоль любой L_α, $\alpha \neq 0$. Так как $e^{e^{x+i\pi}} = e^{e^{x-i\pi}} = e^{-e^x}$, то интегралы по обоим горизонтальным кускам контура L_α взаимно уничтожаются. Вертикальный отрезок контура L_α дает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{\alpha+iy}}\,dy.$$

Значение этого интеграла не зависит от α и, следовательно, равно единице, как в этом убеждаемся, беря $\alpha \to -\infty$.

160. 1. Пусть z лежит вне $\mathfrak{G}$. Имеем [159]:

$$E(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(-\zeta + \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\right) e^{e^\zeta}\,d\zeta.$$

Производим интегрирование не вдоль L, а вдоль внутренней параллельной кривой L', отстоящей на расстояние δ, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ (граница области $\Re z > \delta$, $-\pi + \delta < \Im z < \pi - \delta$), и замечаем, что вещественный интеграл

$$\int_0^\infty \xi^2 e^{-e^\xi \cos\delta}\,d\xi$$

сходится.

2. Пусть z лежит в прямоугольнике $-1 < \Re z < 0$, $-\pi < \Im z < \pi$. Тогда по теореме о вычетах

$$\int_L \frac{e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{L_{-1}} \frac{e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i e^{e^z}.$$

Отсюда получаем сначала для прямоугольника, а затем путем аналитического продолжения и для полуполосы $\mathfrak{G}$

$$E(z) = e^{e^z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{-1}} \left(-\zeta + \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\right) e^{e^\zeta}\,d\zeta.$$

В качестве контура интегрирования выбираем вместо L_{-1} внешнюю параллельную кривую, отстоящую от прежней на расстояние δ, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$.

161. Числитель равен

$$2\pi i\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\frac{2^{\nu}}{\nu!\,(n-\nu)!}=\frac{2\pi i}{n!};$$

знаменатель равен

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{2n\cos\vartheta}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}|2ne^{i\vartheta}-\nu|}\,d\vartheta\sim\frac{2\pi}{n!}\qquad [\text{II } 217].$$

Пояснение: доминирующая по величине часть обоих интегралов падает на дугу с центром в $z=2n$ и длиной порядка $\sqrt{n}$. На ней аргумент dz близок к $\frac{\pi}{2}$, аргумент $f_n(z)$ — к нулю. [43.]

162. Число нулей в круге $|z|<r$ равно

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z\frac{f'(z)}{f(z)}\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)d\vartheta\quad(z=re^{i\vartheta}).$$

163. $\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}$ есть полином $(n-1)$-й степени от z. Далее,

$$P(z_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_\nu}\,d\zeta=f(z_\nu)\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

164. Обе части равенства, вычисленные с помощью теоремы о вычетах, совпадают с V 97.

165. Рассмотрим часть плоскости z, в которой выполняются неравенства $\left|z-\frac{n\pi}{\rho}\right|>\varepsilon>0$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Существует такая постоянная K, зависящая от ε, что во всей указанной части плоскости z

$$|\sin\rho(x+iy)|>K^{-1}e^{\rho|y|}.$$

Достаточно убедиться в этом для области $-\frac{\pi}{2\rho}\leqslant x\leqslant+\frac{\pi}{2\rho}$, $|z|>\varepsilon$, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2\rho}$. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{F(\zeta)}{\sin\rho\zeta}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2},$$

взятый вдоль окружности $|\zeta|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\rho}$, при $n\to\infty$ стремится к нулю, так как вдоль контура интегрирования $|F(\zeta)(\sin\rho\zeta)^{-1}|<CK$. Вычисляем сумму вычетов. [Hurwitz-Courant, стр. 115—120 *).]

*) Гурвиц, стр. 158—164. Гурвиц—Курант, стр. 120—125.

166. Заменяя в **165** $F(z)$ на $G\left(z+\frac{\pi}{2\rho}\right)$ и затем z на $z-\frac{\pi}{2\rho}$, получаем:

$$-\frac{d}{dz}\frac{G(z)}{\cos\rho z}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\rho(-1)^n G\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\rho}\right)}{\left(\rho z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}.$$

Объединение членов с индексами n и $-n-1$ дает:

$$\frac{d}{dz}\frac{G(z)}{\cos\rho z}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\left[\rho z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}+\frac{\rho}{\left[\rho z+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}\right)$$

или после интегрирования

$$\frac{G(z)}{\cos\rho z}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{\rho z+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right).$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как с обеих сторон должна стоять нечетная функция.

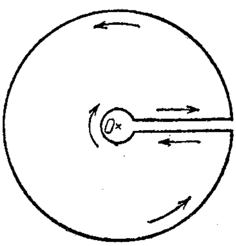

Рис. 4.

167. Функция $f(z)\ln z$, соответственно $z^k f(z)$, регулярна в области, указанной на рис. 4.

168. Так как $|\ln z-i\pi|\leqslant\pi$ при $|z|=1$, то из **167** вытекает, что

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

При целочисленных k заменяем $f(z)$ на $z^k f(z)$. При нецелочисленных k применяем вторую формулу задачи **167**.

169. [D. Hilbert. См. H. Weyl, Diss. Göttingen, 1908, стр. 83; F. Wiener, Math. Ann., т. 68, стр. 361, 1910; I. Schur, J. für Math., т. 140, стр. 16, 1911; L. Fejér und F. Riesz, Math. Zeitschr., т. 11, стр. 305—314, 1921.] Полагаем в **168**:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}(x_1+x_2z+x_3z^2+\ldots+x_nz^{n-1})^2, \qquad k=\alpha+1.$$

Тогда [122]

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=1$$

и

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} x_\lambda x_\mu \int_0^1 x^{\lambda+\mu+\alpha-1}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda+\mu+\alpha}.$$

170. Пусть L — замкнутая простая непрерывная кривая, целиком заключенная в области $\mathfrak{G}$, и z лежит во внутренней области кривой L. По теореме Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Так как равномерно на всей L

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

то отсюда следует, что $f(\zeta)$ непрерывна на L. Далее имеем:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Последняя функция регулярна внутри области, ограниченной кривой L.

171. [T. Carleman.] $F_r(z)$ есть поверхностный интеграл от f, распространенный по кругу, контур которого K_r имеет центр z и радиус r. Пусть

$$dz = e^{i\tau}\,|dz|$$

— элемент дуги на K_r. Когда x изменяется на Δx, т. е. когда поверхность интегрирования смещается в положительном направлении оси x на Δx, то, как это геометрически очевидно, изменение площади на элемент дуги составляет $|dz|\cdot\Delta x\sin\tau$. Следовательно,

$$\frac{\partial F_r(z)}{\partial x} = \oint_{K_r} f\sin\tau\,|dz|,$$

где интеграл берется вдоль окружности K_r. Аналогично получаем:

$$\frac{\partial F_r(z)}{\partial y} = -\oint_{K_r} f\cos\tau\,|dz|,$$

откуда на основании предположения вытекает, что

$$\frac{\partial F_r(z)}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial F_r(z)}{\partial y} = \frac{1}{i}\oint_{K_r} f\,dz = 0.$$

Поэтому (стр. 120) интеграл $F_r(z)$, а значит, и произведение $r^{-2}F_r(z)$ — аналитические функции и, наконец, также [170]

$$\lim_{r\to 0}\frac{F_r(z)}{r^2\pi} = f(z).$$

Вместо окружностей мы могли бы рассмотреть также кривые, подобные и подобно расположенные относительно некоторой заданной замкнутой простой кривой.

172. Чтобы показать, что разность

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta})\,d\vartheta - 2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} [f(e^{i\vartheta}) - f(re^{i\vartheta})]\,d\vartheta \quad (0 \leqslant r < 1) \qquad [118]$$

равна нулю, докажем, что она может быть сделана сколь угодно малой вместе с $1-r$. Покроем возможные точки разрыва открытыми кругами с центрами в этих точках и радиусом ε настолько малым, чтобы круги не пересекались. После удаления этих кругов из единичного круга $|z| \leqslant 1$ останется замкнутая область, внутри которой $f(z)$ равномерно непрерывна. Разобьем теперь последний интеграл на два: первый, распространенный на те части контура, которые попали в построенные ε-круги, и второй, взятый по остальной части контура. Первый интеграл будет произвольно мал вместе с ε [$f(z)$ ограничена], второй же интеграл тоже может быть сделан сколь угодно малым, если зафиксировать ε и взять $1-r$ достаточно малым.

173. См. 174. См. также 231 и Hurwitz-Courant, стр. 286*).

174. Для быстрейшего решения предпочтительнее рассмотреть вопрос в следующей общей постановке. Пусть односвязная область $\mathfrak{B}$ плоскости ζ посредством функции $\psi(\zeta) = Z$ однозначно отображается на круг $|Z| \leqslant 1$, конформно внутри и непрерывно на контуре (кроме, может быть, конечного числа точек), причем точка $\zeta = z$ переходит в $Z = 0$. Обозначая функцию, обратную ψ, через ψ^{-1}, имеем $\zeta = \psi^{-1}(Z)$.

Определим функцию $F(Z)$ в круге $|Z| \leqslant 1$ посредством равенства

$$f(\zeta) = f[\psi^{-1}(Z)] = F(Z).$$

Тогда будем иметь:

$$F(0) = \oint F(Z)\frac{dZ}{2\pi i Z},$$

где интегрирование производится в положительном направлении вдоль окружности $|Z| = 1$ [172]. Производя замену переменных $Z = \psi(\zeta)$ и принимая во внимание, что

$$F[\psi(\zeta)] = f(\zeta), \quad \psi(z) = 0,$$

получаем отсюда:

$$f(z) = \oint \frac{f(\zeta)\,d\psi(\zeta)}{2\pi i \psi(\zeta)},$$

где интеграл взят в положительном направлении вдоль границы

*) Курант, стр. 95. Гурвиц—Курант, стр. 344—345.

области $\mathfrak{B}$. 173 и 174 представляют собой частные случаи:

$\mathfrak{B}$: $\quad |\zeta| \leqslant R, \quad \psi(\zeta) = \frac{(\zeta - z) R}{R^2 - \zeta \bar{z}}, \quad \frac{\psi'(\zeta)\, d\zeta}{i\psi(\zeta)} = \frac{(R^2 - r^2)\, d\Theta}{R^2 - 2Rr\cos(\Theta - \vartheta) + r^2},$

$$\zeta = Re^{i\Theta}, \quad z = re^{i\vartheta};$$

$\mathfrak{B}$: $\quad \Re\zeta \geqslant 0, \quad \psi(\zeta) = \frac{z - \zeta}{\bar{z} + \zeta}, \quad \frac{\psi'(\zeta)\, d\zeta}{i\psi(\zeta)} = -\frac{2x\, d\eta}{x^2 + (\eta - y)^2},$

$$\zeta = i\eta, \quad z = x + iy.$$

175. [J. L. W. V. Jensen, Acta Math., т. 22, стр. 359—364, 1899. См. É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, т. 2, 3-е изд., стр. 121—123, Paris, Gauthier-Villars, 1918 *).] Подинтегральное выражение однозначно в $\mathfrak{G}_\varepsilon$. Для ε достаточно малого $\mathfrak{G}_\varepsilon$ содержит точку $r = 0$ [предположение], и тогда интеграл равен $2\pi i \ln f(0)$. Пусть α_1, соответственно $\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — конец пути, соединяющего кружок, покрывающий точку a_1, соответственно $a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, с окружностью $|z| = 1$ ($|\alpha_1| = \ldots$ $\ldots = |\alpha_m| = |\beta_1| = \ldots = |\beta_n| = 1$). Петля, начинающаяся в α_μ, обходящая ε-кружок с центром a_μ и снова возвращающаяся в α_μ, дает при интегрировании, как в этом убеждаемся, беря $\varepsilon \to 0$,

$$-2\pi i \int_{a_\mu}^{\alpha_\mu} \frac{dz}{z} = -2\pi i \ln \frac{\alpha_\mu}{a_\mu}$$

(для определенности нули a_μ предположены простыми). Окружность $|z| = 1$ дает $\int_0^{2\pi} \ln f(e^{i\vartheta})\, i\, d\vartheta$. Отделяем теперь мнимые части в обеих частях равенства

$$\int_0^{2\pi} \ln f(re^{i\vartheta})\, i\, d\vartheta - 2\pi i \sum_{\mu=1}^{m} \ln \frac{\alpha_\mu}{a_\mu} + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{\beta_\nu}{b_\nu} = 2\pi i \ln f(0).$$

Можно провести другое доказательство методом задачи 120.

176. См. 177; см. также 232.

177. [F. u. R. Nevanlinna, Acta Soc. Sc. Fennicae, т. 50, № 5, 1922.] Придерживаемся обозначений решения 174. Рассмотрим функцию $f(\zeta)$, мероморфную в области $\mathfrak{B}$, отличную от нуля и бесконечности на ее границе и во внутренней точке z и имеющую внутри $\mathfrak{B}$ нули $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, b_2 \ldots, b_n$. Функция $F(Z) = f[\psi^{-1}(Z)]$ имеет нули $A_\mu = \psi(a_\mu)$ и полюсы $B_\nu = \psi(b_\nu)$. Получаем [175]:

$$\ln |F(0)| + \sum_{\mu=1}^{m} \ln \frac{1}{|A_\mu|} - \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{1}{|B_\nu|} = \oint \ln F(Z) \frac{dZ}{2\pi i Z},$$

---

*) Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 1, стр. 99.

где интегрирование производится вдоль $|Z|=1$. Отсюда путем замены переменных получаем [174]:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \ln \frac{1}{|\psi(a_\mu)|} - \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{1}{|\psi(b_\nu)|} = \oint \ln|f(\zeta)| \frac{d\psi(\zeta)}{2\pi i \psi(\zeta)} = \ln|f(z)|,$$

где интегрирование производится вдоль границы области $\mathfrak{B}$. Знаки в левой части очевидны: $|\psi(a_\mu)|<1$, $|\psi(b_\nu)|<1$; $\frac{d\psi(\zeta)}{2\pi i \psi(\zeta)}$ положительно. Если мы представим себе, что $f(\zeta)$ — переменная, а значение $|f(z)|$ фиксировано, то содержание формулы можно, несколько грубо, сформулировать следующим образом: нули внутри контура увеличивают, полюсы внутри контура уменьшают (по модулю) значение функции на контуре. Из этой общей формулы Иенсена вытекают теоремы **176**, **177** таким же образом, как теоремы **173**, **174** из общей формулы, данной в решении **174**. Можно также обобщить на наш случай доказательство теоремы **120** [174]. Предположение, что $f(z)$ на контуре отлична от нуля, можно отбросить всегда [120], что она на контуре регулярна — во многих случаях.

178. [См. F. Nevanlinna, C. R., т. 175, стр. 676, 1922; T. Carleman, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 17, № 9, стр. 5, 1923.] Описываем вокруг a_μ окружность достаточно малого радиуса ε и соединяем ее с полуокружностью $|z|=R$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant +\frac{\pi}{2}$ так, чтобы соединительные линии ($\mu=1, 2, \ldots, n$) не пересекались. После удаления из $\mathfrak{B}$ ε-кружков и соединительных путей остается односвязная область $\mathfrak{G}_\varepsilon$. Вдоль контура этой области в положительном направлении берем указанный интеграл. Петля около a_μ с началом и концом в точке z_μ, $|z_\mu|=R$, дает:

$$-2\pi\left(\frac{1}{a_\mu} - \frac{a_\mu}{R^2} - \frac{1}{z_\mu} + \frac{z_\mu}{R^2}\right).$$

Берем теперь вещественную часть выражения

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln f(Re^{i\vartheta}) \frac{2\cos\vartheta}{R}\, d\vartheta + \left(\int_{R}^{r} + \int_{-r}^{-R}\right)\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{R^2}\right) \ln f(iy)\, dy +$$

$$+ \int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln f(re^{i\vartheta}) \left(\frac{e^{-i\vartheta}}{r} + \frac{re^{i\vartheta}}{R^2}\right) d\vartheta - 2\pi \sum_{\mu=1}^{m} \left(\frac{1}{a_\mu} - \frac{a_\mu}{R^2} - \frac{1}{z_\mu} + \frac{z_\mu}{R^2}\right) = 0.$$

Простота формулы объясняется тем обстоятельством, что на границе полукруга $|z|<R$, $\Re z>0$ дифференциал $\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{R^2}\right)\frac{dz}{i}$ всюду вещественен, а функция $\frac{1}{z}-\frac{z}{R^2}$ — чисто мнимая.

179. Пусть $a_0=|a_0|e^{i\gamma}\neq 0$, $z-z_\nu=r_\nu e^{i\varphi_\nu}$, стало быть

$$U(z)+iV(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)=$$
$$=|a_0|e^{i\gamma}r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}\dots r_ne^{i\varphi_n}.$$

Когда $z=x$ вещественно и возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, то все углы φ_ν ($\nu=1, 2, \dots, n$) возрастают от $-\pi$ до 0 и, значит, $\operatorname{arctg}\frac{V(x)}{U(x)}=\gamma+\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n$ также возрастает и притом в целом на $n\pi$. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{V(x)}{U(x)}=\operatorname{tg}(\gamma+\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)$$

во всем интервале $-\infty\leqslant x\leqslant+\infty$ n раз принимает значение 0 и n раз ∞. Это рассуждение показывает одновременно, что нули $U(x)$ и $V(x)$ чередуются.

180. В силу непрерывности аргумента ясно.

181. Явствует из принципа аргумента, так как соответствующая формулировка, касающаяся числа нулей и полюсов, очевидно, справедлива, не исключая и того случая, когда имеются точки, в которых нуль или полюс $\varphi(z)$ совпадает с нулем или полюсом $\psi(z)$.

Иначе:

$$\arg f(z)=\arg\varphi(z)+\arg\psi(z).$$

182. Полином может быть представлен в виде произведения линейных множителей $z-z_0$, где z_0 — нуль полинома. Поэтому согласно 181 достаточно доказать теорему для линейной функции $z-z_0$. При отображении $w=z-z_0$ кривая L смещается на вектор $-z_0$. Если поэтому z_0 лежит внутри области, ограниченной кривой L, то точка $w=0$ находится внутри области, полученной в результате отображения, и число обходов равно единице. В других случаях число обходов равно нулю.

183. Если $f(z)$ в области $\mathfrak{B}$ регулярна, за исключением, возможно, нескольких полюсов, и на граничной кривой L конечна и отлична от нуля, то тогда $f(z)=R(z)\varphi(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция, а $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям приведенного в задаче частного случая принципа аргумента. [181, 182.]

184. [A. Hurwitz, Math. Ann., т. 57, стр. 444, 1903. См. также Ch. Sturm, Journ. de Math., т. 1, стр. 431, 1836.] Что число нулей не превосходит $2n$, вытекает из VI **14**. Число обходов кривой, описываемой $P(z)$, где $z=re^{i\vartheta}$, $r>0$ и ϑ изменяется от 0 до 2π, больше или равно m, ибо $P(z)$ имеет точку $z=0$ нулем m-й кратности. Поэтому кривая пересекает мнимую ось по меньшей мере $2m$ раз. Если $P(z)$ имеет на окружности $|z|=1$ нули, берем $r=1-\varepsilon$, где ε — выбранное надлежащим образом положительное число; если же на $|z|=1$ полином $P(z)$ нулей не имеет, то берем $r=1$. Существенно отличное доказательство вытекает из II **141**.

185. Полином $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ имеет в единичном круге $|z|<1$ n нулей [22]. Поэтому число обходов кривой, в которую переходит единичная окружность при отображении $w=P(z)$, равно n. Применяем **180** к положительной, соответственно отрицательной, половине вещественной оси.

186. [A. Ostrowski.] Описываем в плоскости w круг с центром в $w=a$ и с радиусом, равным максимуму $|f(z)|$ на L. Этот круг не содержит точку $w=0$. Кривая, в которую переходит L при отображении $w=a-f(z)$, вся содержится в указанном круге и имеет поэтому число обходов 0.

187. При $z=iy$, $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$ имеем:

$$w=e^{\pi iy}-e^{-\pi iy}=2i\sin\pi y.$$

При $z=x\pm\frac{1}{2}i$, $x\geqslant 0$, имеем:

$$w=\pm i\,(e^{\pi x}+e^{-\pi x}).$$

Если, стало быть, z обходит в положительном направлении границу заданной полуполосы, то w описывает мнимую ось и именно от $+i\infty$ до $-i\infty$. Пусть, далее, $z=x+iy$, x — фиксированное положительное число, $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$. Из формулы

$$w=e^{\pi x}\cdot e^{\pi iy}-e^{-\pi x}\cdot e^{-\pi iy}=(e^{\pi x}-e^{-\pi x})\cos\pi y+i\,(e^{\pi x}+e^{-\pi x})\sin\pi y$$

с очевидностью следует, что когда z пробегает отрезок $\Re z=x$, $-\frac{1}{2}\leqslant\Im z\leqslant\frac{1}{2}$, то w описывает правую половину эллипса с центром в начале и полуосями $e^{\pi x}-e^{-\pi x}$ и $e^{\pi x}+e^{-\pi x}$.

Таким образом, каково бы ни было число w_0 в правой полуплоскости $\Re w>0$, можно выбрать столь большое x, чтобы число обходов кривой, описываемой разностью $w-w_0$, когда z обходит границу четырехугольной области

$$0<\Re z<x,\quad -\frac{1}{2}<\Im z<\frac{1}{2},$$

было равно единице. См. также **188**.

188. Пусть w_0 — произвольная внутренняя точка области, ограничиваемой кривой K, в которую переходит при отображении окружность $|z|=r$. Рассмотрим кривую K', получаемую смещением K на вектор $-w_0$. В кривую K' преобразуется окружность $|z|=r$ при отображении $w=f(z)-w_0$. Согласно предположению ее число обходов может быть равно лишь $+1$ или -1. Но так как $f(z)-w_0$ регулярна, то [принцип аргумента] это число неотрицательно и, следовательно, равно $+1$. Таким образом, в круге $|z|<r$ функция $f(z)-w_0$ имеет ровно один нуль. Аналогично показываем, что функция $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ не может принимать значения w_0, лежащего за пределами K (соответствующее число обходов равно нулю).

189. Рассмотрим кривую, в которую переходит при отображении $w=\int\limits_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ граница кругового сектора, крайние радиусы которого составляют с положительной вещественной осью углы $+\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$. Образы обоих радиусов можно построить путем поворота на 45° (соответственно зеркального отражения и поворота) спирали Корню (чертеж у Drude, l. c. в тексте задачи). Образ ограничивающей сектор дуги окружности проходит вблизи точки $w=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ [IV 189]. Пусть положительное число r взято столь малым, чтобы образ дуги $z=re^{i\vartheta}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{4}$, встречал образы радиусов лишь в двух точках, соответствующих концам дуги $re^{\frac{i\pi}{4}}$, $re^{-\frac{i\pi}{4}}$. Рассматриваем тогда кривую, в которую отображается граница той части упомянутого сектора, которая лежит вне круга $|z|<r$, т. е. для которой $|z|\geqslant r$. Эта кривая имеет число обходов 0. Отсюда заключаем, что $w\neq 0$ при $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$. Другое доказательство — в V **178**.

190. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}$$

имеет целое значение и поэтому вообще не может изменяться при непрерывной деформации контура интегрирования. Но рассматриваемые кривые плоскости z можно непрерывно преобразовывать одну в другую.

191. Пусть $f(z)\not\equiv 0$, тогда $f(z)\neq 0$ на L, и функция $\ln f(z)=\ln R+i\Theta$ регулярна во всех точках кривой L. Поэтому имеем:

$$\frac{\partial\ln R}{\partial\nu}=\frac{\partial\Theta}{\partial s}\ ^{*)},$$

*) Если элемент дуги ds образует с осью OX угол α, то, обозначая через u и v действительную и мнимую части регулярной функции, будем иметь:

$$\frac{\partial v}{\partial s}=v_x\cos\alpha+v_y\sin\alpha,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}=u_x\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+u_y\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда с помощью условий Коши-Римана и вытекает равенство

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial s}.$$

где дифференцирование производится по внешней нормали, соответственно по положительному направлению касательной в точке z кривой L. Производная, стоящая в левой части, положительна [принцип максимума]; то же самое, следовательно, справедливо и для производной в правой части.

Образом кривой L служит окружность (возможно, обходимая несколько раз в одном и том же направлении).

192. [B. Riemann, Werke, стр. 106—107, Leipzig, B. G. Teubner, 1876 *), H. M. Macdonald, Proc. Lond. M. S., т. 29, стр. 576—577, 1898; см. также G. N. Watson, там же, (2), т. 15, стр. 227—242, 1916 **).] Пусть на L (обозначения решения **191**) $f'(z)=Rie^{i\Theta}\frac{d\Theta}{dz}\neq 0$. Пусть, далее, W и W' — числа обходов кривых, описываемых точками $f(z)$, соответственно $f'(z)$ (W есть число обходов окружности, вообще говоря, обходимой в постоянном направлении несколько раз). Тогда $2\pi(W'-W)$ будет равно изменению аргумента $\frac{d\Theta}{dz}$, когда z обходит кривую L. Пусть $ds=|dz|$ — элемент дуги кривой L. Тогда $\frac{d\Theta}{dz}=\frac{d\Theta}{ds}\frac{ds}{dz}$. Первый множитель постоянно сохраняет вещественное значение; следовательно, дело сводится к исследованию изменения аргумента второго множителя. Но аргумент $\frac{ds}{dz}=\frac{|dz|}{dz}$ равен аргументу dz, взятому с обратным знаком. Изменение направления dz, т. е. касательного вектора, при положительном обходе замкнутой простой кривой составляет 2π, как это интуитивно очевидно хотя бы на примере полигона. Если $f'(z)$ обращается на L в нуль, то вместо L берем достаточно близкую к ней линию уровня, содержащуюся внутри области, ограничиваемой кривой L.

Нетрудно придти и к геометрической интерпретации этой теоремы [см. H. M. Macdonald, l. c.].

193. Так как $f'(z)\neq 0$, то $f(z)$ не равна тождественно постоянной. Внутри области $\mathfrak{B}$ $f(z)$ имеет точно один нуль [**192**]. Поэтому число обходов (кругообразного) пути, описываемого точкой $w=f(z)$, когда z обходит границу $\mathfrak{B}$, равно 1. Число обходов кривой, описываемой точкой $f(z)-w_0$, будет равно 1 или 0, смотря по тому, будет ли $|w_0|$ меньше или больше постоянного значения модуля $f(z)$ на границе $\mathfrak{B}$.

194. [E. Rouché, J. de l'Éc. Pol., т. 39, стр 217, 1862.] Так как в точках, лежащих в области, ограничиваемой L, достаточно близко к этой кривой, $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ отличны от нуля

*) Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1940, стр. 111—112.

**) Укажем еще: Dell'Agnola, Atti Lincei (5), т. 12, 1903 и т. 13, 1904; A. Denjoy, Comptes Rendus, т. 166, стр. 31—33, 1918; Vallée-Poussin, Ann. S. M. Bruxelles, т. 26, стр. 1—12, 1902; Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, стр. 170, Физматгиз, 1963.

и имеет место неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$, то мы можем принять, что $f(z)$ и $\varphi(z)$ регулярны на L. Функция $1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ имеет на всем протяжении кривой L положительную вещественную часть, поэтому изменение ее аргумента после обхода L равно нулю. Но

$$f(z)+\varphi(z)=f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right),$$

так что [181] число обходов кривой, получаемой при отображении $f(z)$, должно совпадать с числом обходов кривой, получаемой при отображении $f(z)+\varphi(z)$.

195. Частный случай теоремы 194: $f(z)=ze^{\lambda-z}$, $\varphi(z)=1$, L — единичная окружность $|z|=1$. Что на вещественном отрезке $0\leqslant z\leqslant 1$ лежит по крайней мере один корень, явствует из того, что $ze^{\lambda-z}$ на этом отрезке возрастает при возрастании z и притом от 0 до $e^{\lambda-1}>1$.

196. Если $z=iy$, y вещественно, то

$$|\lambda-iy|\geqslant\lambda>1=|e^{-iy}|.$$

Если $|z|$ достаточно велико и $\Re z\geqslant 0$, то

$$|\lambda-z|>1\geqslant|e^{-z}|.$$

Уравнение $\lambda-z=0$ имеет в правой полуплоскости корень $z=\lambda$. Частный случай теоремы 194: $f(z)=\lambda-z$, $\varphi(z)=-e^{-z}$, L — достаточно большая полуокружность в полуплоскости $\Re z\geqslant 0$. Вещественность единственного корня вытекает из симметрии поверхности модуля относительно вертикальной плоскости, проходящей через вещественную ось.

197. [См. G. Julia, Journ. de Math., серия 8, т. 1, стр. 63, 1918.] Частный случай теоремы 194: на единичной окружности имеем $|z|=1>|f(z)|$.

198. [Пример на одну общую теорему, принадлежащую G. Julia, Ann. be l'Éc. Norm., серия 3, т. 36, стр 104—108, 1919.] Пусть R_n — прямоугольник с вершинами $n\pm\frac{1}{2}\pm id$, n — целое, d — фиксированное положительное число. Положим $z=x+iy=re^{i\vartheta}$. Согласно I 155 на границе R_n при $n\to+\infty$

$$\ln|\Gamma(z)|\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln r-y\vartheta-x,$$

так что на R_n минимум модуля $\Gamma(z)$ стремится к $+\infty$ при $n\to+\infty$. С другой стороны, на границе R_n модуль $\sin\pi z$ остается больше некоторого c ($c>0$), не зависящего от n. Поэтому минимум выражения

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right|=\frac{|\sin\pi z|}{\pi}|\Gamma(1-z)|$$

на границе R_{-n} при $n\to+\infty$ стремится к $+\infty$.

Таким образом, каково бы ни было a, для достаточно больших n на границе R_{-n} будем иметь:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| > |a|,$$

тогда как в центре R_{-n} имеем $\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$. Применяем **194** к

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}, \quad \varphi(z) = -a.$$

199. Повторное интегрирование по частям дает:

$$zF(z) = f(0) - f(1)\cos z + \frac{1}{z}\left[f'(1)\sin z - \int_0^1 f''(t)\sin zt\, dt\right] =$$
$$= f(0) - f(1)\cos z + \varphi(z).$$

Заключаем все нули периодической функции $f(0) - f(1)\cos z$ в кружки радиуса ε с центрами в этих нулях так, чтобы 2ε было меньше любого из расстояний между двумя нулями. В части плоскости z, оставшейся после удаления этих ε-кружков, функция $\frac{\varphi(z)}{f(0) - f(1)\cos z}$ будет при $z \to \infty$ стремиться к нулю. [Показываем это сначала для полосы $-\pi \leqslant \Re z \leqslant \pi$.] Таким образом, $zF(z)$ имеет в каждом ε-круге, за исключением нескольких, столько же нулей, сколько и функция $f(0) - f(1)\cos z$ [194], т. е. один. Этот последний необходимо веществен в случае $|f(1)| > |f(0)|$, когда круг делится вещественной осью пополам: комплексные нули вещественной функции $F(z)$ попарно сопряжены [решение 196].

200. Член $z^n a^{-n^2}$ ряда

$$1 + \frac{z}{a} + \frac{z}{a}\cdot\frac{z}{a^3} + \frac{z}{a}\cdot\frac{z}{a^3}\cdot\frac{z}{a^5} + \ldots$$

становится максимальным на окружности $|z| = |\alpha|^{2n-1}$ и перестает быть таковым на окружности $|z| = |a|^{2n+1}$ [I 117]. Для изучения перевеса максимального члена над другими между этими границами пользуемся формулой

$$\frac{F(z) - z^n a^{-n^2}}{z^n a^{-n^2}} = \frac{z}{a^{2n+1}} + \frac{z}{a^{2n+1}}\cdot\frac{z}{a^{2n+3}} + \frac{z}{a^{2n+1}}\cdot\frac{z}{a^{2n+3}}\cdot\frac{z}{a^{2n+5}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a^{2n-1}}{z} + \frac{a^{2n-1}}{z}\cdot\frac{a^{2n-3}}{z} + \frac{a^{2n-1}}{z}\cdot\frac{a^{2n-3}}{z}\cdot\frac{a^{2n-5}}{z} + \ldots$$

На окружности $|z| = |a|^{2n}$ соответствующие члены обоих рядов в правой части по модулю совпадают; таким образом, имеем:

$$\left|\frac{F(z) - z^n a^{-n^2}}{z^n a^{-n^2}}\right| < 2\left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{|a|^3} + \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{|a|^3}\cdot\frac{1}{|a|^5} + \ldots\right) <$$
$$< \frac{2}{|a|}\frac{1}{1 - |a|^{-3}} = \frac{2|a|^2}{|a|^3 - 1} < 1,$$

ибо единственный положительный корень уравнения $z^3-2z^2-1=0$ меньше чем 2,5 [20: $d_0=0{,}5$, $d_1=2{,}5$, $d_2=1$, $d_3=2{,}5$]. Следовательно, $F(z)$ имеет внутри круга $|z|\leqslant|a|^{2n}$ столько же нулей, сколько и $z^n a^{-n^2}$, т. е. n. Из них на круг $|z|\leqslant|a|^{2n-2}$ по тому же доказательству падает $n-1$ нулей. См. V **176**.

201. [A. Hurwitz, Math. Ann., т. 33, стр. 246—266, 1889.] Пусть K — замкнутый круг с центром в точке a, содержащийся в $\mathfrak{G}$ и не содержащий, исключая, быть может, a, ни одного нуля функции $f(z)$. Тогда на границе K для достаточно большого n будем иметь $|f(z)|>|f_n(z)-f(z)|$. Применяем **194** к функции $\varphi(z)=f_n(z)-f(z)$. Более общо: каждая часть области $\mathfrak{G}$, не имеющая на своей границе нулей функции $f(z)$, содержит одинаковое количество нулей как функции $f_n(z)$, так и $f(z)$, если только n достаточно велико. Важно для приложений!

202. $f(z)$ регулярна в единичном круге $|z|<1$ [**170**]. Пусть, в противоречие с утверждением, $f(z_1)=f(z_2)$ для некоторой пары z_1, z_2, $z_1\neq z_2$, $|z_1|<1$, $|z_2|<1$. Рассмотрим последовательность $f_n(z)-f_n(z_1)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, сходящуюся к $f(z)-f(z_1)$. В каждом из кругов, описанных около z_2, целиком содержащихся внутри единичного круга и не содержащих z_1, разность $f_n(z)-$ $-f_n(z_1)$ должна была бы для достаточно больших n обращаться в нуль [**201**], что представляет противоречие.

203. [**170**, **201**.]

204. При a и d целых утверждение теоремы получается так же, как в решении **185**, ибо нули полинома

$$a_0z^a+a_1z^{a+d}+a_2z^{a+2d}+\ldots+a_nz^{a+nd}$$

лежат в круге $|z|\leqslant 1$ [**23**]. При рациональных a и d заменяем z некоторым его кратным. При иррациональных a и d аппроксимируем их рациональными числами и применяем **203**.

205. [G. Pólya, Math. Zeitschr., т. 2, стр. 354, 1918.] Имеем [II **21**]:

$$\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\cos\frac{\nu}{n}z \qquad [185,\ 203].$$

206. Контрпример:

$$f_n(z)=z^2+\frac{1}{n},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

$$\mathfrak{B}\colon\ |z|\leqslant 2;\quad a=-1,\quad b=+1.$$

207. Из соотношения $z-w\varphi(z)=0$ вытекает:

$$1-w\varphi'(z)=\varphi(z)\frac{dw}{dz}.$$

Следовательно, дифференцируя формулу Лагранжа (L) (стр. 153) по w, получаем:

$$\frac{f'(z)\varphi(z)}{1-w\varphi'(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}f'(x)\varphi(x)[\varphi(x)]^{n-1}}{dx^{n-1}}\right]_{x=0},$$

что и требовалось доказать. Так как $\varphi(0)\neq 0$, то $f'(z)\varphi(z)$ принадлежит к классу «допустимых» функций вместе с $f(z)$. Поэтому интегрирование приводит от **207** обратно к формуле Лагранжа (L).

208. Имеем:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f(x)[\varphi(x)]^n}{dx^n}\right]_{x=0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)[\varphi(\zeta)]^n}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^n f(x)[\varphi(x)]^n}{dx^n}\right]_{x=0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w\varphi(\zeta)}{\zeta}\right)^n,$$

где интеграл берется вдоль окружности с центром в $\zeta=0$ и значения w достаточно малы, так что вдоль контура интегрирования $|\zeta|>|w\varphi(\zeta)|$. Но тогда внутри круга, ограниченного этим контуром, функция $\zeta-w\varphi(\zeta)$ имеет такое же количество нулей, как и ζ [194], т. е. лишь один. Обозначая этот единственный нуль через z, имеем далее:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^n f(x)[\varphi(x)]^n}{dx^n}\right]_{x=0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-w\varphi(\zeta)}=\frac{f(z)}{1-w\varphi'(z)}.$$

209. [L. Euler, De serie Lambertiana, Opera Omnia, серия 1, т. 6, стр. 354, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1921.] Полагаем в (L) (стр. 153) $\varphi(z)=e^z$, $f(z)=z$,

$$z=w+\frac{2w^2}{2!}+\frac{3^2w^3}{3!}+\ldots+\frac{n^{n-1}w^n}{n!}+\ldots$$

210. Полагаем в (L) (стр. 153) $\varphi(z)=e^z$, $f(z)=e^{\alpha z}$,

$$e^{\alpha z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!}w^n.$$

211. Полагаем $x=1+z$, $\varphi(z)=(1+z)^\beta$, $f(z)=1+z$; формула (L) (стр. 153) дает:

$$x=1+z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\beta n}{n-1}\frac{w^n}{n}.$$

212. [См. 1. с. 209, стр. 350.] Полагаем $x=1+z$, $\varphi(z)=(1+z)^{\beta}$, $f(z)=(1+z)^{\alpha}$. Формула (L) (стр. 153) дает:

$$y=x^{\alpha}=(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+\beta n-1}{n-1}\frac{\alpha w^{n}}{n}.$$

213. Для $\beta=0$, $\beta=1$ получаем биномиальный ряд, для $\beta=2$

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2w}\right)^{\alpha}=1+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+2n-1}{n-1}\frac{w^{n}}{n};$$

для $\beta=-1$ в существенном тот же ряд, для $\beta=\frac{1}{2}$

$$\left(\sqrt{1+\frac{w^{2}}{4}}+\frac{w}{2}\right)^{2\alpha}=1+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+\frac{n}{2}-1}{n-1}\frac{w^{n}}{n}.$$

Полагая $x=1+\frac{\xi}{\beta}$, $w=\frac{\omega}{\beta}$, $\alpha=a\beta$, фиксируем ξ, ω, a и берем $\beta\to+\infty$. Уравнение задачи **211** дает:

$$\omega=\xi\left(1+\frac{\xi}{\beta}\right)^{-\beta}\sim\xi e^{-\xi}.$$

214. Применяя **207** к $\varphi(z)=e^{z}$, $f(z)=e^{\alpha z}$, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\alpha)^{n}w^{n}}{n!}=\frac{e^{\alpha z}}{1-we^{z}}=\frac{e^{\alpha z}}{1-z},$$

где z имеет то же значение, что и в **209**. Радиус сходимости равен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\alpha)^{n}}{n!}\,\frac{(n+1)!}{(n+1+\alpha)^{n+1}}=e^{-1}.$$

215. Дело сводится к доказательству того, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{t^{n}}{n!}e^{-\lambda t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{(n+\alpha)^{n}}{n!}e^{-\lambda(n+\alpha)}\,d\alpha.$$

Имеем равномерно в $0\leqslant\alpha\leqslant1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\alpha)^{n}}{n!}e^{-\lambda n}=\frac{e^{\alpha z}}{1-z},$$

где z определяется из уравнения $ze^{-z}=e^{-\lambda}$, $|z|<1$ [**214**, **209**]. Таким образом, интересующий нас интеграл равен

$$\int_{0}^{1}\frac{e^{\alpha(z-\lambda)}}{1-z}\,d\alpha=\frac{e^{z-\lambda}-1}{(1-z)(z-\lambda)}=\frac{1}{\lambda-z}.$$

Непосредственно убеждаемся в том, что $\zeta=\lambda-z$ удовлетворяет уравнению $\lambda-\zeta-e^{-\zeta}=0$; $\lambda-z$ вещественно и положительно.

216. [По поводу **216—218**, **225**, **226** см. G. Pólya, Ens. Math., т. 22, стр. 38—47, 1922.] Применяя **207** к

$$\varphi(z)=(1+z)^{\beta},\quad f(z)=(1+z)^{\alpha},$$

имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta n}{n}w^n=\frac{(1+z)^{\alpha}}{1-w\beta(1+z)^{\beta-1}}=\frac{x^{\alpha+1}}{(1-\beta)x+\beta},$$

где $1+z=x$ и x — корень уравнения **211**, алгебраического для рациональных значений β.

217. [L. Euler, Opuscula analytica, т. 1, стр. 48—62, Petropoli, 1783.] Применяя **207** к $\varphi(z)=1+z+z^2$, $f(z)=1$, имеем:

$$z=\frac{1-w-\sqrt{1-2w-3w^2}}{2w},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^n(1+x+x^2)^n}{dx^n}\right]_{x=0}=\frac{1}{1-w(1+2z)}=\frac{1}{\sqrt{1-2w-3w^2}}.$$

218. Складывая по k-му столбцу влево от среднего, получаем:

$$1+\binom{k+2}{1}w+\binom{k+4}{2}w^2+\ldots+\binom{k+2n}{n}w^n+\ldots=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-4w}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2w}\right)^k\quad [216].$$

219. [См. Jacobi, Werke, т. 6, стр. 22, Berlin, G. Reimer, 1891.] Достаточно рассмотреть случаи 2, 3.

2. Пусть $\xi\neq-1$, $\xi\neq1$. Для нецелых α и β выбираем определенные ветви функций $(1-\xi)^{\alpha}$ и $(1+\xi)^{\beta}$. Положим в **207**:

$$\varphi(z)=\frac{(\xi+z)^2-1}{2};\quad f(z)=(1-\xi-z)^{\alpha}(1+\xi+z)^{\beta},$$
$$f(0)=(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}.$$

Тогда правая часть даст:

$$(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\,w^n,$$

тогда как из $w=\frac{z}{\varphi(z)}$ вытекает:

$$z=\frac{1-\xi w-\sqrt{1-2\xi w+w^2}}{w},$$

$$f(z)=2^{\alpha+\beta}(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}\left(1-w+\sqrt{1-2\xi w+w^2}\right)^{-\alpha}\times$$
$$\times\left(1+w+\sqrt{1-2\xi w+w^2}\right)^{-\beta},$$
$$1-w\varphi'(z)=\sqrt{1-2\xi w+w^2},$$

и, значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)\,w^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2\xi w+w^2}}\left(1-w+\sqrt{1-2\xi w+w^2}\right)^{-\alpha}\times$$
$$\times\left(1+w+\sqrt{1-2\xi w+w^2}\right)^{-\beta}.$$

В случаях $\xi=-1$, $\xi=1$ требуемая формула доказывается непосредственно [решение VI 98].

3. Пусть $\xi\neq 0$. Положим в **207**:

$$\varphi(z)=z+\xi;\quad f(z)=e^{-(z+\xi)}(z+\xi)^{\alpha},\quad f(0)=e^{-\xi}\xi^{\alpha}.$$

Тогда в правой части будет стоять $e^{-\xi}\xi^{\alpha}\sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\xi)\,w^n$, тогда как вследствие $w=\dfrac{z}{\varphi(z)}$ будем иметь:

$$z=\frac{\xi w}{1-w},\quad f(z)=\frac{\xi^{\alpha}}{(1-w)^{\alpha}}e^{\frac{\xi}{w-1}},\quad 1-w\varphi'(z)=1-w.$$

Следовательно, мы получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\xi)\,w^n=\frac{1}{(1-w)^{\alpha+1}}e^{\frac{\xi w}{w-1}}.$$

В случае $\xi=0$ требуемая формула может быть доказана непосредственно [решение VI 99].

220. $\Delta e^{sz}=e^{sz}(e^s-1)$, $\Delta^n e^{sz}=e^{sz}(e^s-1)^n$.

1. Имеем:

$$(1+w)^z=1+\frac{z}{1}w+\frac{z(z-1)}{2!}w^2+\ldots+\frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}w^n+\ldots,$$

где полагаем $w=e^s-1$. Ряд сходится при $|e^s-1|<1$ и произвольном z.

2.

$$s=e^s-1-\frac{1}{2}(e^s-1)^2+\frac{1}{3}(e^s-1)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(e^s-1)^n+\ldots,$$
$$|e^s-1|<1.$$

3.

$$e^{sz}=1+\frac{z}{1!}se^s+\frac{z(z-2)}{2!}(se^s)^2+\ldots+\frac{z(z-n)^{n-1}}{n!}(se^s)^n+\ldots$$

(210, с $z=-s$, $\alpha=-z$). В силу II 205 имеем:

$$\frac{z(z-n)^{n-1}}{n!}(se^s)^n\sim(-1)^{n-1}ze^{-z}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}(se^{s+1})^n.$$

Итак, при $|se^{s+1}|\leqslant 1$ ряд сходится; в окрестности точки $s=0$ формула во всяком случае справедлива.

4. Полагая в **212** $x=e^s$, $\beta=\frac{1}{2}$, следовательно, $w=e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}$; $\alpha=z$, будем иметь:

$$e^{sz}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n}\binom{z+\frac{n}{2}-1}{n-1}\left(e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}\right)^n.$$

Заменяя s на $-s$ и складывая обе формулы, получаем:

$$\frac{e^{sz}+e^{-sz}}{2}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z}{2m}\binom{z+m-1}{2m-1}\left(e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}\right)^{2m}.$$

Аналогично, полагая в **216** $x=e^s$, $\beta=\frac{1}{2}$, $w=e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}$, $\alpha=z-\frac{1}{2}$, заменяя s на $-s$ и вычитая, получаем после некоторого преобразования:

$$\frac{e^{sz}-e^{-sz}}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}\binom{z+m-1}{2m-1}\left(e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}\right)^{2m-2}(e^s-e^{-s}).$$

Сумма обоих последних равенств и дает требуемое разложение для e^{sz}. На основании формулы Стирлинга и разложения функции $\sin\pi z$ в бесконечное произведение имеем:

$$\frac{z}{2m}\binom{z+m-1}{2m-1}\left(e^{\frac{s}{2}}-e^{-\frac{s}{2}}\right)^{2m}\sim-\frac{z\sin\pi z}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{is}{2}\right)^{2m}m^{-\frac{3}{2}}.$$

Ряд сходится при $\left|\sin\frac{is}{2}\right|<1$. В окрестности точки $s=0$ формула во всяком случае справедлива.

221. [По поводу формул 2, 3 см. N. H. Abel, Oeuvres, т. 2, Nouvelle édition, стр. 72, 73, Christiania, Grøndahl & Son, 1881.] Развертываем в **220**, $F(z)=e^{sz}$, обе части по возрастающим степеням s и приравниваем коэффициенты при $\frac{s^k}{k!}$ в левой и правой частях. Имеем:

$$\Delta^n F(z)=\Delta^n\left(1+\frac{s}{1!}z+\frac{s^2}{2!}z^2+\ldots+\frac{s^k}{k!}z^k+\ldots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\Delta^n z^k.$$

222. Достаточно доказать 1, 2 для $F(z)=(z-w)^{-1}$; что касается остальных рациональных функций, то сначала дифференцируем по w и разлагаем на простейшие дроби, затем применяем **221**. Формулы 1, 2 справедливы для $F(z)=e^{sz}$, когда s вещественно и отрицательно. [Решение **220**.] Отсюда, умножая на $e^{-sw}ds$ и интегрируя от $s=-\infty$ до $s=0$, получаем формулы 1, 2 для $F(z)=(z-w)^{-1}$. Область применимости этих формул удобнее определить следующим образом: так как

$$\Delta^n (z-w)^{-1} = \frac{(-1)^n n!}{(z-w)(z-w+1)\dots(z-w+n)},$$

то нужно доказать, что

$$1) \qquad \frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z-1)\dots(z-n)}{w(w-1)\dots(w-n-1)},$$

$$2) \qquad -\frac{1}{(z-w)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(z-w)(z-w+1)\dots(z-w+n+1)}.$$

Формула 2) получается из 1) посредством замены w и z соответственно на $w-z-1$ и -1. Формула 1) получается после предельного перехода из тождества

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w(w-1)} + \frac{z(z-1)}{w(w-1)(w-2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{w(w-1)(w-2)\dots(w-n)} + \frac{z}{w}\frac{z-1}{w-1}\dots\frac{z-n}{w-n}\frac{1}{w-z},$$

которое нетрудно проверить методом математической индукции. Предполагая, что w и z отличны друг от друга и от 0, 1, 2, 3, ..., получаем для остаточного члена соотношение [см. II 31]

$$\frac{(-z)(-z+1)\dots(-z+n)}{n^{-z}n!} \frac{n^{-w}n!}{-w(-w+1)\dots(-w+n)} \frac{n^{w-z}}{w-z} \sim \frac{\Gamma(-w)}{\Gamma(-z)} \frac{n^{w-z}}{w-z}.$$

Формулы 3 и 4 для дробных функций $F(z)$ не выполняются ни в какой области. Действительно, в противном случае частичные суммы n-го, соответственно $2n$-го, порядков должны были бы согласно 255 и 254 равномерно сходиться в *каждой* конечной области, т. е. $F(z)$ должна была бы быть регулярной всюду, что противоречит предположению.

223. Указанное тождество надлежит понимать чисто формально; оно объединяет в одном соотношении бесконечное множество уравнений, определяющих величины $\Delta^n a_k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

224. Так как в разложении для $\frac{t}{1+t}$ нет свободного члена, то коэффициент при t^n в разложении для $\frac{1}{1+t} F\left(\frac{t}{1+t}\right)$ зависит только от $a_0, a_1, \dots, a_n$. Мы можем, таким образом, ограничиться случаем, когда $F(z)$ — полином. Но каждый полином может быть представлен в виде линейной комбинации степеней $(1-z)^m$ ($m=0, 1, 2, \dots$), а оператор Δ^n линеен, т. е. если a_k и b_k — две числовые последовательности и c_1 и c_2 — постоянные числа, то

$$\Delta^n (c_1 a_k + c_2 b_k) = c_1 \Delta^n a_k + c_2 \Delta^n b_k.$$

Поэтому достаточно доказать утверждение для функции

$$F(z)=(1-z)^m \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Но тогда [223] $\Delta^n a_0$ равно коэффициенту при z^n в разложении произведения $(1-z)^n(1-z)^m=(1-z)^{n+m}$, т. е. равно $(-1)^n\binom{n+m}{n}$. Имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+m}{n}t^n=\frac{1}{(1+t)^{m+1}}=\frac{1}{1+t}F\left(\frac{t}{1+t}\right).$$

225. Достаточно доказать утверждение для $F(z)=(1-z)^m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ [решение 224]. В этом случае [223] $\Delta^{2n}a_{-n}$ равно коэффициенту при z^n в разложении выражения

$$(1-z)^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kz^k=(1-z)^{2n}\frac{F(z)+F(z^{-1})}{2}=(1-z)^{2n+m}\frac{1+(-1)^mz^{-m}}{2},$$

т. е равно $(-1)^n\binom{2n+m}{n}$. [Решение 218.]

226. Полагаем $F(z)=(1-z)^m-1$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ [решения 224, 225]. Тогда [223] $\Delta^{2n}a_{-n+1}-\Delta^{2n}a_{-n-1}$ будет равно коэффициенту при z^n в разложении выражения

$$(1-z)^{2n}(z^{-1}-z)\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kz^k=(1-z)^{2n}(z^{-1}-z)\frac{F(z)-F(z^{-1})}{2}=$$

$$=(1-z)^{2n+m}(z^{-1}-z)\frac{1+(-1)^{m+1}z^{-m}}{2},$$

т. е. равно

$$(-1)^n\left\{\binom{2n+m+1}{n}-\binom{2n+m+1}{n+1}\right\}=(-1)^{n+1}\frac{m}{n+1}\binom{2n+m+1}{n}.$$

Полагаем в решении 213 $\beta=2$, $\alpha=m$, $w=-t$.

227. Пусть $\alpha=z$, $\beta=1-z$. Тогда для всех n

$$n^2+n+z(1-z)=(n+\alpha)(n+\beta),$$

откуда

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)e^{-\frac{\beta}{n}}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\right\}^{-1}.$$

Замечая, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\Gamma(x)^{-1}e^{-Cx}x^{-1},$$

где C — Эйлерова постоянная, получаем следующий результат:

$$\Gamma(\alpha)^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}e^{-C}(\alpha\beta)^{-1}e^{C}=\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}\frac{1}{z(1-z)}=\frac{\sin\pi z}{\pi z(1-z)}.$$

228. [I. Schur.] Выполняем перемножение в бесконечном произведении, приведенном в решении **227**.

229. Полагая в формуле (L) (стр. 153)

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-z},\quad f(z)=\sin\pi z,\quad w=z(1-z),$$

находим:

$$\sin\pi z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n!}w^n,\quad A_n=\left[\frac{d^{n-1}(1-x)^{-n}\pi\cos\pi x}{dx^{n-1}}\right]_{x=0}\qquad[228].$$

230. Пусть $f(re^{i\vartheta})=U(r,\vartheta)+iV(r,\vartheta)$, $U(r,\vartheta)$, $V(r,\vartheta)$ вещественны, $a_n=b_n+ic_n$, b_n, c_n вещественны. Из разложений

$$U(r,\vartheta)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(b_n\cos n\vartheta-c_n\sin n\vartheta),$$

$$V(r,\vartheta)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(c_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta),$$

равномерно сходящихся при $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$, получаем [117]:

$$a_n=b_n+ic_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}U(r,\vartheta)e^{-in\vartheta}d\vartheta=$$

$$=\frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}V(r,\vartheta)e^{-in\vartheta}d\vartheta\qquad(n=1,2,3,\ldots).$$

231. Согласно решению 230

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+ic_n)z^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(r,\vartheta)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ze^{-i\vartheta}}{r}\right)^n\right]d\vartheta.$$

232. 1. Частный случай: $f(z)$ не имеет нулей в круге $|z|\leqslant r$. Применяем **231** не к $f(z)$, а к регулярной в круге $|z|\leqslant r$ функции $\ln f(z)$.

2. Частный случай: $f(z)=\frac{(z-c)r}{r^2-\bar{c}z}$, $|c|<r$. Так как $\ln|f(re^{i\vartheta})|=0$ [5], то интеграл в правой части обращается в нуль.

Но каждая функция, регулярная в круге $|z|\leqslant r$ и отличная от нуля на его границе, может быть составлена посредством умножения из функций вида 1 и 2. Условие, что $f(z)\neq 0$ на границе, можно теперь также отбросить, так как обе стороны непрерывно зависят от r. Другое решение получаем из **176** по образцу решения 56.

233. Пусть $0<\alpha<2\pi$ и $Re^{i\vartheta}$, $0<\vartheta<\alpha$ — одна из точек рассматриваемой дуги. $U(r, \vartheta)=0$ для $0<\vartheta<\alpha$. В обозначениях задачи **231** получаем после двукратного предельного перехода, предполагая, что $f(0)$ вещественно:

$$\lim_{r\to R-0} f(re^{i\vartheta}) = f(Re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} U(R, \Theta)\frac{1+e^{i(\vartheta-\Theta)}}{1-e^{i(\vartheta-\Theta)}}\,d\Theta,$$

$$\Im f(Re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} U(R, \Theta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\Theta}{2}\,d\Theta,$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\Im f(Re^{i\vartheta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} U(R, \Theta)\left(\sin\frac{\vartheta-\Theta}{2}\right)^{-2} d\Theta \leqslant 0.$$

234. В обозначениях решения 230

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U(r, \vartheta)]^2\,d\vartheta = b_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}(b_n^2+c_n^2),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[V(r, \vartheta)]^2\,d\vartheta = c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}(b_n^2+c_n^2).$$

235. [См. C. Carathéodory, Rend. Palermo, т. 32, стр. 193—217, 1911.] В обозначениях решения **230** $R=1$, $a_0=\frac{1}{2}$ и

$$a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} U(r, \vartheta)\,e^{-in\vartheta}\,d\vartheta, \qquad |a_n|\leqslant\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} U(r, \vartheta)\,d\vartheta=\frac{1}{r^n}$$

$$(0<r<1; \quad n=1, 2, 3, \ldots).$$

Берем $r\to 1$. Пример:

$$f(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2}+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

236. Функция

$$\frac{1}{2}\,\frac{A-f(Rz)+i\Im a_0}{A-\Re a_0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nR^n}{A-\Re a_0}z^n$$

удовлетворяет предположениям задачи **235**. Тем самым

$$|a_n|\leqslant\frac{2(A-\Re a_0)}{R^n},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,r^n\leqslant 2(A-\Re a_0)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

В примере граница достигается.

237. Достаточно доказать первое равенство (второе получается заменой z на $\frac{1}{z}$). Функция $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ остается ограниченной для $|z| \geqslant 1$; пусть, скажем, $\left|\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n\right| < M$. Обозначим через $A^*(r)$ максимум вещественной части целой функции $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на окружности $|z| = r$. Тогда при $r > 1$ [решение 236]

$$A^*(r) \geqslant \Re a_0 + \frac{1}{2}|a_n| r^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Кроме того, $A(r) \geqslant A^*(r) - M$, значит,

$$A(r) \geqslant \Re a_0 - M + \frac{1}{2}|a_n| r^n.$$

Если a_n отлично от нуля, то заключаем отсюда, что

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r} \geqslant n.$$

Но существуют сколь угодно большие n, для которых $a_n \neq 0$.

238. [E. Landau, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 11, стр. 32—34, 1907; см. F. Schottky, J. für Math., т. 117, стр. 225—253, 1897.] Достаточно доказать только неравенство $|\Re a_1| R \leqslant \frac{2}{\pi} \Delta(f)$. Действительно, $\Delta(f)$ будет служить наибольшим колебанием вещественной части функции $f(e^{i\alpha} z)$ при всех вещественных постоянных значениях α, а из справедливости неравенства $|\Re e^{i\alpha} a_1| R \leqslant \frac{2}{\pi} \Delta(f)$ при любом α вытекает, что также $|a_1| R \leqslant \frac{2}{\pi} \Delta(f)$.

Пусть теперь A — арифметическое среднее верхней и нижней граней $\Re f(z)$ в круге $|z| < R$. Тогда в этом круге

$$|\Re f(z) - A| \leqslant \frac{1}{2} \Delta(f).$$

Далее [230],

$$\pi r a_1 = \int_0^{2\pi} [\Re f(re^{i\vartheta})] e^{-i\vartheta}\, d\vartheta \qquad (0 < r < R),$$

следовательно,

$$\pi r \Re a_1 = \int_0^{2\pi} [\Re f(re^{i\vartheta}) - A] \cos\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\pi r |\Re a_1| \leqslant \frac{\Delta(f)}{2} \int_0^{2\pi} |\cos\vartheta|\, d\vartheta = 2\Delta(f).$$

Затем берем $r \to R$. При $R=1$,

$$f(z)=\frac{1}{2i}\ln\frac{1-z}{1+z}=iz+\frac{i}{3}z^3+\frac{i}{5}z^5+\ldots,$$

имеем:

$$\Delta(f)=\frac{\pi}{2}, \quad |a_1|=1.$$

Теорема допускает следующую геометрическую формулировку. Пусть круг конформно отображается на некоторую область (не обязательно однолистно). Тогда ширина этой области в любом направлении будет не меньше, чем увеличенное в $\frac{\pi}{2}$ раз произведение радиуса круга на линейное искажение в его центре. В указанном частном случае областью, на которую отображается круг, служит полоса $-\frac{\pi}{4}<\Re f(z)<\frac{\pi}{4}$.

239. [E. Landau, O. Toeplitz, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 11, стр. 302—307, 1907.] Пусть $D^*(f)$ — верхняя грань модуля $|f(z)-f(-z)|$ в круге $|z|<R$. Тогда $D^*(f)\leqslant D(f)$. Пусть $0<r<R$. Из формулы

$$4\pi r a_1=\int_0^{2\pi}[f(re^{i\vartheta})-f(-re^{i\vartheta})]e^{-i\vartheta}\,d\vartheta$$

заключаем, что $4\pi r|a_1|\leqslant D^*(f)\cdot 2\pi\leqslant D(f)\cdot 2\pi$. Теперь берем $r\to R$. Если $f(z)$ линейна, $f(z)=a_0+a_1z$, то $D(f)=2|a_1|R$. Рассматриваемой теореме можно дать следующую геометрическую формулировку. Пусть круг конформно отображается на некоторую область (не обязательно однолистно). Тогда максимальное расстояние между граничными точками этой области (ее диаметр) будет не меньше, чем произведение диаметра круга на линейное искажение в его центре. В указанном частном случае образом служит открытый круг.

240. [См. E. Landau, Math. Zeitschr., т. 20, стр. 99—100, 1924.] Дифференцируя формулу 232 и полагая $z=0$, получаем [117]:

$$-\frac{f'(0)}{f(0)}=\sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{1}{c_\mu}-\frac{\bar c_\mu}{r^2}\right)+\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}(\ln M-\ln|f(re^{i\vartheta})|)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta,$$

$$-\Re\frac{f'(0)}{f(0)}\leqslant\sum_{\mu=1}^{m}\Re\left(\frac{1}{c_\mu}-\frac{\bar c_\mu}{r^2}\right)+\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}(\ln M-\ln|f(re^{i\vartheta})|)\,d\vartheta=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{m}\Re\left(\frac{1}{c_\mu}-\frac{\bar c_\mu}{r^2}-\frac{2}{r}\ln\frac{r}{|c_\mu|}\right)+\frac{2}{r}\ln\frac{M}{|f(0)|} \qquad [120].$$

Согласно предположению 2 $\Re c_\mu < 0$, значит,

$$\Re\left(\frac{1}{c_\mu} - \frac{\bar c_\mu}{r^2}\right) = \frac{r^2 - |c_\mu|^2}{r^2}\Re\frac{1}{c_\mu} < 0.$$

Этим неравенством пользуемся при $\mu > l$. При $\mu \leqslant l$ получаем:

$$\Re\left(-\frac{\bar c_\mu}{r} - 2\ln\frac{r}{|c_\mu|}\right) \leqslant \frac{|c_\mu|}{r} + 2\ln\frac{|c_\mu|}{r} < 0.$$

Действительно, при $0 < x \leqslant \frac{2}{3}$ имеем $x + 2\ln x < 0$, так как левая часть возрастает с возрастанием x и $e^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^2 < 1$, т. е. $8e < 27$.

241. Интересующий нас ряд можно представить в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{c_1}{1 - z_1 z} + \frac{c_2}{1 - z_2 z} + \ldots + \frac{c_k}{1 - z_k z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

где $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_k| = 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} < 1$. Отсюда

$$a_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \ldots + c_k z_k^n + b_n, \qquad |b_n| < B.$$

242. Пусть радиус сходимости равен единице и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k}{(z_0 - z)^{k+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

$$c_0 + c_1 z_0 + \ldots + c_k z_0^k \neq 0, \quad c_k \neq 0, \quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} < 1.$$

Отсюда при $n > k$ получаем:

$$a_n = \binom{n}{k} c_k \bar z_0^{n+1} + \binom{n+1}{k} c_{k-1} \bar z_0^{n+2} + \binom{n+2}{k} c_{k-2} \bar z_0^{n+3} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n+k}{k} c_0 \bar z_0^{n+k+1} + b_n = \binom{n}{k} \bar z_0^{n+k+1} \times$$
$$\times\left(\sum_{\mu=0}^{k} \frac{(n+k-\mu)(n+k-\mu-1)\ldots(n-\mu+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} c_\mu z_0^\mu + \frac{b_n}{\binom{n}{k}} z_0^{n+k+1}\right).$$

При $n \to \infty$ выражение в скобках сходится к

$$c_0 + c_1 z_0 + \ldots + c_k z_0^k \neq 0.$$

См. также I **178.**

243. G. Pólya, J. für Math., т. 151, стр. 24—25, 1921.] Подходящим выбором полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{q-2} z^{q-2} + z^{q-1}$ можно добиться того, чтобы степенной ряд $P(z)\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

удовлетворял условиям задачи **242**. Из $\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} \to \rho$ вытекает $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{1}{\rho}$ [I 68]. Далее,

$$|b_n| = |c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{q-2} a_{n-q+2} + a_{n-q+1}| \leqslant$$
$$\leqslant A_n (|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_{q-2}| + 1).$$

244. Пусть k — искомое число. Полагаем $a_n = \alpha_n + b_n$, где

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = b < \frac{1}{\rho},$$

а $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ — рациональная функция, имеющая в точности k полюсов на границе круга сходимости $|z| = \rho$. Пусть ε столь мало, что $b + \varepsilon < \frac{1}{\rho} - \varepsilon$. Согласно **243** при достаточно больших n

$$\operatorname{Max}(|\alpha_n|, |\alpha_{n-1}|, \ldots, |\alpha_{n-k+1}|) > \operatorname{Max}\left[\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^n, \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^{n-k+1}\right],$$

т. е. по крайней мере для одного $\bar{n}$, $n \geqslant \bar{n} \geqslant n - k + 1$, будет:

$$|\alpha_{\bar{n}}| > \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)^{\bar{n}} > |b_{\bar{n}}|.$$

Следовательно, $a_{\bar{n}} = \alpha_{\bar{n}} + b_{\bar{n}} \neq 0$. Отсюда вытекает, что $\nu_n \geqslant \frac{n}{k} - c$, где c не зависит от n.

Теорема справедлива и в том случае, когда при подсчете полюсов не принимается во внимание их кратность; однако для ее доказательства в этом случае требуются другие средства.

245. [J. König, Math. Ann., т. 9, стр. 530—540, 1876.] Если полюсы k-го порядка, то $a_n = A n^{k-1} \rho^{-n} (\sin(n\alpha + \delta) + \varepsilon_n)$, A, α, δ вещественны, $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ [решение **242**]. Пусть $A > 0$, $0 < 2\eta < \alpha < \pi - 2\eta$ и $|\varepsilon_n| < \sin \eta$ для всех $n > N$. Если расстояние между $n\alpha + \delta$ и ближайшим целым кратным π превышает η, то a_n имеет тот же знак, что и $\sin(n\alpha + \delta)$. Если $n > N$ и a_n по знаку не совпадает с $\sin(n\alpha + \delta)$, то тогда можно с уверенностью утверждать, что a_{n-1} и a_{n+1} имеют те же знаки, что и

$$\sin((n-1)\alpha + \delta) \text{ и } \sin((n+1)\alpha + \delta),$$

и притом знаки a_{n-1} и a_{n+1} противоположны, ибо из

$$-\eta < n\alpha + \delta - m\pi < \eta$$

вытекает

$$-\pi + \eta < (n-1)\alpha + \delta - m\pi < -\eta,$$
$$\eta < (n+1)\alpha + \delta - m\pi < \pi - \eta.$$

Поэтому число перемен знака между

$$a_{n-1}, \qquad a_n, \qquad a_{n+1}$$

будет то же, что и между

$$\sin((n-1)\alpha+\delta), \quad \sin(n\alpha+\delta), \quad \sin((n+1)\alpha+\delta).$$

Теперь применяем VIII 14.

246. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости 1. Если бы ряд сходился в какой-нибудь точке на границе круга сходимости, то мы имели бы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, следовательно [I 85],

$$\lim_{z\to 1-0} (1-z)(a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0,$$

и, значит, точка $z=1$ не могла бы быть полюсом.

247. [M. Fekete, C. R., т. 150, стр. 1033—1036, 1910. G. H. Hardy, Proc. Lond. M. S. (2), т. 8, стр. 277—294, 1910.] Пусть

$$f(e^{-x}) = c_{-h}x^{-h} + c_{-h+1}x^{-h+1} + \ldots \qquad (h \geqslant 0,\ c_{-h} \neq 0)$$

и $0 < \rho < 1$, причем ρ взято достаточно малым, так, чтобы этот ряд абсолютно и равномерно сходился для $|x| \leqslant \rho$. Тогда имеем, сначала для $\Re s > h$:

$$\int_0^{\rho} x^{s-1} f(e^{-x})\,dx = \sum_{n=-h}^{\infty} c_n \frac{\rho^{s+n}}{s+n}.$$

Умножение на $\Gamma(s)^{-1}$ уничтожает здесь все полюсы, могущие иметься в точках $s=h,\ h-1,\ \ldots,\ 1$, когда $h \geqslant 1$. В настоящем случае в точке $s=h$ полюс во всяком случае налицо, так как $c_{-h} \neq 0$.

248. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{n}}$ $(\alpha > 0)$ сходится. Интеграл $F(u)$ сходится, так как $\Phi(a+it)$ ограничено для всех t. Интегрируя почленно, получаем [II 115]:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{s(\sqrt{n}-u)} + e^{-s(\sqrt{n}+u)}}{s^2}\,ds.$$

В силу 155 при $\sqrt{m-1} \leqslant u \leqslant \sqrt{m}$ имеем:

$$F(u) = a_m(\sqrt{m}-u) + a_{m+1}(\sqrt{m+1}-u) + a_{m+2}(\sqrt{m+2}-u) + \ldots,$$

т. е. $F(u)$ является линейной функцией в каждом из названных интервалов и притом в интервале $\sqrt{m-1} < u < \sqrt{m}$ имеет производную, равную

$$-a_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \ldots$$

Если $\Phi(s)$ тождественно равно нулю, то $F(u) \equiv 0$ при $u > 0$ и, следовательно, $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = 0$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

249. $\Phi^{(2k+1)}(0) = 0$; $\Phi^{(2k)}(0)$ также равно нулю, так как

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$$

и

$$\lim_{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k;$$

следовательно, $\Phi(s) \equiv 0$.

250. Указанная в задаче функция $f(z)$ обладает следующими свойствами:

1. Она регулярна в круге $|z| < 1$, так как при $\Re z \leqslant 1$ интеграл абсолютно сходится. Имеем:

$$a_n = \int_0^{\infty} e^{-(x + x^{\mu}\cos\mu\pi)} \sin(x^{\mu}\sin\mu\pi) \frac{x^n}{n!}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. a_n не может быть равно нулю для $n = 0, 1, 2, \ldots$, ибо

$$\left| e^{-(x + x^{\mu}\cos\mu\pi)} \sin(x^{\mu}\sin\mu\pi) \right| < e^{-x}$$

[решение 153].

3. При $|z| < 1$ имеем:

$$f^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-x^{\mu}\cos\mu\pi} \sin(x^{\mu}\sin\mu\pi)\, e^{-x(1-z)} x^n\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В полуплоскости $\Re z \leqslant 1$ этот интеграл абсолютно и равномерно сходится. Когда z стремится к единице вдоль вещественной оси, получаем:

$$\lim_{z \to 1} f^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-x^{\mu}\cos\mu\pi} \sin(x^{\mu}\sin\mu\pi)\, x^n\, dx = 0 \qquad [153].$$

4. $$|a_n| < \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(x + x^{\mu}\cos\mu\pi)} x^n\, dx <$$

$$< \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \operatorname*{Max}_{x \geqslant 0} \left(e^{-(x + x^{\mu}\cos\mu\pi)} x^{n+2}\right) \int_1^{\infty} x^{-2}\, dx,$$

следовательно [II 222],

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\ln|a_n|}{n^{\mu}} \leqslant -\cos\mu\pi < 0.$$

Применив вместо $e^{-x^{\mu}\cos\mu\pi}\sin(x^{\mu}\sin\mu\pi)$ указанную в решении **153** функцию Гамбургера $\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{x}-\ln x}{(\ln x)^2+\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x}\ln x+\pi}{(\ln x)^2+\pi^2}\right)$, убеждаемся аналогичным образом, что в 249 $\frac{\ln|a_n|}{\sqrt{n}}$ нельзя заменить даже на $(\ln n)^2\frac{\ln|a_n|}{\sqrt{n}}$.

251. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 337, 1917. Решение — H. Prüfer, K. Scholl, там же, серия 3, т. 28, стр. 177, 1920.] Пусть

$$g(z)=c_0+\frac{c_1}{1!}(z-a)+\frac{c_2}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{c_n}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

и ряд, приведенный в задаче, сходится в точке $z=a$, т. е. $c_0+c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots$ сходится, и, значит, $|c_{m+k}+c_{m+k+1}+\ldots+c_{m+k+n}|<\varepsilon$ для достаточно больших m и всех k, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ Тогда

$$|g^{(m)}(z)+g^{(m+1)}(z)+\ldots+g^{(m+n)}(z)|=$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(c_{m+k}+c_{m+1+k}+\ldots+c_{m+n+k})\frac{(z-a)^k}{k!}\right|<\varepsilon e^{|z-a|}.$$

252. Пусть

$$g(z)=a_0+\frac{a_1}{1!}(z-z_0)+\frac{a_2}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

и последовательность $|a_1|$, $\sqrt{|a_2|}$, ..., $\sqrt[n]{|a_n|}$, ... ограничена, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A$. Тогда для каждого ε $(\varepsilon>0)$ можно указать такое N, что при $n>N$ будет $|a_n|<(A+\varepsilon)^n$; следовательно,

$$g^{(n)}(z)=\left|a_n+\frac{a_{n+1}}{1!}(z-z_0)+\frac{a_{n+2}}{2!}(z-z_0)^2+\ldots\right|<$$
$$<(A+\varepsilon)^n+\frac{(A+\varepsilon)^{n+1}}{1!}|z-z_0|+\frac{(A+\varepsilon)^{n+2}}{2!}|z-z_0|^2+\ldots=$$
$$=(A+\varepsilon)^n e^{(A+\varepsilon)|z-z_0|}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|g^{(n)}(z)|}\leqslant A=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|g^{(n)}(z_0)|},$$

и, значит, ни в одной точке z интересующий нас верхний предел не может превосходить верхнего предела в какой бы то ни было другой точке z_0.

253. [J. Bendixson, Acta Math., т. 9, стр. 1, 1887.] Так же, как в 254, с помощью соотношения

$$Q_{n+1}(z)-Q_n(z)=\gamma_n\prod_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)\sim\gamma_n\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right).$$

254. [См. N. E. Nörlund, Differenzenrechung, стр. 210, Berlin, Julius Springer, 1924.] Имеем:

$$Q_{2n+2}(z) - Q_{2n}(z) = (\gamma_n z + \delta_n) P_n(z),$$

где $P_n(z)$ имеет то же значение, что и в 13, а γ_n и δ_n — постоянные. Пусть a и b — две точки сходимости. Тогда ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$, где положено $(\gamma_n a + \delta_n) P_n(a) = A_n$, $(\gamma_n b + \delta_n) P_n(b) = B_n$, сходятся. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_n(z)}{P_n(\alpha)} - \frac{P_{n-1}(z)}{P_{n-1}(\alpha)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_{n-1}(z)}{P_{n-1}(\alpha)} \frac{z^2-\alpha^2}{\alpha^2-n^2} \right|,$$

где $\alpha = a$ или $\alpha = b$ и z — любая конечная точка, равномерно сходится $\left(P_n(z) \to \frac{\sin \pi z}{\pi}\right)$, то то же имеет место и для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(z)}{P_n(a)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(z)}{P_n(b)}$$

[Knopp, стр. 349]. Но

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n z + \delta_n) P_n(z) = \frac{z-b}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(z)}{P_n(a)} + \frac{z-a}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(z)}{P_n(b)}.$$

255. Согласно VI 76 имеем:

$$Q_n(z) = c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z (z-2)}{2!} + \ldots + \frac{c_n z (z-n)^{n-1}}{n!}.$$

Пусть a $(a \neq 0)$ — точка сходимости, $\frac{c_n a (a-n)^{n-1}}{n!} = a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. При $n > |z|$, $n > |a|$ имеем разложение

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-n+1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} = e^{a-z}\left(1 + \frac{A'}{n} + \frac{A''}{n^2} + \ldots\right),$$

где A', A'', ... зависят от a, z, но не зависят от n. Ряд с общим членом

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-n+1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{a}{n+1}\right)^{-n} \left(1 - \frac{z}{n+1}\right)^{n} = \frac{e^{a-z}A'}{n(n+1)} + \ldots$$

абсолютно сходится и поэтому сходится также [Knopp, стр. 349] ряд

$$c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z}{a} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-n+1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}.$$

256. См. 285. Имеет место более общая теорема: если функции $f_n(z)$ регулярны, отличны от нуля и по модулю меньше единицы в области $\mathfrak{G}$ и если в некоторой точке a этой области $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)=0$, то всюду в области $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=0$, притом равномерно во всякой внутренней замкнутой ограниченной области. Доказательство проводится путем последовательного «черепичного» покрытия всей области $\mathfrak{G}$ кругами.

257. [A. Harnack, Math. Ann., т. 35, стр. 23, 1890.] Пусть $v_n(x, y)$ — сопряженная с $u_n(x, y)$ функция и

$$g_n(z)=e^{-u_n(x, y)-iv_n(x, y)}, \qquad z=x+iy.$$

Если бы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$ расходился хотя бы в одной точке $z_0=x_0+iy_0$ области $\mathfrak{G}$, то, полагая $f_n(z)=g_0(z)g_1(z)\ldots g_n(z)$, мы имели бы $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0)=0$, откуда [решение 256] $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=0$ во всей области $\mathfrak{G}$, что представляет противоречие. (Более полно используя III 285, убеждаемся в том, что сходимость равномерна сначала в замкнутом круге с центром z_0, содержащемся в $\mathfrak{G}$; затем доводим доказательство до конца посредством «черепичного» перекрытия области кругами.)

258. Положим $f_n(z)=u_n(x, y)+iv_n(x, y)$. Тогда

$$v_n(x, y)=v_n(x_0, y_0)+\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}\,dy-\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y}\,dx,$$

где интегрирование производится вдоль любой кривой, соединяющей произвольно выбранную фиксированную точку x_0, y_0 с переменной точкой x, y и лежащей целиком в области $\mathfrak{G}$. При $n\to\infty$ интеграл равномерно сходится в каждой замкнутой ограниченной части области $\mathfrak{G}$, ибо этим свойством обладают последовательности производных $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ [см. 230]. Таким образом, последовательность $v_n(x, y)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $v_n(x_0, y_0)$, и притом тогда уже равномерно во всякой внутренней замкнутой ограниченной области.

259. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — любые числа. Из тождества

$$a_0(1-a_1)+a_0a_1(1-a_2)+a_0a_1a_2(1-a_3)+\ldots$$
$$\ldots+a_0a_1\ldots a_{n-1}(1-a_n)=a_0-a_0a_1a_2\ldots a_n$$

заключаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0a_1a_2\ldots a_n(1-a_{n+1})=a_0-\lim_{n\to\infty} a_0a_1a_2\ldots a_n,$$

в предположении, что последний предел существует. Полагаем:

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{1}{1+z^{2^{n-1}}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad [\text{I } 14].$$

260. Степенной ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!} w^n$$

имеет радиус сходимости e^{-1} [214]; поэтому интересующий нас ряд сходится в каждой области плоскости x, где $|xe^{-x}| < e^{-1}$, и представляет там аналитическую функцию. Каждый из интервалов $0 \leqslant x < 1$ и $1 < x < +\infty$ заключен в области $\mathfrak{G}_1$, соответственно $\mathfrak{G}_2$ указанного типа, однако того же нельзя утверждать насчет их объединения. Согласно **210** сумма ряда для достаточно малых x равна $e^{\alpha x}$ и поэтому вообще равна $e^{\alpha x}$ для всех x в $\mathfrak{G}_1$. Пусть теперь $1 < x < +\infty$ и x' определяется уравнением $xe^{-x} = x'e^{-x'}$, $0 < x' < 1$. Заданный ряд остается неизменным при замене x на x'. Поэтому суммой его служит $e^{\alpha x'} \neq e^{\alpha x}$. Ряд сходится также для $x = 1$ [220, 3] и согласно теореме Абеля [I 86] имеет свой суммой e^{α}.

261.
$$f_n(z) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - \frac{n}{\nu}\right) \nu^z}{n \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{z-1}} + 1.$$

При $\Re z > 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - \frac{n}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{n}\right)^z \frac{1}{n}}{\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{z-1} \frac{1}{n}} + 1 =$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(\left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right) x^z\, dx}{\int_0^1 x^{z-1}\, dx} + 1 = z(z+1)^{-1}\zeta(z+1) \qquad [\text{II } 45].$$

При $\Re z < 0$, $\Re z = x$ имеем:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - \frac{n}{\nu}\right)\nu^z\right| < \sum_{\nu=1}^{n} \nu^x < \begin{cases} An^{x+1}, & \text{если } x \neq -1, \\ A \ln n, & \text{если } x = -1, \end{cases}$$

где A не зависит от n. Далее, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{z-1}=1^{z-1}+2^{z-1}+\ldots+n^{z-1}+\ldots=$$
$$=\zeta(1-z)\neq 0 \quad [\text{VIII } 48].$$

Таким образом, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=1.$$

262. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 337, 1917. Решение — H. Prüfer, там же, серия 3, т. 28, стр. 179—180, 1920.] Положим:

$$\frac{z-1}{z+1}=\zeta, \qquad \frac{\varphi(z)-1}{\varphi(z)+1}=\psi(\zeta).$$

Тогда

$$\frac{\varphi[\varphi(z)]-1}{\varphi[\varphi(z)]+1}=\psi[\psi(\zeta)], \quad \frac{\varphi\{\varphi[\varphi(z)]\}-1}{\varphi\{\varphi[\varphi(z)]\}+1}=\psi\{\psi[\psi(\zeta)]\}, \ldots,$$
$$\psi(\zeta)=\zeta\frac{\zeta+\alpha-\beta}{1+(\alpha-\beta)\zeta},$$

и утверждение состоит в том, что последовательность

$$\psi(\zeta), \quad \psi[\psi(\zeta)], \quad \psi\{\psi[\psi(\zeta)]\}, \ldots$$

стремится к нулю для $|\zeta|<1$, стремится к бесконечности для $|\zeta|>1$ и стремится к единице или расходится, когда $|\zeta|=1$.

Пусть $|\zeta|=r$, $r<1$; обозначим через $M(r)$ максимум модуля

$$\left|\frac{\zeta+\alpha-\beta}{1+(\alpha-\beta)\zeta}\right|$$

в круге $|\zeta|\leqslant r$. Имеем $M(r)<1$ [5] и $M(r)$ монотонно возрастает вместе с r [267]. Из определения $\psi(\zeta)$ следует:

$$|\psi(\zeta)|\leqslant rM(r), \quad |\psi[\psi(\zeta)]|\leqslant|\psi(\zeta)|\,M[rM(r)]\leqslant r[M(r)]^2,$$
$$|\psi\{\psi[\psi(\zeta)]\}|\leqslant|\psi[\psi(\zeta)]|\,M\{r[M(r)]^2\}\leqslant r[M(r)]^3$$

и т. д. Аналогично рассуждаем, когда $|\zeta|>1$.

Пусть, наконец, $|\zeta|=1$. Тогда

$$|\psi(\zeta)|=|\psi[\psi(\zeta)]|=|\psi\{\psi[\psi(\zeta)]\}|=\ldots=1.$$

Если рассматриваемая последовательность стремится к некоторому пределу ζ_0, $|\zeta_0|=1$, то тогда

$$\zeta_0=\zeta_0\frac{\zeta_0+\alpha-\beta}{1+(\alpha-\beta)\zeta_0}, \quad \text{т. е.} \quad \zeta_0=1.$$

263. Положим $\frac{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}{n!}=P_n(z)$. Тогда на положительной мнимой оси $z=iy$, $y>0$,

$$|\sqrt{iy}P_n(iy)|^2=y\left(1+\frac{y^2}{1}\right)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)\dots\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)<\frac{\sin i\pi y}{i\pi}=\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2\pi}.$$

При фиксированном z имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n P_n(z)\,n^z=\frac{1}{\Gamma(1-z)}.$$

Тем самым последовательность является ограниченной, например в полукруге $\Re z\geqslant 0$, $|z|\leqslant 1$. В серповидной области

$$|z-n|\geqslant n,\quad |z-n-1|\leqslant n+1$$

$P_n(z)$ по модулю больше чем $P_{n-1}(z)$, $P_{n-2}(z),\dots$, $P_{n+1}(z),\dots$ [12]. На внутренней границе указанной серповидной области $|z-n|=n$, $z=2ne^{i\varphi}\cos\varphi$. В предположении $|z|\geqslant 1$ имеем [по поводу доказательства формулы Стирлинга при принятых здесь условиях см., например, E. Landau, Elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen, стр. 77—79, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1918*)]:

$$|\sqrt{z}P_n(z)|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{z}\,\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)\,\Gamma(n+1)}\right|=\left|\frac{\sqrt{z}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}{(z-n)^{z-n-\frac{1}{2}}e^{-z+n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\right|e^{\psi(z,\,n)}=$$

$$=\left|\left(\frac{z}{z-n}\right)^z\right|\left|\frac{z-n}{n}\right|^{n+\frac{1}{2}}e^{\psi(z,\,n)}=|(2e^{-i\varphi}\cos\varphi)^{e^{i\varphi}}|^r e^{\psi(z,\,n)},$$

где $\psi(z,n)$ остается ограниченной для всех рассматриваемых значений z, n. На внешней границе серповидной области та же оценка имеет место и для $P_{n+1}(z)$, а так как там $|P_n(z)|=|P_{n+1}(z)|$, то и для $P_n(z)$. Если мы проведем из точки $z=0$ луч под углом φ, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, к вещественной оси, то на отрезке этого луча, заключенном в серповидной области, модуль $P_n(z)$ будет возрастать, так как там возрастают все множители $z-1$, $z-2,\dots$, $z-n$, как это явствует хотя бы из геометрических соображений.

264. [См. N. E. Nörlund, l. c. 254, стр. 214.] Рассмотрим замкнутую область, заключенную между двумя лемнискатами:

$$2n^2\cos 2\varphi\leqslant r^2\leqslant 2(n+1)^2\cos 2\varphi.$$

---

*) См. также Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2, § 12, 33 и § 13, 6, Физматгиз, 1963.

Для тех точек внутренней границы этой области, которые лежат вне единичного круга, имеем:

$$\left|z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right|=\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma(z-n)\,[\Gamma(n+1)]^2}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{z+n}{z-n}\right)^z\right|\cdot\left|\frac{z^2-n^2}{n^2}\right|^{n+\frac{1}{2}}e^{\psi(z,\,n)}=\left|\left(\frac{e^{i\varphi}\sqrt{2\cos 2\varphi}+1}{e^{i\varphi}\sqrt{2\cos 2\varphi}-1}\right)^{e^{i\varphi}}\right|^r e^{\psi(z,\,n)}=$$

$$=\left|\left(e^{-i\varphi}\sqrt{2\cos 2\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)^{e^{i\varphi}}\right|^{2r}e^{\psi(z,\,n)},$$

$\psi(z, n)$ ограничено [13, 263].

265. Максимум модуля $\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\frac{n}{|z|}}$ вдоль луча $z=re^{i\varphi}$, φ фиксировано, не зависит от n; полагаем $z=n\zeta$, $\zeta=\rho e^{i\varphi}$. Максимум выражения

$$\frac{1}{|\zeta|}\ln|1+\zeta|=\cos\varphi-\frac{\rho}{2}\cos 2\varphi+\frac{\rho^2}{3}\cos 3\varphi-\ldots$$

находится с помощью дифференцирования по ρ; этот максимум равен $\cos\varphi$ и достигается при $\rho=0$, когда $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. Когда же $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$, то он достигается при условии

$$-\frac{1}{2}\ln(\rho^2+2\rho\cos\varphi+1)+\frac{\rho^2+\rho\cos\varphi}{\rho^2+2\rho\cos\varphi+1}=$$

$$=\Re\left(\ln\frac{1}{\bar\zeta+1}+1-\frac{1}{\bar\zeta+1}\right)=0$$

$(|\bar\zeta+1|>1)$ и равен

$$\frac{1}{|\zeta|}\Re\ln(\bar\zeta+1)=\frac{1}{|\zeta|}\Re\left(1-\frac{1}{\bar\zeta+1}\right).$$

Положим $\frac{1}{\bar\zeta+1}=w$. Тогда w удовлетворяет уравнению $|we^{-w+1}|=$ $=1$. Имеем:

$$|w|<1,\quad \varphi=\arg\frac{1}{\bar\zeta}=\arg\frac{w}{1-w},$$

и интересующий нас максимум равен

$$\left|\frac{w}{1-w}\right|\Re(1-w).$$

Исследование знака производной можно заменить исследованием области 116.

Наличие в **263—265** выпуклых кривых не является случайностью; см. G. Pólya, Math. Ann., т. 89, стр. 179—191, 1923.

266. [135.]

267. [135.]

268. $f(z)=f(\zeta^{-1})$ регулярна внутри круга $|\zeta|\leqslant\frac{1}{R}$ и $M(r)$ является максимумом модуля $f(\zeta^{-1})$ на окружности $|\zeta|=\frac{1}{r}$ [266, 267].

269. $\frac{f(z)}{z^n}$ регулярна в проколотой плоскости $|z|>0$ (включая и $z=\infty$) [268].

270. [С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьк. матем. общ. (2), т. 14*); M. Riesz, Acta Math., т. 40, стр. 337, 1916.] Применяем 268 к $\zeta^{-n}f\left(\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}\right)$ [79]. При $|\zeta|=r$, $r>1$, $r=a+b$ имеем:

$$\left|\frac{f\left(\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}\right)}{\zeta^n}\right|<\operatorname*{Max}_{|\zeta|=1}\left|\frac{f\left(\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}\right)}{\zeta^n}\right|\leqslant M.$$

В пределе при $z\to\infty$ теорема утверждает: максимум модуля полинома n-й степени в интервале $-1\leqslant z\leqslant 1$ по меньшей мере равен модулю его старшего коэффициента, умноженному на 2^{-n}.

271. Мы можем принять, что оси эллипсов E_1 и E_2 совпадают с осями координат, а фокусы их лежат в точках $z=\pm 1$. Если отображение $z=\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2}$ приводит в соответствие с эллипсами E_1, E_2 окружности $|\zeta|=r_1$, $|\zeta|=r_2$, $1<r_1<r_2$, то тогда $r_1=a_1+b_1$, $r_2=a_2+b_2$. Рассуждаем, как в 270, принимая во внимание 268.

Предельный случай, когда эллипс E_1 стягивается в дважды обходимый вещественный отрезок $[-1, 1]$, дает 270. Если фокусы совпадают, т. е. эллипсы приводятся к окружностям, то получаем 269.

272. Мы можем без ограничения общности принять, что $f(0)>0$. Полагая $f(z)=f(\rho e^{i\vartheta})=U(\rho, \vartheta)+iV(\rho, \vartheta)$, имеем:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U(\rho, \vartheta)+iV(\rho, \vartheta)]\,d\vartheta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(\rho, \vartheta)\,d\vartheta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U^2(\rho, \vartheta)+V^2(\rho, \vartheta)]^{\frac{1}{2}}\,d\vartheta.$$

Если здесь имеет место знак равенства, то $V(\rho, \vartheta)=0$ для $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$, и, следовательно, $f(z)\equiv f(0)$ [230].

273. [134.]

---

*) С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. I, Изд. АН СССР, 1952, стр. 146—150.

274. Функция $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ регулярна в круге $|z|<1$. Она регулярна также на окружности $|z|=1$, причем там $|f(z)|=1$, если $\psi(z)\neq 0$. Если z_0 — нуль функции $\psi(z)$, то $\varphi(z)$ также должно иметь своим нулем точку z_0 и притом той же кратности [в противном случае функция $f(z)$ имела бы в точке $z=z_0$ нуль или полюс, что, очевидно, невозможно, так как в сколь угодно близких к z_0 точках окружности $|f(z)|=1$]. Сократим общие множители функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Тогда $f(z)$ будет регулярна и отлична от нуля в круге $|z|\leqslant 1$, причем на окружности $|z|=1$ будет $|f(z)|=1$. Следовательно [138], $f(z)\equiv c$, $|c|=1$. Так как $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ вещественны и положительны, то $c=1$.

275. $|f(z)|$ является вещественной непрерывной функцией в области $\mathfrak{B}$ и, следовательно, достигает в $\mathfrak{B}$ своего максимума. Но этот последний не может приниматься ни в какой внутренней точке [134].

276. [См. E. Lindelöf, Acta Soc. Sc. Fennicae, т. 46, № 4, стр. 6, 1915.] Посредством поворота вокруг точки ζ на угол $\frac{2\pi\nu}{n}$ $\mathfrak{B}$ переходит в некоторую область $\mathfrak{B}_\nu$, и $\mathfrak{R}$ — в точечное множество $\mathfrak{R}_\nu$ ($\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$, $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}_0=\mathfrak{R}$). Точка ζ содержится внутри пересечения (наибольшей общей части) $\mathfrak{D}$ областей $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_{n-1}$. Внутренние точки множества $\mathfrak{D}$, которые можно соединить с ζ непрерывной кривой, целиком лежащей в $\mathfrak{D}$, образуют связное множество $\mathfrak{D}^*$. Граница области $\mathfrak{D}^*$ состоит согласно предположению и построению из точек, принадлежащих множествам $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_{n-1}$. Функция $f(\zeta+(z-\zeta)\,\omega^{-\nu})$ по модулю меньше или равна A на всей границе области $\mathfrak{D}^*$ [275] и меньше или равна a в граничных точках, принадлежащих $\mathfrak{R}_\nu$. Таким образом, модуль функции

$$f(\zeta+(z-\zeta))\,f(\zeta+(z-\zeta)\,\omega^{-1})\ldots f(\zeta+(z-\zeta)\,\omega^{-n+1})$$

не превосходит $a\cdot A^{n-1}$ на всей границе области $\mathfrak{D}^*$ и, следовательно, также [275] и во внутренней точке $z=\zeta$.

277. [См. E. Lindelöf, l. c. 276.] Примем, что $\alpha<\pi$; это не представляет ограничения общности, так как в противном случае мы могли бы вместо $f(z)$ рассмотреть $f(z^\beta)$, где β — надлежащим образом выбранное число, $\beta>0$. Опишем вокруг произвольной точки луча $\arg z=\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$ окружность, касающуюся луча $\arg z=\alpha$. При перемещении центра окружности вдоль луча $\arg z=$ $=\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$ хорда, образованная при пересечении этой окружности с вещественной осью, будет видна из центра под постоянным углом. Применяя 276, где за $\mathfrak{B}$ принята часть круга, лежащая в верхней полуплоскости, а за $\mathfrak{R}$ — хорда, лежащая на вещественной оси, получаем, что $\lim f(z)=0$ вдоль луча $\arg z = \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$. Путем небольшого изменения хода рассуждений обнаруживаем, что $\lim f(z)=0$ равномерно в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)$. Применяем тот же метод доказательства к лучам

$$\arg z = \frac{3}{4}(\alpha-\varepsilon),\ \frac{7}{8}(\alpha-\varepsilon),\ \frac{15}{16}(\alpha-\varepsilon),\ \ldots$$

278. [См. E. Lindelöf, l. c. 276.] Пусть G — верхняя грань модуля $f(z)$ в области $\mathfrak{G}$. Тогда внутри или на границе $\mathfrak{G}$ имеется по крайней мере одна такая точка P, что в части области $\mathfrak{G}$, содержащейся в достаточно малом круге, описанном около P, верхняя грань модуля $f(z)$ равна G.

Если в $\mathfrak{G}$ такой точки нет, то в этой области $|f(z)|<G$. Тогда точка P указанного рода лежит на границе и согласно предположению 3 $G \leqslant M$, т. е. в области $\mathfrak{G}$ $|f(z)|<M$.

Пусть в $\mathfrak{G}$ содержится хотя бы одна точка указанного рода $P=z_0$. Тогда $|f(z_0)|=G$, и так как на достаточно малой окружности, описанной около z_0, выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant G$, то вследствие 134 $f(z) \equiv \text{const}$.

279. [P. Fatou, Acta Math., т. 30, стр. 395, 1906.] Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. При достаточно большом n имеем ($z=re^{i\vartheta}$):

$$\lim_{r \to 1-0} f(z) f(\omega z) f(\omega^2 z) \ldots f(\omega^{n-1} z) = 0,$$

и притом равномерно во всем единичном круге $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. Следовательно, согласно 278 функция

$$f(z) f(\omega z) f(\omega^2 z) \ldots f(\omega^{n-1} z)$$

должна быть тождественно равна нулю. [Теорема непосредственно из 275 не вытекает.]

280. [H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, т. 2, стр. 110—111, Berlin, J. Springer, 1890.] Применяем 278 к функции $\frac{f(z)}{z}$, регулярной в круге $|z|<1$ *).

281. [См. E. Lindelöf, Acta Soc. Sc. Fennicae, т. 35, № 7, 1908. По поводу задач 282—289 см. P. Koebe, Math. Zeitschr., т. 6, стр. 52, 1920. К этой последней статье приложен подробный указатель литературы.] Пусть $\zeta = \psi^{-1}(w)$ — функция, обратная к $w=\psi(\zeta)$. Тогда

$$F(\zeta) = \psi^{-1}\{f[\varphi(\zeta)]\}$$

удовлетворяет условиям теоремы 280. Поэтому при $|\zeta| \leqslant \rho$ имеем $|F(\zeta)| \leqslant \rho$, где знак равенства имеет место только в том случае,

*) Предложение 280 этого отдела общеизвестно под названием «леммы Шварца».

когда $F(\zeta)=e^{i\alpha}\zeta$ с вещественным α. Из этого неравенства видим, что значения $F(\zeta)$ содержатся в круге $|\zeta|\leqslant\rho$ и, следовательно, значения $\psi[F(\zeta)]=f[\varphi(\zeta)]$ — в области $\mathfrak{h}$, причем $z=\varphi(\zeta)$ принимает любые значения из области $\mathfrak{g}$. В экстремальном случае имеем:

$$\psi(e^{i\alpha}\zeta)=f[\varphi(\zeta)],$$

т. е.

$$f(z)=\psi[e^{i\alpha}\varphi^{-1}(z)],$$

где $\zeta=\varphi^{-1}(z)$ — функция, обратная к $z=\varphi(\zeta)$, и α вещественно. Это — наиболее общая функция, взаимно однозначно отображающая $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{H}$ так, что при этом $z=z_0$ переходит в $w=w_0$ [IV 86].

282. [C. Carathéodory, Math. Ann., т. 72, стр. 107, 1912.] Применяем **281** к следующему частному случаю: $\mathfrak{G}$ — круг $|z|<1$, $\mathfrak{H}$ — круг $|w|<1$, $z_0=0$, $w_0=f(0)$,

$$\varphi(\zeta)=\zeta,\quad \psi(\zeta)=\frac{\zeta+w_0}{1+\bar{w}_0\zeta}.$$

$\mathfrak{g}$ — круг $|z|\leqslant\rho$, $\mathfrak{h}$ — область, в которую переходит круг $|\zeta|\leqslant\rho$ при отображении $w=\psi(\zeta)$, т. е. также круг. Для точек этого круга имеем:

$$|w-w_0|=\frac{|\zeta|(1-|w_0|^2)}{|1+\bar{w}_0\zeta|}\leqslant\rho\frac{1-|w_0|^2}{1-|w_0|\rho}.$$

Равенство достигается лишь при условии

$$f(z)=\psi[e^{i\alpha}\varphi^{-1}(z)]=\psi(e^{i\alpha}z)=\frac{e^{i\alpha}z+w_0}{1+\bar{w}_0e^{i\alpha}z};$$

при этом

$$|1+\bar{w}_0e^{i\alpha}z|=1-|w_0||z|,$$

т. е.

$$\arg z=\arg w_0-\alpha+\pi.$$

283. Частный случай теоремы **281**:
$\mathfrak{G}$: круг $|z|<R$,
$\mathfrak{H}$: полуплоскость $\Re w<A(R)$, $z_0=0$, $w_0=f(0)$, $\Re w_0=A(0)$,

$$\varphi(\zeta)=R\zeta,$$

$$\psi(\zeta)=\frac{w_0+[\bar{w}_0-2A(R)]\zeta}{1-\zeta}=w_0+[w_0+\bar{w}_0-2A(R)]\frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

$\mathfrak{g}$ — круг $|z|\leqslant\rho R=r$, $\mathfrak{h}$ — область, в которую переходит круг $|\zeta|\leqslant\rho$ при отображении $w=\psi(\zeta)$. Для точек этой области имеем:

$$\Re w=\Re w_0+[w_0+\bar{w}_0-2A(R)]\,\Re\frac{\zeta}{1-\zeta}\leqslant$$
$$\leqslant\Re w_0-2[\Re w_0-A(R)]\frac{\rho}{1+\rho}=\frac{1-\rho}{1+\rho}\Re w_0+\frac{2\rho}{1+\rho}A(R).$$

Равенство достигается лишь при условии

$$f(z)=\psi[e^{i\alpha}\varphi^{-1}(z)]=\psi\left(e^{i\alpha}\frac{z}{R}\right).$$

284. Имеем [решение 283]:

$$|w| \leqslant |w_0| + [2A(R) - w_0 - \bar{w}_0]\frac{\rho}{1-\rho} = M(0) + \frac{2\rho}{1-\rho}[A(R) - A(0)].$$

Слабее, чем 236.

285. Применяем 283 к $\ln f(z)$:

$$\Re \ln f(z) = \ln |f(z)| \leqslant \ln M(r).$$

286. Из 285 вытекает:

$$|f_n(z)|^2 \leqslant |f_n(0)|^{2\frac{1-|z|}{1+|z|}}.$$

При $|z| \leqslant \frac{1}{3}$ имеем: $2\frac{1-|z|}{1+|z|} \geqslant 1$, следовательно,

$$|f_n(z)|^2 \leqslant |f_n(0)|.$$

287. Применяем 281 к следующему частному случаю: $\mathfrak{G}$ — круг $|z| < 1$, $\mathfrak{H}$ — полуплоскость $\Re w > 0$, $z_0 = 0$, $w_0 = f(0) > 0$,

$$\varphi(\zeta) = \zeta, \qquad \psi(\zeta) = w_0\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

$\mathfrak{g}$ — круг $|z| \leqslant \rho$, $\mathfrak{h}$ — круг, контур которого ортогонально пересекает вещественную ось в точках $w_0\frac{1+\rho}{1-\rho}$ и $w_0\frac{1-\rho}{1+\rho}$; радиус его равен $w_0\frac{2\rho}{1-\rho^2}$. Для точек круга $\mathfrak{h}$ выполняются неравенства

$$w_0\frac{1-\rho}{1+\rho} \leqslant \Re w \leqslant w_0\frac{1+\rho}{1-\rho}, \qquad |\Im w| \leqslant w_0\frac{2\rho}{1-\rho^2},$$

$$w_0\frac{1-\rho}{1+\rho} \leqslant |w| \leqslant w_0\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Равенство может иметь место лишь при $f(z) = \psi[e^{i\alpha}\varphi^{-1}(z)] = \psi(e^{i\alpha}z)$, где α вещественно.

288. Частный случай теоремы 281:

$\mathfrak{G}$: круг $|z| < 1$,

$\mathfrak{H}$: полоса $-1 < \Re w < 1$, $z_0 = 0$, $w_0 = 0$,

$$\varphi(\zeta) = \zeta, \quad \psi(\zeta) = \frac{2}{i\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

$\mathfrak{g}$ — круг $|z| \leqslant \rho$. Значения выражения $\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ при $|\zeta| \leqslant \rho$ заполняют круг, ортогонально пересекающий вещественную ось в точках $\frac{1+\rho}{1-\rho}$ и $\frac{1-\rho}{1+\rho}$. Этот круг целиком содержится в угле с полураствором $\operatorname{arctg}\frac{2\rho}{1-\rho^2} = 2\operatorname{arctg}\rho$, имеющем своей биссектрисой вещественную ось. Поэтому область $\mathfrak{h}$ целиком заключена в полосе $|\Re w| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\rho$. Далее, в точках $\mathfrak{h}$ имеем:

$$|\Im w| = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Равенство имеет место лишь при $f(z)=\psi[e^{i\alpha}\varphi^{-1}(z)]=\psi(e^{i\alpha}z)$, где α вещественно.

289. Мы можем принять, что $R=1$, $\Delta=2$ и $|\Re f(z)|<1$ в круге $|z|<1$, как в 288; напротив, $f(0)=w_0$ может получать произвольные значения из полосы $-1<\Re w<1$. В зависимости от выбора w_0 мы получаем в этой полосе для каждого $\rho<1$ область, где могут лежать значения $f(z)$. Речь идет об определении максимальной ширины такой области в направлении, перпендикулярном к вещественной, соответственно мнимой, оси, когда w_0 пробегает все точки указанной полосы. Очевидно, достаточно ограничиться вещественными w_0, $-1<w_0<1$. В этом случае имеем:

$$w=\psi(\zeta)=\frac{2}{i\pi}\ln\frac{e^{\frac{i\pi w_0}{2}}+i\zeta}{1-ie^{\frac{i\pi w_0}{2}}\zeta}=w_0+\frac{2}{i\pi}\ln\frac{1+ie^{-\frac{i\pi w_0}{2}}\zeta}{1-ie^{\frac{i\pi w_0}{2}}\zeta}.$$

Образ окружности $|\zeta|=\rho$ в плоскости w выпуклый [318] и симметричный относительно вещественной оси, ибо $\psi(\zeta)$ принимает вещественные значения для вещественных ζ. Поэтому максимум и минимум $\Re w$ достигаются в вещественных точках $\zeta=\pm\rho$. Ширина в горизонтальном направлении равна тем самым

$$w_0+\frac{2}{i\pi}\ln\frac{1+ie^{-\frac{i\pi w_0}{2}}\rho}{1-ie^{\frac{i\pi w_0}{2}}\rho}-\left(w_0+\frac{2}{i\pi}\ln\frac{1-ie^{-\frac{i\pi w_0}{2}}\rho}{1+ie^{\frac{i\pi w_0}{2}}\rho}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\rho\cos\frac{\pi w_0}{2}}{1+\rho\sin\frac{\pi w_0}{2}}+\operatorname{arctg}\frac{\rho\cos\frac{\pi w_0}{2}}{1-\rho\sin\frac{\pi w_0}{2}}\right).$$

При изменении w_0 между -1 и 1 производная по w_0 совпадает по знаку с $-\sin\frac{\pi w_0}{2}$. Поэтому максимум достигается при $w_0=0$ и равен $\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\rho$.

Колебание $\Im w$ не может превосходить удвоенную верхнюю границу для $|\Im w|$, указанную в 288. Доказательство аналогично.

290. [H. Bohr, Nyt Tidsskr. for Math. (B), т. 27, стр. 73—78, 1916.] Выберем η так, чтобы $|\eta|=1$, $\eta F(1)>0$. Понимая под $\ln[\eta F(z)]$ ту ветвь, на которой эта функция вещественна в точке $z=1$, полагаем:

$$w=f(z)=\frac{\ln[\eta F(z)]-\ln c}{\ln[\eta F(1)]-\ln c}.$$

Имеем $f(1)=1$, $\Re f(z)>0$. Применяем теперь 281 к случаю, когда $\mathfrak{G}\equiv\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{H}$ — правая полуплоскость, $z_0=1$, $w_0=1$. Пусть функции $z=\varphi(\zeta)$, $w=\psi(\zeta)$ так нормированы, что вещественным значениям ζ соответствуют вещественные значения z и w, кроме того, $\varphi(1)=\infty$, $\psi(1)=\infty$ [IV 119]. Мы имеем тогда:

$$\psi(\zeta)=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Пусть $x>1$ и $x=\varphi(\rho)$, $0<\rho<1$. Согласно 281 $f(x)$ лежит в той области плоскости w, в которую преобразуется круг $|\zeta|\leqslant\rho$ при отображении $w=\psi(\zeta)$. Но этой областью служит круг, наибольшее расстояние точек которого от нулевой точки равно $\psi(\rho)$, и, значит, $|f(x)|\leqslant\psi(\rho)$. Тем самым мы можем положить $h(x)=\psi[\varphi^{-1}(x)]$.

291. [K. Löwner.] Согласно 280 в круге $|z|<1$ должно быть $|f(z)|\leqslant|z|$. Следовательно, для положительных z, $0<z<1$, имеем:

$$\left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right|\geqslant 1.$$

Отсюда, переходя к пределу при $z\to 1$, получаем:

$$|f'(1)|\geqslant 1.$$

Пусть $\arg f'(1)=\alpha$. Тогда достаточно малый вектор с аргументом ϑ, $\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{3\pi}{2}$, направленный от $z=1$ во внутреннюю часть единичного круга, переходит при отображении $w=f(z)$, $f'(1)\neq 0$, в дугу аналитической кривой, также выходящую из $z=1$ и имеющую направление $\vartheta+\alpha$. Но так как $|f(z)|<1$ при $|z|<1$, то для всех выделенных выше значений ϑ должны также удовлетворяться неравенства

$$\frac{\pi}{2}<\vartheta+\alpha<\frac{3\pi}{2},$$

что возможно только в том случае, когда $\alpha=0$.

292. Пусть z_0 — фиксированное число, $|z_0|<1$, $f(z_0)=w_0$, $|w_0|<1$. Выберем постоянные ε и η так, чтобы имели место равенства

$$\varepsilon\frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}=\eta\frac{1-w_0}{1-\bar{w}_0}=1, \qquad |\varepsilon|=|\eta|=1,$$

и положим:

$$\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=Z, \qquad \eta\frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}=W.$$

Тогда функция $W=F(Z)$, определенная с помощью функционального соотношения $w=f(z)$, удовлетворяет условиям теоремы **291**, следовательно, имеем:

$$1\leqslant F'(1)=\left(\frac{dW}{dw}\right)_{w=1}\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=1}\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=1}=\frac{\eta(1-|w_0|^2)}{(1-\bar{w}_0)^2}f'(1)\,\frac{(1-\bar{z}_0)^2}{\varepsilon(1-|z_0|^2)}.$$

293. [G. Julia, Acta Math., т. 42, стр. 349, 1920.] Пусть z_0 — фиксированное число, $\Im z_0>0$, $f(z_0)=w_0$, $\Im w_0>0$. Выберем постоянные ε и η так, чтобы имели место равенства

$$\varepsilon\frac{a-z_0}{a-\bar{z}_0}=\eta\frac{b-w_0}{b-\bar{w}_0}=1, \qquad |\varepsilon|=|\eta|=1.$$

Полагая

$$\varepsilon\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}=Z, \quad \eta\frac{w-w_0}{w-\bar{w}_0}=W,$$

будем иметь [291, 292]:

$$1\leqslant\left(\frac{dW}{dZ}\right)_{Z=1}=\left(\frac{dW}{dw}\right)_{w=b}f'(a)\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=1}=\frac{\eta(w_0-\bar{w}_0)}{(b-\bar{w}_0)^2}f'(a)\frac{(a-\bar{z}_0)^2}{\varepsilon(z_0-\bar{z}_0)}.$$

294. Функция

$$f(z)\frac{1-\bar{z}_1 z}{z-z_1}\cdot\frac{1-\bar{z}_2 z}{z-z_2}\cdots\frac{1-\bar{z}_n z}{z-z_n}$$

регулярна в круге $|z|<1$ и модуль ее в достаточной близости от любой граничной точки меньше $M+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ [5]. Применяем 278. Другое доказательство основывается на применении **176** с соблюдением некоторых предосторожностей.

295. Функция

$$f(z)\frac{\bar{z}_1+z}{z_1-z}\cdot\frac{\bar{z}_2+z}{z_2-z}\cdots\frac{\bar{z}_n+z}{z_n-z}$$

регулярна в полуплоскости $\Re z>0$ и модуль ее в достаточной близости от любой граничной точки меньше $M+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ [6]. Применяем 278. Другое доказательство на основании **177**. Оба метода доказательства применимы не только к полуплоскости $\Re z>0$ и легко приводят к теореме, обобщающей **294** аналогично тому, как **281** обобщает лемму Шварца **280**.

296. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в круге $|z|\leqslant 1$ и имеет в нем нули $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (нуль или полюс кратности r выписан r раз), и пусть $|f(z)|=c>0$ на $|z|=1$. Функция

$$f(z)\prod_{\mu=1}^{m}\frac{1-\bar{a}_\mu z}{z-a_\mu}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z-b_\nu}{1-\bar{b}_\nu z}=\varphi(z)$$

в круге $|z|<1$ регулярна и отлична от нуля, а на $|z|=1$ модуль ее сохраняет постоянное значение, равное c. Следовательно [142], $\varphi(z)$ есть постоянная.

297. [W. Blaschke, Leipz. Ber., т. 67, стр. 194, 1915.] Пусть α вещественно, $0\leqslant\alpha<1$, $f(\alpha)\neq 0$; из **294** вытекает, что произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha-z_\nu}{1-\alpha z_\nu}\right|$ не расходится к нулю. Следовательно, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\alpha-z_\nu}{1-\alpha z_\nu}\right|^2\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-\alpha^2)(1+|z_\nu|)}{|1-\alpha z_\nu|^2}(1-|z_\nu|)\geqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|z_\nu|)$$

сходится.

298. Пусть α вещественно, $\alpha>1$, $f(\alpha)\neq 0$. Из 295 вытекает, что произведение $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{z_\nu-\alpha}{z_\nu+\alpha}\right|^2$ не расходится к нулю. Следовательно, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{z_\nu-\alpha}{z_\nu+\alpha}\right|^2\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\alpha}{\left|1+\frac{\alpha}{z_\nu}\right|^2}\,\frac{z_\nu+\bar z_\nu}{2z_\nu\bar z_\nu}\geqslant\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\Re\frac{1}{z_\nu}$$

сходится.

299. [T. Carleman; см. также P. Csillag, Math. és phys. lapok, т. 26, стр. 74—80, 1917.] Пусть z_0 — внутренняя точка области $\mathfrak{B}$. Положим $|f_\nu(z_0)|=\varepsilon_\nu f_\nu(z_0)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. (При $f_\nu(z_0)=0$ берем $\varepsilon_\nu=1$.) Функция

$$F(z)=\varepsilon_1 f_1(z)+\varepsilon_2 f_2(z)+\ldots+\varepsilon_n f_n(z),$$

регулярная и однозначная в области $\mathfrak{B}$, достигает по модулю максимума в некоторой граничной точке z_1, поэтому

$$\varphi(z_1)\geqslant|F(z_1)|\geqslant|F(z_0)|=\varphi(z_0).$$

300. Утверждение теоремы можно доказать путем соответствующего усиления метода, примененного в решении 299. Однако проще доказательство проводится следующим методом. Пусть z_0 — внутренняя точка области $\mathfrak{B}$ и круг $|z-z_0|\leqslant r$ целиком лежит внутри $\mathfrak{B}$. Складывая неравенства [272]

$$|f_\nu(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_\nu(z_0+re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\qquad(\nu=1, 2, \ldots, n),\qquad(*)$$

получаем:

$$\varphi(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z_0+re^{i\vartheta})\,d\vartheta,$$

причем здесь стоит знак $<$, если он имеет место хотя бы в одном из неравенств (*), т. е. если по крайней мере одна из функций $f_\nu(z)$ не постоянна; значит, в этом последнем случае максимум не может достигаться в z_0, т. е. в какой бы то ни было внутренней точке.

301. [G. Szegö, задача; Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., т. 32, стр. *16*, 1923.] Достаточно доказать, что в каждой плоской ограниченной замкнутой области $\mathfrak{B}$ максимум функции $\varphi(P)$ достигается на границе, причем точки P_ν не обязательно лежат в той же плоскости. Введем в плоскости области $\mathfrak{B}$ прямоугольные координаты x, y, $z=x+iy$. Тогда нужно будет доказать, что функция вида

$$\prod_{\nu=1}^{n}(|z-a_\nu|^2+b_\nu^2),$$

где a_ν — любые комплексные, а b_ν — вещественные постоянные ($\nu=1, 2, \ldots, n$), в любой области плоскости z достигает максимума на границе. Раскрываем произведение. [299.]

302. Пусть z_0 — внутренняя точка области $\mathfrak{B}$ и в ней некоторые из заданных функций — будем обозначать их вообще через $f_\mu(z)$ — не обращаются в нуль, другие же, обозначаемые через $f_\nu(z)$, равны нулю. (Функции одной из этих категорий могут отсутствовать.) Пусть r столь мало, что круг $|z-z_0|\leqslant r$ лежит целиком в $\mathfrak{B}$ и не содержит нулей наших функций, отличных от z_0. В этом круге функции $f_\mu(z)^{p_\mu}$ регулярны. Согласно **299** существует такая точка z_1, $|z_1-z_0|=r$, что

$$\sum_\mu |f_\mu(z_1)|^{p_\mu} \geqslant \sum_\mu |f_\mu(z_0)|^{p_\mu}.$$

Кроме того, очевидно,

$$\sum_\nu |f_\nu(z_1)|^{p_\nu} \geqslant 0 = \sum_\nu |f_\nu(z_0)|^{p_\nu}.$$

Таким образом, $\varphi(z_1)\geqslant\varphi(z_0)$, и при этом равенство исключено либо когда по крайней мере одна из функций $f_\mu(z)$ не тождественно постоянна, либо, в противном случае, когда по крайней мере одна из $f_\nu(z)$ не равна тождественно нулю. Так как область $\mathfrak{B}$ ограничена и замкнута, а функция $\varphi(z)$ непрерывна, то в $\mathfrak{B}$ существует точка, в которой $\varphi(z)$ достигает максимума. Эта точка не может лежать внутри области, за исключением случая, указанного в задаче.

303. Так как область $\mathfrak{B}$ ограничена и замкнута, то непрерывная и однозначная в $\mathfrak{B}$ функция $|f(z)|$ достигает в ней своего максимума. Что он не может, за исключением случая $f(z)=\text{const.}$, достигаться во внутренней точке, показывает **134**.

304. [J. Hadamard, Bull. S. M. F., т. 24, стр. 186, 1896; O. Blumenthal, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., т. 16, стр. 108, 1907; G. Faber, Math. Ann., т. 63, стр. 549, 1907.] Хотя сама функция $z^\alpha f(z)$ вообще и неоднозначна, однако модуль ее во всяком случае однозначен в круговом кольце $r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$. Следовательно, в этом кольце максимум модуля $z^\alpha f(z)$ будет равен либо $r_1^\alpha M(r_1)$, либо $r_3^\alpha M(r_3)$ [303]. Выберем α так, чтобы имело место равенство

$$r_1^\alpha M(r_1) = r_3^\alpha M(r_3). \qquad (*)$$

Рассматривая отдельную точку окружности $|z| = r_2$, видим, что

$$r_2^\alpha M(r_2) \leqslant r_1^\alpha M(r_1) = r_3^\alpha M(r_3).$$

Подставим сюда значение α, взятое из (*). (Достаточно, чтобы функция $f(z)$ была регулярна и модуль ее $|f(z)|$ был однозначен в области $0 < |z| < R$.)

305. $z^\alpha f(z)$ может достигать своего максимума на окружности $|z| = r_2$, т. е. внутри кругового кольца $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$, только если $z^\alpha f(z)$ тождественно постоянно.

306. Полагая

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

имеем:

$$I_2(r) = |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \ldots + |a_n|^2 r^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n,$$

где $p_n \geqslant 0$ и по крайней мере два из коэффициентов p_n положительны [II 123].

307. Пусть $f(z) \neq \text{const}$. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ нули функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$, отличные от $z = 0$. Тогда [120] (для простоты предположено $f(0) = 1$)

$$\ln \mathfrak{G}(r) = n \ln r - \ln|z_1| - \ln|z_2| - \ldots - \ln|z_n|.$$

Отсюда следует, что $\ln \mathfrak{G}(r)$ как функция от $\ln r$ состоит из непрерывно примыкающих друг к другу прямолинейных кусков с монотонно возрастающим наклоном. Точка излома для $\ln r = \ln r_0$ получается при появлении новых нулей на окружности $|z| = r_0$. При этом приращение тангенса угла наклона равно числу новых нулей, засчитываемых с их кратностью.

308. [G. H. Hardy, Proc. Lond. M. S. (2), т. 14, стр. 270, 1915.] Пусть $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$. Определим функции $\varepsilon(\vartheta)$, $F(z)$ равенствами

$$\varepsilon(\vartheta) f(r_2 e^{i\vartheta}) = |f(r_2 e^{i\vartheta})|, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z e^{i\vartheta})\, \varepsilon(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant r_3$ и модуль ее достигает максимума на его границе, скажем, в точке $r_3 e^{i\vartheta_3}$. Поэтому

$$I(r_2) = F(r_2) \leqslant |F(r_3 e^{i\vartheta_3})| \leqslant I(r_3),$$

т. е. $I(r)$ не убывает. Выберем вещественное α так, чтобы удовлетворялось равенство

$$r_1^\alpha I(r_1) = r_3^\alpha I(r_3).$$

Модуль функции $z^{\alpha}F(z)$, регулярной в круговом кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$, однозначен в нем. Отсюда заключаем [303], что

$$r_2^{\alpha} I(r_2) = r_2^{\alpha} F(r_2) \leqslant \operatorname*{Max}_{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3} |z^{\alpha} F(z)| \leqslant r_1^{\alpha} I(r_1) = r_3^{\alpha} I(r_3),$$

а это показывает, что функция $I(r)$ выпукла [304].

309. $$l(r) = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\vartheta})|\, r\, d\vartheta \qquad [308].$$

310. Положим $e^{\frac{2\pi i \nu}{n}} = \omega_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$; пусть $0 \leqslant r_1 < r_2 < R$. На окружности $|z| = r_2$ существует такая точка $r_2 e^{i\vartheta_2}$, что [302]

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |f(r_1 \omega_\nu)|^p \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |f(r_2 \omega_\nu e^{i\vartheta_2})|^p.$$

Взяв $n \to \infty$, получаем отсюда:

$$I_p(r_1) \leqslant I_p(r_2).$$

Пусть $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$, α вещественно. Хотя в круговом кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ функции

$$z^{\frac{\alpha}{p}} f(\omega_1 z), \quad z^{\frac{\alpha}{p}} f(\omega_2 z), \quad \ldots, \quad z^{\frac{\alpha}{p}} f(\omega_n z)$$

регулярны и не обязательно однозначны, однако их модули однозначны. Поэтому [303, 302] мы можем утверждать, что сумма p-х степеней их модулей достигает максимума на границе кольца. Отсюда методом решений 304, 308 и посредством предельного перехода убеждаемся в выпуклости функции $I_p(r)$. По поводу предельных случаев $p = 0$ и $p = \infty$ см. II 83.

311. Мы можем принять, что центром $\mathfrak{K}$ служит нулевая точка. Применяем тогда 230. В другой формулировке теорема утверждает: если гармоническая функция регулярна в каждой точке некоторого замкнутого круга и равна нулю в каждой граничной точке, то она равна нулю тождественно.

312. Пусть $u(x, y)$, $z = x + iy$, — гармоническая функция, регулярная в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2$. Имеем:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)\, d\vartheta \qquad [118],$$

откуда

$$|u(x_0, y_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)|\, d\vartheta.$$

Если здесь стоит знак равенства, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\,|u(x_0+r\cos\vartheta,\ y_0+r\sin\vartheta)|\pm \pm u(x_0+r\cos\vartheta,\ y_0+r\sin\vartheta)]\,d\vartheta=0,$$

причем нужно взять — или $+$, смотря по тому, будет ли $u(x_0, y_0) \geqslant 0$ или $\leqslant 0$. Подинтегральное выражение должно быть тождественно равно нулю, откуда вытекает, что $u(x, y)$ сохраняет на заданной окружности постоянный знак (быть может, обращаясь в некоторых точках в нуль).

313. Пусть точка x_0, y_0, в которой достигается максимум, лежит внутри $\mathfrak{B}$. Выбираем такое r, чтобы круг радиуса r с центром в x_0, y_0 лежал целиком внутри $\mathfrak{B}$. Из равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(x_0,\ y_0)-u(x_0+r\cos\vartheta,\ y_0+r\sin\vartheta)]\,d\vartheta=0$$

[решение 312] вытекает тогда

$$u(x_0,\ y_0)-u(x_0+r\cos\vartheta,\ y_0+r\sin\vartheta)=0,\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi,$$

т. е. [311]

$$u(x,\ y)\equiv\text{const}.$$

314. Из 313.

315.

$$\ln|z-z_1|+\ln|z-z_2|+\ldots+\ln|z-z_n|=\Re\ln P(z),$$

потенциал системы сил, как гармоническая функция не достигает максимума или минимума ни в какой регулярной точке.

316. Покрываем особые точки конечным числом столь малых кругов без общих точек, чтобы значения функции в этих кругах были меньше максимума во всей области. К области, остающейся после удаления из $\mathfrak{B}$ этих кругов, применяем 313.

317. Согласно 188 линия, в которую отображается окружность $|z|=R$, обходится в том же направлении, что и эта окружность. Поэтому применима теорема 109. Гармоническая функция

$$\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right),$$

регулярная в круге $|z|\leqslant R$ [вследствие однолистности $f(z)$ имеет единственный простой нуль $z=0$], положительна на окружности $|z|=R$. Поэтому она положительна и на любой внутренней концентрической окружности $|z|=r<R$ [313]. Следовательно, согласно 109 кривые, на которые отображаются окружности $|z|=r$, — звездообразные относительно нулевой точки.

318. Согласно 188 граничная линия рассматриваемого образа обходится в том же направлении, что и окружность $|z|=R$.

Поэтому применима теорема 108. Гармоническая функция

$$\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)+1,$$

регулярная в круге $|z|\leqslant R$ [$f'(z)\neq 0$ вследствие однолистности], на окружности $|z|=R$ положительна. Поэтому она положительна и на любой внутренней концентрической окружности $|z|=r<R$. Следовательно, согласно 108 кривые, в которые отображаются окружности $|z|=r$, выпуклы. Тем самым утверждение доказано для случая, когда внутренние окружности концентричны с кругом $|z|<R$.

Пусть теперь мы имеем случай, когда внутренняя окружность расположена как угодно в круге $|z|<R$. Разлагаем заданное отображение $w=f(z)$ на два других: такое линейное преобразование круга $|z|\leqslant R$ в самого себя, при котором интересующая нас внутренняя окружность получает центр $z=0$ [77], и второе отображение, определенное так, чтобы оба в совокупности приводили к тому же результату, что и одно отображение $w=f(z)$. Тогда задача приводится к уже разрешенному выше частному случаю.

319. Доказывается, как 299.

320. [См. A. Walther, Math. Zeitschr., т. 11, стр. 158, 1921.] Пусть $u(x, y)$ — рассматриваемая гармоническая функция, $z=x+iy$. Тогда функция $u(x, y)+\alpha\ln r$, где α — произвольное постоянное число, регулярна в круговом кольце $r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$. Максимумом ее в этом кольце будет служить либо $A(r_1)+\alpha\ln r_1$, либо $A(r_3)+\alpha\ln r_3$. Выбираем α так, чтобы

$$A(r_1)+\alpha\ln r_1=A(r_3)+\alpha\ln r_3 \qquad [313, 304].$$

321. [См. A. Walther, l. с. 320.] 1. Доказанная в 320 теорема о трех кругах справедлива также для гармонических функций, имеющих в круге $|z|<R$ конечное или бесконечное множество изолированных особых точек, в предположении, что их предельные точки лежат только на границе и что при приближении к такой особой точке функция стремится к $-\infty$ [316]. Применяем расширенную таким образом теорему о трех кругах к $\Re\ln f(z)=\ln|f(z)|$.

2. Пусть $u(x, y)$, $z=x+iy$, — гармоническая функция, регулярная в круге $|z|<R$, и $v(x, y)$ — функция, сопряженная с $u(x, y)$. Применяем тогда 304 к $f(z)=e^{u(x, y)+iv(x, y)}$; $|f(z)|=e^{u(x, y)}$, поэтому $\ln M(r)=A(r)$.

322. [Относительно принятого в задачах 322 — 340 метода см. E. Phragmén und E. Lindelöf, Acta Math., т. 31, стр. 386, 1908, а также P. Persson, Thèse (Uppsala, 1908) и E. Lindelöf, Rend. Palermo, т. 25, стр. 228, 1908.]

323. Произвольными непрерывными кривыми, соединяющими внутри угла одну из ограничивающих его сторон с другой, минимальные расстояния которых от нулевой точки бесконечно возрастают.

324. В промежуточном пространстве сохраняют силу все оценки, приведенные в решении 322.

325. Решение — в тексте задачи.

326. Функция $e^{\omega z}f(z)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и видоизмененному условию 3 теоремы 325 [см. последнее замечание в доказательстве], как бы велико ни было ω. Следовательно, для $\Re z = x \geqslant 0$ имеем $|f(z)| \leqslant e^{-\omega x}$. Берем $\omega \to +\infty$.

327. Положим $\operatorname{arctg} \frac{y}{x+1} = \psi$. Тогда

$$z \ln(z+1) = (r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)\left[\frac{1}{2}\ln(r^2+2r\cos\vartheta+1) + i\psi\right];$$

следовательно, при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $r > 1$,

$$\Re[-z\ln(z+1)] = r\psi\sin\vartheta - \frac{1}{2}r\ln(r^2+2r\cos\vartheta+1)\cos\vartheta \leqslant$$
$$\leqslant r\frac{\pi}{2} - r\ln r\cos\vartheta \leqslant r\frac{\pi}{2}.$$

Пусть $0 < \beta < \frac{2\gamma}{\pi}$. Функция

$$\frac{1}{C} f(z)\, e^{-\beta z \ln(z+1)}$$

удовлетворяет условиям 1, 2, 3 теоремы 326 для $\alpha = 0$. Можно было бы вместо ссылки на 326, 325 применить метод доказательства этих теорем непосредственно к функции

$$f(z)\exp\left(\omega z - \beta z\ln(z+1) - \varepsilon e^{-\frac{i\lambda\pi}{4}} z^{\lambda}\right)$$

и затем взять сначала $\varepsilon = 0$, затем $\omega \to +\infty$.

328. [F. Carlson, Math. Zeitschr., т. 11, стр. 14, 1921; Thèse, Uppsala, 1914.]

Первое решение. К $\frac{f(z)}{\sin\pi z}$ применима теорема 327. Наличие неравенства

$$\left|\frac{f(z)}{\sin\pi z}\right| < A' e^{B|z|} \qquad (A' > A)$$

целесообразнее всего показать сначала вне, а затем внутри круга $|z-n| \leqslant \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ [решение 165].

Второе решение. Из 178 вытекает, если принять во внимание положительность слагаемых в левой части, что

$$\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^n \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{n^2}\right)[2\ln C + 2(\pi-\gamma)\rho]\,d\rho + C',$$

где C и C' — постоянные. Но это неравенство противоречиво, так как левая часть $\sim \ln n$, а правая $\sim \frac{\pi-\gamma}{\pi} \ln n$. Этот метод может быть обобщен [F. и R. Nevanlinna, 1. с. **177**].

329. Функция $\varphi(z)=\frac{e^z}{[f(z)]^\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$, регулярна в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$. Имеем $|\varphi(z)| \leqslant 1$ для $\Re z=0$ и $|\varphi(z)| \leqslant 1$ для $|z|=r$, если только r настолько велико, что $\omega(r)>\frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда вытекает, что $|\varphi(z)| \leqslant 1$ во всей полуплоскости $\Re z \geqslant 0$. Но, беря $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем отсюда $|e^z| \leqslant 1$, что представляет противоречие. Можно рассматривать эту теорему также как предельный случай теоремы **290**, когда областью $\mathfrak{Z}$ служит вся полуплоскость.

330. Пусть $\varepsilon>0$, $h=\varepsilon e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $0<\sigma<\delta$, $\sigma(\beta-\alpha)<\pi$. Применяя к функции

$$F(z)=f(z) \exp \left(-(h z)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}-\sigma}\right)$$

метод, которым мы уже пользовались в доказательстве теоремы **322**, получаем, что во всем угле $|F(z)| \leqslant 1$. Берем теперь $\varepsilon \rightarrow 0$.

Мы могли бы также свести настоящую теорему к **322** путем замены переменных, отображая угол $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ на угол $-\gamma \leqslant \arg z \leqslant \gamma$, $\gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\delta(\beta-\alpha)}{2}$, так, чтобы при этом точки $z=0$, $z=\infty$ остались неподвижными.

331. При $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ это дает несколько меньше, чем доказано в **325**. Доказываем теорему с помощью функции

$$f(z) \exp \left(-\eta e^{-i \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \frac{\pi}{2}} z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}\right).$$

Показываем сначала с помощью **330**, что максимум модуля вдоль биссектрисы не превосходит единицу [**325**].

332. Если имеет место неравенство $|g(-r)| \leqslant C$, то применяем **331** к функции $\frac{g(z)}{C}$ в угле $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Это дает, что $|g(z)| \leqslant C$ во всей плоскости, т. е. $g(z)$ — постоянная. Можно также рассмотреть непосредственно

$$g(z) e^{-\eta \sqrt{z}-\varepsilon(-i z)^{\frac{3}{4}}}.$$

Эта функция регулярна внутри угла $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ и непрерывна, включая границу. См. **325**. Можно также применить **325** к $C^{-1} g(z^2)$. Насколько эта теорема является точной, видно из примера функции $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

333. Пусть $a<b<1$. Модуль функции сравнения $e^{e^{bz}}$ дается равенством

$$\left| e^{e^{b(x+iy)}} \right| = e^{e^{bx}\cos by}.$$

На границе области $\mathfrak{G}$ он больше или равен $e^{\cos b\frac{\pi}{2}}>1$. Пусть $l>\frac{1}{b-a}\ln\frac{A}{\varepsilon\cos b\frac{\pi}{2}}$. Тогда на границе прямоугольника $0\leqslant x\leqslant l$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$\left| f(z)\, e^{-\varepsilon e^{bz}} \right| < 1.$$

334. Приняв противное, рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = e^{e^z}[f(z)]^{-\varepsilon} \qquad (\varepsilon>0, \quad z=x+iy)$$

в прямоугольнике

$$0\leqslant x\leqslant x_1, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

где x_1 выбрано так, что $\varepsilon\omega(x_1)>1$. На границе этого прямоугольника

$$|\varphi(iy)|\leqslant e^{\cos y}\cdot e^{-\varepsilon\omega(0)}\leqslant e, \quad \left|\varphi\left(x\pm i\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

$$|\varphi(x_1+iy)|\leqslant e^{e^{x_1}|\cos y-\varepsilon\omega(x_1)|}<1;$$

поэтому внутри него $|\varphi(z)|\leqslant e$. Беря $\varepsilon\to 0$, получаем:

$$\left| e^{e^z} \right| \leqslant e,$$

что представляет противоречие (например, $e^e\leqslant e$). Роль функции e^{e^z} объясняется теоремами 290, 187.

335. Достаточно рассмотреть случай, отмеченный в указании [линейное преобразование]. Функция

$$\varphi(z) = f(z)\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{z-z_\nu}{2r}\right)^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon>0$, в общей части $\mathfrak{G}_r$ области $\mathfrak{G}$ и круга $|z|\leqslant r$ регулярна и однозначна по модулю [303]. Пусть максимум модуля $f(z)$ на окружности $|z|=r$ будет $M(r)$. Принимая во внимание условия на границе $\mathfrak{G}$ [278], находим, что в $\mathfrak{G}_r$

$$|\varphi(z)|\leqslant \mathrm{Max}[M, M(r)].$$

При $\varepsilon\to 0$ получаем отсюда:

$$|f(z)|\leqslant \mathrm{Max}[M, M(r)].$$

В частности, если r' также допустимо [см. указание] и $r' < r$, имеем:

$$M(r') \leqslant \text{Max}[M, M(r)].$$

Но, с другой стороны [268],

$$M(r) \leqslant M(r').$$

Отсюда вытекает альтернатива: либо $M(r) \geqslant M$, значит, $M(r) = M(r')$ и $f(z) \equiv \text{const}$. [268], либо $M(r) < M$, $|f(z)| \leqslant M$, откуда, больше того, следует, что $|f(z)| < M$ [278].

336. Пусть на вещественной оси лежат n граничных отрезков области $\mathfrak{B}$, видных из движущейся точки z верхней полуплоскости соответственно под углами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Определим регулярные в полуплоскости $\mathfrak{J}z > 0$ аналитические функции $\varphi_\nu(z)$ так, чтобы было $\pi\mathfrak{R}\varphi_\nu(z) = \omega_\nu$ [57], и положим:

$$\Phi(z) = a \cdot \left(\frac{A}{a}\right)^{\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots + \varphi_n(z)}.$$

Функция $f(z)\,\Phi(z)^{-1}$ регулярна и ограничена внутри и не превосходит единицы на границе области $\mathfrak{B}$, за возможным исключением $2n$ граничных точек [335].

337. $f(e^u)$ однозначна, регулярна и ограничена в полуплоскости $\mathfrak{R}u \leqslant 0$. В каждой точке на границе этой полуплоскости, за исключением единственной граничной точки $u = \infty$, имеем $|f(e^u)| \leqslant 1$ [335].

338. Если бы $z = \infty$ не была граничной точкой, то в области $\mathfrak{G}$ должно было бы [как это видно уже из теоремы 135] выполняться неравенство $|g(z)| \leqslant k$, что представляет противоречие. Следовательно, $z = \infty$ является граничной точкой области $\mathfrak{G}$. Если бы $g(z)$ было ограничено в $\mathfrak{G}$, то мы могли бы применить 335 (с единственной исключительной точкой $z = \infty$), и это опять дало бы, что $|g(z)| \leqslant k$ в области $\mathfrak{G}$.

339. Согласно предположению существует такая постоянная M, $M > 0$, что в области, заключенной между Γ_1 и Γ_2, $|f(z)| < M$. Пусть $R > 1$ и столь велико, что вдоль частей кривых Γ_1 и Γ_2, лежащих вне окружности $|z| = R$, имеет место неравенство $|f(z)| < \varepsilon$. Рассматриваем ветвь функции $\ln z$, определяемую из условия, что эта функция вещественна для положительных z. Эта ветвь регулярна и однозначна между Γ_1 и Γ_2, причем там $|\ln z| < \ln|z| + \pi$. Имеем:

$$|M(\ln R + \pi) + \varepsilon(\ln z + \pi)| \geqslant M(\ln R + \pi) + \varepsilon(\ln|z| + \pi),$$

где для $|z| \geqslant R$ оба слагаемых в правой части положительны. Поэтому для точек окружности $|z| = R$, заключенных между Γ_1 и Γ_2, имеем:

$$\left|\frac{\ln z}{M(\ln R + \pi) + \varepsilon(\ln z + \pi)} f(z)\right| < \frac{\ln R + \pi}{M(\ln R + \pi)} M = 1.$$

Если же $|z| \geqslant R$, а z лежит на Γ_1 или Γ_2, то

$$\left| \frac{\ln z}{M(\ln R + \pi) + \varepsilon(\ln z + \pi)} f(z) \right| < \frac{\ln|z| + \pi}{\varepsilon(\ln|z| + \pi)} \varepsilon = 1.$$

Следовательно, согласно 335 во всех точках между Γ_1 и Γ_2, лежащих вне окружности $|z| = R$, имеем:

$$|f(z)| < \left| \frac{\varepsilon(\ln z + \pi) + M(\ln R + \pi)}{\ln z} \right|.$$

Это выражение при достаточно больших $|z|$ будет меньше 2ε.

340. Пусть, в противоречие с утверждением, $a \neq b$. Опишем на плоскости w около точек a и b два взаимно не пересекающихся круга K_1 и K_2. Тогда вне этих кругов выражение

$$\left| \left(w - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right|$$

имеет положительный минимум, равный ε. Применяя 339 к функции $\left(f(z) - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, видим, что модуль ее в области между Γ_1 и Γ_2 будет меньше ε при $|z| > R = R(\varepsilon)$; этими значениями z мы и ограничимся. Возьмем на Γ_1 такую точку z_1 и на Γ_2 такую точку z_2, чтобы $w_1 = f(z_1)$ лежало в K_1, а $w_2 = f(z_2)$ — в K_2, и соединим z_1 и z_2 кривой, содержащейся между Γ_1 и Γ_2. Но тогда образ этой кривой на плоскости w должен будет выходить из K_1 и входить в K_2 и, значит, содержать некоторую точку $w = f(z)$, для которой $\left| \left(w - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right| \geqslant \varepsilon$. Мы пришли, таким образом, к противоречию.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

I. Определения. Теоремы. Формулы

II. Темы

Ниже приводятся группы задач, связанных между собой по теме, но расположенных разрозненно. Римскими цифрами указаны отделы, следующими за ними жирными арабскими — номера задач.