М.В.Лурье, Б.И.Александров

# ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Книга посвящена традиционному разделу элементарной математики — задачам на составление уравнений. На большом количестве примеров, взятых главным образом из вариантов Письменных работ по математике, предлагавшихся абитуриентам различных факультетов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, можно познакомиться с разнообразием идей, лежащих в основе задач на составление уравнений, и научиться решать такие задачи.

Пособие содержит большое количество задач для самостоятельного решения с ответами. Материал излагается с учетом изменений, происшедших в программе по математике средней школы. Книга предназначена поступающим в вузы, учащимся и учителям математики

## СОДЕРЖАНИЕ

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, представляют собой традиционный раздел элементарной математики. Интерес к нему вполне понятен. Решение задач подобного рода способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования.

Настоящая книга призвана помочь учащимся и особенно тем из них, кто собирается поступать в высшие учебные заведения, разобраться в типах и методах решения таких задач. Задачи, послужившие примерами к изложенному в настоящей книге материалу, заимствованы большей частью из вариантов вступительных экзаменов в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Эти варианты составлены различными авторами, преподавателями и сотрудниками университета. В конце каждого параграфа и в разделе «Разные задачи» содержатся задачи для самостоятельного решения, которые помогут проверить, насколько усвоен прочитанный материал.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность М. И. Шабунину, рецензенту первого издания книги, за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению рукописи.

*М. В. Лурье, Б. И. Александров*

## § 1. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЯМИ «КОНЦЕНТРАЦИЯ» И «ПРОЦЕНТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ»

Рассматривая задачи на составление уравнений, остановимся, прежде всего, на задачах, решение которых связано с использованием понятий «концентрация» и «процентное содержание». Обычно в условиях таких задач речь идет о составлении сплавов, растворов или смесей двух или нескольких веществ.

*Основные допущения*, которые принимаются в задачах подобного рода, состоят в следующем:

а) все получающиеся сплавы или смеси однородны;

б) при слиянии двух растворов, имеющих объемы $V_1$ и $V_2$, получается смесь, объем которой равен $V_1 + V_2$, т. е.

$$V_0 = V_1 + V_2.$$

Заметим, что такое допущение не представляет собой закон физики и не всегда выполняется в действительности. На самом деле при слиянии двух растворов не объем, а масса или вес смеси равняется сумме масс или весов составляющих ее компонент.

Рассмотрим для определенности смесь трех компонент $A$, $B$ и $C$. Объем смеси $V_0$ складывается из объемов чистых компонент:

$$V_0 = V_A + V_B + V_C,$$

а три отношения:

$$c_A = \frac{V_A}{V_0}, \quad c_B = \frac{V_B}{V_0}, \quad c_C = \frac{V_C}{V_0}$$

показывают, какую долю полного объема смеси составляют объемы отдельных компонент:

$$V_A = c_A V_0, \quad V_B = c_B V_0, \quad V_C = c_C V_0.$$

Отношение объема чистой компоненты ($V_A$) в растворе ко всему объему смеси ($V_0$)

$$c_A = \frac{V_A}{V_0} = \frac{V_A}{V_A + V_B + V_C} \qquad (*)$$

называется *объемной концентрацией* этой компоненты.

Концентрация — это безразмерные величины; сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, очевидно, равна единице:

$$c_A + c_B + c_C = 1.$$

Поэтому, для того чтобы структура раствора, состоящего из $n$ компонент, была определена, достаточно

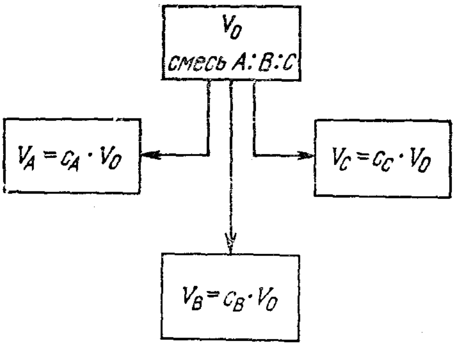


Рис. 1.

знать концентрацию $(n-1)$-й компоненты. Если известны концентрации $c_A$, $c_B$ и $c_C$ компонент, составляющих данную смесь, то ее объем можно разделить на объемы отдельных компонент (рис. 1):

$$V_0 = c_A V_0 + c_B V_0 + c_C V_0. \qquad (1)$$

*Объемным процентным содержанием* компоненты $A$ называется величина

$$p_A = c_A \cdot 100\%,$$

т. е. концентрация этого вещества, выраженная в процентах.

Если известно процентное содержание вещества $A$, то его концентрация находится по формуле

$$c_A = \frac{p_A}{100}.$$

Так, например, если процентное содержание составляет 70%, то соответствующая концентрация равна 0,7. Процентному содержанию 10% соответствует концентрация 0,1 и т. д.

Таким же способом определяются и весовые (массовые) концентрация и процентное содержание, а именно как отношение веса (массы) чистого вещества $A$ в сплаве к весу (массе) всего сплава. О какой концентрации, объемной или весовой, идет речь в конкретной задаче, всегда ясно из ее условия.

Встречается сравнительно немного задач, в которых приходится пересчитывать объемную концентрацию на весовую или наоборот. Для того чтобы это сделать, необходимо знать удельные веса компонент, составляющих раствор или сплав. Рассмотрим для примера двухкомпонентную смесь с объемными концентрациями компонент $c_1$ и $c_2$ $(c_1 + c_2 = 1)$ и удельными весами компонент $d_1$ и $d_2$. Вес смеси может быть найден по формуле

$$G = V_1 d_1 + V_2 d_2,$$

в которой $V_1$ и $V_2$ — объемы составляющих смесь компонент. Весовые концентрации компонент находятся из равенств

$$k_1 = \frac{V_1 d_1}{V_1 d_1 + V_2 d_2} = \frac{c_1 d_1}{c_1 d_1 + c_2 d_2} = \frac{c_1 d_1}{c_1 (d_1 - d_2) + d_2},$$

$$k_2 = \frac{V_2 d_2}{V_1 d_1 + V_2 d_2} = \frac{c_2 d_2}{c_1 d_1 + c_2 d_2} = \frac{c_2 d_2}{d_1 + c_2 (d_2 - d_1)},$$

которые определяют связь этих величин с объемными концентрациями.

Как правило, в условиях задач рассматриваемого типа встречается один и тот же повторяющийся элемент: из двух или нескольких смесей, содержащих компоненты $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, составляется новая смесь путем перемешивания исходных смесей, взятых в определенной пропорции. При этом требуется найти, в каком отношении компоненты $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ войдут в получившуюся смесь.

Для решения этой задачи удобно ввести в рассмотрение объемное или весовое количество каждой смеси, а также концентрации составляющих их компонент $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$. С помощью концентраций нужно «расщепить» каждую смесь на отдельные компоненты, как это сделано в формуле (1), а затем указанным в условии задачи способом составить новую смесь. При этом легко подсчитать, какое количество каждой компоненты входит в получившуюся смесь, а также полное количество этой смеси. После этого определяются концентрации компонент $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ в новой смеси.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере следующей задачи.

Задача. *Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди $p\%$ и $q\%$ соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий $r\%$ меди?*

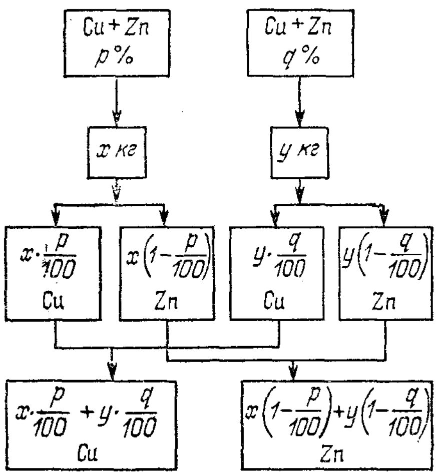


Рис. 2.

Решение. Составим иллюстративный рисунок к этой задаче (рис. 2). Концентрация меди в первом сплаве равна $p/100$, во втором $q/100$.

Если первого сплава взять $x$ кг, а второго $y$ кг, то с помощью концентраций (ясно, что речь идет о весовых концентрациях) можно «расщепить» эти количества на отдельные составляющие:

$$x = x \cdot \frac{p}{100} \text{ (кг меди)} + x\left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ (кг цинка)}$$

и

$$y = y \cdot \frac{q}{100} \text{ (кг меди)} + y\left(1 - \frac{q}{100}\right) \text{ (кг цинка)}.$$

Количество меди в получившемся сплаве равно

$$x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100} \text{ (кг меди)},$$

а масса этого сплава составит $x + y$ кг. Поэтому новая концентрация меди в сплаве, согласно определению, равна

$$\frac{x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100}}{x + y}.$$

По условию задачи эта концентрация должна равняться

$$\frac{x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100}}{x + y} = \frac{r}{100}$$

или

$$\frac{px + qy}{x + y} = r.$$

Решим полученное уравнение. Прежде всего заметим, что уравнение содержит два неизвестных $x$ и $y$. Нетрудно понять, что оба неизвестных однозначно не находятся. Концентрация получающегося сплава определяется не массой взятых кусков, а отношением этих масс. Поэтому в задаче и требуется определить не сами величины $x$ и $y$, а только их отношение.

Отметим попутно, что выражение вида

$$F(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy},$$

называемое дробно-линейной функцией, часто встречается в задачах на составление уравнений. В числителе и знаменателе этой дроби стоят линейные однородные выражения, зависящие от $x$ и $y$. Если не рассматривать случай $y = 0$, то функция

$F(x, y)$ зависит фактически только от одной переменной, а именно от отношения $\frac{x}{y}$:

$$F(x, y) = \frac{a \cdot \frac{x}{y} + b}{c \cdot \frac{x}{y} + d} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

При этом уравнение $F(x, y) = C$ позволяет найти это отношение.

Запишем уравнение задачи в следующем виде:

$$x(p - r) = y(r - q).$$

Рассмотрим возможные случаи:

1) $$p = r = q.$$

В этом случае концентрации всех сплавов одинаковые и уравнение показывает, что имеется бесчисленное множество решений. Можно взять сколько угодно первого сплава и сколько угодно второго сплава.

2) $$p = r \neq q.$$

В этом случае уравнение приобретает вид

$$x \cdot 0 = y(r - q),$$

откуда находим: $x$ — любое, $y = 0$. Физический смысл этого решения понятен: если концентрация сплава, который требуется получить, совпадает с концентрацией первого сплава, но не равна концентрации второго сплава, то первого сплава можно взять сколько угодно, а второго сплава не брать вовсе.

3) $$p \neq r = q.$$

Получаем уравнение

$$x(p - r) = y \cdot 0,$$

откуда находим: $y$ — любое, $x = 0$.

4) $$p \neq r, \quad p \neq q, \quad q \neq r.$$

В этом случае можно написать

$$x = y\frac{r - q}{p - r}.$$

Поскольку $y \neq 0$, то

$$\frac{x}{y} = \frac{r - q}{p - r}.$$

Это значение будет давать решение задачи, если выполняется неравенство

$$\frac{r-q}{p-r}>0,$$

которое, как нетрудно показать, имеет место, если значение $r$ заключено между значениями $p$ и $q$. Таким образом, если $p \neq q$, то можно получить сплав с любым процентным содержанием меди между $p$ и $q$.

Несмотря на то, что этот пример весьма простой, он достаточно хорошо иллюстрирует основной метод решения задач, связанных со смесями.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Три одинаковые пробирки наполнены до половины растворами спирта. После того как содержимое третьей пробирки разлили поровну в первые две, объемная концентрация спирта в первой уменьшилась на 20% от первоначальной, а во второй увеличилась на 10% от первоначального значения. Во сколько раз первоначальное количество спирта в первой пробирке превышало первоначальное количество спирта во второй пробирке?*

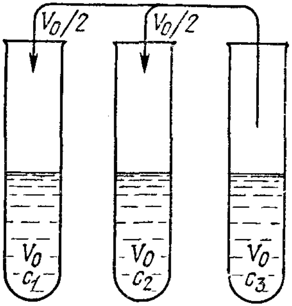

Рис. 3.

Решение. Введем в рассмотрение объем половины пробирки $V_0$ и концентрации растворов спирта в каждой из пробирок $c_1$, $c_2$ и $c_3$. Тогда первоначальное количество спирта в первой пробирке равно $V_0c_1$, во второй $V_0c_2$, в третьей $V_0c_3$ (рис. 3). Для того чтобы решить задачу, подсчитаем количество спирта в первой и второй пробирках после того, как туда добавят содержимое третьей пробирки. Эти количества будут равны: в первой пробирке

$$V_0c_1+\frac{1}{2}V_0c_3,$$

во второй пробирке

$$V_0c_2+\frac{1}{2}V_0c_3.$$

Найдем новые концентрации спирта в этих пробирках. Для первой пробирки она равна

$$c_1^* = \frac{V_0c_1 + \frac{1}{2}V_0c_3}{\frac{3}{2}V_0},$$

для второй

$$c_2^* = \frac{V_0c_2 + \frac{1}{2}V_0c_3}{\frac{3}{2}V_0}.$$

По условию задачи $c_1^* = 0{,}8c_1$ и $c_2^* = 1{,}1c_2$. Тогда имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_3 = 0{,}8\ c_1, \\ \frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_3 = 1{,}1\ c_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2c_1 - 5c_3 = 0, \\ 13c_2 - 10c_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы, так же как и в предыдущей задаче, нельзя определить все три концентрации $c_1$, $c_2$ и $c_3$. Но благодаря тому, что уравнения системы представляют собой однородные линейные выражения, из нее можно найти отношения двух концентраций к третьей, например $c_1/c_3$ и $c_2/c_3$:

$$m = \frac{c_1}{c_3} = \frac{5}{2},$$

$$n = \frac{c_2}{c_3} = \frac{10}{13}.$$

Количество спирта в первой пробирке относится к количеству спирта во второй пробирке как $m/n$. Действительно,

$$\frac{V_0c_1}{V_0c_2} = \frac{m}{n} = 13:4.$$

Поэтому ответ в данной задаче такой: 13 : 4.

Обратимся теперь к задачам, которые можно объединить в одну группу из-за того, что их решение связано с выявлением общей закономерности изменения той или иной величины в результате многократно повторяющейся операции.

Рассмотрим следующий пример.

*В сосуде, объем которого равен* $V_0$ л, *содержится* $p\%$*-ный раствор соли* (рис. 4). *Из сосуда выливается*

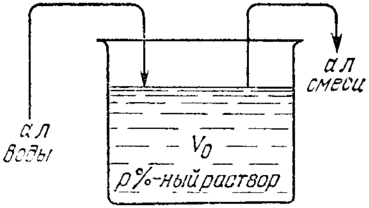


Рис. 4.

*a* л *смеси и доливается a* л *воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется n раз. Спрашивается, по какому закону меняется концентрация соли в сосуде, т. е. какова будет концентрация соли после n процедур?*

Решение. Очевидно, что первоначальное количество соли в растворе равно

$$\frac{p}{100}\cdot V_0.$$

После того как отлили $a$ л смеси, в растворе осталось

$$\frac{p}{100}\cdot V_0-\frac{p}{100}\cdot a=\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)$$

соли, а ее концентрация после добавления $a$ л воды стала равной

$$c_1=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right).$$

После того как отлили еще $a$ л смеси (но уже с концентрацией $c_1$), в растворе осталось соли

$$\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)-c_1\cdot a=\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2,$$

а ее концентрация после добавления $a$ л воды стала равной

$$c_2=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2.$$

Нет надобности еще раз проделывать ту же процедуру, чтобы убедиться, что концентрация соли в растворе после $n$ переливаний определяется формулой

$$\boxed{c_n = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n,} \tag{2}$$

представляющей собой убывающую геометрическую прогрессию. Множитель

$$1 - \frac{a}{V_0},$$

являющийся знаменателем этой прогрессии, показывает, во сколько раз убывает концентрация после очередного переливания.

Пример 1. *Пусть величина $a/V_0$ известна. После скольких переливаний концентрация соли в растворе уменьшится более чем в $k$ раз?*

Решение. Используя формулу (2) для концентрации соли в растворе после $n$ переливаний, получаем

$$\frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n < \frac{1}{k}\cdot\frac{p}{100}.$$

Отсюда находим

$$n > \log_{1-a/V_0}\frac{1}{k}.$$

Наименьшее количество таких переливаний равно целой части числа $\log_{1-a/V_0}\frac{1}{k}$ плюс единица.

Пример 2. *Известно, что после $n$ переливаний концентрация соли в растворе уменьшилась в $k$ раз. Определить, какую часть объема сосуда составляют $a$ л.*

Решение. Согласно формуле (2) имеем

$$\frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n = \frac{1}{k}\cdot\frac{p}{100}$$

или

$$\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n = \frac{1}{k}.$$

Отсюда находим отношение $a/V_0$:

$$\frac{a}{V_0}=1-\frac{1}{\sqrt[n]{k}}.$$

Пример 3. *В каждом из двух сосудов находится по $V_0$ л кислоты одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили $a$ л раствора и долили $a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Из второго сосуда отлили $2a$ л раствора и долили $2a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Известно, что концентрация кислоты в первом сосуде оказалась в 25/16 раза больше, чем концентрация кислоты во втором сосуде. Какую часть от объема сосуда составляют $a$ л?*

Решение. Используя полученные выше результаты, имеем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2=\frac{25}{16}\cdot\frac{p}{100}\left(1-\frac{2a}{V_0}\right)^2$$

или

$$\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2=\frac{25}{16}\left(1-2\cdot\frac{a}{V_0}\right)^2.$$

Из этого уравнения находим отношение $a/V_0$. Извлекая из обеих частей уравнения арифметический корень, получаем

$$\left|1-\frac{a}{V_0}\right|=\frac{5}{4}\left|1-2\cdot\frac{a}{V_0}\right|.$$

Поскольку $a/V_0<1$ и $2a/V_0<1$, то

$$1-\frac{a}{V_0}=\frac{5}{4}\left(1-2\cdot\frac{a}{V_0}\right).$$

Отсюда находим решение задачи:

$$\frac{a}{V_0}=\frac{1}{6}.$$

Замечание. При извлечении арифметического корня из обеих частей уравнения использована формула

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Приведем обобщение формулы (2) на случай, когда каждый раз в сосуд доливается не вода, а раствор той же соли с постоянной концентрацией $q/100$. Эта формула имеет вид

$$\boxed{c_n = \frac{p}{100} + \frac{p-q}{100}\left[\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right].} \qquad (3)$$

Для доказательства этой формулы обозначим концентрацию раствора соли, который содержится в сосуде после $n$ переливаний, через $c_n$. Тогда после очередной $(n+1)$-й процедуры, которая состоит в том, что выливают $a$ л раствора с концентрацией $c_n$ и доливают $a$ л $q\%$-ного раствора, концентрация соли становится равной $c_{n+1}$:

$$c_{n+1} = \frac{V_0 c_n - a c_n + a\dfrac{q}{100}}{V_0},$$

или

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right) c_n + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{q}{100}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Постараемся определить концентрацию $c_n$ из полученного соотношения. При этом будем учитывать, что начальное значение концентрации известно:

$$c_0 = \frac{p}{100} \quad \text{при } n = 0.$$

Запишем следующие два равенства:

$$c_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right) c_n + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{q}{100},$$

$$c_n = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right) c_{n-1} + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{q}{100}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Вычитая эти выражения почленно друг из друга, получим

$$c_{n+1} - c_n = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)(c_n - c_{n-1}).$$

Если обозначить разность концентраций $c_n - c_{n-1}$ через $u_n$, последнее равенство можно переписать в более простом виде:

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right) u_n$$

или

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{a}{V_0}\right).$$

Отсюда видно, что последовательность чисел $u_n$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $1 - a/V_0$:

$$u_n = u_1 \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1}.$$

Первый член этой прогрессии легко определяется:

$$u_1 = c_1 - c_0 = \left[\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)\frac{p}{100} + \frac{a}{V_0}\cdot\frac{q}{100}\right] - \frac{p}{100},$$

$$u_1 = \frac{q-p}{100}\cdot\frac{a}{V_0}.$$

После этого находим

$$u_n = \frac{q-p}{100}\cdot\frac{a}{V_0}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1}$$

или

$$c_n - c_{n-1} = \frac{q-p}{100}\cdot\frac{a}{V_0}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1}.$$

Запишем последнее равенство для значений $n$, равных 1, 2, ..., $n$, и сложим получающиеся соотношения между собой:

$$\begin{array}{l} c_1 - c_0 = \dfrac{q-p}{100}\cdot\dfrac{a}{V_0}\cdot 1 \\ c_2 - c_1 = \dfrac{q-p}{100}\cdot\dfrac{a}{V_0}\left(1 - \dfrac{a}{V_0}\right)^1 \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n - c_{n-1} = \dfrac{q-p}{100}\cdot\dfrac{a}{V_0}\left(1 - \dfrac{a}{V_0}\right)^{n-1} \\ \hline c_n - c_0 = \dfrac{q-p}{100}\cdot\dfrac{a}{V_0}\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{a}{V_0}\right)^n - 1}{\left(1 - \dfrac{a}{V_0}\right) - 1} \end{array}$$

или

$$c_n = c_0 + \frac{p-q}{100}\left[\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right].$$

При сложении правых частей рассматриваемых равенств использовалась формула для суммы членов геометрической прогрессии.

Подставляя вместо $c_0$ ее значение $p/100$, получим формулу (3). Заметим, что при $q = 0$ эта формула переходит в ранее полученную формулу (2).

Формула (2) тесно связана с известным в теории процентов правилом начисления «сложных процентов».

Мы говорим, что имеем дело со «сложными процентами», в том случае, когда некоторая величина подвержена поэтапному изменению. При этом каждый раз ее изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе.

Рассмотрим сначала случай, когда в конце каждого этапа величина изменяется на одно и то же постоянное количество процентов — $p\%$.

Некоторая величина $A$, исходное значение которой равно $A_0$, в конце первого этапа будет равна

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

В конце второго этапа ее значение станет равным

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Здесь множитель $1 + p/100$ показывает, во сколько раз величина $A$ увеличилась за один этап. В предыдущих задачах о концентрациях эту роль играл множитель $1 - a/V_0$.

В конце третьего этапа

$$A_3 = A_2 + \frac{p}{100} A_2 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

и т. д.

Нетрудно понять, что в конце $n$-го этапа значение величины $A$ определится формулой

$$\boxed{A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.} \tag{4}$$

Эта формула показывает, что величина $A$ растет (или убывает, если $p < 0$) как геометрическая прогрессия, первый член которой равен $A_0$, а знаменателем прогрессии служит величина

$$1 + \frac{p}{100}.$$

Формула (4) является исходной формулой при решении многих задач на проценты.

Пример. *Сберкасса выплачивает* 3% *годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?*

Решение. Пусть величина вклада составляет $A_0$ руб. Тогда через $n$ лет эта величина станет равной $2A_0$ руб. Имеем

$$A_0\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 2A_0,$$

$$n = \log_{1,03} 2 \approx 23.$$

*Ответ*. Через 23 года.

Формула (4) имеет интересное приложение. Во многих областях практики имеются величины, которые испытывают приращение не скачкообразным образом, а меняются непрерывно, так что их изменение за этап составляет $p\%$.

Нетрудно определить, как меняются эти величины, если начисление процентов производить в течение каждого этапа не один раз, а $m$ раз из расчета $p\%$ за этап (т. е. каждый раз начислять по $p/m\%$). Легко понять, что за $n$ этапов начисление процентов произойдет $mn$ раз.

Воспользовавшись формулой (4), получаем

$$A_n(m) = A_0\left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{mn}.$$

Здесь $A_n(m)$ — значение величины $A$ в конце $n$-го этапа при условии, что в течение каждого этапа проценты начислялись $m$ раз.

Неограниченно увеличивая число $m$, мы переходим к рассмотрению непрерывного изменения величины $A$. Тогда предельное значение величины $A$ в конце $n$-го этапа определится формулой

$$A_n = \lim_{m \to \infty}\left[A_0\left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{mn}\right].$$

Таким образом, задача о непрерывном начислении процентов приводит к необходимости вычислить один из замечательных пределов математики. Этот предел обозначается буквой $e$ и называется основанием натуральных логарифмов:

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}7182\ldots$$

Окончательный вид рассматриваемой формулы такой:

$$A_n = A_0\, e^{\frac{p}{100}n}.$$

Показательная функция, стоящая в правой части последней формулы, называется экспонентой.

В заключение этого параграфа приведем обобщение формулы (4) на случай, когда прирост величины $A$ на каждом этапе свой.

Пусть величина $A$ в конце первого этапа испытывает изменение на $p_1\%$, в конце второго этапа — на $p_2\%$, в конце третьего этапа — на $p_3\%$ и т. д. Если $p_k > 0$, то величина $A$ на этом этапе возрастает; если $p_k < 0$, то величина $A$ на этом этапе убывает.

Как говорилось выше, изменение величины $A$ на $p\%$ равносильно умножению этой величины на множитель $1 + p/100$. Поэтому окончательный вид искомой формулы такой:

$$\boxed{A_n = A_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right).} \qquad (5)$$

Здесь $A_0$ — первоначальное значение величины $A$.

Иногда в задачах на составление уравнений встречается понятие «средний процент прироста». Под этим термином понимают такой постоянный процент прироста, который за $n$ этапов давал бы такое же изменение величины $A$, которое она получает в действительности, при неравных поэтапных процентах изменения.

Средний процент прироста $q\%$ определяется формулой

$$A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right)=A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

или

$$\frac{q}{100}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right)}-1.$$

Отсюда видно, что средний процент прироста не равен среднему арифметическому величин $p_1$, $p_2$, … …, $p_n$. Здесь существует полная аналогия с определением известного из физики понятия «средняя скорость движения».

П р и м е р. *Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%. На следующий год она увеличилась на 8%. Определить средний ежегодный прирост продукции за этот период.*

Р е ш е н и е. Обозначим средний ежегодный прирост продукции через $q\%$. Тогда

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$q=\sqrt{104\cdot 108}-100\approx 5{,}98.$$

*Упражнения*

**1.** В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился $r\%$-ный раствор серной кислоты? Найти все $r$, при которых задача имеет решение.

*Ответ.* $\frac{4r-280}{90-r}$, $70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}$.

2. Из двух жидкостей, плотности которых равны 2 г/см$^3$ и 3 г/см$^3$ соответственно, составлена смесь. Сколько граммов каждой жидкости взято и какова плотность смеси, если 4 см$^3$ смеси весят в десять раз меньше, чем вся первая жидкость, а 50 см$^3$ смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь?

*Ответ.* 1080/11 г, 1350/11 г, 27/11 г/см$^3$.

3. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по массе, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по массе, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

*Ответ.* 5 г и 20 г.

4. Имеются три смеси, составленные из трех элементов $A$, $B$ и $C$. В первую смесь входят только элементы $A$ и $B$ в весовом отношении $3:5$, во вторую смесь входят только элементы $B$ и $C$ в весовом отношении $1:2$, в третью смесь входят только элементы $A$ и $C$ в весовом отношении $2:3$. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы $A$, $B$ и $C$ содержались в весовом отношении $3:5:2$?

*Ответ.* $20:6:3$.

5. Три одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из второго и третьего сосудов отливают по $a$ л (строго больше половины) спирта и доливают водой. Затем из третьего сосуда отливают $a$ л смеси и доливают его водой. После этого объем спирта в первом и втором сосудах, вместе взятых, в 6/5 раза больше, чем объем спирта в первом и третьем сосудах, вместе взятых. Какую часть объема сосуда составляет величина $a$?

*Ответ.* 2/3.

6. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

*Ответ.* Первая труба подает жидкость быстрее в два раза.

7. Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на $p$%, а за следующий год по сравнению с первона-

чальной она возросла на 10% больше, чем за первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

*Ответ.* На 17%.

**8.** В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

*Ответ.* 10%.

**9.** В оленеводческом совхозе стадо увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года совхоз купил 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определить процент естественного прироста.

*Ответ.* 10%.

**10.** Смесь равных объемов двух веществ имеет массу $6\frac{2}{13}$ г. Масса второго вещества в смеси равна массе 52/7 см$^3$ первого вещества, а плотность второго вещества равна 1 г/см$^3$. Найти объем каждого вещества в смеси.

*Ответ.* 4 см$^3$.

## § 2. ЗАДАЧИ «НА ДВИЖЕНИЕ»

Рассмотрим теперь задачи на составление уравнений, которые условно можно назвать задачами «на движение». Система уравнений, которую необходимо составить на основании условий этих задач, обычно содержит такие параметры движения, как пройденное расстояние $(s, l, r)$, скорости движущихся тел $(u, v, w)$, время движения $(t, T)$. Следует заметить, что обозначение тех или иных неизвестных обычно принятыми для них в физике буквами концентрирует внимание на существе задачи, делает систему уравнений более понятной для решающего задачу, исключает случайные ошибки, которые могут возникать из-за безликости введенных обозначений.

*Допущения*, которые обычно принимаются (если не оговорено противное) в условиях задач «на движение», состоят в следующем:

а) движение на отдельных участках считается равномерным; при этом пройденный путь определяется по формуле

$$s = vt;$$

б) повороты движущихся тел принимаются мгновенными, т. е. происходят без затрат времени; скорость при этом также меняется мгновенно;

в) если тело движется по течению реки, то его скорость $w$ слагается из скорости в стоячей воде $v$ плюс скорость течения реки $u$:

$$w = v + u,$$

а если против течения реки, то его скорость равна

$$w = v - u.$$

Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то этим хотят сказать, что тело движется со скоростью течения реки.

К задачам «на движение» относятся также и задачи, в которых кто-либо выполняет какую-нибудь работу, или задачи, связанные с наполнением и опорожнением резервуаров. В задачах такого типа вся работа или полный объем резервуара играет роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения.

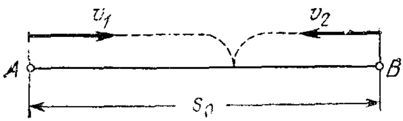


Рис. 5.

В задачах на составление уравнений и в первую очередь в задачах, связанных с движением, весьма полезно составить иллюстративный чертеж. Этот чертеж нужно сделать таким, чтобы на нем была видна динамика движения, со всеми встречами, остановками и поворотами. Хорошо составленный чертеж позволяет понять содержание задачи, не заглядывая в ее текст. Примеры таких чертежей приведены ниже.

При решении задач «на движение» часто встречаются следующие два элемента:

а) движение навстречу друг другу (рис. 5); если первоначальное расстояние между двумя точками, движущимися навстречу друг другу со скоростью $v_1$

и $v_2$, равно $s_0$, то время, через которое они встретятся, равно

$$T = \frac{s_0}{v_1 + v_2};$$

б) движение в одном направлении (рис. 6); если первоначальное расстояние между двумя точками, из которых одна догоняет другую, равно $s_0$, то время,

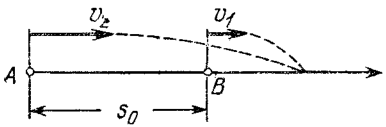


Рис. 6.

через которое вторая точка (скорость $v_2$) догонит первую (скорость $v_1$), равно

$$T = \frac{s_0}{v_2 - v_1} \qquad (v_2 > v_1).$$

Рассмотрим теперь методику составления уравнений по тексту задачи. Сделаем это на конкретных примерах.

Задача. *Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот. В этот же момент времени из города B в город*

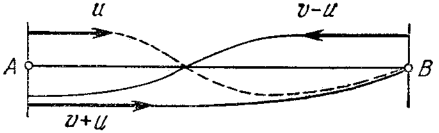


Рис. 7.

*A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A, лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в город B к 9 часам вечера (того же дня)?*

Решение. Внимательно ознакомившись с условием этой задачи, составим следующий чертеж (рис. 7).

Выделим теперь из условия задачи предложения, математическая запись которых образует систему уравнений задачи. Их два:

лодка и плот отправляются одновременно и встречаются через 5 часов;

лодка возвращается в город $B$ одновременно с плотом.

Для записи этих предложений с помощью уравнений нужно решить вопрос, какие неизвестные ввести в рассмотрение. В основу выбора неизвестных может быть положен следующий принцип: неизвестные следует вводить так, чтобы с помощью уравнений записать имеющиеся в задаче условия наиболее просто. При этом вовсе не обязательно, чтобы величина, которую требуется определить, фигурировала в их числе.

Например, в рассматриваемой задаче расстояние между городами $s$, скорость течения реки (и плота) $u$ и скорость лодки в стоячей воде $v$ позволяют очень просто записать все условия, содержащиеся в ее тексте.

| Условие задачи | Уравнение |
|---|---|
| Лодка и плот отправляются одновременно и встречаются через 5 ч | $\frac{s}{u+(v-u)}=5 \quad (v>u)$ |
| Лодка возвращается в $B$ одновременно с плотом | $\frac{s}{u}=\frac{s}{v-u}+\frac{s}{v+u}$ |

В последнем уравнении отношение $s/u$ представляет собой время движения плота, $s/(v-u)$ — время движения лодки вверх по течению, $s/(v+u)$ — время движения лодки вниз по течению реки.

Таким образом, получается система двух уравнений с тремя неизвестными. Ясно, что все три неизвестные $s$, $u$ и $v$ из этой системы однозначно найти нельзя. Обратимся к условию задачи. Что же требуется определить? Нужно ответить на вопрос, успеют ли лодка и плот приплыть в город $B$ к 9 часам вечера, т. е. нужно сравнить время движения с 12 часами.

Поскольку время движения равно $s/u$, то нужно определить не сами неизвестные, а только их отношение, величину $s/u$.

Используя свойство дробно-линейной функции, о которой шла речь в предыдущем параграфе, систему уравнений задачи можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v} = 5, \\ \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{v-u} + \dfrac{1}{v+u} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v} = 5, \\ \dfrac{1}{u/v} = \dfrac{1}{1-u/v} + \dfrac{1}{1+u/v}, \end{cases}$$

т. е. эта система содержит фактически только две неизвестные: $s/v$ и $u/v$.

Из второго уравнения системы определяется значение отношения $u/v$. Оно равно $\sqrt{2}-1$. Таким образом, имеем

$$\frac{s}{v} = 5, \qquad \frac{u}{v} = \sqrt{2}-1.$$

После этого сразу определяется отношение $s/u$:

$$\frac{s}{u} = \frac{s/v}{u/v} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} = 5(\sqrt{2}+1) > 12.$$

Значит, лодка и плот не успеют приплыть в пункт $B$ к 9 часам вечера того же дня.

Замечание. Условие этой задачи не содержит величин, имеющих размерность длины. Поэтому здесь можно было бы обозначить расстояние между городами через 1. Фактически это означало бы, что расстояние между городами выбрано за единицу измерения длины. Тогда из первого уравнения находится скорость движения лодки и затем время движения $1/u$.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта $A$ в пункт $B$. Более чем через час после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжал путь пешком, двигаясь в 4,5 раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист — через 5/8 ч после поломки, а пешеход — через 10,8 ч после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние, в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позд-*

*нему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?*

Решение. Чертеж к этой задаче (рис. 8) показывает, что удобно ввести четыре неизвестные: скорости велосипедистов $v_1$ и $v_2$, скорость пешехода $u$ и время поломки $t$.

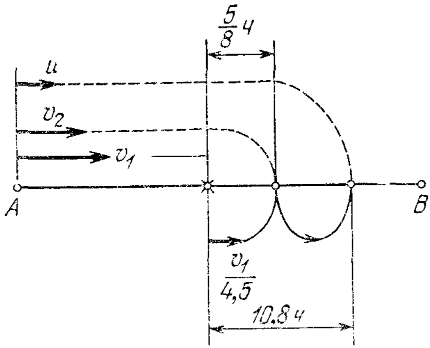


Рис. 8.

Очевидно, что $v_1 > v_2 > u$; $v_1/4{,}5 < u$; $t > 1$. Выделим из текста задачи условия, которые предстоит записать в виде уравнений. Их три.

| Условие задачи | Уравнение |
|---|---|
| Второй велосипедист обогнал первого через 5/8 ч после поломки | $v_2\left(t+\frac{5}{8}\right)=v_1t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8}$ |
| Пешеход обогнал первого велосипедиста через 10,8 ч после поломки | $u\,(t+10{,}8)=v_1t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot 10{,}8$ |
| К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние, в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки | $v_2t=2u\left(t+\frac{5}{36}\right)$ |

Таким образом, мы располагаем тремя уравнениями, которые содержат четыре неизвестные величины $v_1$, $v_2$, $u$ и $t$. Так же, как это уже неоднократно встречалось раньше, необходимо отметить, что однозначно найти все четыре неизвестные из этой системы нельзя. Однако каждое из составленных уравнений является линейным однородным уравнением относительно переменных $v_1$, $v_2$ и $u$ *). Поэтому, разделив каждое из них на $u$, легко заметить, что число неизвестных уменьшается до трех: $t$ и два отношения $v_1/u$ и $v_2/u$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{v_2}{u}\left(t+\frac{5}{8}\right)=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8},\\ &t+10{,}8=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot 10{,}8,\\ &\frac{v_2}{u}\cdot t=2\left(t+\frac{5}{36}\right).\end{aligned}\right.$$

Подставляя значение отношения $v_1/u$ из второго уравнения в первое, найдем

$$\frac{v_2}{u}=\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t+5/36}{t+5/8}.$$

Используя третье уравнение, получаем

$$\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t}{t+5/8}=2$$

или

$$t^2-4{,}75\,t+3=0.$$

Отсюда находим два значения $t$:

$$t_1=\frac{3}{4},\quad t_2=4.$$

Поскольку известно, что поломка произошла более чем через час после начала движения, то решением задачи служит второй корень уравнения.

*Ответ.* 4 ч.

З а м е ч а н и е. Рассмотрение этих двух примеров показывает, в чем состоит методика составления уравнений по тексту задачи. Ее сущность заключается в том, чтобы выделить в тексте задачи те предложения, которые представляют собой связи

---

*) Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящая от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется линейной однородной, если она имеет вид $F=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — коэффициенты. Соответствующее уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$$

называется линейным однородным уравнением.

между параметрами движения. После введения неизвестных по принципу наибольшего удобства записи этих связей получаются уравнения, определяющие решение задачи.

Рассмотрим задачи на составление уравнений, в которых движение происходит по кольцевым дорогам.

Задача. *Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющего форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, а через полчаса после этого он вторично, не считая момента старта, обогнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 часа после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее чем за двадцать минут?*

Решение. Особенность таких задач состоит в том, что движение происходит по кольцевой замкнутой дороге и гонщик, движущийся с большей скоростью, в некоторый момент оказывается как бы сзади гонщика, который движется с меньшей скоростью. Возникает своеобразная ситуация, при которой гонщик, находящийся «впереди», догоняет гонщика, находящегося «сзади».

Однако, несмотря на запутанную, на первый взгляд, картину движения, легко проследить движение каждого гонщика, если принять во внимание простое соображение: если один из одновременно стартовавших гонщиков в первый раз догоняет другого, то он проходит расстояние, на один круг большее, чем этот гонщик. Если он обгоняет его во второй и третий раз, то это означает, что он проходит расстояние, на два и три круга большее, чем другой гонщик.

Обратимся к задаче. Обозначим длину кольцевого пути буквой $s$, а скорости гонщиков $v_1$, $v_2$ и $v_3$ соответственно. Очевидно, что $v_1 > v_2 > v_3$.

Первый гонщик догоняет второго со скоростью $v_1 - v_2$, третьего — со скоростью $v_1 - v_3$, а второй гонщик догоняет третьего со скоростью $v_2 - v_3$.

В тот момент, когда один из гонщиков догоняет другого в первый раз, он проходит расстояние, на $s$ большее, чем другой гонщик, во второй раз — расстояние, на $2s$ большее, чем другой гонщик, и т. д.

Приведем схему составления уравнений задачи.

| Условие задачи | Уравнение |
|---|---|
| Первый гонщик догоняет в первый раз второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту (т. е. пройдя 4,5 круга) | $\frac{s}{v_1 - v_2} = \frac{4{,}5s}{v_1}$ |
| Через полчаса после встречи со вторым гонщиком первый гонщик вторично обгоняет третьего | $\frac{4{,}5s}{v_1} + \frac{1}{2} = \frac{2s}{v_1 - v_3}$ |
| Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 ч после старта | $\frac{s}{v_2 - v_3} = 3$ |
| Второй гонщик проходит один круг не менее чем за двадцать минут | $\frac{s}{v_2} \geqslant \frac{1}{3}$ |

Учет неравенства, присутствующего среди условий задачи, необходим для получения однозначного решения.

Условие задачи требует найти не сами неизвестные $s$, $v_1$, $v_2$ и $v_3$, а только отношение $v_1/s$. Система уравнений показывает, что имеет смысл ввести новые неизвестные $n$, $m$, $k$:

$$n = \frac{v_1}{s}, \quad m = \frac{v_2}{s}, \quad k = \frac{v_3}{s},$$

определяющие, сколько кругов в час делает каждый гонщик. Тогда система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} n - m = \frac{2}{9} n, \\ n - k = \frac{4n}{9 + n}, \\ m - k = \frac{1}{3}, \\ m \leqslant 3. \end{cases}$$

Складывая первое и последнее уравнения между собой и вычитая из получившейся суммы второе уравнение системы, получаем квадратное уравнение для определения величины $n$:

$$2n^2 - 15n + 27 = 0.$$

Отсюда находим два значения $n$:

$$n_1 = 4{,}5; \quad n_2 = 3.$$

Первое из этих значений не удовлетворяет условию задачи, так как $m_1 = 3{,}5 > 3$. При $n = n_2 = 3$ получаем $m = 2\frac{1}{3} < 3$. Следовательно, $n = 3$ есть решение задачи.

*Ответ.* Первый гонщик делает 3 круга в час.

В качестве последнего примера в этом параграфе рассмотрим задачу «на выполнение работы». Как уже отмечалось, такие задачи с полным правом можно причислить к задачам «на движение».

Задача. *Две машины, рывшие туннель навстречу друг другу, закончили его проходку за* 60 *дней. Если бы первая машина работала* 18 *дней, а вторая* 16 *дней, то вместе они прошли бы* 60 м *туннеля. Если бы первая машина выполнила* 2/3 *всей работы второй машины по проходке туннеля, а вторая* 0,3 *всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на* 6 *дней больше, чем второй. Сколько метров туннеля в день проходит каждая машина?*

Решение. Введем, аналогично скоростям в задачах «на движение», производительности машин $v_1$ (м/день) и $v_2$ (м/день). Тогда величина всей работы — длина туннеля — аналогична расстоянию в задачах «на движение» и определится суммой

$$60v_1 + 60v_2.$$

Здесь $60v_1$ — объем работы, выполненный первой машиной, а $60v_2$ — объем работы, выполненный второй машиной.

Составим уравнения задачи.

| Условие задачи | Уравнение |
|---|---|
| Если бы первая машина работала 18 дней, а вторая 16 дней, то было бы пройдено 60 м туннеля | $18v_1 + 16v_2 = 60$ |
| Если бы первая машина выполнила 2/3 всей работы второй машины, а вторая 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на 6 дней больше, чем второй | $\dfrac{\frac{2}{3}(60v_2)}{v_1} - \dfrac{0{,}3\,(60v_1)}{v_2} = 6$ |

После упрощений система уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} 9v_1 + 8v_2 = 30, \\ 9v_1^2 + 3v_1v_2 - 20v_2^2 = 0. \end{cases}$$

Эту систему удобнее всего решить, если записать второе соотношение в виде квадратного уравнения для отношения производительностей $v_1/v_2$:

$$9\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + 3\left(\frac{v_1}{v_2}\right) - 20 = 0.$$

Отсюда находим положительное решение:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}, \quad \text{т. е. } 3v_1 = 4v_2.$$

Используя этот результат совместно с первым уравнением системы, находим

$$v_1 = 2 \text{ м/день}; \quad v_2 = 1{,}5 \text{ м/день}.$$

З а м е ч а н и е. Второе уравнение рассматриваемой системы имеет форму, которая часто встречается в различных задачах по элементарной математике, а именно, уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

может быть записано в виде квадратного уравнения для

а) отношения $\frac{x}{y}$, если $A \neq 0$:

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0;$$

б) отношения $\frac{y}{x}$, если $C \neq 0$:

$$A + B\left(\frac{y}{x}\right) + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Аналогично этому функция двух переменных $x$ и $y$:

$$F(x, y) = \frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2}{A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2}$$

в случае, если $y \neq 0$, является функцией только одной переменной, а именно отношения $x/y$:

$$F(x, y) = \frac{A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\frac{x}{y} + C}{A_1\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B_1\frac{x}{y} + C_1} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

*Упражнения*

**1.** Из города $A$ в город $B$ выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города $B$ навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в три раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между $A$ и $B$. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к $A$. Найти расстояние между городами $A$ и $B$.

*Ответ.* 180 км.

**2.** Первая и вторая бригады одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения всей работы. На выполнение работы указанным способом ушло 5,5 часа. Первая бригада за все время, пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 часов больше, чем это было на самом деле, то она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, то работа была бы выполнена в 1,5 раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?

*Ответ.* 2,5 часа.

**3.** Из пункта $A$ в пункт $B$ выехал автомобиль, и одновременно из пункта $B$ в пункт $A$ выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта $B$, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через 2 часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта $A$, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от $B$ до $A$?

*Ответ.* 8 ч 45 мин.

**4.** Две трубы, действуя вместе в течение 1 часа, наполняют водой 3/4 бассейна. Если сначала первая труба наполнит 1/4 часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до 3/4 бассейна, то на это понадобится 2,5 часа. Если первую трубу включить на 1 час, а вторую — на полчаса, то они наполнят бассейн более чем наполовину. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

*Ответ.* 2 часа и 4 часа.

**5.** Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 минуты после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 минут?

*Ответ.* 0,5 круга в минуту.

**6.** Города $A$ и $B$ расположены на берегу реки, причем город $A$ расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно навстречу друг другу выходят две лодки, которые встречаются посередине между городами $A$ и $B$. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов $B$ и $A$, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 км от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов $A$ и $B$, поплыли обе против течения, то лодка, вышедшая из $A$, догнала бы лодку, вышедшую из $B$, в 150 км от $B$. Найти расстояние между городами $A$ и $B$.

*Ответ.* 100 км.

**7.** Два парохода, скорость которых в стоячей воде одна и та же, отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани $A$ вниз по течению, второй — от пристани $B$ вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 мин и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке $K$, которая в два раза ближе к $A$, чем к $B$. Если первый пароход отходит от $A$ на 1 час позже, чем второй пароход отходит от $B$, то на обратном пути пароходы встречаются в 20 км от $A$. Если первый пароход отходит от $A$ на 30 мин раньше, чем второй отходит от $B$, то на обратном пути они встречаются в 5 км выше $K$. Найти скорость течения реки и время, за которое второй пароход доходит от $A$ до $K$.

*Ответ.* 7,5 км/ч; второй пароход доходит от $A$ до $K$ за 20 мин.

**8.** Автозавод изготовляет легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых машин — на 50 штук больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?

*Ответ.* 450 и 550.

**9.** Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной в 960 и 180 м. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых первый экскаватор прокладывал большую траншею. Второй же экскаватор начал работать на 6 дней позднее первого, отрыл меньшую траншею, 3 дня ремонтировался и затем помогал первому. Если не нужно было бы тратить времени на ремонт, то работа была бы закончена за 21 день. Сколько метров траншеи может отрыть в день каждый экскаватор?

*Ответ.* 40 м/день, 20 м/день.

**10.** Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения. Две байдарки, имеющие в стоячей воде одинаковую скорость, выходят одновременно по течению: первая в левую протоку, вторая — в правую. Первая байдарка прошла свою протоку на 5 мин быстрее, чем вторая. Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 мин быстрее, чем первая. Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 мин быстрее, чем первая. За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению?

*Ответ.* 40 мин.

## § 3. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ ПРЕВЫШАЕТ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

Среди примеров, рассмотренных в предыдущих параграфах, уже встречались задачи, в которых количество неизвестных в системе уравнений превышало число самих уравнений. Причины, приводившие к такой ситуации, вполне понятны и связаны со способом решения задач. Если выбирать неизвестные для составления уравнений, руководствуясь принципом наибольшего удобства математической записи условий задачи, то та величина, которую необходимо найти, может не войти в их число. Как правило, эта величина представляется некоторой комбинацией введенных неизвестных. Поэтому может случиться так, что однозначное определение всех неизвестных из системы уравнений невозможно, однако искомая комбинация этих неизвестных тем не менее находится однозначно.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих эту особенность некоторого класса задач на составление уравнений.

Задача. *Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка —*

*в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, чем на самом деле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы* 12 руб. *Сколько стоит вся покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?*

Решение. Наиболее естественно ввести в этой задаче стоимости портфеля, авторучки и книги: $x$, $y$ и $z$ руб. соответственно. Тогда первое и второе условия задачи дают два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=8, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x+5y+4z=80, \\ 6x+3y+4z=144. \end{cases}$$

Таким образом, мы располагаем системой двух уравнений, в которой содержатся три неизвестные. Понятно, что определить все три неизвестные однозначно из такой системы нельзя. Однако условие задачи и не требует этого. Необходимо найти лишь стоимость всей покупки, т. е. величину $x+y+z$. А такая комбинация неизвестных легко находится из приведенной системы уравнений.

Складывая почленно уравнения системы, получаем

$$8x+8y+8z=224,$$
$$x+y+z=28,$$

откуда находим, что вся покупка стоит 28 руб. Осталось сравнить между собой величины $x$ и $y$.

Исключая величину $z$ из системы уравнений, находим

$$2x-y=32$$

или

$$x+(x-y)=32.$$

Поскольку $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $x+y+z=28$, то ясно, что $x<28$. Значит, $x-y>4$, т. е. $x>y$.

*Ответ.* 28 руб.; портфель дороже авторучки.

Таким образом, центральным местом только что рассмотренной задачи явилось вычисление определенной комбинации неизвестных, а именно их суммы, на основе системы уравнений, из которой сами неизвестные однозначно не находятся.

Рассмотрим еще один пример задачи подобного типа.

Задача. *Имеются два различных сплава меди со свинцом. Если взять* 1 кг *первого сплава и* 1 кг *второго сплава и переплавить их, то получится сплав, содержащий* 65% *меди. Известно, что если взять два куска — кусок* I *и кусок* II *первого и второго сплавов соответственно, имеющих суммарную массу* 7 кг, *и переплавить их, то получится сплав с содержанием* 60% *меди. Какова масса меди, содержащейся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску* II, *и куска второго сплава, равного по массе куску* I?

Решение. Введем процентные содержания меди в сплавах: $p\%$ — в первом (концентрация меди $p/100$) и $q\%$ — во втором (концентрация меди $q/100$), а также масса куска I — $x$ кг и масса куска II — $y$ кг. Составим уравнения задачи.

| Условие задачи | Уравнение |
|---|---|
| 1 кг первого сплава, переплавленный с 1 кг второго сплава, дает сплав, содержащий 65% меди | $\dfrac{1\cdot\dfrac{p}{100}+1\cdot\dfrac{q}{100}}{2}=\dfrac{65}{100}$ |
| Суммарная масса куска I и куска II равна 7 кг | $x+y=7$ |
| Если переплавить кусок I и кусок II, то получится сплав, содержащий 60% меди | $\dfrac{x\cdot\dfrac{p}{100}+y\cdot\dfrac{q}{100}}{x+y}=\dfrac{60}{100}$ |

Таким образом, получается система трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} p+q=130, \\ x+y=7, \\ px+qy=420. \end{cases}$$

Конечно, все четыре неизвестных из такой системы определить нельзя. Поэтому обратимся к вопросу, на который нужно ответить. Требуется определить, какова масса меди, содержащейся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску II, и куска второго сплава, равного по массе куску I, т. е. величину $Q$:

$$Q = y \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100} = \frac{qx + py}{100}.$$

Система уравнений этой задачи обладает такой структурой, что величину $qx + py$ можно легко найти.

Перемножая почленно первое и второе уравнения и вычитая из произведения третье уравнение, получаем

$$(p + q)(x + y) - (px + qy) = qx + py = 490.$$

После этого находим величину $Q$:

$$Q = 4{,}9 \text{ кг}.$$

*Ответ.* 4,9 кг.

Наконец, последний пример задачи этого типа.

Задача. *Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за* 40 мин; *вторая, третья и четвертая, работая одновременно,* — *за* 10 мин; *вторая, третья и пятая* — *за* 20 мин *и, наконец, пятая и четвертая* — *за* 30 мин. *За сколько времени наполняют резервуар все пять труб при одновременной работе?*

Решение. Несомненно, что наиболее удобными неизвестными, которые следует ввести в этой задаче, являются следующие: объем резервуара $V_0$, производительности насосов $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ соответственно. Тогда сразу же составляются четыре уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{V_0}{40}, \\ x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{V_0}{10}, \\ x_2 + x_3 + x_5 = \dfrac{V_0}{20}, \\ x_4 + x_5 = \dfrac{V_0}{30}, \end{cases}$$

из которых все шесть неизвестных, разумеется, однозначно найти нельзя. Однако в условии сказано, что нужно найти не производительности отдельных насосов, а время наполнения резервуара при совместной работе всех пяти труб, т. е., в конечном счете, общую производительность всех насосов: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$. Это легко сделать, умножив первое уравнение на 2 и сложив результат со всеми остальными:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=\frac{7V_0}{30},$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{7V_0}{60}.$$

Отсюда находится время наполнения резервуара

$$T=\frac{V_0}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}=\frac{V_0}{7V_0/60}=\frac{60}{7}.$$

*Ответ*. 60/7 мин или 1/7 часа.

В предыдущих задачах система уравнений, не позволяя определить сами неизвестные, тем не менее давала возможность найти некоторую комбинацию этих неизвестных. Однако не исключена возможность и такой ситуации, при которой меньшее количество уравнений позволяет найти большее количество неизвестных. Рассмотрим следующий пример.

Задача. *Три пункта $A$, $B$ и $C$ соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги $AB$ примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}|AB|$; к отрезку дороги $BC$ примыкает квадратное поле со стороной, равной $|BC|$, а к отрезку дороги $AC$ примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной $|AC|$, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.*

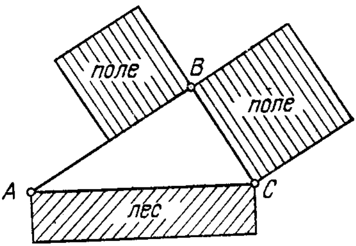

Рис. 9.

Решение. Пусть $|AB|=x$, $|BC|=y$, $|AC|=z$ (рис. 9). Тогда, исходя из условий задачи, можно составить только одно уравнение:

$$4z-\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=20$$

или

$$z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+5. \tag{1}$$

Таким образом, имеется одно уравнение с тремя неизвестными. Решение задачи может быть найдено, если учесть, что $x$, $y$, $z$ — это стороны треугольника и, значит, удовлетворяют известным геометрическим неравенствам:

$$\begin{aligned} &\text{а) } x+y\geqslant z;\\ &\text{б) } x+z\geqslant y;\\ &\text{в) } y+z\geqslant x. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти неравенства дают необходимые и достаточные условия, при которых три отрезка $x$, $y$ и $z$ образуют треугольник; в случае равенства треугольник вырождается в отрезок прямой.

Подставляя выражение для $z$ из (1) в (2), получаем неравенство

$$x+y\geqslant\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+5,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{4}-2\right)^2+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2\leqslant 0.$$

(Здесь относительно переменных $x$ и $y$ было использовано преобразование, называющееся «выделением полного квадрата».)

Поскольку сумма двух неотрицательных слагаемых не может быть меньше нуля, то последние неравенства выполняются только в том случае, если

$$\frac{x}{4}-2=0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{2}-1=0.$$

Это и есть те дополнительные уравнения задачи, которые позволяют определить решение. Находим

$$x=8, \quad y=2, \quad z=10.$$

Поскольку $x+y=z$, то становится ясным, что пункты $A$, $B$ и $C$ находятся на одной прямой. Площадь леса, равная $4z$ км$^2$, составляет 40 км$^2$. Конечно, такая задача может быть решена только при специальном подборе числовых данных.

*Упражнения*

**1.** Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 часов. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

*Ответ.* 16 часов.

**2.** К бассейну объемом в 300 м$^3$ проведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью выливается. Если все три трубы включены одновременно, то количество воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м$^3$. Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м$^3$ воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершившую наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин. Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала и до конца наполняла только вторая труба.

*Ответ.* 22,5 мин.

**3.** Совхоз располагает тракторами четырех марок *А*, *Б*, *В* и *Г*. Бригада из четырех тракторов (два трактора марки *Б* и по одному трактору марок *В* и *Г*) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки *А* и одного трактора марки *В* тратит на эту работу три дня, а три трактора марок *А*, *Б* и *В* — четыре дня. За сколько времени выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

*Ответ.* $1\frac{5}{7}$ дня.

**4.** Туристский клуб разработал маршруты нескольких походов: а) двухдневный байдарочный поход; б) двухдневный велосипедный поход; в) восьмидневный комбинированный поход (четыре дня на байдарке, четыре дня пешком); г) пятидневный поход (один день на плоту, один день на байдарке, три дня пешком); д) шестидневный поход (три дня на плоту и три дня пешком). Третий маршрут длиннее второго на 40 км, второй длиннее первого на 80 км, а длина четвертого маршрута 90 км. Предполагается, что при каждом данном способе передвижения за каждый день проходится одно и то же расстояние. Найти протяженность пятого маршрута.

*Ответ.* 90 км.

5. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй — емкостью по 800 $м^3$, а третий — емкостью 400 $м^3$. Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем третий. Первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй — в тот момент, когда первый вынул уже 300 $м^3$ грунта. Когда третий экскаватор выполнил 2/3 своей работы, второй вынул 100 $м^3$ грунта. Первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько кубических метров грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

*Ответ.* 600 $м^3$.

6. Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго куска. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

*Ответ.* 12,5 г.

7. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 *л* жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 *л* каждого раствора и 20 *л* воды, то получится 40 *л* 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный раствор, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации получится кислота, если подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый?

*Ответ.* 0,5.

8. Из пункта *А* по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Скорость какого автомобиля, первого или второго, больше и во сколько раз? (Известно, что третий автомобиль не обгонял первых двух.)

*Ответ.* Скорость первого автомобиля в 9/8 раза больше, чем второго.

9. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго 2/3, а третий кусок, в котором была 1/3 всей ткани,

продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее вдвое меньше, чем было во втором куске?

*Ответ.* 75%.

**10.** В лаборатории имеются растворы соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3 : 2 : 1, то получится 15%-ный раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешении 24%-ный раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных весовых частей первого и третьего растворов, имеет концентрацию 10%. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2 : 1?

*Ответ.* 0,29.

## § 4. ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ РЕШАЮТСЯ ПРИ ПОМОЩИ НЕРАВЕНСТВ

В предыдущих параграфах уже встречались задачи, которые содержали среди прочих такие условия, математическая запись которых была эквивалентна неравенствам. Так, например, разбор второй и третьей задач второго параграфа показал, что однозначное решение этих задач можно найти только в том случае, если учесть неравенства, вытекающие из их условия.

Более важную роль играли неравенства в последней из задач, рассмотренных в предыдущем параграфе. В этой задаче только с помощью неравенств удалось получить два дополнительных соотношения и тем самым найти решение. Наконец, существует много задач, рассчитанных на умение составлять не только уравнения, но и неравенства, и с их помощью получать ответы на поставленные в задачах вопросы. Эти задачи уместно было бы назвать «задачами на составление уравнений и неравенств».

Рассмотрим несколько примеров.

Задача. *Из пункта A в пункт B в* 8 ч *утра выходит скорый поезд. В этот же момент из B в A выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт B в* 13 ч 50 мин *того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее* 10 ч 30 мин *утра. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если* *известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.*

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 10. Как это встречалось раньше, здесь удобно ввести расстояние между городами $s$, а также скоро-

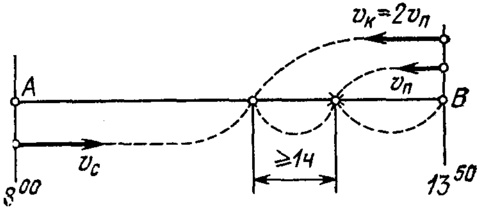


Рис. 10.

сти поездов: $v_п$ — пассажирского, $v_с$ — скорого. Тогда скорость курьерского поезда $v_к$ будет равна $2v_п$.

Составим, как обычно, уравнения (в данном случае уравнения и неравенства) с помощью следующей таблицы:

| Условие задачи | Уравнение, неравенство | |
|---|---|---|
| Скорый поезд прибывает в пункт $B$ в 13 ч 50 мин, т. е. через 5 ч 50 мин | $\frac{s}{v_с}=\frac{35}{6}$ | (1) |
| Скорый поезд встречается с курьерским поездом не ранее 10 ч 30 мин утра, т. е. не менее чем через 2 ч 30 мин | $\frac{s}{v_с+2v_п}\geqslant\frac{5}{2}$ | (2) |
| Между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа | $\frac{s}{v_с+v_п}-\frac{s}{v_с+2v_п}\geqslant 1$ | (3) |

Последнее неравенство необходимо пояснить. Отношение

$$\frac{s}{v_с+2v_п}$$

есть время, прошедшее от начала движения до встречи скорого и курьерского поездов, а время до встречи скорого и пассажирского поездов равно отношению

$$\frac{s}{v_c + v_п}.$$

Разность этих отношений равна времени, прошедшему от момента встречи скорого поезда с курьерским до момента встречи скорого поезда с пассажирским. Эта разность, по условию, больше или равна 1.

Неравенства (2) и (3) можно преобразовать так:

$$\frac{\frac{s}{v_c}}{1+2\frac{v_п}{v_c}} \geqslant \frac{5}{2}, \quad \frac{\frac{s}{v_c}}{1+\frac{v_п}{v_c}} - \frac{\frac{s}{v_c}}{1+2\frac{v_п}{v_c}} \geqslant 1.$$

Подставляя в эти неравенства значение отношения $s/v_c$ из первого уравнения и выполняя преобразования, получим систему неравенств:

$$\frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{2}{3}, \quad 12\left(\frac{v_п}{v_c}\right)^2 - 17\left(\frac{v_п}{v_c}\right) + 6 \leqslant 0,$$

или

$$\frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2}{3} \leqslant \frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Теперь видно, в чем состоит узловой момент решения этой задачи. Получена система неравенств, так сказать, почти исключающих друг друга. Для того чтобы такая система была совместна, необходимо выполнение равенства

$$\frac{v_п}{v_c} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, получаем еще одно дополнительное уравнение.

В задаче требуется найти время прибытия пассажирского поезда в пункт $A$, т. е. величину $s/v_п$:

$$\frac{s}{v_п} = \frac{s}{v_c} \cdot \frac{v_c}{v_п} = \frac{35}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{35}{4}.$$

Итак, пассажирский поезд затрачивает на дорогу 8 ч 45 мин и прибывает в пункт $A$ в 16 ч 45 мин.

Еще один пример подобной задачи.

З а д а ч а. *В 7 ч утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляются байдарка и катер.*

*Байдарка приплывает в пункт B в 17 ч того же дня. Катер же, дойдя до пункта B, мгновенно поворачивает назад и на своем пути из B в A встречает байдарку не позднее 15 ч, а прибывает в пункт A не ранее 23 ч того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если известно, что собственная скорость катера в два раза больше собственной скорости байдарки.*

Решение. Своеобразие этой задачи, как и предыдущей, состоит в том, что составленных уравнений недостаточно для однозначного определения всех неизвестных. Это помогают сделать имеющиеся в задаче условия, выражающиеся в виде неравенств.

Пусть $v_к$, $v_б$ и $u$ — скорости катера, байдарки (в стоячей воде) и реки соответственно, $v_к = 2v_б$, $s$ — расстояние между пунктами $A$ и $B$. Тогда имеем следующую таблицу:

| Условие задачи | Уравнение или неравенство | |
|---|---|---|
| Байдарка находилась в пути 10 часов | $\frac{s}{v_б + u} = 10$ | (1) |
| На обратном пути из $B$ в $A$ катер встретил байдарку не позднее 15 ч того же дня | $\frac{s + (2v_б - u)\frac{s}{2v_б + u}}{3v_б} \leqslant 8$ | (2) |
| Катер прибыл обратно в пункт $A$ не ранее 23 ч того же дня | $\frac{s}{2v_б + u} + \frac{s}{2v_б - u} \geqslant 16$ | (3) |
| Катер может двигаться против течения | $2v_б > u$ | (4) |

Поясним, как было составлено второе неравенство системы. Пусть $t$ — время (в часах) между встречами катера и байдарки. Тогда

$$(v_б + u)t + (2v_б - u)\left(t - \frac{s}{2v_б + u}\right) = s.$$

Здесь $s/(2v_б + u)$ — время движения катера вниз по реке из $A$ в $B$. Отсюда получаем приведенное выше неравенство

$$t = \frac{s + (2v_б - u)\frac{s}{2v_б + u}}{3v_б} \leqslant 8.$$

Найдем решение системы неравенств (1)—(4). Разделив числитель и знаменатель каждой из дробей (2) и (3) на $v_б + u$ и учитывая равенство (1), получаем

$$\frac{10+10\dfrac{2v_б-u}{2v_б+u}}{3\dfrac{v_б}{v_б+u}} \leqslant 8 \qquad (2')$$

и

$$\frac{10}{\dfrac{2v_б+u}{v_б+u}}+\frac{10}{\dfrac{2v_б-u}{v_б+u}} \geqslant 16. \qquad (3')$$

Полученные неравенства можно представить в следующей форме:

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right) \leqslant 3\left(2\frac{v_б}{u}+1\right),$$

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\frac{v_б}{u} \geqslant 2\left[4\left(\frac{v_б}{u}\right)^2-1\right]$$

или

$$\frac{v_б}{u} \geqslant 2,$$

$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{v_б}{u} \leqslant 2.$$

Отсюда видно, что эта система неравенств непротиворечива, если $\frac{v_б}{u}=2$, т. е. $v_б=2u$. Тогда из уравнения (1) получаем

$$\frac{s}{3u}=10, \text{ т. е. } \frac{s}{u}=30.$$

В задаче требуется найти время прибытия катера в пункт $B$, т. е. величину $T$:

$$T=\frac{s}{2v_б+u}=\frac{s}{5u}=6.$$

*Ответ.* Катер приплывает в пункт $B$ в 13 часов.

Примером оригинального использования неравенства служит следующая задача.

Задача. *Пункт $A$ стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой* *линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A в B так, что часть пути пройдет по дороге, то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. Найти максимально возможное расстояние между A и B.*

Решение. Обозначим расстояние от $A$ до $B$ через $s$ (рис. 11). Расстояние $|AD|$ от точки $A$ до дороги по условию равно 8 км.

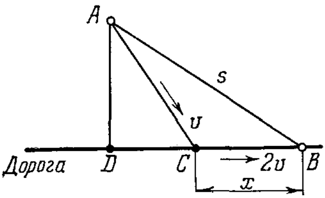

Рис. 11.

Пусть точка $C$ будет той точкой, в которой автомобиль выезжает с поля на дорогу. При этом достаточно ограничиться рассмотрением только прямолинейных участков $AC$ по полю, поскольку любой криволинейный путь $AC$ длиннее отрезка $AC$ и, значит, требует большего времени движения. По тем же соображениям точку $C$ можно считать лежащей между точками $B$ и $D$.

Если обозначить скорость движения автомобиля по полю через $v$, то условие задачи приводит к неравенству

$$\frac{s}{v} \leqslant \frac{|AC|}{v} + \frac{|BC|}{2 \cdot v}$$

или

$$s \leqslant |AC| + \frac{|BC|}{2},$$

справедливому при *любых* значениях величины $|BC|$.

Примем $|BC| = x$. Тогда $|DC| = \sqrt{s^2 - 64} - x$ и $|AC| = \sqrt{64 + (\sqrt{s^2 - 64} - x)^2}$. В этих обозначениях имеем

$$s \leqslant \sqrt{64 + (\sqrt{s^2 - 64} - x)^2} + \frac{x}{2}.$$

Требуется найти $s$, при котором полученное неравенство выполняется при *любых* значениях $x$.

Перепишем неравенство в виде

$$s-\frac{x}{2}\leqslant\sqrt{64+(\sqrt{s^2-64}-x)^2}.$$

Поскольку величина $(s-x/2)$ положительна, то допустимо возвести обе части неравенства в квадрат. После этого получаем квадратичное относительно $x$ неравенство

$$3x^2+4x(s-2\sqrt{s^2-64})\geqslant 0.$$

Это неравенство должно выполняться тождественно, т. е. при всех значениях величины $x$, определяющей положение точки $C$, в которой автомобиль выезжает с поля на дорогу.

Квадратичная функция, стоящая в левой части полученного неравенства, имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=4(2\sqrt{s^2-64}-s)/3$. Для того, чтобы неравенство выполнялось при *всех* $x\geqslant 0$ необходимо и достаточно, чтобы второй корень $x_2$ не был положительным, т. е.

$$\frac{4}{3}(2\sqrt{s^2-64}-s)\leqslant 0 \qquad (s\geqslant 8)$$

или

$$s\geqslant 2\sqrt{s^2-64},$$

откуда следует, что $8\leqslant s\leqslant 16/\sqrt{3}$.

Таким образом, максимально возможное расстояние между пунктами $A$ и $B$ составляет $16/\sqrt{3}$ км.

*Ответ.* $16/\sqrt{3}$ км.

Приведем еще один пример задачи рассматриваемого типа.

Задача. *Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по* 20 *марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по* 23 *марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по* 21 *марке, то всего у него станет* 500 *марок. Сколько листов в альбоме?*

Решение. Пусть в альбоме $m$ листов, а у школьника имеется $N$ марок. Тогда уравнение и неравенства этой задачи составляются следующим образом.

| Условие задачи | Уравнение, неравенство |
|---|---|
| Если школьник наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома | $20m < N$ |
| Если школьник наклеит по 23 марки на один лист, то по крайней мере один лист окажется пустым | $23(m-1) \geqslant N$ |
| Если школьнику подарить такой же альбом, в котором на каждом листе по 21 марке, то всего у него будет 500 марок | $21m + N = 500$ |

Таким образом, в этой задаче имеется одно уравнение и два неравенства. Выразим $N$ из уравнения этой системы и подставим его в каждое из неравенств:

$$\begin{cases} 20m < 500 - 21m, \\ 23(m-1) \geqslant 500 - 21m. \end{cases}$$

Учитывая, что $m$ — целое число, из первого неравенства этой системы находим, что $m \leqslant 12$, а из второго неравенства — что $m \geqslant 12$.

Сравнивая между собой эти результаты, получаем $m = 12$.

*Ответ.* В альбоме 12 листов.

Некоторое отличие последней задачи от предыдущих состояло в том, что ее решение было получено не только при помощи неравенств, но и с существенным использованием того обстоятельства, что неизвестное в этой задаче — целое число. Только это условие позволило получить единственное решение. Задачи, в которых неизвестные представляют собой целые числа, будут рассмотрены в следующем параграфе.

## *Упражнения*

1. Расстояние между станциями $A$ и $B$ равно 360 км. В одно и то же время из $A$ и из $B$ навстречу друг другу выезжают два поезда. Поезд, выехавший из $A$, прибывает на станцию $B$ не ранее чем через 5 часов. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд

раньше, чем через два часа после своего выхода из $A$. Скорость какого поезда больше?

*Ответ.* Скорость поезда, вышедшего из $B$, больше.

**2.** Из пункта $A$ в пункт $C$ в 9 ч утра отправился скорый поезд. В это же время из пункта $B$, расположенного между пунктами $A$ и $C$, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт $A$, а второй — в пункт $C$, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 ч после его отправления, потом проходит пункт $B$ не ранее 14 ч того же дня и, наконец, прибывает в пункт $C$ одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт $A$ первого пассажирского поезда.

*Ответ.* 16 ч 30 мин.

**3.** Из $A$ в $B$ по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из $A$ в $B$, из $B$ в $A$ навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 ч и затем прибывает в $A$, затратив на весь путь менее 3 ч 20 мин. Успеет ли плот преодолеть путь из $A$ в $B$ за 5 ч, если расстояние между $A$ и $B$ равно 20 км?

*Ответ.* Не успеет.

**4.** Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

*Ответ.* 9 пятиэтажных домов и 8 девятиэтажных домов.

**5.** Пункты $A$ и $B$ расположены на одной реке так, что плот, плывущий из $A$ в $B$ со скоростью течения реки, проходит путь от $A$ до $B$ за 24 ч. Весь путь от $A$ до $B$ и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь (т. е. путь от $A$ до $B$ и обратно) занял бы у лодки не более 7 ч. Найти время, за которое моторная лодка проходит путь из $A$ в $B$ в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

*Ответ.* За 4 часа.

**6.** В 9 ч утра из пункта $A$ выезжает велосипедист, который едет до пункта $B$. Через 2 ч после выезда велосипедиста из $A$ в $B$ выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт $B$, мгновенно поворачивает и едет из $B$ в $A$. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт $A$ в 17 ч того же дня. Найти время прибытия велосипедиста в пункт $B$, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

*Ответ.* 18 час.

**7.** От пристани $A$ вниз по реке, скорость течения которой равна $v$ км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения $v$, при которых к моменту возвращения катера в $A$ плот проходит более 15 км.

*Ответ.* $5 < v < 10$.

**8.** Расстояние между $A$ и $B$ равно 7 км. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше, чем через 1 час. Если бы первый шел вдвое быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость движения второго была бы на 2 км/ч больше его фактической скорости, то к моменту встречи второй прошел бы большую часть пути. Скорость какого пешехода больше?

*Ответ.* Скорость второго пешехода больше.

**9.** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются позже, чем через 5 ч после выезда. На следующий день они выезжают одновременно в одну и ту же сторону из пунктов $C$ и $D$, расстояние между которыми 36 км, причем велосипедист, едущий впереди, движется со скоростью, на 6 км/ч большей, чем накануне, а велосипедист, едущий сзади, движется с той же скоростью, что и накануне. Хватит ли второму велосипедисту двух часов, чтобы догнать первого?

*Ответ.* Не хватит.

**10.** Из города $A$ в город $B$, находящийся на расстоянии 105 км от $A$, с постоянной скоростью $v$ км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из $A$ со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения $v$, при которых автомобиль возвращается в город $A$ позже, чем автобус приходит в город $B$.

*Ответ.* $30 < v \leqslant 33{,}6$.

## § 5. ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В этом параграфе рассматриваются задачи на составление уравнений или неравенств, в которых неизвестные величины могут принимать только целые значения. Весьма часто эти задачи составлены таким образом, что их однозначное решение находится только при условии существенного использования этого обстоятельства. Один из примеров задач такого типа нам уже встретился в конце предыдущего параграфа. Рассмотрим еще несколько примеров.

Задача. *Из города A в город B отправился путешественник, который в первый день преодолел $1/n$-ю часть всего пути. В следующий день он прошел $1/m$-ю часть оставшегося пути. В следующие дни он проходит попеременно то $1/n$-ю часть, то $1/m$-ю часть пути, остававшегося к концу предыдущего дня. Через 10 дней такого движения выяснилось, что он прошел 31/32 всего расстояния между городами A и B. Найти $m$ и $n$, если известно, что они — целые числа и $m > n$.*

Решение. К концу первого дня расстояние $s_1$, отделяющее путешественника от города $B$, равно

$$s_1 = s - \frac{1}{n} s = \left(1 - \frac{1}{n}\right) s,$$

где $s$ — расстояние между городами.

К концу второго дня расстояние $s_2$, отделяющее его от города $B$, становится равным

$$s_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) s - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right) s = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) s.$$

Повторяя эти рассуждения (см. формулу сложных процентов в § 1), получаем, что к концу 10-го дня пути до города $B$ осталось пройти расстояние $s_{10}$, равное

$$s_{10} = s\left(1 - \frac{1}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{m}\right)^5 = \frac{1}{32} s.$$

Поэтому единственное уравнение в этой задаче имеет вид

$$s\left(1 - \frac{1}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{m}\right)^5 = \frac{1}{32} s. \qquad (1)$$

Извлекая корень пятой степени из обеих его частей, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}$$

или

$$\frac{mn}{(m-1)(n-1)} = 2. \qquad (2)$$

Таким образом, предстоит найти единственное решение одного уравнения с двумя неизвестными. Оказывается, что это можно сделать только благодаря тому, что $m$ и $n$ — целые числа ($m > n$).

Выражая, например, $m$ из этого уравнения, получаем

$$m(n-2)=2(n-1)$$

и, поскольку $n = 2$ не удовлетворяет этому уравнению, находим

$$m=\frac{2n-2}{n-2}=2+\frac{2}{n-2}.$$

Принимая во внимание, что $m$ — целое число, заключаем, что и дробь

$$\frac{2}{n-2}$$

также должна давать целое число. Учитывая, что $m > 0$ и $n > 0$, нетрудно найти такие числа $n$, при которых рассматриваемое отношение принимает целые значения. Это $n = 3$ и $n = 4$. Если $n = 3$, то $m = 4$. Если $n = 4$, то $m = 3$. Учитывая условие задачи: $m > n$, получаем единственное решение: $m = 4$, $n = 3$.

Итак, решение найдено. Нетрудно понять, что однозначное решение уравнения (2) не находится без использования условия о целочисленности входящих в него неизвестных.

Рассмотрим еще один пример.

Задача. *В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое число автомобилей марки «Волга» и марки «Москвич», причем в каждой команде число всех автомобилей меньше* 7. *Если в каждой команде число автомобилей марки «Волга» оставить без изменения, а число автомобилей марки «Москвич» увеличить в три раза, то общее число «Москвичей», участвующих в гонках, будет на* 50 *больше общего числа «Волг», а число автомобилей в каждой команде превысит* 12. *Определить число команд, участвующих в гонках, и число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде.*

Решение. Обозначим число команд, участвующих в гонках, через $N$, а число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде — через $m$ и $n$ соответственно.

Условие задачи приводит к следующей системе уравнений и неравенств.

| Условие задачи | Уравнение, неравенство |
|---|---|
| В каждой команде число всех автомобилей меньше 7 | $m+n<7$ |
| Если в каждой команде число «Волг» оставить без изменения, а число «Москвичей» увеличить в три раза, то «Москвичей» станет на 50 больше, чем «Волг» | $3nN-mN=50$ |
| При этом число автомобилей в каждой команде превысит 12 | $m+3n>12$ |

Оказывается, что даже такое небольшое количество информации достаточно для того, чтобы однозначно определить все три целочисленные неизвестные $m$, $n$ и $N$. Действительно, представим последнее неравенство системы в виде

$$(m+n)+2n>12$$

или

$$n>6-\frac{m+n}{2}.$$

Из первого неравенства системы получаем, что имеет место $2\leqslant m+n\leqslant 6$; очевидно также, что $n<6$. Используя эти ограничения, получаем, что $4\leqslant n<6$.

Возможны варианты:

1) $n=4, \quad m=1;$

2) $n=4, \quad m=2;$

3) $n=5, \quad m=1.$

Соответственно этому единственное имеющееся в системе уравнение дает:

1) $11N=50;$

2) $10N=50;$

3) $14N=50.$

Поскольку $N$ — целое число, то решение получается только во втором случае. Итак, $N=5$.

*Ответ.* Участвовало 5 команд, в каждой из которых имеется 2 «Волги» и 4 «Москвича».

Наконец, последний пример задачи этого типа.

Задача. *Встречаются две команды шашистов $A$ и $B$. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на матч, в связи с чем число всех сыгранных в матче партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в матче за команду $A$, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде $B$?*

Решение. Обозначим количество игроков, которые должны были выступить соответственно за команды $A$ и $B$, через $m$ и $n$ $(n > m)$.

Очевидно, что планировалось сыграть $mn$ партий. Первое условие задачи приводит к уравнению

$$mn = 4(m + n).$$

Второе уравнение сразу написать нельзя, так как неизвестно, к каким командам относились заболевшие игроки. Возможны три случая:

1) если заболели игроки команды $A$, то

$$(m - 2)n = mn - 17;$$

2) если заболели игроки команды $B$, то

$$(n - 2)m = mn - 17;$$

3) если заболело по одному игроку из команд $A$ и $B$, то

$$(m - 1)(n - 1) = mn - 17.$$

Первый случай дает $2n = 17$, что невозможно, поскольку $n$ — целое число. Второй случай также невозможен по этой причине: $2m \neq 17$. В третьем случае получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mn = 4(m + n), \\ m + n = 18, \\ n > m. \end{cases}$$

Отсюда легко находим $m = 6$, $n = 12$.

*Ответ.* В команде *А* было 6 игроков; выступило за команду 5 игроков.

В последней задаче, помимо рассматриваемой, встретилась и другая особенность, присущая целому классу задач на составление уравнений. Эта особенность будет подробно рассмотрена в следующем параграфе. Ее сущность состоит в том, что иногда формулировка условия задачи не позволяет однозначно составить все уравнения и приходится рассматривать все возможные случаи. При этом, как правило, только один из них непротиворечив и позволяет найти решение.

### *Упражнения*

1. Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждых двух горлиц — также 1 монета, за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждой породы?

*Ответ.* 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей.

2. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг куплено на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 72 коп., а за все книги — 6 руб. 60 коп. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше, чем 4 руб. 44 коп. Сколько куплено тетрадей?

*Ответ.* 2 тетради.

3. Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшегося другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на 1 числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

*Ответ.* 14 и 25 орехов.

4. Имеются одинаковые наборы почтовых марок, состоящие из гашеных и негашеных марок, причем в каждом наборе число гашеных марок более чем на 2 превосходит число негашеных. Если в каждом наборе число гашеных марок увеличить в 4 раза, а число негашеных оставить без изменения, то число гашеных марок в одном наборе превысит число негашеных в нем не более чем на 20, а общее число марок во всех имеющихся наборах станет равным 44. Определить число имеющихся наборов и число гашеных и негашеных марок в каждом наборе.

*Ответ.* 2 набора, состоящие из 5 гашеных и 2 негашеных марок каждый.

5. Четыре школьника сделали в магазине канцтоваров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 коп.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 коп.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 коп.; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

*Ответ.* 39 коп.

6. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше, чем берез Сколько лип и сколько берез было посажено?

*Ответ.* 11 лип и 5 берез.

7. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в три раза, а красных — в два раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных в нем не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько было в каждом комплекте синих и красных карандашей.

*Ответ.* Продано 3 комплекта. В каждом комплекте было 7 синих и 3 красных карандаша.

8. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

*Ответ.* 11 «двоек», 7 «троек», 10 «четверок», 2 «пятерки».

9. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

*Ответ.* 8 книг.

10. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем 20-копеечных монет было больше, чем 15-копеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты на билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя моне-

тами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

*Ответ.* 2 пятнадцатикопеечные монеты и 6 двадцатикопеечных монет.

## § 6. ЗАДАЧИ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМ УСЛОВИЕМ

Последняя из задач, разобранных в конце предыдущего параграфа, обладала особенностью, которая заслуживает специального рассмотрения. Условие этой задачи было сформулировано таким образом, что при составлении одного из уравнений возникала альтернатива: в зависимости от того, в какой команде заболели игроки, это уравнение записывалось по-разному. Надо заметить, что в других разделах элементарной математики задачи, для решения которых необходимо рассматривать несколько возможных вариантов, встречаются весьма часто. Например, при решении задач, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, приходится рассматривать случаи, когда выражение, стоящее под знаком модуля, положительно и когда оно отрицательно. При решении логарифмических неравенств исследуются случаи, когда основания входящих в задачу логарифмов больше единицы или эти основания меньше единицы и т. д. Каждая из таких задач требует рассмотрения всех возможных случаев, и решение находится после того, как все эти возможности будут исследованы. Не представляют исключения и задачи на составление уравнений.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача. *В бассейн проведены две трубы разной пропускной способности. Первая из труб расположена на боковой стене, а вторая — на дне бассейна. Обе трубы могут работать на слив и на наполнение. Пропускная способность каждой трубы при переходе от наполнения к сливу не меняется и не зависит от уровня воды над ней. Первая труба работает на слив лишь тогда, когда вода выше расположения ее входа. Бассейн наполнили на* 1/4 *и включили первую трубу на слив, а вторую — на наполнение. При этом оказалось, что бассейн наполнился за время, в* 13/12 *раза большее, чем то, которое потребуется для наполнения первоначально пустого бассейна одной только второй* *трубой. В другой раз при наполненном доверху бассейне включили обе трубы на слив, и тогда оказалось, что вся вода вытекла из бассейна за время, составляющее 5/18 от времени, необходимого для наполнения первоначально пустого бассейна одной первой трубой. Во сколько раз пропускная способность второй трубы больше пропускной способности первой?*

Решение. Основная особенность этой задачи состоит в том, что, исходя из ее условия, нельзя сказать сразу, находится ли вход в первую трубу выше

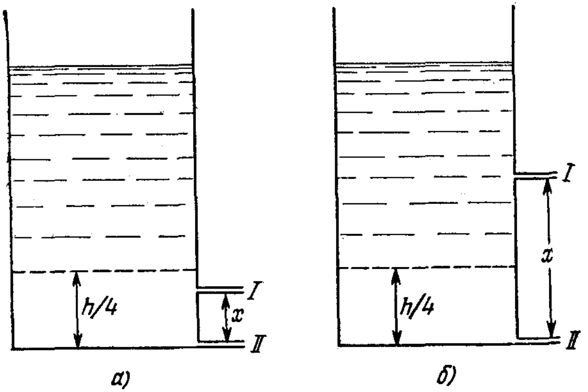


Рис. 12.

1/4 высоты бассейна или он ниже этого уровня. В то же время первое условие задачи (первую трубу включили на слив, а вторую — на наполнение) приводит в каждом из возможных случаев расположения входа первой трубы к разным уравнениям. Для того чтобы решить эту задачу, необходимо рассмотреть оба возможных случая.

*I случай*: $x < h/4$ (рис. 12, *а*). Здесь $h$ — высота бассейна, $x$ — уровень расположения входа первой трубы. Обозначим пропускные способности труб буквами $v_1$ и $v_2$ соответственно, а площадь дна бассейна примем равной 1. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3h/4}{v_2 - v_1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h-x}{v_1+v_2} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{h}{v_1}. \end{cases}$$

Так же, как и в случаях, многократно встречавшихся раньше, эта система уравнений фактически содержит только две неизвестные величины: $x/h$ и $v_2/v_1$. Действительно, систему можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{3/4}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1-x/h}{1+\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{x/h}{\dfrac{v_2}{v_1}}=\dfrac{5}{18}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим неизвестные:

$$\frac{x}{h}=\frac{169}{288}, \quad \frac{v_2}{v_1}=\frac{13}{4}.$$

Неравенство $x<h/4$ показывает, что в рассмотренном случае отношение $x/h$ меньше, чем $1/4$. Поэтому решение $x/h=169/288$ не удовлетворяет условиям задачи.

*II случай*: $x\geqslant h/4$ (рис. 12, *б*). В этом случае система уравнений задачи имеет другой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{h}{4}}{v_2}+\dfrac{h-x}{v_2-v_1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h-x}{v_1+v_2}+\dfrac{x}{v_2}=\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{h}{v_1}. \end{cases}$$

Преобразуя эту систему так же, как и в предыдущем случае, получим два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{x/h-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{1-x/h}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1-x/h}{1+\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{x/h}{\dfrac{v_2}{v_1}}=\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

для определения двух неизвестных $v_2/v_1$, $x/h$. Решая эту систему, находим неизвестные:

$$\frac{x}{h}=\frac{1}{3}, \quad \frac{v_2}{v_1}=3.$$

Поскольку в данном случае $x\geqslant h/4$, т. е. $x/h\geqslant 1/4$, то найденное отношение $v_2/v_1$ дает решение задачи.

*Ответ*. $v_2/v_1=3$.

Таким образом, решение этой задачи удалось найти после того, как были рассмотрены оба возможных случая. Непротиворечивым оказался только один из них, который и определил решение задачи.

Рассмотрим еще один пример задачи подобного типа, но уже задачи «на движение».

Задача. *Из города А в город В, расстояние между которыми* 200 км, *мотоциклист ехал* 6 *часов. Сначала он двигался со скоростью* $v_1$, *превышающей* 15 км/ч, *а потом — со скоростью* $v_2$, *причем время движения с каждой скоростью пропорционально этой скорости. Через* 4 *часа после выезда мотоциклист был в* 120 км *от города А. Определить скорости* $v_1$ *и* $v_2$.

Решение. Обозначим время движения мотоциклиста со скоростью $v_1$ через $t_1$, а со скоростью $v_2$ — через $t_2$. Тогда условия задачи приводят к трем уравнениям для четырех неизвестных:

$$v_1t_1 + v_2t_2 = 200,$$
$$t_1 + t_2 = 6,$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Однако четвертое уравнение в этой задаче однозначным образом составить нельзя. Неясно, то ли 120 км были пройдены за 4 часа со скоростью $v_1$, то ли движение на этом пути с той и с другой скоростью. Поэтому необходимо рассмотреть два случая.

1) Если $t_1 \geqslant 4$, то четвертое уравнение имеет вид

$$4v_1 = 120, \quad v_1 = 30 \text{ км/ч}.$$

2) Если $t_1 < 4$, то дополнительное уравнение таково:

$$v_1t_1 + (4 - t_1)\, v_2 = 120$$

и отсюда с учетом первого и второго уравнений имеем

$$v_2 = 40 \text{ км/ч}.$$

Разберем первый случай: $v_1 = 30$ км/ч, тогда

$$30t_1 + v_2t_2 = 200,$$
$$t_1 + t_2 = 6,$$
$$\frac{30}{v_2} = \frac{t_1}{t_2},$$
$$4 \leqslant t_1 < 6.$$

Исключив $t_2$ и $v_2$ из первых трех уравнений системы, получаем для $t_1$ уравнение

$$3t_1^2 - 28t_1 + 54 = 0.$$

Один из корней этого уравнения меньше 4, другой корень не подходит, поскольку он больше 6, и, значит, такой случай отпадает.

Во втором случае ($v_2 = 40$ км/ч) имеем смешанную систему:

$$v_1t_1 + 40t_2 = 200,$$
$$t_1 + t_2 = 6,$$
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{40}, \quad 0 < t_1 < 4,$$
$$v_1 = 40\frac{t_1}{t_2} > 15.$$

Из этой системы находим $v_1 = 20$ км/ч, $t_1 = 2 < 4$.

*Ответ.* $v_1 = 20$ км/ч; $v_2 = 40$ км/ч.

В качестве последнего примера в этом разделе рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Из пункта A одновременно выходят три пешехода и одновременно возвращаются в тот же пункт, обойдя маршрут, состоящий из прямолинейных отрезков AB, BC, CD, DA, которые образуют равнобочную трапецию (AB, CD — боковые стороны). На указанных отрезках скорости всех пешеходов постоянны и равны: у первого* 6, 8, 5 *и* 8 км/ч *соответственно, у второго* — 7, 7, 6 *и* 8 км/ч *соответственно. Скорость третьего пешехода на каждом из отрезков равна либо* 7 км/ч, *либо* 8 км/ч, *причем на всем пути он меняет скорость один раз. Определить отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне.*

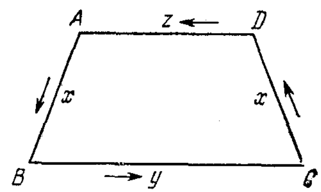

Рис. 13.

Решение. Обозначим стороны равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 13) через $x$, $y$, $x$ и $z$ соответственно. Тогда условие о том, что первый и второй пешеходы пройдут весь путь за одно и то же время, запишется в виде уравнения

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{x}{5} + \frac{z}{8} = \frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{x}{6} + \frac{z}{8},$$

из которого находим

$$\frac{2}{35}x=\frac{1}{56}y$$

или

$$\frac{y}{x}=\frac{16}{5}. \qquad (1)$$

Второе уравнение сразу написать нельзя; неизвестно, на каких участках каковы были скорости третьего пешехода. Поскольку известно, что в процессе движения он менял скорость только один раз, то надлежит рассмотреть 6 случаев: скорость третьего пешехода на одном, двух или трех участках была 7 км/ч и скорость того же пешехода на одном, двух или трех участках была 8 км/ч. Соответственно этому возможны 6 вариантов второго уравнения:

1) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{x+y+z}{8};$$

2) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{7}+\frac{x+z}{8};$$

3) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{7}+\frac{z}{8};$$

4) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{8}+\frac{y+x+z}{7};$$

5) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{8}+\frac{x+z}{7};$$

6) $$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{8}+\frac{z}{7}.$$

Первое уравнение противоречиво. Из второго уравнения находим

$$\frac{y}{x}=\frac{83}{15},$$

что противоречит полученному выше соотношению. Из третьего уравнения находим

$$\frac{y}{x}=\frac{68}{15},$$

что также противоречит соотношению (1). Из четвертого уравнения получаем $z/x=7/3$, из пятого — $z/x=83/15$, из шестого — $z/x=98/15$.

Рассмотрим три последних соотношения. Они не противоречат условию (1). Однако проверим, может ли при таком соотношении сторон существовать трапеция. Для этого необходимо выполнение неравенств

$$x+y+x \geqslant z, \quad 2x+y \geqslant z$$

и

$$x+z+x \geqslant y, \quad 2x+z \geqslant y,$$

т. е.

$$\frac{z}{x}-\frac{y}{x} \leqslant 2, \quad \frac{y}{x}-\frac{z}{x} \leqslant 2.$$

Решения пятого и шестого уравнений не удовлетворяют этим условиям; решение четвертого дает ответ задачи. Поскольку $7/3 < 16/5$, то меньшее основание трапеции — $z$.

*Ответ.* Отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне равно $7:3$.

### *Упражнения*

**1.** Между пунктами $A$ и $B$ расположен пункт $C$, причем $AC = 17$ км, $BC = 3$ км. Из пункта $A$ в пункт $B$ выехала машина, которая, не проехав и двух километров, остановилась. Через некоторое время она двинулась дальше в пункт $B$, и в этот же момент из пункта $C$ в пункт $B$ отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист, каждый из которых, достигнув $B$, сразу же поворачивает назад. С кем раньше поравняется машина, с пешеходом или велосипедистом, если ее скорость в 4 раза больше скорости велосипедиста и в 8 раз больше скорости пешехода?

*Ответ.* Машина сначала встретит велосипедиста.

**2.** Из пункта $A$ в пункт $B$ выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 км/ч², а после того, как его скорость возросла от 0 до $v$, продолжал двигаться равномерно со скоростью $v$. Расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость $v$.

*Ответ.* $v = 8$ км/ч.

**3.** Самолет совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью $v$. Затем летчик включает тормоза, и движение самолета становится равнозамедленным, причем в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до места полной остановки равен 4 км. Отношение времени, за которое самолет проходит первые 400 м, к времени, за которое самолет проходит весь путь по земле, равно 4:65. Определить скорость $v$.

*Ответ.* $v = 100$ м/с.

**4.** Расстояние между расположенными на одном шоссе пунктами $A$ и $B$ равно 120 км. Одновременно из пункта $A$ и пункта $B$ выехали соответственно велосипедист и мотоциклист. Через 2 часа после начала движения они поравнялись между собой. Если бы скорость велосипедиста была в 2 раза больше, а скорость мотоциклиста на 10 км/ч меньше, чем на самом деле, то момент, когда они поравнялись друг с другом, наступил бы на 1 час позднее, чем в действительности. Определить, за какое время велосипедист проезжает расстояние между пунктами $A$ и $B$.

*Ответ.* За 12 часов.

**5.** Имеются два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой $A$, а затем второе поле было убрано вместе бригадами $A$ и $B$. После того как была убрана 1/3 всей площади, оказалось, что время, необходимое на окончание уборки, в 21/13 раза меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада $A$. Известно, кроме того, что если бы второе поле убирала только бригада $B$, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада $A$. Во сколько раз производительность бригады $A$ больше производительности бригады $B$?

*Ответ.* В 6 раз.

**6.** Вода из цилиндрического бассейна глубиной $h$ вытекает по двум трубам разной пропускной способности, первая из которых расположена на дне бассейна, а вторая — на боковой стенке. Если при наполненном целиком бассейне открыть только вторую трубу, то вода будет протекать через нее в течение времени, которое в 4/3 раза меньше времени, нужного для слива всей воды из бассейна только через одну первую трубу. При действии обеих труб продолжительность слива всей воды из бассейна, наполненного целиком, в 4/3 раза больше, чем наполненного на 2/3. Пропускная способность труб не зависит от уровня воды над трубой. На какой высоте расположена вторая труба?

*Ответ.* $^1/_2\, h$.

**7.** Три пешехода одновременно выходят из пункта $A$ и одновременно прибывают в пункт $D$, пройдя по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков $AB$, $BC$, $CA$, $AD$ ($ABCD$ — параллелограмм). На каждом из этих отрезков скорости всех пешеходов постоянны и равны: у первого 3, 6, 5 и 8 км/ч соответственно, у второго — 4, 5, 6 и 7 км/ч соответственно. Скорость третьего пешехода на отрезке $AD$ равна 8 км/ч, а на остальных отрезках совпадает либо со скоростью первого, либо со скоростью второго на соответствующем отрезке, однако ни с тем, ни с другим он не проходит весь маршрут целиком. Установить, является ли угол $ABC$ острым или тупым.

*Ответ.* Угол $ABC$ острый.

8. Три бегуна одновременно стартуют в пункте $A$ и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков $AB$, $BC$, $CM$, $MA$ ($ABC$ — треугольник, $M$ — середина отрезка $AB$). На каждом из указанных отрезков скорости всех бегунов постоянны и равны: у первого $13\frac{5}{7}$, 10, 10 и 16 км/ч соответственно, а у второго — $12\frac{12}{13}$, 14, 12 и 14 км/ч соответственно. Третий бегун на участке $BC$ бежит рядом с одним из других бегунов, на участке $MA$ его скорость та же, что и на участке $AB$, причем на всем пути он меняет скорость не более чем дважды. Определить, является ли угол $ABC$ острым или тупым.

*Ответ.* Угол $ABC$ острый.

9. Три самосвала, грузоподъемность первого из которых 12 тонн, второго — не меньше 2 тонн, а третьего — не меньше, чем второго, должны быть загружены песком с помощью двух транспортеров. Первый транспортер загружает 1/2 тонны песка в минуту, второй — 2/3 тонны в минуту. Самосвалы могут подъезжать к транспортерам в любом порядке, причем загрузка одного самосвала может производиться только одним транспортером. Кроме того, начав загрузку при помощи одного из транспортеров, самосвал не может уже переехать на догрузку к другому. Время погрузки считается от начала загрузки первого самосвала до окончания загрузки последнего. При соблюдении этих условий минимальное время загрузки составляет 22,5 минуты. Предполагается, что на смену у транспортера загруженного самосвала другим порожним самосвалом время не теряется. Если же все самосвалы загружаются лишь с помощью одного второго транспортера, то погрузка занимает 36 минут. Определить грузоподъемности второго и третьего самосвалов.

*Ответ.* 3 тонны, 9 тонн.

10. Из пункта $A$ одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков $AB$, $BC$, $CA$, образующих треугольник $ABC$. На каждом из указанных отрезков скорости у бегунов постоянны и равны: у первого 10, 16 и 14 км/ч соответственно, у второго — 12, 10 и 16 км/ч соответственно. Третий бегун в пунктах $B$ и $C$ оказывается не один и меняет

скорость на маршруте один раз. Установить, является ли треугольник $ABC$ остроугольным или тупоугольным.

*Ответ.* Треугольник $ABC$ тупоугольный.

## § 7. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ НУЖНО НАХОДИТЬ НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

В особую группу объединяются задачи, для решения которых необходимо найти экстремум той или иной функции, т. е. определить, при каких значениях неизвестного эта функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Отличительная особенность каждой такой задачи состоит в том, что одно или несколько условий в ее формулировке, позволяющее получить либо дополнительное уравнение, либо выделить единственное решение из многих возможных, является задачей на отыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача. *Автомобиль выезжает из пункта $A$ и едет с постоянной скоростью $v$* км/ч *до пункта $B$, отстоящего от пункта $A$ на расстояние* 24,5 км. *В пункте $B$ автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на* 54 км/ч, *и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в $A$ с постоянной скоростью* $v$ км/ч. *Какова должна быть скорость $v$, чтобы автомобиль за наименьшее время проехал путь от $A$ до полной остановки и обратно до пункта $A$ указанным выше способом?*

Решение. Подсчитаем время, которое затрачивает автомобиль на весь путь от $A$ до полной остановки и обратно. Покажем, что это время определяется одним неизвестным параметром $v$.

1. Расстояние 24,5 км автомобиль проезжает за время $t_1$:

$$t_1 = \frac{24{,}5}{v}.$$

2. Вслед за этим он двигался до полной остановки с ускорением —54 км/ч$^2$ в течение времени $t_2$:

$$t_2 = \frac{v}{54},$$

пройдя при этом расстояние $s$, которое определяется по известной формуле для равноускоренного движения:

$$s = vt_2 - \frac{54t_2^2}{2}, \qquad s = \frac{v^2}{54} - \frac{v^2}{2 \cdot 54} = \frac{v^2}{108}.$$

3. Время $t_3$, затраченное на обратный путь, равно

$$t_3 = \frac{24{,}5 + v^2/108}{v} = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}.$$

Поэтому полное время движения автомобиля

$$T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{54} + \left(\frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}\right) = \frac{49}{v} + \frac{v}{36}.$$

Таким образом, время движения автомобиля до пункта $A$ и обратно является функцией только одного параметра $v$, его скорости на первом участке:

$$T(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v}.$$

Определим теперь, при каком значении $v$ эта функция достигает своего минимума. Для этого вычислим ее производную $T'(v)$:

$$T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2}.$$

Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю ее производной

$$T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2} = 0 \qquad (v > 0).$$

Отсюда находим, что $v = 42$. При этом значении скорости функция $T(v)$ имеет минимум, поскольку $T'(v) > 0$ при $v > 42$ и $T'(v) < 0$ при $v < 42$. Таким образом, при скорости 42 км/ч автомобиль, двигаясь указанным выше способом, затратит на весь путь минимально возможное время.

Заметим, что функция $T(v)$ состоит из двух слагаемых: одно из них пропорционально скорости движения $v$, а другое обратно пропорционально этой скорости. Таким образом, она относится к классу функций вида (рис. 14)

$$y(x) = bx + \frac{a}{x}.$$

Если числа $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки, то эти функции обладают точками экстремума, которые можно определить, не прибегая к дифференцированию. Наибольшее и наименьшее значения таких функций отыскиваются с помощью использования неравенства «среднее арифметическое неотрицательных чисел больше или равно их среднему геометрическому»:

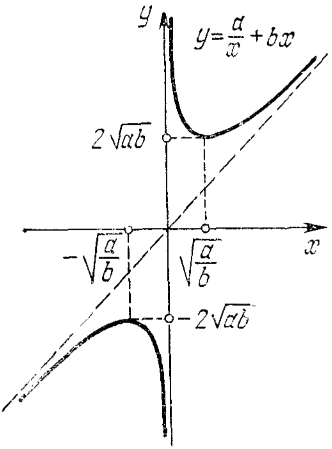

Рис. 14.

$$\frac{A+B}{2} \geqslant \sqrt{AB} \qquad (A \geqslant 0,\ B \geqslant 0). \tag{1}$$

В формуле (1) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A = B$.

Применяя это неравенство для исследования функции

$$y = bx + \frac{a}{x} \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

получаем

$$y = \frac{a}{x} + bx \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x} \cdot bx} = 2\sqrt{ab}, \qquad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, функция $y(x)$ при $x > 0$ больше или равна $2\sqrt{ab}$. При этом равенство достигается в случае, если

$$\frac{a}{x} = bx, \quad \text{т. е. } x = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Значит, локальный минимум рассматриваемой функции равен $2\sqrt{ab}$ и достигается при $x = \sqrt{a/b}$.

Аналогичным образом, при $x < 0$ функция $y(x)$ имеет локальный максимум. Действительно, при $x < 0$ $y \leqslant -2\sqrt{a/b}$, максимум достигается при $x = -\sqrt{a/b}$ и равен $-2\sqrt{ab}$.

Для частного случая $a = b = 1$ имеем известное неравенство

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geqslant 2.$$

Используя свойство этой функции для $T(v)$, получаем неравенство

$$T(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v} \geqslant 2\sqrt{\frac{v}{36} \cdot \frac{49}{v}} = 2\frac{1}{3}.$$

Таким образом, минимальное время движения автомобиля равно $2^1/_3$ часа. Скорость, которая нужна для этого, определяется из равенства

$$\frac{v}{36}=\frac{49}{v}.$$

Легко видеть, что она равна 42 км/ч.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада делает в день 200 деталей. Вторая бригада делает в день на $a$ деталей меньше, чем первая $(0<a<200)$, а третья бригада делает в день на $5a$ деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют 1/5 всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся 4/5 работы. На сколько деталей в день меньше должна делать вторая бригада, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее?*

Решение. Из условия задачи понятно, что вторая бригада делает в день $(200-a)$ деталей, а третья бригада $(200+5a)$ деталей. Если обозначить через $Q$ общее количество деталей, которое нужно сделать, то время всей работы $t$ слагается из двух частей:

$$t_1=\frac{Q/5}{400-a}$$

— времени работы отдельно первой и второй бригад,

$$t_2=\frac{4Q/5}{600+4a}$$

— времени совместной работы бригад, так что

$$t(a)=\frac{Q/5}{400-a}+\frac{4Q/5}{600+4a}=\frac{110\cdot Q}{60\,000+250a-a^2}.$$

Таким образом, время всей работы $t$ является функцией только одного параметра $a$.

Найдем, при каком значении $a$ функция $t(a)$ достигает минимума. Для этого приравняем производную функции $t(a)$ нулю:

$$t'(a)=\frac{220\cdot Q\,(a-125)}{(60\,000+250a-a^2)^2}=0.$$

Из этого уравнения находим $a=125$. Легко видеть, что $t'(a)>0$ при $a>125$ и $t'(a)<0$ при $a<125$.

Следовательно, при $a = 125$ функция $t(a)$ действительно достигает минимума.

Этот же результат можно было бы получить, не прибегая к дифференцированию. Поскольку числитель дроби $t(a)$ не зависит от $a$, то значение этой функции определяется величиной

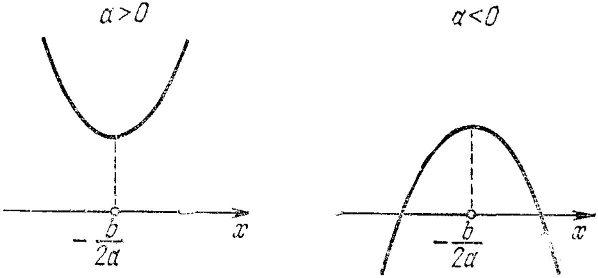


Рис. 15.

знаменателя $(400 - a)(150 + a)$. Хорошо известно, что квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c,$$

графики которой приведены на рис. 15, имеет точки локального максимума при $a < 0$ и точки локального минимума при $a > 0$. В том и другом случаях экстремум достигается при $x = -b/2a$.

Ясно, что $t$ будет минимальным, если знаменатель дроби

$$(400 - a)(150 + a)$$

будет наибольшим $(0 < a < 200)$. Знаменатель этой дроби будет наибольшим при $a = 125$.

Итак, при $a = 125$ работа будет выполнена за наименьшее время.

*Ответ.* $a = 125$ деталей.

Задача. *Между двумя портами, удаленными друг от друга на расстояние* 1200 км, *с постоянной скоростью курсирует теплоход. Затраты на рейс в одном направлении слагаются из двух частей. Первая часть, связанная с обслуживанием пассажиров, пропорциональна времени нахождения теплохода в пути, а другая, обусловленная стоимостью топлива, пропорциональна кубу скорости движения. Найти скорость, с которой должен идти теплоход, чтобы затраты на рейс были минимальны, если известно, что при ско-*

*рости* 90 км/ч *затраты равны* 11,61 *тыс. руб., причем стоимость обслуживания пассажиров составляет* 16/27 *стоимости топлива.*

Решение. Обозначим искомую скорость теплохода через $v$, а затраты на рейс — через $Q$. Кроме того, учтем, что время движения $t$ теплохода в одном направлении равно $1200/v$.

Из условия задачи имеем

$$Q = k_1 t + k_2 v^3 = k_1 \frac{1200}{v} + k_2 v^3,$$

откуда видно, что $Q$ является функцией только одной переменной $v$. Здесь $k_1$ и $k_2$ — коэффициенты пропорциональности.

Для определения коэффициентов $k_1$ и $k_2$ используем остальные условия задачи, согласно которым

$$Q(90) = k_1 \frac{1200}{90} + k_2 \cdot 90^3 = 11\,610,$$

и

$$k_1 \frac{1200}{90} = \frac{16}{27} \cdot k_2 \cdot 90^3.$$

Получаем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{40}{3} k_1 + 729\,000 k_2 = 11\,610, \\ \frac{40}{3} k_1 = 432\,000 k_2, \end{cases}$$

из которой определяем: $k_1 = 324$, $k_2 = 0{,}01$.

Таким образом, затраты на рейс теплохода при скорости движения $v$ определяются выражением

$$Q(v) = \frac{388\,800}{v} + 0{,}01 v^3.$$

Найдем, при каком значении $v$ ($v > 0$) эта функция достигает минимума. Для этого составим ее производную $Q'(v)$ и приравняем ее нулю:

$$Q'(v) = -\frac{388\,800}{v^2} + 0{,}03 \cdot v^2,$$

или

$$Q'(v) = \frac{0{,}03\,(v^2 - 3600)\,(v^2 + 3600)}{v^2}.$$

Отсюда видно, что $v=60$. Кроме того, при $v>60$ $Q'(v)>0$, а при $v<60$ $Q'(v)<0$, т. е. функция $Q(v)$ при $v=60$ имеет минимум. Таким образом, при скорости движения 60 км/ч затраты на рейс будут минимальны.

*Ответ.* 60 км/ч.

Рассмотрим еще один пример подобной задачи.

Задача. *Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью* 100 л. *Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату площади поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной площади ее поверхности. При этом колба объемом в* 1 л *обходится в* 1 руб. 25 коп., *и в этом случае стоимость труда составляет* 20% *стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежимо малой). Хватит ли на выполнение работы* 100 руб.?

Решение. Обозначим стоимость колбы с площадью поверхности $s$ через $q(s)$. Тогда по условию задачи

$$q(s)=ks^2+ms. \tag{1}$$

Здесь $k$ и $m$ — коэффициенты пропорциональности. Определим эти коэффициенты.

Пусть $R$ — радиус колбы, тогда $s=4\pi R^2$, откуда

$$R=\sqrt{\frac{s}{4\pi}}.$$

Отсюда объем колбы равен

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)^3.$$

Определяя площадь поверхности колбы как функцию ее объема, получаем

$$s=\sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

Если $V=1$ л, то $s=\sqrt[3]{36\pi}$. Подставим это значение в формулу (1):

$$q\left(\sqrt[3]{36\pi}\right)=1{,}25=k\left(\sqrt[3]{36\pi}\right)^2+m\sqrt[3]{36\pi}.$$

Мы получили первое уравнение для определения коэффициентов $k$ и $m$. Второе уравнение получается из условия, что стоимость труда составляет 20% стоимости колбы:

$$k(\sqrt[3]{36\pi})^2 = 0{,}2\left[k(\sqrt[3]{36\pi})^2 + m\sqrt[3]{36\pi}\right].$$

Если решить эти два уравнения совместно, то для $k$ и $m$ получаются следующие значения:

$$k = \frac{0{,}25}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}, \qquad m = \frac{1}{\sqrt[3]{36\pi}}.$$

Поскольку общая вместимость колб известна и составляет 100 л, то число этих колб равно

$$N = \frac{100}{V} = \frac{100\sqrt{36\pi}}{(\sqrt{s})^3}.$$

При этом необходимо брать лишь такие значения $s$, которые дают в этой формуле целые $N$.

Общая стоимость работы выразится формулой

$$Q = q\cdot N = \frac{25\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\sqrt{s} + \frac{100\sqrt{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Мы видим, что полная стоимость работы состоит из двух частей: одна пропорциональна $\sqrt{s}$, а другая обратно пропорциональна $\sqrt{s}$. При уменьшении $\sqrt{s}$ одно из слагаемых уменьшается, но другое увеличивается. Поэтому найдем такое значение $s$, при котором общая стоимость колб будет наименьшей. Для этого вычисляем производную функции $Q$:

$$Q'(s) = \frac{25\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}} - \frac{100\sqrt{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}}\cdot\frac{1}{2s\sqrt{s}},$$

или

$$Q'(s) = \frac{25\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\frac{1}{2s\sqrt{s}}\left(s - 4\sqrt[3]{36\pi}\right).$$

При том значении $s$, при котором функция $Q(s)$ минимальна, производная $Q'(s)$ равна 0. Поэтому получаем

$$s = 4\sqrt[3]{36\pi}.$$

Очевидно, что при $s < 4\sqrt[3]{36\pi}$ выполняется условие $Q' < 0$, а при $s > 4\sqrt[3]{36\pi}$ — условие $Q' > 0$, т. е.

участок монотонного убывания функции $Q(s)$ сменяется участком ее монотонного возрастания. Это означает, что при найденном значении $s$ функция $Q(s)$ имеет наименьшее значение. При этом оказывается, что число изготовленных колб

$$N=\frac{100}{V}=\frac{100\sqrt{36\pi}}{(\sqrt{s})^3}=12{,}5$$

не будет целым. Значит, стоимость работы всегда больше, чем 100 руб., а потому 100 руб. не хватит на выполнение указанной работы.

*Ответ.* Не хватит.

Делая вывод из рассмотрения этих четырех задач, можно отметить общую закономерность их решения. В каждой такой задаче сначала выявлялось выражение, пределы изменения которого позволили бы дать ответ на вопрос задачи. В первой задаче это было время всего движения, во второй задаче — время выполнения работы, в третьей — затраты на рейс, в четвертой — стоимость изготовления колб. Затем вводился переменный параметр, от которого это выражение зависело. Таким образом, возникала функция, для которой отыскивалось наибольшее или наименьшее значение. Во всех рассмотренных случаях для этой цели использовались условия, формулируемые с помощью производной.

Рассмотрим теперь пример задачи, в которой понятие «производная функции» является основным элементом для составления уравнений и отыскания решения.

Задача. *Студентка биологического факультета проводила эксперименты по выращиванию бактерий в питательной среде. При этом она заметила, что скорость увеличения числа бактерий в любой момент времени пропорциональна числу бактерий, которое имеется в этот момент времени, причем коэффициент пропорциональности равен* 0,5 *(время измеряется в часах). По заданию необходимо вырастить колонию бактерий численностью более* 20 000 *единиц. Каково наименьшее время выращивания колонии бактерий указанной численности, если известно, что первоначально в питательную среду было помещено* 200 *бактерий?*

Решение. Обозначим численность колонии бактерий в произвольный момент времени $t$ через $N(t)$. Тогда скорость роста колонии определяется производной $N'(t)$ числа бактерий по времени. Условие задачи приводит к уравнению

$$N'(t) = 0{,}5 \cdot N(t), \tag{2}$$

которому должна удовлетворять функция $N(t)$.

В отличие от уравнений, встречавшихся нам при разборе задач предыдущих параграфов, в это уравнение входит неизвестная функция, причем не только она сама, но и ее производная. Такое уравнение являет собой пример дифференциальных уравнений, имеющих важное значение во многих областях знаний.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что дифференциальное уравнение (2) имеет решения вида

$$N(t) = C \cdot e^{0{,}5 \cdot t}, \tag{3}$$

где $C$ — произвольный постоянный коэффициент, причем известно, что формула (3) исчерпывает все множество решений этого уравнения.

Для определения неизвестного коэффициента $C$ используется начальное условие, имеющееся в задаче, а именно, при $t = 0$ число помещенных в среду бактерий $N(0)$ равно 200. Используя решение (3), получим

$$N(0) = 200 = C \cdot e^{0{,}5 \cdot 0} = C,$$

откуда находим, что $C = 200$. Таким образом, число бактерий в питательной среде меняется по закону $N(t) = 200e^{0{,}5t}$.

По условию задачи необходимо найти время $T$ такое, что $N(T) \geqslant 20\,000$. Следовательно,

$$200 \cdot e^{0{,}5T} \geqslant 20\,000$$

или

$$T \geqslant 2 \ln 100.$$

*Ответ.* $T = 2 \ln 100 \simeq 9{,}2$ ч.

В заключение этого параграфа рассмотрим пример задачи, в которой требуется найти экстремальное (минимальное или максимальное) значение линейной функции $f=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ нескольких неотрицательных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что эти переменные удовлетворяют заданной системе линейных уравнений или неравенств. Подобные задачи возникают в связи с планированием производства, управления различными процессами, в экономике и т. д. Математическая дисциплина, изучающая эти вопросы, называется **«линейным программированием»**. Рассмотрим один из простейших примеров задач на составление уравнений и неравенств, который можно сформулировать как задачу линейного программирования.

З а д а ч а. *Предприятие выпускает изделия двух типов путем последовательной обработки каждого из них сначала в цехе А, а затем в цехе Б. Обработка каждого изделия первого типа занимает 5 часов в цехе А и 3 часа в цехе Б; обработка каждого изделия второго типа занимает 2 часа в цехе А и 4 часа в цехе Б. Цех А в состоянии работать не более 150 часов, цех Б — не более 132 часов в месяц. Известно, что предприятие за каждое изготовленное изделие первого и второго типов получает прибыль соответственно 300 и 200 рублей. Определить, сколько изделий каждого типа следует выпускать в месяц, чтобы обеспечить предприятию наибольшую прибыль.*

Р е ш е н и е. Обозначим через $x$ и $y$ искомые числа изделий первого и второго типов соответственно, а через $f$ — прибыль предприятия, полученную за счет производства $x$ изделий первого типа и $y$ изделий второго типа. Очевидно, что

$$f=300x+200y. \tag{4}$$

Тогда рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: найти числа $x$ и $y$, для которых функция $f=300x+200y$ имеет наибольшее значение при условиях

$$\begin{cases} 5x+2y\leqslant 150, \\ 3x+4y\leqslant 132, \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

($x$ и $y$ — целые числа).

Чтобы лучше понять, что представляет собой система четырех неравенств (5), обратимся к ее геометрической интерпретации. Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Истолковывая $x$ и $y$ как координаты точки на плоскости $xOy$, выясним, прежде всего, геометрический смысл неравенства

$$5x + 2y \leqslant 150. \qquad (6)$$

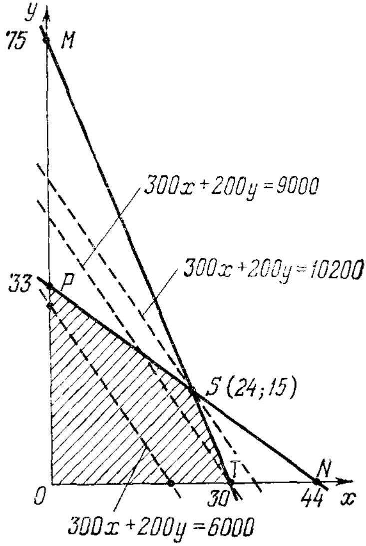


Рис. 16.

Известно, что множество точек, определяемое уравнением $5x + 2y = 150$, есть прямая линия на плоскости (прямая $MT$ на рис. 16). Эта прямая делит плоскость на две части: верхнюю и нижнюю полуплоскости. Координаты любой точки нижней полуплоскости удовлетворяют неравенству (6), а сами эти точки лежат либо ниже прямой $MT$, либо на ней. Точки верхней полуплоскости, лежащие выше прямой $MT$, описываются неравенством $5x + 2y > 150$.

Аналогично, неравенство $3x + 4y \leqslant 132$ определяет полуплоскость, точки которой лежат ниже прямой $3x + 4y = 132$, изображенной на рис. 16 в виде прямой $PN$, или на этой прямой.

Очевидно, что неравенства $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ определяют точки первого квадранта рассматриваемой плоскости, включая его границы.

Нетрудно теперь заключить, что если какая-либо пара чисел $x$, $y$ удовлетворяет всем неравенствам системы (5), то соответствующая точка $(x, y)$ принадлежит одновременно всем четырем полуплоскостям, определяемым неравенствами этой системы; другими словами, такая точка лежит внутри многоугольника $OPST$ или на его границе. Эта область на рис. 16 заштрихована.

Каждая точка многоугольника $OPST$ определяет вариант производства изделий первого и второго типов с учетом ограниченности времени работы каждого цеха. Исходная задача теперь может быть переформулирована следующим образом: среди точек многоугольника найти такую, в которой линейная функция $f$ принимает наибольшее значение.

Дадим геометрическое толкование функции $f$, определяющей прибыль предприятия. Пусть прибыль равна фиксированному значению $f_0$, например 6000 руб. Легко видеть, что множество точек на плоскости, в которых функция (4) принимает значение 6000, изображается прямой, уравнение которой

$$300x + 200y = 6000. \tag{7}$$

На рис. 16 эта прямая изображена пунктирной линией, делящей многоугольник $OPST$ на две части. Всем общим точкам этой прямой и многоугольника $OPST$ соответствует одно и то же значение прибыли $f_0 = 6000$, в том числе и точкам $x = 20$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = 30$.

Другому фиксированному значению прибыли $f_0$, равному, например, значению 9000, отвечает другая прямая, параллельная прямой (7).

Придавая $f$ различные значения, получаем семейство параллельных прямых, являющихся линиями уровня для функции $f$, т. е. линиями, во всех точках которых функция $f$ принимает постоянное значение $f_0$.

Пересечем многоугольник $OPST$ прямой $f = 300x + 200y = f_0$ и будем перемещать ее параллельно самой себе в направлении увеличения значений $f_0$. Перемещение будем осуществлять до такого предельного положения, когда многоугольник $OPST$ окажется целиком в нижней полуплоскости относительно предельной прямой, причем хотя бы одна его точка принадлежит этой прямой. В случае, изображенном на рис. 16, параллельный сдвиг приведет прямую в такое предельное положение, когда у нее окажется только одна общая точка с многоугольником — вершина $S$. Координаты этой вершины определяются числами $x = 24$ и $y = 15$. Им соответствует максимальное значение прибыли $f = 300 \cdot 24 + 200 \cdot 15 = 10\,200$.

То, что искомой точкой оказалась вершина многоугольника, не случайность. Экстремум (максимум или минимум) линейной функции достигается в вершинах многоугольника. Если наибольшее или наименьшее значение достигается более чем в одной точке, то оно достигается на всем ребре, параллельном прямой, являющейся линией уровня для рассматриваемой линейной функции.

*Ответ.* 24 и 15; 10 200 руб.

## *Упражнения*

**1.** По двум взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку движутся две автомашины со скоростями $v_1$ и $v_2$. Определить минимальное в процессе движения расстояние между машинами, если в начальный момент времени расстояния машин от перекрестка были равны $d_1$ и $d_2$ соответственно.

*Ответ.* $s = \left[\dfrac{(v_1 d_2 - v_2 d_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}\right]^{1/2}$.

**2.** Автомобиль едет от пункта $A$ до пункта $B$ с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте $B$ он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на $a$ км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением $a$ км/ч$^2$. Каково должно быть значение $a$, чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту $B$?

*Ответ.* $a = 14$.

**3.** Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью 24 м/с. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями $a_1$ и $a_2$ ($a_1 < 0$, $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 с раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4$ м/с$^2$. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение заднего автомобиля.

*Ответ.* Второй автомобиль остановился раньше; $a_2 = -8$ м/с$^2$.

**4.** Грузовой лифт спускается с башни высотой 320 м. Сначала он движется со скоростью 20 м/с, а потом его скорость мгновенно переключается и становится равной 50 м/с. Спустя некоторое время после начала движения лифта с вершины башни сбрасывают камень, который совершает свободное падение и достигает земли одновременно с лифтом. Известно, что в процессе движения камень был все время выше лифта, причем максимальная разность высот между ними составляла 60 м. В момент переключения скорости лифта скорость камня превышала 25 м/с, но была меньше 45 м/с. Определить, спустя какое время после начала движения лифта сбросили камень. При решении задачи ускорение свободного падения считать равным 10 м/с$^2$.

*Ответ.* 2 с.

**5.** Некто нанял пароход для перевозки грузов на расстояние в 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 золотых монет, но требует вернуть 9 золотых монет за каждый час пребывания парохода в пути. Предполагается, что пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если эта скорость будет равна $v$ км/ч, то в конце пути хозяин обязан выплатить команде премию, равную $10v$ золотым монетам. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать максимальное количество золотых монет? Какое это количество?

*Ответ.* 30 км/ч; 900 монет.

**6.** Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей площадью 40 тыс. м$^2$. Затраты на постройку одного дома, имеющего $N$ м$^2$ жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома площадью 1600 м$^2$ обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей; найти эту сумму.

*Ответ.* $2800\sqrt{2}$ тыс. руб.; 8 домов.

**7.** Поезд, следующий из пункта $A$ в пункт $B$, делает по пути некоторое количество остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей остановке. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт $B$ приедет менее 12 пассажиров, если из пункта $A$ их выезжает 462?

*Ответ.* Невозможен.

**8.** Некоторое предприятие приносит убытки, составляющие 31 тыс. руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составят 25 тыс. руб. в год, а дополнительные расходы окажутся равными 5 тыс. руб. в год при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на 10 тыс. руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Можно ли указанным способом сделать предприятие рентабельным?

*Ответ.* Нельзя.

**9.** Две точки $S_1$ и $S_2$ находятся по разные стороны от пункта $A$: точка $S_1$ на 200 м левее пункта $A$, а точка $S_2$ на 100 м правее этого пункта. Обе точки одновременно начинают двигаться навстречу друг другу, причем скорость каждой из них в данный момент времени пропорциональна расстоянию другой точки до пункта $A$ в этот же момент времени. Коэффициент пропорциональности в законах движения точек одинаков и, если время измеряется в минутах, равен 1. Успеет ли точка $S_2$ достичь пункта $A$ за одну минуту?

*Ответ.* Успеет.

**10.** (Задача о диете.) Диета должна обеспечивать ежесуточную потребность организма не менее чем в 36, 40 и 12 единицах некоторых микроэлементов $M_1$, $M_2$ и $M_3$ соответственно. Для удовлетворения этой потребности решено использовать два вида продуктов $П_1$ и $П_2$. Содержание микроэлементов $M_1$, $M_2$ и $M_3$ в этих продуктах дано в таблице

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|
| В 1 г $П_1$ | 6 | 10 | 6 |
| В 1 г $П_2$ | 18 | 10 | 2 |

Известно, что стоимость 5 г продукта $П_1$ равна стоимости 8 г продукта $П_2$. Определить, какое количество продукта $П_1$ и продукта $П_2$ нужно использовать, чтобы удовлетворялась ежесуточная потребность организма в микроэлементах и чтобы общая стоимость питания была минимальна.

*Ответ.* 3 г и 1 г.

## § 8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

**1.** Из 40 тонн руды выплавляют 20 тонн металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

*Ответ.* 53%.

**2.** Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 5 кг, второй 3 кг и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти массу третьего слитка и процент содержания меди в нем.

*Ответ.* 10 кг; 69%.

**3.** Из пункта $A$ в пункт $B$ выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта $A$ в пункт $B$ выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт $B$ одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов $A$ и $B$ навстречу друг другу, то они встретились бы через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от $A$ до $B$ грузовой автомобиль?

*Ответ.* 3 часа.

**4.** Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода достиг мотоциклист?

*Ответ.* На 2 км.

**5.** Два рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% всей работы?

*Ответ.* 14 дней.

**6.** С маяка, находящегося в море на расстоянии 500 м от берега, видна лишь передняя стена пристани длиной 40 м. Между маяком и берегом параллельно передней стене пристани движется пароход длиной 50 м с постоянной скоростью 5 м/с. Пароход загораживает всю пристань от смотрителя маяка в течение 4 с. Каково расстояние парохода от берега? (Считать, что берег прямолинейный и передняя стена пристани идет вдоль берега. Шириной корабля пренебречь.)

*Ответ.* 125 м.

**7.** Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами, по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в три раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

*Ответ.* В первой машине — 6, во второй — 15.

**8.** Пристани $A$ и $B$ находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из $A$ в $B$ и после десятиминутной стоянки в $B$ возвращается в $A$, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 км/ч. В момент выхода парохода из $A$ навстречу ему из $B$ в $A$ отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 ч 10 мин. В 11 ч 25 мин лодка находится на расстоянии 3 км от $A$. Направляясь из $B$ в $A$ после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 ч 40 мин. Определить время прибытия лодки в $A$.

*Ответ.* 11 ч 55 мин.

**9.** В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число тракторов каждого вида в бригаде.

*Ответ.* 3 бригады; 3 гусеничных трактора, 5 колесных.

**10.** Автобус отправляется из пункта $A$ в пункт $B$ и после шестиминутной стоянки в $B$ возвращается в $A$, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из $A$ в $B$ в 8 ч 05 мин автобус догоняет велосипедиста, который движется из $A$ в $B$ с постоянной скоростью 15 км/ч. В 9 ч 02 мин велосипедист находится на расстоянии 21 км от $A$. Автобус, возвращаясь из $B$ в $A$ после остановки в $B$, встречается с велосипедистом в 9 ч 14 мин и затем прибывает в $A$ в то же время, когда велосипедист приезжает в $B$. Определить время отправления автобуса из $A$.

*Ответ.* 8 ч 32 мин.

**11.** Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшихся другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на единицу числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

*Ответ.* 14 и 25 орехов.

**12.** Поле имеет форму прямоугольника. На одной из его сторон на расстоянии до ближайшего угла, равном 1/10 этой стороны, стоит столб. Если пойти от столба до самого далекого угла по границе поля (по двум сторонам), то на это уйдет 1 ч 3 мин; если же пойти напрямик, то потребуется 45 мин. Чтобы пройти поле из угла в угол по диагонали, нужно более 48 мин. За сколько минут можно дойти от столба до ближайшего угла (скорость ходьбы всегда одна и та же)?

*Ответ.* За 4 мин.

**13.** Пункты $A$ и $B$ находятся на двух шоссе, пересекающих друг друга под углом 120° в точке $C$. Если идти из $A$ в $B$ сначала по первому шоссе до перекрестка $C$, а потом по второму, то потребуется 5 часов. Туристы идут из $A$ в $B$ напрямик без дороги и проделывают путь за 6,5 часа. Если туристы пойдут без дороги напрямик от $A$ до середины $D$ отрезка шоссе $CB$, то они затратят на путь $AD$ более 5 часов. Сколько времени нужно, чтобы дойти от $A$ по шоссе до перекрестка $C$, если скорость ходьбы без дороги в 1,5 раза меньше, чем скорость ходьбы по шоссе? (Шоссе считать прямым.)

*Ответ.* 2 ч 40 мин.

**14.** В детский сад привезли мороженое четырех видов. Каждый ребенок должен был выбрать одну порцию мороженого. Оказалось, что число выбранных порций каждого вида равно цене в копейках одной порции этого же вида. Число выбранных порций второго вида больше числа выбранных порций первого вида на столько же, на сколько число выбранных порций четвертого вида больше числа выбранных порций третьего вида. Порций первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем порций второго и четвертого видов вместе. Одна порция второго вида стоит дороже одной порции четвертого вида. За выбранное детьми мороженое уплатили 4 руб. 20 коп. Сколько ребят в детском саду?

*Ответ.* 40 ребят.

**15.** В лотерее разыгрывались фотоаппараты, шариковые ручки и транзисторные приемники на общую сумму 240 руб. Сумма цен одного транзисторного приемника и одних часов на 4 руб. больше суммы цен одного фотоаппарата и одной ручки, а сумма цен одних часов и одной ручки на 24 руб. меньше суммы цен одного фотоаппарата и одного приемника. Цена ручки равна целому числу рублей, не превосходящему 6. Число выигранных фотоаппаратов равно цене (в рублях) одного фотоаппарата, поделенной на 10, число выигранных часов равно числу выигранных приемников и равно числу выигранных фотоаппаратов. Количество выигранных ручек в 3 раза больше числа выигранных фотоаппаратов. Сколько было выиграно фотоаппаратов, часов и приемников?

*Ответ.* 3 фотоаппарата, 3 часов, 9 ручек, 3 приемника.

**16.** Брат и сестра собрали каждый по 40 грибов, из них 52 белых гриба. Сколько белых грибов собрал каждый, если известно, что отношение числа белых грибов к числу остальных грибов у брата в 4 раза больше, чем у сестры?

*Ответ.* 32 и 20.

**17.** В двух колоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой колонне, если известно, что в первой из них на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

*Ответ.* 24 и 21.

**18.** Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен неполностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше, и при этом все равно один вагон остался неполностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на пять вагонов больше, но при этом все вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

*Ответ.* 1750 тонн.

**19.** Мотоциклист отправляется из пункта $A$ в пункт $B$ и после десятиминутной стоянки в $B$ возвращается в $A$, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 48 км/ч. В момент отправления мотоциклиста из $A$ навстречу ему из $B$ в $A$ выходит турист, идущий с постоянной скоростью. Турист встречается с мотоциклистом в 17 ч 15 мин. В 17 ч 25 мин турист находится на расстоянии 2 км от $A$. Направляясь из $B$ в $A$ после стоянки в $B$, мотоциклист догоняет туриста в 17 ч 35 мин. Определить время прибытия туриста в пункт $C$, находящийся на полпути между $A$ и $B$ ($|AC|=|CB|$).

*Ответ.* В 19 часов.

**20.** Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 70 руб., а после второго она составила 92 руб. 40 коп.

*Ответ.* В первый раз — на 10%, во второй — на 20%.

**21.** Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали одновременно и каждый вспахивает свою половину. Через 5 часов после того момента, когда они совместно вспахивали половину всего поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать 1/10 часть своего участка, а второму — 4/10 своего участка. Сколько времени понадобится второму трактору, чтобы одному вспахать все поле?

*Ответ.* 50 часов.

**22.** Пароход плывет от пристани $A$ к пристани $B$ и после десятиминутной стоянки в $B$ возвращается в $A$, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из $A$ в $B$ в 8 часов пароход догоняет лодку, которая движется из $A$ в $B$ с постоянной скоростью 3 км/ч. В 8 ч 10 мин лодка находится на расстоянии 1,5 км от $A$. Пароход, направляясь из $B$ в $A$ после стоянки в $B$, встречается в 8 ч 20 мин с лодкой и затем прибывает в $A$ в то же время, когда лодка приходит в $B$. Определить время прибытия лодки в $B$.

*Ответ.* В 8 ч 30 мин.

**23.** 24 школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая — в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 копеек дешевле, а билет в кино — на 20 копеек дороже, то, истратив на билеты в цирк и на билеты в кино те же суммы денег, в цирк и в кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 руб. 20 коп. больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и в кино?

*Ответ.* 1 рубль и 20 копеек.

**24.** Из пункта $A$ в пункт $B$ выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 км/ч$^2$, а после того, как его скорость возросла от 0 до $v$, продолжал двигаться равномерно со скоростью $v$. Расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость $v$.

*Ответ.* 8 км/ч.

**25.** Пункт $A$ стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт $B$ так, что расстояние от $A$ до $B$ равно 10 км. Скорость движения автомобиля по дороге в три раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из $A$ в $B$ так, что часть пути проделать по дороге, то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. Найти минимально возможное расстояние пункта $A$ от дороги.

*Ответ.* $20\sqrt{2}/3$ км.

**26.** На станциях железной дороги $A$ и $B$ стоят два поезда, которые должны ехать в одном направлении, причем поезд, отправляющийся со станции $A$, должен будет пройти станцию $B$. Трогаясь с места, каждый из поездов движется равноускоренно со своим ускорением, а после того, как его скорость достигает 60 км/ч, продолжает движение равномерно с этой скоростью. Известно, что ускорение поезда $A$ равно 100 км/ч$^2$, поезд $A$ переходит на равномерное движение на 12 мин позднее поезда $B$. Расстояние между поездами, после того как оба поезда перешли на равномерное движение, составляет 6 км. Минимальное расстояние между поездами составляло 2 км. Определить, какой из двух поездов отправился раньше и на сколько.

*Ответ.* Поезд $A$ отправился на 6 минут раньше $B$.

**27.** Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

*Ответ.* 55% и 75%.

**28.** В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 $м^3$ воды в час. Вторая труба наливает в час на $2d$ $м^3$ меньше, чем первая ($0 < d < 15$), а третья труба наливает в час на $11d$ $м^3$ больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 2/11 бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 9/11 бассейна. При каком значении $d$ бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

*Ответ.* 10.

**29.** Автомобиль едет из пункта $A$ в пункт $B$. От пункта $A$ до $C$, расположенного между $A$ и $B$, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте $C$ он уменьшает свою скорость на $a$ км/ч ($0 < a < 48$) и с этой скоростью едет 1/3 пути от $C$ до $B$. Оставшуюся часть пути от $C$ до $B$ он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает первоначальную скорость 48 км/ч. При каком значении $a$ автомобиль быстрее всего проделает путь от $C$ до $B$?

*Ответ.* 12.

**30.** Две хозяйки затратили одинаковое количество денег на покупки. Первая купила картофель, а вторая — яблоки, причем картофеля было куплено на 8 кг больше, чем яблок. Если бы яблоки и картофель стоили на 10 коп. за килограмм дороже, то в этом случае первая хозяйка купила бы картофеля на 3 кг больше, чем вторая яблок. Если бы при первоначальной стоимости первая хозяйка купила столько килограммов яблок, сколько у нее оказалось картофеля, а вторая купила бы столько картофеля, сколько у нее оказалось яблок, то первой пришлось бы истратить на 3 руб. 20 коп. больше, чем второй. Сколько стоили килограмм яблок и килограмм картофеля?

*Ответ*. 30 коп., 10 коп.

**31.** В цехе работают три бригады. Работая одновременно, они выполняют дневную норму цеха за 5 часов. Вторая бригада, работая одна, выполняет дневную норму цеха на 5 часов быстрее, чем одна третья бригада. За сколько часов одна вторая бригада выполняет дневную норму цеха, если известно, что третья бригада выполняет ее вдвое быстрее, чем первая?

*Ответ*. 10 часов.

**32.** В соревнованиях по бегу на дистанцию 120 м участвуют три бегуна. Скорость первого из них на 1 м/с больше скорости второго, а скорость второго бегуна равна полусумме скоростей первого и третьего. Определить скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 с быстрее третьего.

*Ответ*. 8 м/с.

**33.** К двум бассейнам подведены две трубы разного диаметра (к каждому бассейну своя труба). Через первую трубу налили в первый бассейн определенный объем воды и сразу после этого во второй бассейн через вторую трубу налили такой же объем воды, причем на все это вместе ушло 16 часов. Если бы через первую трубу вода текла столько времени, сколько через вторую, а через вторую трубу — столько времени, сколько через первую, то через первую трубу налилось бы воды на 320 $м^3$ меньше, чем через вторую. Если бы через первую трубу проходило на 10 $м^3/ч$ меньше, а через вторую — на 10 $м^3/ч$ больше воды, то, чтобы налить в бассейн (сначала в первый, а потом во второй) первоначальные объемы воды, ушло бы 20 часов. Сколько времени лилась вода через каждую из труб?

*Ответ*. 10 часов, 6 часов.

**34.** Школьник купил в магазине несколько тетрадей и карандашей, причем все тетради стоили столько же, сколько все карандаши, а тетрадей было на три штуки больше, чем карандашей. Если бы при этом один карандаш стоил на 10 коп. дороже, а одна тетрадь стоила тоже на 10 коп. дороже, то, истратив те же деньги, как на тетради, так и на карандаши, что и раньше, можно было бы купить тетрадей на одну больше, чем карандашей. Если бы школьник купил по первоначальной стоимости тетрадей столько, сколько было куплено карандашей, а карандашей столько, сколько было куплено тетрадей, то за карандаши пришлось бы уплатить на 90 коп. больше, чем за тетради. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

*Ответ.* 20 коп., 10 коп.

**35.** Из пункта $A$ в пункт $B$, расположенный на противоположном берегу озера, одновременно вышли моторная лодка и катер. К моменту, когда катер прибыл в пункт $B$, моторная лодка прошла половину пути и была в 30 км от $B$. Известно, что если бы катер шел из $A$ в $B$ с большей скоростью, увеличив ее на 3 км/ч, то лодка пришла бы в пункт $B$ на 6 часов позже катера. Найти скорость моторной лодки.

*Ответ.* 6 км/ч.

**36.** Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем $V$ и может быть заполнен первым шлангом за три часа, вторым шлангом — за 4 часа, третьим шлангом — за 5 часов. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается законченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение закончится через 6 часов. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 часа. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

*Ответ.* $^2/_{15}V$, $2V$.

**37.** В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму — 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

*Ответ*. 3500 тонн, 4800 тонн.

**38.** Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив это время между собой поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

*Ответ*. По 9 человек.

**39.** Города $A$, $B$, $C$, $D$ расположены так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами $|AB| = 6$ км, $|BC| = 5$ км, $|AD| = 15$ км, $|AC| = 15$ км. Из одного из городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше, чем турист, закончивший маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на 0,5 км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч, *Ответ.* 7 км/ч, 19/3 км/ч, 13/2 км/ч.

**40.** Количество учащихся в классе, повысивших свою успеваемость, заключено в пределах от 2,7 до 3,2% от общего числа учащихся. Каково наименьшее число учащихся в классе?

*Ответ.* 32.

**41.** Из пункта $A$ в пункт $B$ вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта $B$ в пункт $A$ выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из $B$. Сколько времени потребовалось бы пешеходу, для того чтобы пройти весь путь из $A$ в $B$, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 часа быстрее пешехода?

*Ответ.* 5 часов.

**42.** Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Тогда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд: все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей попытались построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

*Ответ.* 119 человек.

**43.** Имеется некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на которые умещается по 800 м проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдет, если пользоваться только катушками, на которые умещается по 900 м проволоки, причем таких катушек понадобится на 3 меньше. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которые умещается по 1100 м, то таких катушек понадобится еще на 6 меньше, но при этом все такие катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было?

*Ответ.* 52 900 м.

**44.** Пароход, отчалив от пристани $A$, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в нее притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани $B$. Весь путь от $A$ до $B$ пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода (собственная скорость — скорость в неподвижной воде).

*Ответ.* 11 км/ч.

**45.** От пристани $A$ к пристани $B$ против течения реки отошел катер, собственная скорость которого в стоячей воде в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани $B$, расстояние которой до $A$ по реке равно 20 км, отошла лодка. На каком расстоянии от $B$ произошла встреча катера с лодкой, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось проплыть 4 км до встречи и что катер затратил на весь путь до встречи с лодкой на 20 мин больше, чем на путь от места встречи до пункта $B$?

*Ответ.* 8 км.

**46.** Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

*Ответ.* 24; 20.

**47.** Смешав по 2 $см^3$ трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимает объем на 0,5 $см^3$ больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого вещества.

*Ответ.* 4 $г/см^3$.

**48.** Смесь равных объемов двух веществ имеет массу 62/13 г. Масса второго вещества в смеси равна массе 52/7 $см^3$ первого вещества, а плотность второго вещества равна 1 $г/см^3$. Найти объем каждого вещества в смеси.

*Ответ.* 4 $см^3$.

**49.** Два рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые семь дней они вместе выполнили 80% всей работы?

*Ответ.* 14 дней.

**50.** В начале года в сберкассу на книжку было положено 1640 руб. и в конце года было взято обратно 882 руб. Еще через год на книжке снова оказалось 882 руб. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

*Ответ.* 5%.

*Михаил Владимирович Лурье*
*Борис Иванович Александров*

# ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ