KOORDİNATDAN ASILI KÜTLƏYƏ MALİK YARIMSONSUZ HARMONİK OSSİLYATORUN $\mathfrak{su}(1,1)$ DİNAMİK SİMMETRİYA CƏBRİNİN DƏQİQ REALİZASİYASI

Ş.M. NAĞIYEV, E.İ. CƏFƏROV
Elm və Təhsil Nazirliyinin Fizika İnstitutu
Cavid pr. 131, AZ1143, Azərbaycan
e-mail: sh.nagiyev@physics.science.az, ejafarov@physics.science.az

Kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən, bu səbəbdən də özünü yarımsonsuz harmonik ossilyator kimi aparan kvant sistemi üçün $\mathfrak{su}(1,1)$ dinamik simmetriya cəbri qurulmuş və qapalı cəbri yaradan hər üç generatorun aşkar şəkilləri hesablanmışdır.

Aşar sözlər: Yarımsonsuz harmonik ossilyator; Li cəbri; Dəqiq həllər; Lager çoxhədliləri
PACS: 03.65.-w, 02.30.Hq, 03.65.Ge

GİRİŞ

Müasir fizikanın ən cəlbedici məsələlərindən biri şübhəsiz ki, harmonik ossilyator məsələsidir [1]. Qeyd edilən məsələ həm klassik, həm də kvant mexanikasının fundamental qanunları çərçivəsində çox maraqlı və sonsuz sayda hadisələri elmi baxımdan dolğun izah edə bilən dəqiq həllərə malikdir [2,3]. Klassik mexanikada, məsələ üçün uyğun Nyuton tənliyi yazılır və məhdud oblastda harmonik ossilyator məsələsinə uyğun gələn fiziki sistemin hərəkəti üçün trayektoriya funksiyaları analitik şəkildə tapılır. Kvant mexanikası çərçivəsində isə, submikron ölçüdə fiziki sistemin özünü harmonik ossilyator kimi aparması ideyası, bu sistemi ya konfiqurasiya, ya da impuls fəzasında bu sistemi xarakterizə edə biləcək uyğun kvant mexanikası tənliyinin həlli üzərindən mümkündür. Bu tənlik qeyri-relyativistik kvant mexanikası məsələsi üçün Şredinger, relyativistik kvant mexanikası məsələsi üçün isə sonlu-fərq, Kleyn-Qordon və ya Dirak tənlikləridir. Bütün bu tənlikləri müəyyən yanaşmalarla harmonik ossilyator üçün dəqiq həll etmək mümkündür. Lakin, burada bir şey nəzərə alınmalıdır ki, kvant mexanikası klassik mexanikadan fərqli olaraq, impuls və koordinat arasındakı mövcud Heyzenberq qeyri-müəyyənlik prinsipinin mövcudluğu səbəbindən, məhdud oblastdakı hərəkət yerinə, adətən, sonsuz oblastda hərəkəti tədqiq edir. Yəni, tədqiq edilən fiziki sisteminin koordinatının və impulsunun aşkar qiymətləri yerinə konfiqurasiya və ya impuls fəzasında bu sistemin sonsuz oblastda olma ehtimalı anlayışı daxil edilir. Bu zaman, yuxarıda sadaladığımız tənlikləri dəqiq və ya təqribi həll etməklə həmin sistemə uyğun gələn dalğa funksiyası və enerji spektrinin müəyyən analitik ifadələri tapılır ki, bu ifadələr də kvant sistemini tam olaraq xarakterizə etmək üçün kifayətdirlər.

Yuxarıda da qeyd etdiyimiz kvant harmonik ossilyatoru məsələsi də qeyri-relyativistik kvant mexanikasında kanonik yanaşma çərçivəsində koordinat və impulsun üzərinə heç bir məhdudiyyət qoyulmağıdı təqdirdə kvant mexanikasının riyazi cəhətdən ən sadə və dəqiq analitik həllərinə malikdirlər. Bu həllər stasionar hallarda həm koordinat, həm də impuls təsvirində dalğa funksiyası üçün Ermit çoxhədlilərindən asılı riyazi ifadəni verir, sistemin enerji spektri isə sonsuz sayda xətti və ekvidistant səviyyələrdən ibarətdirlər [3].

[4,5] məqalələri kvant harmonik ossilyatorunun çox maraqlı konfaynment modelini təqdim etmişdir. Belə ki, dalğa funksiyaları Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan harmonik ossilyator məsələsi daha da ümumiləşdirilərək, belə ehtimal edilir ki, konfiqurasiya fəzasında kvant ossilyatoru sistemi koordinatın hər hansı sonlu mənfi qiymətində məhdudlaşdırılır, lakin, koordinatın müsbət qiymətlər oblası tamamilə dəyişməz qalır. Daha sonra, bu kvant ossilyatoru modeli inkişaf etdirilərək, onun faza fəzası da qurulmuş və bu faza fəzasında impuls və koordinatın birgə kvazi-paylanma funksiyası olan Husimi funksiyasının aşkar şəkli də tapılmışdır [6]. Lakin, nəzərə almaq lazımdır ki, hər hansı yeni qurulan kvant sisteminin ən əsas xassələrindən biri də onun dinamik simmetriyasının olub-olmadığının yoxlanılması və dinamik simmetriya cəbrinə uyğun gələn generatorların aşkar şəkillərinin tapılmasıdır. Hal-hazırki məqalənin məqsədi də, yuxarıda qeyd edilən koordinatdan asılı kütləyə malik yarımsonsuz harmonik ossilyator modelini təsvir edə bilən dinamik simmetriya cəbrinin generatorlarının necə tapıldığını göstərmək və cəbri təşkil edən hər üç generatorun analitik ifadələrini hesablamaqdır.

DALĞA FUNKSİYASI ERMİT ÇOXHƏDLİLƏRİ İLƏ İFADƏ OLUNAN QEYRİ-RELYATİVİSTİK OSSİLYATORUN DİNAMİK SİMMETRİYASI

Bu bölmədə biz stasionar hallarının dalğa funksiyası Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun dinamik simmetriya cəbrinin generatorları ilə bağlı qısa icmal təqdim edirik.

Belə ki, kanonik yanaşmada $V(x) = \frac{m_0\omega^2x^2}{2}$ potensialı ilə ifadə olunan qeyri-relyativistik harmonik ossilyator üçün stasionar Şredinger tənliyi aşağıdakı şəkildədir:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2}\right]\psi(x) = E\psi(x). \quad (1)$$

Burada, m_0 – kvant harmonik ossilyatorunun bircins kütləsi, ω – ossilyatorun bucaq tezliyi, $\psi(x)$ – ikinci

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

tərtib diferensial tənliyin məxsusi funksiyası olan sistemin dalğa funksiyası, E isə bu tənliyin məxsusi qiyməti olan kvant sistemina uyğun enerji spektridir.

Yuxarıdakı (1) tənliyinin dəqiq həlli göstərir ki, enerji spektri aşağıdakı şəkildə sonsuz sayda ekvidistant diskret səviyyələrdən ibarətdir:

$$E \equiv E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0,1,2,\cdots. \quad (2)$$

Bu tənliyin aşkar həlli olan $\psi(x)$ dalğa funksiyası da eyni qayda ilə diskret qiymətlər alır və Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan aşağıdakı analitik ifadəyə malikdir [7]:

$$\psi(x) \equiv \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{{\lambda_0}^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}{\lambda_0}^2 x^2} H_n(\lambda_0 x), \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{m_0\omega}{\hbar}}. \quad (3)$$

Qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun dinamik simmetriya cəbri Heyzenberq-Li cəbridir və aşağıdakı şəkildədir:

$$\left[\hat{H}, a^{\pm}\right] = \pm\hbar\omega a^{\pm}, \quad 4a)$$

$$[a^-, a^+] = 1. \quad (4b)$$

Burada, $\hat{H}$ kvant ossilyatorunun (1) tənliyindən də göründüyü kimi tam Hamilton operatorudur və aşağıdakı şəkildədir

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0\omega^2 x^2}{2}. \quad (5)$$

$a^{\pm}$ operatorları isə kvant ossilyatorunun yüksəldici və endirici operatorları adlanırlar və aşağıdakı birinci tərtib diferensial operator kimi təyin olunurlar:

$$a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0}\left({\lambda_0}^2 x \mp \frac{d}{dx}\right). \quad (6)$$

(6) operatorları (3) ilə təyin olunan stasionar halların $\psi_n(x)$ dalğa funksiyasına aşağıdakı şəkildə təsir edərək dalğa funksiyasını bir səviyyə yüksəldib endirirlər:

$$a^-\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x), \quad (7a)$$

$$a^+\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x). \quad (7b)$$

Buradan asanlıqla tapmaq olar ki,

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\psi_0(x). \quad (8)$$

Nəzərə alsaq ki, impuls operatoru $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$, onda (4) Heyzenberq-Li cəbri kommutasiya münasibətlərindən aşağıdakı Heyzenberq-Li tənliklərini alarıq:

$$\left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] = im_0\hbar\omega^2 x, \quad (9a)$$

$$\left[\hat{H}, x\right] = -i\frac{\hbar}{m_0}\hat{p}_x. \quad (9b)$$

KOORDİNATDAN ASILI KÜTLƏLİ YARIMSONSUZ HARMONİK OSSİLYATORUN DİNAMİK SİMMETRİYA CƏBRİNİN QURULMASI

İndi isə, yarımsonsuz harmonik ossilyatorun dinamik simmetriya cəbrini quraq. Əvvəlcə bir daha qeyd edək ki, harmonik ossilyator problemi tam sonsuz haldan yarımsonsuz hala keçməsi üçün, onun da kütləsi koordinatdan asılı olaraq, koordinatın mənfi sonlu qiymətində sonsuz ağır olmalıdır. Yəni, baxılan qeyri-relyativistik kvant sisteminin həm kinetik, həm də potensial enerji operatorlarına daxil olan bircins kütlə m_0 koordinatdan asılı kütlə $M(x)$ ilə əvəz edilməlidir və $M(x)$ koordinatın $x = -a$ qiymətində sonsuz olmalıdır. Kinetik enerji operatorunun isə konfiqurasiya fəzasında ermitlik şərtinin saxlanması üçün ən sadə kinetik enerji operatoru olan BenDaniel-Dyuk ümumiləşməsindən istifadə edilir və aşağıdakı Şredinger tənliyi yazılır:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{M(x)}\frac{d}{dx} + \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}\right]\psi(x) = E\psi(x). \quad (10)$$

$M(x)$ funksiyası üçün

$$M(x) = \begin{cases} \frac{am_0}{x+a}, & -a < x < +\infty, \\ +\infty, & x \leq -a, \end{cases} \quad (11)$$

şəklindəki ifadə daxil edilməklə, (10) tənliyi ikinci tərtib diferensial tənlik olaraq dəqiq həll edilə bilir və tapılır ki, onun enerji spektri (2) ilə tam olaraq üst-üstə düşür, yəni

$$E \equiv E_n^{ys} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0,1,2,\cdots, \quad (12)$$

dalğa funksiyası isə aşağıdakı şəkildə ümumiləşmiş Lager çoxhədliləri ilə ifadə edilirlər [7]:

$$\psi(x) \equiv \psi_n^{ys}(x) = C_n\left[2{\lambda_0}^2 a(x+a)\right]^{{\lambda_0}^2 a^2} e^{-2{\lambda_0}^2 a(x+a)} L_n^{\left(2{\lambda_0}^2 a^2\right)}\left(2{\lambda_0}^2 a(x+a)\right). \tag{13}$$

Burada,

$$C_n = (-1)^n \lambda_0 \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+2{\lambda_0}^2 a^2+1\right)}}$$

əmsalı $L_n^{(\alpha)}(z)$ ümumiləşmiş Lager çoxhədlilərinin məlum ortoqonallıq şərtindən tapılır. Əgər biz qurulacaq cəbrin bir generatorunun Hamilton operatoru olduğunu nəzərə alsaq, onda bu generator üçün yaza bilərik ki,

$$\widehat{H}^{ys} = -\frac{\hbar^2}{2am_0}\frac{d}{dx}(x+a)\frac{d}{dx} + \frac{m_0 a\omega^2 x^2}{2(x+a)}. \tag{14}$$

Əlavə olaraq, aşağıdakı iki yeni operator daxil edək:

$$\hat{A}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0}\left({\lambda_0}^2\sqrt{\frac{a}{x+a}}x - \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x+a}{a}}\right), \tag{15a}$$

$$\hat{A}^- = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0}\left({\lambda_0}^2\sqrt{\frac{a}{x+a}}x + \sqrt{\frac{x+a}{a}}\frac{d}{dx}\right). \tag{15b}$$

(14) və (15) operatorlarının qarşılıqlı kommutasiyası aşağıdakı münasibətlərə gətirib çıxaracaq:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{A}^-, \hat{A}^+\right] = 1 - \frac{1}{2\lambda_0\sqrt{2a(x+a)}}\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right),\\
&\left[\widehat{H}^{ys}, \hat{A}^+\right] = \hbar\omega\hat{A}^+ - \frac{\hbar\omega}{2\lambda_0\sqrt{2a(x+a)}}\left[\hat{A}^+\hat{A}^- + \left(\hat{A}^+\right)^2\right] - \frac{\hbar\omega}{8{\lambda_0}^2 a(x+a)}\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right),\\
&\left[\widehat{H}^{ys}, \hat{A}^-\right] = -\hbar\omega\hat{A}^- + \frac{\hbar\omega}{2\lambda_0\sqrt{2a(x+a)}}\left[\hat{A}^+\hat{A}^- + \left(\hat{A}^-\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Bu kommutasiya münasibətləri aydın olaraq göstərir ki, $\widehat{H}^{ys}$, $\hat{A}^+$ və $\hat{A}^-$ generatorları birlikdə yarımsonsuz kvant harmopnik ossilyatoru üçün qapalı dinamik simmetriya cəbri təşkil etmirlər. Bu model üçün (9) Heyzenberq-Li tənliklərinin hansı ümumiləşmiş şəklə düşdüyünü yoxladıqda isə alırıq ki:

$$\left[\widehat{H}^{ys}, \hat{p}_x\right] = im_0\hbar\omega^2 x\left[\frac{a}{x+a} + \frac{ax}{2(x+a)^2}\right] + i\hbar\frac{{\hat{p}_x}^2}{2am_0}, \tag{16a}$$

$$\left[\widehat{H}^{ys}, x\right] = -i\frac{\hbar}{m_0}\frac{x+a}{a}\left[\hat{p}_x - \frac{i\hbar}{2(x+a)}\right]. \tag{16b}$$

Əgər aşağıdakı yeni bir $\widehat{P}_x$ operatoru daxil etsək:

$$\widehat{P}_x = \frac{x+a}{\hbar}\hat{p}_x, \tag{17}$$

onda alarıq ki:

$$\left[\widehat{H}^{ys}, \widehat{P}_x\right] = i\left(m_0\omega^2 ax - \widehat{H}^{ys}\right), \tag{18a}$$

$$\left[\widehat{H}^{ys}, x\right] = -\frac{\hbar^2}{am_0}\left(i\widehat{P}_x + \frac{1}{2}\right). \tag{18b}$$

Beləliklə, (18) tənliklərinin əslində tərəfimizdən dinamik simmetriyası tədqiq edilən yarımsonsuz kvant harmonik ossilyatoru modeli üçün Hamilton-Li tənliklərinin ümumiləşmiş şəkilləri olduqları məlum olur.

Növbəti mərhələdə, biz (15) və (17) operatorları əsasında aşağıdakı üç yeni K operatorları daxil edək:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \hat{A}^+\hat{A}^- + {\lambda_0}^2 a^2 + \frac{1}{2},\\
K_1 &= {\lambda_0}^2 ax - \hat{A}^+\hat{A}^- - \frac{1}{2},\\
K_2 &= \frac{i}{2} - \widehat{P}_x.
\end{aligned}$$

Sadə hesablamalar apararaq, asanlıqla göstərmək olar ki, bu üç operator $\mathfrak{su}(1,1)$ Li cəbrinin generatorlarıdır, yəni onların aşağıdakı kommutasiyaları qapalı cəbri yaradır:

$$\begin{aligned}
[K_0, K_1] &= iK_2,\\
[K_2, K_0] &= iK_1,\\
[K_1, K_2] &= -iK_0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Əlavə olaraq, $\mathfrak{su}(1,1)$ Li cəbrinin riyazi əsaslarından yaxşı məlum olan aşağıdakı iki $K_\pm$ operatorları daxil edək:

$$K_{\pm} = K_1 \pm iK_2. \tag{20}$$

Onda, K_0 və $K_{\pm}$ operatorları arasındakı kommutasiya münasibətləri (19) kommutasiya münasibətlərini aşağıdakı şəkildə qismən dəyişəcək:

$$[K_{-}, K_{+}] = 2K_0, \quad [K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}. \tag{21}$$

Buradan isə asanlıqla məlum olur ki, $K_{\pm}$ operatorları əslində kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən yarımsonsuz kvant ossilyatoru modelinin yüksəldici və endirici operatorlarıdırlar və onların (13) dalğa funksiyalarına təsirləri aşağıdakı cəbri ifadəyə tabedir:

$$K_{-} \cdot \psi_n^{ys}(x) = \varepsilon_n \psi_{n-1}^{ys}(x), \quad K_{+} \cdot \psi_n^{ys}(x) = \varepsilon_{n+1} \psi_{n+1}^{ys}(x). \tag{22}$$

Burada, $\varepsilon_n = -\sqrt{n\left(n + 2{\lambda_0}^2 a^2\right)}$.

(22) münasibətlərindən istifadə edərək, asanlıqla yazmaq olar ki,

$$\psi_n^{ys}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\left(2{\lambda_0}^2 a^2 + 1\right)_n}} (K_{+})^n \psi_0^{ys}(x). \tag{23}$$

Başqa sözlə, (23) ifadəsi əslində yarımsonsuz ossilyator üçün adı harmonik ossilyatorun dalğa funksiyası üçün doğru olan (8) ifadəsinin ümumiləşməsidir və $a \to \infty$ limit halı üçün bu ifadəni tam bərpa edir. Həm də, asanlıqla göstərmək olar ki, (21) münasibətləri də bu limitdə Heyzenberq cəbrinin əsasını təşkil edən (4) münasibətlərini tam olaraq bərpa edirlər.

Bu iş Azərbaycan Elm Fondunun maliyyə dəstəyi ilə yerinə yetirilmişdir – **Qrant № AEF-MCG-2022-1(42)-12/01/1-M-01**.

[1] *M. Moshinsky and Y.F. Smirnov*. The harmonic oscillator in modern physics New York: Harwood Academic, 1996.

[2] S.*C. Bloch*. Introduction to classical and quantum harmonic oscillators.Wiley, New-York, 1997.

[3] *L.D. Landau and E.M. Lifshitz*. Quantum mechanics (Non-relativistic Theory) Oxford: Pergamon, 1991.

[4] *E.I. Jafarov and J. Van der Jeugt*. 2021 Eur. Phys. J. Plus 136 758.

[5] *E.I. Jafarov and J. Van der Jeugt*. 2022 Pramana J. Phys 96 35.

[6] *E.I. Jafarov, A.M. Jafarova and S.M. Nagiyev*. 2022 Int. J. Mod. Phys.B 36 2250227.

[7] *R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw*. Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues (Springer Verslag, Berlin), 2010.

S.M. Nagiyev, E.I. Jafarov

EXACT REALIZATION OF THE $\mathfrak{su}(1,1)$ DYNAMICAL SYMMETRY ALGEBRA FOR THE SEMIINFINITE HARMONIC OSCILLATOR WITH THE POSITION-DEPENDENT MASS

The $\mathfrak{su}(1,1)$ dynamical symmetry algebra is constructed and obvious expressions of all three generators forming this algebra are computed for the quantum system behaving itself as a semiinfinite harmonic oscillator due to that its mass varies with position.

Ш.М. Нагиев, Э.И. Джафаров

ТОЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГЕБРЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ $\mathfrak{su}(1,1)$ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С МАССОЙ ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ КООРДИНАТЫ

Алгебра динамической симметрии $\mathfrak{su}(1,1)$ построена и явные виды всех трех генераторов образуоющих эту алгебру вычислены для квантовой сисетмы ведущей себя как полубесконечный гармонический осциллятор из-за того что его масса меняется в зависимости от координаты.