О КВАНТОВЫХ ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Ш.М. НАГИЕВ, А.М. ДЖАФАРОВА, Ш.А. АМИРОВА
Институт Физики НАНА, Баку, Азербайджан
shakir.m.nagiyev@physics.ab.az

1.В недавней работе [1] была представлена новая модель точно решаемого линейного нерелятивистского квантового гармонического осциллятора [1]. Данная модель обладает свойством полуконфайнмента. Это свойство заключается в том, что волновые функции стационарных состояний обращаются в нуль в двух крайних точках: 1) $x = a$ и 2) $x = \infty$. Свойство полуконфайнмента в этой модели достигается заменой постоянной массы $m = \mathrm{const}$ эффективной массой $M = M(x)$, зависящей от координаты. Из-за бесконечной глубины потенциальной ямы стационарные состояния системы имеют только дискретный спектр энергии. Соответствующие волновые функции стационарных состояний выражаются через полиномы Лагерра $L_n^{\lambda}(x)$, однако ее энергетический спектр полностью совпадает с энергетическим спектром нерелятивистского квантового гармонического осциллятора.

Цель настоящей работы — построить квантовые функции распределения, а именно стандартно-упорядоченную квантовую функцию распределения и функцию Хусими для рассматриваемой полуограниченной модели линейного гармонического осциллятора. (В связи с этим отметим, что квантовая функция распределения Вигнера для данной модели не существует — соответствующий интеграл расходится.)

2.Полуограниченная модель линейного гармонического осциллятора описывается следующим уравнением Шредингера с зависящей от координаты массой $M(x)$ (см, например, [2]):

$$\left\{\partial_x^2 - \frac{M'}{M}\partial_x + \frac{2M}{\hbar^2}[E - V(x)]\right\}\psi(x) = 0, \tag{1}$$

где

$$M(x) = \frac{am}{a+x},\ \ \mathrm{V}(x) = \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2},\ -a < x < \infty\,. \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет следующие собственные функции [1]

$$\psi_n(x) = c_n\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\lambda_0^2 a^2} e^{-\lambda_0^2 a(x+a)} L_n^{2\lambda_0^2 a^2}\left(2\lambda_0^2 a^2(x + a)\right), \tag{3}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $\lambda_0 = \sqrt{m\omega/\hbar}$. Приведем вид полиномов Лагерра. Они имеют вид [3, 4]

$$L_n^{\alpha}(x) = (\alpha + 1)_n / n!\, \Phi(-n, \alpha + 1; x)\,,\quad (\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\,\Gamma(\alpha). \tag{4}$$

Волновые функции (3) соответствуют уровням энергии

$$E_{\boldsymbol{n}} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

и удовлетворяют следующему условию ортонормированности

$$\int_{-a}^{\infty}\psi_n^*(x)\,\psi_m(x)dx = \delta_{nm}. \tag{6}$$

Из этого условия для нормировочной постоянной получаем выражение

$$c_n = (-1)^n (2\lambda_0^2 a^2)^{\lambda_0^2 a^2 + \frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n!}{a\Gamma(n + 2\lambda_0^2 a^2 + 1)}}\,. \tag{7}$$

При выводе равенство (6) мы воспользовались условием ортогональности для полиномов Лагерра [4]

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x)\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm},\ \alpha > -1. \tag{8}$$

3.Для чистых состояний стандартно-упорядоченная квантовая функция распределения определяется следующим образом [5]

$$F^S(x, p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(x, t)\phi^*(p, t)e^{ipx/\hbar}\,, \tag{9}$$

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
ANAS, Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

где $\phi(p,t)$ есть волновая функция в импульсном -представление:

$$\phi(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a}^{\infty}\psi(x,t)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx. \tag{10}$$

Для нахождения стандартно-упорядоченной квантовой функции распределения по формуле (9) нам сначала следует найти явно волновые функции в импульсном p- представление (10):

$$\phi_n(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a}^{\infty}\psi_n(x,t)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx,$$

$$\psi_n(x,t)=\psi_n(x)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t},\ \phi_n(x,t)=\phi_n(x)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}. \tag{11}$$

Поскольку волновые функции $\psi_n(x,t)$ (3) ортонормированы, то и волновые функции $\phi_n(p,t)$ (11) также будут ортонормированными, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^*(p,t)\,\phi_m(p,t)dp=\delta_{nm}$. Вводя обозначения $\zeta=2\lambda_0^2a(x+a)$, $0<\zeta<\infty$ и $b=\lambda_0 a$, получим

$$\phi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{c_n}{2\lambda_0 b}\int_0^{\infty}\zeta^{b^2}e^{-\frac{\zeta}{2}}L_n^{2b^2}(\zeta)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}d\zeta\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{c_n}{2\lambda_0 b}e^{\frac{ipa}{\hbar}}I_n \tag{12}$$

где

$$I_n=\int_0^{\infty}\zeta^{b^2}e^{-s\zeta}L_n^{2b^2}(\zeta)d\zeta,\quad s=\frac{1}{2}(1+i\frac{p}{\lambda_0 b}). \tag{13}$$

Для вычисления интеграла (13) воспользуемся формулой [6]

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-px}L_n^{\lambda}(cx)dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}P_n^{(\lambda,\alpha-\lambda-n-1)}(1-\frac{2c}{p}),\ \mathrm{Re}p>0,\ \mathrm{Re}\alpha>0. \tag{14}$$

В формуле (14) функции $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ являются полиномами Якоби [3, 4]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(\alpha+1)_n/n!\,F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}).$$

В результате для волновой функции в p- представление приходим к выражению

$$\phi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{c_n}{2\lambda_0^2 a}e^{\frac{ipa}{\hbar}}\Gamma(\lambda_0^2a^2+1)\left[\frac{2\hbar\lambda_0^2a(\hbar\lambda_0^2a-ip)}{p^2+\hbar^2\lambda_0^4a^2}\right]^{\lambda_0^2a^2+1}\cdot$$

$$\cdot P_n^{(2\lambda_0^2a^2,-\lambda_0^2a^2-n)}(1-\frac{4\hbar\lambda_0^2a(\hbar\lambda_0^2a-ip)}{p^2+\hbar^2\lambda_0^4a^2}). \tag{15}$$

С учетом $F_n^S(x,p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi_n(x,t)\phi_n^*(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}}$, (3) и (15) находим окончательное выражение для стандартно-упорядоченной квантовой функции распределения

$$F_n^S(x,p)=\frac{1}{4\pi\hbar}\frac{c_n^2}{\lambda_0^2a}\Gamma(\lambda_0^2a^2+1)\left[\frac{2\hbar\lambda_0^2a(\hbar\lambda_0^2a-ip)}{p^2+\hbar^2\lambda_0^4a^2}\right]^{\lambda_0^2a^2+1}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\lambda_0^2a^2}\times$$
$$\times e^{-(x+a)(\lambda_0^2a-\frac{ip}{\hbar})}L_n^{2\lambda_0^2a^2}\left(2\lambda_0^2a^2(x+a)\right)P_n^{(2\lambda_0^2a^2,-\lambda_0^2a^2-n)}\left(1-\frac{4\hbar\lambda_0^2a(\hbar\lambda_0^2a-ip)}{p^2+\hbar^2\lambda_0^4a^2}\right), \tag{16}$$

где $n=0,1,2,3,\ldots$ Отметим, что, как хорошо известно, в стационарном состоянии физические величины, характеризующие системы, от времени не зависят.

4. Вычислим теперь квантовую функцию распределения Хусими. Она с нормировочным множителем $(\pi\hbar)^{-1}$ в координатном представление определяется выражением [5, 6]

$$F^H(x,p,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\hbar D}\left|\int\psi(x',t)e^{-i\frac{px'}{\hbar}-\frac{(x-x')^2}{4D^2}}dx'\right|^2. \tag{17}$$

Она ограничена как $0\le F^H(x,p,t)\le(\pi\hbar)^{-1}$. Здесь значение квадрата параметра D равно $D^2=1/2\,\lambda_0^2$. Перейдем теперь к вычислению явного вида функции распределения Хусими (17) для рассматриваемой квантовой системы в -ом стационарном состоянии, используя аналитическое выражение волновой функции этого состояния (3). Имеем

$$F_n^H(x,p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\hbar D}\left|\int \psi_n(x')e^{-i\frac{px'}{\hbar}-\frac{(x-x')^2}{4D^2}}\,dx'\right|^2. \qquad (18)$$

Представим (18) в виде

$$F_n^H(x,p) = \frac{\lambda_0}{2\pi\hbar\sqrt{\pi}}|A_n|^2,\ \ A_n = \int_{-a}^{\infty}\psi_n(x')e^{-i\frac{px'}{\hbar}-\frac{\lambda_0^2}{2}(x-x')^2}\,dx'. \qquad (19)$$

Подставив аналитическое выражение волновой функции n-го стационарного состояния (3) в (19), находим:

$$A_n = c_n\int_{-a}^{\infty}\left(1+\frac{x'}{a}\right)^{b^2} e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}(x-x')^2-b^2\left(1+\frac{x'}{a}\right)-i\frac{px'}{\hbar}}L_n^{2b^2}\left(2b^2\left(1+\frac{x'}{a}\right)\right)dx'. \qquad (20)$$

Для вычисления (20) воспользуемся операторным методом, т.е. учтем, что

$$L_n^{2b^2}\left(2b^2\left(1+\frac{x'}{a}\right)\right)\cdot e^{-i\frac{px'}{\hbar}} = L_n^{2b^2}\left(2i\lambda_0 b\hbar\frac{d}{dp}+2b^2\right)\cdot e^{-i\frac{px'}{\hbar}}. \qquad (21)$$

Подстановка (21) в (20) дает

$$A_n = \frac{c_n}{c_0}L_n^{2b^2}\left(2i\lambda_0 b\hbar\frac{d}{dp}+2b^2\right)\cdot A_0\,,$$

$$A_0 = ac_0\int_0^{\infty} y^{b^2}e^{-i\frac{pa}{\hbar}(y-1)-\frac{\lambda_0^2}{2}[x-a(y-1)]^2-b^2y}\,dy\,, \qquad (22)$$

где введена новая безразмерная переменная $y = 1+\frac{x'}{a}$. Этот табличный интеграл выражается через функции параболического цилиндра $D_v(z)$ [8]

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-py^2-qy}\,dy = \Gamma(\alpha)(2p)^{-\alpha/2}e^{\frac{q^2}{8p}}D_{-\alpha}\left(\frac{q}{\sqrt{2p}}\right),\ \mathrm{Re}\alpha,\mathrm{Re}p>0\,. \qquad (23)$$

Поэтому для A_0 получаем выражение

$$A_0 = \frac{(2b)^{b^2+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_0\Gamma(2b^2+1)}}\Gamma(b^2+1)e^{\frac{z^2}{4}+\beta}D_{-b^2-1}(z), \qquad (24)$$

где $z = -(\lambda_0 x + i\,p/\sqrt{m\omega\hbar})$, $\beta = -\frac{1}{2}(b+\lambda_0 x)^2 + ib\,p/\sqrt{m\omega\hbar}$. С учетом теперь формул (19), (22) и (24) получаем следующая операторная формула для функции Хусими для -го стационарного состояния в виде

$$F_n^H(x,p) = \frac{\lambda_0}{2\pi\hbar\sqrt{\pi}}\frac{n!}{(2b^2+1)_n}\left|L_n^{(2b^2)}\left(2b^2+2i\lambda_0 b\hbar\frac{d}{dp}\right)\cdot A_0\right|^2. \qquad (25)$$

Отметим, что используя степенного представления для полиномов Лагерра мы можем вычислить действие дифференциального оператора в (25) и тем самым получить аналитическую формулу для функции Хусими. Непосредственное вычисление функции Хусими по формуле (19) дает следующее выражение

$$F_{Nn}^H(x,p) = \frac{1}{\pi\hbar}e^{-\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m_0}+\frac{m_0\omega^2x^2}{2}(x^2+4ax+2a^2)\right)}b^{2b^2+1}\frac{\Gamma(b^2+1)}{\Gamma(b^2+\frac{1}{2})}\frac{(2b^2+1)_n}{n!}\times$$
$$\times\sum_{k,s=0}^{n}\frac{(-n)_k(-n)_s(b^2+1)_k(b^2+1)_s}{(2b^2+1)_k(2b^2+1)_s}\frac{(2b)^{k+s}}{k!\,s!}\times$$
$$\times D_{-(b^2+k+1)}\left(-\lambda_0\left(x-i\frac{p}{m_0\omega}\right)\right)D_{-(b^2+s+1)}\left(-\lambda_0\left(x+i\frac{p}{m_0\omega}\right)\right). \qquad (26)$$

Представление (25) удобно для вычисления предела $F_n^H(x,p)$ при $a\to\infty$. Таким образом воспользовавшись предельной формулой

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}n}L_n^{(\alpha)}\left((2\alpha)^{\frac{1}{2}}x+\alpha\right) = \frac{(-1)^n}{n!}H_n(x) \qquad (27)$$

легко можем найти предел функции Хусими. Можно показать, что этот предел, как и должно быть, совпадает со соответствующим известным выражением для нерелятивистского линейного гармонического осциллятора, т.е. $\lim\limits_{a\to\infty}F_n^H(x,p) = F_{Nn}^H(x,p)$, где (см., например, [9])

$$F_{Nn}^{H}(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\left[\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\right]^n e^{-\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)}. \quad (28)$$

[1] *E.I. Jafarov and J. Van der Jeugt*. Exact solution of the semiconfined harmonic oscillator model with a position-dependent effective mass, Eur. Phys. J. Plus, 136 758 (2021).

[2] *E. I. Jafarov and S. M. Nagiyev*. Mod. Phys. Lett. A **36**, No.29, 2150206 (2021).

[3] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции, т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, Наука, М., 1974.

[4] *R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw*. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues, (Springer, Berlin 2010).

[5] *H.-W. Lee*. Theory and application of the quantum phase-space distribution functions, Phys. Rep. 259 (1995) 147-211.

[6] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И.Маричев*. Интегралы и ряды, т. 2: Специальные

[7] функции, Наука, М., 1983.

[8] *K. Husimi*. Some formal properties of the density matrix, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 22 264 (1940).

[9] *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев*. Интегралы и ряды, т. 1: Элементарные специальные функции, Наука, М., 1983.