VON ROOS KİNETİK ENERJİ OPERATORUNUN TƏSİRİ ALTINDA OLAN POTENSİAL QUTUVARİ KVANT HARMONİK OSSİLYATORUNUN DƏQİQ HƏLLİ

E.İ. CƏFƏROV, A.M. MƏMMƏDOVA və N.F. MƏMMƏDOVA
Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Fizika İnstitutu
Cavid pr. 131, AZ1143, Bakı, Azərbaycan
E-mail: ejafarov@physics.science.az

Koordinat ilə dəyişən effektiv kütlə formalizmi çərçivəsində, birölçülü kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həll oluna bilən modeli tərəfimizdən təklif edilmişdir. Koordinatdan asılı effektiv kütlənin analitik ifadəsi elə yolla seçilmişdir ki, o, özündə kvantlanma effektini nümayiş etdirsin və potensialın şəklini harmonik ossilyatordan qeyri-kvadratik profilə malik kvant qutusuna çevirə bilsin. Tədqiq edilən ossilyator modelinin stasionar hallarının dalğa funksiyaları sərbəst Hamiltonianı von Roos kinetik enerji operatoru ilə təyin olunan uyğun Şredinger tənliyini dəqiq həll etməklə alınmışdır. Dalğa funksiyasının analitik ifadəsi psevdo Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə edilmişdir. Enerji spektrinin isə tapılmış ifadəsi göstərir ki, o, diskretdir, qeyri-ekvidistantdır və sonludur. Göstərilmişdir ki, həm enerji spektri, həm də dalğa funksiyası $N\to\infty$ limiti zamanı Ermit ossilyatoru da adlanan qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyasını tam bərpa edirlər.

Açar sözlər: Koordinatdan asılı effektiv kütlə, kvant harmonik ossilyatoru, psevdo Yakobi çoxhədliləri, qeyri-ekvidistant enerji spektri
PACS: 03.65.-w, 02.30.Hq, 03.65.Ge

1. GİRİŞ

Dalğa funksiyaları sonsuzluqda sıfra çevrilən birölçülü harmonik ossilyator müasir fizika və texnologiyaların müxtəlif istiqamətlərində özünün uğurlu tətbiqləri səbəbilə qeyri-relyativistik kvant mexanikasının ən cəlbedici problemlərindən hesab olunmaqdadır [1, 2]. Sabit m_0 effektiv kütləsinə malik stasionar Şredinger tənliyi enerji spektri və dalğa funksiyası vahidlərində birölçülü harmonik ossilyator üçün dəqiq həll oluna bildiyindən, bu məsələ həm də riyaziyyat nöqteyi-nəzərindən də maraqlıdır. Bu baxımdan yaxşı məlumdur ki, enerji spektri üçün alınan riyazi ifadə onun diskret və ekvidistant xassələrə malik olduğunu göstərir. Uyğun dalğa funksiyasının analitik ifadəsi isə Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunur [3].

Asanlıqla müşahidə etmək olar ki, m_0 sabit effektiv kütləyə malik qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan dalğa funksiyası $x\to\pm\infty$ qiymətlərində sıfra çevrilir. Kvant harmonik ossilyatorunun bu xassəsini nəzərə alaraq, özünü qeyri-kvadratik profilə malik kvant qutusu kimi apara bilən kvant harmonik ossilyator modelini tədqiq etmək də fiziki sistemlər üçün cəlbedicidir. Bu effektə nail olmaq üçün, əvvəlcə təsəvvür etmək lazımdır ki, adi harmonik ossilyator özünü qanadları $x\to\pm\infty$-də sonsuzluğa gedən parabola kimi aparır və daha sonra da elə bir yanaşma istifadə etmək lazımdır ki, bu parabolanın qeyd edilən qanadlarını x koordinatının müəyyən bir nöqtəsində əyib üfüqü şəklə salmaqla harmonik ossilyatorun potensialından müəyyən mənada qeyri-kvadratik profilə malik potensial qutu düzəldək. Biz tədqiq etdiyimiz problemdə bu məqsədimizə sabit effektiv m_0 kütləsini koordinatdan asılı olaraq dəyişə bilən effektiv $M(x)$ kütləsi ilə əvəz etmək sayəsində nail ola bilmişik.

Bu yanaşma yeni deyil və ilk dəfə olaraq, ifratkeçiricilərdə tunel effekti ilə bağlı məşhur təcrübənin fizika qanunlarına əsaslanan dəqiq izahı üçün güclü alət sayılan qadağan olunmuş zonası koordinatdan asılı olaraq dəyişən sərbəst çoxzərrəcikli yanaşma nəzəriyyəsi çərçivəsində təklif edilmişdir [4]. Məqaləmizin əsas məqsədi koordinatdan asılı olaraq dəyişən kütləyə malik qeyri-relyativistik kinetik enerji operatorunun ifadə olunması üçün von Roos yanaşması çərçivəsində əldə edilmişdir [5]. Göstərilmişdir ki, koordinatdan asılı effektiv kütləyə malik qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatoru modelinin stasionar hallarının həm enerji spektri, həm də dalğa funksiyaları üçün səlis və dəqiq həllər almaq mümkündür.

Biz məqaləmizi aşağıdakı şəkildə strukturlaşdırmışıq: 2-ci bölmə, stasionar hallarının dalğa funksiyalarının analitik ifadələri Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan məlum qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatoru modelinə həsr olunmuşdur. Stasionar halların dalğa funksiyaları və enerji spektrinin analitik ifadələrini almağa imkan yaradan Nikiforov-Uvarov metodunun bu məlum model üçün necə tətbiq oluna biləcəyinin detallarını da bu bölmədə təqdim edirik. Daha sonra, biz koordinatdan asılı effektiv kütləyə malik kvant harmonik ossilyatoru modelinin von Roos kinetik enerji operatoru formalizmində dəqiq həllərinə həsr olunmuş hazırki məqalənin əsas nəticələrini 3-cü bölmədə təqdim edirik. Burada biz stasionar halların dalğa funksiyaları və enerji spektrinin aşkar ifadələrini tapmaq üçün yenidən Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə edirik. Koordinatdan asılı effektiv kütlənin analitik ifadəsi sayəsində tədqiq edilən harmonik ossilyator modeli özünü qeyri-kvadratik profilə malik kvant qutusu kimi aparır. Sonuncu bölmə bu məqalədə alınmış nəticələrin qısa müzakirəsini əhatə edir.

2. ERMİT ÇOXHƏDLİLƏRİ VAHİDİNDƏ QEYRİ-RELYATİVİSTİK KVANT HARMONİK OSSİLYAORU POLYNOMIALS

Bu bölmədə, qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyator problemi barədə ümumi məlumat təqdim edilir. Bu ossilyator modelinin stasionar hallarının dalğa

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
ANAS, Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

funksiyaları və enerji spektri Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə etməklə tapılırlar [6]. Aşağıda təqdim edilən stasionar Şredinger tənliyinin ümumi şəkli bizim başlanğıc nöqtəmizdir:

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m_0} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)\ . \qquad (2.1)$$

Bu tənlikdə əvvəlcə impuls operatoru $\hat{p}_x$-in və daha sonra da $V(x)$ potensialının aşkar şəkillərini təyin etmək lazımdır. Məhz kinetik enerji operatoru və potensialın aşkar şəkilləri (2.1) tənliyində təyin edildiyi təqdirdə, bu tənliyin təbiəti və onun hansı yollarla dəqiq həll ediləcəyi barədə müəyyən fikirlər irəli sürə bilərik.

Sadəlik üçün, biz bütün hesablamaları kvant mexanikasına kanonik yanaşma şərşivəsində həyata keçirəcəyik. Bu halda, birölçülü impuls aşağıdakı kimi təyin olunmalıdır:

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}. \qquad (2.2)$$

Onda, biz kvant harmonik ossilyatoru problemini tədqiq etməyi qarşımıza məqsəd qoyduğumuzdan, bu problemin potensialının aşkar şəkli də məlumdur və o, aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$V(x) = \frac{m_0{\omega_0}^2x^2}{2}, \qquad (2.3)$$

Burada, m_0 və ω_0 qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun sabit effektiv kütləsi və bucaq tezlikləridir. Növbəti addım olaraq, (2.1) tənliyinin dəqiq həlli çərçivəsində ehtimal edirik ki, $\psi(x)$ dalğa funksiyaları bağlıdırlar və sonsuzluqda sıfra yaxınlaşırlar.

(2.2) və (2.3) ifadələrini (2.1) tənliyində yerinə yazmaqla aşağıdakı ikinci tərtib diferensial tənliyi almaq olar:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{m_0{\omega_0}^2x^2}{2}\right)\psi = 0. \qquad (2.4)$$

İndi isə biz Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə etməklə bu tənliyin necə dəqiq həll edildiyini göstərəcəyik. Bu metod aşağıdakı göstərilən şəklə malik ikinci tərtib diferensial tənlikləri dəqiq həll etmək üçün tətbiq edilə bilər:

$$\psi'' + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\psi' + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\psi = 0. \qquad (2.5)$$

Dəqiq həllin tapılması üçün $\tilde{\tau}$-nun maksimum birinci tərtib çoxhədli, σ və $\tilde{\sigma}$-nın isə maksimum ikinci tərtib çoxhədli olmalarının tələb olunduğu əlavə şərtlər ödənməlidir. Əgər

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{m_0\omega_0}{\hbar}},\ e_0 = \frac{E}{\hbar\omega_0}, \qquad (2.6)$$

daxil etsək və daha sonra da $\xi = \lambda_0 x$ ölçüsüz dəyişənə keçsək, onda

$$\psi'' + (2e_0 - \xi^2)\psi = 0. \qquad (2.7)$$

alarıq.

Bu tənlikdən asanlıqla görmək olar ki,

$$\tilde{\tau} = 0,\ \sigma = 1,\ \tilde{\sigma} = 2e_0 - \xi^2. \qquad (2.8)$$

Bu da Nikiforov-Uvarov metodu çərçivəsində (2.5) tənliyinin üzərinə qoyulan şərtlərlə tam olaraq uyğunluq təşkil edir.

Biz (2.7) Şredinger tənliyinin dəqiq həllərini aşağıdakı şəkildə axtarırıq:

$$\psi = \varphi(\xi)y(\xi). \qquad (2.9)$$

Burada, Nikiforov-Uvarov metoduna uyğun olaraq, $\varphi(\xi)$

$$\varphi(\xi) = e^{\int\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}d\xi}, \qquad (2.10)$$

kimi təyin olunur və $\pi(\xi)$ isə maksimum birinci tərtib çoxhədlidir. Asan hesablamalar apararaq, müşahidə etmək olar ki,

$$\psi' = \varphi y' + \frac{\pi}{\sigma}\varphi y,$$
$$\psi'' = \varphi y'' + \frac{2\pi}{\sigma}\varphi y' + \frac{\pi'\sigma - \pi\sigma + \pi^2}{\sigma^2}\varphi y.$$

Əgər bu ifadələri (2.7) tənliyində yerinə yazsaq, onda $y(\xi)$ üçün asanlıqla aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$y'' + \frac{2\pi+\tilde{\tau}}{\sigma}y' + \frac{\tilde{\sigma}+\pi^2+\pi(\tilde{\tau}-\sigma')+\pi'\sigma}{\sigma^2}y = 0. \qquad (2.11)$$

İndi asanlıqla müşahidə etmək olar ki, $\tilde{\tau}$ və σ' parametrləri sıfra bərabər olduqlarından, $\tilde{\tau} - \sigma' = 0$. Eyni zamanda,

$$\bar{\tau} = 2\pi + \tilde{\tau}$$

və

$$\bar{\sigma} = \tilde{\sigma} + \pi^2 + \pi'\sigma,$$

Daxil etdikdən sonra, (2.11) tənliyi aşağıdakı kimi kompakt şəklə düşür:

$$y'' + \frac{\bar{\tau}}{\sigma}y' + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2}y = 0. \qquad (2.12)$$

$\bar{\sigma}$ də maksimum ikinci tərtib çoxhədli olduğundan, onda ehtimal edə bilərik ki, $\bar{\sigma} = \lambda\sigma$. Bu ehtimal (2.12) tənliyini aşağıdakı kimi müəyyən qədər dəyişir:

$$y'' + \frac{\bar{\tau}}{\sigma}y' + \frac{\lambda}{\sigma}y = 0. \qquad (2.13)$$

Bu ehtimal həm də tələb edir ki,

$$\pi = \varepsilon\sqrt{\xi^2 + \lambda - \pi' - 2e_0},\ \varepsilon = \pm 1. \qquad (2.14)$$

Onda, π-nin də maksimum ikinci tərtib çoxhədli olması ilə bağlı üzərinə qoyulan başlanğıc şərti də nəzərə alaraq taparıq ki,

$$\lambda = \pi' + 2e_0, \qquad (2.15)$$

bərabərliyi də ödənərsə, o zaman $\pi(\xi)$-nin üzərinə qoyulan başlanğıc şərt doğru olar. Bu da $\pi(\xi)$ üçün aşağıdakı ifadəyə gətirib çıxarır:

$$\pi(\xi) = \varepsilon\xi. \quad (2.16)$$

Bu zaman, (2.8) və (2.16) ifadələrini (2.10)-da yerinə yazmaqla $\varphi(\xi)$ üçün

$$\varphi(\xi) = e^{\varepsilon \int \xi d\xi}. \quad (2.17)$$

alarıq.

Buradakı inteqral da çox asanlıqla hesablana bilər və nəticədə

$$\varphi(\xi) = e^{\varepsilon\frac{\xi^2}{2}}. \quad (2.18)$$

alarıq.

İndi isə, gəlin $\psi(x)$ dalğa funksiyasının sonsuzluqda sıfra bərabər olması kimi başlanğıc şərtimizin mövcudluğunu yada salaq. (2.18) ifadəsindən müşahidə etmək olar ki, bu şərt yalnız $\varepsilon = -1$ olduğu təqdirdə doğrudur. Onda

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (2.19)$$

və

$$\lambda = 2e_0 - 1, \bar{\tau} = -2\xi. \quad (2.20)$$

alarıq.

(2.20) sayəsində (2.13) tənliyi aşağıdakı şəklə düşür:

$$y''(\xi) - 2\xi y'(\xi) + (2e_0 - 1)y(\xi) = 0. \quad (2.21)$$

Bu tənliyi $H_n(\xi)$ Ermit çoxhədlilərinin ödədiyi aşağıdakı ikinci tərtib diferensial tənlik

$$y''(\xi) - 2\xi y'(\xi) + 2ny(\xi) = 0, \quad (2.22)$$

ilə müqayisə edərək biz qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatoru üçün kanonik yanaşma çərçivəsində aşağıdakı məlum hallərə gəlib çıxarıq: (2.21) tənliyindən alınan E enerji spektri (2.4) diferensial tənliyinin məxsusi qiymətidir, o, diskret və ekvidistantdır [3]:

$$E \equiv E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0,1,2,\cdots. \quad (2.23)$$

Stasionar halların dalğa funksiyaları $\psi(x) = \varphi(x)y(x)$ (2.18) və (2.21) tənliklərindən tapılırlar və onlar aşağıdakı dəqiq ortonormal ifadəyə malikdirlər:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m_0\omega_0}{\hbar}}x\right). \quad (2.24)$$

$H_n(x)$ Ermit çoxhədliləri burada ${}_2F_0$ cırlaşmış hiperhəndəsi funksiyaların köməyi ilə aşağıdakı kimi təyin olunublar [12]:

$$H_n(x) = (2x)^n \quad {}_2F_0\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2}, & -(n-1)/2 \\ & - \end{matrix}; \frac{1}{x^2}\right).$$

(2.24) dalğa funksiyaları $(-\infty, +\infty)$ tam həqiqi oblastda ortonormallaşdırılıblar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}.$$

Bu şərtin doğruluğu $H_n(x)$ Ermit çoxhədlilərinin ödədiyi aşağıdakı ortoqonallıq şərti vasitəsilə asanlıqla yoxlanıla bilər [7]:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 2^n n!\, \delta_{mn}.$$

3. PSEVDO YAKOBİ ÇOXHƏDLİLƏRİ VAHİDİNDƏ VON ROOS KİNETİK ENERJİ OPERATORUNUN TƏSİRİ ALTINDA OLAN BİRÖLÇÜLÜ POTENSİAL QUTUVARİ KVANT HARMONİK OSSİLYATORU MODELİ

Bu bölmədə, biz potensialı özünü qutuvari aparan kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həll olunan modelini quracağıq. Bu modelin effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişir. Ona görə də, əvvəlki bölmədə müzakirə edilən məlum qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatoru problemindən fərqli olaraq, burada yalnız kinetik enerjidən asılı olan sərbəst Hamilton operatorunu daxil edərkən, onun ermitlik xassəsini qoruyub saxlamaq üçün ehtiyatlı olmaq lazımdır. Həm də, daha sonra effektiv kütlənin koordinatdan asılı ifadəsini elə qayda ilə seçməliyik ki, bu ifadə kvant harmonik ossilyatorunun parabolik profilini qeyri-kvadratik qutuvari profilə çevirə bilsin.

Məqaləmizin Giriş bölməsində tərəfimizdən qeyd edilmişdi ki, ilk dəfə olaraq, ifratkeçiricilərdə tunel effekti təcrübəsinin nəzəri izahı zamanı sərbəst çoxzərrəcikli yanaşma nəzəriyyəsi çərçivəsində qadağan olunmuş zonanın koordinatdan asılı olduğu halın bu təcrübəni daha dəqiq təsvir edə biləcəyi göstərilmişdi. Qeyd etmək lazımdır ki, daha sonra bu yanaşma inkişaf etdirilərək ehtimal olunmuşdu ki, qadağan olunmuş zonanın koordinatdan asılı olaraq dəyişməsi eyni zamanda effektiv kütlənin də koordinatdan asılılığına gətirə bilər və bununla əlaqədar olaraq, kütlə koordinatdan asılı olduğu halda ermitlik şərtini ödəyən və daha sonra elmə BenDaniel-Dyuk sərbəst kinetik operatoru kimi də məlum olan aşağıdakı şəkildə sərbəst Hamilton operatoru daxil edilmişdi [8]:

$$\widehat{H}_0^{BD} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{M(x)}\frac{d}{dx}. \quad (3.1)$$

Burada, $M(x)$ – koordinatdan asılı olan effektiv kütlədir. Müəyyən müddət sonra oxşar yanaşma tərkibinə görə zəif qeyri-bircins olan yarımkeçiricilərdə yardımçı yükdaşıyıcılar vasitəsilə elektron köçürməsi hadisəsinin izahı çərçivəsində Qora və Uilyams tərəfindən də irəli sürülmüşdü və aşağıdakı Ermit sərbəst Hamilton operatoru təklif edilmişdi [9]:

$$\widehat{H}_0^{QU} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right]. \quad (3.2)$$

Ermitlik şərtini ödəyən və koordinatdan asılı effektiv kütlə formalizmi çərçivəsində daxil edilən digər məlum sərbəst Hamilton operatorlara misal olaraq, iki müxtəlif yarımkeçirici arasında kəskin heterokeçidin dalğa funksiyaları arasında əlaqə mexanizmləri daha dəqiq izah etmək imkanı yaradan Ju-Kroemer sərbəst Hamilton operatorunu [10]:

$$\widehat{H}_0^{JK} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}, \quad (3.3)$$

GaAs-As$_x$Ga$_{1-x}$As tipli model heterostrukturların müxtəlif xassələrini daha səliqəli izah etməyə imkan verən Li-Kuhn sərbəst Hamilton operatorunu [11]:

$$\widehat{H}_0^{LK} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{M(x)}} + \frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d}{dx}\right], \quad (3.4)$$

(3.1)-(3.3) və bir çox digər oxşar yanaşmaları da özündə ümumiləşdirən və genişlənmiş Barqmann teoremi çərçivəsində daxil edilən von Roos sərbəst Hamilton operatorunu [5]:

$$\widehat{H}_0^{vR} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[M^{\alpha}(x)\frac{d}{dx}M^{\beta}(x)\frac{d}{dx}M^{\gamma}(x) + M^{\gamma}(x)\frac{d}{dx}M^{\beta}(x)\frac{d}{dx}M^{\alpha}(x)\right], \quad (3.5)$$

göstərmək olar. (3.5) ifadəsindəki α, β və γ parametrləri arasında $\alpha+\beta+\gamma=-1$ başlanğıc şərtinin ödənməsi mütləqdir. Biz də bu məqalədə əvvəlcə von Roos sərbəst Hamilton operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həll olunan modelini quracağıq və daha sonra isə xüsusi hallar kimi BenDaniel-Dyuk, Qora-Uilyams, Ju-Kroemer, Li-Kuhn modellərini və limit halında isə 2-ci bölmədə icmalı verilən kanonik yanaşmada qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatora keçid hallarını müzakirə edəcəyik. Onda, biz əvvəlcə kvant harmonik ossilyatoru potensialının aşkar şəkli olan (2.3)-də $m_0 \to M(x)$ keçidini həyata keçirək. Bu zaman tədqiq etmək istədiyimiz problemin potensialı aşağıdakı şəkildə təyin olunacaq:

$$V(x) = \frac{M(x)\omega_0{}^2x^2}{2}. \quad (3.6)$$

Növbəti addım kimi isə, $M(x)$ funksiyasının aşkar şəklini təyin etmək məqsədilə onun üzərinə aşağıdakı şərtləri qoyaq:

- Koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$ koordinat başlanğıcı olan $x=0$ nöqtəsində sabit effektiv kütlə olan m_0-a bərabər olmalıdır;
- Koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$ koordinatın $x=\pm\infty$ qiymətlərində sıfra çevrilməlidir;
- (3.5) sərbəst Hamilton operatoruna və (3.6) potensialına uyğun gələn (2.1) Şredinger tənliyi koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-ın analitik ifadəsi üçün dəqiq həll oluna bilməlidir.

Biz, yuxarıdakı şərtləri ödəyən koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-ın analitik ifadəsini aşağıdakı kimi təklif edirik:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2m_0}{a^2+x^2}. \quad (3.7)$$

Sadəlik üçün hesab edəcəyik ki, $a>0$. Onda, asanlıqla göstərə bilərik ki,

$$M(0) = m_0 \text{ və } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^2m_0}{a^2+x^2} = 0, \quad (3.8)$$

yəni, koordinatdan asılı effektiv kütlənin (3.7) analitik ifadəsi yuxarıda onun təyini üçün üzərinə qoyulan üç şərtdən ikisini tam olaraq ödəyir. Sonuncu, üçüncü şərtin də doğruluğunu yoxlamaq üçün, (3.5) sərbəst Hamilton operatoruna, (3.6) potensialına və koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-ın (3.7) analitik ifadəsinə uyğun gələn (2.1) Şredinger tənliyini dəqiq həll edərək stasionar halların dalğa funksiyaları və enerji spektrinin aşkar ifadələrini tapaq. (3.5) və (3.6) ifadələrini (2.1) tənliyində nəzərə alsaq:

$$-\frac{\hbar^2}{4}\left[M^{\alpha}(x)\frac{d}{dx}M^{\beta}(x)\frac{d}{dx}M^{\gamma}(x) + M^{\gamma}(x)\frac{d}{dx}M^{\beta}(x)\frac{d}{dx}M^{\alpha}(x)\right]\psi^{vR}(x) + \frac{M(x)\omega_0{}^2x^2}{2}\psi^{vR}(x) = E^{vR}\psi^{vR}(x). \quad (3.9)$$

Bəzi riyazi sadələşmələr apararaq (3.9) tənliyini daha sadə şəkildə ifadə edə bilərik:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'}{M}\frac{d}{dx} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\frac{M''}{M} - (\alpha+\alpha\gamma+\gamma)\left(\frac{M'}{M}\right)^2\right]\psi^{vR}(x) + \frac{M\omega_0{}^2x^2}{2}\psi^{vR}(x) = E^{vR}\psi^{vR}(x). \quad (3.10)$$

İndi koordinatdan asılı effektiv kütlə üçün (3.7) analitik ifadədən istifadə edərək asanlıqla tapa bilərik ki,

$$\frac{M'}{M} = -\frac{2x}{a^2+x^2}, \quad (3.11a)$$

$$\frac{M''}{M} = -\frac{2}{a^2+x^2} + \frac{8x^2}{(a^2+x^2)^2}. \quad (3.11b)$$

(3.11) ifadələrini (3.10) tənliyində nəzərə aldıqda:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2x}{a^2+x^2}\frac{d}{dx}-\frac{\alpha+\gamma}{a^2+x^2}-\frac{4\alpha\gamma x^2}{(a^2+x^2)^2}\right]\psi^{\upsilon R}(x)+\frac{M{\omega_0}^2x^2}{2}\psi^{\upsilon R}(x)=E^{\upsilon R}\psi^{\upsilon R}(x). \quad (3.12)$$

Bəzi əlavə sadələşmələr aparsaq, (3.12) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\frac{d^2\psi^{\upsilon R}}{dx^2}+\frac{2x}{a^2+x^2}\frac{d\psi^{\upsilon R}}{dx}+\frac{\left(\frac{2m_0a^2E^{\upsilon R}}{\hbar^2}-\alpha-\gamma\right)(a^2+x^2)-\frac{{m_0}^2{\omega_0}^2a^4}{\hbar^2}x^2}{(a^2+x^2)^2}\psi^{\upsilon R}=0. \quad (3.13)$$

Əgər yeni ölçüsüz $\xi=x/a$ dəyişəninə keçsək və

$$c_0=\frac{2m_0a^2E^{\upsilon R}}{\hbar^2},\ c_2=\frac{{m_0}^2{\omega_0}^2a^4}{\hbar^2}, \quad (3.14)$$

daxil etsək, onda (3.13) tənliyindən alarıq ki,

$$\psi''+\frac{2\xi}{1+\xi^2}\psi'+\frac{c_0-\alpha-\gamma+(c_0-c_2-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma)\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\psi=0. \quad (3.15)$$

Burada, $\psi\equiv\psi^{\upsilon R}(\xi)$ - dalğa funksiyasının ölçüsüz ξ dəyişəni vahidlərində ifadəsidir. (3.15) və (2.5) tənliklərini müqayisə etsək, görərik ki, forma etibarilə bu iki tənlik bir-birinə ekvivalentdir, yenə də $\tilde{\tau}$ maksimum birinci tərtib çoxhədli, σ və $\tilde{\sigma}$ isə maksimum ikinci tərtib çoxhədlilərdir, lakin aşağıdakı riyazi ifadələrə malikdirlər:

$$\tilde{\tau}=2\xi,\ \sigma=1+\xi^2, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\sigma}=c_0-\alpha-\gamma+(c_0-c_2-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma)\xi^2.$$

Bu, o deməkdir ki, (3.15) tənliyi də dəqiq həll oluna bilən hiperhəndəsi tip ikinci tərtib diferensial tənlikdir və onun dəqiq həllinin tapılması üçün Bölmə 2-də istifadə etdiyimiz Nikiforov-Uvarov metodunu tətbiq edə bilərik [6].

Biz (2.9)-a analoji olaraq, (3.15) Şredinger tənliyinin də həllini aşağıdakı şəkildə axtarırıq:

$$\psi=\varphi(\xi)y(\xi). \quad (3.17)$$

Burada da $\varphi(\xi)$ aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur:

$$\varphi(\xi)=e^{\int\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}d\xi}. \quad (3.18)$$

$\pi(\xi)$ yenə də maksimum olaraq birinci tərtib çoxhədlidir. (3.17)-nin $\varphi(\xi)$ və $y(\xi)$ vahidlərində birinci və ikinci tərtib törəmələri yenə də aşağıdakı şəkildə Bölmə 2-dəki hesablamaları təkrarlayacaq:

$$\psi'=\varphi y'+\frac{\pi}{\sigma}\varphi y,$$

$$\psi''=\varphi y''+\frac{2\pi}{\sigma}\varphi y'+\frac{\pi'\sigma-\pi\sigma+\pi^2}{\sigma^2}\varphi y.$$

Bu ifadələri (3.15) Şredinger tənliyində nəzərə alaraq, $y(\xi)$ funksiyası üçün şəkil etibarilə (2.11) tənliyi ilə üst-üstə düşən aşağıdakı ikinci tərtib diferensial tənliyi alarıq:

$$y''+\frac{2\pi+\tilde{\tau}}{\sigma}y'+\frac{\tilde{\sigma}+\pi^2+\pi(\tilde{\tau}-\sigma')+\pi'\sigma}{\sigma^2}y=0. \quad (3.19)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, yenidən $\tilde{\tau}-\sigma'=0$ doğrudur. Onda, eyni qayda ilə

$$\bar{\tau}=2\pi+\tilde{\tau}$$

və

$$\bar{\sigma}=\tilde{\sigma}+\pi^2+\pi'\sigma,$$

daxil etməklə, (3.19) tənliyi aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$y''+\frac{\bar{\tau}}{\sigma}y'+\frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2}y=0. \quad (3.20)$$

Növbəti addım kimi, yenə də $\bar{\sigma}$ parametrinin maksimum olaraq ikinci tərtib çoxhədli olduğunu nəzərə almaqla, ehtimal edə bilərik ki, $\bar{\sigma}=\lambda\sigma$. O zaman biz (3.20) tənliyini daha kompakt bir şəkildə yaza bilərik:

$$y''+\frac{\bar{\tau}}{\sigma}y'+\frac{\lambda}{\sigma}y=0. \quad (3.21)$$

Eyni zamanda, asanlıqla müşahidə etmək olar ki,

$$\pi=\varepsilon\sqrt{\mu\sigma-\tilde{\sigma}}=\varepsilon\sqrt{(\mu+\alpha+\gamma-c_0)+(\mu+\alpha+\gamma+4\alpha\gamma-c_0+c_2)\xi^2}.$$

Burada, $\mu=\lambda-\pi'$ və $\varepsilon=\pm1$. İndi, nəzərə alsaq ki, π parametri əslində maksimum olaraq birinci tərtib çoxhədli olmalıdır, onda görərik ki, bu şərt yalnız μ parametri üçün $\mu=c_0-\alpha-\gamma$, və ya $\mu=c_0-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma-c_2$ qiymətlərində doğrudur. Bu isə o deməkdir ki, biz π üçün (ε,μ) cütlüyü vahidlərində aşağıdakı dörd həll tapırıq: $(+1,c_0-\alpha-\gamma)$, $(-1,c_0-\alpha-\gamma)$, $(+1,c_0-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma-c_2)$ və $(-1,c_0-\alpha-\gamma-4\alpha\gamma-c_2)$. Digər tərəfdən, $\varphi(\xi)$ dəqiq ifadəsini hesablayarkən görürük ki, bu funksiya yalnız $(-1,c_0-\alpha-\gamma)$ cütü üçün $\xi=\pm\infty$ $(x=\pm\infty)$ şərtini ödəyir. Bu zaman asanlıqla tapırıq ki,

$$\pi(\xi) = -\sqrt{\frac{m_0\omega_0 a^2}{\hbar} + 4\alpha\gamma\xi}, \qquad \bar{\tau} = 2\left(1 - \sqrt{\frac{m_0\omega_0 a^2}{\hbar} + 4\alpha\gamma}\right)\xi,$$

$$\lambda = \frac{2m_0 a^2 E^{vR}}{\hbar^2} - \sqrt{\frac{m_0\omega_0 a^2}{\hbar} + 4\alpha\gamma} - \alpha - \gamma, \qquad \varphi(\xi) = (1+\xi^2)^{-\sqrt{\frac{m_0\omega_0 a^2}{4\hbar}+\alpha\gamma}}.$$

Nəzərə alsaq ki, λ və $\bar{\tau}$ artıq məlumdur, onda (3.21) tənliyi də $P_n(\xi,\nu,N)$ psevdo Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı məlum ikinci tərtib diferensial tənlik ilə birbaşa müqayisə edilməklə dəqiq həll edilə bilər [7]:

$$(1+\xi^2)\bar{y}'' - 2(\nu - N\xi)\bar{y} + n(2N-n+1)\bar{y} = 0, \quad \bar{y} = P_n(\xi,\nu,N). \tag{3.22}$$

Bu müqayisədən asanlıqla tapa bilərik ki, E_n^{vR} enerji spektri qeyri-ekvidistantdır və sonludur:

$$E_n^{vR} = \hbar\omega_0 \frac{(N+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \binom{n+1}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sqrt{(N+1)^2 - 4\alpha\gamma}}, \; n = 0,1,2,\cdots,N. \tag{3.23}$$

Enerji spektrinin məxrəcində $\sqrt{(N+1)^2 - 4\alpha\gamma}$ ifadəsinin mövcudluğu $N > 2\sqrt{\alpha\gamma} - 1$ əlavə şərtinin meydana çıxmasına şərait yaradır.

Eyni zamanda, koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in (3.7) analitik ifadəsi ilə birlikdə daxil etdiyimiz $a>0$ parametri də aşağıdakı şəklə düşür:

$$a \equiv a_N = \frac{\left[(N+1)^2 - 4\alpha\gamma\right]^{\frac{1}{4}}}{\lambda_0}. \tag{3.24}$$

Stasionar halların dalğa funksiyaları olan $\psi^{vR}(x)$ isə psevdo Yakobi çoxhədliləri vasitəsilə aşağıdakı qaydada ifadə olunurlar:

$$\tilde{\psi}^{vR}(x) = c_n^{vR}\left(1 + \frac{{\lambda_0}^2 x^2}{\sqrt{(N+1)^2-4\alpha\gamma}}\right)^{-\frac{N+1}{2}} P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{\left[(N+1)^2-4\alpha\gamma\right]^{\frac{1}{4}}}, 0, N\right). \tag{3.25}$$

Burada, $P_n(x,\nu,N)$ psevdo Yakobi çoxhədliləri ${}_2F_1$ hiperhəndəsi funksiya vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin olunublar [7]:

$$P_n(x,\nu,N) = \frac{(-2i)^n(-N+i\nu)_n}{(n-2N-1)_n} \; {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n-2N-1\\ -N+i\nu\end{matrix}; \frac{1-ix}{2}\right), \; n = 0,1,2,\cdots,N. \tag{3.26}$$

$\tilde{\psi}^{vR}(x)$ ortonormaldır və normallaşma parametri c_n^{vR} psevdo Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı ortoqonallıq şərtindən tapılır:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^{-N-1}e^{2\nu\cdot\arctan x}P_m(x,\nu,N)P_n(x,\nu,N)dx = \frac{\Gamma(2N+1-2n)\Gamma(2N+2-2n)2^{2n-2N-1}n!}{\Gamma(2N+2-n)|\Gamma(N+1-n+i\nu)|^2}\delta_{mn}.$$

Onun aşkar şəkli aşağıdakı kimidir:

$$c_n^{vR} = \frac{\Gamma(N-n+1)}{2^{n-N}\Gamma(2N-2n+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(2N-n+1)}{\pi a_N(2N-2n+1)n!}}.$$

(3.24) ifadəsindən görürük ki, koordinatdan asılı effektiv kütlənin (3.7) ifadəsi ilə birlikdə daxil etdiyimiz a parametri N kvant ədədi vasitəsilə kvantlanır və eyni qayda ilə koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in N kvant ədədi vasitəsilə aşağıdakı şəkildə kvantlanmasına gətirib çıxarır:

$$M_N(x) = \frac{\sqrt{(N+1)^2-4\alpha\gamma}}{\sqrt{(N+1)^2-4\alpha\gamma+\lambda_0^2 x^2}}m_0. \tag{3.26}$$

Sonuncu nəticə olduqca maraqlı və gözlənilməzdir. Bu nəticənin maraqlı aspektlərini və tərəfimizdən qurulan qutuvari kvant harmonik ossilyatorunun digər xassələrini sonuncu bölmədə qısaca müzakirə edəcəyik.

4. MÜXTƏLİF XÜSUSİ HALLAR VƏ LİMİT KEÇİDİ

Əvvəlki bölmədə qarşımıza qoyulan məqsədə çatdıq və von Roos kinetik enerji operatorunun təsiri altında özünü qeyri-kvadratik profilə malik kvant qutusu kimi apara bilən qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun dəqiq həll oluna bilən modelini qurduq. Bu zaman, məsələni dəqiq həll etmək üçün sərbəst effektiv kütləni koordinatdan asılı effektiv kütlə ilə əvəz etdik. Göstərdik ki, tapılan enerji spektri (3.23) qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorun (2.23) xətti enerji spektrindən fərqli olaraq qeyri-xətti və sonlu təbiətə malikdir. Stasionar halların dalğa funksiyaları isə psevdo Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunurlar. Daxil etdiyimiz koordinatdan asılı effektiv kütlə isə kvantlanır.

Bundan başqa, qeyd etmişdik ki, von Roos kinetik enerji operatoru (3.5) digər məlum BenDaniel-Dyuk kinetik enerji operatoru (3.1), Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru (3.2), Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru (3.3), Li-Kuhn kinetik enerji operatoru (3.4) və başqa digər kinetik operatorları özündə ümumiləşdirir. Ona görə də xüsusi hal olaraq, yuxarıda sadaladığımız modellərə keçidi qısaca tədqiq edək.

4.1. *BenDaniel-Dyuk kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modeli.* BenDaniel-Dyuk kinetik enerji operatoru (3.2) daha ümumi kinetik eneji operatoru olan (3.1) von Roos kinetik enerji operatorunun $(\alpha;\beta;\gamma)=(0;-1;0)$ qiymətlərinə uyğun gələn xüsusi halıdır. Ona görə də, BenDaniel-Dyuk kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modelinin enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı analitik ifadələri alarıq [12]:

$$E_n^{BD}=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega_0\frac{\binom{n+1}{2}}{N+1},\ n=0,1,\cdots,N, \tag{4.1}$$

$$\tilde{\psi}^{BD}(x)=c_n^{BD}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2x^2}{N+1}\right)^{-\frac{N+1}{2}}P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{\sqrt{N+1}},0,N\right). \tag{4.2}$$

4.2. *Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modeli.* Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru (3.3) daha ümumi kinetik eneji operatoru olan (3.1) von Roos kinetik enerji operatorunun $(\alpha;\beta;\gamma)=(-1;0;0)$ və ya $(\alpha;\beta;\gamma)=(0;0;-1)$ qiymətlərinə uyğun gələn xüsusi halıdır. Ona görə də, Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modelinin enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı analitik ifadələri alarıq:

$$E_n^{QU}=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega_0\frac{\binom{n+1}{2}+\frac{1}{2}}{N+1},\ n=0,1,\cdots,N, \tag{4.3}$$

$$\tilde{\psi}^{QU}(x)=c_n^{QU}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2x^2}{N+1}\right)^{-\frac{N+1}{2}}P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{\sqrt{N+1}},0,N\right). \tag{4.4}$$

4.3. *Ju-Kroemer kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modeli.* Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru (3.4) daha ümumi kinetik eneji operatoru olan (3.1) von Roos kinetik enerji operatorunun $(\alpha;\beta;\gamma)=\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ qiymətlərinə uyğun gələn xüsusi halıdır. Ona görə də, Ju-Kroemer kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modelinin enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı analitik ifadələri alarıq:

$$E_n^{JK}=\hbar\omega_0\frac{(N+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)-\binom{n+1}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{N(N+2)}},\ n=0,1,\cdots,N, \tag{4.5}$$

$$\tilde{\psi}^{JK}(x)=c_n^{JK}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2x^2}{\sqrt{N(N+2)}}\right)^{-\frac{N+1}{2}}P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{[N(N+2)]^{\frac{1}{4}}},0,N\right). \tag{4.6}$$

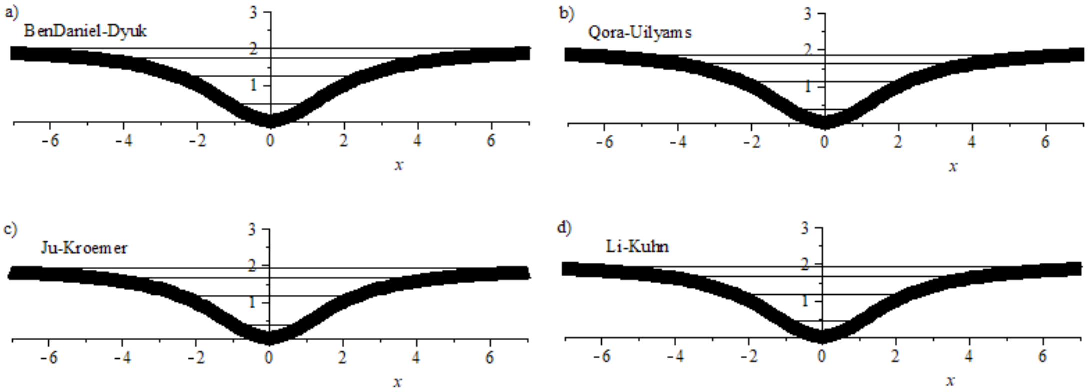
(4.5) və (4.6) ifadələrindən görünür ki, $N>0$ başlanğıc şərti mütləq ödənməlidir.

4.4. *Li-Kuhn kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modeli.* Li-Kuhn kinetik enerji operatoru (3.5) daha ümumi kinetik eneji operatoru olan (3.1) von Roos kinetik enerji operatorunun $(\alpha;\beta;\gamma)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ və ya $(\alpha;\beta;\gamma)=\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ qiymətlərinə uyğun gələn xüsusi halıdır. Ona görə də, Li-Kuhn kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan birölçülü potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatoru modelinin enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı analitik ifadələri alarıq:

$$E_n^{LK}=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega_0\frac{\binom{n+1}{2}+\frac{1}{4}}{N+1},\ n=0,1,\cdots,N, \tag{4.7}$$

$$\tilde{\psi}^{LK}(x)=c_n^{LK}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2x^2}{N+1}\right)^{-\frac{N+1}{2}}P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{\sqrt{N+1}},0,N\right). \tag{4.8}$$

(4.2), (4.4) və (4.8) ifadələrindən görünür ki, enerji spektrləri arasında müəyyən fərq olmasına baxmayaraq, BenDaniel-Dyuk, Qora-Uilyams və Li-Kuhn modellərinin dalğa funksiyaları üst-üstə düşürlər.



Şəkil 1. Koordinatdan asılı effektiv kütləyə malik (3.6) potensialının və bu potensiala uyğun dəqiq həllərdən tapılan enerji spektrlərinin *N=3* qiyməti üçün qrafik təsviri:
a) BenDaniel-Dyuk modelinin enerji spektri (4.1);
b) Qora-Uilyams modelinin enerji spektri (4.3); c) Ju-Kroemer modelinin enerji spektri (4.5);
d) Li-Kuhn modelinin enerji spektri (4.5) ($m_0 = \omega_0 = \hbar = 1$).

Şəkil 1-də koordinatdan asılı effektiv kütləyə malik (3.6) potensialının və bu potensiala uyğun dəqiq həllərdən tapılan BenDaniel-Dyuk modelinin enerji spektri (4.1), Qora-Uilyams modelinin enerji spektri (4.3), Ju-Kroemer modelinin enerji spektri (4.5) və Li-Kuhn modelinin enerji spektri (4.5)-nin *N=3* qiyməti üçün qrafik təsviri təqdim edilir. Müqayisəli şəkildən görünür ki, əsas fərq yalnız enerji səviyyələrinin qiymətləri arasındadır. Lakin, əsas halda qeyri-relyativistik harmonik ossilyatorun xətti spektri (2.23) ilə tam olaraq üst-üstə düşən BenDaniel-Dyuk modeli ilə digər üç model arasında olsa da digər həyəcanlaşmış enerji səviyyələrində çox böyük fərq müşahidə edilmir.

Limit halının hesablanmasına gəldikdə isə, nəzərə almaq lazımdır ki,

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2x^2}{f(N)}\right)^{-\frac{N+1}{2}} = e^{-\frac{m_0\omega_0x^2}{2\hbar}}.$$

Eyni zamanda, Stirlinq approksimasiya düsturundan

$$\Gamma(z) \underset{z\to\infty}{\cong} \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, e^{z\ln z - z},$$

və psevdo Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasındakı aşağıdakı məlum [13]

$$\lim_{N\to\infty} N^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{N}};\frac{\nu}{N},N\right) = \frac{1}{2^n}H_n(x)$$

limit ifadəsindən istifadə etməklə göstərmək olar ki,

$$\lim_{N\to\infty}\psi_n^{\nu R}(x) = \psi_n(x).$$

Von Roos modelinin enerji spektri (3.23)-ün qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun (2.23) enerji spektrinə limit keçidi isə daha sadədir. $N\to\infty$ zaman sadəcə birinci hədd sadələşir, ikinci hədd isə sıfra çevrilir.

Hesab edirik ki, qurduğumuz harmonik ossilyator modeli cəlbedicidir qeyri-kvadratik profilə malik kvant qutuları üçün geniş tətbiq perspektivləri var.

E.İ. Cəfərov qeyd edir ki, hazırki iş Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında Elmin İnkişafı Fondu tərəfindən dəstəklənmişdir – **Qrant Nr EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/01/1**.

[1] *M. Moshinsky and Y.F. Smirnov*, The harmonic oscillator in modern physics. New York: Harwood Academic, 1996.
[2] *S.C. Bloch,* Introduction to classical and quantum harmonic oscillators..Wiley, New-York, 1997.
[3] *L.D. Landau and E.M. Lifshitz*. Quantum mechanics. Non-relativistic Theory, Oxford: Pergamon, 1991.
[4] *W.A. Harrison*. Phys. Rev. , 1961, 123 85-89.
[5] *O. von Roos*. Phys. Rev. B 27, 1983, 7547-7552.
[6] *A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov*. Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications. Basel: Birkhauser, 1988.
[7] *R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw*. Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues. Springer Verslag, Berlin, 2010.
[8] *D.J. BenDaniel and C.B. Duke*. Phys. Rev. 1966, 152 683-692.
[9] *T. Gora and F. Williams*. Phys. Rev. 1969, 177, 1179-1182.
[10] *Q.-G. Zhu and H. Kroemer*. Phys. Rev., 1983, B 27, 3519-3527.
[11] *T.L. Li and K.J. Kuhn*. Phys. Rev. 1993, B 47 12760-12770.
[12] *E.I. Jafarov and S.M. Nagiyev*. Mod. Phys. Lett. 2020, A (Göndərilmişdir)
[13] *E.I. Jafarov, A.M. Mammadova and J. Van der Jeugt.* 2021, Mathematics 9 88.

E.I. Jafarov, A.M. Mammadova and N.F. Mammadova

EXACT SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL QUANTUM BOX-LIKE HARMONIC OSCILLATOR MODEL UNDER THE VON ROOS KINETIC ENERGY OPERATOR

We propose exactly-solvable model of the one-dimensional quantum harmonic oscillator in the framework of the effective mass formalism varying with position. Analytical expression of the position-dependent effective mass is chosen by such a way that it exhibits effect of quantization and can change behaviour of the potential from harmonic oscillator to quantum box with non-quadratic profile. Wave functions of the stationary states of the oscillator model under study have been obtained by solving exactly corresponding Schrödinger equation, which free Hamiltonian is defined via the von Roos kinetic energy operator. Analytical expression of the wave function is described by the pseudo Jacobi polynomials, whereas obtained energy spectrum is discrete, non-equidistant and finite. It is shown that both energy spectrum and wave function completely recover known expressions of the so-called Hermite oscillator equidistant energy spectrum and wave function of the stationary states under the limit $N \to \infty$.

Э.И. Джафаров, А.М. Мамедова, Н.Ф. Мамедова

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ОДНОМЕРНОГО КВАНТОВОГО ЯЩИКОПОДОБНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОПЕРАТОРА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ВОН РООСА

Мы предлагаем точно-решаемую модель одномерного квантового гармонического осциллятора в рамках формализма эффективной массы, меняющейся в зависимости от координаты. Аналитическое выражение эффективной массы зависящей от координаты выбрано таким образом, чтобы поменять поведение потенциала с гармонического осциллятора на квантовый ящик с неквадратичным профилом. Волновые функции стационарных состояний изучаемой модели осциллятора получены точно решая уравнение Шредингера, свободный Гамильтониан которого определен через оператор кинетической энергии вон Рооса. Аналитическое выражение волновой функции описивается с многочленами псевдо Якоби, тогда как, полученный спектр энергии дискретный, неэквидистантный и конечный. Показано, что как энергетический спектр, так и волновая функция оба полностью восстанавливают известные выражения эквидистантного энергетического спектра и волновой функции стационарных состояний, так называемого осциллятора Эрмита в случае предела $N \to \infty$.

Qəbul olunma tarixi: 03.03.2021