MANNİNG – ROSEN VƏ YUKAVA POTENSİALLARININ XƏTTİ KOMBİNASİYASI ÜÇÜN DİRAK TƏNLİYİNİN ANALİTİK HƏLLİ

SƏRİYYƏ ASLANOVA MƏMMƏDƏLİ QIZI

Bakı Dövlət Universiteti, Fizika/Nəzəri fizika

Azərbaycan, AZ-1148, Bakı, Z. Xəlilov küç.23,

sariyya.aslanova@mail.ru

Təqdim olunan işdə Dirak tənliyi Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün dəqiq spin və psevdospin simmetriyaları halında Nikiforov-Uvarov metodunu tətbiq edərək əlaqəli hallar üçün analitik şəkildə həll edilmişdir. Mərkəzəqaçma potensialında yaranan sinqulyarlığı aradan qaldırmaq üçün yeni yaxınlaşma tətbiq edilmişdir. Hər iki halda, yəni dəqiq spin və psevdospin hallarında enerji spektri, spinor funksiya və normallanma sabitləri üçün k spin-orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Həmçinin, normallanmış məxsusi funksiyalar Yakobi polinomu ilə ifadə olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, enerji spektri və məxsusi funksiyalar spin-orbital kvant ədədinin seçilməsinə həssasdırlar.

Açar sözlər: Manning-Rosen potensialı, Yukava potensialı, dəqiq spin simmetriyası, psevdospin simmetriyası, Nikiforov-Uvarov metodu

PACS: 03.65.Nz

GİRİŞ

Kvant mexanikası yarandığı gündən bəri keçən yüz ildən çox bir müddətdə fizika elminin tamamilə qurulmuş bir sahəsinə çevrilmişdir. Fiziki potensiallar üçün dəqiq həll edilə bilən problemlərin öyrənilməsi fiziki tədqiqatlarda hələ də vacibliyini saxlayır [1-4].

Qeyri-relyativistik və relyativistik dalğa tənliklərinin kvant mexaniki sistemlər üçün analitik və bağlı həllərinin tapılması olduqca maraqlı və vacib problemlərdən hesab olunur. Kvant mexanikasının, yarandığı gündən bəri, əsas məqsədi fiziki maraq kəsb edən xüsusi potensiallar üçün dalğa tənliklərinin analitik həll edilməsidir. Dalğa tənliklərini həll edərək, tapılan dalğa funksiyalarından kvant sistemləri haqqında kifayət qədər mükəmməl məlumatlar əldə etmək mümkündür. Yəni, dalğa funksiyaları, və ya sistemin məxsusi funksiyaları kvant mexaniki sistem haqqında bütün informasiyaları özündə cəmləşdirir [1-4]. Ona görə də, Dirak tənliyinin analitik və bağlı həllinin tapılması olduqca vacib tədqiqat işidir. Relyativistik kvant mexanikasında Dirak tənliyi spini-1/2 olan sistemlərin dinamikasını təsvir etmək üçün istifadə olunur [1-3]. Dirak tənliyi xüsusən nüvə və hadron fizikasında müxtəlif proseslərdə fiziki hadisələrin araşdırılması üçün geniş tətbiq edilir. Bu sahələrin tədqiqində Dirak Hamiltonianın iki növ simmetriyaya malik olduğu hal qəbul edilir: dəqiq spin və psevdospin simmetriyası [5-8]. Dirak tənliyində spin və psevdospin simmetriyası halları ilk dəfə 1969-cu ildə Arima, Hecht, Adler və başqaları tərəfindən irəli sürülmüşdür [9-10]. Dəqiq spin və psevdospin simmetriyaları Dirak Hamiltonianının SU (2) simmetriyasından $V(r)$ vektor və $S(r)$ skalyar potensialları arasındakı konkret münasibətlərdən alınır, yəni $V(r)$ vektor və $S(r)$ skalyar potensiallarının fərqinin $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ və cəminin $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ sabitə bərabər olması şərtindən alınır. Dirak tənliyində bilavasitə potensialların fərqinin $\Delta(r)$ və cəminin $\Sigma(r)$ diferensialları daxil olur, yəni $d\Delta(r)/dr$ və $d\Sigma(r)/dr$ hədləri daxil olur. $\Delta(r) = const$ sabit olduğundan $d\Delta(r)/dr = 0$ buradan $\Delta(r) = const$ alınır. Bu hala uyğun simmetriyaya dəqiq spin simmetriyası deyilir. İkinci halda isə $\Sigma(r) = const$ olduğundan $d\Sigma/dr = 0$. Bu hala uyğun simmetriyaya isə psevdospin simmetriyası deyilir. Dəqiq spin simmetriyası bu $(n, l, j = l \mp s)$ kvant ədədlərinə uyğun iki cırlaşmış hal yaradır və buna da spin dubleti kimi baxa bilərik. Burada n-radial, l -orbital və j-tam moment kvant ədədləridir, s-spin kvant ədədidir. Psevdospin simmetriyası halında isə kvazicırlaşma mövcuddur, bu hallar da orbital kvant ədədinin tam vahid qədər fərqlənən iki halına uyğundur, yəni $(n, l, j = l + 1/2)$ və $(n-1, l+2, j = l + 3/2)$. Bu hallara həmçinin də kvant ədədləri $(n, l, j = l + 1/2)$ və $(n-1, l+2, j = l + 3/2)$ olan psevdospinin dubleti kimi baxa bilərik. Psevdospin dubleti $(\tilde{n} = n-1,\ \tilde{l} = l+1,\ \tilde{j} = \tilde{l} \pm \tilde{s})$ kvant ədədləri ilə xarakterizə olunur. Burada $\tilde{n}$ -psevdo radial $\tilde{n} = n - 1$, $\tilde{l}$ -psevdo orbital $\tilde{l} = l + 1$ və $\tilde{s}$ -psevdospin $\tilde{s} = 1/2$ kvant ədədləri adlanırlar [11,12]. Psevdo orbital kvant ədədini Dirak spinorunun aşağı komponenti kimi interpretasiya etmək mümkündür [7]. Bu iki simmetriyanı öyrənmək üçün çoxlu sayda tədqiqat işləri görülmüşdür: məzələn, nüvənin antinuklon spektrini izah etmək üçün [8-11], nüvə deformasiyası prosesi [12], nüvə superdeformasiyası [13], nüvənin effektiv örtük modeli [14] və həmçinin hadronlarda kiçik spin-orbital genişlənməsi. Digər tərəfdən, tenzor qarşılıqlı təsir potensialının hər iki simmetriyaya təsiri göstərir ki, bütün dubletlər cırlaşmalarını itirirlər [15]. Bu xassəni araşdırmaq üçün, tenzor qarşılıqlı təsir nəzərə alınmaqla Dirak tənliyi bir çox potensiallar üçün analitik şəkildə həll edilmişdir [16-19].

TƏDQİQAT METODU

Manning-Rosen və Yukava potensiallarının cəminin $V(r)$ vektor itələmə və $S(r)$ cazibə sahələrini

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
ANAS, Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

nəzərə almaqla M kütləli zərrəcik üçün Dirak tənliyini $(\hbar = c = 1)$ atom vahidlər sistemində aşağıdakı formada yaza bilərik [1]:

$$[\vec{\alpha}\vec{p} + \beta(M + S(r))]\psi(r) = [E - V(r)]\psi(r) \qquad (1)$$

Burada $V(r)$ vektor itələmə və $S(r)$ skalyar cazibə sahələrini təsvir edirlər. α və β dördölçülü Dirak matrisləri, E - isə sistemin relyativistik enerjisidir. Sferik simmetrik Dirak spinor dalğa funksiyasını aşağıdakı formada yazmaq olar, yəni

$$\psi_{nk} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} F_{nk}(r) & Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ iG_{nk}(r) & Y_{im}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

$F_{nk}(r)$ və $G_{nk}(r)$ həqiqi kvadratik inteqrallanan funksiyalardir, m -maqnit kvant ədədi olub, impuls momentinin z oxu üzrə proyeksiyasını xarakterizə edir. $Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi)$ $Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi)$ funksiyaları isə sferik harmonik funksiyalardır. Eyni zamanda $l(l+1) = k(k+1)$ və $\tilde{l}(\tilde{l}+1) = k(k-1)$ şərtlərini ödəyirlər. Baxdığımız potensial sferik simmetrik potensial olub, zamandan asılı olmadığından stasionar Dirak tənliyini həll edəcəyik.

Dirak tənliyini Manning-Rosen və Yukava potensiallarının cəmi üçün həll etməkdən ötrü (2) funksiyasını (1) tənliyində nəzərə alsaq, onda iki əlaqəli tənlik alarıq:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_{nk}(r) = [M + E_{nk} + S(r) - V(r)]G_{nk}(r) \qquad (3)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)G_{nk}(r) = [M - E_{nk} + S(r) + V(r)]F_{nk}(r) \qquad (4)$$

Buradan $G_{nk}(r)$ funksiyasını (3) tənliyindən tapıb (4) tənliyində və $F_{nk}(r)$ funksiyasını (4) tənliyindən tapıb onu (3) tənliyində nəzərə alsaq, onda bu funksiyalar üçün aşağıdakı formada ikinci tərtib diferensial tənliklər alarıq:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - [M + E_{nk} - \Delta(r)][M - E_{nk} + \Sigma(r)] + \frac{\frac{d\Delta(r)}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)}{M + E_{nk} - \Delta(r)}\right\}F_{nk}(r) = 0, \qquad (5)$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} - [M + E_{nk} - \Delta(r)][M - E_{nk} + \Sigma(r)] - \frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)}{M - E_{nk} + \Sigma(r)}\right\}G_{nk}(r) = 0, \qquad (6)$$

Burada $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ və $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ şəklində təyin olunurlar. Həmçinin, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$ olduqda, $j = |k| - 1/2,\ l = |k + 1/2| - 1/2, \tilde{l} = |k - 1/2| - 1/2$ və $l(l+1) = k(k+1), \tilde{l}(\tilde{l}+1) = k(k-1)$ şəklində təyin olunurlar. Eyni zamanda, bağlı hallar üçün Dirak spinorları $F_{nk}(0) = G_{nk}(0) = 0$ və $F_{nk}(\infty) = G_{nk}(\infty) = 0$ şərtini də ödəyirlər.

Manninq-Rosen potensialı iki atomlu molekulun rəqslərinin və vibrasiyalarının riyazi modelleşdirilməsində geniş istifadə edilir. Həmçinin də digər fiziki hadisələrin riyazi təsviri üçün uyğun modellərin qurulmasında istifadə edilir və aşağıdakı şəkildə olur [20, 21]:

$$V_{MR}(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu\delta^2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/\delta}}{\left(1 - e^{-r/\delta}\right)^2} - \frac{Ae^{-r/\delta}}{1 - e^{-r/\delta}}\right], \qquad (7)$$

Nuklonlar arasındakı güclü qarşılıqlı əlaqəni təsvir etmək üçün təsirli bir potensial olaraq qəbul edilən Yukava potensialı [22]

$$V_Y(r) = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{r}, \qquad (8)$$

burada A və α ölçüsüz sabitlər, δ ekranlaşma parametridir. V_0 qarşılıqlı təsir gücünü təyin edir.

Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$V_{MRY}(r) = \frac{2\delta^2\alpha(\alpha-1)e^{-4\delta r}}{M(1-e^{-2\delta r})^2} - \frac{2\delta^2}{M}\cdot\frac{Ae^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} - \frac{2\delta V_0 e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} = \frac{V_{01}e^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} - \frac{V_{023}e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} \tag{9}$$

Burada

$$V_{01} = \frac{2\delta^2\alpha(\alpha-1)}{M} \text{ və } V_{023} = V_{02} + V_{03} = \frac{2\delta^2 A}{M} + 2\delta V_0 \tag{10}$$

Əvvəlcə dəqiq spin simmetriyası halına baxaq. $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$ olduqda $\Delta(r) = const$. [18,19]. Dəqiq spin simmetriyası halında $\Sigma(r)$ -isə Manning-Rosen və Yukava potensiallaınının cəminə bərabər olur, yəni $\Sigma(r) = V_{MRY}(r)$.

(9) potensialını (5) tənliyində nəzərə alsaq onda dəqiq spin simmetriyası üçün alarıq:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - [M + E_{nk} - C]\Sigma(r) + [E_{nk}^2 - M^2 + C(M - E_{nk})]\right\}F_{nk}(r) = 0 \tag{11}$$

(10) tənliyindən görünür ki, $k=-1$ və $k=0$ olduqda onu analitik şəkildə həll etmək mümkün deyildir. Çünki, bu halda spin-orbital əlaqə parametri $k(k+1)/r^2$ sıfra bərabər olur. Bu problemi aradan qaldırmaq üçün (11) tənliyində mərkəzəqaçma potensialına aşağıdakı yaxınlaşmanı tətbiq edək. Bu yaxınlaşmanı o zaman tətbiq etmək mümkündür ki, $\delta r << 1$ kriteriyasını ödəsin [23-25]:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} \tag{12}$$

Onda alarıq:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - [M + E_{nk} - C]\Sigma(r) + [E_{nk}^2 - M^2 + C(M - E_{nk})] - \frac{4k(k+1)\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}\right]F_{nk}(r) = 0 \tag{13}$$

Bu tənliyi həll etmək üçün $s = e^{-2\delta r}$ dəyişənini daxil etsək, (13) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\left[4\delta^2 s^2\frac{d^2}{ds^2} + 4\delta^2 s\frac{d}{ds} + [M + E_{nk} - C]\left[\frac{V_{01}e^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} - \frac{V_{023}e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}}\right] + \right.$$
$$\left. + [E_{nk}^2 - M^2 + C(M - E_{nk})] - \frac{4k(k+1)\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}\right]F_{nk}(r) = 0 \tag{14}$$

Bəzi sadələşdirmələrdən sonra (14) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\frac{d^2F_{nk}}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dF_{nk}}{ds} + \left[[M + E_{nk} - C]\left[\frac{V_{01}}{4\delta^2(1-s)^2} - \frac{V_{023}}{4\delta^2(1-s)s}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\delta^2 s^2}[E_{nk}^2 - M^2 + C(M - E_{nk})] - \frac{k(k+1)}{s(1-s)^2}\right]F_{nk} = 0 \tag{15}$$

(15) tənliyini sadələşdirmək üçün yeni parametrlər daxil edək:

$$\alpha^2 = \frac{V_{01}(M + E_{nk} - C)}{4\delta^2}, \quad \beta^2 = \frac{V_{023}(M + E_{nk} - C)}{4\delta^2}, \quad \gamma^2 = \frac{M^2 - E_{nk}^2 - C(M - E_{nk})}{4\delta^2} \tag{16}$$

Onda aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\frac{d^2F_{nk}}{ds^2}+\frac{1-s}{s(1-s)}\frac{dF_{nk}}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left[\alpha^2s^2-\beta^2s(1-s)-\gamma^2(1-s)^2-k(k+1)s\right]F_{nk}=0 \tag{17}$$

(17) tənliyini

$$\chi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\chi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\chi(s)=0 \tag{18}$$

hiperhəndəsi tənliyi ilə müqayisə etsək, $\bar{\tau}(s),\sigma(s)$ və $\bar{\sigma}(s)$ əmsalları üçün alarıq [26]:

$$\bar{\tau}(s)=1-s,\ \ \sigma(s)=s(1-s)$$

və

$$\bar{\sigma}(s)=\alpha^2s^2-\beta^2s(1-s)-\gamma^2(1-s)^2-k(k+1)s \tag{19}$$

(18) ifadələrindən istifadə edərək $\pi(s)$ funksiyasını hesablaya bilərik:

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\bar{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tau(s)}{2}\right)^2-\bar{\sigma}(s)+k'\sigma(s)}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-\alpha^2s^2+\beta^2s(1-s)-\gamma^2(1-s)^2+k(k+1)s+k's-k's^2}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-\alpha^2s^2+\beta^2s-\beta^2s^2-\gamma^2+2\gamma^2s-\gamma^2s^2+k(k+1)s-k's^2+k's}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+k')s^2+(\beta^2+2\gamma^2+k(k+1)+k')s-\gamma^2}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(1-4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+k')s^2+(\beta^2+2\gamma^2+k(k+1)+k')s-\gamma^2}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1+4(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-k')s^2-4(-\beta^2+2\gamma^2-k(k+1)-k')s+4\gamma^2}=$$

$$=-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-4k')s^2-4(b-k')+4c}=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{(a-k')s^2-(b-k')s+c}\ , \tag{20}$$

burada

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{4}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\ b&=+2\gamma^2+\beta^2-k(k+1)\\ c&=+\gamma^2.\end{aligned} \tag{21}$$

(19) ifadəsində k' parametrini tapmaq üçün əvvəlcə kök altındakı ikinci dərəcəli çoxhədlinin diskriminantını tapıb sıfra bərabər etsək, onda k'-a nəzərən kvadrat tənlik alarıq, yəni

$$D=(b-k')^2-4c(a-k')=k'^2-(4c-2b)k'+(b^2-4ac)$$

$D=0$ şərtindən

$$k'^2-(4c-2b)k'+(b^2-4ac)=0 \tag{22}$$

alarıq. (22) tənliyini k'-a nəzərən həll etsək onda alarıq:

$$k'_{1,2} = \frac{2b-4c}{2} \pm \frac{\sqrt{(4c-2b)^2 - 4(b^2-4ac)}}{2} \tag{23}$$

$$k'_1 = (b-2c) + 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \tag{24}$$

$$k'_2 = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \tag{25}$$

Digər tərəfdən

$$\begin{aligned}(a-k')s^2 - (b-k)s + c = \left(a-b+2c-2\sqrt{c^2+c(a-b)}\right)s^2 - \\ -\left(2c-2\sqrt{c^2+c(a-b)}\right)s - c = (As-B)^2\end{aligned} \tag{26}$$

Buradan alırıq ki,

$$A^2 = a-b+2c-2\sqrt{c^2+c(a-b)}$$

$$2AB = 2c-2\sqrt{c^2+c(a-b)} \tag{27}$$

$$B^2 = c$$

$$A = \sqrt{c} - \sqrt{c+a-b}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{c+a-b} &= \sqrt{+\gamma^2 + \frac{1}{4} + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma^2 + \beta^2 + k(k+1)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + k(k+1) - \alpha^2} = \sqrt{(k+\frac{1}{2})^2 + \alpha^2}\end{aligned} \tag{28}$$

(24) və (25) ifadələrindən istifadə edərək $\pi(s)$ funksiyası üçün dörd mümkün funksiya tapa bilərik:

$$\pi(s) = -\frac{s}{2} \pm \begin{cases} \left(\sqrt{c} - \sqrt{c+a-b}\right)s - \sqrt{c}, \; k' = (b-2c) + 2\sqrt{c^2+c(a-b)} \\ \left(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right)s - \sqrt{c}, \; k' = (b-2c) - 2\sqrt{c^2+c(a-b)} \end{cases} \tag{29}$$

Nikiforov-Uvarov metoduna əsasən $\pi(s)$ çoxhədlisinin dörd mümkün formasından elə birini seçirik ki, bu forma çoxhədli üçün $\tau(s)$ funksiyasının törəməsi mənfidir və kök $(0, 1)$ intervalında yerləşir.

Enerjinin məxsusi qiyməti bilavasitə λ parametrinin ifadəsindən tapılır, yəni λ parametrinin iki ekvivalent ifadələrinin bir-birinə bərabər olması şərtindən tapılır:

$$\lambda = (b-2c) - 2\sqrt{c^2+c(a-b)} - \frac{1}{2} - \left[\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right] \tag{29}$$

Verilmiş, mənfi olmayan n tam ədədləri üçün hiperhəndəsi tip tənlik yalnız n dərəcəli unikal polinom həllə malikdir:

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \; (n = 0,1,2,\ldots)$$

burada

$$\tau(s) = 1 - \left(2 + 2\left(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right)\right)s + 2\sqrt{c},$$

$$\tau'(s) = -\left(2 + 2\left(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right)\right),$$

Onda

$$\begin{aligned}\lambda_n &= n\left[2 + 2(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b})\right] - \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2) = \\ &= 2n\left[1 + (\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b})\right] + n(n-1)\end{aligned} \tag{30}$$

(29) və (30) ifadələrinin ekvivalentliyindən alarıq:

$$(b-2c)-2\sqrt{c}\cdot\sqrt{c+a-b}-\frac{1}{2}-\left[\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right]=2n\left[1+\left(\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right)\right]+n(n-1$$

$$(b-2c)-2\sqrt{c}\cdot\sqrt{c+a-b}-\frac{1}{2}-\sqrt{c+a-b}=2n\left[1+\left(\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}\right)\right]+n(n-1)$$

$$\sqrt{c}\left(2n+1+2\sqrt{c+a-b}\right)=-\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}-n-n^2-2n\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}$$

$$\sqrt{c}\left(2n+1+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}\right)=-\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}$$

$$\sqrt{c}=\frac{-\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}+n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}{2n+1+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}} \tag{31}$$

Buradan enerjinin məxsusi qiyməti üçün aşağıdakı analitik ifadəni alarıq:

$$c=\left[\frac{\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}{2n+1+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}\right]^2 \tag{32}$$

$$\gamma^2=\left[\frac{\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)+-(2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}{2n+1+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}\right]^2 \tag{33}$$

(15) ifadəsindən γ^2 -nın ifadəsini (33)-də nəzərə alsaq onda dəqiq spin simmetriyası halı üçün enerji spektrini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$M^2-E_{nk}^2-C(M-E_{nk})=\left[\frac{\beta^2-k(k+1)-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}{n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}\cdot\delta\right]^2 \tag{34}$$

Burada Dirak tənliyi Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün dəqiq spin simmetriyası halında adi kvant mexanikasında Nikiforov-Uvarov metodunu tətbiq etməklə analitik formada həll edilmişdir. Spin-orbital, radial və orbital kvant ədədlərinin ixtiyari qiymətləri üçün zərrəciyin enerji spektrini təsvir edən analitik ifadə alınmışdır. Göstərilmişdir ki, enerji spektri bu kvant ədələrindən ciddi asılıdır

İndi Nikiforov-Uvarov metodunu tətbiq edərək Manning-Rosen üstəgəl Yukava potensiallı sahədə hərəkət edən M kütləli relyativistik zərrəciyin məxsusi funksiyasını tapmaq üçün $F_{nk}(s)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək:

$$F_{nk}(s)=\phi(s)y(s) \tag{35}$$

$\phi(s)$ funksiyasının aşağıdakı şərti ödədiyini tələb edərək onu tapaq:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \tag{36}$$

Buradan $\phi(s)$ funksiyası üçün alarıq:

$$\int \frac{d\phi(s)}{\phi(s)} = \int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} ds \tag{37}$$

$$\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma}{s} - \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}{1 - s}$$

$$\int \frac{d\phi(s)}{\phi(s)} = \int \frac{\gamma}{s} ds - \int \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}{1 - s} ds = \ln s^{\gamma} + \ln(1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}$$

$$\ln \phi(s) = \ln \left[s^{\gamma} \cdot (1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \right]$$

$$\phi(s) = s^{\gamma} \cdot (1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \tag{38}$$

(35) funksiyasında $y(s)$ funksiyasını tapmaq üçün əvvəlcə $\rho(s)$ funksiyasını tapmaq lazımdır. $\rho(s)$ çəki funksiyası Pearson diferensial tənliyinin həllindən tapılır. Pearson diferensial tənliyi aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \tag{39}$$

Bu tənliyi həll edək:

$$(\sigma' - \tau)\rho = -\sigma\rho'$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{\tau - \sigma'}{\sigma} ds$$

$$\tau - \sigma' = 2\sqrt{c}(1-s) - 2s\sqrt{c+a-b}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{2\sqrt{c}}{s} ds - \int \frac{2s\sqrt{c+a-b}}{1-s} ds = 2\sqrt{c} \ln s + 2\sqrt{c+a-b} \ln(1-s)$$

$$\ln \rho = \ln\left(s^{2\sqrt{c}} \cdot (1-s)^{2\sqrt{c+a-b}} \right)$$

$$\rho = s^{2\sqrt{c}} \cdot (1-s)^{2\sqrt{c+a-b}} = s^{2\gamma} \cdot (1-s)^{2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \tag{40}$$

$F_{nk}(s)$ spinor funksiyasının tərkib hissəsi olan $y_n(s)$ funksiyası Rodriques düsturu ilə aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} \left[\sigma^n(s) \rho(s) \right] \tag{41}$$

$\sigma(s)$ və $\rho(s)$ -in ifadələrini (41)-də nəzərə alsaq onda $y_n(s)$ funksiyası üçün alarıq:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{s^{2\gamma} \cdot (1-s)^{2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}} \cdot \frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n+2\gamma} \cdot (1-s)^{n+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}\right] \tag{42}$$

Jakobi çoxhədlisinin [25]

$$P_n^{(a,b)}(s) = \frac{(-1)^n}{n!2^n(1-s)^a(1+s)^b}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1-s)^{a+n} \cdot (1+s)^{b+n}\right]$$

və

$$P_n^{(a,b)}(1-2s) = \frac{C_n}{s^a(1-s)^b}\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{a+n} \cdot (1-s)^{b+n}\right]$$

xassələrindən və aşağıdakı ifadədən istifadə edərək:

$$\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{a+n} \cdot (1-s)^{b+n}\right] = C_n s^a (1-s)^b P_n^{(a,b)}(1-2s) \tag{43}$$

onda (42) funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_n(s) = C_n P_n^{\left(2\gamma, 2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}\right)}(1-2s) \tag{44}$$

Beləliklə, $F_{nk}(s)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$F_{nk}(s) = \phi(s) \cdot y(s) = s^\gamma (1-s)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}} \cdot \frac{C_n}{s^{2\gamma} \cdot (1-s)^{2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}} \times$$

$$\times \frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n+2\gamma} \cdot (1-s)^{n+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}}\right] = C_n s^\gamma (1-s)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}} \cdot P_n^{\left(2\gamma, 2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\alpha^2}\right)}(1-2s) \tag{45}$$

C_n normallaşma sabiti normallanma şərtindən tapılır və aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+k+1+\gamma)\Gamma(2\gamma+1)\Gamma(n+2\gamma+k}{(n+k+1)\Gamma(2\gamma)\Gamma(n+2\gamma+1)\Gamma(n+2k+2)}}. \tag{46}$$

Dirak tənliyində psevdospin simmetriyasını nəzərə almaq üçün isə (6) tənliyində $d\Sigma(r)/dr = 0$ götürməliyik. $\Sigma(r) = C = const$ yenidən (6) tənliyində nəzərə alsaq, həmin tənliyi aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} - \left[M + E_{nk} - \Delta(r)\right]\left[M - E_{nk} + C\right]\right]G_{nk}(r) = 0 \tag{47}$$

Nəzərə almaq lazımdır ki, $k < 0$ halı üçün $k = -\tilde{l}$ və $k > 0$ halı üçün $k = \tilde{l} + 1$ şəklində təyin olunur. $\Delta(r)$ isə Manning-Rosen üstəgəl Yukava potensiallarının cəminə bərabərdir, yəni $\Delta(r) = V_{MRY}(r)$. Onda (47) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{k(k-1)}{r^2}-\left[M-E_{nk}+C\right]\left[\frac{V_{01}e^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}-\frac{V_{023}e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}}\right]-\left[M^2-E_{nk}^2+C(M+E_{nk})\right]\right]G_{nk}(r)=0 \tag{48}$$

(48) tənliyini analitik şəkildə həll etmək üçün yeni $s=e^{-2\delta r}$ dəyişənini daxil edərək $1/r^2$-nı (12) ifadəsi ilə əvəz etsək, onda (48) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\left[4\delta^2 s^2\frac{d^2}{ds^2}+4\delta^2 s\frac{d}{ds}+\left[M-E_{nk}+C\right]\left[\frac{V_{01}s^2}{(1-s)^2}-\frac{V_{023}s}{1-s}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[M^2-E_{nk}^2+C(M+E_{nk})\right]-\frac{4k(k-1)\delta^2 s}{(1-s)^2}\right]G_{nk}(s)=0 \tag{49}$$

və ya

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{(1-s)}{(1-s)s}+\frac{1}{4\delta^2 s^2}\left[\left[M-E_{nk}+C\right]\left[\frac{V_{01}s^2}{(1-s)^2}-\frac{V_{023}s}{1-s}\right]-\left[M^2-E_{nk}^2+C(M+E_{nk})\right]-\frac{k(k-1)}{s(1-s)^2}\right]G_{nk}(s)=0 \tag{50}$$

(50) tənliyini sadələşdirmək üçün yeni parametrlər daxil edək:

$$\tilde{\alpha}^2=\frac{V_{01}\left(M-E_{nk}+C\right)}{4\delta^2},\ \tilde{\beta}^2=\frac{V_{023}(M-E_{nk}+C)}{4\delta^2},$$
$$\tilde{\gamma}^2=\frac{M^2-E_{nk}^2+C\left(M+E_{nk}\right)}{4\delta^2}, \tag{51}$$

(51) ifadələrini (50) tənliyində nəzərə alsaq onda olarıq:

$$\frac{d^2G_{nk}(s)}{ds^2}+\frac{1-s}{(1-s)s}\frac{dG_{nk}(s)}{ds}+\frac{1}{(1-s)^2s^2}\times$$
$$\times\left[\tilde{\alpha}^2s^2-\tilde{\beta}^2s(1-s)-\tilde{\gamma}^2(1-s)^2-k(k-1)s\right]G_{nk}(s)=0 \tag{52}$$

(52) tənliyini (18) thiperhəndəsi tənliyi ilə müqayisə etsək, onda $\bar{\tau}(s)$, $\sigma(s)$ və $\bar{\sigma}(s)$ əmsalları üçün aşağıdakı ifadələri alarıq:

$$\bar{\tau}(s)=1-s$$
$$\sigma(s)=(1-s)s$$
$$\bar{\sigma}(s)=\tilde{\alpha}^2s^2-\tilde{\beta}^2s^2(1-s)-\tilde{\gamma}^2(1-s)^2-k(k-1)s \tag{53}$$

$\bar{\tau}(s)$, $\sigma(s)$ və $\bar{\sigma}(s)$ -in məlum ifadələrindən istifadə edərək $\pi(s)$ funksiyası üçün alarıq:

$$\pi(s)=\frac{\sigma'(s)-\bar{\tau}(s)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\bar{\tau}(s)}{2}\right)^2-\bar{\sigma}(s)+k'\sigma(s)}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-\tilde{\alpha}^2s^2+\tilde{\beta}^2s(1-s)+\tilde{\gamma}^2(1-s)^2+k(k-1)s+k's(1-s)}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-(\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2-\tilde{\gamma}^2+k')s^2-(-\tilde{\beta}^2+2\tilde{\gamma}^2-k(k-1)-k')s+\tilde{\gamma}^2}=$$

$$=-\frac{s}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-4-(\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2-\tilde{\gamma}^2+k'))s^2-4(-\tilde{\beta}^2+2\tilde{\gamma}^2-k(k-1)-k')s+4\tilde{\gamma}^2}=$$

$$= -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4a-4k')s^2 - 4(b-k')s + 4c} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{(a-k')s^2 - (b-k')s + c} \tag{54}$$

Buradan bilavasitə alırıq ki,

$$a = \frac{1}{4} + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\alpha}^2$$
$$b = \tilde{\beta}^2 + 2\tilde{\gamma}^2 - k(k-1) \tag{55}$$
$$c = \tilde{\gamma}^2$$

(54) ifadəsində k' sabitini tapmaq üçün əvvəlcə kök altındakı kvadrat üçhədlinin diskriminantını tapıb sıfra bərabər etsək, onda k' -a nəzərən kvadrat tənlik alarıq, yəni

$$D = (b-k')^2 - 4c(a-k') = k'^2 + (4c-2b)k' + (b^2 - 4ac) \tag{56}$$

$D = 0$ şərtindən aşağıdakı kvadrat tənliyi alarıq:

$$k'^2 + (4c-2b)k' + (b^2 - 4ac) = 0 \tag{57}$$

(59) tənliyindən k_1' və k_2' üçün aşağıdakı nəticəni alarıq:

$$k_1' = (b-2c) + 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \tag{58}$$

$$k_2' = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \tag{59}$$

(54) ifadəsində kök altındakı ifadəni aşağıdakı şəkildə də yaza bilərik:

$$(a-k')s^2 - (b-k')s + c = \left(a - b + 2c - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)}\right)s^2 - \left(2c - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)}\right)s + c = (As - B)^2 \tag{60}$$

Buradan alırıq:

$$A^2 = a - b + 2c - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)}$$

$$2AB = 2c - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \tag{61}$$

$$B^2 = c$$

$$A = \sqrt{c} - \sqrt{c + a - b}$$

$$\sqrt{c} = \tilde{\gamma}$$

$$\sqrt{c+a-b} = \sqrt{\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{4} - \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2\tilde{\gamma}^2 + k(k-1)} = \sqrt{\frac{1}{4} + k(k-1) - \tilde{\alpha}^2} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2} \tag{62}$$

(61) ifadəsindən istifadə etsək onda $\pi(s)$ funksiyası üçün aşağıdakı ifadələri alarıq:

$$\pi(s) = -\frac{s}{2} \pm \begin{cases} \left(\sqrt{c} - \sqrt{c+a-b}\right)s - \sqrt{c}, \; k' = (b-2c) + 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \\ \left(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right)s - \sqrt{c}, \; k' = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \end{cases} \tag{63}$$

Nikiforov-Uvarov metoduna əsasən λ parametri iki ifadə ilə təyin olunur:

$$\lambda = \pi'(s) + k, \tag{64}$$

və

$$\lambda = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \tag{65}$$

Hər iki ifadənin bərabərliyi şərtindən enerjinin məxsusi qiymətini hesablamaq mümkündür. Onda alarıq:

$$\lambda = (b-2c) - 2\sqrt{c}\cdot\sqrt{c+a-b} - \frac{1}{2} - \left(\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}\right) =$$

$$= -\tilde{\beta}^2 - k(k-1) - 2\tilde{\gamma}\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2} - \frac{1}{2} - \tilde{\gamma}^2 - \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2} =$$

$$= \tilde{\beta}^2 - k(k-1) - \tilde{\gamma}\left(2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2} + 1\right) - \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2} - \frac{1}{2}.$$

$$\lambda = 2n\left[1 + \tilde{\gamma} + \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}\right] + n(n-1).$$

$$2n + 2n\tilde{\gamma} + 2n\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2} + n(n-1) = -\tilde{\beta}^2 - k(k-1) - \frac{1}{2} - \tilde{\gamma}\left(2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2} + 1\right) - \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2}. \tag{66}$$

Buradan enerji spektri üçün alarıq:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\beta}^2 - k(k-1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2} - n(n+1)}{2n + 1 + 2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \tag{67}$$

(67) ifadəsinin hər tərəfini kvadrata yüksəltsək onda psevdospin simmetriyası halında enerji spektri üçün aşağıdakı analitik ifadəni alarıq:

$$M^2 - E_{nk}^2 + C(M + E_{nk}) = \left[\frac{\tilde{\beta}^2 - k(k-1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2} - n(n+1)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2}}\cdot\delta\right]^2 \tag{68}$$

Psevdospin simmetriyası halında $G_{nk}(s)$ məxsusi funksiyanı tapmaq üçün onu aşağıdakı formada faktorizasiya etsək:

$$G_{nk}(s) = \tilde{\phi}(s)\tilde{y}(s) \tag{69}$$

onda $\tilde{\phi}(s)$ və $\tilde{y}(s)$ funksiyaları üçün alarıq:

$$\tilde{\phi}(s) = s^{\tilde{\gamma}}\cdot(1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2}} \tag{70}$$

$$\rho(s) = s^{2\tilde{\gamma}}\cdot(1-s)^{2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\alpha}^2}} \tag{71}$$

$$\tilde{y}_n(s) = C_n P^{\left(2\tilde{\gamma},2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\tilde{\alpha}^2}\right)}(1-2s) \tag{72}$$

(70) və (72) funksiyalarını (69)-da nəzərə alsaq onda $G_{nk}(s)$ funksiyası üçün alarıq:

$$G_{nk}(s) = C_n s^{\tilde{\gamma}} \cdot (1-s)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\tilde{\alpha}^2}} \cdot P_n^{\left(2\tilde{\gamma},2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\tilde{\alpha}^2}\right)}(1-2s) \tag{73}$$

C_{n_r} normalanma sabiti normallaşma şərtindən tapılır və aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+k-1+\tilde{\gamma})\Gamma(2\tilde{\gamma}+1)\Gamma(n+2\tilde{\gamma}+k)}{(n+k-1)\Gamma(2\tilde{\gamma})\Gamma(n+2\tilde{\gamma}+1)\Gamma(n+2k-2)}} \tag{74}$$

NƏTİCƏ

Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyası üçün Dirak tənliyi adi kvant mexanikasında dəqiq spin və psevdospin simmetriyası hallarında Nikiforov-Uvarov metodunu tətbiq edərək analitik şəkildə həll edilmişdir. Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının cəmindən təşkil olunmuş sahədə hərəkət edən M kütləli relyativistik zərrəciyin enerjisinin məxsusi qiyməti, Yakobi çoxhədlisi ilə ifadə olunan məxsusi fuinksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Göstərilmişdirki, hər iki halda enerji spektri və məxsusi funksiyalar spin-orbital və radial kvant ədədlərinin seçilməsinə həssasdirlar. Alınan nəticələr elementar zərrəcikərin yeni modellərinin qurulmasında, proton və neytronun spin balansının tədqiqində istifadə oluna bilər.

[1] *P.A.M. Dirac*. The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, Oxford, 1930.
[2] *W. Greiner*. Relativistics Quantum Mechanics, 3rd. edn. Springer, Berlin, 2000.
[3] *H. Feshbach and F. Villars*. Elementary Relativistic Wave Mechanics of Spin 0 and Spin 1/2 Particles, Rev. Mod. Phys., 1958, 30, 24.
[4] *V.G. Bagrov, D.M. Gitman*, Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
[5] *J.N. Ginocchio.* Phys.Rev.Lett., 1997, 78, 436.
[6] *J.N. Ginocchio*. Phys. Rep., 1999, 315, 231–240.
[7] *J.N. Ginocchio*. Phys. Rep., 2005, 414, 165–261.
[8] *J.N. Ginocchio*. Phys. Rev. C 69, 2004, 034318.
[9] *A. Arima, M. Harvey, K. Shimizu.* Phys. Lett. B 30,1969, 517
[10] *K.T. Hecht, A. Adler*. Nucl. Phys., 1969, A 137, 129.
[11] *S.G. Zhou, J. Meng, P. Ring*. Phys. Rev. Lett. 2003, 91, 262501.
[12] *D. Troltenier, C. Bahri, J.P. Draayer.* Nucl. Phys., 1995, A 586, 53–72.
[13] *P.R. Page, T. Goldman, J.N. Ginocchio.* Phys. Rev. Lett., 2001, 86, 204.
[14] *R. Lisboa, M. Malheiro, A.S. de Castro, P.Alberto, M. Fiolhais.* Phys. Rev., 2004, C 69, 024319.
[15] *S.M. Ikhdair, C. Berkdemir, R. Sever.* App. Math. Compt. 2011, 217, 9019.
[16] *M. Hamzavi, A.A. Rajabi, H. Hassanabadi.* Few Body Syst., 2010, 48, 171–182.
[17] *A.N. Ikot, H. Hassanabadi, T.M. Abbey.* Commun. Theor. Phys., 2015, 64, 637.
[18] *M. Mousavi, M.R. Shojaei.* Commun. Theor. Phys., 2016, 66, 483–490.
[19] *A.I. Ahmadov, M. Demirci, M.F. Mustamin, S.M. Aslanova, and M.Sh. Orujova.* Eur. Phys. J. Plus, 2021, 136, 208.
[20] *M.F. Manning*. Phys. Rev.1933, 44, 951.
[21] M.F. Manning, N. Rosen. Phys. Rev., 1933, *44, 953.*
[22] *H. Yukawa*. Proc. Phys. Math. Soc. Jpn., 1935, 17, 48.
[23] *Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong.* Phys. Lett. A \textbf{363}, 2007, 169.
[24] *Gao-Feng Wei, Shi-Hai Dong.* Phys. Lett. A \textbf{373}, 2008, 49.
[25] *Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong.* Phys. Scr. \textbf{79}, 2009, 045004.
[26] *A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov.* Special Functions of Mathematical Physics, Birkhäuser, Basel, 1988.

Sarıyya Mammadalı kızı Aslanova

ANALYTICAL SOLUTION OF THE DIRAC EQUATION FOR THE LINEAR COMBINATION OF THE MANNİNG-ROSEN AND YUKAWA POTENTIAL

In this paper, the analytically bound state solution of the Dirac equation is obtained for the linear combination of the Manning-Rosen and Yukawa potensials by using Nikiforov-Uvarov method.

To overcome the difficulties arising in the case for arbitrary k in the centrifugal part of the Manning-Rosen potential plus the Yukawa potential for bound states, we applied the developed approximation. Analytical expressions for the energy eigenvalue and the corresponding spinor wave functions for an arbitrary value spin-orbit, radial and orbital quantum numbers are obtained. The relativistic energy eigenvalues and corresponding spinor wave functions have been obtained for cases exact spin and pseudospin symmetries by using the Nikiforov-Uvarov method. Furthermore, the corresponding normalized eigenfunctions have been represented as a recursion relation in terms of the Jacobi polynomials for arbitrary states. A closed form of the normalization constant of the wave functions is also found. It is shown that the energy eigenvalues and eigenfunctions are very sensitive to spin-orbital quantum number.

Сария Мамедали кызы Асланова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА МАННИНГА-РОЗЕНА И ЮКАВЫ

В представленной работе найдено аналитическое решение для связанных состояний уравнения Дирака для линейной комбинации потенциалов Маннинга-Розена и Юкавы с использованием метода Никифорова-Уварова. Для преодоления трудностей, возникающих в случае произвольной k в центробежной части потенциала Маннинга-Розена плюс потенциала Юкавы для связанных состояний, мы применили развитое приближение. Получены аналитические выражения для собственного значения энергии и соответствующих спинорных волновых функций для произвольного значения спин-орбитального, радиального и орбитального квантовых чисел. Собственные значения релятивистской энергии и соответствующие спинорные волновые функции были получены для случаев точной спиновой и псевдоспиновой симметрии с использованием метода Никифорова-Уварова. Кроме того, соответствующие нормированные собственные функции были представлены в виде рекурсивного отношения в терминах полиномов Якоби для произвольных состояний. Найден также замкнутый вид нормировочной постоянной волновых функций. Показано, что собственные значения энергии и собственные функции очень чувствительны к спин-орбитальному квантовому числу.

Qəbul olunma tarixi: 21.06.2021