QORA-UILYAMS KİNETİK ENERJİ OPERATORU İLƏ İFADƏ OLUNAN KVANT HARMONİK OSSİLYATORUNUN XARİCİ QRAVİTASİYA SAHƏSİNDƏ DƏQİQ HƏLLİ

A. M. MƏMMƏDOVA
Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Fizika İnstitutu
Cavid pr. 131, AZ1143, Bakı, Azərbaycan
E-mail: a.mammadova@physics.science.az

Koordinatdan asılı olaraq dəyişən kütlə formalizmi çərçivəsində xarici qravitasiya sahəsində dəqiq həll oluna bilən qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun konfaynment modeli təklif edilir. Baxılan ossilyator modelinin dalğa funksiyaları üçün dəqiq ifadələr uyğun Şredinger tənliyi həll edilərək tapılmışdır. Effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişdiyi zaman harmonik ossilyator modelinin ermitlik xassəsinin saxlanması üçün Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru istifadə olunmuş və gostərilmişdir ki, tədqiq edilən kvant sisteminin stasionar hallarının dalga funksiyalarıları Yakobi şoxhədliləri ilə ifadə olunurlar, enerji spektri isə qeyri-ekvidistantlığı qorumaqla bərabər, həm də xarici qravitasiya sahəsindən asılı olur. Xüsusi halda xarici qravitasiya sahəsi sıfra bərabər olduqda tədqiq edilən model stasionar hallarının dalğa funksiyaları Gegenbauer çoxhədliləri ilə ifadə olunan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun konfaynment modelinə çevrilir və konfaynment parametrinin $a \to \infty$ limitində isə tədqiq edilən kvant sistemi xarici sahənin təsiri altında olan və stasionar hallarının dalga funksiyaları Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyator modelini tam olaraq bərpa edir.

Açar sözlər: Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru, kvant harmonik ossilyatoru, konfaynment modeli, xarici qravitasiya sahəsi, koordinatdan asılı effektiv kütlə
PACS: 03.65.-w; 02.30.Hq; 03.65.Ge

1. GİRİŞ

Son illərdə müxtəlif kvant sistemlərinə qravitasiya sahəsinin təsirinin öyrənilməsi istiqamətində çoxlu elmi-tədqiqat işləri aparılır [1-3]. Bu tip elmi-tədqiqat işlərinə marağın artması ilk növbədə, qravitasiya sahəsinin kvant ölçülərində ortaya çıxara biləcəyi bir çox "gizli" xassələrin oynaya biləcəyi əhəmiyyətli rol ilə bağlıdır. Məsələn, qravitasiya sahəsinin kvant sisteminə təsirinin öyrənilməsi nəticəsində hidrogen atomunun enerji səviyyələrində əmələ gələn sürüşmələrin aşkara şıxarılması böyük marağa səbəb olmuşdur [4]. Həmçinin, qravitasiya sahəsinin materiya ilə qarşılıqlı təsiri və bu sahənin mümkün kvantlanması mühüm tədqiqat obyektlərindəndir. Qravitasiya sahəsinin kvantlanması, onun kvant nəzəriyyəsinin qurulması üçün müxtəlif yanaşmalardan, nəzəriyyələrdən istifadə edilir. Məsələn, klassik fonda kiçik həyəcanlanmalara əsaslanan perturbativ yanaşma [5], dinamik dəyişənlərin yenidən qruplaşdırılmasına əsaslanan halqa (loop) kvantlanması yanaşması [6], təbii komponentlərin qravitasiya sahəsində yeni usullarla həyəcanlanmasına əsaslanan sim nəzəriyyəsi və başqa bu qəbildən olan nəzəriyyələr kvant nəzəriyyəsinin köməyi ilə qravitasiya effektlərinin izahına istiqamətlənib. Bundan əlavə, Avropa Kosmik Agentliyi Beynəlxalq Kosmik Stansiyada (BKS) qravitasiya sahəsinin kvant sistemlərinə təsirinin araşdırılması sahəsində mühüm tədqiqatlar aparır, daha dəqiq desək, dolaşdırılmış fotonlardan biri Yerdə saxlanılmaqla, digəri BKS-ya göndərilərək qravitasiya sahəsinin kvant dolaşıqlığına təsiri öyrənilir. Bu hadisəni öyrənmək üçün, həmçinin müxtəlif nəzəri modellər təklif edilir.

Eyni zamanda, son illər effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən kvant sistemləri də geniş tədqiq olunan obyektlər sırasına daxil olmuşdur [7-10]. Qeyd etmək lazımdır ki, sabit effektiv kütlənin koordinatdan asılı effektiv kütlə ilə əvəz edilməsi nəticəsində həm ossilyator tipli, həm də daha fərqli potensiala malik müxtəlif kvant sistemlərinin dəqiq həlləri artıq elmi ədəbiyyatda mövcuddur və bu həllər həm bərk cisimlər fizikası, həm də fizikanın digər istiqamətlərində geniş tətbiqlərə malikdir. Bu baxımdan, biz də qarşımıza məqsəd qoyduq ki, dəqiq həllərə malik bu tip ossilyator məsələlərini genişləndirək və effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən qeyri-relyativistik harmonik ossilyatora qəfildən xarici qravitasiya sahəsi təsir etdikdə, məsələnin dəqiq həllərini taparaq, xarici qravitasiya sahəsinin tədqiq etdiyimiz kvant harmonik ossilyatorunun necə dəyişdiyini müşahidə edək.

Baxılan məqalədə Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan kvant harmonik ossilyatorunun qravitasiya sahəsində dəqiq həlli araşdırılır. Məqalənin ikinci bölməsində xariçi qravitasiya sahəsinin təsiri altında olan və stasionar hallarının dalga funksiyaları Ermit çoxhədliləri ilə ifadə olunan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyator modeli qısa olaraq təqdim edilir. Kanonik yanaşmada uyğun Şredinger tənliyi həll edilir, stasionar halların dalğa funksiyaları və enerji spektri üçün qravitasiya sahəsində ifadələr alınır. Üçüncü bölmədə Qora- Uilyams kinetik enerji operatoruna malik qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyator modelinin qravitasiya sahəsi olmadan enerji spektri və stasionar halların dalğa funksiyaları haqqında qisa icmal verilir. Dördüncü bölmədə Qora-Uilyams kinetik enerji operatoruna malik qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyator modelinin xarici qravitasiya sahəsində enerji spektri və stasionar halların dalğa funksiyaları üçün dəqiq ifadələr alınmışdır. Sonuncu bölmədə alınan nəticələr və müxtəlif limit keçidləri araşdırılır.

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
ANAS, Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

2. XARİCİ BİRCİNS QRAVİTASİYA SAHƏSİNİN TƏSİRİ ALTINDA OLAN QEYRİ-RELYATİVİSTİK KVANT HARMONİK OSSİLYATOR MODELİ

Məqalənin bu bölməsində qeyri-relyativistik kvant mexanikasına həsr edilmiş bir çox dərslik və monoqrafiyalarda geniş müzakirə edilən fiziki sistem – xətti harmonik ossilyatorun xarici bircins qravitasiya sahəsinin təsiri altında dəqiq həlləri ilə bağlı qısa icmal verəcəyik.

Təsəvvür edək ki, baxdığımız xətti kvant harmonik ossilyatoru xarici birins qravitasiya sahəsinin təsiri altındadır və onun potensialını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$V(x) = \frac{m_0\omega^2x^2}{2} + m_0gx. \tag{2.1}$$

Burada m_0 və ω uyğun olaraq qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun sabit effektiv kütləsi və dövri tezliyidir.

Bu halda uyğun Şredinger tənliyi

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2} + m_0gx\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{2.2}$$

şəklində olar.

Kanonik yanaşmada birölçülü impuls operatoru $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ kimi təyin edildiyindən, bəzi hesablamalardan sonra aşağıdakı ikinci tərtib differensial tənliyi alarıq:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2m_0E}{\hbar^2} - \frac{m_0^2\omega^2}{\hbar^2}(x+x_0)^2 + \frac{g^2}{\omega^4}\right]\psi = 0. \tag{2.3}$$

Burada x_0 sabiti aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$x_0 = \frac{g}{\omega^2}. \tag{2.4}$$

(2.3) tənliyinində

$$\tilde{E} = E + \frac{\hbar^2g^2}{2m_0\omega^4}$$

əvəzləməsini etsək, alırıq ki,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2m_0\tilde{E}}{\hbar^2} - \frac{m_0^2\omega^2}{\hbar^2}(x+x_0)^2\right]\psi = 0. \tag{2.5}$$

Bu tənliyi analitik olaraq həll edərək enerji spektri üçün dəqiq ifadə ala bilərik:

$$E \equiv E_n^g = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2g^2}{2m_0\omega^4},\ n = 0,1,2,.... \tag{2.6}$$

Uygun olaraq stasionar halların dalğa funksiyaları aşağıdakı ifadə ilə təyin edilir:

$$\psi \equiv \psi_n^g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^nn!}}\left(\frac{m_0\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_0\omega\left(x+\frac{g}{\omega^2}\right)^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m_0\omega}{\hbar}}\left(x+\frac{g}{\omega^2}\right)\right). \tag{2.7}$$

Xüsusi halda, $g = 0$ olduqda, bu hal xarici qravitasiya sahəsi olmadığı halda adi qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatora uyğun gəlir ki, bu zaman da enerji spektri

$$E \equiv E_n^0 = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2,..., \tag{2.8}$$

stasionar halların dalğa funksiyaları isə

$$\psi \equiv \psi_n^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^nn!}}\left(\frac{m_0\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_0\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m_0\omega}{\hbar}}x\right) \tag{2.9}$$

olur.

3. QORA-UİLYAMS KİNETİK ENERJİ OPERATORU İLƏ İFADƏ OLUNAN KOORDİNATDAN ASILI EFFEKTİV KÜTLƏYƏ MALİK KVANT HARMONİK OSSİLYATORU MODELİ

Bu bölmədə effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən və Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan kvant harmonik ossilyatoru barədə ümumi təqdimat verək.

Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru Ermit operator olub aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\hat{H}_0^{QU} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right]. \tag{3.1}$$

Baxılan harmonik ossilyatorun potensialını aşağıdakı şəkildə yazsaq:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{M(x)\omega^2x^2}{2} & |x| \le a, \\ \infty, & |x| > a, \end{cases} \tag{3.2}$$

Bu zaman, faktiki olaraq $x = \pm a$ qiymətlərində konfaynment effektinə tabe olan və effektiv kütləsi koordinatdan asılı olan ossilyator modelini alacağıq ki, konfaynment effektinə də ossilyatorun koordinatdan asılı effektiv kütləsi olan $M(x)$ üçün aşağıdakı aşkar şəkili seçməklə nail olmaq olar:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 - x^2}. \qquad (3.3)$$

Yoxlamaq olar ki, (3.3) ifadəsi aşagıdakı şərtləri ödəyir:

$$M(\pm a) = \infty, \;\; M(0) = m_0, \; \lim_{a\to\infty} M(x) = m_0.$$

Onda, (3.1) ifadəsini, həmçinin, kanonik yanaşmada impuls operatorunun $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ kimi təyin edildiyini nəzərə alaraq, baxılan kvant ossilyator modeli üçün uyğun Şredinger tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2x}{a^2-x^2}\frac{d}{dx} - \frac{1}{a^2-x^2}\right]\psi + \left(\frac{2m_0 a^2 E}{\hbar^2(a^2-x^2)} - \frac{m_0^2\omega^2 a^4 x^2}{\hbar^2(a^2-x^2)^2}\right)\psi = 0 \qquad (3.4)$$

Bu tənliyin həlli tədqiq edilən ossilyator modelinin enerji spektri üçün

$$E \equiv E_n^{QU} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_0 a^2}(n^2 + n + 1), \qquad (3.5)$$

stasionar halların dalğa funksiyaları üçün isə

$$\psi \equiv \psi_n^{QU}(x) = c_n^{QU}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{m_0\omega a^2}{2\hbar}} C_n^{\left(\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (3.6)$$

ifadələrinə gətirib çıxarır. Burada, c_n^{QU} normallaşma faktoru

$$c_n^{QU} = 2^{\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}}\Gamma\left(\frac{m_0\omega a^2}{\hbar} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\left(n + \frac{m_0\omega a^2}{\hbar} + \frac{1}{2}\right)n!}{\pi a\Gamma\left(n + \frac{2m_0\omega a^2}{\hbar} + 1\right)}}$$

$C_n^{(\bar\lambda)}(x)$ isə ${}_2F_1$ hiperhəndəsi funksiyaları ilə təyin olunan Gegenbauer çoxhədliləridir:

$$C_n^{(\bar\lambda)}(x) = \frac{(2\bar\lambda)_n}{n!}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n+2\bar\lambda \\ \bar\lambda+1/2\end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right), \quad \bar\lambda \neq 0. \qquad (3.7)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $a \to \infty$ limitində, yəni konfaynment effekti yoxa çıxdıqda, (3.5) və (3.6) ifadələri uyğun olaraq (2.8) və (2.9) ifadələrini tam olaraq bərpa edir.

4. QORA-UİLYAMS KİNETİK ENERJİ OPERATORU İLƏ İFADƏ OLUNAN KOORDİNATDAN ASILI EFFEKTİV KÜTLƏYƏ MALİK KVANT HARMONİK OSSİLYATORUNUN QRAVİTASİYA SAHƏSİNDƏ DƏQİQ HƏLLİ

Xarici sahənin kvant sistemlərinə təsirinin öyrənilməsinə olan böyük maraq səbəbindən bu sahədə çoxlu sayda araşdırmalar aparılmışdır. Biz bu bölmədə qravitasiya sahəsinin kvant sisteminə, daha dəqiq desək Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatoruna təsirini araşdıracağıq.

Qeyri relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun potensialı, qravitasiya sahəsinin təsirini nəzərə alaraq aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2} + M(x)gx, & |x| \le a, \\ \infty, & |x| > a. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Burada, $M(x)$ baxılan ossilyatorun koordinatdan asılı olan kütləsi olub (3.3) ifadəsi ilə təyin edilir, m_0 və ω isə uyğun olaraq qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun sabit effektiv kütləsi və dövri tezliyidir.

Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun (3.1) və potensialın (4.1) ifadəsini nəzərə alaraq tam Hamiltonianı aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\hat{H}^{QU} = -\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'}{M}\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\frac{M''}{M} + \left(\frac{M'}{M}\right)^2\right] + \frac{M\omega^2 x^2}{2} + M(x)gx. \qquad (4.2)$$

Onda baxılan harmonik ossilyator üçün Şredinger tənliyi aşağıdakı kimi olar:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{M'}{M}\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\frac{M''}{M}+\left(\frac{M'}{M}\right)^2\right]\psi^{QU}(x)+\left(\frac{M\omega_0^2x^2}{2}+Mgx\right)\psi^{gQU}(x)=E^{gQU}\psi^{gQU}(x). \tag{4.3}$$

Bu tənlikdə

$$\frac{M'}{M}=\frac{2x}{a^2-x^2},$$

$$\frac{M''}{M}=\frac{2}{a^2-x^2}+\frac{8x^2}{(a^2-x^2)^2} \tag{4.4}$$

ifadələrini yerinə yazaraq, alırıq:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2x}{a^2-x^2}\frac{d}{dx}-\frac{1}{a^2-x^2}\right]\psi^{gQU}-\frac{2M}{\hbar^2}\left(E^{gQU}-\frac{M\omega^2x^2}{2}-Mgx\right)\psi^{gQU}=0 \tag{4.5}$$

İndi, $M(x)$ üçün (3.3) ifadəsini nəzərə alaraq, ölçüsüz $\xi=\frac{x}{a}$ dəyişəni daxil edək. Bu halda

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{d}{d\xi}\frac{1}{a}$$

və

$$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\frac{d}{d\xi}=\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{1}{a^2}$$

olduğundan, (4.5) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\psi''-\frac{2\xi}{1-\xi^2}\psi'+\left[\frac{\left(\frac{2\,m_0a^2E^{gQU}}{\hbar^2}-1\right)(1-\xi^2)-\frac{2m_0^2ga^3}{\hbar^2}\xi-\frac{m_0^2\omega^2a^4}{\hbar^2}}{(1-\xi^2)^2}\right]\psi=0. \tag{4.6}$$

(4.6) tənliyində

$$c_0=\frac{2\,m_0a^2E^{gQU}}{\hbar^2}-1\,,\quad c_1=\frac{2m_0^2ga^3}{\hbar^2},\quad c_2=\frac{m_0^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+\,c_0$$

əvəzləmələrini etsək,

$$\psi''-\frac{2\xi}{1-\xi^2}\psi'+\frac{c_0-\,c_1\xi+\,c_2\xi^2}{(1-\xi^2)^2}\psi=0 \tag{4.7}$$

tənliyini alarıq. Aldığımız tənliyi dəqiq həll etmək üçün, ikinci dərəcəli differensial tənliklərə tətbiq olunan Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə edək [11]. Bunun üçün (4.7) tənliyini

$$\psi''+\frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\psi'+\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\psi=0 \tag{4.8}$$

tənliyi ilə muqayisə edə bilərik. Burada $\bar{\tau}$- maksimum birinci dərəcəli çoxhədli, σ və $\bar{\sigma}$ isə maksimum ikinci tərtib çoxhədlilərdir və aşağıdakı kimi təyin edilirlər:

$$\tilde{\tau}=-2\xi,\quad \sigma=1-\xi^2, \tag{4.9a}$$

$$\tilde{\sigma}=\,c_0-\,c_1\xi+\,c_2\xi^2. \tag{4.9b}$$

İstifadə etdiyimiz metoda uyğun olaraq, (4.8) tənliyinin həllini

$$\psi=\varphi(\xi)y(\xi),\varphi=e^{\int\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}d\xi} \tag{4.10}$$

şəklində axtaraq. Burada $\pi(\xi)$ maksimum olaraq birinci tərtib olan ixtiyari çoxhədlidir. (4.9) və (4.10) ifadələrini (4.8) tənliyində nəzərə alaraq, sadə hesablamalardan sonra aşağıdakı ikinci tərtib differensial tənliyi alarıq:

$$y''+\frac{\bar{\tau}}{\sigma}y'+\frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2}y=0. \tag{4.11}$$

Burada,

$$\bar{\tau}=2\pi+\tilde{\tau},$$
$$\bar{\sigma}=\tilde{\sigma}+\pi^2+\pi(\tilde{\tau}-\sigma')+\pi'\sigma. \tag{4.12}$$

Həmçinin,

$$\bar{\sigma}=\lambda\sigma\;,\;\;\lambda=\mathrm{const} \tag{4.13}$$

Onda, (4.11) tənliyini aşağıdakı hiperhəndəsi tənlik şəklində yaza bilərik:

$$\sigma y''+\bar{\tau}y'+\lambda y=0. \tag{4.14}$$

Bu tənliyi həll etmək üçün $\pi(\xi)$ çoxhədlisini və λ sabitini tapaq. (4.13) ifadəsini (4.12) tənliyində nəzərə alsaq,

$$\pi^2+\pi(\tilde{\tau}-\sigma')+\tilde{\sigma}-(\lambda-\pi')\sigma=0.$$

Bu ifadədə $\tilde{\tau}-\sigma'=0$ olduğundan, alırıq ki,

$$\pi = \varepsilon_1\sqrt{(\mu - c_0) + c_1\xi + (c_2 - \mu)\xi^2}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \tag{4.15}$$

Bu tənlikdə μ üçün

$$\mu = \lambda - \pi' \tag{4.16}$$

işarələməsi əbul etmişik.

(4.15) ifadəsini aşağıdakı formada da yaza bilərik:

$$\pi = \varepsilon_1\sqrt{\mu - c_0 - \frac{c_1^2}{4(c_2-\mu)} + \left(\sqrt{(c_2-\mu)}\xi + \frac{c_1}{2\sqrt{(c_2-\mu)}}\right)^2}. \tag{4.17}$$

$\pi(\xi)$ maksimum birinci tərtib çoxhədli olması üçün (4.17)-da kvadrat kökün altındakı ifadə sıfra bərabər olmalıdır. Bunun üçün

$$\mu - c_0 - \frac{c_1^2}{4(c_2-\mu)} = 0. \tag{4.18}$$

Bu tənliyi həll edərək μ üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\mu = \frac{c_2 + c_0 + \varepsilon_2\sqrt{(c_2-c_0)^2 - c_1^2}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \pm 1 . \tag{4.19}$$

Buradan,

$$c_2 - \mu = \frac{c_2 - c_0 - \varepsilon_2\sqrt{(c_2-c_0)^2 - c_1^2}}{2} \tag{4.20}$$

$\pi(\xi)$, $\bar{\tau}$ və λ üçün aşağıdakı ifadələri alırıq:

$$\pi(\xi) = \varepsilon_1\left(\sqrt{\kappa}\xi + \frac{c_1}{2\sqrt{\kappa}}\right) \tag{4.21}$$

$$\bar{\tau} = 2\left(\varepsilon_1\sqrt{\kappa} - 1\right)\xi + \varepsilon_1\frac{c_1}{\sqrt{\kappa}} \tag{4.22}$$

$$\lambda = \mu + \pi' = \frac{c_2 + c_0 + \varepsilon_2\sqrt{(c_2-c_0)^2 - c_1^2}}{2} + \varepsilon_1\sqrt{\kappa} \tag{4.23}$$

Stasionar halların dalğa funksiyasının ifadəsini almaq üçün (4.9) tənliyində

$$\varphi = e^{\int\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}d\xi} = e^{\varepsilon_1\sqrt{\kappa}\int\frac{\xi d\xi}{1-\xi^2}} \quad e^{\varepsilon_1\frac{c_1}{2\sqrt{\kappa}}\int\frac{d\xi}{1-\xi^2}}$$

olduğundan, sadə hesablamalardan sonra alırıq:

$$\varphi = (1-\xi)^{-\kappa_1}(1-\xi)^{-\kappa_2},$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\sqrt{\kappa} \pm \frac{c_1}{2\sqrt{\kappa}}\right).$$

$\varphi(\xi)$ üçün $\lim\limits_{\xi\to\pm 1}\varphi(\xi) = const$ şərtinin ödənilməsi üçün:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \ \kappa > 0, \quad \kappa_{1,2} \le 0.$$

Onda, μ və π üçün alırıq:

$$\mu = \frac{c_2 + c_0 - \sqrt{(c_2-c_0)^2 - c_1^2}}{2}, \tag{4.24}$$

$$\pi = -\sqrt{\kappa}\xi - \frac{c_1}{2\sqrt{\kappa}}. \tag{4.25}$$

Burada, eyni zamanda

$$\kappa = \frac{c_2 - c_0 + \sqrt{(c_2-c_0)^2 - c_1^2}}{2}, \tag{4.26}$$

$$\sqrt{\kappa} = -\kappa_1 - \kappa_2\,, \tag{4.27}$$

$$\kappa_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\kappa} \pm \frac{c_1}{2\sqrt{\kappa}}\right). \tag{4.28}$$

Aldığımız ifadələri nəzərə alaraq dalğa funksiyası $\varphi(\xi), \pi$ və τ üçün aşağıdakı ifadələri alarıq:

$$\psi = \varphi(\xi)y = (1-\xi)^{-\kappa_1}(1+\xi)^{-\kappa_2}y, \tag{4.29}$$

$$\pi = (\kappa_1+\kappa_2)\xi + \frac{c_1}{2(\kappa_1+\kappa_2)}, \tag{4.30}$$

$$\bar{\tau} = 2(\kappa_1+\kappa_2-1)\xi + \frac{c_1}{\kappa_1+\kappa_2}, \tag{4.31}$$

$$\lambda = \frac{c_2+c_0-\sqrt{(c_2-c_0)^2-c_1^2}}{2} + \kappa_1+\kappa_2.$$

Aldığımız ifadələri (4.14) tənliyində nəzərə alsaq, tənliyimiz aşağıdakı şəklə düşər:

$$\text{jk}(1-\xi^2)y'' + \left[2(\kappa_1+\kappa_2-1)\xi + \frac{c_1}{\kappa_1+\kappa_2}\right]y' + \lambda y = 0\,.$$

Bu tənliyi Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı ikinci tərtib differensial tənliklə müqayisə edək:

$$(1-x^2)\bar{y}'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\bar{y}' + n(n+\alpha+\beta+1)\bar{y} = 0.$$

Burada, $\bar{y} = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ hiperhəndəsi ${}_2F_1$ funksiyaları ilə

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n\,{}_2F_1}{n!}\left(\begin{matrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right),\quad \alpha;\beta \neq -1/2,$$

kimi təyin olunan Yakobi şoxhədliləridir və

$$\alpha+\beta = -2(\kappa_1+\kappa_2)\,,\qquad \alpha+\beta = \frac{c_1}{\kappa_1+\kappa_2}.$$

Sadə hesablamalardan sonra harmonik ossilyatorun enerji spektri üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$E \equiv E_n^{gQU} = \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{g^2}{a^2\omega^4}}}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_0a^2}(n^2+n+1) - \frac{m_0\omega^2a^2}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4g^2}{\omega^4a^2}}\right) \tag{4.32}$$

Stasionar halların dalğa funksiyaları isə aşağıdakı formada olar:

$$\psi \equiv \psi_n^{gQU}(x) = c_n^{gQU}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\kappa_1}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-\kappa_2} P_n^{(-2\kappa_1,-2\kappa_2)}\left(\frac{x}{a}\right)\,. \tag{4.33}$$

Burada, c_n^{QU}

$$c_n^{gQU} = \frac{1}{2^{\sqrt{\kappa}+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{(2n+2\sqrt{\kappa}+1)\Gamma(n+2\sqrt{\kappa}+1)n!}{a\Gamma(n-2\kappa_1+1)\Gamma(n-2\kappa_2+1)}} \tag{4.34}$$

normallaşma faktoru olub, Yakobi çoxhədlilərinin ortoqonallıq şərtindən aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{mn}.$$

Beləliklə, biz artıq baxılan konfaynment məsələsini xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında dəqiq həll edərək, bu kvant sisteminin stasionar hallarda həm E_n^{gQU} enerji spektrinin (4.32) ilə ifadə olunan, həm də $\psi_n^{gQU}(x)$ dalğa funksiyasının (4.33) ilə ifadə olunan aşkar şəkillərini tapdıq. Sonuncu bölmədə isə, bu ifadələrin mümkün limit və xüsusi hallaraına qısaca olara nəzər salacağıq.

5. MÜMKÜN LİMİTLƏR VƏ XÜSUSİ HALLAR

Əvvəlki bölmədə də qeyd etdiyimiz kimi, biz ilkin olaraq tədqiq etdiyimiz Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan kvant harmonik ossilyatoru üçün xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında uyğun Şredinger tənliyinin dəqiq ifadəsini yazdıq və bu modelin effektiv kütləsini koordinatdan asılı olaraq götürməklə və onun aşkar ifadəsini daxil etməklə bu tənliyi dəqiq həll etdik. Effektiv kütlənin koordinatdan asılı analitik ifadəsi sayəsində ossilyator modelimiz hər iki tərəfdən konfaynment effektinə tabe oldu. Tənliyi həll edərkən, məqsədə nail olmaq üçün Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə etdik. Son nəticə olaraq aldıq ki, xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında olan kvant harmonik ossilyatorunun stasionar hallarının enerji spektri E_n^{gQU} enerji spektrinin (4.32) ilə, $\psi_n^{gQU}(x)$ dalğa funksiyaları isə (4.33) ilə ifadə olunurlar. Biz, əslində, bu məqalədə dörd enerji spektri və dörd də dalğa funksiyaları analitik ifadələri təqdim etmişik. Bunlar, kanonik yanaşmada qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun (2.8) ilə ifadə olunan enerji spektri E_n^0, eyni ossilyatorun xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında (2.6) ilə ifadə olunan enerji spektri E_n^g, Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan kvant harmonik ossilyatorunun (3.5) ilə ifadə olunan enerji spektri E_n^{QU} və eyni ossilyatorun xarici qravitasiya sahəsində (4.32) ilə ifadə olunan enerji spektri E_n^{gQU}-dur, və əlbəttə ki, uyğun dalğa funksiyaları da (2.9) ilə ifadə olunan $\psi_n^0(x)$, (2.7) ilə ifadə olunan $\psi_n^g(x)$, (3.6) ilə ifadə olunan $\psi_n^{QU}(x)$ və (4.33) ilə ifadə olunan $\psi_n^{gQU}(x)$-dir. Biz bu bölmədə qısaca olaraq qeyd etmək istəyirik ki, bu modellər arasında limit münasibətləri və xüsusi hallar mövcuddur. Əvvəlcə qeyd edək ki, (4.32) ilə (3.6) arasında çox asan xüsusi hal münasibəti mövcuddur. Belə ki, bu ifadələr hər ikisi n-dən asılı olaraq qeyri-ekvidistantdır,

$$E_n^{gQU}\big|_{g=0} = E_n^{QU},$$

yəni, $g = 0$ olduqda, və ya xarici qravitasiya sahəsi yox olduqda, (4.32) ilə ifadə olunan enerji spektri (3.6) ilə ifadə olunan enerji spektrini çox asanlıqla bərpa edir. Eyni şeyi dalğa funksiyaları ilə bağlı da qeyd etmək olar. Belə ki,

$$\psi_n^{gQU}(x)\big|_{g=0} = \psi_n^{QU}(x)$$

Bu xüsusi halın doğruluğu asanlıqla Yakobi və Gegenbauer çoxhədliləri arasındakı münasibət vasitəsilə göstərilə bilər.

Digər tərəfdən, (4.32) ifadəsində kökaltı ifadəyə Makloren sırası metodunu tətbiq etməklə göstərmək olar ki, $a \to \infty$ zamanı (4.32) enerji spektri (2.6) enerji spektrini tam olaraq bərpa edir, yəni qeyri-ekvidistantlıq aradan qalxır. Dalğa funksiyasının da limiti buna oxşar qaydada, lakin Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında limit münasibəti və qamma funksiyalar üçün Stirlinq approksimasiya metodundan istifadə etməklə göstərilə bilər,

$$\lim_{a\to\infty} \psi_n^{gQU}(x) = \psi_n^g(x)$$

Beləliklə, sonda qeyd etmək istəyirik ki, biz qarşımıza qoyduğumuz məqsədə nail olduq, yəni Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan kvant harmonik ossilyatoru üçün xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında dəqiq həlləri tapdıq və onların mümkün limitlərini və xüsusi hallarını qısaca olaraq analiz etdik. Məqalənin giriş hissəsində bu tip xarici sahələrin müxtəlif fiziki sistemlər üçün əhəmiyyətini qeyd etmişdik. Son olaraq bildirmək istəyirik ki, bu əhəmiyyət, əldə olunan həllər dəqiq analitik ifadəyə malik olduqda, daha da artır ki, biz də burada kvant sisteminin dəqiq həllərini almışıq.

[1] *A. Cetoli and C.J. Pethick.* 2012, Phys. Rev. D, 85 064036.

[2] *M.N. Berberan-Santos, E.N. Bodunov, L.Pogliani*. J. Mathematical Chemistry, 2005, 37 101-115.

[3] *R.Yakup, S.Dulat, K. Li, M. Hekim*. International Journal of Theoretical Physics, 2014, 53 1404-1414.

[4] *Geusa de A. Marques and V. B. Bezerra.* Journal of Physics, 2005, 35 1096-1098.

[5] *B. Latosh.* Physics of Particles and Nuclei, 2020, 51 859–878.

[6] *M. Campiglia, R. Gambini. J. Pullin.* 2008, AIP Conf. Proc., 2008, 977 52-63.

[7] *N. Gräfe and H. Dehnen.* International Journal of Theoretical Physics, 1976, 15 393-409.

[8] *E.I. Jafarov and A.M. Mammadova*. On the exact solution of the confined position-dependent mass harmonic oscillator model under the kinetic energy operator compatible with Galilean invariance, Azerb. 2020, J. Phys. Fizika, 26, 31-35.

[9] *A.M. Mammadova*. AJP Fizika, 2021, 27, 33-39.

[10] *R.F. Lima, M. Vieira, C. Furtado, F. Moraes and C. Filgueiras.* Yet another position-dependent mass quantum model, J. Math. Phys., 2012, 53 072101.

[11] *A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov.* Special Functions of Mathematical Physics (Birkhauser, Basel,1988).

A. M. Mammadova

EXACT SOLUTION OF THE QUANTUM HARMONIC OSCILLATOR DESCRIBED BY GORA-WILLIAMS KINETIC ENERGY OPERATOR IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD

An exactly-solvable confined model of a nonrelativistic quantum harmonic oscillator is proposed in the framework of the formalism of an effective mass varying with position. Exact expressions for the wavefunctions of the considered oscillator model have been obtained by solving the corresponding Schrödinger equation. When the effective mass varies by position, in order to preserve the Hermitian properties of the harmonic oscillator model, the Gora-Williams kinetic energy operator is employed, and it is shown that the wavefunctions of stationary states of the studied quantum system are described by Jacobi polynomials, and the energy spectrum is discrete, non-equidistant, finite and depends on the external gravitational field. In the special case, when the external gravitational field equals to zero, the model under the study reduces into a confined model of a nonrelativistic quantum harmonic oscillator, the wavefunctions of which are described by Gegenbauer polynomials, and in the limit case, when the confinement parameter $a \rightarrow \infty$, the quantum system under study completely restores the nonrelativistic quantum harmonic oscillator in the external field, wavefunctions of stationary states of which are described by Hermite polynomials.

А. М. Мамедова

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВО ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ОПИСЫВАЕМОГО ОПЕРАТОРОМ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ГОРА-УИЛЬЯМС

Предлагается точно-решаемая конфайнментная модель нерелятивистского квантового гармонического осциллятора в рамках формализма эффективной массы, меняющейся в зависимости от координаты. Точные выражения для волновых функций рассматриваемой модели осциллятора были найдены путем решения соответствующего уравнения Шредингера. При изменении эффективной массы в зависимости от координат, для сохранения свойства эрмитовости модели гармонического осциллятора, использовался оператор кинетической энергии Гора-Уильямс. Показано, что волновые функции стационарных состояний исследуемой квантовой системы описываются многочленами Якоби, а энергетический спектр является дискретным, не-эквидистантным, конечным и зависит от внешнего гравитационного поля. В частном случае, когда внешнее гравитационное поле равно нулю, исследуемая модель превращается в конфайнментную модель нерелятивистского квантового гармонического осциллятора, волновые функции которой описываются многочленами Гегенбауэра. В предельном случае конфайнментного параметра $a \rightarrow \infty$, исследуемая квантовая система полностью восстанавливает нерелятивистский квантовый гармонический осциллятор во внешнем поле, волновые функции стационарных состояний которого, описываются многочленами Эрмита.

Qəbul olunma tarixi: 18.10.2021