KOORDİNATDAN ASILI KÜTLƏLİ OSSİLYATOR BİRCİNS QRAVİTASİYA SAHƏSİNDƏ: $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ HALLARI

Ş.Ə. ƏMİROVA
Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin Fizika İnstitutu
Azərbaycan, Bakı. 1143, H. Cavid prospekti, 131
E-mail: shovqiyya@mail.ru

Xarici bircins qravitasiya sahəsində koordinatdan asılı kütləli qeyri-relativistik kvant xətti harmonik ossilyatorun modeli yenidən normallanmış tezliyin $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ qiymətləri və ümumiləşmiş sərbəst Hamiltonian üçün tədqiq olunmuş, uyğun Şredinger tənliyi dəqiq həll olunmuşdur. Dalğa funksiyaları və enerji spektri tapılmışdır. Dalğa funksiyaları psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunur.

Açar sözlər: Koordinatdan asılı kütlə, kvant harmonik ossilyatoru, psevdo Yakobi çoxhədliləri, qeyri-ekvidistant enerji spektri
PACS: 03.65.-w, 02.30.Hq, 03.65.Ge

1. Bu yaxınlarda biz birölçülü kvant harmonik ossilyatorun yeni dəqiq həll olunan modelini təklif etmişik [1]. Bu model iki cəhətdən diqqətə layiqdir. Birincisi, hesab olunur ki, ossilyatorun kütləsi *m=M(x)* koordinatdan asılıdır. İkincisi, koordinatdan asılı kütləli kvant dinamiki sistemləri təsvir etmək üçün [2] işində təklif olunmuş ümumiləşmiş Hamilton operatorundan istifadə olunmuşdur:

$$H_0 = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}\left(M^{\alpha_i}\hat{p}M^{\beta_i}\hat{p}M^{\gamma_i} + M^{\gamma_i}\hat{p}M^{\beta_i}\hat{p}M^{\alpha_i}\right), \tag{1}$$

burada $N = 1,2,3\ldots$ qiymətlərini alan ixtiyari müsbət tam ədəddir. (1) hamiltonianında $\hat{p}$ impuls operatoru ilə *M(x)* kütlə operatoru arasında bütün mümkün nizamlamalar nəzərə alınmışdır və ona görə də, ədəbiyyatda [3-8] rast gələn bu növ hamiltonianlar (1)-in xüsusi halıdır.(1) ifadəsində $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ parametrləri nizamlama parametrləridir və

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = -1, i = 1,2,\ldots,N \tag{2}$$

şərtlərinə tabedirlər. H_0-ı aşağıdakı kimi göstərək:

$$H_0 = \frac{1}{2}\hat{p}\frac{1}{M(x)}\hat{p} + V_{free}(x), \tag{3}$$

burada $V_{free}(x)$ funksiyası

$$V_{free}(x) = A_f\frac{\hbar^2 M'^2}{2M^3} - B_f\frac{\hbar^2 M''}{4M^2} \tag{4}$$

şəklindədir. (4)-dəki A_f və B_f əmsalları α_i və γ_i parametrlərinin $\overline{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i, \overline{\gamma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i$ orta qiymətlərilə ifadə olunur $A_f = \overline{\alpha} + \overline{\gamma} + \overline{\alpha\gamma}$, $B_f = \overline{\alpha} + \overline{\gamma}$. $V_{free}(x)$ sərbəst potensial adlandırılmışdır.

[1] işində baxılan ossilyator modelinin kütləsi koordinatdan aşağıdakı kimi asılıdır:

$$M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

Sadəlik üçün kütləyə daxil olan a parametrini müsbət qəbul edəcəyik: $a > 0$. Aydındır ki, $a \to \infty$ limitində kütlənin koordinatdan asılılığı yox olur, yəni

$$\lim_{a\to\infty} M(x) = m_0. \tag{6}$$

Baxılan model üçün potensial enerji operatoru aşağıdakı kimi seçilmişdir

$$V(x) = \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}. \tag{7}$$

Sərbəst (4) potensialının mövcudluğu ona gətirib çıxarır ki, ossilyatorun tezliyi ω yenidən normallanaraq Ω-ya bərabər olur, yəni

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{\hbar^2(\overline{\alpha} + \overline{\gamma} + 4\overline{\alpha\gamma})}{a^4 m_0^2} = \omega^2\left(1 + \frac{4A_f - 3B_f}{\lambda_0^4 a^4}\right). \tag{8}$$

Yenidən normallanmış tezliyin kvadratı ümumi halda $\Omega^2 > 0$, $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ qiymətlərini ala bilər.

Baxılan ossilyator modelini təsvir edən Şredinger tənliyini yazaq:

$$\left\{\partial_x^2 - \frac{M'}{M}\partial_x + \frac{2M}{\hbar^2}\left[E - V_{eff}(x)\right]\right\}\psi(x) = 0, \tag{9}$$
$$V_{eff}(x) = V(x) + V_{free}(x).$$

Effektiv potensialı yığcam formada yazaq:

131, H.Javid ave, AZ-1143, Baku
ANAS, Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

$$V_{eff}(x) = \frac{M(x)}{2}\left[\Omega^2 x^2 + 2gx + \frac{\hbar^2}{a^2 m_0^2} B_f\right]. \quad (10)$$

[1] məqaləsində $\Omega^2 > 0$ halı geniş araşdırılmış, enerji spektri və dalğa funksiyalarının aşkar şəkilləri tapılmışdır.

Təqdim olunan işdə məqsəd baxılan ossilyator məsələsini $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ halları üçün araşdırmaqdır.

2. $\mathbf{\Omega^2 = 0}$ halı. Bu halda (9) tənliyi aşağıdakı şəklə düşür

$$\left\{\partial_x^2 + \frac{2x}{a^2+x^2}\partial_x + \frac{2a^2 m_0}{\hbar^2(a^2+x^2)}\left[E - \frac{a^2 m_0}{2(a^2+x^2)}\left(2gx + \frac{\hbar^2}{a^2\, m_0^2} B_{\rm f}\right)\right]\right\}\psi = 0\,. \quad (11)$$

Yeni adsız dəyişənə keçək $\xi = x/a$.Onda alarıq

$$\left(\partial_\xi^2 + \frac{\tilde\tau}{\sigma}\partial_\xi + \frac{\tilde\sigma}{\sigma^2}\right)\psi = 0. \quad (12)$$

Burada aşağıdakı işarələmələr edilmişdir:

$$\sigma(\xi) = 1 + \xi^2,\ \tilde\tau(\xi) = 2\xi,\ \tilde\sigma(\xi) = c_0 - c_1\xi + c_2\xi^2.$$

c_0, c_1və c_2 əmsalları üçün aşağıdakı ifadələri alınır

$$c_0 = \frac{2a^2 m_0 E}{\hbar^2} - \overline{\alpha} - \overline{\gamma},\ c_1 = \frac{2a^3 m_0^2 g}{\hbar^2} = 2\lambda_0^4 x_0 a^3\ ,$$
$$c_2 = \frac{2a^2 m_0 E}{\hbar^2}\,. \quad (13)$$

İndi Nikiforov-Uvarov metodundan [9] istifadə etməklə (12) tənliyini həll edək. Dəqiq həllin tapılması üçün $\tilde\tau(\xi)$ -nin maksimum birinci tərtib çoxhədli, $\sigma(\xi)$ və $\tilde\sigma(\xi)$-nin isə maksimum ikinci tərtib çoxhədli olması tələb olunur. İndi biz (12) tənliyinin həllini aşağıdakı kimi axtarırıq:

$$\psi = \varphi(\xi)y(\xi), \quad (\xi) = e^{\int\frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)}d\xi} \quad (14)$$

burada $\pi \equiv \pi(\xi)$ maksimum birinci tərtib ixtiyari çoxhədlidir, yəni $\pi = \pi_0 + \pi_1\xi$ və $\pi_{0,1} = \mathrm{const}\varphi(\xi)$ üçün (14)-dən növbəti ifadəni əldə edirik:

$$\varphi = (1+\xi^2)^{\frac{\pi_1}{2}} e^{\pi_0 \arctan\xi}. \quad (15)$$

$\varphi(\xi)$-nin $\xi = \pm\infty$ nöqtələrində sonlu olması tələbindən (yəni $\lim_{\xi\to\pm\infty}\varphi(\xi) = 0$ olması üçün) biz $\pi_1 < 0$ əldə edirik. Nəticədə $y \equiv y(\xi)$ üçün ikinci tərtib differensial tənliyi alarıq:

$$y'' + \frac{\tau}{\sigma}y' + \frac{\overline{\sigma}}{\sigma^2}y = 0, \quad (16)$$

$$\tau = \tilde\tau + 2\pi, \overline{\sigma} = \tilde\sigma + (\tilde\tau - \sigma')\pi + \pi^2 + \sigma\pi'. \quad (17)$$

$\overline{\sigma}(\xi)$ də maksimum ikinci tərtib çoxhədli olduğundan, onda tələb edə bilərik ki, $\overline{\sigma}(\xi)$ çoxhədlisi $\sigma(\xi)$ çoxhədlisinə bölünsün:

$$\overline{\sigma} = \lambda\sigma,\ \lambda = \mathrm{const}. \quad (18)$$

Bu halda, (16) tənliyini aşağıdakı şəklə düşür.

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0. \quad (19)$$

(18) tənliyi ilə (17) tənliyinin müqayisəsindən

$$\pi^2 - (\sigma' - \tilde\tau)\pi - \mu\sigma + \tilde\sigma = 0\ , \mu = \lambda - \pi' \quad (20)$$

alınır. Bizim tənliyimizdə $\sigma' - \tilde\tau = 0$ olduğundan, $\pi(\xi)$-ni aşağıdakı kimi tapmaq olar

$$\pi = e\sqrt{\mu\sigma - \tilde\sigma} = e\sqrt{(\mu - c_2)\xi^2 + c_1\xi + \mu - c_0}\ ,\quad e = \pm 1. \quad (21)$$

(21)-də diskriminant $D = c_1^2 - 4(\mu - c_2)(\mu - c_0) = 0$ olmalıdr və bu bizə imkan verir ki, μ sabitini tapaq. Beləliklə, μ üçün aşağıdakı iki qiyməti alırıq.

$$\mu = \frac{1}{2}\left[c_0 + c_2 + e_1\sqrt{(c_2 - c_0)^2 + c_1^2}\right],\ \ e_1 = \pm 1. \quad (22)$$

(22)-dən istifadə edərək $\pi(\xi)$ çoxhədlisinin $\pi_{0,1}$ əmsallarını asanlıqla əldə edə bilərik

$$\pi_0 = e\frac{c_1}{2\sqrt{\mu - c_2}}, \pi_1 = e\sqrt{\mu - c_2}. \quad (23)$$

$\mu - c_2 = \frac{1}{2}\left[c_0 - c_2 + e_1\sqrt{(c_0 + c_2)^2 + c_1^2}\right] > 0$ və $\pi_1 < 0$, $e_1 = +1$ şərtlərinə əsasən $e = -1$ olmalıdır. Deməli,

$$\mu = \frac{1}{2}\left[c_0 + c_2 + \sqrt{(c_2 - c_0)^2 + c_1^2}\right], \qquad \pi_0 = \frac{-c_1}{\sqrt{2\left[c_2 - c_0 + \sqrt{(c_0+c_2)^2 + c_1^2}\right]}}, \tag{24}$$

$$\pi_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left[c_0 - c_2 + \sqrt{(c_2 - c_0)^2 + c_1^2}\right]}, \tag{25}$$

buradakı $c_0 + c_2 = 2c_2 - B_{\mathrm{f}} = \frac{4a^2 m_0 E}{\hbar^2} - \overline{\alpha} - \overline{\gamma}, c_2 - c_0 = B_{\mathrm{f}} = \overline{\alpha} + \overline{\gamma}. \tau = 2\pi_0 + 2(\pi_1 + 1)\xi$ və $\lambda = \mu + \pi' = \mu + \pi_1$ ifadələri üçün (16)-ni yenidən yaza blərik.

$$(1 + \xi^2)y'' + 2[\pi_0 + (\pi_1 + 1)\xi]y' + (\mu + \pi_1)y = 0. \tag{26}$$

(26) tənliyini $\overline{y} \equiv P_n(\xi; \nu, N)$ psevdo-Yakobi çoxhədlisinin ödədiyi ikinci tərtib differensial tənliklə müqayisə etsək [10]

$$(1 + \xi^2)\overline{y}'' + 2(\nu - N\xi)\overline{y}' + n(2N - n + 1)\overline{y} = 0. \tag{27}$$

Müqayisədən $\nu = \pi_0$, $N = -\pi_1 - 1$ və $\mu + \pi_1 = n(2N - n + 1)$ alınır.
Buradan

$$\nu = \frac{-c_1}{2\sqrt{\mu - c_2}}, \quad N = \sqrt{\mu - c_2} - 1, \mu = n(2N - n + 1) + N + 1, \tag{28}$$

$$y = P_n(\xi; \nu, N) \tag{29}$$

şərtlərini alarıq. Burada N müsbət tam ədəddir: $N = 1,2,3,...$ və $n = 0,1,2,...,N$.

(28)-dən enerjinin kvantlanması şərti alınır. $\sqrt{\mu - c_2} = N + 1 = 2, 3, 4, ...$ bərabərliyindən alınır ki,

$$-(\overline{\alpha} + \overline{\gamma}) + \sqrt{(\overline{\alpha} + \overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6} = 2(N + 1)^2 = 8, 18, 32, ... \tag{30}$$

ν və N model parametrlərini aşağıdakı kimi ifadə edək, göründüyü kimi onlar a, m_0, ω, a, g kəmiyyətlərini özündə birləşdirir

$$\nu = \frac{-\sqrt{2}\lambda_0^4 x_0 a^3}{\left[-(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) + \sqrt{(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right]^{1/2}}, \tag{31}$$

$$N = \left[\frac{1}{2}\left(-(\overline{\alpha} + \overline{\gamma}) + \sqrt{(\overline{\alpha} + \overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right)\right]^{1/2} - 1. \tag{32}$$

$$\nu(N + 1) = -\lambda_0^4 x_0 a^3. \tag{33}$$

$\xi = \frac{x}{a}$ olduğunu nəzərə alsaq, (15) çəki funksiyası aşağıdakı şəklə düşər.

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{-(N+1)}{2}} e^{\nu \arctan\left(\frac{x}{a}\right)}. \tag{34}$$

c_0,c_1 və c_2 (4.4) əmsalları ilə ν və N kvantları arasında aşağıdakı kimi əlaqə yaranır

$$c_0 = n(2N - n + 1) + N + 1 - \nu^2, c_1 = -2\nu(N + 1), c_2 = n(2N - n + 1) - N(N + 1) \tag{35}$$

$$\lambda_0 a = \sqrt[4]{3B_f - 4A_f}\ . \tag{36}$$

(30), (31) və (32) tənliklərindən istifadə edərək, $E \equiv E_n$ enerji spektri üçün aşağıdakı ifadə alarıq:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}\lambda_0^2 a^2}\sqrt{-(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) + \sqrt{(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\left(n+\frac{1}{2}\right)} +$$
$$+\frac{\hbar\omega}{2\lambda_0^2 a^2}\left[\frac{1}{2}\left((\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) - \sqrt{(\overline{\alpha}+\overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right) - n(n+1)\right], \tag{37}$$

$n = 0,1,2,\dots,N$ qiymətlərini alır.

(14), (15) və (29) nəzərə alaraq dalğa funksiyası üçün ifadəni alarıq.

$$\psi_n(x) = c_n\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{-(N+1)}{2}} e^{\nu\arctan\left(\frac{x}{a}\right)} P_n\left(\frac{x}{a};\nu,N\right). \tag{38}$$

Dalğa funksiyası üçün aşağıdakı ortonormallıq şərtindən istifadə edərək

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,\psi(x)dx = \delta_{nm}, \tag{39}$$

normallanma sabiti c_n-nin ifadəsini tapırıq

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{an!\sqrt{\pi}}}\, 2^{N-n}\frac{|\Gamma(N+1-n+i\nu)|}{\Gamma(2N+1-2n)}\sqrt{\frac{\Gamma(2N+2-n)}{2N+1-2n}}\ . \tag{40}$$

3. $\mathbf{\Omega^2 < 0}$ halı. Bu halda (9) Şredinger tənliyi aşağıdakı şəklə düşür

$$\left\{\partial_x^2 + \frac{2x}{a^2+x^2}\partial_x + \frac{2a^2 m_0}{\hbar^2(a^2+x^2)}\left[E - \frac{a^2 m_0}{2(a^2+x^2)}\left(\Omega^2 x^2 + 2gx + \frac{\hbar^2}{a^2 m_0^2}B_f\right)\right]\right\}\psi = 0, \tag{41}$$

Bu tənliyi Nikiforov-Uvarov metoduna uyğun formada (12) yazaq. c_0, c_1, c_2əmsalları üçün

$$c_0 = \frac{2a^2 m_0 E}{\hbar^2} - \overline{\alpha} - \overline{\gamma},\ \ c_1 = \frac{2a^3 m_0^2 g}{\hbar^2} = 2\lambda_0^4 x_0 a^3\ ,\ \ c_2 = \frac{2a^2 m_0 E}{\hbar^2} + \frac{a^4 m_0^2 \Omega^2}{\hbar^2} \tag{42}$$

ifadələri alınır.

(41) tənliyi (11) tənliyinin həllinə analoji qaydada həll edilir. Nəticə də π, π_0, π_1 və μ əmsalları üçün (21) və (24) ifadələrini alacağıq, fərq onda olacaqdır ki, ν və N ədədləri (31) və (32) əvəzinə (43) və (44) düsturları ilə veriləcəkdir:

$$\nu = \frac{-\sqrt{2}\lambda_0^4 x_0 a^3}{\left[-2(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) - \lambda_0^4 a^4 - 4\overline{\alpha}\overline{\gamma} + \sqrt{\left(2(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) + \lambda_0^4 a^4 + 4\overline{\alpha}\overline{\gamma}\right)^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right]^{1/2}}, \tag{43}$$

$$N = \left[\frac{1}{2}\left(-2(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) - \lambda_0^4 a^4 - 4\overline{\alpha}\overline{\gamma} + \sqrt{(2(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) + \lambda_0^4 a^4 + 4\overline{\alpha}\overline{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right)\right]^{1/2} - 1, \tag{44}$$

$$\nu(N+1) = -\lambda_0 x_0\sqrt[4]{[(N+1)^2 - \nu^2 - 2(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}) - 4\overline{\alpha}\overline{\gamma}]^3}.$$

Nəticə də enerji spektrinin ifadəsini aşağıdakı kimi tapırıq

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2\lambda_0^2 a^2}}\sqrt{-2(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}) - \lambda_0^4 a^4 - 4\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \sqrt{(2(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}) + \lambda_0^4 a^4 + 4\bar{\alpha}\bar{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}}\left(n+\frac{1}{2}\right) +$$
$$-\frac{\hbar\omega}{2\lambda_0^2 a^2}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_0^4 a^4 + 4\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \sqrt{(2(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}) + \lambda_0^4 a^4 + 4\bar{\alpha}\bar{\gamma})^2 + 4\lambda_0^8 x_0^2 a^6}\right) - n(n+1)\right]. \qquad (45)$$

Dalğa funksiyalarının ifadələri hər iki hal üçün, yəni $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ formaca üst-üstə düşdüyündən normallama sabitinin də ifadələri formaca eyni olur, lakin ν və N-nin ifadələri fərqlənir, yəni

$$\psi_n(x) = c_n\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{-(N+1)}{2}} e^{\nu \arctan\left(\frac{x}{a}\right)} P_n\left(\frac{x}{a};\nu,N\right), \qquad (46)$$

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{an!\sqrt{\pi}}}\, 2^{N-n} \frac{|\Gamma(N+1-n+i\nu)|}{\Gamma(2N+1-2n)} \sqrt{\frac{\Gamma(2N+2-n)}{2N+1-2n}}.$$

Biz bu işdə yenidən normallanmış ossilyator tezliyi $\Omega^2 = 0$ və $\Omega^2 < 0$ olduğu hallarda koordinatdan asılı kütləli ossilyator modelini araşdırdıq: dalğa funksiyalarını və diskret enerji spektrlərini təyin etdik.

Bu hallarda da, nəzərdən keçirilən sistem diskret enerji spektrinə malikdir və müvafiq dalğa funksiyaları psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə edilir.

[1] *Sh.M. Nagiyev, C. Aydın, A.İ. Ahmadov, Sh.A. Amirova*. Eur. Phys. J.Plus., 2022, 137:540

[2] *Sh. M. Nagiyev*. Theor. Math. Phys. 2022, 210: 1, 121-134.

[3] *G. Bastard*. Wave Mechanics Applied to Semiconductors (Les Editions de Physique, CNRS, 1988.

[4] *D.J. Ben Daneil, C. B. Duke*. Phys. Rev., 152:2, 1966, 683–692.

[5] *C. Quesne and V. M. Tkachuk*. J. Phys. A: Math. Gen., 2004, 37, 4267.

[6] *Shi-Hai Dong, Guo-Hua Sun.* M. Lozada-Cassou. Phys. Lett. A 340, 2005, (1-4), 94-103.

[7] *E.İ. Jafarov, Sh. M Nagiyev, R. Oste and J. Van der Jeugt*. J. Physics A: Math.Theor. 53, 485301, 2020.

[8] *O. von Roos*. Phys. Rev. B, 1983, 27, 7547.

[9] *F. Nikiforov and V. B. Uvarov*. Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications (Birkhauser, Basel 1988.

[10] *R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Swarttouw*. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues, (Springer, Berlin 2010.

[11] *H.I. Ahmadov, C. Aydin, N.SH. Huseynova and O. Uzun*. Int. J. Mod. Phys. E,vol. 22, no. 10, 1350072, 2013.

[12] *E.I. Jafarov, Sh.M. Nagiyev and A.M. Jafarova*. Reports Math. Phys., 2020, 86, 25.

[13] *E. I. Jafarov and S. M. Nagiyev*. Mod. Phys. Lett. A 36, 2021, N.29, 2150206.

[14] *Jiang Yu, Shi-Hai Dong, Guo-Hua Sun*. Physics Letters A 322(5-6), 290-297, 2004.

[15] *C. Quesne*. J. Phys. A: Math. Gen. 21, 3093 1988.

[16] *E. I. Jafarov, J. Van der Jeugt.* Eur. Phys. J. Plus. 2021, 136:758.

[17] *H. Rajbongshi*. Theor. Math. Phys., 2015, 184, 996.

[18] *E. I. Jafarov and Sh. M. Nagiyev*. Theor. Math. Phys. 207: 1, 447-458, 2021.

Sh. A. Amirova

OSCILLATOR WITH A POSITION-DEPENDENT MASS IN A HOMOGENEOUS GRAVITATIONAL FIELD: $\Omega^2 = 0$ AND $\Omega^2 < 0$ CASES

The model with a position-dependent non-relativistic quantum linear harmonic oscillator in an external homogeneous gravitational field was studied for values of the renormalized frequency $\Omega^2 = 0$ and $\Omega^2 < 0$ and the generalized free Hamiltonian, the corresponding Schrödinger equation was exact solved. The wave functions and energy spectrum are found. Wave functions are expressed by pseudo-Jacobi polynomials.

Ш. А. Амирова

ОСЦИЛЛЯТОР С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ КООРДИНАТЫ МАССЫ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ: $\Omega^2 = 0$ И $\Omega^2 < 0$ СЛУЧАЕВ

Исследована модель нерелятивистского квантового линейного гармонического осциллятора с зависящей от координаты массой во внешнем однородном гравитационном поле для значений перенормированной частоты $\Omega^2 = 0$, $\Omega^2 < 0$ и обобщенного свободного гамильтониана, соответствующее уравнение Шредингера было решено точно. Найдены волновые функции и энергетический спектр. Волновые функции выражаются полиномами псевдо-Якоби.

Qəbul olunma tarixi: 21.11.2022