QAPALI MƏKANIN LAQRANJ FUNKSİYASINA KEÇİD MEYARI

T.R. MEHDİYEV[1], R.H. NAYIMBƏYOVA[1], İ.F. YUSİBOVA[1], Ş.N. ƏLİYEVA[1,2]

[1]Elm və Təhsil Nazirliyi Fizika İnstitutu, H. Cavid pr.131, AZ-1073, Bakı, Azərbaycan

[2]Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, Bakı, AZ-1010 Azərbaycan

Qapalı fəzada strukturlaşdırılmış maddə üçün hərəkətin Laqranjın prinsipinin ümumiləşdirilməsi nəzərdən keçirilir. Göstərilmişdir ki, mühitin daxili quruluşu və cavab reaksiyası mövcud olduqda maddənin nöqtəvi təsvirinə əsaslanan ənənəvi $L(x,\dot{x})$ Laqranj fiziki mənasını itirir. Klassik Laqranj hərəkətindən Riman hərəkətinə keçid üçün meyar formalaşdırılır: fəzanın xüsusiyyətləri materiyanın vəziyyətindən asılı olduqda, metrика sahə ilə eyni səviyyədə dinamikaya daxil edilir. LDS modelində reallaşdırılmış forma və sahənin vahid həndəsi sistem kimi təzahür edən həndəsi cəhətdən özünə uyğun təsvir təklif olunur.

Açar sözlər: Laqranjian, Feyman inteqralı, effektiv hərəkət
DOI:10.70784/azip.2.2025415

GİRİŞ

Feynman trayektoriya inteqralına əsaslanan müasir kvant nəzəriyyəsi hissəciklərin və sahələrin ehtimal olunan davranışını uğurla təsvir edir. Riçard Feynmanın təklif etdiyi trayektoriya inteqralı ideyası kvant mexanikasını təmsil etməyin ən üstün yollarından birinə çevrilmişdir. Dalğa funksiyasının evalusiyasını Şrödinger tənliyi vasitəsilə təsvir etmək əvəzinə, fəza-zaman daxilində hissəciyin hər mümkün trayektoriyasının hissəciyin A nöqtəsindən B nöqtəsinə keçidinin ümumi ehtimalına töhfə verdiyi güman edilir. Bu qatqının böyüklüyü müvafiq trayektoriya boyunca hesablanmış hərəkətin eksponensialı ($\hbar$ vahidlərində) ilə müəyyən edilir. Bu yanaşma, variasiya prinsipinə əsaslanaraq, Laqranj formalizasiyasını kvant superpozisiyası anlayışı ilə birləşdirir. Lakin, bu metodun əsası klassik Laqranjian — materiyanın nöqtəyə qədər sadələşdirildiyi, məkanın isə passiv fon kimi qəbul edildiyi nöqtəvi, struktursuz obyektin hərəkəti üçün formuludur. Laqranjian maddənin daxili quruluşundan və trayektoriyanın keçdiyi mühitin xüsusiyyətlərindən asılı deyil. Bu təsvirdə kvant obyektinin daxili halları arasındakı fərq yox olur və bütün mümkün yollar ekvivalentdir. Bundan əlavə, nöqtəvi trayektoriya fərziyyəsinin özü maddənin dalğa təbiəti ilə ziddiyyət təşkil edir və qapalı və ya əyri fəzalarda problemli olur. Buna görə də, Feynman inteqralı əvvəlcə fərz ediləndən daha az universaldır: onun yüksək əyri həndəsələrə - məsələn, Riman səthlərinə - və ya strukturlaşdırılmış həyəcanlanmalara malik sistemlərə tətbiqi fundamental modifikasiya tələb edir.

Feynman yanaşmasından [1-3] əlavə, hərəkətin kvant nəzəriyyəsinin başqa ifadələri də mövcud idi. Şvinqerin mənbə funksional metodu [4] xarici sahələrdəki dəyişikliklər vasitəsilə amplitudaları hesablamaq üçün alternativ bir üsul təqdim etdi və bu standart kiçik dəyişiklik metodları ödənmədikdə, qeyri-xətti hesablamalar üçün uyğun olan Şvinqer-Dayson tənliklərinə gətirib çıxardı. Lakin, bu yanaşma Feynman diaqramlarından daha az anlaşılan oldu.

[5] işində əyrilik üzrə kovariant genişlənməyə və istilik-nüvə texnikasının istifadəsinə əsaslanaraq effektiv hərəkətin konstruksiyası hazırlanmışdır. Barvinski və Vilkovski [6] göstərmişlər ki, kalibrləmə sabitliyindən asılılıq sahələrin parametrləşdirilməsi ilə əlaqəlidir: Massiv təbəqədən xaricdə, effektiv hərəkət öz arqumentlərinin ölçü-invariant funksiyası deyil. Parametrik asılılığın mənbəyi, yaradan funksionalın təyinində mənbə ilə sahə arasındakı əlaqənin kovariant olmamasıdır.Qeyd etmək vacibdir ki, kalibrləmənin fiksasiyadan aslılığı və kalibirləşmə invariantlığının pozulması - iki fərqli problemdir.

Kalibrləmə invariyantlığının pozulması fon sahəsi metodundan istifadə edilməklə [7, 9] aradan qaldırıla bilər. Lakin kalibrləmə sabitliyindən asılılıq fon sahəsi formalizmində də tamamilə yox olmur. Buna baxmayaraq, effektiv hərəkət hesablamalar üçün etibarlı vasitə olaraq qalır və onun formalizmi istifadədən imtina etməyi və ya əvəzləməni tələb etmir.

[10, 11] işlərində göstərilmişdir ki, tam ölçü-invariant effektiv hərəkətin qurulması üçün sahə fəzasının həndəsi strukturunu nəzərə almaq və üzərinə affin strukturu (ləğv edilən əlaqə) daxil etmək lazımdır. Vilkoviskinin konstruksiyası de-Vitt [10, 11] tərəfindən təkmilləşdirilmiş və ölçü fiksasiyasından asılı olmayan, ölçü invariantlığını qoruyan sonsuz effektiv hərəkətlərin yaradılmasına gətirib çıxarmışdır.

Kvant amplitudalarının əyri fon ilə qarşılıqlı hərəkətlərini nəzərə alaraq qapalı dövrələr üzrə birölçülü inteqrallar kimi hesablandığı dünya xətti formalizmi [12] də nəzərə alınmalıdır.

Bütün bu yanaşmaların kvant obyektinin dinamikasına həndəsənin də daxil edilməsinin yönəlməsinə baxmayaraq, həndəsə məkan-zamanın xarici metrikası ilə müəyyən edildi. Məkan dinamikada daha aktivdi.

Bunun əksinə olaraq, bu məqalədə trayektoriya həndəsi xətt kimi mövcudluğunu dayandırdığı və özünü formalaşdıran metrikanın elementinə çevrildiyi bir meyarı yaradır. Hərəkət hissəciyin yolu boyunca deyil, fəzanın formasının konfiqurasiyaları boyunca minimuma endirilir. Bu yanaşma Landau-deVitt-Barvinski məktəbinin [13, 4–5] ideyalarına əsaslanır və klassik Laqranj təsvirindən maddə və həndəsənin dinamikasının ayrılmaz olduğu Riman hərəkətinə keçidə imkan verir.

LAQRANJ PRİNSİPİNİN MƏHDUDİYYƏTLƏRİ

Laqranj prinsipi hərəkətin minimumlaşdırılmasına əsaslanır və seçilmiş trayektoriyanın mövcudluğunu

131, H.Javid ave, AZ-1073, Baku
Institute of Physics
E-mail: jophphysics@gmail.com

nəzərdə tutur. Paylanmış həyəcanlanmaya malik sistemlərdə trayektoriya təsviri dalğa sahəsinin kəsilməzliyini pozur.

Feynman inteqralı $e^{iS/\hbar}$ çəkili bütün mümkün yolları cəmləyir, statistik tamlığı bərpa edir, lakin fiziki tamlığı bərpa etmir: materiya daxili quruluşsuz qalır, fəza isə passiv fondur [1-3].

Klassik Laqranj L(x, x˙) [14] kinetik və potensial enerjilər arasındakı fərqi əks etdirir, lakin materiyanın daxili quruluşu haqqında heç bir məlumat daşımır və hərəkətin mühütün strukturu dəyişdirmədiyi müddətcə ödənilir. Lakin, real sistemlərdə - ferrit domenlərindən kvant sahə kondensatlarına qədər – həyəcanlanma sıxlığın, spin quruluşunun və lokal metrikanın dəyişməsi ilə ayrılmaz şəkildə bağlıdır. Açıq Evklid fəzasında *x(t)* xarici müşahidəçiyə nəzərən nöqtənin koordinatını təmsil edir. Qapalı fəzada fon yoxdur və nöqtə anlayışı mənasını itirir: sistemin xüsusiyyətlərinin təyin edilə biləcəyi heç bir xarici mövqe yoxdur, çünki fəzanın özü sahə hallarının cəmidir. Burada hərəkət fəza "vasitəsilə" baş vermir - o, fəzanın özünü qurur. Nəticə etibarilə, *x* koordinat deyil, strukturun halını - metrikanın və sıxlığın lokal konfiqurasiyasını əks etdirir.

$\mathcal{D}x$ üzrə inteqral, hər biri sahənin müəyyən bir vəziyyətinə uyğun gələn Riman səthinin mümkün formaları çoxluğu üzərindəki inteqral kimi başa düşülməlidir. Beləliklə, qapalı fəzada trayektoriya, əvvəlcədən mövcud olan bir səhnə üzərindən cismin hərəkəti deyil, həndəsənin öz-özünə qurulması prosesidir. Laqranjianın yalnız enerjilərin fərqi və ya cəmi kimi təyin olunmadığını vurğulamaq vacibdir. Onun forması konkret bir sistemin qanunlarına əsaslanan variasiya prinsipindən irəli gəlir. Nyuton mexanikası sadəcə $L=T-V$ olduğu xüsusi bir haldır. Nöqtəvi təsvirdən kənara çıxmaq üçün materiya və həndəsənin qarşılıqlı aktiv olduğu ümumiləşdirilmiş Laqranjian tələb olunur [4, 5, 12]:

$$L = L(g_{\mu\nu}, \phi, \nabla_\mu \phi, \rho, \sigma, \Omega, \ \dots) \qquad (1)$$

$$Z = \int e^{iS[x]/\hbar}\, \mathcal{D}x \qquad (2)$$

Burada ρ — mühitin sıxlığı, σ onun struktur reaksiyası, Ω — daxili struktur parametrləridir və $g_{\mu\nu}$— metrikası fon deyil, qarşılıqlı hərəkətin dinamik iştirakçıdır.

Qapalı fəzaya keçid, hərəkət yalnız sahənin halından deyil, həm də metrikanın özünün formasından asılı olmağa başladıqda baş verir. Struktursuz materiyanın hüdudunda Feynmanın trayektoryaya görə inteqralı

$$Z = \int e^{iS[x]/\hbar}\, \mathcal{D}x \qquad (3)$$

passiv həndəsəyə malik bir sistemi təsvir edir. Qapalı fəzada (3) metrikanın vəziyyətləri üzərində inteqrala ümumiləşdirilir:

$$Z = \int e^{iS[g_{\mu\nu},\phi]/\hbar}\, \mathcal{D}g_{\mu\nu}\, \mathcal{D}\phi \qquad (4)$$

Beləliklə, keçid meyarları aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər: Laqranjian hərəkət mühitin strukturunu "hiss etmədiyi" müddətdə tətbiq olunur; metrika materiyanın hal funksiyasına çevrildikdə Riman təsviri tələb olunur.

Qeyd edək ki, qapalı Riman fəzasında trayektoriya inteqralı əyrilikdən asılı olmalıdır; inteqralın ölçüsü metrikanın determinantını ehtiva edir və hərəkət eksponensialı- lokal həndəsə ilə şərtlənən faza əlavələridir [15-16, 7]. Əyriliyin böyük qiymətlərində Z funksional faktorlaşmasını itirir: inteqral həndəsi yaddaşın funksionalına çevrilir – bu isə Riman dinamikasının ilk əlamətidir [5]. İnteqralın hər trayektoriyası Riman səthinin elementinə çevrilir: yolların interferensiyası metrikanın lokal əyriliyini əmələ gətirir [7,8]. Nəticədə, trayektoriyaya görə inteqral sırf ehtimal xarakteri daşımır və konstruktiv məna qazanır – o sahənin strukturunu formalaşdırır.

Dalğa funksionalı Z[g] fazaları elə paylayır ki, topoloji yük saxlamaqla səth minimal həndəsi enerjiyə malik olsun [9].

Hərəkətin aktiv metrikaya nisbətən variasiya kimi təyin olunduğu, forma və sahənin öz-özünə uyğun bir sistem təşkil etdiyi LDS modelini [10] nəzərə alsaq, bu modelin keçid meyarını reallaşdırdığı və Landau-Barvinski məktəbinin kovariant effektiv hərəkət metodlarını inkişaf etdiyini iddia etmək olar. LDS modelində hərəkət aşağıdakı formaya malikdir:

$$S = \int \mathcal{L}\big(g_{\mu\nu}, \Phi, \nabla_\mu \Phi, R_{\mu\nu}, \rho, \sigma, \Omega\big) \sqrt{|\,g\,|}\ d^4x \qquad (5)$$

burada Φ — ümumiləşdirilmiş həyəcanlanma, $R_{\mu\nu}\}$ — mühitin daxili rezonansı ilə əlaqəli Riman əyrilik tenzorudur. Tarazlıq trayektoriyalar üzrə ortalama yolu ilə deyil, metrik və sıxlıq paylanmasının öz-özünə həndəsi uyğunluğu vasitəsilə əldə olunur. Bu təsvir materiya və fəza arasındakı fərqi aradan qaldıran vahid hərəkət funksiyasının təzahürüdür.

Müstəvi fəzada trayektoriyaya görə inteqral mümkün yolların statistik paylanmasını təsvir edir, qapalı fəzada hər bir trayektoriya Riman səthinin elementinə çevrilir. Əyrilikdən asılı olan hərəkət funksionalı həndəsi superpozisiya əmələ gətirir və burada hər bir yol metrikanın lokal əyriliyinə töhfə verir.

Nəticədə, trayektoriyaya görə inteqralı konstruktiv məna qazanır: o, sadəcə keçid amplitudasını hesablamır, həm də sahənin strukturunu formalaşdırır.

$$Z[g] = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int L(x,\dot{x},g_{\mu\nu},R)\,dt} \sqrt{|\,g\,|}\ \mathcal{D}x \Rightarrow \\ R(x) \ = \ R_0 + \delta R[x] \qquad (6)$$

Burada δR[x] sahənin dayanıqlı fazalarına uyğun trayektoriyalar toplusudur. Beləliklə, əyri fəzada trayektoriyaların interferensiyası solitonun öz-özünə formalaşması mexanizmidir: Z[g] dalğa funksionalı fazaları elə paylayır ki, alınan səth topoloji yükü qorumaqla minimal həndəsi enerjiyə malik olsun. Bu şəkildə soliton fəzadakı obyekt deyil, trayektoriyaların koherent superpozisiya vəziyyətindəki fəzanın özüdür. Beləliklə, inteqralın Feynman forması ilə Riman həndəsəsi arasında təbii əlaqə yaranır: trayektoriyalar səthi doldurur, fazalar onun əyriliyini müəyyən edir, inteqral formanın özünü yaradır. Bu, LDS modelində soliton profilinin həmişə metrikanın sıxlığı və əyrilik paylanması ilə korrelyasiya etməsini izah edir: forma bütün mümkün hərəkətlərin cəmindən yaranır və hazır formaya uyğun hərəkət etmir.

NƏTİCƏ

Klassik Laqranj nəzəriyyəsi, fəza xarici müşahidəçi olaraq qaldığı müddətcə tətbiq olunur. Metrikanın materiyaya reaksiya verdiyi qapalı fəzada Laqranj formalizmi təbii olaraq Riman hərəkətinə ümumiləşdirilir.

Trayektroriya üzrə inteqral formal cəm olmaqdan çıxır və forma quruluşu prosesinə — materianın həndəsi özünüifadəsinə çevrilir [16, 17, 19, 10]. Feynman inteqralı mümkün yolları cəmləyir, Riman inteqralı isə bu yolların həndəsəyə çevrildiyi bir səth əmələ gətirir. Hərəkətin heç bir struktur hiss etmədiyi yerdə- statistika mövcuddur. Məkan öz şəklini çəkdiyi yerdə - forma fizikası başlayır.

Solitonun əmələ gəlməsini təyin edən tezlik təsvirlərində həyəcanlanma dalğa vektoru fəzasında paylanır və onun səthindəki dinamikanın trayektoriyası *k*-fəzasında spiral quruluş əldə edir. Belə trayektoriya maddi nöqtənin hərəkətini deyil, lokal həndəsəni təyin edən sahənin faza evalusiyasını əks etdirir. Bu rejimdə Laqranj prinsipi əhəmiyyətini itirir, çünki hərəkət inteqralı koordinat üzərində deyil, faza (tezlik) strukturu üzərindən hesablanmalıdır. Beləliklə, Riman hərəkəti fəzada hərəkəti deyil, fəzanı özünü dalğa vektorlarının dayanıqlı spiral konfiqurasiyası kimi təsvir edir.

---

[1] *R.P. Feynman and A.R. Hibbs* Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw Hill, New York, 1965.

[2] Path Integrals in Quantum Mechanics Dennis V. Perepelitsa MIT Department of Physics 70 Amherst Ave. Cambridge, MA 02142.

[3] *R.P. Feynman*. Rev. Mod. Phys. 20, 367, 1948.

[4] *A.O. Barvinsky, A.E. Kalugin.* Notes on peculiarities of the Schwinger–DeWitt technique, arXiv:2408.16174, 2024.

[5] *A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky.* Covariant perturbation theory. 2: Second order in the curvature. General algorithms. Nucl.Phys.B, Vol.333, P.471-511, 19

[6] *G.A. Vilkovisky.* The Gospel according to DeWitt. // in "Quantum theory of gravity",ed. S.M, Christensen (A.Hilger, Bristol, 1984) p.169.

[7] *I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro.* Effective Action in Quantum Gravity, IOP Publishing Ltd., Bristol, 1992.

[8] *De Witt B.* Quantum theory of gravity.l. The canonical theory. Phys.Rev., Vol.160, P.1113-1148, 1967.

[9] *De Witt B.* Quantum theory of gravity.II. The manifestly covariant theory. Phys.Rev., Vol.162, P.1195-1239,1967.

[10] *De Witt B.S.* The effective action. in "Quantum Field Theory and Quantum Statistics", ed. I.A. Batalin, *C.J. Isham and G.A. Vilkovisky* (Adam Hilger, Bristol, 1987).

[11] *G. Kunstatter*. The patch integral for gauge theories: A geometrical approach. Class. Quant. Grav., Vol.9, P.157-168, 1992.

[12] *F. Bastianelli*, Path Integrals in Curved Space and the Worldline Formalism, arXiv:hep-th/0508205 (2005).

[13] *De Witt B.* Relavity, Group and Topology II, B.S. DeWitt and R. Stora (Eds.), Elsevier, Amsterdam, 1984, 381pp.3.

[14] *Alain Jean Brizard.* An Introduction to Lagrangian Mechanics, World Scientific, 2008, Science, 259 p.

[15] *L. Parker*, Path Integrals in Curved Space-Time, Phys. Rev. D 22, 1922, 1980; 17. Де Витт В.С. Динамическая теория групп и полей, - М., Наука, 1987.-288 cc.

[16] *L. Parker.* Path Integrals in Curved Space-Time, Phys. Rev. D 22, 1922, 1980.

[17] *P.I.C. Caneda et al*. Reduced Quantum Electrodynamics in Curved Space, Phys. Rev. D 103, 065010, 2021.

[18] *T.R. Mehdiyev, Sh.N. Aliyeva.* Model of LDS particles in closed space geometry AJP Fizika E 2025 03 en p.40-49, DOI:10.70784/azip.1.2025340

T.R. Mehdiyev, R.H. Nayimbayova, I.F. Yusibova, Sh.N. Aliyeva

CRITERION FOR THE TRANSITION TO THE LAGRANGIAN OF A CLOSED SPACE

A generalization of the Lagrangian action principle for structured matter in a closed (self-acting) space is considered. It is shown that the traditional Lagrangian L(x, x˙), based on a point representation of matter, loses its physical meaning in the presence of internal structure and environmental response. A criterion is formulated for the transition from the classical Lagrangian to the Riemannian action: when the properties of space depend on the state of matter, the metric is included in the dynamics along with the field. A geometrically self-consistent description is proposed, implemented in the LDS model, where the form and field act as a single geometric system.

Qəbul olunma tarixi: 19.11.2025